Національний технічний університет України

"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Міністерство освіти і науки України

Інституту математики

Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

ГОРБАЧУК ВОЛОДИМИР МИРОСЛАВОВИЧ

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ НА НЕСКІНЧЕННОМУ ІНТЕРВАЛІ

Спеціальність 01.01.01 – математичний аналіз

111 – Математика

Подається на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _______ В.М. Горбачук

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Горбачук В.М. Властивості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – "Математичний аналіз"(111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язків диференціальних рівнянь на нескінченному інтервалі (всій числовій осі або півосі), коефіцієнтами яких є необмежені оператори у банаховому просторі, а саме: описанню розв'язків всередині заданого інтервалу та вивченню їх поведінки при наближенні до його кінців; з'ясуванню можливості продовження розв'язку до цілої вектор-функції скінченного порядку і скінченного типу; питанням коректної розв'язності задач Коші, Діріхле та Неймана; прямим і оберненим теоремам наближення розв'язків таких рівнянь цілими розв'язками експоненціального типу; установленню критеріїв рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості рівняння еліптичного типу; відшуканню максимальних щільних у вихідному просторі множин, на яких розв'язок абстрактного параболічного рівняння можна подати у вигляді степеневого ряду (проблема Колмогорова) або експоненціальної границі (проблема Хілле) від генератора відповідної півгрупи; питанням розв'язності в деяких класах аналітичних вектор-функцій диференціальних рівнянь у неархімедовому банаховому просторі.

Більшість із зазначених задач належить до теорії абстрактних лінійних диференціальних рівнянь – одного з основних підрозділів сучасного функціонального аналізу, який, як відомо, охоплює чимало видів рівнянь з частинними похідними. Початок цієї теорії був покладений роботами Е. Хілле та К. Іосіди (1948), в яких одержано перші теореми існування розв'язків задачі Коші для рівняння вигляду $y' = Ay$ з необмеженим оператором A у банаховому просторі, сформульовані в термінах теорії півгруп операторів. К. Іосіда, а невдовзі й В. Феллер пов'язали ці дослідження півгруп з різними задачами для рівняння дифузії. Паралельно з цим Е. Хілле, а потім Р. Філліпс розпочали побудову теорії абстрактної задачі Коші для рівнянь у банаховому просторі. На початку 50-х років минулого ст. П. Лакс, А. Мільгрем і В. Лянце застосували півгрупові методи до дослідження різних класів параболічних рівнянь. Істотний крок вперед у загальній теорії був зроблений Т. Като, який розглянув рівняння

$y'(t) = A(t)y(t)$ зі змінним операторним коефіцієнтом. У своїх подальших роботах названі вчені створили міцний фундамент для розвитку теорії диференціальних рівнянь з необмеженими операторами, яка з тих пір стала самостійною галуззю досліджень, привернувши увагу багатьох математиків, в тому числі С. Агмона, В. Арендта, А. Балакрішнана, С. Бетті, М. Вішіка, Дж. Гольдстейна, Ю. Далецького, С. Ейдельмана, Г. Комацу, М. Красносєльського, С. Крейна, О. Ладиженської, Дж. Ліонса, Ю. Любича, Л. Ніренберга, А. Пазі, П. Соболєвського, М. Соломяка, Х. Танабе та багатьох ін. При цьому основним її математичним апаратом була і залишається теорія півгруп. Оцінюючи її місце в математиці, Е. Хілле у своїй монографії (1948) писав: "Я вітаю півгрупу, де б її не зустрів, а зустрічається вона скрізь".

Останнім часом як предмет, так і сфера застосувань теорії абстрактних диференціальних рівнянь і тісно пов'язаної з нею теорії півгруп значно розширились і стали об'єктами досліджень таких провідних фахівців, як, наприклад, С. Ангенент, В. Васільєв, С. Гефтер, М. Горбачук, В. Городецький, М. Городній, В. Деркач, Ф. Гуі Зонг, С. Івасишен, Дж. Кісінський, Ф. Клемент, Ю. Кондратьєв, А. Кочубей, О. Кутовий, Ю. Латушкін, В. Михайлець, Ж. Неервен, Б. де Пахтер, С. Піскарьов, Х. Фатторіні, Х. Хейманс та ін. Можлива область застосувань цих теорій досить обширна і включає, крім теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, математичну фізику, теорію апроксимації, марковські еволюції частинок, динаміку руху рідини тощо.

У розділі 1 наведено (підрозділи 1.1, 1.2) деякі твердження з теорії півгруп, необхідні у подальшому і детально викладені в [1 - 8]. Основний його результат полягає у знаходженні для довільної C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ лінійних операторів з генератором A у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ максимальних щільних у ньому підпросторів $\mathfrak{B}_1$ та $\mathfrak{B}_2$, на елементах x яких ця група зображується у вигляді степеневого ряду або експоненціальної границі від оператора A, тобто розв'язанні проблем Колмогорова і Хілле.

У підрозділі 1.3 показано, що проблема Колмогорова завжди має розв'язок, а множина $\mathfrak{B}_1$ є не що інше, як простір $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ цілих векторів оператора A. Доведено, що орбіти $U(t)x$ розглядуваної групи на цілих векторах її генератора допускають продовження до цілої вектор-функції $\exp(zA)x := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}A^n x$. Знайдено умови на вектор $x \in \mathfrak{B}_1$, за яких це продовження має скінченний порядок росту і скінченний тип, і зв'язок між ними і типом та порядком x відносно оператора A.

У підрозділі 1.4, вивчаються деякі класи аналітичних вектор-функцій, серед яких особливу роль відведено просторам $\mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{B})$ і $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ локально аналітичних та, відповідно, цілих $\mathfrak{B}$-значних функцій, і наведено умови на вектор x, за яких для щільно заданого замкненого оператора A в $\mathfrak{B}$ вектор-функція $\exp(zA)x$ є локально аналітичною у просторі аналітичних векторів оператора A або цілою у класі Жевре $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ з $\gamma < 1$ (просторі $\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$ з $\gamma \leq 1$). Показується також, що якщо A генерує обмежену аналітичну півгрупу $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$, то сім'я $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює C_0-групу у цих просторах, яка збігається з e^{tA} при $t \geq 0$ і з $\left(e^{-tA}\right)^{-1}$ при $t < 0$.

Підрозділ 1.5 дає відповідь на питання, пов'язане з проблемою Хілле. Показано, що для генератора A C_0-групи експоненціальна границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{tA}{n}\right)^n x$ існує тоді і тільки тоді, коли x – цілий вектор оператора A, і вона збігається з сумою степеневого ряду для $\exp(zA)x$, а отже, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$. У цьому ж підрозділі результат щодо зображення C_0-групи експоненціальною границею від її генератора узагальнюється на випадок довільного замкненого, щільно заданого в $\mathfrak{B}$ оператора A. Наведено умови на оператор A, за яких множина $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ є щільною в $\mathfrak{B}$.

З огляду на застосування до теорії груп, розв'язки проблем Колмогорова і Хілле, підказують шлях до побудови C_0-групи безпосередньо за її генератором. У всіх інших підходах група відновлюється за певними функціями від нього, що ускладнює ситуацію.

Розділ 2 присвячено вивченню структури розв'язків диференціального рівняння вигляду $\left(\frac{d}{dt}-A\right)^m\left(\frac{d}{dt}+A\right)^n y(t) = f(t)$, $m,n\in\mathbb{N}$, $n+m\geq 1$, на всій числовій осі, де A – генератор C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$, $f(t)$ – неперервна на $(-\infty,\infty)$ $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція. Конкретні реалізації простору $\mathfrak{B}$, оператора A та m,n охоплюють чимало класів рівнянь з частинними похідними у різних функціональних просторах.

У підрозділі 2.1 розглядаються однорідні параболічне й обернено параболічне рівняння $y'(t) \mp Ay(t) = 0$ в $\mathfrak{B}$ та однорідне рівняння другого порядку $y''(t) - By(t) = 0$, де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$. Описуються розв'язки таких рівнянь на $(-\infty,\infty)$ і показується, що будь-який розв'язок кожного з цих рівнянь допускає продовження до цілої вектор-функції у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Наводяться умови, необхідні й достатні для того, щоб розв'язок належав до підпростору $\mathfrak{A}_c^{\rho}(\mathfrak{B})$ цілих вектор-функцій порядку не вище ρ і скінченного степеня відносно цього ρ, а також умови щільності множини таких розв'язків у просторі усіх розв'язків.

У підрозділі 2.2 досліджується абстрактне однорідне m-гармонічне рівняння $\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = 0$, де B – позитивний оператор в $\mathfrak{B}$. Знайдено формулу для його розв'язків всередині $(-\infty, \infty)$ і показано, що будь-який розв'язок може бути продовжений до цілої вектор-функції у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(-B^{1/2})$. Більш того, для розв'язків знайдено аналоги принципу Фрагмена-Ліндельофа і теореми Ліувілля.

У підрозділі 2.3 розглядається неоднорідне m-гармонічне рівняння. Встановлюються умови на праву частину, за яких існує єдиний обмежений узагальнений розв'язок і цей розв'язок є класичним. Дається формула для його зображення.

Підрозділ 2.4 присвячено більш детальному вивченню гармонічного рівняння $(m = 2)$ в $\mathfrak{B}$.

У підрозділі 2.5 розглядається наведене вище загальне рівняння з $f(t) \equiv 0$ і $m \neq n$. Описуються усі його розв'язки на $(-\infty, \infty)$ і показується, що будь-який розв'язок допускає продовження до цілої вектор-функції у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і для розв'язків діють аналоги теорем Фрагмена-Ліндельофа та Ліувілля.

У розділі 3 розглядається рівняння $y'(t) + Ay(t) = 0,\ t \in [0, \infty)$, де A – невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Доводяться прямі й обернені теореми наближення його слабких розв'язків розв'язками з множини S_0 цілих розв'язків експоненціального типу, які встановлюють взаємно однозначну відповідність між степенем гладкості розв'язку $y(t)$ і швидкістю прямування до нуля його найкращого наближення $\mathcal{E}_r(y)$ розв'язками з S_0, тип яких не перевищує r. Таке саме питання розглядається і для гіперболічного рівняння.

У підрозділі 3.1 описуються усі слабкі розв'язки наведеного параболічного рівняння в $\mathfrak{H}$. Даються умови, необхідні й достатні для того, щоб слабкий розв'язок допускав продовження до цілої вектор-функції експоненціального типу. Доводяться прямі й обернені теореми наближення довільного слабкого розв'язку розв'язками з S_0. Істотну роль при цьому відіграє розвинутий в [9] операторний підхід до задач апроксимації.

У підрозділі 3.2 знайдено зв'язок між найкращим наближенням $\mathcal{E}_r(y)$ розв'язку $y(t)$ розглядуваного параболічного рівняння і його k-им модулем неперервності $\omega_k(t, y)$ (аналог відомої теореми Джексона).

Підрозділ 3.3 установлює співвідношення еквівалентності між поведінкою при $r \to \infty$ найкращого наближення $\mathcal{E}_r(y)$ слабкого розв'язку рівняння та його включенням до певного класу Жевре типу Рум'є або Бьорлінга. Крім того, знайдено умови в термінах $\mathcal{E}_r(y)$, необхідні й достатні для можливості продовження слабкого розв'язку $y(t)$ до цілої вектор-функції певного скінченного порядку і скінченного типу.

У підрозділі 3.4 результати щодо прямих і обернених теорем поширюються на банахові простори $\mathfrak{B}$, оснащені гільбертовими просторами з позитивною і негативною в сенсі [10-12] нормами. Такі теореми зазвичай формулюються у банаховому просторі, але їх доведення у гільбертовому є простішими.

Підрозділ 3.5 має справу з випадком, коли спектр оператора A дискретний. Тут прямі й обернені теореми наближення слабких розв'язків формулюються в термінах поведінки послідовності власних значень оператора A.

У підрозділі 3.6 результати демонструються на рівняннях з частинними похідними.

Розділ 4 присвячено дослідженню розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі всередині інтервалу $(0, \infty)$ та їх граничних значень. З цією метою для генератора обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ вводяться локально-опуклі простори $\mathfrak{B}_{(+)}(A)$ ($\mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$) основних (підрозділ 4.1) і $\mathfrak{B}_{\{-\}}(A)$ ($\mathfrak{B}_{(-)}(A)$) узагальнених (підрозділ 4.2) векторів оператора A і вивчаються звуження і, відповідно, розширення заданої півгрупи на ці простори. У підрозділі 4.3 розглядається випадок гільбертового простору $\mathfrak{H}$. Доводиться, що вектор-функція $\exp(zA)x$ є цілою в $\mathfrak{H}_{(+)}(A)$ і $\exp(tA)x = e^{tA}x$, якщо $x \in \mathfrak{H}_{(+)}(A)$, тобто $\exp(tA)x$ – розв'язок задачі Коші $y'(t) = Ay(t), t \in (0, \infty); y(0) = x \in \mathfrak{H}_{(+)}(A)$.

Підрозділ 4.4 присвячено дослідженню розв'язків рівнянь $y'(t) \mp Ay(t) = 0$ на півосі $(0, \infty)$, де A – генератор C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$. Підкреслимо, що жодних умов на поведінку $y(t)$ в нулі не накладається (взагалі кажучи, $y(t)$ може бути невизначеним в точці 0). За допомогою введених вище просторів основних і узагальнених векторів оператора A описано усі розв'язки всередині $(0, \infty)$ зазначених рівнянь. Показано також, що за наближені розв'язки задачі Коші у параболічному випадку з початковою умовою $y(0) = x \in \mathfrak{B}$ можна взяти частинні суми експоненціального ряду на векторах послідовності $x_m \in \mathfrak{B}_{(+)}(A) : x_m \to x$ в $\mathfrak{B}$.

У підрозділі 4.5 для рівняння другого порядку $y''(t) - By(t) = 0$ на півосі зі слабо позитивним оператором B в $\mathfrak{B}$ одержано зображення його розв'язків на $(0, \infty)$. Доведено також, що будь-який розв'язок цього рівняння має граничне значення при $t \to 0$ у просторі $\mathfrak{B}_{(-)}(B^{1/2})$ і є аналітичною на $(0,\infty)$ вектор-функцією в $\mathfrak{B}$. Наведено умови, за яких розв'язок допускає продовження до цілої вектор-функції у цьому просторі.

У підрозділі 4.6 досліджуються розв'язки однорідного рівняння вищих порядків з розділу 2 (але вже не на всій осі, а на півосі) у припущенні, що A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. Випадок, коли $m = n$, розглянуто в [13]. Ми описуємо всі розв'язки у випадку $m \neq n$ і доводимо єдиність одержаного для них зображення.

Розділ 5 присвячено вивченню задач Діріхле та Неймана для рівняння $y''(t) - By(t) = 0$ на півосі $(0,\infty)$, де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, і $(n+1)$-разів інтегровної задачі Коші для рівняння $y'(t) = Ay(t), t \in [0,\tau]$, із замкненим в $\mathfrak{B}$ оператором A.

У підрозділі 5.1 для зазначеного рівняння другого порядку досліджується задача Діріхле відшукання для заданого $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(-B^{1/2})$ розв'язку $y(t)$, що задовольняє умову $y(t) \to f$ в $\mathfrak{B}_{(-)}(-B^{1/2})$ при $t \to 0$. Показано, що неоднорідна задача ($f \neq 0$) розв'язується однозначно з точністю до розв'язків однорідної ($f = 0$).

Підрозділ 5.2 має справу з однорідною задачею Діріхле у випадку гільбертового простору і самоспряженого оператора B в ньому. Наведено умову, за якої $y(t) = tg,\ g \in \ker B$, і вивчається залежність вектора g від поведінки $y(t)$ при $t \to \infty$.

У підрозділі 5.3 розглядається питання єдиності розв'язку однорідної задачі Діріхле з позитивним оператором B в $\mathfrak{B}$. Дається умова на поведінку $y(t)$ при $t \to \infty$, яка гарантує його тривіальність. Ця умова уточнюється у випадку нормального позитивного B у гільбертовому просторі.

Підрозділ 5.4 присвячено зображенню розв'язків неоднорідної задачі Діріхле і відшуканню умов її однозначної розв'язності. У випадку слабо позитивного B узагальнюється результат А. Князюка [14, 15] і Дж. Неервена [16] щодо єдиності її розв'язку у класі двічі неперервно диференційовних на $[0,\infty)$ вектор-функцій, що задовольняють умову $\|y(t)\| = o(t)\ \ (t \to \infty),\ y(0) = 0$, на випадок, коли $y(0) = 0$ і $\|y(t)\| = o(t^n)$ з деяким $n \in \mathbb{N}$.

У підрозділі 5.5 знайдено умову на поведінку $\|y(t)\|$ при великих $t > 0$, за якої розв'язок $y(t)$ є обмеженим в околі нескінченно віддаленої точки. Більш того, досліджуються умови, які забезпечують його прямування до нуля на ∞, і за яких спадання є експоненціальним.

У підрозділі 5.6 доводиться можливість застосування методу степеневих рядів для наближення розв'язку однозначно розв'язної неоднорідної задачі Діріхле.

У підрозділі 5.7 розглядається однорідна задача Неймана $\lim\limits_{t\to+0} y'(t) = 0$ у випадку слабо позитивного B в $\mathfrak{B}$ (границя розуміється у просторі $\mathfrak{B}_{\{-\}}(-B^{1/2})$. Знайдено умови, необхідні й достатні для існування розв'язку цієї задачі, і представлено його зображення. Розглянуто також питання єдиності розв'язку.

Розділ 6 присвячено дослідженню стійких розв'язків рівняння $y''(t) - By(t) = 0,\ t \in (0,\infty)$, зі слабо позитивним B в $\mathfrak{B}$. Одержано критерії рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості таких розв'язків. Деякі з них узагальнюють відповідні результати Р. Датка, А. Пазі, М. Крейна [17-19]. У випадку рівномірної, але не рівномірної експоненціальної стійкості з'ясовується зв'язок між порядком спадання розв'язку $y(t)$ при наближенні до ∞ та властивостями його початкових даних.

У розділі 7 розглядається рівняння $y^{(m)}(t) - Ay(\lambda) = f(\lambda)$, де A – замкнений лінійний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ над полем Ω комплексних p-адичних чисел (теорію таких просторів детально викладено в [20-24]) , що має обернений A^{-1}, визначений на всьому $\mathfrak{B}$, а $f(\lambda)$ – локально аналітична в нулі вектор-функція.

Основна увага у підрозділі 7.1 приділяється питанням існування і єдиності розв'язку у класі $\mathfrak{A}_0$ локально аналітичних в околі нуля вектор-функцій, його зображення і неперервної залежності від правої частини.

Головний результат розділу міститься в підрозділі 7.2. Тут доводиться, що якщо $f(\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\lambda^n \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$ з $\rho > s^{1/m},\ s = \sqrt[n]{\|A^{-n}\|}$, де $b_n \in \mathfrak{B},\ \lambda \in \Omega,\ \mathfrak{A}_{\rho^-}$ – простір аналітичних у крузі $\{\lambda \in \Omega : |\lambda|_p < \rho\}$ вектор-функцій, то розглядуване рівняння має єдиний розв'язок у класі $\mathfrak{A}_{\rho^-}$, дається формула для розв'язку і встановлюється його неперервна у просторі $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ залежність від $f(\lambda)$. Більш того, показується, що: 1) якщо $f(\lambda)$ – многочлен, то існує єдиний розв'язок у класі многочленів, при цьому степені $f(\lambda)$ і розв'язку однакові; 2) якщо $f(\lambda)$ – ціла вектор-функція, то рівняння має єдиний цілий розв'язок; 3) якщо $s = s(A^{-1}) = 0$ і $f \in \mathfrak{A}_0$, то існує єдиний локально аналітичний в нулі розв'язок цього рівняння.

У підрозділі 7.3 наведено два способи апроксимації розв'язку. В обох випадках оцінюються похибка наближення і нев'язка (відхил).

У підрозділі 7.4 розглядається задача Коші для зазначеного рівняння з початковими даними $y^{(k)}(0) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1$, яка полягає у відшуканні локально аналітичної в 0 вектор-функції $y(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^n$ зі значеннями в $\mathcal{D}(A)$, що задовольняє рівняння з правою частиною $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\lambda^n \in \mathfrak{A}_0$. Ця задача не завжди розв'язна, а тому шукаються умови на $f(\lambda)$, за яких вона має розв'язок, і якщо це так, то коли цей розв'язок є єдиним. Випадки $m = 1$ та $f = 0$ розглянуто в [25, 26].

Ключові слова: банахів та локально опуклий простори; індуктивна та проективна границі банахових просторів; диференціально-операторне рівняння; цілий вектор замкненого оператора; класи Жевре; C_0-група та C_0-півгрупа лінійних операторів; класичний та слабкий розв'язок; слабо позитивний та позитивний оператори; задачі Коші, Діріхле і Неймана; класи Жевре; найкраще наближення,проблеми Колмогорова і Хілле; банахів простір над полем p-адичних чисел.

Gorbachuk V.M. Characteristics of Solutions of Differential Equations in a Banach Space on an Infinite Interval. – The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.01 . – Mathematical Analysis (111 – Mathematics). – Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the ivestigation of solutions of differential equations on an infinite interval (the whole axis $(-\infty, \infty)$ or the semiaxis $(0, \infty)$), whose coefficients are unbounded operators in a Banach space, namely, to: description of all solutions inside an interval under consideration and studying their behavior when approaching the ends of an the interval; the clarification of possibility of extending a solution to an entire vector-valued function of a finite order and a finite type; the well-posedness of the Dirichlet and Neumann problems; the direct and inverse theorems in the approximation of solutions of such an equation by its entire solutions of exponential type; finding the necessary and sufficient conditions for an elliptic equation to be uniformly or uniformly exponentially stable; a search for a strongly continuous semigroup of the maximal, dense in the initial space sets on which the solution of an abstract parabolic equation can be represented in the form of the exponential power series (Kolmogorov's problem) or the exponential limit (Hille's problem) from the generator of the corresponding semigroup; the solvability in some classes of analytic vector-valued functions of differential equations in a non-Archimedean Banach spaces.

Most of these problems are related to the theory of abstract differential equations, one of the main directions of modern functional analysis, which, as is well-known, covers a number of partial differential equations. The origin of this theory dates from the works of E. Hille and K. Yosida (1948), where the first existence theorems were obtained for the Cauchy problem for the equation $y' = Ay$ with an unbounded operator A, formulated in terms of semigroups of operators. K. Yosida and some later W. Feller connected the investigations of semigroups with various problems for diffusion equation. Parallel with this, E. Hille and then R. Phillips, began the construction of an abstract Cauchy problem theory for equations in a Banach space. In the beginnig of 50th, P. Lax , A. Milgram and V. Ljance applied the semigroup method to investigation of various classes of parabolic equations. An essential step forward in the general theory was made by T. Kato (1953), who considered the equation $y'(t) = A(t)y(t)$ with a variable unbounded operator coefficient. In their further works, E. Hille, K. Yosida, R. Phillips and T. Kato laid a stable foundation for the theory of differential equations with unbounded operator coefficients, which thereafter became a field of independent interest, attracting attention of many mathematicians. S. Agmon, W. Arendt, A. Balakrishnan, S. Batty, M. Vishik, J. Goldstein, Yu. Daletskii, S. Eidelman, G. Komatsu, M. Krasnosel'sky, S. Krein, O. Ladyzhenskaja, J.-L. Lions, Yu. Lyubich, L. Nirenberg, A. Pazy, P. Sobolevsky, M. Solomyak, H. Tanabe and others are among them. The semigroup theory was and remains its main mathematical instrument. Appraising the role of this theory in mathematics, E. Hille wrote in his monograph (1948): "I greet a semigroup wherever I met it, but we come across it everywhere". Last time, both this topic and its application sphere were considerably widened, and they became an investigation subject for a lot of leading scientists such as, for instance, S. Angenent, V. Vasiliev, S. Gefter, M. Gorbachuk, V. Gorodetsky, V. Gorodnii, V. Derkach, F. Gui Zong, S. Ivasishen, J. Kisinski, F. Klement, Yu. Kondratiev, A. Kochubei, O. Kutovyi, Yu. Latushkin, V. Mikhailets, J. van Neerven, B. de Pagter, S. Piskaryov, V. Fomin, H. Heijmans, H. Fattorini, H. Heijmans etc. The possible scope of its applications is extensive enough including the theory of partial differential equations and boundary value problems for them, mathematical physics, the approximation theory, Markov evolution of particles, the motion dynamics of fluid and others.

In Section 1, some assertions of the semigroups theory from the monographs [1 - 8], needed in what follows, are presented (subsections 1.1, 1.2). The main result of this section consists in finding in both the Kolmogorov and Hille problems for an arbitrary C_0-group $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ of linear operators in a Banach space $\mathfrak{B}$ with generator A dense in $\mathfrak{B}$ subspaces $\mathfrak{B}_1$ and $\mathfrak{B}_2$, on whose elements x the orbits $U(t)x$ can be represented in the form of exponential power series or exponential limit from the operator A.

In subsection 1.3, it is proved that the Kolmogorov problem is always solvable, and the set $\mathfrak{B}_1$ coincides with the space $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ of entire vectors of the operator A.It is shown also that the orbits $U(t)x$ of the group under consideration on entire vectors of its generator admit an extension to the entire vector-valued function $\exp(zA)x := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} A^n x$. The conditions on a vector $x \in \mathfrak{B}_1$, under which the extension is of a finite growth order and a finite type are given, and the relation between them and the A-order and A-type of the vector x are established.

In subsection 1.4, some classes of analytic $\mathfrak{B}$-valued vector functions are introduced. The spaces $\mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{B})$ and $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ of locally analytic and entire ones, respectively, perform an important part among them. The conditions on a vector x, under which for a densely defined closed operator A the vector-valued function $\exp(zA)$ is locally analytic in the space of analytic vectors of A or entire in the Gevrey class $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ with $\gamma < 1$ ($\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$ with $\gamma \le 1$), are given. It is shown also that if A generates a bounded analytic semigroup $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$ in $\mathfrak{B}$, then the collection $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ forms a C_0-group in these spaces which coincides with e^{tA} as $t \ge 0$, and with $\left(e^{-tA}\right)^{-1}$, when $t < 0$.

Subsection 1.5 gives an answer to the Hille problem. It is shown there that the exponential limit $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{tA}{n}\right)^n x$ from the generator A of a C_0-group exists if and only if x is an entire vector of the operator A and it coincides with the sum of exponential series for $\exp(zA)x$ (thus, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$) . In this subsection, the result, concerning a representation of a C_0-group in the form of exponential limit from its generator is extended to the case of an arbitrary densely defined closed operator A in $\mathfrak{B}$. The conditions on the operator A are presented under which the set $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ is dense in $\mathfrak{B}$.

From the point of view on applications to the theory of groups, the solutions of Kolmogorov and Hille problems indicate the ways for restoration of a C_0-group directly by its generator. In all the other approaches, it is restored not by the gererator itself, but some functions from it, such, for instance, as its resolvent or a certain approximation, which complicates the renewal process.

Section 2 is devoted to studying the sructure of solutions to operator-differential equations of the form $\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = f(t),\ n, m \in \mathbb{N},\ n + m \geq 1$, on the whole real axis, where A is the generator of a C_0-semigroup in $\mathfrak{B}$, $f(t)$ is a continuous on $(-\infty, \infty)$ $\mathfrak{B}$-valued vector function. The concrete realizations of the space $\mathfrak{B}$, operator A and m, n cover a number of classes of partial differential equations in various function spaces.

In subsection 2.1, we consider a homogeneous parabolic and inversely parabolic equations $y'(t) \mp Ay(t) = 0,\ t \in (-\infty, \infty)$ in $\mathfrak{B}$, and a homogeneous second-order equation $y''(t) - By(t) = 0,\ t \in (-\infty, \infty)$, where B is a weakly positive operator in $\mathfrak{B}$. All the solutions of such equations inside $(-\infty, \infty)$ are described, and it is shown that any solution of each of these equations admits an extension to an entire vector function in the space $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. The necessary and sufficient conditions for a solution to fall into the space $\mathfrak{A}_c^{\rho}(\mathfrak{B})$ of entire vector functions of order not exceeding ρ and a finite degree with respect to this ρ, as well as the conditions for the set of such solutions to be dense in the space of all solutions are given.

In subsection 2.2, an abstract homogeneous m-harmonic equation $\left(\dfrac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = 0,\ t \in (-\infty, \infty)$, with positive operator B in $\mathfrak{B}$ is investigated. The formula for its solutions inside $(-\infty, \infty)$ is given. We show also that every solution can be extended to an entire vector-valued function in the space of entire vectors of the operator $-B^{1/2}$. Moreover, the certain analogues of Phragmén - Lindelöf principle and Liouville theorem are presented.

Subsection 2.3 deals with a nonhomogeneous m-harmonic equation in $\mathfrak{B}$. The conditions on the right hand side, under which there exists a unique bounded generalized solution and this solution is classical, are established, and the formula for its representation is given.

Subsection 2.4 is devoted to detailed study of the harmonic equation ($m = 2$) in $\mathfrak{B}$.

In subsection 2.5, we consider the above more general equation with $f(t) \equiv 0$ and $m \neq n$. We describe all its solutions inside $(-\infty, \infty)$ and show that each of them can be extended to an entire vector function in the space $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$; moreover, the analogoues of Phragmén - Lindelöf's and Liouville's theorems are presented.

In Section 3, the equation $y'(t) + Ay(t) = 0,\ t \in [0, \infty)$, where A is a nonnegative self-adjoint operator in a Hilbert space $\mathfrak{H}$, is considered. The direct and inverse theorems of approximation of its weak solutions with the solutions from the set S_0 of entire solutions of exponential type, which establish a one-to-one correspondence between the smoothness order of a solution $y(t)$ and the degree of convergence to 0 of its best approximation $\mathcal{E}_r(y)$ by solutions from S_0, whose type does not exceed r, are proved. The similar question is discussed for a hyperbolic equation, too.

Subsection 3.1 is devoted to description of all weak solutions to the parabolic equation, mentioned above, in a Hilbert space. The necessary and sufficient conditions for a weak solution to admit an extension to an entire vector-valued function of exponential type are given. The direct and inverse theorems on approximation of an arbitrary weak solution with solutions from S_0 are established. In doing so, the operator approach to approximation problems, developed in [9], plays an important role.

In subsection 3.2, a relation between the best approximation $\mathcal{E}_r(y)$ of a solution $y(t)$ to the above parabolic equation and its kth generalized continuity module $\omega_k(t, y)$ (analog of the well-known Jackson theorem) is determined.

In section 3.3, the equivalence relation between behavior of the best approximation $\mathcal{E}_r(y)$ of a weak solution $y(t)$ to the equation under consideration as $r \to \infty$ and the inclusion of $y(t)$ into a a certain Gevrey class of Roumieu or Beurling type is established. Moreover, the necessary and sufficient conditions in terms of $\mathcal{E}_r(y)$ for a weak solution to admit extension to an entire vector-valued function of a certain finite order and finite type are given.

In subsection 3.4, we show that the above results concerning the direct and inverse theorems can be extended to a Banach space $\mathfrak{B}$ in its rigging by Hilbert spaces with positive and negative in the sense of [10-12] norms. Such theorems are usually formulated in a Banach space, but their proof is more complicated than in a Hilbert one.

Subsection 3.5 deals with the case where the spectrum of A is discrete. In this case, the direct and inverse theorems on approximation of weak solutions are given in terms of behavior of its eigenvalues.

In subsection 3.6, we demonstrate the results on partial differential equations.

Section 4 is devoted to investigation of solutions inside $(0, \infty)$ of differential equations in a Banach space and their boundary values. For this purpose we introduce for the generator A of a bounded analytic C_0-semigroup $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ in $\mathfrak{B}$ the locally convex spaces $\mathfrak{B}_{(+)}(A)$ ($\mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$) of smooth (subsection 4.1) and $\mathfrak{B}_{\{-\}}(A)$ ($\mathfrak{B}_{(-)}(A)$) of generalized (subsection 4.2) vectors of the operator A and study the restrictions and extensions, respectively, of this semigroup to the introduced spaces. In the subsection 4.3, the case of a Hilbert space is considered. We prove that the vector function $\exp(zA)x$ is entire in the space $\mathfrak{B}_{(+)}(A)$ and $\exp(tA)x = e^{tA}x$ if $x \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)$, that is, $\exp(tA)x$ is a solution of the Cauchy problem $y'(t) = Ay(t), t \in (0, \infty); y(0) = x \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)$.

Subsection 4.4 is devoted to analysis of solutions of the equations $y'(t) \mp Ay(t) = 0$ on the semiaxis $(0, \infty)$, where A is the generator of a C_0-semigroup in $\mathfrak{B}$. It should be noted that any conditions on the behavior of $y(t)$ at 0 are not imposed (in general, $y(t)$ needs not to be defined at 0). With the help of the spaces of smooth and generalized vectors of the operator A, introduced above, we describe all the solutions inside $(0, \infty)$ of the equations under consideration. We show also that, it is possible to take the partial sums of the exponential series on a sequence $x_m \in \mathfrak{B}_{(+)}(A) : x_m \to x$ in $\mathfrak{B}$ as an approximate solution of the Cauchy problem for the parabolic equation with initial data $y(0) = x \in \mathfrak{B}$.

In subsection 4.5, for the second-order equation $y''(t) - By(t) = 0$ on the semiaxis $(0, \infty)$ with weakly positive operator B in $\mathfrak{B}$, the representation for its solutions inside $(0, \infty)$ was obtained. It was also proved that any solution of this equation has a boundary value as $t \to 0$ in the space $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$, and it is an analytic on $(0, \infty)$ vector-valued function in the space $\mathfrak{B}$. The conditions were found, under which the solution can be extended to an entire vector function in $\mathfrak{B}$.

In subsection 4.6, the solutions of a high-order homogeneous equation from section 2 are analyzed on the semiaxis (as distinct from the previous case, where it was considered on the whole real axis), in assumption that A is the generator of a bounded analytic C_0-semigroup in $\mathfrak{B}$ and $0 \in \rho(A)$. The case where $m = n$ was considered in [13]. We describe all the solutions in the general situation and prove a uniqueness of the representation obtained for them.

Section 5 is devoted to studying the Dirichlet and Neumann problems for the equation $y''(t) - By(t) = 0$ on the semiaxis $(0, \infty)$, where B is a weakly positive operator in $\mathfrak{B}$, and $(n + 1)$-times integrable Cauchy problem for the equation $y'(t) = Ay(t),\ t \in [0, \tau]$ with closed in $\mathfrak{B}$ operator A.

In subsection 5.1, the Dirichlet problem for this equation of finding for a given $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(-B^{1/2})$ a solution $y(t)$ such that $y(t) \to f\ (t \to 0)$ in the space $\mathfrak{B}_{(-)}(-B^{1/2})$, is solved. It is shown that a nonhomogeneous problem $(f \neq 0)$ is uniquely solvable up to solutions of the homogeneous one $(f = 0)$.

Subsection 5.2 deals with the homogeneous Dirichlet problem in the case of a Hilbert space and a self-adjoint operator B in it. We give the condition, under which $y(t) = tg, \ g \in \ker B$, and investigate how a vector g depends on the behavior of $y(t)$ when $t \to \infty$.

In subsection 5.3, the uniqueness question for a solution of the homogeneous Dirichlet problem with a positive operator B in a Banach space is studied. The condition on the behavior of a solution $y(t)$, when approaching to ∞, for $y(t)$ to be trivial is given. This condition is made more precise in the case of a normal positive B in a Hilbert space.

Subsection 5.4 is devoted to representation of solutions of the nonhomogeneous Dirichlet problem and finding the conditions for its unique solvability. In the case of weakly positive B, the corresponding result of A. Knyazyuk [14, 15] and J. Neerven [16] concerning the uniqueness of a solution in the class of twice continuously differentiable on $[0, \infty)$ vector functions satisfying the condition $\|y(t)\| = o\,(t) \ \ (t \to \infty), \ y(0) = 0$, is extended to the case where $y(0) = 0, \ \|y(t)\| = o\,(t^n)$ with some $n \in \mathbb{N}$.

In subsection 5.5, the condition on behavior of $\|y(t)\|$ for large $t > 0$, under which a solution $y(t)$ is bounded in a neighborhood of a point at infinity, is given. Moreover, the conditions which ensure the convergence of such a solution to 0 as $t \to \infty$, and those, under which this decrease is exponential, are presented.

In subsection 5.6, the possibility to apply the power series method to approximation of the solution of a uniquely solvable nonhomogeneous Dirichlet problem is discussed.

In subsection 5.7, we consider the homogeneous Neumann problem $\lim\limits_{t \to +0} y'(t) = 0$ for the same equation on semiaxis with a weakly positive operator B in $\mathfrak{B}$ (the limit is taken in the space $\mathfrak{B}_{\{-\}}(-B^{1/2})$). The necessary and sufficient conditions for existence of a solution to this problem, and the form of its representation were found. It was considered the uniqueness problem for it, too.

Section 6 is devoted to investigation of stable solutions of the equation $y''(t) - By(t) = 0, \ t \in (0, \infty)$, with weakly positive B in $\mathfrak{B}$. The uniform and uniform exponential stability criteria for such solutions were obtained. Some of them generalize the corresponding results of R. Datko, A. Pazy, M. Krein [17-19]. In the case of uniform, but not uniform exponential stability, the relation between a decrease order of a solution $y(t)$ when approaching to infinity and the properties of its initial data is established.

In Section 7, we consider the equation $y^{(m)}(t) - Ay(\lambda) = f(\lambda)$, where A is a closed linear operator in a Banach space $\mathfrak{B}$ over the field Ω of complex p-adic numbers (for details concerning p-adic numbers we refer to [20-24]) , which has an inverse A^{-1}, defined on the whole $\mathfrak{B}$, and $f(\lambda)$ is a locally holomorphic at 0 vector-valued function.

The main attention in subsection 7.1 is given to the existence and uniqueness problems for a solution of this equation in the class $\mathfrak{A}_0$ of locally holomorphic in a neighborhood of 0 vector-valued functions, its representation and continuous dependence on the right hand side of the equation.

The main result of this section is contained in subsection 7.2. It is proved there that if $f(\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\lambda^n \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$ with $\rho > s^{1/m}$, $s = \sqrt[n]{\|A^{-n}\|}$, where $b_n \in \mathfrak{B}$, $\lambda \in \Omega$, $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ is the space of holomorphic in the circle $\{\lambda \in \Omega : |\lambda|_p < \rho\}$ vector-valued functions, then the considered equation is uniquely solvable in the class $\mathfrak{A}_{\rho^-}$, the formula for the solution is presented and its continuous dependence on $f(\lambda)$ in the space $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ is ascertained. Moreover, we show that: 1) if $f(\lambda)$ is a polynomial, then there exists a unique solution in the class of polynomials and the degrees of the solution and $f(\lambda)$ are the same; 2) if $f(\lambda)$ is an entire vector function, then the equation has a unique entire solution; 3) if $s = s(A^{-1}) = 0$ and $f \in \mathfrak{A}_0$, then there exists a unique locally analytic at 0 solution of this equation.

In subsection 7.3, two methods for approximation of a solution are given. In both cases, the approximation error and residual are estimated.

Subsection 7.4 is devoted to investigation of the Cauchy problem for the above equation with initial data $y^{(k)}(0) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1$, which consists in finding a locally analytic at 0 vector function $y(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\lambda^n$ with values in $\mathcal{D}(A)$, satisfying the equation with right hand side $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\lambda^n \in \mathfrak{A}_0$. This problem need not be solvable. So, we seek the conditions on $f(\lambda)$, under which it has a solution, and if this is the case, we solve the uniqueness problem. The cases of $m = 1$ and $f = 0$ were considered in [25, 26].

Key words: Banach and locally convex spaces; inductive and projective limits of Banach spaces; operator differential equation; entire vector of a closed operator; Gevrey classes; C_0-group and C_0-semigroup of linear operators; classical and weak solutions; positive and weakly positive operators; Cauchy, Dirichlet and Neumann problems; best approximation; Kolmogorov and Hille problems; Banach space over the field of p-adic numbers.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНО ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Горбачук В.М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка в банаховом пространстве / В.М. Горбачук // Укр. мат. журн. - 1988. - Т. 40, № 5. - С. 629-632.

2. *Горбачук В.М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторных уравнений /В.М. Горбачук // Докл. АН СССР - 1989. - Т. 308, № 1. - С. 23-27.

3. *Горбачук В.М.* Условия экспоненциальной устойчивости дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве / В.М. Горбачук // Успехи мат. наук - 1990. - Т. 45, № 4. - С. 128.

4. *Горбачук В.М.* О представлении и асимптотической единственности решений абстрактного параболического уравнения / В.М. Горбачук // Успехи мат. наук. - 1993. - Т. 48, № 4. - С. 181.

5. *Горбачук В.М.* Про єдиність розв'язку задач Діріхле і Неймана для диференціально-операторного рівняння другого порядку еліптичного типу на півосі / В.М. Горбачук // Укр. мат. журн. - 1994. - Т. 46, № 11. - С. 1564-1568.

6. *Gorbachuk V.M.* On the exponential stability of solutions of differential equations in a Banach space / V.M. Gorbachuk // Нелинейные граничные задачи. - Сборник научных трудов Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. - 2001. - Вып. 11. - С. 52-56.

7. *Горбачук В.М.* Про розв'язність $(n+1)$-разів інтегровної задачі Коші в класі аналітичних вектор-функцій / В.М. Горбачук // Доповіді НАН України . - 2002. - № 6. - С. 7-10.

8. *Горбачук В.М.* Про коректну розв'язність задачі Діріхле для диференціально-операторних рівнянь у банаховому просторі / В.М. Горбачук, М.Л. Горбачук // Укр. мат. журн. - 2006. - Т. 58, № 11. - С. 1462-1476.

9. *Gorbachuk V.M.* On solutions of parabolic and elliptic type differential equations on $(-\infty, \infty)$ in a Banach space / V.M. Gorbachuk // Methods Funct. Anal. Topology. - 2008. - V. 14, № 2. - P. 177-183.

10. *Горбачук М.Л.* Умови існування обмежених, майже періодичних і періодичних розв'язків еліптичних рівнянь у банаховому просторі / М.Л. Горбачук, В.М. Горбачук // Доповіді НАН України. - 2009, № 11. - С. 7-12.

11. *Gorbachuk V.I.* On holomorphic solutions of some inhomogeneous linear differential equations in a Banach space over a non-Archimedean field / V.I. Gorbachuk, V.M. Gorbachuk // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. - 2010. - V. 2, № 2. - P. 21-28.

12. *Горбачук В.М.* Про розв'язність диференціальних рівнянь у неархімедовому банаховому просторі в класі аналітичних вектор-функцій / В.М. Горбачук // Доповіді НАН України. - 2010, № 12. - С. 7-13.

13. *Горбачук В.М.* Зображення груп лінійних операторів у банаховому просторі степеневими рядами / В.М. Горбачук, М.Л. Горбачук // Доповіді НАН України. - 2013. - № 9. - С. 22-28.

14. *Gorbachuk V.M.* On the structure of solutions of operator-differential equations on the whole real axis / V.M. Gorbachuk // Methods Funct. Anal. Topology. - 2015. - V. 21, № 2 . - P. 170-178.

15. *Горбачук В.М.* Зображення групи лінійних операторів у банаховому просторі на множині цілих векторів її генератора / В.М. Горбачук, М.Л. Горбачук // Укр. мат. журн. - 2015. - Т. 67, № 5. - С. 592-601.

16. *Горбачук В.М.* Про розв'язки диференціальних рівнянь у банаховому просторі на всій числовій осі / В.М. Горбачук // Зб. праць Ін-ту математики НАН України - 2015. - Т. 12, № 2. - С. 113-125.

17. *Горбачук В.М.* Структура розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі / В.М. Горбачук // Доповіді НАН України. - 2016. - № 2. - С. 7-12.

18. *Горбачук В.М.* Прямі й обернені теореми теорії наближень розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі / В.М. Горбачук // Доповіді НАН України. -2016. - № 7. - С. 12-18.

19. *Горбачук В.М.* Умови існування обмежених розв'язків диференціального рівняння у банаховому просторі на всій числовій осі / В.М. Горбачук // Зб. праць Ін-ту математики НАН України . - 2016. - Т. 13, № 1. - С. 88 - 97.

20. *Gorbachuk V.M.* On approximation of solutions of operator-differential equations with their entire solutions of exponential type / V.M. Gorbachuk // Methods Funct. Anal. Topology. - 2016. - V. 22, № 3. - P. 245-255.

21. *Gorbachuk V.M.* The Representation of a C_0-semigroup of linear operators in a Banach space on the set of entire vectors of its generator / V.M.

Gorbachuk, M.L. Gorbachuk // Integr. Equ. Oper. Theory. -2016. - V. 85, № 4. - P. 497-512.

22. *Горбачук В.М.* Простори гладких та узагальнених векторів генератора аналітичної півгрупи та їх застосування / В.М. Горбачук, М.Л. Горбачук // Укр. мат. журн. - 2017. - Т. 69, № 4. - С. 479-508.

23. *Gorbachuk M.L.* On behavior at infinity of solutions of elliptic differential equations in a Banach space / M.L. Gorbachuk, V.M. Gorbachuk // Methods Funct. Anal. Topology. -2017. - V. 23, № 2 . - P. 108-122.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, ЯКІ ЗАСВІДЧУЮТЬ АПРОБАЦІЮ МАТЕРІАЛІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Горбачук В.М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка / В.М. Горбачук, М.Л. Горбачук // Функциональные методы в прикладной математике и математической физике.Тезисы докладов Всесоюзной школы молодых ученых, т. 2. - Ташкент. - 1988. - С. 70-71.

2. *Горбачук В.М.* Про асимптотичну єдиність розв'язку абстрактного обернено параболічного рівняння / В.М. Горбачук // Міжн. наук. конф., присв. пам'яті акад. М.П.Кравчука. - Київ-Луцьк. - 1992. Тези. - С. 47.

3. *Горбачук В.М.* Про єдиність розв'язку задачі Неймана для диференціального рівняння другого порядку в банаховому просторі / В.М. Горбачук // Всеукраїнська наук. конф. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь". - Дрогобич. - 1994. Тези. - С. 40.

4. *Gorbachuk V.M.* Solvability and asymptotic uniqueness of the Cauchy problem for an inversely parabolic equation in a Banach space / V.M. Gorbachuk // The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics. - Hamburg. - 1995. Abstracs. - P. 79.

5. *Gorbachuk V.M.* Evolutionary completeness criterion for the set of root vectors of a compact operator / V.M. Gorbachuk // Міжнародна конференція з функціонального аналізу. - Київ. - 2001. Тези. - С. 33.

6. *Gorbachuk V.M.* Locally integrated semigroups of normal operators in a Hilbert space / V.M. Gorbachuk // International Conference "Differential

Equations and Related Topics”. - Moscow. - 2001. - Abstracts. - P. 151-152.

7. *Горбачук В.М.* Локально інтегровані півгрупи нормальних операторів у гільбертовому просторі / В.М. Горбачук // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька. - Дрогобич. - 2004. Тези. - С. 55.

8. *Gorbachuk V.M.* On solvability of (n+1)-times integrable Cauchy problem in the class of finite order and finite type entire vector-valued functions / V.M. Gorbachuk // Internatioal Conference "Analysis and Related Topics". - Lviv. - 2005. Abstracts. - P. 31.

9. *Gorbachuk V.M.*On uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for a second-order differential equation in a Banach space / V.M. Gorbachuk // International Conference on Diferential Equations Dedicated to the 100th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky. - Lviv. - 2006. Abstracts. - P. 97.

10. *Gorbachuk V.M.* On the well-posedness of the Dirichlet problem for elliptic-type operator-differential equations / V.M. Gorbachuk // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька. - Дрогобич. - 2007. Abstracts. - С. 71.

11. *Gorbachuk V.M.* On existence of finite order and finite type entire solutions for differential equations in a Banach space on the whole real axis / V.M. Gorbachuk // International Conference on Analysis and Topology. - Lviv. - 2008. Abstracts. - P. 19.

12. *Горбачук В.М.* Про класичні розв’язки диференціальних рівнянь елі-

птичного типу на всій осі у банаховому просторі / В.М. Горбачук // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. - Київ. - 2008. Тези. - С. 98.

13. *Горбачук В.М.* Про розв'язки неоднорідних еліптичних рівнянь у банаховому просторі на всій осі / В.М. Горбачук // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М.Боголюбова та 70-річчя М.І.Нагнибіди. - Чернівці. - 2009. Тези. - С. 29.

14. *Горбачук В.М.* Умови існування обмежених розв'язків еліптичних рівнянь у банаховому просторі / В.М. Горбачук // Український математичний конгресс 2009. - Київ. - 2009. Тези.

15. *Горбачук В.М.*Про аналітичність розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь у банаховому просторі над полем p-адичних чисел / В.М. Горбачук // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. - Київ. - 2010. Тези. - С. 113.

16. *Горбачук В.М.* Про цілі розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь у банаховому просторі над полем p-адичних чисел / В.М. Горбачук // Міжнародна конференція "Сучасні проблеми аналізу", присв'ячена 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету ім. Ю. Федьковича. - Чернівці. - 2010. Тези. - С. 61.

17. *Горбачук В.І.* Про коректну розв'язність у класі аналітичних векторфункцій задачі Коші для диференціальних рівнянь у банаховому просторі над неархімедовим полем / В.І. Горбачук, В.М. Горбачук // International Conference of Functional Analysis. - Lviv. - 2010. Abstracts of Reports. - С. 101.

18. *Горбачук В.М.* Про коректну розв'язність у класі локально диференціальних рівнянь у банаховому просторі / В.М. Горбачук, В.І. Горбачук // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта). - Івано-Франківськ. - 2011. Тези доповідей. - С. 39.

19. *Горбачук В.М.* Об аналитических решениях дифференциальных уравнений в банаховом пространстве над неархимедовым полем / В.М. Горбачук // International Conference "Differential Equations and Related Topics", dedicated to Ivan G. Petrovskii. - Moscow. - 2011. Abstracts. - P. 181

20. *Горбачук В.М.* Про зображення однопараметричних груп лінійних операторів у банаховому просторі степеневими рядами / В.М. Горбачук // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. - Київ. - 2012. Тези доп. - С.

21. *Gorbachuk V.M.* On approximation of solutions of the Cauchy problem for parabolic differential equations in a Banach space / V.M. Gorbachuk // International Conference "Theory of Approximation of Functions and its Applications", dedicated to the 70th anniversary of corresponding member of NAS of Ukraine, professor A.I. Stepanets (1942-2007). - Kamianets-Podilsky. - 2012. Abstracts. - P. 128.

22. *Gorbachuk V.M.* The representation of one-parameter linear semigroups in the power series form / V.M. Gorbachuk // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. - Lviv. - 2012. Abstracts. - P. 282.

23. *Gorbachuk V.M.* On uniqueness of solutions of the homogeneous Dirichlet

problem for differential equatons in a Banach space on a semiaxis / V.M. Gorbachuk // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. - Київ. - 2014. Тези. Т. 1. - С. 17.

24. *Горбачук В.М.* Про розв'язки диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу у банаховому просторі на всій осі / В.М. Горбачук // Четверта Міжнародна Ганська Конференція, присв'ячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. - Чернівці. - 2014. Тези. - С. 35-36.

25. *Горбачук В.М.* Про структуру розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на всій числовій осі / В.М. Горбачук // Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. - Київ. - 2015. Матеріали конференції. Т. 1. - С. 61-62.

26. *Горбачук В.М.* Про орбіти групи лінійних операторів у банаховому просторі / В.М. Горбачук // Наукова конференція, присв'ячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге. - Чернівці. - 2015. Тези. - С.32-33.

27. *Gorbachuk V.M.* On solutions of differential equations in a Banach space on $(-\infty, \infty)$ / V.M. Gorbachuk // International V. Skorobohatko Mathematical Conference . - Drohobych. - 2015. Abstracts. - P. 49.

28. *Горбачук В.М.* Про орбіти C_0-груп лінійних операторів у банаховому просторі / В.М. Горбачук // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Кравчука. - Київ. - 2016. Матеріали конференції. II. - С. 76-77.

29. *Горбачук В.М.* Про наближення розв'язків задачі Коші для абстра-

ктного параболічного рівняння в банаховому просторі / В.М. Горбачук // Вісімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Кравчука. - Київ. - 2017. Матеріали конференції. I. - С. 43-47.

Зміст

Анотація 1

Вступ 29

Огляд літератури та основні напрямки дослідження 43

Розділ 1. Експоненціальна функція від замкненого оператора у банаховому просторі 59

1.1 Деякі твердження з теорії півгруп 59

1.2 Простори гладких векторів замкненого оператора 70

1.3 Побудова експоненти від замкненого оператора 75

1.4 Деякі підпростори аналітичних вектор-функцій 78

1.5 Зображення групи лінійних операторів у банаховому просторі експоненціальною оператор-функцією 87

Розділ 2. Структура розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі 97

2.1 Про розв'язки параболічних та еліптичних диференціальних рівнянь у банаховому просторі на $(-\infty, \infty)$ 97

2.2 Однорідне m-гармонічне диференціально-операторне рівняння 106

2.3 Неоднорідне m-гармонічне диференціально-операторне рівняння 114

2.4 Гармонічне операторно-диференціальне рівняння 117

2.5 Більш загальне диференціально-операторне рівняння 122

Розділ 3. Наближення розв'язків диференціально-операторних рівнянь цілими розв'язками експоненціального типу **133**

3.1 Опис слабких розв'язків 133

3.2 Аналоги теореми Джексона і нерівності Бернштейна 136

3.3 Прямі й обернені теореми теорії наближень 141

3.4 Випадок банахового простору 147

3.5 Випадок дискретного спектру самоспряженого оператора A 150

3.6 Застосування до рівнянь з частинними похідними 151

3.7 Гіперболічний випадок 154

3.8 Гіперболічний випадок у гільбертовому просторі 159

Розділ 4. Простори основних та узагальнених векторів генератора аналітичної півгрупи та їх застосування до розв'язування диференціально-операторних рівнянь на півосі **163**

4.1 Простори $\mathfrak{B}_{\{+\}}$ та $\mathfrak{B}_{(+)}$ 163

4.2 Простори $\mathfrak{B}_{(-)}$ та $\mathfrak{B}_{\{-\}}$ 170

4.3 Підростори нескінченно диференційовних векторів генератора аналітичної півгрупи 175

4.4 Застосування до диференціально-операторних рівнянь першого порядку 184

4.5 Опис розв'язків на $(0, \infty)$ диференціального рівняння другого порядку у банаховому просторі 188

4.6 Про розв'язки диференціально-операторних рівнянь вищих порядків на півосі 190

Розділ 5. Деякі крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь **200**

5.1 Однорідна задача Діріхле 201

5.2 Випадок самоспряженого B 201

5.3 Випадок позитивного B у банаховому просторі 205

5.4 Неоднорідна задача Діріхле 211

5.5 Поведінка на нескінченності обмежених розв'язків неоднорідної задачі Діріхле 214

5.6 Метод степеневих рядів у наближеному розв'язанні задачі Діріхле 216

5.7 Задача Неймана 218

5.8 $(n+1)$-разів інтегрована задача Коші 218

Розділ 6. Про поведінку на нескінченності стійких розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі **225**

Розділ 7. Про аналітичні розв'язки неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі над неархімедовим полем **237**

7.1 Деякі класи аналітичних вектор-функцій 237

7.2 Головний результат 240

7.3 Про наближення розв'язку 247

7.4 Задача Коші 249

7.5 Застосування до рівнянь з частинними похідними 251

Висновки 253

Список використаних джерел **258**

Вступ

Актуальність теми. Починаючи з 60-х років минулого століття, значно активізувався інтерес до дослідження початково-крайових задач (зокрема Коші, Діріхле, Неймана) для диференціальних рівнянь з частинними похідними (див., наприклад [27 - 83]). Необхідність цих досліджень виникає при розв'язуванні задач математичної фізики, квантової механіки, газової динаміки, теорії теплопровідності, кристалографії, динаміки руху рідини, сучасних проблем екології, біології тощо. Вагомий внесок у розгляд таких задач для параболічних рівнянь зробили І.Г. Петровський, А. Фрідман, С.Д. Ейдельман, Л.Н. Слободецький, С. Теклінд, В.О. Солонніков, С.Д. Івасишен, М.В. Житарашу, В.В. Городецький, І.М. Петрушко та ін., а для еліптичних – Ю.М. Березанський, Я.А. Ройтберг, З.Ф. Шефтель, В.П. Михайлов, А.К. Гущин, їхні учні та послідовники (усіх не перелічити). Оскільки чимало рівнянь з частинними похідними, в тому числі модельні, можна записати у вигляді звичайних диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами, природно виникла потреба дослідження їх розв'язків в околі границі, яке є доцільним ще й тому, що надається можливість поглянути з єдиної точки зору як на звичайні диференціальні оператори, так і на оператори з частинними похідними.

Коли ми говоримо про граничні значення розв'язків диференціальних рівнянь, то зазвичай маємо на увазі розв'язки, визначені лише всередині інтервалу або області. Основна задача, яка тут виникає, полягає у відшуканні їх, взагалі кажучи, узагальнених границь при наближенні до межі (граничних значень) і формули для зображення розв'язків за допомогою цих граничних значень. Розв'язання цієї задачі потребує, з одного боку, чіткого усвідомлення, а що саме розуміється під граничним значенням (тобто введення нових понять), а з іншого, – засобів для отримання зображення.

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$y''(t) + Ay(t) = 0, \ t \in (0, \infty),$$

де A – замкнений, щільно заданий лінійний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$, і спробуємо знайти загальний вигляд його розв'язків та дослідити їх поведінку поблизу нуля.

Формально будь-який розв'язок розглядуваного рівняння можна подати у вигляді

$$y(t) = \cos\sqrt{A}t f_1 + \frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}} f_2.$$

Щоб надати зміст цьому виразові, потрібно вказати, що розуміється під $\cos\sqrt{A}t$ та $\dfrac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}$, і яку множину F мають перебігати вектори f_1, f_2, щоб отримати усі розв'язки. Якщо оператор A обмежений, то зазначені функції можна трактувати як ряди $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^{2k}A^k}{(2k)!}$ і $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{t^{2k+1}A^k}{(2k+1)!}$, збіжні при кожному t в рівномірній операторній топології, а множина F є не що інше, як простір $\mathfrak{B}$. Якщо ж A не є обмеженим, то проблема побудови таких функцій у загальному випадку не розв'язана ще й понині. Це по-перше. А по-друге, якщо їх навіть і можна побудувати, то не всякі вектори f_1, f_2 є пригодними для того, щоб наведена вище формула давала усі розв'язки – інколи множина F є вужчою за $\mathfrak{B}$, а інколи потрібно вийти за межі вихідного простору, і тоді вже виникають нові поняття узагальнених граничних значень та розв'язків. Подібні проблеми дискутувались багатьма математиками і привели до таких важливих понять, як функція, збіжність, інтеграли Рімана й Лебега тощо, та появи нових розділів математики, зокрема, спектральної теорії операторів і теорії півгруп.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язків диференціальних рівнянь першого, другого та вищих порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами у банаховому просторі. Актуальність розвитку такої теорії можна пояснити необхідністю розгляду проблем, що виникають при моделюванні еволюційних процесів. Виявляється, що для зображення розв'язків задачі Коші для таких рівнянь і вивчення їх асимптотики треба вміти відновлювати півгрупу лінійних операторів за її генератором. Раніше це відновлення здійснювалось різними способами не за самим генератором, а за деякими функціями від нього, що значно ускладнювало процес. Так, задача Коші з початковими даними у вихідному просторі розглядалась багатьма математиками (див., наприклад, [84 - 97]. Теорія звужень і розширень аналітичних півгруп, представлена в [98], дала змогу досліджувати граничні задачі для абстрактних диференціальних рівнянь на коректність постановки у різних класах гладких та узагальнених вектор-функцій, а операторний підхід до теорії апроксимації, розвинутий в [9], уможливив наближення розв'язків (не лише класичних, але й слабких і узагальнених) цілими розв'язками експоненціального типу і точне оцінювання похибки наближення. Більш того, з'явилася можливість дослідити задачу Коші для рівнянь не лише в архімедовому, але й неархімедовому (над полем p-адичних чисел) банаховому просторі. Останнім часом p-адичній техніці важливе місце відводиться в багатьох галузях математичних досліджень, зокрема в теоріях чисел, представлень, p-адичних соленоїдів тощо. Як сказано в [20], "цей прекрасний новий світ неархімедового аналізу відкриває важливі перспективи для розвитку алгебри, теорії чисел і корисних застосувань".

З огляду на історію розвитку функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь та теорії наближень, результати дисертації роблять свій помітний внесок в теорію еволюційних рівнянь та її застосувань до розв'язування нових задач математичної фізики – у цьому й полягає актуальність проведених в ній досліджень. Її тематика, як бачимо, належить до одного з найважливіших напрямів сучасного функціонального аналізу – теорії абстрактних диференціальних рівнянь, початок якої був закладений Е. Хілле та К. Іосідою (1948), які одержали перші теореми існування розв'язків задачі Коші для рівняння $y' = Ay$ з необмеженим оператором A , сформульовані в термінах теорії півгруп. Згодом Е. Хілле і Р. Філліпс розпочали побудову теорії абстрактної задачі Коші для рівнянь у банаховому просторі, а у 1953-54 рр. П. Лакс, А. Мільграм та В. Лянце застосували півгрупові методи до дослідження різних класів параболічних рівнянь. З тих пір, як Т. Като розглянув випадок, коли $A = A(t)$ залежить від t, теорія диференціальних рівнянь у банаховому просторі і тісно пов'язана з нею теорія півгруп сформували самостійну галузь досліджень, яка з роками все більше й більше привертає привертає увагу математиків. Започатковане Е. Хілле й К. Іосідою, М. Крейном і Ю. Далецьким установлення зв'язку між цими двома теоріями знайшло своє продовження в роботах С. Крейна, П. Соболєвського, Р. Філліпса, Е. Девіса, А. Пазі, Р. Датка, В. Арендта, В. Фоміна, М. Горбачука, Ю. Латушкіна, Ж. Неервена, А. Кочубея, В. Городецького, В. Михайлеця, Дж. Кісінського, М. Городнього, В. Васільєва, С. Піскарьова та багатьох ін. Фундаментальні результати у цьому напрямку викладено в монографіях [1, 2, 6 - 8, 16, 86] та ін., а також оглядових статтях [89, 90].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дослідження, що складають основу дисертації, проводились на кафедрі математичної фізики фізико-математичного факультету Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"в рамках науково-дослідних тем "Дослідження актуальних проблем теорії детермінованого хаосу, розв'язування ускладнених задач математичної фізики та розробка математично-комп'ютерних методів побудови наближених розв'язків" (номер державної реєстрації 0112U001235) і "Розвиток методів дослідження розв'язків диференціально-операторних рівнянь і рівнянь з частинними похідними параболічного типу" (номер державної реєстрації 0117U003173).

Мета і завдання дослідження.

Основною метою дисертаційного дослідження є опис усіх розв'язків диференціальних рівнянь на нескінченному інтервалі у банаховому просторі над полем комплексних або p-адичних чисел, вивчення їх поведінки при наближенні до кінців інтервалу, розв'язання у зв'язку з цим проблем Колмогорова та Хілле про зображення групи лінійних операторів степеневим рядом або експоненціальною границею від її генератора, розвиток операторного підходу до наближення довільного класичного, слабкого або узагальненого розв'язку цілими розв'язками експоненціального типу, відшукання критеріїв рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості рівняння.

Об'єктом дослідження є диференціально-операторні рівняння у банаховому просторі над архімедовим або неархімедовим полем; граничні задачі для таких рівнянь, зокрема, задачі Коші, Діріхле, Неймана, $(n+1)$-разів інтегрована задача Коші; C_0-півгрупи та C_0-групи, пов'язані з ними; деякі підпростори цілих вектор-функцій; аналітичні та цілі вектори замкненого оператора; класи Жевре векторів та вектор-функцій; способи апроксимації розв'язків; стійкі розв'язки рівняння; стійкі півгрупи.

Предметом дослідження є структура класичних, слабких і узагальнених розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі та їх граничні значення; зображення півгрупи (групи) степеневим рядом або експоненціальною границею від її генератора; щільність множини цілих векторів замкненого оператора; поведінка розв'язків при наближенні до кінців інтервалу; операторний підхід до наближення розв'язків цілими розв'язками експоненціального типу; критерії для різних видів стійкості півгруп, пов'язаних з розглядуваними рівняннями; зв'язок між поведінкою розв'язків та їх граничними значеннями, між степенем гладкості розв'язку і швидкістю прямування до нуля його найкращого наближення; задача Коші для диференціальних рівнянь вищих порядків у неархімедовому банаховому просторі.

Завдання дослідження:

1. Для довільної C_0-групи (півгрупи) лінійних операторів з генератором A у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ знайти максимальні щільні у ньому множини, на елементах яких ця група (півгрупа) зображується у вигляді степеневого ряду (проблема Колмогорова) або експоненціальною границею (проблема Хілле) від оператора A, та способи відновлення групи (півгрупи) безпосередньо за її генератором, а не функціями від нього. Узагальнити результат, що стосується проблеми Хілле, на випадок довільного замкненого оператора A. Вивчити необхідні для досліджень класи локально-аналітичних $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій.

2. Дослідити структуру розв'язків абстрактних диференціальних рівнянь у банаховому просторі на всій числовій осі, зокрема, гармонічного та m-гармонічного. Показати, що для них діє аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа

3. Для диференціального рівняння параболічнго типу у гільбертовому просторі довести прямі й обернені теореми наближення слабких розв'язків цілими розв'язками експоненціального типу, з'ясувати зв'язок

між степенем гладкості розв'язку $y(t)$ і швидкістю прямування до нуля його найкращого наближення $\mathcal{E}_r(y)$ розв'язками, тип яких не перевищує r, і поширити цей результат на банахові простори, оснащені гільбертовими. Проілюструвати результати на рівняннях з частинними похідними.

4. Дослідити розв'язки диференціально-операторних рівнянь у банаховому просторі всередині інтервалу $(0, \infty)$, не накладаючи жодних умов на поведінку розв'язку в нулі, та їх граничні значення в деяких локально-опуклих просторах.

5. Розглянути задачі Діріхле та Неймана для рівняння другого порядку еліптичного типу, дослідити умови існування і єдиності розв'язку і навести для нього формулу.

6. Для рівняння другого порядку еліптичного типу на півосі у банаховому просторі знайти умови обмеженості розв'язку в околі нескінченно віддаленої точки, його збіжності до нуля, а також умови, які забезпечують його експоненціальне спадання на нескінченності.

7. Дослідити стійкі роз'язки еліптичного рівняння другого порядку та знайти умови, необхідні й достатні для його ріномірної, рівномірної експоненціальної та ріномірної, але не рівномірної експоненціальної стійкості. В останньому випадку установити зв'язок між порядком спадання розв'язку на нескінченності та властивостями його початкових даних.

8. Розглянути неоднорідні рівняння вищих порядків у банаховому просторі над полем p-адичних чисел , правими частинами яких є локально аналітичні в нулі вектор-функції, дослідити питання існування та єдиності локально аналітичного в околі нуля розв'язку такого рівняння і його неперервної залежності від правої частини , отримати формулу для розв'язку.

9. Довести, що якщо у попередньому випадку права частина – много-

член, то розв'язок також є многочленом того самого степеня, що й права частина; якщо права частина – ціла вектор-функція, то існує єдиний розв'язок у класі цілих вектор-функцій.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених задач в дисертації використовуються методи функціонального аналізу, топології та теорії функцій, зокрема: методи теорії локально опуклих просторів, теорії узагальнених функцій, теорії абстрактних диференціальних рівнянь, операторного числення, групові та півгрупові методи.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному.

1. Досліджено проблему Колмогорова про можливість зображення C_0-групи лінійних операторів у банаховому просторі степеневим рядом від її генератора.

2. Розв'язано проблему Хілле про представлення C_0-групи лінійних операторів у банаховому просторі експоненціальною границею від її генератора.

3. Знайдено умови на вектор банахового простору, за яких експоненціальна функція від замкненого у цьому просторі оператора на заданому векторі є цілою скінченного порядку і скінченного типу.

4. Описано усі розв'язки всередині нескінченного інтервалу (осі або півосі) параболічних та еліптичних диференціальних рівнянь у банаховому просторі. Зокрема, детально вивчено розв'язки як однорідного, так і неоднорідного полігармонічного диференціально-операторного рівняння, коефіцієнтом якого є позитивний оператор.

5. Досліджено розв'язки диференціальних рівнянь вищих порядків пев-

ного вигляду на всій числовій осі й півосі, коефіцієнтами якого є позитивні оператори у банаховому просторі.

6. Доведено прямі й обернені теореми теорії наближень слабких розв'язків диференціального рівняння у гільбертовому просторі цілими його розв'язками експоненціального типу, які встановлюють взаємно однозначну відповідність між швидкістю прямування до нуля найкращого наближення і степенем гладкості розв'язку.

7. Установлено для таких розв'язків аналог теореми Джексона про апроксимацію неперервної періодичної функції тригонометричними поліномами.

8. Описано структуру розв'язків як однорідної, так і неоднорідної задачі Діріхле для абстрактного еліптичного диференціального рівняння другого порядку на півосі; знайдено умови, за яких ця задача є коректно поставленою.

9. Досліджено однорідну задачу Неймана для диференціальних рівнянь другого порядку у банаховому просторі, а також $(n+1)$-разів інтегровану задачу Коші для рівнянь першого порядку.

10. Доведено, що для розв'язків абстрактних еліптичних диференціальних рівнянь на півосі діє аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа.

11. Для еліптичного диференціального рівняння на півосі у банаховому просторі над полем комплексних чисел установлено критерій його рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості. Знайдено також умови, за яких рівняння є рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійким.

12. Описано усі аналітичні розв'язки неоднорідного диференціального рівняння m-го порядку у банаховому просторі над полем р-адичних чисел.

Практичне значення одержаних результатів. В основному результати дисертації є теоретичного характеру. Проте ті з них, що стосуються теорії стійкості диференціальних рівнянь у банаховому просторі, можуть бути застосовані до вивчення динаміки обертання твердих тіл з порожнинами, наповненими рідиною. Дослідження з подібних питань проводились під керівництвом А.Ю. Ішлінського в Інституті математики НАН України, а також на кафедрі прикладної механіки Московського університету ім. Ломоносова.

Особистий внесок здобувача. Визначення головних напрямів досліджень належить М.Л. Горбачуку. Всі результати, що виносяться на захист, отримано здобувачем самостійно, а в роботах, опублікованих у співавторстві, внесок авторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались та обговорювались на:

– Всесоюзной школе молодых ученых "Функциональные методы в прикладной математике и математической физике", Ташкент, 11 - 17 травня 1988 року;

– Міжнародній науковій конференції, присвяченій пам'яті академіка М.П. Кравчука, Київ-Луцьк, 22-28 вересня 1992 року;

– Всеукраїнській науковій конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь", Дрогобич, 25 - 27 січня 1994 року;

– Міжнародній науковій конференції, присвяченій пам'яті академіка М.П.Кравчука, Київ, 11 - 14 квітня 1995 року;

– The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Hamburg, 3 - 7 липня 1995 року;

– Workshop "Modern Mathematical Methods in Diffraction Theory and its Applications in Engineering", ed. E. Meister, Darmstad, 30 вересня - 3 жовтня 1996 року;

– International Conference "Nonlinear Partial Differential Equations" dedicated to J.P. Schauder, Lviv, 23 - 29 серпня 1999 року;

– 18-th International Conference on Operator Theory, Timisoara, 27 червня - 1 липня 2000 року;

– Міжнародній конференції з функціонального аналізу, Київ, 22-26 серпня 2001 року;

– Міжнародній математичній конференція ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 27 вересня - 1 жовтня 2004 року, Дрогобич, 2004.

– Internatioal Conference "Analysis and Related Topics", Lviv, 17 - 20 листопада 2005 року;

– International Conference on Differential Equations, dedicated to the 100th anniversary of Ya.B. Lopatynsky , Lviv, 12 - 17 вересня 2006 року;

– International V.Ya. Skorobohatko Mathematical Conference, Drohobych, 24 - 28 вересня 2007 року;

– International Conference "Analysis and Topology", Lviv, 26 травня - 7 червня 2008 року;

– Дванадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 15-17 травня 2008 року;

– Международной конфененции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", Москва, 30 березня - 2 квітня 2009 року.

– Міжнародній конференції до 100-річчя М.М.Боголюбова та 70-річчя М.І.Нагнибіди, Чернівці, 8-13 червня 2009 року;

– Українському математичному конгресі, Київ, 27-30 серпня 2009 року;

– Всеукраїнському науковому семінарі "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Івано-Франківськ, 25 - 28 березня 2010року;

– Тринадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 13 - 15 травня 2010 року;

Міжнародній конференції "Сучасні проблеми аналізу", присвяченій 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету, Чернівці, 30 вересня - 3 жовтня 2010 року;

– Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной 110-летию И.Г. Петровского, Москва, 30 травня - 4 червня 2011 року;

– Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука, Київ, 19 - 21 квітня 2012 року;

– Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007), Кам'янець-Подільський, 28 травня - 3 червня 2012 року;

– International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, Ukraine, Lviv, 17 - 21 вересня 2012 року;

– Crimea International Mathematical Conference, Sudak, 22 вересня - 4 жовтня 2013 року;

– П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ 15 - 17 травня 2014 року;

– IY International Hahn Conference dedicated to the 135-th anniversary of Hans Hahn, Chernivtsi, 30.червня - 5 липня 2014 року;

– Шістнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Кравчука, Київ, 14 - 15 травня 2015 року;

– Науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге, Чернівці, 1-4 липня, 2015 року;

– International V. Skorobohatko Mathematical Conference, Drohobych, 25 - 28 серпня 2015 року;

– Сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Кравчука, Київ, 19-20 травня 2016 року;

– Вісімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Кравчука, Київ-Луцьк, 7-10 жовтня 2017 року;

– Seminarium Katedry Analizy Matematycznej. Matematyki Obliczeniowej i Metod Probabilistycznych. Wydzial Matematyki Stosowanej AGH, Кра-ків (Польща), 13 квітня 2016 року;

– Науковому семінарі кафедри математичної фізики Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", 25 жовтня 2017 року (керівник семінару – професор С.Д. Івасишен;

– Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 8 листопада 2017 року (керівники семінару: академік НАН України Ю.М. Березанський, академік НАН України Ю.С. Самойленко, чл.-кор. НАН України А.Н. Кочубей).

– Науковому семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, 8 грудня 2017 року (керівник семінару професор А.С. Романюк).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 23 статтях [269 - 280, 215, 153, 257, 256, 144, 108, 145, 146, 109, 159,226], серед яких 22 у наукових фахових виданнях [269,270, 272 - 280, 215, 153, 257, 256, 144, 108, 145, 146, 109, 159, 226], з них 8 у співавторстві і 14 – самостійних, 2 статті у закордонних наукових періодичних виданнях [257, 109], 7 робіт [269, 273, 215, 108, 257, 109, 280], які включені до міжнародних наукометричних баз (Scopus), а також 27 тез доповідей на наукових конференціях [281 - 293] та [295 - 309].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації (українською та англійською мовами), вступу, огляду літератури та основних напрямків досліджень, семи розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 309 найменувань. Повний обсяг роботи становить 287 сторінок друкованого тексту.

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНІ НАПРЯМКИ ДОСЛІДЖЕНЬ

У цьому, в деякому розумінні ознайомлюючому розділі, робиться огляд праць, які мають відношення до результатів, наведених в дисертації, є близькими за змістом і способами їх отримання.

П. **01** містить огляд відомих результатів, що стосуються задачі Коші для еволюційних рівнянь і пов'язаної з нею теорією півгруп лінійних операторів.

У п. **02** розглядаються основні праці, присвячені побудові експоненціальної функції від генератора C_0-півгрупи.

П. **03** має справу з теорією наближень довільного розв'язку диференціально-операторного рівняння цілими розв'язками експоненціального типу.

У п. **04** наводяться результати щодо задач Діріхле, Неймана та $(n+1)$-раз інтегрованої задачі Коші.

П. **05** стосується асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-операторних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі.

У п. **06** дається короткий огляд результатів з теорії диференціальних рівнянь у банаховому просторі, але не над полем комплексних чисел, як це найчастіше робиться, а над полем p-адичних чисел.

0.1 Нехай $\mathfrak{B}$ – банахів простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Під еволюційним рівнянням зазвичай розуміється диференціальне рівняння відносно функції $y(t)$ зі значеннями в $\mathfrak{B}$, причому області визначення і значень операторів, присутніх у рівнянні, належать до $\mathfrak{B}$, а дійсна змінна t відіграє роль часу.

Один із основних підходів до еволюційних рівнянь тісно пов'язаний з теорією півгруп лінійних операторів. Що стосується півгрупового підходу, то існує ціла низка книг, в яких систематично і достатньо повно викладено цю теорію, включаючи застосування до рівнянь з частинними похідними. Серед них – монографії Р. Ріхтмайєра [81], К. Іосіди [5], С.Г. Крейна [1], А. Пазі [2], Дж. Голдстейна [7], В. Арендта, С. Бетті, М. Гербера, Ф. Ньюбрандера [3], Н. Данфорда і Дж. Шварца [85], Е. Девіса [86], Ф. Клемента, Х. Хайманса, С. Ангененте, К. ван Дуйна та Д. де Пахтера [8], К. Чіконе і Ю. Латушкіна [87] та багатьох ін.

Добре відомими є три підходи до теорії C_0-півгруп у банаховому просторі. Перший – алгебраїчний, в якому C_0-півгрупа визначається як відображення $T : \mathbb{R}_+ \mapsto L(\mathfrak{B})$, де $L(\mathfrak{B})$ – множина всіх обмежених в $\mathfrak{B}$ операторів таких, що

a) $T(t)x$ – неперервна на $[0,\infty)$ вектор-функція для будь-якого $x \in \mathfrak{B}$;

b) $T(0) = I$ (I – одиничний оператор);

c) $T(s+t) = T(s)T(t), \quad s,t \in [0,\infty)$.

Її генератор визначається як

$$Ax = \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t}, \quad \mathcal{D}(A) := \left\{x \in \mathfrak{B} : \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t} \text{ існує}\right\}$$

($\mathcal{D}(\cdot)$ – область визначення оператора). Лінійний оператор A замкнений і $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$. Іншими словами A – похідна від $T(t)$ в точці 0 у сильному розумінні.

Другий підхід втягує задачу Коші на відрізку $\mathcal{I}$:

$$y'(t) = Ay(t),\ t \in \mathcal{I}; \quad y(0) = x \in \mathfrak{B}. \tag{0.1}$$

Вектор-функція $y(t)$, за визначенням, є класичним розв'язком цього рівняння, якщо вона є неперервно диференційовною на $\mathcal{I}, y(t) \in \mathcal{D}(A)$ і задовольняє (0.1) для всіх $t \in \mathcal{I}$. Під слабким розв'язком рівняння (0.1) розуміється неперервна функція $y(t)$ із значеннями в $\mathfrak{B}$ така, що

$$\int_s^t y(\tau)\,d\tau \in \mathcal{D}(A), \quad s,t \in \mathcal{I},$$

і

$$A\int_s^t y(\tau)\,d\tau = y(t) - y(s).$$

Оскільки A замкнений, то слабкий розв'язок є класичним тоді і тільки тоді, коли він є диференційовним на $\mathcal{I}$.

Теорема 0.1 (див. [3]). Наступні твердження є еквівалентними:

(i) A генерує C_0-півгрупу $T = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$;

(ii) для довільного $x \in \mathfrak{B}$ існує єдиний слабкий розв'язок рівняння (0. 1), що задовольняє умову $y(0) = x$. У цьому випадку $y(t) = T(t)x$. Звідси також випливає, що оператор A однозначно визначає півгрупу.

Третій підхід пов'язує півгрупу з перетворенням Лапласа. Якщо A – генератор C_0-півгрупи T в $\mathfrak{B}$, то межа росту (тип) цієї півгрупи

$$\omega(T) := \inf\left\{\omega \in \mathbb{R} : \exists M : \|T(t)\| \leq Me^{\omega t},\ \forall t \geq 0,\right\}$$

задовольняє нерівність $-\infty \leq \omega(T)$, і якщо $\mathrm{Re}\lambda > \omega(T)$, то $\lambda \in \rho(A)$ ($\rho(A)$ - резольвентна множина оператора A) і

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt := \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$$

для всіх $x \in \mathfrak{B}$ ($R(\lambda; A)$ - резольвента оператора A).

Теорема 0.2 (див. [3]). Нехай $T(t) : \mathbb{R}_+ \mapsto L(\mathfrak{B})$ - сильно неперервна операторна функція, A - оператор в $\mathfrak{B}$, $\lambda_0 \in \mathbb{R} : (\lambda_0, \infty) \in \rho(A)$ і

$$\forall x \in \mathfrak{B} : R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt, \quad \lambda > \lambda_0.$$

Тоді T - C_0-півгрупа в $\mathfrak{B}$, а A – її генератор.

Отже, генератором C_0-півгрупи може бути лише той оператор, резольвента якого є перетворенням Лапласа.

Наведені вище твердження використовуються в теорії C_0-півгруп як базисні.

Задача Коші для диференціально-операторних рівнянь досліджувалась також М.Л. Горбачуком та В.І. Горбачук, А.В. Князюком, О.І. Кашпіровським, П.Й. Дудніковим, Р. де Лаубенфелсом, В.В. Городецьким, В.І. Фоміним, Гуі Зангом та багатьма іншими математиками. Особлива увага при цьому приділялась питанням існування і єдиності розв'язків таких рівнянь у різних функціональних просторах, їх зображенню та дослідженню їх граничних значень. Огляд відповідних результатів міститься в монографії [88], оглядових статтях [89, 90] та працях [91 - 97]. Було знайдено умови на початкові дані, за яких задача Коші для диференціально-операторних рівнянь першого порядку є розв'язною в різних класах локально-аналітичних вектор-функцій.

0.2. Якщо оператор A обмежений, то розв'язок задачі Коші (0.1) зображується як

$$y(t) = T(t)x \tag{0.2}$$

або

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!} := e^{tA}x, \tag{0.3}$$

і функція $e^{tA}x$ допускає продовження до цілої вектор-функції $e^{zA}x,\ z \in \mathbb{C}$. Цю функцію можна визначити двома способами, а саме: степеневим рядом

$$e^{zA}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} A^n \qquad (0.2)$$

або експоненціальною границею

$$e^{zA}x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{zA}{n}\right)^n \tag{0.3}$$

від оператора A.

У випадку, коли $\mathfrak{B} = \mathbb{C}$, формули (0.2) і (0.3) навів Л. Ейлер [99]. З часом вони були поширені багатьма математиками (див. [100 - 104]) на неперервні оператори у довільному банаховому просторі, причому збіжність у правих частинах розуміється в рівномірній операторній топології. Якщо ж $A \notin L(\mathfrak{B})$, то зображення (0.2), (0.3) мають місце не для всіх $x \in \mathfrak{B}$. Тому постало питання, за яких умов на C_0-півгрупу існують локально-опуклі простори X_0 та X_0' такі, що вкладення

$$X_0 \subset \mathfrak{B} \subset X_0'$$

є щільними і неперервними, і на елементах яких права частина в (0.2) збігається у топологіях цих просторів. Подібна постановка часто зустрічається в різних математичних задачах. Наприклад, якщо $\mathfrak{B} = \widetilde{C}([0,2\pi])$ - простір неперервних 2π-періодичних функцій , то зображення

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} x(t)e^{-ikt}\,dt,$$

виконується не для всіх $x \in \widetilde{C}([0,2\pi)$. Але покладаючи $X_0 = \widetilde{D}$, де $\widetilde{D}$ - локально-опуклий простір нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій і $X_0' = \widetilde{D}'$ ($\widetilde{D}'$ – простір 2π-періодичних розподілів), одержимо ланцюжок

$$\widetilde{D} \subset \widetilde{C}([0,2\pi]) \subset \widetilde{D}'$$

щільно і неперервно вкладених просторів, до того ж тригонометричні ряди функцій з $\widetilde{D}$ і $\widetilde{D}'$ збігаються в топологіях цих просторів відповідно.

Варто також нагадати, що у 1772 р. Ж. Лагранж [105] представив формулу

$$x(t+s) = \exp\left(t \cdot \frac{d}{ds}\right) x(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot \frac{d^k x(s)}{ds^k},$$

з якої видно, що група зсувів $T(t)x(s) = x(s+t)$ зображується виразом (0.2) як експонента від її генератора – оператора диференціювання. Що ж до надання їй сенсу для довільної C_0-групи, тобто усвідомлення, а що саме слід розуміти під e^{tA}, де A - генератор цієї групи, то це питання було поставлене Е. Хілле (1946). Як було зазначено ним (див.[6]), "поширити формулу (0.3) на сильний випадок (тобто коли генератор A не є обмеженим), мабуть, дуже важко і, ймовірно, навіть для $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ границя (0.3) не завжди існує". Зауважимо, що в [108] показано, що для C_0-групи в $\mathfrak{B}$ така границя існує тоді і тільки тоді, коли x - цілий вектор оператора A. Подібне питання розглядалось у [109] і для C_0-півгруп в $\mathfrak{B}$, але воно стосувалось лише півгруп лінійних операторів, дія яких не виходить за межі $\mathfrak{B}$, і збіжності ряду (0.2) в топології підпросторів цілих векторів їх генераторів. Нагадаємо, що простори аналітичних, цілих та цілих експоненціального типу векторів довільного замкненого оператора були введені і вивчались Е. Нельсоном [112], Р. Гудманом [113] та Я. Радино [114], М.Л. Горбачуком [259] відповідно. Ці простори є частинними випадками класів Жевре типу Рум'є та Бьорлінга, які стали основними при розв'язуванні багатьох важливих задач аналізу (деталі про них див. в [115 - 121]). Питання їх щільності в просторі $\mathfrak{B}$ у різних частинних випадках розглядалось в [84, 112, 118, 119].

Для вивчення структури розв'язків всередині нескінченного інтервалу потрібно було розглянути деякі локально-опуклі простори основних і узагальнених векторів генератора C_0-півгрупи та звуження і розширення заданої півгрупи на ці простори. Такі простори побудовано як індуктивні або, відповідно, проективні границі банахових просторів, і розширення та звуження на них C_0-півгрупи розглянуто в [98]. Загальну теорію локально-опуклих просторів та півгруп в них детально викладено в [4], а також в [5, 115, 123, 125].

Однією з основних у теорії диференціальних рівнянь проблем є опис розв'язків всередині області та їх дослідження при наближенні до границі. Для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами ця проблема розв'язана ще у 18 ст., і її розв'язок часто-густо використовується при постановці різних задач для таких рівнянь. Що стосується рівнянь із частинними похідними, то її розв'язання ще далеко не завершене навіть для рівнянь класичної математичної фізики. В дисертації розглянуто рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0, \quad t \in \mathcal{I}, \tag{0.4}$$

де $\mathcal{I} = (0, \infty)$ або $(-\infty, \infty)$, A - генератор аналітичної півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$, яке охоплює цілу низку рівнянь з частинними похідними у різних функціональних просторах. Зазначимо, що випадки $n = 1, m = 0; m = 1, n = 0; n = m \leq 1; \mathcal{I} = (-\infty, \infty)$, за умови, що A – напівобмежений зверху самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, розглянуто в [147], у [148, 149] – коли A генерує обмежену аналітичну півгрупу у банаховому просторі, в [150 - 152] – за умови, що A – невід'ємний самоспряжений оператор в $\mathfrak{H}$. При $m = n, m + n > 1$ і $A = -B^{1/2}$, де B - позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, рівняння (0.4) на півосі досліджено в [13].

Зауважимо ще, що при $m = n \geq 1$ у випадку гільбертового простору і самоспряженого оператора A в ньому, подібно до того, як це зроблено у

[88] для рівняння першого порядку, в роботах О.І. Кашпіровського [161], Б.І. Кнюха [162, 163], І.П. Фішмана [164 - 166], Л.Б. Федорової [167], Федака [168, 169], О.Я. Шкляра [171] вивчались диференціально-операторні рівняння другого та вищих порядків.

0.3 Дослідження прямих та обернених теорем теорії наближень функцій почалось з робіт 1910-1912 рр. Валле-Пуссена [172], Д. Джексона [173], С. Бернштейна [174] та ін.Вони були продовжені багатьма вченими, в тому числі, Н.І. Ахієзером [175], М.Г.Крейном [176-177], Ж. Фаваром [178], Б.В. Стєчкіним [179-180], С.М. Нікольським [181-182], А.Ф. Тіманом [183-184], А. Зігмундом [185], В.К. Дзядиком [186] та їх послідовниками О.І. Степанцем і А.С. Сердюком [187, 188, 192, 193], С.Б. Вакарчуком [189, 190], А.С. Романюком [191] та ін. Ще й дотепер в теорії наближень залишається чимало важливих нерозв'язаних задач, зокрема таких, як поширення прямих і обернених теорем на нові класи функцій та встановлення найкращих значень сталих у відповідних нерівностях.

У 1968 р. М.П. Купцов [194] запропонував узагальнення класичних модулів неперервності та гладкості, використовуючи поняття C_0-групи операторів, а в 1975 О.П. Терьохін [195] довів прямі й обернені теореми теорії наближень, беручи замість оператора диференціювання генератор ізометричної групи у банаховому просторі.

В роботі [9] М.Л. Горбачуком та В.І. Горбачук був розвинутий операторний підхід до задач апроксимації функцій, який дав змогу з єдиної точки зору не тільки отримати низку класичних прямих і обернених теорем, але й розширити їх клас.

Відкритим залишалось питання поєднання запропонованого М.П. Купцовим модуля неперервності з підходом, розвинутим в [9] та узагальнення результатів на максимально широкий клас C_0-груп (не обов'язково ізометричних) у банаховому просторі. Я.І. Грушкою та С.М. Торбою [196, 197] був обраний досить обширний клас неквазіаналітичних груп і, за допомогою побудованого Ю.І. Любічем і В.І. Мацаєвим [135] апарату спектральних підпросторів, їм вдалося отримати аналоги класичних прямих та обернених теорем для генератора неквазіаналітичної групи у банаховому просторі. Дослідженню прямих і обернених теорем для C_0-півгруп у гільбертовому просторі присвячено також статті М.Л. Горбачука, Я.І. Грушки, С.М. Торби [198], Я.І. Грушки і С.М. Торби [197] та Я.І. Грушки [199].

Багато задач математичної фізики зводяться до розв'язування диференціально-операторного рівняння вигляду $y' + Ay = 0$. Точний розв'язок цього рівняння записується за допомогою еволюційної півгрупи, але її точне визначення у багатьох випадках важке або взагалі не можливе. Розв'язанню цієї задачі присвячено чимало праць. Так, М.Л. Горбачук та В.В. Городецький [200, 201] побудували поліноміально-операторні наближення півгрупи $\left\{e^{-tA}\right\}_{t\geq 0}$ на основі розкладу експоненти за поліномами Лагерра. Експоненціально збіжні наближення розв'язків наведеного вище рівняння знайдено О.І. Кашпіровським і Ю.В. Митником [202-204].

0.4. У розділі 5 дисертації розглядається рівняння

$$\frac{d^{2y(t)}}{dt^2} - By(t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \tag{0.5}$$

де B – слабо позитивний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$, тобто B – замкнений оператор, $\rho(B) \supset (-\infty, 0)$ і

$$\exists M > 0\ \forall \lambda > 0 : \|R(-\lambda; B)\| \leq \frac{M}{\lambda}.$$

Неоднорідна (однорідна) задача Діріхле для рівняння (0.5) полягає у відшуканні для заданого $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A)$ $(f = 0)$ розв'язку рівняння (0.5), який задовольняє умову

$$y(t) \to f \text{ у просторі } \mathfrak{B}_{(-)}(A) \text{ при } t \to 0, A = -B^{1/2}.$$

Розв'язки цієї задачі описуються в [215], при цьому розв'язок неоднорідної задачі однозначно визначається з точністю до розв'язків однорідної задачі, які мають вигляд

$$y(t) = \frac{\sinh(tA)}{A} g,\ \ g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A).$$

Випадок, коли A – додатно визначений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, розглянуто в [88]. Там описано усі розв'язки рівняння (0.5) всередині скінченного інтервалу (a, b), $-\infty < a < b < \infty$ і розв'язано задачу Діріхле

$$\lim_{t\to a} = f_1, \quad \lim_{t\to b} = f_2,$$

де $f_1, f_2 \in \mathfrak{A}'(A)$ ($\mathfrak{A}(A) = \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ – простір аналітичних векторів оператора A (границі розуміються в $\mathfrak{A}'(A)$). Показано, що якщо оператор A невід'ємний, але й не додатно визначений, то отримане там зображення може не мати місця.

Задача Діріхле для рівняння (0.5) на скінченному інтервалі $[0, a]$ детально вивчена С.Г. Крейном і Г.І. Лаптєвим [1, 216-218], П.Є. Соболєвським [219] і М.З. Соломяком [220] – у випадку позитивного B, а також А.В. Князюком [148, 149] – за умови, що оператор B є a-позитивним або гранично-позитивним; a-позитивність оператора B означає, що він є замкнений і

$$\forall n \in \mathbb{N} : -\frac{\pi^2}{a^2}n^2 \in \rho(B) \text{ та } \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\pi^2}{a^2}n^2 \left\| \left(B + \frac{\pi^2}{a^2}n^2\right)^{-1} \right\| < \infty.$$

Оператор, a-позитивний для всіх $a > 0$, називається гранично-позитивним.

Більш того, А.В. Князюком [149] розглянуто питання єдиності розв'язку рівняння (0.5) на $[0, \infty)$ у випадку гранично-позитивного B. За додаткової умови

$$\exists \varepsilon > 0 : \lambda^{3/2} \left\| (B + \lambda I)^{-1} \right\| = O\left(\lambda^{\varepsilon}\right) \ (\lambda \to 0_+),$$

доведено, що якщо $y \in C^2([0, \infty); \mathfrak{B}$ задовольняє (0.5) на $[0, \infty)$, $y(0) = 0$ і $y(t) = o(t)(t \to \infty)$, то $y(t) \equiv 0$. Це твердження узагальнює результат А. Балакришнана [221] (див. також [1]), який стверджує, що якщо оператор B гранично-позитивний,

$$(-\infty, 0) \in \rho(B) \text{ і } \sup_{\lambda > 0} \lambda \left\| (B + \lambda I)^{-1} \right\| < \infty,$$

(тобто B слабо позитивний), то вектор-функція $y(\cdot) \in C^2\left([0, \infty), B\right)$, що задовольняє умови

$$y''(t) - By(t) = 0, \quad \|y(t)\| = o(t) \ (t \to \infty), \quad y(0) = 0,$$

тотожно дорівнює нулеві. Це уточнення згодом було узагальнене в [222] у тому розумінні, що оцінку $\|y(t)\| = o(t)$ $(t \to \infty)$ можна замінити на

$$\|y(t)\| = o(t^n) \ (t \to \infty) \text{ з деяким } n \in \mathbb{N}.$$

Дослідження поведінки в околі нескінченно віддаленої точки обмежених розв'язків задачі Діріхле проводиться на основі властивостей розширення C_0-півгрупи, породженої оператором $A = -B^{1/2}$, на простір $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$ (див [98]).

Однорідна задача Неймана для рівняння (0.5) зі слабо позитивним B полягає у знаходженні його розв'язку $y(t)$ на $(0, \infty)$, який задовольняє умову

$$\lim_{t \to 0} y'(t) = 0$$

(границя розуміється в топології простору $\mathfrak{B}_{\{-\}}(A)$. Враховуючи зв'язок між однорідними задачами Неймана і Діріхле (див. [40]), а саме: якщо $z(t)$ – розв'язок однорідної задачі Діріхле для рівняння (0.5), то $y(t) = z'(t)$ є розв'язком однорідної задачі Неймана, і навпаки, якщо $y(t)$ – розв'язок однорідної задачі Неймана, то $z(t) = \int\limits_0^t y(\xi)\,d\xi$ є розв'язком однорідної задачі Діріхле, для задачі Неймана одержуються аналоги відповідних теорем для задачі Діріхле.

Що стосується $(n+1)$-раз інтегрованої задачі Коші $C_{n+1}[\tau]$ відшукання неперервно диференційовної на $[0, \tau]$ вектор-функції $v(t)$ із значеннями в $\mathcal{D}(A)$ такої, що

$$\begin{cases} v'(t) &= Av(t) + \frac{t^n}{n!}x, \ t \in [0, \tau], \\ v(0) &= 0, \end{cases} \tag{$C_{n+1}[\tau]$}$$

де A - замкнений оператор в $\mathfrak{B}$, то її постановка міститься в [275]. Питання існування аналітичного в околі нуля розв'язку задачі ($C_1[\tau]$)

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t), \ t \in [0, \tau], \\ y(0) &= x, \ x \in \mathfrak{B}, \end{cases} \tag{$C_1[\tau]$}$$

і можливості його продовження до цілої вектор-функції розглянуто в [122, 258].

З дослідженням поведінки розв'язків диференціальних рівнянь на нескінченності пов'язано багато задач, асоційованих з такими поняттями, як стійкість, стабільність, причинність тощо (див., наприклад, [168, 169, 243]). У 1947 р. М.Г. Крейн намагався показати, що ряд методів і положень теорії стійкості за Ляпуновим [242] можна перенести на диференціальні рівняння у банаховому просторі, уточнити їх і узагальнити. Побудова теорії стійкості систем з нескінченною кількістю степенів свободи та її застосування до конкретних задач математичної фізики спонукали розгляд рівнянь, в яких фігурують необмежені оператори. У випадку обмежених операторних коефіцієнтів отримано багато результатів (наприклад, у книгах М.Г. Крейна [227], Ю.Л. Далецькго і М.Г. Крейна [228], Х.Л. Массери та Х.Х. Шеффера [244]). Для рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами така теорія далека від повноти, незважаючи на численні публікації (наприклад, [229-237]). Важливе значення тут C_0-півгруп полягає, насамперед, у тому, що вони однозначно відповідають рівномірно коректним задачам Коші та описує їх класичні розв'язки. Однак дослідження асимптотичної поведінки таких півгруп, зокрема залежності цієї поведінки від властивостей їх генераторів, розпочалось лише у середині 80-х років минулого століття інтенсивним вивченням асимптотичної, рівномірної, рівномірної експоненціальної та інших видів стійкості C_0-півгруп. Найбільш істотний внесок у розвиток цієї тематики зробили В. Арендт [229], Ш. Бетті [230], Дж. Неервен [16], Ю. Латушкін [232], Ф. Хуанг [231], А. Пази [18], Р. Датко [17], М. Крейн [228], М. Горбачук [245] та ін.

У розділі 5 дисертації наведено критерії рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості рівняння другого порядку еліптичного типу

$$y''(t) - By(t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \tag{0.5}$$

де B - слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, як у термінах спектру генератора $A = -B^{1/2}$ пов'язаної з цим рівнянням півгрупи, так і в термінах швидкості спадання його розв'язків на нескінченності. Один із критеріїв рівномірної експоненціальної стійкості (UES) розглядуваного рівняння формулюється таким чином:

$$(UES) \text{ рівняння } (0.5) \Longleftrightarrow \forall x \in \mathfrak{B}\ \exists p_x > 0 : \int\limits_0^\infty \left\| e^{tA} x \right\|^{p_x} dt < \infty.$$

Цей критерій узагальнює результати

- А.М. Ляпунова [242]: $\dim \mathfrak{B} < \infty, \quad p \equiv 2;$
- В.А. Якубовича [246]: $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ - гільбертів простір, $A \in L(\mathfrak{B}),\ p_x \equiv 2;$
- М.Г. Крейна [19]: $A \in L(\mathfrak{B}),\ p_x \equiv p,\ p \geq 1;$
- Р. Датка [17]: $\mathfrak{B} = \mathfrak{H},\ A$ - генератор C_0-півгрупи, $p_x \equiv 2,$ рівномірна експоненціальна стійкість лише для неперервних в нулі слабких розв'язків;
- А. Пазі [18]: A - генератор C_0-півгрупи в $\mathfrak{B},\ p_x \equiv p,\ p \geq 1,$ рівномірна експоненціальна стійкість лише для неперервних в нулі слабких розв'язків;

для рівняння першого порядку вигляду $y'(t) = Ay(t), \quad t \in (0, \infty).$

Зауважимо ще, що асимптотичну поведінку диференціальних, псевдодиференціальних та диференціально-операторних рівнянь досліджували також О.А. Бутирін [247], Ю.В. Томілов [248], М.Ф. Городній [249], С.Д Ейдельман і Я.М. Дрінь [250], В.В. Городецький [251, 252], М.В. Маркін [253], А.Н. Кочубей [254, 255].

Останнім часом прагнення описати ті чи інші фізичні явища, котрі не вкладаються в рамки стандартної квантової механіки, спричинило розвиток нестандартних квантових механік, які будуються за допомогою заміни деяких фундаментальних стандартних складових на інші об'єкти з новими нестандартними властивостями. Так, наприклад, заміна поля дійсних чисел на поле p-адичних чисел забезпечує добрі можливості дослідження фізичних об'єктів, які характеризуються певними екстремальними властивостями (наприклад, надмалими просторовими відстанями або надмалими інтервалами часу). Все це приводить до необхідності вивчення p-адичних аналогів основних структур стандартної квантової механіки. Починаючи з робіт В.С. Владімірова, І.В. Воловича, Є.І. Зєлєнова [260-263] з неархімедового супераналізу, поля p-адичних чисел Q_p стали базовими прикладами неархімедових числових полів, які широко використовуються в теоретичній фізиці. Дослідженню фундаментальних розв'язків еліптичних та гіперболічних рівнянь над неархімедовими полями і задачі Коші для стохастичних диференціальних рівнянь присвячено низку робіт А.Н. Кочубея (див., наприклад, [264-268]). У статті М.Л. Горбачука та В.І. Горбачук [25] розглянуто задачу Коші для однорідного диференціального рівняння

$$y^{(m)}(\lambda) - Ay(\lambda) = 0,$$

де A - замкнений оператор у банаховому просторі над полем комплексних p-адичних чисел,

Основні напрямки дисертаційних досліджень: зображення C_0-півгрупи лінійних операторів у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ на множині цілих векторів її генератора (проблеми Колмогорова і Хілле) ([108, 109, 277, 280, 300, 302, 308]); вивчення структури розв'язків всередині нескінченного інтервалу диференціальних рівнянь у банаховому просторі та їх поведінки при наближенні до кінців інтервалу ([144-146, 153, 159, 269, 270, 276, 281, 282, 291-294, 298, 304, 307]); наближення розв'язків диференціально-операторного рівняння цілими розв'язками експоненціального типу ([278, 279, 309]); початково-крайові задачі для абстрактних диференціальних рівнянь у банаховому просторі ([215, 222, 275, 283, 285, 287-290, 303]); дослідження стійкості таких рівнянь і пов'язаних з ними півгруп ([271, 272, 274, 284]); дослідження розв'язків диференціальних рівнянь у неархімедовому банаховому пролсторі ([256, 257, 295-297, 299]).

1 Експоненціальна функція від замкненого оператора у банаховому просторі

1.1 Деякі твердження з теорії півгруп

У цьому підрозділі наведено деякі результати з теорії півгруп лінійних операторів, необхідні для дослідження розв'язків диференціально-операторних рівнянь, яке проводиться у подальшому.

Нехай $\mathfrak{F}$ - лінійний локально-опуклий простір. Теорія таких просторів детально викладена у низці добре відомих монографій, таких, як, наприклад, [4, 5, 84, 115].

Однопараметрична сім'я $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ неперервних лінійних операторів $U(t) : \mathfrak{F} \mapsto \mathfrak{F}$ утворює півгрупу в $\mathfrak{F}$, якщо:

(i) $U(0) = I$ $\quad$ (I - тотожний оператор в $\mathfrak{F}$);

(ii) $\forall t, s \in [0, \infty) : U(t + s) = U(t)U(s)$ (півгрупова властивість).

Півгрупа $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ називається сильно неперервною в точці $t_0 \geq 0$, якщо

$$\forall x \in \mathfrak{F} : \lim_{t \to t_0} (U(t)x - U(t_0)x) = 0.$$

Сильна неперервність у точці t_0 обумовлює її сильну неперервність у будь-якій точці $t \geq t_0$. У подальшому розглядатимемо лише півгрупи, сильно неперервні в нулі, тобто півгрупи класу C_0, або просто C_0-півгрупи.

C_0-півгрупа $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ називається одностайно неперервною, якщо для довільної неперервної півнорми $p(x)$ в $\mathfrak{F}$ існує неперервна півнорма $q(x)$ така, що

$$\forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{F} : p\,(U(t)x) \leq q(x).$$

Інфінітезімальний оператор A_0 півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ визначається як

$$A_0 x = \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t}, \quad \mathcal{D}(A_0) = \left\{ x \in \mathfrak{F} : \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t} \text{ існує} \right\}, \quad (1.1)$$

($\mathcal{D}(\cdot)$ – область визначення оператора).

Якщо A_0 допускає замикання, то оператор $A = \overline{A_0}$ називається генератором $\{U(t)\}_{t\geq 0}$. Півгрупа з генератором A зазвичай записується як $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$. Найчастіше ми матимемо справу з півгрупами у банаховому просторі.

Нехай $\mathfrak{B}$ – банахів простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел з нормою $\|\cdot\|$. Чимало задач математичної фізики можна подати в у вигляді абстрактної задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} &= Ay(t), \quad t > 0, \\ y(0) &= x, \end{cases} \quad (1.2)$$

де A – лінійний, взагалі кажучи, необмежений оператор в $\mathfrak{B}$, при цьому, як правило, роль $\mathfrak{B}$ відіграють банахові простори функцій, підібрані у відповідності до розглядуваних проблем, а A – диференціальні оператори з частинними похідними. Природними рамками проведення досліджень початкової задачі типу (1.2) є саме теорія C_0-півгруп. Доступне і детальне викладення цієї теорії та її численних застосувань можна знайти в монографіях A. Pazy [2], J. Goldstein [7], С.Г. Крейна [1], W. Arendt and C. Batty [3], V.I Gorbachuk and M.L. Gorbachuk [88], J. Kisynski [125], L. H$\ddot{o}$rmander [126], J.van Neerven [16], E. Hille and R. Phillips [6], Yu. Latushkin [87], R. Nagel [127], оглядовій статті В.В. Васільєва, С.Г. Крейна, С.І. Піскарьова [128] та багатьох інших працях. Зупинимось на деяких твердженнях цієї теорії, необхідних у подальшому.

Означення C_0-півгрупи в локально-опуклому просторі залишається в силі у банаховому просторі, тобто сім'я $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ є C_0-півгрупою в $\mathfrak{B}$, якщо виконуються умови (i), (ii) та

(iii) $\forall x \in \mathfrak{B} : \lim\limits_{t\to 0} \|U(t)x - x\| = 0.$

Якщо сім'я $\{U(t)\}$ задана на всій дійсній осі $\mathbb{R}$ і задовольняє тпм умови (i) – (iii), то вона визначає C_0-групу $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в $\mathfrak{B}$.

Позначимо через A інфінітезімальний оператор півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ (групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$), тобто, згідно з (1.1),

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t}, \quad \mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathfrak{B} : \exists \lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t} \right\}. \tag{1.3}$$

Як відомо (див., наприклад, [5, 6]), оператор A завжди замкнений, а отже, є генератором розглядуваної півгрупи (групи). Більш того, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$ і множина $\mathcal{D}(A)$ є $U(t)$-інваріантною. Останнє означає, що

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) \quad \forall t \geq 0 : U(t)x \in \mathcal{D}(A) \text{ і } AU(t)x = U(t)Ax.$$

А це є свідченням того (див. [1]), що при $x \in \mathcal{D}(A)$ задача (1.2) має класичний розв'язок і цей розв'язок має вигляд

$$y(t) = U(t)x, \quad t \geq 0.$$

C_0-півгрупа однозначно визначається своїм генератором.

Генератор A є неперервним тоді і тільки тоді, коли $U(t) \to I$ $(t \to 0)$ в рівномірній операторній топології, тобто

$$\lim_{t\to 0} \|U(t) - I\| = 0.$$

Така півгрупа називається рівномірно неперервною. У цьому випадку

$$\forall x \in \mathfrak{B} : U(t)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}$$

і $U(t)$ допускає продовження до цілої $\mathfrak{B}$-значної функції експоненціального типу. Це, очевидно, й стало приводом для позначення C_0-півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ з генератором A як $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$.

Наступні твердження є еквівалентними (див., наприклад, [127]):

1) A – генератор C_0-півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$;

2) для кожного $x \in \mathcal{D}(A)$ існує єдиний розв'язок задачі (1.2), і $\rho(A) \neq \emptyset$ ($\rho(\cdot)$ – резольвентна множина оператора);

3) $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$, і задача Коші (1.2) поставлена коректно в тому розумінні, що для довільного $x \in \mathcal{D}(A)$ існує її єдиний розв'язок і цей розв'язок неперервно залежить від початкових даних, тобто збіжність $x_n \to 0$ ($x_n \in \mathcal{D}(A)$) послідовності $x_n, n \in \mathbb{N}$, початкових даних розв'язків $y_n(t) : y_n(0) = x_n$ задачі (1.2) зумовлює збіжність $y_n(t) \to 0$, рівномірну на кожному компакті $[0, T], T > 0$;

Із визначення генератора випливає (див. [16]), що

$$\forall t \geq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{B} : \int_0^t U(s)x\, ds \in \mathcal{D}(A)$$

і

$$A \int_0^t U(s)x\, ds = U(t)x - x.$$

Якщо ж $x \in \mathcal{D}(A)$, то

$$A \left(\int_0^t U(s)x\, ds \right) = \int_0^t U(s)Ax\, ds.$$

Твердження 1) - 3) мають очевидну інтерпретацію в термінах абстрактної задачі Коші. По-перше, $U(t)$ є "розв'язуючими"операторами, $U(t)x$ – розв'язок, що відповідає початковому значенню x, у момент часу t. Отже, 1) стверджує, що нічого не сталося в нульовий момент часу, 2) показує, що розв'язок з початковою умовою x у момент часу $t+s$ є тим самим, що й розв'язок в момент часу t, але з початковою умовою $U(s)x$, а 3) відображає неперервність розв'язку як функції від часу t.

Для довільної C_0-півгрупи $\left\{U(t)=e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ існують сталі $\omega\in\mathbb{R}$ і $M=M_\omega\geq 1$ такі, що

$$\forall t\geq 0:\left\|e^{tA}\right\|\leq Me^{\omega t}. \tag{1.4}$$

Зауважимо, що якщо для $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ виконується (1.4), то півгрупа $\left\{e^{\alpha t}e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ задовольняє таку саму оцінку з $\omega_1=\omega-\alpha$ замість ω.

Число

$$\omega(A)=\inf\left\{\omega\in\mathbb{R}\middle|\exists M_\omega\geq 1:\left\|e^{tA}\right\|\leq M_\omega e^{\omega t},\ \forall t\geq 0\right\}$$

називається межею росту або типом півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$. Тип $\omega(A)$ може бути як скінченним, так і дорівнювати $-\infty$. Спектр $\sigma(A)$ оператора A лежить у півплощині $\mathrm{Re}\lambda\leq\omega(A)$. Як показано в [129], для C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ існує границя $\lim\limits_{t\to\infty}\left(t^{-1}\ln\left\|e^{tA}\right\|\right)$ і вона є типом цієї півгрупи:

$$\omega(A)=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left\|e^{tA}\right\|}{t}.$$

Півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є (рівномірно) обмеженою, якщо в нерівності (1.4) можна взяти $\omega=0$, тобто існує така стала $M\geq 1$, що

$$\forall t\geq 0:\left\|e^{tA}\right\|\leq M. \tag{1.5}$$

Якщо ж, крім того, в (1.4) $M=1$, то розглядувана півгрупа називається стискальною.

Фундаментальним результатом в теорії сильно неперервних півгруп є теорема Хілле-Іосіди (див., наприклад, [2, 7]). Вона характеризує генератор C_0-півгрупи за допомогою його резольвенти.

Теорема 1.1 *(Хілле-Іосіда) Лінійний оператор A є генератором C_0-півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$, що задовольняє оцінку (1.4) тоді і тільки тоді, коли:*

(i) A – замкнений і $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$;

(ii) резольвентна множина $\rho(A)$ оператора A містить промінь (ω, ∞) і для його резольвенти $R(\lambda; A) := (A - \lambda I)^{-1}$ виконується оцінка

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}$$

для кожного $\lambda > \omega$ і будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Для того, щоб оператор A породжував стискальну C_0-півгрупу, необхідно і достатньо, щоб A був замкненим, $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}, \rho(A) \supset (0, \infty)$ і задовольнялась умова

$$\forall \lambda > 0 : \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Зауважимо, що в контексті з теоремою Хілле-Іосіди $\{\lambda : \mathrm{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$, а сама резольвента $R(\lambda; A)$ пов'язана з півгрупою $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ рівністю

$$R(\lambda; A)x = -\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)x\, dt \quad (\mathrm{Re}\lambda > \omega, x \in \mathfrak{B})$$

(перетворення Лапласа).

До цього часу ми торкалися півгруп, параметр t яких перебігав невід'ємну дійсну піввісь. Але ми також розглядатимемо можливість продовження області визначення параметра на множини комплексної площини $\mathbb{C}$, які містять цю піввісь, причому обмежуватимемось лише специфічними комплексними областями, а саме, кутами навколо додатної півосі.

Нехай $\Delta = \{z : \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\}$, і $U(z)(z \in \Delta)$ – обмежений лінійний оператор в $\mathfrak{B}$. Сім'я $\{U(z)\}_{z\in\Delta}$ є півгрупою, аналітичною в Δ, якщо:

(i) функція $z \mapsto U(z)$ є аналітичною в Δ;

(ii) $U(0) = I$ і $\lim\limits_{z\to 0, z\in\Delta} U(z)x = x$ для кожного $x \in \mathfrak{B}$;

(iii) $U(z_1 + z_2) = U(z_1)U(z_2)$ при $z_1, z_2 \in \Delta$.

C_0-півгрупа $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ називається аналітичною, якщо функція $t \mapsto U(t)$ допускає аналітичне продовження у деякий сектор Δ, що містить невід'ємну піввісь. Вона є аналітичною з кутом $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ за умови, що $U(t)$ може бути продовжена до функції $U(z)$, аналітичної в секторі

$$\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta\}.$$

і сильно неперервної в нулі уздовж будь-якого променя всередині Σ_θ. Якщо для довільного додатного $\psi < \theta$ існує стала $M_\psi > 0$ така, що

$$\|U(z)\| \leq M_\psi \text{ при } z \in \overline{\Sigma_\psi} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \psi\},$$

то $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною з кутом θ

Оскільки множення C_0-півгрупи $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ на $e^{\omega t}$ не впливає на можливість її аналітичного продовження на деякий сектор, у багатьох випадках можна обмежитись рівномірно обмеженими, зокрема стискальними C_0-півгрупами. Для зручності також інколи припускається, що $0 \in \rho(A)$ – цього завжди можна досягнути множенням рівномірно обмеженої півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ на $e^{-\varepsilon t}$ ($\varepsilon > 0$).

Нехай $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ – рівномірно обмежена C_0-півгрупа в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. Мають місце такі співвідношення еквівалентності (див. [2]):

a) $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ може бути розширена до обмеженої аналітичної в секторі Σ_θ півгрупи;

b) існує така стала $c > 0$, що для довільних $\sigma > 0,\ \tau \neq 0$

$$\|R(\sigma + i\tau; A)\| \leq \frac{c}{|\tau|};$$

c) існують $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ та стала $M > 0$ такі, що

$$\rho(A) \supset \Sigma = \left\{\lambda : |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2} + \theta\right\} \bigcup \{0\}$$

і

$$\forall \lambda \in \Sigma, \lambda \neq 0 : \|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|};$$

d) оператор-функція $U(t)$ є диференційовною при $t > 0$ і

$$\exists c > 0 \quad \forall t > 0 : \|AU(t)\| \leq \frac{c}{t}.$$

Наступне твердження (див. [3, 88]) дає умови, необхідні й достатні для того, щоб півгрупа $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$ була обмеженою аналітичною.

Теорема 1.2 *C_0-півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ є обмеженою аналітичною тоді і тільки тоді, коли вона диференційовна на $(0, \infty)$ і існує стала $c > 0$ така, що*

$$\forall t > 0 : \left\|A^n e^{tA}\right\| \leq c^n n^n t^{-n} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Більш того, достатньо, щоб ця нерівність виконувалась лише для $t \in (0, 1]$.

В роботі [130] (див. також [2, 1] та [89, 131, 132]), для генератора A стискальної аналітичної C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$ визначено його степені $A^\alpha, 0 < \alpha < 1$ з $\alpha \leq \frac{1}{2}$ і показано, що оператори $-A^\alpha$ також породжують аналітичні C_0-півгрупи стисків в $\mathfrak{B}$.

Наведемо ще деякі твердження, пов'язані з A^α і аналітичною півгрупою $\{U(t)\}_{t\geq 0}$, що генерується оператором $-A$.

Теорема 1.3 *Нехай $-A$ – генератор аналітичної C_0-півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. Тоді*

a) $U(t) : \mathfrak{B} \mapsto \mathcal{D}(A^\alpha)$ для довільних $t > 0$ і $\alpha \geq 0$;

b) $\forall x \in \mathcal{D}(A^\alpha) : U(t)A^\alpha x = A^\alpha U(t)x;$

c) для будь-якого $t > 0$ *оператор* $A^\alpha U(t)$ *обмежений і існують сталі* M_α *і* $\delta > 0$ *такі, що*

$$\|A^\alpha U(t)\| \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t};$$

d) якщо $\alpha \in (0,1]$ *і* $x \in \mathcal{D}(A^\alpha)$, *то*

$$\exists C_\alpha > 0 : \|U(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

Розглянемо тепер дві конструкції, які дозволяють будувати локально-опуклі топологічні векторні простори, виходячи із заданої сім'ї локально-опуклих просторів.

Нехай $\{\mathfrak{F}_\tau\}_{\tau \in T}$ (τ перебігає впорядковану множину індексів T) – сім'я локально-опуклих просторів. Припустимо, що

$$\mathfrak{F}_{\tau_2} \subseteq \mathfrak{F}_{\tau_1} \text{ при } \tau_1 < \tau_2$$

і ці вкладення є неперервними.

Покладемо

$$\mathfrak{F}_{pr} = \bigcap_{\tau \in T} \mathfrak{F}_\tau$$

і наділимо цю векторну множину такою топологією: за породжуючу систему околів нуля візьмемо сукупність усіх множин вигляду $V_\tau(0) \bigcap \mathfrak{F}_{pr}$, де $\{V_\tau(0)\}$ – база околів нуля в $\mathfrak{F}_\tau$. З цією топологією простір $\mathfrak{F}_{pr}$ є локально-опуклим. Він називається проективною границею сім'ї $\{\mathfrak{F}_\tau\}_{\tau \in T}$:

$$\mathfrak{F}_{pr} = \operatorname{proj}\lim_{\tau \in T} \mathfrak{F}_\tau.$$

Із визначення випливає, що збіжність послідовності $f_n \in \mathfrak{F}_{pr}$ до елемента $f \in \mathfrak{F}_{pr}$ еквівалентна збіжності f_n до f у кожному просторі $\mathfrak{F}_\tau$. Так само обмеженість множини в $\mathfrak{F}_{pr}$ означає її обмеженість у кожному $\mathfrak{F}_\tau$.

Нехай тепер множина локально-опуклих просторів $\{\mathfrak{F}_\tau\}_{\tau\in T}$ є "зростаючою"у тому розумінні, що

$$\mathfrak{F}_{\tau_1} \subseteq \mathfrak{F}_{\tau_2} \text{ при } \tau_1 < \tau_2.$$

Припустимо також, що ці вкладення є неперевними, і покладемо

$$\mathfrak{F}_{ind} = \bigcup_{\tau\in T} \mathfrak{F}_\tau.$$

Топологія в $\mathfrak{F}_{ind}$ введемо таким чином: за базу околів нуля візьмемо сукупність множин $\bigcup V_\tau(0)$, де $V_{\tau_1}(0) \subseteq V_{\tau_2}(0)$, якщо $\tau_1 < \tau_2$. З такою топологією $\mathfrak{F}_{ind}$ є локально-опуклим простором – індуктивною границею просторів $\mathfrak{F}_\tau$:

$$\mathfrak{F}_{ind} = \operatorname{ind}\lim_{\tau\in T} \mathfrak{F}_\tau.$$

Множина $M \subset \mathfrak{F}_{ind}$ є регулярно обмеженою, якщо $M \subset \mathfrak{F}_\tau$ з деяким $\tau \in T$ і є обмеженою в цьому $\mathfrak{F}_\tau$. Регулярно обмежена в $\mathfrak{F}_{ind}$ множина завжди обмежена. Обернене твердження, взагалі кажучи, не є вірним навіть у випадку нормованих $\mathfrak{F}_\tau$. У випадку, коли будь-яка обмежена в $\mathfrak{F}_{ind}$ множина є регулярно обмеженою, $\mathfrak{F}_{ind}$ називається регулярною індуктивною границею. Прикладами регулярних індуктивних границь є : а) $\mathfrak{F}_{ind}$, коли $\mathfrak{F}_\tau$ – рефлексивні банахові простори; в) простори $\mathfrak{F}_\tau$ є банаховими і вкладення $\mathfrak{F}_{\tau_1} \subseteq \mathfrak{F}_{\tau_2}$ $(\forall \tau_1, \tau_2 \in T : \tau_1 < \tau_2)$ є компактними; c) $\mathfrak{F}_\tau$ – локально-опуклі простори такі, що $\mathfrak{F}_{\tau_1}$ є підпростором простору $\mathfrak{F}_{\tau_1}$ при $\tau_1 < \tau_2$, тобто $\mathfrak{F}_{\tau_1}$ – замкнена підмножина $\mathfrak{F}_{\tau_2}$, а топологія в $\mathfrak{F}_{\tau_1}$ збігається з топологією, індукованою в ньому топологією простору $\mathfrak{F}_{\tau_2}$.

Виявляється, що

$$\mathfrak{F}_{ind} = \operatorname{ind}\lim_{\tau\in T} \mathfrak{F}_\tau \Longrightarrow \mathfrak{F}'_{ind} = \bigcap_{\tau\in T} \mathfrak{F}'_\tau;$$

$$\mathfrak{F}_{pr} = \operatorname{proj}\lim_{\tau\in T} \mathfrak{F}_\tau \Longrightarrow \mathfrak{F}'_{pr} = \bigcup_{\tau\in T} \mathfrak{F}'_\tau,$$

де $\mathfrak{F}'$ – простір, спряжений до $\mathfrak{F}$.

У подальшому часто використовуватимуться індуктивні і проективні границі сімей рефлексивних банахових просторів $\mathfrak{B}_\tau$ $(\tau \in T)$, щільно і неперервно (компактно) вкладених один в одного. Неперервність вкладень у такій ситуації означає, що якщо сім'я $\mathfrak{B}_\tau$ є "зростаючою то

$$\|\cdot\|_{\mathfrak{B}_{\tau_1}} \le \|\cdot\|_{\mathfrak{B}_{\tau_2}} \text{ при } \tau_1 > \tau_2.$$

Для "спадної"сім'ї виконується протилежна нерівність. У "зростаючому"випадку індуктивна границя $\mathfrak{B}_{ind} = \operatorname{ind}\lim_{\tau\in T} \mathfrak{B}_\tau$ є регулярною і, якщо простори $\mathfrak{B}'_\tau$, $\mathfrak{B}'_{ind}$ та $\mathfrak{B}'_{pr} = \left(\operatorname{proj}\lim_{\tau\in T} \mathfrak{B}_\tau\right)'$ наділені сильними топологіями, то рівності

$$\mathfrak{B}'_{ind} = \operatorname{proj}\lim_{\tau\in T} \mathfrak{B}'_\tau \text{ та } \mathfrak{B}'_{pr} = \operatorname{ind}\lim_{\tau\in T} \mathfrak{B}'_\tau$$

розуміються не лише у множинно-теоретичному, а й у топологічному сенсі.

Як показано в [4], має місце така теорема.

Теорема 1.4 *Нехай $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \ldots \mathfrak{F}_n \subset \ldots$ – "зростаюча"послідовність локально-опуклих просторів, причому кожен простір $\mathfrak{F}_n$ є підпростором $\mathfrak{F}_{n+1}$, тобто $\mathfrak{F}_n$ замкнений в $\mathfrak{F}_{n+1}$ і топологія в $\mathfrak{F}_n$ збігається на цьому просторі з топологією простору $\mathfrak{F}_{n+1}$. Тоді $\mathfrak{F} = \operatorname{ind}\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_n$ є регулярною індуктивною границею. І якщо послідовність $\{f_n \in \mathfrak{F}\}_{n\in\mathbb{N}}$ прямує до 0 в $\mathfrak{F}$, то існує таке m, що, починаючи з деякого номера n, $f_n \in \mathfrak{F}_m$ і $f_n \to 0$ в $\mathfrak{F}_m$.*

1.2 Простори гладких векторів замкненого оператора

Скрізь у подальшому через $E(\mathfrak{B})$ $(L(\mathfrak{B}))$ позначатимемо множину усіх щільно визначених замкнених (обмежених) операторів в $\mathfrak{B}$.

Припустимо, що $A \in E(\mathfrak{B})$. Для числа $\beta \geq 0$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \big| \exists \alpha > 0 \ \exists c = c(x) > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}\},$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \big| \forall \alpha > 0, \ \exists c = c(x, \alpha) > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}\},$$

де

$$C^{\infty}(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \quad (\mathbb{N}_0 = 0, 1, 2, \dots)$$

- простір нескінченно диференційовних векторів оператора A.

Очевидно, що $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ - лінійні простори, для довільних $\lambda \neq 0, \ \mu \in \mathbb{C}$

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(\lambda A + \mu I), \quad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(\lambda A + \mu I)$$

і, якщо $\beta_1 < \beta_2$, то

$$\mathfrak{G}_{(\beta_1)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_1\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta_2)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_2\}}(A).$$

У просторах $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ введемо аналогічно тому, як це зроблено у попередньому пункті (див. також [4, 5, 84, 115]), топологію індуктивної і, відповідно, проективної границі банахових просторів

$$\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \{x \in C^{\infty}(A) \big| \exists c = c(x) > 0 : \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \|A^k x\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}\} \ (\alpha > 0)$$

з нормою

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\|A^k x\|}{\alpha^k k^{k\beta}}.$$

Ясно, що

$$\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_1}(A) \subset \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_2}(A) \text{ при } \alpha_1 < \alpha_2 \tag{1.6}$$

і

$$\forall x \in \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_1}(A) : \|x\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_1}(A)} \geq \|x\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_2}(A)}. \tag{1.7}$$

Отже, вкладення (1.6) є неперервним і

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \operatorname{ind}\lim_{\alpha\to\infty} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A),$$

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\to 0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A).$$

Оскільки норми у просторах $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$ є порівнянними і узгодженими, то $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ – регулярна індуктивна границя банахових просторів $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$, а тому збіжність в $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ означає збіжність в $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$ при деякому $\alpha > 0$, а збіжність в $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ рівносильна збіжності в $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$ при всіх $\alpha \in (0, \delta)$ з достатньо малим δ.

Якщо $A \in L(\mathfrak{B})$, тобто оператор A обмежений, то для довільного $\beta > 0$

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \mathfrak{B}.$$

Відмітимо також, що, завдяки добре відомій формулі Стірлінга

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}, \quad k \to \infty,$$

у нерівності, присутній в означенні просторів $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ та $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, можна $k^{k\beta}$ замінити на $(k!)^{\beta}$.

Простори $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ називаються просторами аналітичних [112], цілих [113] і цілих експоненціального типу [114] векторів оператора A.

У конкретному випадку, коли

$$\mathfrak{B} = C([a, b]), \ -\infty < a < b < \infty,$$

$$(Ax)(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad \mathcal{D}(A) = C^1([a,b]),$$

$C^\infty(A)$ є не що інше, як множина нескінченно диференційовних на $[a,b]$ функцій, $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ - множини всіх аналітичних на $[a,b]$, цілих і цілих експоненціального типу функцій відповідно. Простори $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ $(\mathfrak{G}_{(\beta)}(A))$ з $\beta > 1$ відомі як класи Жевре типу Рум'є (Бьорлінга).

Якщо $\mathfrak{B} = L_2(\mathbb{R})$ і A – замикання оператора

$$(A_0x)(t) = -\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x^2(t), \quad \mathcal{D}(A_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

($C_0^\infty(\mathbb{R})$ – множина фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій), то, як показано в [133], $C^\infty(A) = S$ і $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = S_{\beta/2}^{\beta/2}$ $(\beta \geq 1)$, де S – простір Шварца, а $S_{\beta/2}^{\beta/2}$ – відповідний простір Гельфанда-Шилова (див. [115]).

Усі простори у наведених вище прикладах є щільними в $\mathfrak{B}$. Однак це, взагалі кажучи, не так у загальному випадку. Тому постало питання, за яких умов на оператор A і число β, $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$ або, принаймні, $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{B}$. Ця задача у різних конкретних ситуаціях цікавила багатьох математиків (у зв'язку з цим див.[84, 89]).

В [117] поставлена задача була розв'язана для $\beta > 1$ в термінах розміщення спектру оператора A і оцінки швидкості росту його резольвенти при наближенні до спектра. Нас буде цікавити, головним чином, випадок $0 \leq \beta \leq 1$, який відіграє важливу роль в питаннях теорії наближення функцій (див. [134]) і коректної розв'язності задачі Коші [170] для диференціально-операторних рівнянь у різних просторах аналітичних вектор-функцій.

Наведемо деякі результати у цьому напрямі (див. [118, 119, 122]) для генераторів C_0-груп та C_0-півгруп .

Твердження 1.1 *Нехай A – генератор C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в $\mathfrak{B}$. Тоді*

$$\forall\beta\in(0,1):\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)}=\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)}=\mathfrak{B}.$$

За умови, що спектр $\sigma(A)$ оператора A є дійсним і мажоранта його резольвенти

$$M(\delta)=\sup_{|Im\lambda|\geq\delta>0}\|R(\lambda;A)\|$$

задовольняє умову Левінсона

$$\int_0^1\ln\ln M(\delta)\,d\delta<\infty, \tag{1.8}$$

маємо $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)}=\mathfrak{B}$.

Будемо називати генератор A C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ неквазіаналітичним, якщо

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\|U(t)\|}{1+t^2}\,dt<\infty. \tag{1.9}$$

Як показано в [135], спектр неквазіаналітичного A лежить на дійсній осі, а для його резольвенти виконується нерівність (1.8). Варто також зазначити, що умова (1.8) є близькою до необхідної. Це підтверджує наступний приклад.

Приклад 1.1 *Нехай $\mathfrak{B}=L_2(\mathbb{R},\tau^2(t)dt)$, де вимірна локально обмежена функція $\tau(t)\geq 1,\ t\in\mathbb{R}$, задовольняє умови:*

1) $\forall t,s\in\mathbb{R}:\tau(t+s)\leq\tau(t)\cdot\tau(s)$;
2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{\ln\tau(t)}{1+t^2}\,dt=\infty$.

Тоді оператор

$$Ax(t)=-x'(t),$$

$$\mathcal{D}(A)=\{x(t)\in C(\mathbb{R})\big|x(t)\text{ абсолютно неперервна і}$$

$$x(t), x'(t) \in L_2(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt)\}$$

породжує C_0-групу $(U(t)x)(s) = x(s-t)$, для якої $\|U(t)\| \le \tau(t)$. Покажемо, що для будь-якого $\alpha > 0$ $\quad \mathfrak{G}_0^\alpha(A) = \{0\}$.

Припустимо, що це не так. Тоді існують $\alpha > 0$ та $x(t) \not\equiv 0$ з простору $L_2(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt)$ такі, що $x \in \mathfrak{G}_0^\alpha(A)$, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^{(n)}(t)|^2\, dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |x^{(n)}(t)|^2 \tau^2(t)\, dt < (c\alpha^n)^2, \ n \in \mathbb{N}_0,$$

а отже, $x(t) \in L_2(\mathbb{R})$ допускає продовження до цілої функції експоненціального типу. З нерівності $2\ln_+ |x(t)| < |x(t)|^2$ випливає, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln_+ |x(t)|}{1+t^2}\, dt < \infty,$$

звідки (див. [136])

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |x(t)||}{1+t^2}\, dt < \infty.$$

Покладемо тепер $y(t) = \tau(t)x(t)$. Оскільки

$$|y(t)|^2 = \exp\left(\frac{2(1+t^2)}{1+t^2} \ln |y(t)|\right) > \frac{2(1+t^2)}{1+t^2} \ln |y(t)|$$

$$\ge \frac{\ln |y(t)|}{1+t^2} = \frac{\ln |x(t)|}{1+t^2} + \frac{\ln |\tau(t)|}{1+t^2},$$

то $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2\, dt = \infty$, що суперечить включенню $x(t) \in L_2(\mathbb{R}, \tau^2(t)dt)$.

Що ж до щільності $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ в $\mathfrak{B}$, то вона, взагалі кажучи, не має місця для довільної C_0-півгрупи. Але для обмежених аналітичних C_0-півгруп має місце таке твердження [118].

Твердження 1.2 *Нехай $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$ - обмежена аналітична C_0-півгрупа з кутом θ. Тоді*

$$\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B} \text{ при } \beta > 1 - \frac{2\theta}{\pi}.$$

Якщо ж $\beta = 1 - \frac{2\theta}{\pi}$, *то можливі випадки, коли* $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{0\}$. *Існують аналітичні півгрупи* $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ *з кутом* $\theta = \frac{\pi}{2}$, *для яких* $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{0\}$. *Проте, якщо така півгрупа задовольняє умову* (1.8), *то* $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)} = \mathfrak{B}$.

1.3 Побудова експоненти від замкненого оператора

Побудова експоненціальної функції $exp(zA)$ від лінійного замкненого оператора A у банаховому просторі – одна з найважливіших задач математичного аналізу. Теорія півгруп лінійних операторів дає її розв'язок у випадку, коли A – генератор C_0-півгрупи, а це еквівалентне тому, що задача Коші для рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t)$$

поставлена коректно. Нами ця задача розв'язана для довільного замкненого оператора у банаховому просторі, множина цілих векторів якого є щільною у цьому просторі. Зупинимось коротко на її історичних аспектах.

У випадку, коли $\mathfrak{B} = \mathbb{C}$, а $U(t)$ - неперервна скалярна функція, що задовольняє (i) - (iii) з підрозділу 1.1 , О. Коші [137] (1821 р.) показав, що $U(t) = e^{tA}$ і дав означення $U(t)$ як розв'язку функціонального рівняння

$$U(t+s) = U(t)U(s),$$

а точніше, встановив, що якщо $U(t)$ – неперервний розв'язок цього рівняння, то існує єдине $A \in \mathbb{C}$ таке, що $U(t) = e^{tA}$.

Зауважимо, що функція $e^{tA}, A \in \mathbb{C}$, була визначена ще Л. Ейлером [99] у 1728 р. двома способами:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \tag{1.10}$$

і

$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{tA}{n}\right)^n. \tag{1.11}$$

Цей результат був поширений у 1920 р. С. Банахом [138] і В. Серпінським [139] на вимірні $U(t)$, а в 1887 р. Ж. Пеано [100] довів, що у випадку скінченновимірного $\mathfrak{B}$ ряд в (1.10) збігається в операторній нормі і для його суми $U(t)$ виконуються співвідношення (i)-(iii); більш того, для будь-якого $x \in \mathfrak{B}$ вектор-функція $U(t)x$ є єдиним розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} &= Ay(t), \ t \in (-\infty, \infty), \\ y(0) &= x, \ x \in \mathfrak{B}. \end{cases} \tag{1.12}$$

У подальшому це твердження було узагальнене (див.[101, 102, 140]) на випадок довільного неперервного оператора A у нескінченновимірному $\mathfrak{B}$, а саме, було показано, що для такого оператора ряд в (1.10) збігається в рівномірній операторній топології і його сума $U(t)$ є неперервною в цій топології оператор-функцією, що задовольняє співвідношення (i)-(iii). Навпаки, якщо неперервна в рівномірній операторній топології оператор-функція $U(t)$ задовольняє співвідношення (i)-(iii), то існує єдиний неперервний лінійний оператор A, за допомогою якого $U(t)$ можна подати як у вигляді (1.10), так і у вигляді (1.11). Що стосується C_0-груп з необмеженим генератором (а саме вони найчастіше виникають в задачах математичної фізики), то ряд $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}$ збігається не для всіх $x \in \mathfrak{B}$, а отже, зображення (1.10), взагалі кажучи, не має місця. Проте, ще у 1772 р. Ж.Л. Лангранж (див. [105]) навів формулу

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}) \ \forall t \in (-\infty, \infty) : x(t+s) = \exp\left(t\frac{d}{ds}\right) x(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n x^{(n)}(s)}{n!}, \tag{1.13}$$

в якій, як бачимо, група зсувів $U(t)x(s) = x(t+s)$ у просторі $L^2(\mathbb{R})$ зображується у вигляді експоненти від її генератора – оператора диференціювання. І хоча формула (1.10) не була ним обгрунтована, він використовував її з великою майстерністю, і ця формула привела до низки нових на той час теорем, доведення яких важко собі уявити без неї. Що ж до надання їй сенсу для довільної C_0-групи, тобто усвідомлення того, а що ж саме треба розуміти під e^{tA}, де A – генератор цієї групи, то для цього знадобилось майже два століття, і це стало одним із найважливіших досягнень математичного аналізу середини 20-го ст.

Якщо розглядати рівність(1.13) у різних функціональних банахових просторах, наприклад, у $L^p(\mathbb{R})$, $C_b(\mathbb{R})$ тощо, то можна побачити, що її ліва частина $x(t+s)$ визначена на всьому просторі, а ряд справа – лише на певних класах цілих функцій, щільних у цих просторах. Тому постає питання: чи існують для довільної C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ щільні в ньому підпростори $\mathfrak{B}_1$ і $\mathfrak{B}_2$ такі, що

$$\forall x \in \mathfrak{B}_1 : U(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x, \tag{1.14}$$

$$\forall x \in \mathfrak{B}_2 : U(t)x = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{tA}{n} \right)^n x? \tag{1.15}$$

Якщо $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ – унітарна група у гільбертовому просторі, то відповідь на (1.14) дає теорема Стоуна [106] про її спектральне зображення. На основі операційного числення для самоспряжених операторів ним було установлено, що сім'я $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ унітарних операторів у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ утворює C_0-групу тоді і тільки тоді, коли існує самоспряжений оператор A в $\mathfrak{H}$ такий, що

$$\forall t \in \mathbb{R} : U(t) = e^{itA} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE_\lambda \tag{1.16}$$

(E_λ - розклад одиниці оператора A). У цьому випадку $\mathfrak{B}_1$ в (1.14) збігається з $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, оскільки для самоспряженого оператора A простір

$$\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \left\{ x \in \mathfrak{H} \middle| \forall \alpha > 0 : \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha\lambda}\, d(E_\lambda x, x) < \infty \right\}$$

є щільним в $\mathfrak{H}$ і на елементах $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ має місце зображення (1.10).

Для довільної C_0-групи у банаховому просторі проблема (1.14) була поставлена А.М. Колмогоровим і розв'язана І.М. Гельфандом [107] в 1939 р. за умови обмеженості розглядуваної групи. В роботі [108] ця проблема розв'язана нами у загальному випадку. Очевидно, що тоді із збіжності ряду (1.14) випливає можливість продовження $U(t)x$ до цілої вектор-функції $U(z)x,\ z \in \mathbb{C}$, і, якщо оператор A неперервний в $\mathfrak{B}$, то $U(z)x$ є експоненціального типу для будь-якого $x \in \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$. Це, взагалі кажучи, не так у випадку необмеженого A. В [108] наведено умови на вектор $x \in \mathfrak{B}_1$, за яких $U(z)x$ має скінченний тип і скінченний порядок росту.

Що стосується проблеми існування щільної в $\mathfrak{B}$ множини $\mathfrak{B}_2$, на елементах якої існує границя (1.15), то вона була поставлена у 1946 р. Е. Хілле для сильно неперервних півгруп. Як було зазначено ним (див. [141]), "поширити формулу (1.15) на сильний випадок мабуть надзвичайно важко; імовірно, що навіть при $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n)$ границя (1.15) не завжди існує". Ми доводимо, що для C_0-групи $\{U(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ ця границя існує тоді і тільки тоді, коли $x \in \mathfrak{B}_1$ (а отже, $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1$), і вона є сумою ряду (1.14).

1.4 Деякі підпростори аналітичних вектор-функцій

Позначимо через $\mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{B})$ простір вектор-функцій $y(z)$ із значеннями в $\mathfrak{B}$, аналітичних в околі нуля в $\mathbb{C}$ (окіл залежить від функції). Будемо говорити, що послідовність $y_n(\cdot) \in \mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{B}),\ n \in \mathbb{N}$, збігається в $\mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{B})$ до $y(\cdot)$ при $n \to \infty$, якщо існує окіл нуля $O \subseteq \mathbb{C}$, в якому всі функції $y_n(z)$

є аналітичними і $\|y_n(z) - y(z)\| \to 0$ $(n \to \infty)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset O$.

Нехай також $\mathcal{B}_r(\mathfrak{B})$ – множина $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій $y(z)$, аналітичних в $\mathcal{O}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ і неперервних на $\overline{\mathcal{O}_r}$. Множина $\mathcal{B}_r(\mathfrak{B})$ утворює банаховий простір відносно норми

$$\|y\|_{\mathcal{B}_r(\mathfrak{B})} = \max_{z \in \overline{\mathcal{O}_r}} \|y(z)\|.$$

Очевидно, що

$$\mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{B}) = \operatorname{ind}\lim_{r \to 0} \mathcal{B}_r(\mathfrak{B}).$$

Простір

$$\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B}) = \operatorname{proj}\lim_{r \to 0} \mathcal{B}_r(\mathfrak{B})$$

збігається з множиною усіх цілих $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій. Збіжність $y_n(\cdot) \to y(\cdot),\ n \to \infty$, в $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ означає, що

$$\|y_n(z) - y(z)\| \to 0,\ n \to \infty,\ \text{рівномірно на кожному компакті } K \subset \mathbb{C}.$$

Нагадаємо, що вектор-функція є локально аналітичною в індуктивній (проективній) границі банахових просторів, якщо вона є локально аналітичною в деякому (кожному) із цих банахових просторів. Аналогічно визначається там ціла вектор-функція.

Має місце така теорема (див. [98, 109]).

Теорема 1.5 *Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$. Тоді для довільного $x \in \mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ з $\gamma < 1$ ($x \in \mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$ з $\gamma \le 1$), вектор-функція*

$$\exp(zA)x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k x}{k!}$$

є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ (у просторі $\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$). Якщо $x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, то $\exp(zA)x \in \mathfrak{A}_{loc}(\mathfrak{G}_{\{1\}}(A))$. Більш того, якщо A – генератор обмеженої *аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$, то сім'я $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює однопараметричну C_0-групу у цих просторах і*

$$\forall x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : \exp(tA)x = \begin{cases} e^{tA}x \quad \textit{при} \quad t \geq 0 \\ (e^{-tA})^{-1}x \quad \textit{при} \quad t < 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Доведення. Припустимо, що $x \in \mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ з $\gamma \leq 1$, тобто

$$\exists \alpha > 0, \ \exists c = c(x, \alpha) > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \|A^n x\| \leq c\alpha^n n^{n\gamma}.$$

Тоді для довільного $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\left\| A^n \left(\exp(zA)x - \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k A^k x}{k!} \right) \right\| = \left\| A^n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{z^k A^k x}{k!} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k \|A^{n+k}x\|}{k!}$$

$$\leq c \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \alpha^{n+k} (n+k)^{(n+k)\gamma} = c\alpha^n n^{n\gamma} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} k^{k\gamma} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n\gamma} \left(1 + \frac{n}{k}\right)^{k\gamma}.$$

Нерівності

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n\gamma} \leq \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{n} \leq e^k$$

та

$$\left(1 + \frac{n}{k}\right)^{n\gamma} \leq \left(1 + \frac{n}{k}\right)^{k} \leq e^n$$

зумовлюють оцінку

$$\left\| A^n \left(exp(zA)x - \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k A^k x}{k!} \right) \right\| \leq c_m (\alpha e)^n n^{n\gamma}, \tag{1.18}$$

де

$$c_m = c_m(z, \alpha) = c \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|\alpha e z|^k}{k!} k^{k\gamma}.$$

Зауважимо, що для $x \in \mathfrak{G}_{(\gamma)}(A), \ \gamma \leq 1$, нерівність (1.18) виконується для будь-якого $\alpha > 0$.

Припустимо, що $\gamma < 1$. Тоді для довільного фіксованого $R > 0$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\alpha e z|^k}{k!} k^{k\gamma}$ збігається рівномірно в $\overline{\mathcal{O}_R}$ при будь-якому $\alpha > 0$. Тому для кожного $\alpha > 0$, $c_m(z,\alpha) \to 0, m \to \infty$, рівномірно в $\overline{\mathcal{O}_R}$. Таким чином, якщо $x \in \mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ $(x \in \mathfrak{G}_{(\gamma)}(A))$ з $\gamma < 1$, то нерівність (1.18) справджується в $\overline{\mathcal{O}_R}$ для деякого (довільного) $\alpha > 0$. З цієї причини ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k A^k x}{k!}$ збігається рівномірно у крузі $\overline{\mathcal{O}_R}$ в $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$-топології (в $\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$-топології) і визначає $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$-значну ($\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$-значну) аналітичну функцію в $\overline{\mathcal{O}_R}$. Оскільки R – довільне, цей ряд задає цілу $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$-значну ($\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$-значну) функцію.

Нехай тепер $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді для довільного фіксованого $R > 0$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{|z\alpha e|^k}{k!} k^k$ збігається в $\overline{\mathcal{O}_R}$, якщо $R\alpha e \leq \frac{1}{3}$, і отже, оцінка (1.18) виконується в $\overline{\mathcal{O}_R}$ при $\alpha \in \left(0, \frac{1}{3eR}\right]$. Очевидно ця оцінка має місце і для $\alpha > \frac{1}{3eR}$. Оскільки R може бути яким завгодно, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k A^k x}{k!}$ збігається в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$-топології на будь-якій компактній множині $K \in \mathbb{C}$. Таким чином, цей ряд визначає цілу $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$-значну функцію.

Якщо ж $x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, то існує $\alpha > 0$ таке, що (3.1) має місце для будь-якого $z \in \overline{\mathcal{O}_{\frac{1}{3e\alpha}}}$, а отже, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k A^k x}{k!}$ збігається в $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$-топології в крузі $\overline{\mathcal{O}_{\frac{1}{3e\alpha}}}$ і визначає локально аналітичну в $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ вектор-функцію.

Перейдемо до доведення (1.17). Оскільки півгрупа $\{\exp(tA)\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною, то

$$\forall t \geq 0 : \ker e^{tA} = \{0\},$$

а тому існує обернений до e^{tA} оператор, визначений на щільній в $\mathfrak{B}$ множині $\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)$. Враховуючи, що $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ – сильно неперервна півгрупа, робимо висновок, що задача Коші

$$\begin{cases} y'(t) - Ay(t) &= 0, \ t > 0 \\ y(0) &= x, \ x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) \end{cases}$$

є однозначно розв'язною, а її розв'язок має вигляд $y(t) = e^{tA}x$. Але вектор-функція $\exp(tA)x$ також є розв'язком цієї задачі. Звідси випливає, що

$$\forall x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : \exp(tA)x = e^{tA}x \text{ при } t \geq 0.$$

Беручи до уваги інваріантність простору $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ відносно e^{tA}, дійдемо висновку, що вектор-функція $h(t) = \exp(-tA)e^{tA}x$ є неперервно диференційовною у цьому просторі. Очевидно, що $h'(t) = 0$ при $t \geq 0$. Отже,

$$\forall t \geq 0 : \exp(-tA)e^{tA}x = x, \ x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Аналогічно, беручи за $h(t)$ вектор-функцію $e^{tA}\exp(-tA)x$, одержуємо

$$\forall x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : e^{tA}\exp(-tA)x = x(t \geq 0),$$

звідки

$$\left(e^{tA}\right)^{-1} = \exp(-tA).$$

Теорему доведено.

У подальшому оператор $\left(e^{tA}\right)^{-1}$ позначатимемо e^{-tA}

За визначенням, ціла $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція $y(z)$ має скінченний порядок росту, якщо існує дійсне число γ таке, що

$$\|y(z)\| \leq e^{|z|^\gamma}$$

для достатньо великих $|z|$. Інфімум $\rho(y)$ таких γ називається порядком $y(z)$.

Далі, нехай $\gamma > 0$ – довільне фіксоване. Під степенем цілої $\mathfrak{B}$-значної функції $y(z)$ відносно числа γ розумітимемо

$$\sigma(y, \gamma) = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln \max\limits_{|z|=r} \|y(z)\|}{r^\gamma}.$$

Якщо $y(z)$ має скінченний порядок $\rho : \rho = \rho(y) < \infty$, і $\gamma < \rho$, то $\sigma(y, \gamma) = \infty$, але якщо $\gamma > \rho$, тоді $\sigma(y, \gamma) = 0$. Значення $\sigma = \sigma(y, \rho)$ – тип вектор-функції $y(z)$ порядку ρ. Ціла $\mathfrak{B}$-значна функція $y(z)$ скінченного степеня відносно числа 1 ($\sigma(y, 1) = \sigma(y) < \infty$) називається цілою вектор-функцією експоненціального типу $\sigma(y)$.

Для довільного фіксованого числа $\rho > 0$ позначимо через $\mathfrak{A}_c^\rho(\mathfrak{B})$ простір усіх цілих $\mathfrak{B}$-значних функцій порядку не вище за ρ і скінченного степеня відносно цього ρ. Збіжність в $\mathfrak{A}_c^\rho(\mathfrak{B})$ розуміється таким чином: $\mathfrak{A}_c^\rho(\mathfrak{B}) \ni y_n(\cdot) \to y(\cdot)$ в $\mathfrak{A}_c^\rho(\mathfrak{B})$ при $n \to \infty$, якщо послідовність $\sigma(y_n, \rho)$ обмежена і $\|y_n(z) - y(z)\| \to 0$ $(n \to \infty)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Ясно, що $\mathfrak{A}_c^1(\mathfrak{B})$ є не що інше, як простір $\mathfrak{A}_{\exp}(\mathfrak{B})$ цілих $\mathfrak{B}$-значних функцій експоненціального типу.

Нехай $\mathfrak{A}_c^{\rho,\alpha}(\mathfrak{B})$ (число $\alpha > 0$ довільне) – множина цілих $\mathfrak{B}$-значних функцій $y(z)$ порядку $\rho(y) \le \rho$ і таких, що

$$\exists c = c(y),\ \forall z \in \mathbb{C} : \|y(z)\| \le c e^{\alpha |z|^\rho}.$$

Лінійна множина $\mathfrak{A}_c^{\rho,\alpha}(\mathfrak{B})$ є банаховим простором відносно норми

$$\|y\|_{\mathfrak{A}_c^{\rho,\alpha}(\mathfrak{B})} = \sup_{r \ge 0} \max_{|z|=r} \|y(z)\| e^{-\alpha r^\rho}.$$

Простою перевіркою переконуємось, що

$$\mathfrak{A}_c^\rho(\mathfrak{B}) = \operatorname*{ind\,lim}_{\alpha \to \infty} \mathfrak{A}_c^{\rho,\alpha}(\mathfrak{B}).$$

Як і в скалярному випадку (див.[136]), порядок і тип цілої вектор-функції

$$y(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k \in \mathfrak{B},$$

можна знайти за формулами

$$\rho = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{\ln \|c_n\|^{-1}}, \quad (e\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}} = \varlimsup_{n \to \infty} \left(n^{1/\rho} \sqrt[n]{\|c_n\|} \right). \tag{1.19}$$

Будемо говорити, що цілий вектор x оператора $A \in E(\mathfrak{B})$ має скінченний порядок відносно цього оператора (A-порядок), якщо існує число $\gamma \in (-\infty, 1)$ таке, що, починаючи з деякого номера $n_0 = n_0(x)$,

$$\forall n \geq n_0 : \|A^n x\| \leq n^{n\gamma}$$

($n_0 = n_0(\gamma) \in \mathbb{N}$ достатньо велике). Точну нижню межу $p(x)$ таких γ назвемо порядком вектора x відносно оператора A (або просто A-порядком). A-тип $s(x)$ вектора x A-порядку $p(x)$ визначається як

$$s(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \|A^n x\| \leq \alpha^n n^{p(x)} \quad (n \geq n_0)\right\}.$$

Вважатимемо, що цілий вектор x оператора A порядку $p(x)$ має мінімальний A-тип, якщо $s(x) = 0$, нормальний – за умови, що $0 < s(x) < \infty$, і максимальний – якщо $s(x) = \infty$.

Теорема 1.6 *Нехай $x \in \mathfrak{B}$. Для того щоб $\mathfrak{B}$-значна функція $y(z) = \exp{(zA)}\, x$ була цілою, необхідно і достатньо, щоб $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Якщо це так, то $y(z)$ має скінченний порядок $\rho = \rho(y)$ і скінченний тип $\sigma = \sigma(y, \rho)$ тоді і тільки тоді, коли $p = p\,(x, A) < 1$ і $s = s\,(x, p, A)$ є скінченним, де p і s – A-порядок і A-тип вектора x відповідно. Величини ρ і σ пов'язані з p і s формулами*

$$\rho = \frac{1}{1-p}, \quad \sigma = \frac{(se)^{\rho}}{\rho e}. \tag{1.20}$$

Доведення. Нехай $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді за теоремою 1.5 $y(z)$ є цілою $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$-значною і, отже, $\mathfrak{B}$-значною вектор-функцією. Позначимо через ρ і σ її порядок і тип відповідно. Оскільки

$$y^{(n)}(z) = A^n y(z)$$

і

$$\forall \varepsilon > 0 : \|y(z)\| \leq c_{\varepsilon} e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^{\rho}}, \quad c_{\varepsilon} = const,$$

то

$$\forall r>0: \|A^n y(0)\| = \|A^n x\| = \frac{n!}{2\pi}\left\| \int\limits_{|z|=r} \frac{y(z)}{z^{n+1}}\, dz \right\| \le c_\varepsilon \frac{n! e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho}}{r^n}.$$

Беручи до уваги, що $\min\limits_{r>0} \dfrac{e^{(\sigma+\varepsilon)r^\rho}}{r^n}$ досягається в точці $r = \left(\dfrac{n}{(\sigma+\varepsilon)\rho}\right)^{1/\rho}$, а також формулу Стірлінга

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

приходимо, в силу довільності r, до співвідношення

$$\|A^n x\| \le c\left(\left(e^{1-\rho}\sigma\rho\right)^{1/\rho} + \varepsilon_1\right)^n n^{\frac{\rho-1}{\rho}n},$$

де $0 < c = const, \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Переходячи в ньому до границі при $\varepsilon \to 0$, одержуємо оцінку

$$\|A^n x\| \le c\left(e^{1-\rho}\sigma\rho\right)^{n/\rho} n^{\frac{\rho-1}{\rho}n}, \tag{1.21}$$

яка показує, що A-порядок p вектора x задовольняє нерівність

$$p \le \frac{\rho-1}{\rho}. \tag{1.22}$$

Навпаки, припустимо, що вектор x має скінченний A-порядок $p < 1$ і скінченний A-тип s. Формули (1.19), означення A-типу, нерівність (1.21) та формула Стірлінга обумовлюють наступне співвідношення для порядку ρ і типу σ вектор-функції $y(z)$:

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln \dfrac{n!}{\|A^n x\|}} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln \dfrac{n!}{c(s+\varepsilon)^n n^{n\beta}}} = \frac{1}{1-p} \Longleftrightarrow p \ge \frac{\rho-1}{\rho}. \tag{1.23}$$

З (1.22) і (1.23) випливає, що

$$\rho = \frac{1}{1-p} \Longleftrightarrow p = \frac{\rho-1}{\rho}..$$

Спираючись на (1.21) і означення типу вектора x, дістанемо нерівність

$$s \leq \left(e^{1-\rho}\sigma\rho\right)^{1/\rho}.$$

З іншого боку, оскільки ρ є скінченним, тип σ відносно порядку ρ визначається виразом(1.19). Отже,

$$(e\sigma\rho)^{1/\rho} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(n^{1/\rho}\sqrt[n]{\frac{\|A^n x\|}{n!}}\right) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{1/\rho}\sqrt[n]{\frac{(s+\varepsilon)^n}{n!}} n^{1-\frac{1}{\rho}} \leq e(s+\varepsilon).$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ можна вибрати як завгодно малим, робимо висновок, що

$$(e\sigma\rho)^{1/\rho} \leq es.$$

Тому

$$\sigma = \frac{(se)^\rho}{\rho e}.$$

Теорему доведено.

Як і в скалярному випадку, оператор-функція e^{zA} в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ для $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ задовольняє функціональне рівняння

$$\exp((z_1+z_2)A) = \exp(z_1 A)\exp(z_2 A)$$

та диференціальне рівняння

$$\frac{d\exp(zA)}{dz} = A\exp(zA).$$

Припустимо тепер, що A - генератор C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ у просторі $\mathfrak{B}$. Тоді задача Коші

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t),\ t \in (0,\infty), \\ y(0) &= x,\ x \in \mathcal{D}(A), \end{cases}$$

однозначно розв'язна і її розв'язок має вигляд $e^{tA}x$. Оскільки при $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ вектор-функція $\exp(tA)x$ є також розв'язком цієї задачі, то $\exp(tA)x = e^{tA}x$ при $t > 0$.

У просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ розглянемо також цілі операторні функції

$$\cosh(zA) = \frac{1}{2}\left(\exp(zA) + \exp(-zA)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} A^{2k},$$

та

$$\frac{\sinh(zA)}{A} = \int_0^z \cosh(zA)\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k}.$$

Якщо $0 \in \rho(A)$, то

$$\frac{\sinh(zA)}{A} = \frac{1}{2} A^{-1}\left(\exp(zA) - \exp(-zA)\right). \tag{1.24}$$

Як стверджується в [142], задача Коші

$$\begin{cases} y''(t) &= A^2 y(t), \quad t \in (0, \infty), \\ y(0) &= x_1 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A), \quad y'(0) = x_2 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A), \end{cases}$$

є однозначно розв'язною в класі цілих вектор-функцій в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і її розв'язок має вигляд

$$y(t) = \cosh(tA)x_1 + \frac{\sinh(tA)}{A} x_2.$$

Неважко також перевірити, що

$$\int_0^z \exp((z - 2s)A)\, ds = \frac{\sinh(zA)}{A}. \tag{1.25}$$

1.5 Зображення групи лінійних операторів у банаховому просторі експоненціальною оператор-функцією

З теореми 1.6 і твердження 1.2 випливає, що для довільної C_0-групи $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ у просторі $\mathfrak{B}$ проблема, асоційована з (1.14), завжди має розв'язок, а простір $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ є максимальним щільним в $\mathfrak{B}$ підпростором, на якому ця проблема розв'язна. Це означає, що якщо ряд у правій частині (1.14) збігається для довільного $t \in \mathbb{R}$, то $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, а сума цього ряду дорівнює $U(t)x$, тобто група $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ зображується у вигляді степеневого ряду:

$$\forall x \in \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{G}_{(1)}(A) : U(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n x.$$

Що ж до множини векторів x, для яких $U(t)x$ допускає продовження до цілої вектор-функції $U(z)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} A^n x$ скінченного порядку росту $\rho : 1 < \rho < \infty$ і скінченного типу σ, то вона збігається зі щільним в $\mathfrak{B}$ підпростором $\mathfrak{G}_{\{p\}}(A)$, де $p = \dfrac{\rho - 1}{\rho}$; множина ж цілих векторів x оператора A, породжуючих орбіти $U(z)x$ порядку ρ і мінімального типу, є не що інше, як $\mathfrak{G}_{(p)}(A)$, і $\overline{\mathfrak{G}_{(p)}(A)} = \mathfrak{B}$. Множиною векторів x, для яких $U(z)x$ – ціла вектор-функція експоненціального типу, є простір $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$, не завжди щільний в $\mathfrak{B}$, і є щільним лише тоді, коли A задовольняє умову неквазіаналітичності (1.9).

А тепер перейдемо до асоційованого з (1.15) питання про можливість зображення групи $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ границею послідовності $\left\{\left(I + \dfrac{tA}{n}\right)^n x\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 1.7 *Нехай $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді послідовність $\left(I + \dfrac{zA}{n}\right)^n x, n \in \mathbb{N}$, збігається рівномірно до $U(z)x$ на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Навпаки, якщо послідовність $\left(I + \dfrac{tA}{n}\right)^n x$, $x \in C^\infty(A)$, збігається для довільного $t \in \mathbb{R}$, то $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і*

$$\lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x = U(t)x.$$

Доведення. Припустимо, що $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Для $k \in \mathbb{N}$ покладемо

$$c_j(k) = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{k^j} & \text{при} \quad 1 \le j \le k, \ c_0(k) = 1, \\ 0 & \text{при} \quad k < j. \end{cases}$$

Тоді для будь-якого $c_j(k) \le 1$ $(j \in \mathbb{N})$, $c_j(k) \to 1$ при $k \to \infty$ і

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j(k) z^j}{j!} A^j x = \left(I + \frac{zA}{k}\right)^k x. \tag{1.26}$$

Позначимо через $S_n(k, z)x$ частинну суму ряду в (1.26), тобто

$$S_n(k, z)x = \sum_{j=0}^{n} \frac{c_j(k) z^j}{j!} A^j x.$$

Очевидно, що

$$\|S_{n+m}(k, z)x - S_n(k, z)x\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{c_j(k) z^j}{j!} A^j x \right\|$$

$$\le \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{c_j(k)|z|^j}{j!} \|A^j x\| \le \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{|z|^j}{j!} \|A^j x\|.$$

Оскільки x – цілий вектор оператора A, то

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{|z|^j}{j!} \|A^j x\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

а тому

$$\|S_{n+m}(k, z)x - S_n(k, z)x\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Тому ряд $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j(k) z^j}{j!} A^j x$ збігається рівномірно по $k \in \mathbb{N}$ і $z \in K$. Отже, в рівності (1.26) можна перейти до границі під знаком суми при $k \to \infty$, внаслідок чого одержуємо

$$\lim_{k\to\infty} \left(I + \frac{zA}{k}\right)^k x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} A^n x = U(z)x.$$

Більш того, збіжність послідовності $\left(I + \dfrac{zA}{k}\right)^k x$ є рівномірною на K.

Навпаки, припустимо, що послідовність $\left(I + \dfrac{tA}{n}\right)^n x$ $(x \in C^\infty(A), n \in \mathbb{N})$ збігається для кожного $t \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\left(\frac{tA}{n}\right)^n x = \left(I + \frac{tA}{n} - I\right)^n x = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(I + \frac{tA}{n}\right)^k (-1)^{n-k} x.$$

Беручи до уваги, що внаслідок збіжності послідовність $\left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x,\ n \in \mathbb{N}_0$, є обмеженою, тобто

$$\left\|\left(I + \frac{tA}{k}\right)^k x\right\| \leq M_t$$

(t – довільне фіксоване), одержуємо

$$\left\|\left(\frac{tA}{n}\right)^n x\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} C_n^k M_t = M_t \cdot 2^n,$$

звідки

$$\|A^n x\| \leq M_t \left(\frac{2}{|t|}\right)^n n^n.$$

Звідси робимо висновок, що

$$\forall \alpha > 0\ \ \exists c = c(\alpha) : \|A^n x\| \leq c\alpha^n n^n\ (\forall n \in \mathbb{N}),$$

а це й означає, що x – цілий вектор оператора A.

А зараз підтвердимо той факт, що "навіть для $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x$ може не існувати"(Хілле), і, більш того, наведемо приклади C_0-групи і C_0-півгрупи, для яких ця границя не існує на просторі аналітичних векторів генератора A цієї групи або півгрупи.

Розглянемо спочатку групу $\left\{e^{tA}\right\}_{t\in\mathbb{R}}$, де $A = iB,\ B$ – додатний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, і покажемо, що вектори вигляду $x = e^B g,\ g \in \mathfrak{H}$, є аналітичними для оператора A, або, що те саме, для оператора B.

Справді, для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\|A^n x\|^2 = \|(iB)^n x\|^2 = \int\limits_0^{\infty} \lambda^{2n}\, d\left(E_\lambda x, x\right) = \int\limits_0^{\infty} \lambda^{2n} e^{-2\lambda}\, d\left(E_\lambda g, g\right),$$

де E_λ – спектральна функція оператора B. Враховуючи, що

$$\max_{\lambda\in[0,\infty)}\left(\lambda^{2n}e^{-2\lambda}\right)=\left(e^{-1}\right)^{2n}\left(n^n\right)^2,$$

дістаємо оцінку

$$\forall n\in\mathbb{N}:\|A^n x\|\le ce^{-n}n^n,\quad c=\|g\|,$$

тобто x – аналітичний вектор оператора A.

Доведемо, що існують вектори $g\in\mathfrak{H}$ такі, що для $x=e^A g$

$$\left\|\left(I+\frac{tA}{n}\right)^n x\right\|\to\infty \text{ при } n\to\infty.$$

Дійсно,

$$\left\|\left(I+\frac{tA}{n}\right)^n x\right\|^2=\left\|\left(I+\frac{itB}{n}\right)^n\right\|^2$$

$$=\int_0^\infty\left|1+\frac{i\lambda t}{n}\right|^{2n}d\left(E_\lambda x,x\right)=\int_0^\infty\left(1+\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^2\right)^n d\left(E_\lambda x,x\right)$$

$$\ge\int_0^\infty\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^{2n}e^{-2\lambda}\,d\left(E_\lambda g,g\right)\ge\int_n^{2n}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^{2n}e^{-2\lambda}\,d\left(E_\lambda g,g\right).$$

Оскільки функція

$$\varphi_n(\lambda)=\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^{2n}e^{-2\lambda}$$

монотонно спадає на $[n,2n]$ і

$$\varphi_n(2n)=\left(\frac{2t}{e^2}\right)^{2n}e^{-2\lambda},$$

то, підбираючи $g\in\mathfrak{H}$ так, щоб

$$\int_n^{2n}d\left(E_\lambda g,g\right)>\frac{1}{n^2},$$

одержимо

$$\forall t > 10: \left\| \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x \right\|^2 \geq \frac{1}{n^2}\left(\frac{18}{e^2}\right)^{2n} \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Другий приклад стосується півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$, де $A = A^*,\ A = -B,\ B$ - додатний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Неважко переконатись, що вектори вигляду $x = e^{-B}g,\ g \in \mathfrak{H}$, є аналітичними для оператора A. Доведемо, що існують такі вектори $g \in \mathfrak{H}$, що для $x = e^{-B}g$

$$\left\| \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x \right\| = \left\| \left(I - \frac{tB}{n}\right)^n x \right\| \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Нехай E_λ – спектральна функція оператора B. Тоді

$$\left\| \left(I - \frac{tB}{n}\right)^n x \right\|^2 = \int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} d(E_\lambda x, x) \geq \int\limits_n^{2n} \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} d(E_\lambda x, x).$$

Оскільки

$$\forall t > 1, \forall \lambda \in [n, 2n]: \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{2n} \left(\frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} \leq \left(1 - \frac{t\lambda}{n}\right)^{2n},$$

то для довільного $x = e^{-B}g,\ g \in \mathfrak{H}$, маємо

$$\left\| \left(I - \frac{tB}{n}\right)^n x \right\|^2 \geq \int\limits_n^{2n} \left(I - \frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} d(E_\lambda x, x) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{2n} \int\limits_n^{2n} \left(\frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} e^{-2\lambda}\, d(E_\lambda g, g).$$

Враховуючи, що функція $\varphi_n(\lambda) = \left(\frac{t\lambda}{n}\right)^{2n} e^{-2\lambda}$ монотонно спадає на (n, ∞) і $\varphi_n(2n) = \left(\frac{2t}{e^2}\right)^{2n}$, та підбираючи $g \in \mathfrak{H}$ так, щоб $\int\limits_n^{2n} d(E_\lambda g, g) > \frac{1}{n^2}$, одержимо

$$\forall t > 10: \left\| \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x \right\|^2 = \left\| \left(I - \frac{tB}{n}\right)^n x \right\|^2$$

$$\geq \frac{1}{n^2}\left(\frac{18}{e^2}\right)^{2n} \to \infty \text{ при } n \to \infty,$$

що й треба було довести.

З огляду на застосування до теорії груп наведений вище результат насправді вказує шлях до побудови C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ у банаховому просторі за її генератором A, тому що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} &= Ay(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \\ y(0) &= x, \end{cases} \tag{1.27}$$

записується у вигляді $y(t) = U(t)x$, якщо ця задача, за висловом Ж. Адамара (див. [143]), поставлена коректно.Є декілька підходів до такої побудови, серед яких, наприклад,

а) $U(t)x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{tA}{n}\right)^{-n} x,\ x \in \mathfrak{B}$ (Ейлера-Хілле);

б) $U(t)x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x, \quad e^{tA_\lambda}x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^k}{k!}A_\lambda^k x,\ x \in \mathfrak{B}$,

де $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I$ – обмежений оператор, і $A_\lambda \to A$ при $\lambda \to \infty$ (Іосіди).

В усіх тих підходах C_0-група $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ відновлюється не безпосередньо за її генератором A, а за допомогою деяких функцій від нього (резольвенти $R(\lambda; A)$ в а) і наближень A_λ в б)), знаходження яких частогусто не є тривіальним. Запропоновані у цій підсекції способи відновлення $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ мають ту перевагу, що розв'язок задачі Коші (1.27) з початковими даними, які є цілими векторами оператора A, можна записати за допомогою степенів цього оператора. Оскільки за твердженням 1.1 множина $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ цілих векторів оператора A є щільною в $\mathfrak{B}$, то

$$\forall x \in \mathfrak{B}\ \exists \{x_n \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)\}_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{n\to\infty} x_n = x :$$

$$U(t)x_n \to U(t)x \text{ при } n \to \infty \ (\forall t \in \mathbb{R}). \tag{1.28}$$

Більш того, збіжність в (1.28) є рівномірною на будь-якому компакті з $\mathbb{R}$ і

$$U(t)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_n.$$

Теорема 1.7 може бути узагальнена на випадок довільного замкненого оператора в $\mathfrak{B}$ таким чином (див. [109]).

Теорема 1.8 *Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$, $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді послідовність $\left(I + \frac{zA}{n}\right)^n x$, $n \in \mathbb{N}$, збігається до $\exp(zA)x$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Навпаки, якщо послідовність $\left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x$, $x \in C^{\infty}(A)$, збігається для довільного $t \le 0$ і оператор A генерує стискальну C_0-півгрупу, то $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$.*

Доведення. Рівномірна на будь-якому компакті $K \subset \mathbb{C}$ збіжність послідовності $\left(I + \frac{zA}{n}\right)^n x$, $n \in \mathbb{N}$, до $\exp(zA)x$ доводиться так само, як і в теоремі 1.7.

Нехай тепер послідовність $\left(I + \frac{zA}{n}\right)^n x$, $(x \in C^{\infty}(A), n \in \mathbb{N})$, збігається в $\mathfrak{B}$ для довільного фіксованого $z = t < 0$. Тоді, як і у попередньому випадку,

$$\exists M_t > 0 : \left\| \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x \right\| \le M_t.$$

Оскільки $\left\{e^{tA}\right\}_{t \ge 0}$ - півгрупа стиску, то

$$\forall k, n \in \mathbb{N} : \left\| \left(I + \frac{tA}{n}\right)^{-k} \right\| \le 1 \text{ при} t < 0,$$

а тому для $k \le n$ маємо

$$\left\| \left(I + \frac{tA}{n}\right)^k x \right\| = \left\| \left(I + \frac{tA}{n}\right)^{k-n} \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x \right\| \le$$

$$\le \left\| \left(I + \frac{tA}{n}\right)^n x \right\| \le M_t.$$

Звідси
$$\left\|\left(\frac{tA}{n}\right)^n x\right\| = \left\|\left(\left(I+\frac{tA}{n}\right)-I\right)^n x\right\| =$$
$$= \left\|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\left(I+\frac{tA}{n}\right)^k x\right\| \le \sum_{k=0}^{n} C_n^k M_t = 2^n M_t,$$
а отже,
$$\forall n \in \mathbb{N} : \|A^n x\| \le M_t\left(\frac{2}{|t|}\right)^n n^n.$$
З формули Стірлінга і того, що $t < 0$ може бути яким завгодно, одержуємо
$$\forall \alpha > 0 \exists c = c(\alpha) : \|A^n x\| \le c\alpha^n n!,$$
тобто $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, що й треба було довести.

Варто зазначити, що теореми 1.7 і 1.8 розв'язують поставлену вище проблему Хілле відшукання максимальної множини векторів з $\mathfrak{B}$, для яких рівність (1.15) виконується для всіх $z \in \mathbb{C}$. Виявляється, що саме простір цілих векторів оператора A є такою множиною. Її щільність в $\mathfrak{B}$ має місце, якщо A є генератором:

- обмеженої аналітичної C_0-півгрупи (див. твердження 1.2);
- C_0-півгрупи нормальних операторів у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ (у цьому випадку $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{y \in \mathfrak{H} : y = E(\Delta)x,\ \forall x \in \mathfrak{H},\ \forall$ компакт $\Delta \in \mathbb{R}^2\}$);
- C_0-групи лінійних операторів у банаховому просторі (див. [109]).

Висновки до розділу 1

Основний результат цього розділу полягає у знаходженні для довільної C_0-групи $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ лінійних операторів з генератором A у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ максимальних щільних у ньому підпросторів $\mathfrak{B}_1$ та $\mathfrak{B}_2$, на елементах x яких ця група зображується у вигляді степеневого ряду або експоненціальної границі від оператора A, тобто розв'язанні проблем Колмогорова і Хілле. Показано, що проблема Колмогорова завжди має розв'язок, а множина $\mathfrak{B}_1$ є не що інше, як простір $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ цілих векторів оператора A. Доведено, що орбіта $U(t)x$ розглядуваної групи на цілому векторі x її генератора допускає продовження до цілої вектор-функції $\exp(zA)x := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} A^n x$. Знайдено умови на вектор x, за яких це продовження має скінченний порядок росту і скінченний тип, і з'ясовано зв'язок між ними і типом та порядком x відносно оператора A.

Показано також, що для генератора A C_0-групи експоненціальна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{tA}{n}\right)^n x$ існує тоді і тільки тоді, коли $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, і вона збігається з сумою степеневого ряду для $\exp(zA)x$. Результат щодо зображення C_0-групи експоненціальною границею від її генератора узагальнюється на випадок довільного замкненого, щільно заданого в $\mathfrak{B}$ оператора A. Наведено умови на оператор A, за яких простір $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ є щільним в $\mathfrak{B}$.

Таким чином, знайдено способи побудови C_0-групи безпосередньо за її генератором. У всіх інших підходах група відновлюється за певними функціями від нього, що, з огляду на застосування, ускладнює процес відновлення.

Крім того, у розділі досліджено простори локально аналітичних та цілих $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій, і наведено умови на вектор x, за яких для щільно заданого замкненого оператора A в $\mathfrak{B}$ функція $\exp(zA)x$ є локально аналітичною у просторі аналітичних векторів оператора A або цілою у класі Жевре $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ з $\gamma < 1$ (просторі $\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$ з $\gamma \le 1$).

2 Структура розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі

Однією з основних в теорії диференціальних рівнянь є проблема описання усіх розв'язків рівняння всередині області та їх дослідження при наближенні до границі. Для звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами ця проблема була розв'язана у 18-му ст., і її розв'язок часто-густо використовується при постановці різноманітних задач для таких рівнянь. Що стосується рівнянь із частинними похідними, то її розв'язання ще далеко не завершене навіть для рівнянь класичної математичної фізики.

В роботах [144-146] зазначена проблема досліджується нами для рівнянь вигляду

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0, \quad t \in \mathcal{I};\ n, m \in \mathbb{N}_0;\ n + m \geq 1, \tag{2.1}$$

де $\mathcal{I} = (0, \infty)$ або $(-\infty, \infty)$, A – генератор аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$. Зауважимо, що конкретні реалізації простору $\mathfrak{B}$, оператора A та m, n в рівнянні (2.1) містять у собі чимало класів рівнянь із частинними похідними в різних функціональних просторах.

Відмітимо також, що випадки $n = 1, m = 0; n = 0, m = 1; n = m \geq 1; \mathcal{I} = (-\infty, \infty)$ розглянуто в [144, 153]. Рівняння ж вигляду (2.1) на півосі $(0, \infty)$ досліджувалось багатьма математиками за різних умов на поведінку розв'язків в околі точки 0 (див., наприклад, [1, 88, 98, 154, 155]).

Перш ніж перейти до викладу основних результатів, що стосуються рівняння (2.1), зупинимось на рівнянні

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - A^2\right) y(t) = 0, \tag{2.2}$$

де $A \in E(\mathfrak{B})$, і покажемо, які труднощі виникають при відшуканні зображення його загального розв'язку на $(0, \infty)$.

Формально будь-який розв'язок рівняння (2.2) можна записати у вигляді

$$y(t) = \exp(tA) f_1 + \frac{\sinh(tA)}{A} f_2, \tag{2.3}$$

де f_1, f_2 - вектори з $\mathfrak{B}$. Щоб надати сенс цьому виразу, потрібно з'ясувати, що саме розуміється під $\exp(tA)$ та $\dfrac{\sinh(tA)}{A}$ і яку множину F мають перебігати вектори f_1, f_2, щоб одержати усі його розв'язки на $(0, \infty)$.

Якщо $A \in L(\mathfrak{B})$, то $\exp(tA)$ і $\dfrac{\sinh(tA)}{A}$ можна визначити, наприклад, за допомогою рядів

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \quad \text{та} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} A^{2k}}{(2k+1)!},$$

які збігаються рівномірно на довільному компакті $K \in \mathbb{C}$. Тоді загальний розв'язок рівняння (2.2) задається формулою (2.3), де $f_1, f_2 \in \mathfrak{B}$.

Якщо ж A не обмежений, то побудова цих функцій від оператора A у загальній ситуації не розв'язана ще й понині. Це по-перше. А по-друге, якщо навіть у деяких випадках можна визначити зазначені функції від оператора A, то де гарантія, що вираз (2.3) з $f_1, f_2 \in \mathfrak{B}$ дасть усі розв'язки рівняння (2.2)? Іноді множина F є вужчою за $\mathfrak{B}$, а інколи потрібно вийти за межі простору $\mathfrak{B}$.

Випадок, коли в рівнянні (2.2) A^2 – самоспряжене розширення мінімального оператора, породженого у просторі $L_2(a, b)$ виразом $\dfrac{d^2}{dx^2}$, уперше був розглянутий Даламбером, Ейлером та Д. Бернуллі ще в середині

18 ст. при вивченні розв'язків рівняння коливання струни. Вже тоді постало питання, як визначити відповідні функції від оператора A (формулою Даламбера чи тригонометричним рядом Д. Бернуллі) і що потрібно взяти за множину F. Це питання упродовж тривалого часу дискутувалось багатьма математиками, що привело до виникнення важливих понять аналізу, таких як, наприклад, функція, збіжність, інтеграл тощо, і розвитку нових розділів математики, зокрема спектральної теорії операторів та теорії півгруп.

Іншим відомим прикладом, що привернув до себе велику увагу, це було рівняння Лапласа (частинний випадок (2.2), коли за A^2 береться самоспряжене розширення мінімального оператора, породженого у просторі $L_2(a, b)$ диференціальним виразом $-\frac{d^2}{dx^2})$, для якого питання зображення загального розв'язку по суті еквівалентне можливості зображення довільної гармонічної (аналітичної) у відкритій області функції інтегралом Пуассона (Коші). Оскільки не всяка така функція має граничне значення у звичайному розумінні або в L_p, то стало ясно, що множина F має бути ширшою за простір неперервних функцій або L_p. Пошуки цієї множини привели до появи таких понять, як класи Гарді, гіперфункція тощо.

Спочатку перейдемо до формулювання основних результатів для рівняння (2.1) на $(-\infty, \infty)$.

2.1 Про розв'язки параболічних та еліптичних диференціальних рівнянь у банаховому просторі на $(-\infty, \infty)$

Розглянемо рівняння

$$y'(t) - Ay(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2.4}$$

та

$$y'(t) + Ay(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2.5}$$

де A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$. Рівняння (2.4) ((2.5)) є абстрактним параболічним (оберненим параболічним).

Приклади. Нехай $\mathfrak{B}$ – один із просторів $L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leq p < \infty)$, $C_0(\mathbb{R}^n)$ або $BUC(\mathbb{R}^n)$, де $C_0(\mathbb{R}^n)$ $(BUC(\mathbb{R}^n))$ – простір неперервних фінітних (обмежених рівномірно неперервних) функцій на $\mathbb{R}^n$ із супремум-нормою. У кожному з цих просторів задамо оператор A таким чином:

$$Au(x) = \Delta u(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \quad \mathcal{D}(A) = \{u \in \mathfrak{B} : \Delta u \in \mathfrak{B}\},$$

(Δ береться в сенсі розподілів).

Згідно з [3], оператор A генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу з кутом $\dfrac{\pi}{2}$ у просторі $\mathfrak{B}$, а саме:

$$(e^{tA}f)(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-s) e^{-|s|^2/4t}\, ds \quad t > 0, f \in \mathfrak{B}, x \in \mathbb{R}^n.$$

У цьому випадку (2.4) – класичне рівняння теплопровідності.

Якщо $A \leq 0$ – самоспряжений оператор у гільбертовому просторі, то він також генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу з кутом аналітичності $\dfrac{\pi}{2}$.

Під розв'язком (класичним) рівняння (2.4) або (2.5) на $(-\infty, \infty)$ розумітимемо сильно неперервно диференційовну вектор-функцію $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$, що задовольняє (2.4) або, відповідно, (2.5).

Теорема 2.1 *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$. Вектор-функція $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$ є розв'язком рівняння* (2.4) *на* $(-\infty, \infty)$ *тоді і тільки тоді, коли вона може бути подана у вигляді*

$$\forall t \in (-\infty, \infty) : y(t) = \exp(tA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A). \tag{2.6}$$

Отже, будь-який розв'язок $y(t)$ рівняння (2.4) *на* $(-\infty, \infty)$ *допускає продовження до цілої вектор-функції у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.*

Доведення. Припустимо, що $y(t)$ – роз'язок рівняння (2.4) на $(-\infty, \infty)$. Оскільки $y(t)$ є також розв'язком цього рівняння на $[0, \infty)$, то, згідно з [1],

$$\forall t \in [0, \infty) : y(t) = e^{tA}f = \exp(tA)f, \quad f \in \mathcal{D}(A).$$

Покладемо $z(t) = y(-t), \ t \geq 0$. Вектор-функція $z(t)$ є розв'язоком рівняння (2.5) на $[0, \infty)$. Як показано в [88],

$$y(-t) = z(t) = \exp(-tA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A), \quad t \in [0, \infty).$$

Беручи до уваги неперервність $y(t)$ в точці 0, одержуємо $f = g$. Таким чином, $y(t)$ зображується у вигляді (2.6) на всій дійсній осі. За теоремою 1.5, , така вектор-функція є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що той факт, що значення розв'язку $y(t)$ рівняння (2.4) належать до простору $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, для рівняння теплопровідності означає, що його розв'язки є цілими як по t, так і по x.

Аналогічно тому, як це зроблено для рівняння (2.4), доводиться, що вектор-функція $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$ є розв'язком рівняння (2.5) на $(-\infty, \infty)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\forall t \in (-\infty, \infty) : y(t) = \exp(-tA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A). \tag{2.7}$$

З теореми 1.5 тоді випливає, що вектор-функція (2.7) також є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

А зараз перейдемо до рівняння другого порядку

$$y''(t) - By(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2.8}$$

де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, тобто $B \in E(\mathfrak{B})$, $\rho(B) \supset (-\infty, 0)$ і існує стала $M > 0$ така, що

$$\forall \lambda > 0 : \|R(-\lambda; B)\| \leq \frac{M}{\lambda}.$$

Для слабо позитивного оператора B визначеними є (див. [1]) його дробові степені $B^{\alpha}, 0 < \alpha < 1$, і оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу в $\mathfrak{B}$.

Під розв'язком (класичним) рівняння (2.8) on $(-\infty, \infty)$ розумітимемо двічі неперервно диференційовну вектор-функцію $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(B)$, що задовольняє (2.8) на $(-\infty, \infty)$.

Теорема 2.2 *Нехай B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$. Для того, щоб вектор-функція $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathcal{D}(B)$ була розв'язком рівняння* (2.8) *на $(-\infty, \infty)$, необхідно і достатньо, щоб вона допускала зображення вигляду*

$$y(t) = \exp(tA)f + \frac{\sinh(tA)}{A}g, \quad f, g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A), \tag{2.9}$$

де $A = -B^{1/2}$,

$$\frac{\sinh(zA)}{A} = \int\limits_0^z \cosh(zA)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k},$$

$$\cosh(zA) = \frac{1}{2}\left(\exp(zA) + \exp(-zA)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} A^{2k}.$$

Отже, будь-який розв'язок рівняння (2.8) *на* $(-\infty, \infty)$ *є цілою вектор-функцією у просторі* $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Доведення. Припустимо, що $y(t)$ – розв'язок рівняння (2.8) на $(-\infty, \infty)$. Це рівняння можна записати як

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = 0.$$

Покладемо

$$z(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t).$$

Очевидно, що $z(t)$ – розв'язок рівняння (2.5) на $(-\infty, \infty)$ з оператором $A = -B^{1/2}$, який породжує обмежену аналітичну C_0-півгрупу у просторі $\mathfrak{B}$. Як показано вище,

$$\forall t \in (-\infty, \infty) : z(t) = \exp(-tA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Отже, $y(t)$ є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = \exp(-tA)g.$$

на $(-\infty, \infty)$. Нехай тепер

$$z_0(t) = y(t) - \frac{\sinh(tA)}{A} g.$$

Тоді

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) z_0(t) = \exp(-tA)g - \left(\frac{d}{dt} - A\right) \frac{\sinh(tA)}{A} g = 0,$$

тобто $z_0(t)$ – розв'язок рівняння (2.4) на $(-\infty, \infty)$. Тому

$$\forall t \in (-\infty, \infty) : z_0(t) = \exp(tA)f, \quad f \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

звідки

$$y(t) = \exp(tA)f + \frac{\sinh(tA)}{A}g, \quad f, g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

що, в силу теореми 1.5 і того, що вектор-функція $\dfrac{\sinh(tA)}{A}g$ є цілою в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, дає змогу зробити висновок, що $y(t)$ продовжується до цілої вектор-функції $y(z)$ у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що вектор-функція вигляду (2.9) є розв'язком рівняння (2.8).

Теорему доведено.

Як і в п. 1.4, позначимо через $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ простір цілих вектор-функцій із значеннями в $\mathfrak{B}$, а через $\mathfrak{A}_c^{\rho}(\mathfrak{B})$ – його підпростір, що охоплює усі вектор-функції порядку не вище ρ і скінченного степеня щодо цього ρ. Має рацію запитання: чи існують розв'язки рівнянь (2.4), (2.5) або (2.8) на $(-\infty, \infty)$, які допускають продовження до вектор-функцій з класу $\mathfrak{A}_c^{\rho}(\mathfrak{B})$, і якщо це так, то за яких умов множина таких розв'язків для відповідного рівняння є щільною у просторі усіх його розв'язків; іншими словами, чи існує для довільного розв'язку $y(\cdot)$ рівняння (2.4), (2.5) або (2.8) послідовність $y_n(\cdot) \in \mathfrak{A}_c^{\rho}(\mathfrak{B})$, що збігається до $y(\cdot)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$.

Теорема 2.3 *Для того, щоб розв'язок $y(z)$ рівняння (2.4), (2.5) (або (2.8)) на $(-\infty, \infty)$ належав до $\mathfrak{A}_c^{\rho}(\mathfrak{B})$, необхідно і достатньо, щоб*

$$y(0) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) \ (y(0), y'(0) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)),$$

де $\beta = \dfrac{\rho - 1}{\rho}$. Якщо ці умови виконуються, то $\forall z \in \mathbb{C} : y(z) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$.

При $\rho > \dfrac{\pi}{2\theta}$ (θ – кут аналітичності півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$), сукупність розв'язків $y \in \mathfrak{A}_c^\rho(\mathfrak{B})$ відповідного рівняння є щільною у множині всіх його розв'язків.

Доведення. Нехай $y \in \mathfrak{A}_c^\rho(\mathfrak{B})$ – розв'язок рівняння (2.4) на $(-\infty, \infty)$. Тоді $y(z)$ зображується у вигляді (2.6):

$$y(z) = \exp(zA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Як показано в [156], $y(0) = g \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$, де $\beta = \dfrac{\rho - 1}{\rho}$. За теоремою 1.5, $y(z) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ для довільного $z \in \mathbb{C}$. Обернене твердження випливає з тієї ж самої теореми. Аналогічні аргументи діють і у випадку рівняння (2.5).

Припустимо тепер, що $y \in \mathfrak{A}_c^\rho(\mathfrak{B})$ – розв'язок рівняння (2.8) на $(-\infty, \infty)$. Тоді (див. [156]) $y(0), y'(0) \in \mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(B)$ з $\gamma = 2\dfrac{\rho - 1}{\rho}$. Оскільки $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(B) = \mathfrak{G}_{\{\frac{\gamma}{2}\}}(A)$, то $y(0), y'(0) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$. Звідси і зображення (2.9) одержуємо включення

$$y(0) = f \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A), \quad y'(0) = Af + g \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$$

Беручи до уваги вкладення $A\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$, робимо висновок, що $g \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$. Теорема 1.5 і формула (2.9) гарантують включення $y(z), y'(z) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ для будь-якого $z \in \mathbb{C}$.

З твердження 1.2 випливає, що при

$$\beta > 1 - \frac{2\theta}{\pi} \Longleftrightarrow \rho = \frac{1}{1 - \beta} > \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{2\theta}{\pi}\right)} = \frac{\pi}{2\theta},$$

множина $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ є щільною в $\mathfrak{B}$. Оскільки розв'язки рівняння (2.4) мають вигляд

$$y(z) = \exp(zA)g, \quad g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

а $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, то вектор g можна наблизити в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$-топології векторами $g_n \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ ($n \in \mathbb{N}$), а тоді, за теоремою 1.5, послідовність

$y_n(z) = \exp(zA)g_n$ збігається до $y(z)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Подібні міркування можуть бути застосовані й для рівнянь (2.5) та (2.8).

Теорему доведено.

Що стосується $\rho = \dfrac{\pi}{2\theta}$, то розглядувані рівняння, взагалі кажучи, можуть не мати відмінних від тривіального розв'язків на $(-\infty, \infty)$ у класі $\mathfrak{A}_c^\rho(\mathfrak{B})$. Але (див.[134]) за умов $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ та

$$\int\limits_0^1 \ln\ln M(s)\,ds < \infty, \text{ де } M(s) = \sup_{|\mathrm{Im}\lambda| \geq s} \|R(\lambda; A)\|,$$

множина цілих розв'язків експоненціального типу є щільною у множині всіх його розв'язків. Це, наприклад, має місце у випадку, коли A – нормальний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, що генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу, або коли B є слабо позитивним нормальним оператором в $\mathfrak{H}$.

2.2 Однорідне m-гармонічне диференціально-операторне рівняння

Розглянемо рівняння вигляду

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = f(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2.10}$$

де B – позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, $m \in \mathbb{N}$, $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ – обмежена неперервна $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція. Нагадаємо, що оператор $B \in E(\mathfrak{B})$ називається позитивним, якщо $(-\infty, 0] \in \rho(B)$ ($\rho(\cdot)$ – резольвентна множина оператора) і існує стала $M > 0$ така, що

$$\forall \lambda > 0 : \left\|(B + \lambda I)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{1 + \lambda}.$$

У цьому випадку, згідно з [1, 157], визначені дробові степені $B^{\alpha}, 0<\alpha<1$, оператора B і оператор $A=-B^{\frac{1}{2}}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ від'ємного типу

$$\omega=\omega(A)=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left\|e^{tA}\right\|}{t}=-\sqrt{s(B)},$$

де

$$0<s(B)=\sup_{\lambda\in\sigma(B)}\mathrm{Re}\lambda,$$

$\sigma(B)$ – спектр оператора B.

Під розв'язком (класичним) рівняння (2.10) на $(-\infty,\infty)$ розумітимемо $2m$ разів неперервно диференційовну вектор-функцію $y(t):\mathbb{R}\mapsto\mathfrak{B}$ таку, що $y^{(2k)}(t)\in\mathcal{D}\left(B^{m-k}\right)$ $(k=0,1,\dots,m)$, вектор-функція $B^{m-k}y^{(2k)}(t)$ є неперервною на $(-\infty,\infty)$ і $y(t)$ задовольняє (2.10).

Спочатку розглянемо однорідне рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-B\right)^m y(t)=0,\quad t\in(-\infty,\infty), \tag{2.11}$$

Теорема 2.4 *$\mathfrak{B}$-Значна вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння (2.11) на $(-\infty,\infty)$ тоді і тільки тоді, коли її можна зобразити у вигляді*

$$y(t)=\sum_{k=0}^{m-1}t^k\left(\exp(tA)f_k+\exp(-tA)g_k\right),\quad f_k,g_k\in\mathfrak{G}_{(1)}(A), \tag{2.12}$$

де $A=-B^{\frac{1}{2}}$. Вектори f_k та g_k $(k=0,1,\dots,m-1)$ у формулі (2.12) однозначно визначаються за $y(t)$.

Доведення. Неважко переконатися, що вектор-функція $y(t)$ вигляду (2.12) є розв'язком рівняння (2.11). Щоб довести протилежне, скористаємось методом математичної індукції.

Припустимо, що $y(t)$ – розв'язок рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-B\right)y(t)=\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)y(t)=$$

$$= \left(\frac{d}{dt} + A\right)\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

і покладемо

$$z(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t).$$

Вектор-функція $z(t)$ є розв'язком рівняння (2.5) на півосі $(0, \infty)$. Як показано в [98], на півосі $(0, \infty)$ $z(t)$ має вигляд

$$z(t) = \exp(-tA) h_1, \quad h_1 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

тобто

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = \exp(-tA) h_1, \quad t > 0.$$

Позначимо

$$z_0(t) = y(t) - \frac{\sinh(tA)}{A} h_1. \tag{2.13}$$

Зважаючи на те, що оператор-функція

$$\frac{\sinh(tA)}{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} A^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, безпосередньою перевіркою переконуємось, що

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) z_0(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки A – генератор C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$, то (див., наприклад, [1])

$$\forall t \geq 0 : z_0(t) = e^{tA} h_2, \quad h_2 \in \mathcal{D}(A). \tag{2.14}$$

Беручи до уваги, що вектор-функція $z_1(t) = z_0(-t)$ є розв'язком рівняння (2.5), дійдемо висновку, що

$$z_1(t) = \exp(-tA) h_3, \quad h_3 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

звідки $h_2 = z_0(0) = z_1(0) = h_3 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. З (2.13) і (2.14) тоді випливає зображення

$$y(t) = z_0(t) + \frac{\sinh(tA)}{A}h_1 = \exp(tA)h_2 + \frac{\sinh(tA)}{A}h_1, \quad h_1, h_2 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

що еквівалентне рівності

$$y(t) = \exp(tA)f_0 + \exp(-tA)g_0,$$

де

$$f_0 = h_2 + \frac{A^{-1}h_1}{2}, \quad g_0 = \frac{-A^{-1}h_1}{2}.$$

Припустимо тепер, що розв'язок $y(t)$ рівняння (2.11) з $m = k - 1$ зображується у вигляді (2.12), і покажемо, що таке зображення має місце і у випадку $m = k$.

Нехай $y(t)$ – розв'язок рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^k y(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

з деяким $k > 1$. Тоді вектор-функція

$$z(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^{k-1} y(t)$$

задовольняє рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right) z(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Отже, існують $\widetilde{f_0}$, $\widetilde{g_0} \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ такі, що

$$z(t) = \exp(tA)\widetilde{f_0} + \exp(-tA)\widetilde{g_0},$$

Тоді вектор-функція

$$\widetilde{y}(t) = y(t) - t^{k-1}\exp(tA)f_{k-1} - t^{k-1}\exp(-tA)g_{k-1}, \qquad (2.15)$$

де

$$f_{k-1} = \frac{A^{1-k}}{2^{k-1}(k-1)!}\widetilde{f}_0, \quad g_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}A^{1-k}}{2^{k-1}(k-1)!}\widetilde{g}_0 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^{k-1} \widetilde{y}(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Тому $\widetilde{y}(t)$ можна подати у вигляді (2.12) з $m = k-1$, звідки, завдяки (2.15), приходимо до зображення (2.12) з $m = k$.

Доведемо тепер його єдиність, тобто що тотожність $y(t) \equiv 0$ зумовлює рівності $f_k = g_k = 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1$. Виходячи з (2.12), безпосереднім підрахунком одержуємо

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^m \left(\frac{d}{dt} - A\right)^{m-1} y(t) = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m (m-1)! \exp(tA) f_{m-1} =$$
$$= 2^m (m-1)! A^m \exp(tA) f_{m-1} \tag{2.16}$$

і

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^m \left(\frac{d}{dt} + A\right)^{m-1} y(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right)^m (m-1)! \exp(-tA) g_{m-1} =$$
$$= (-1)^m 2^m (m-1)! A^m \exp(-tA) g_{m-1} \tag{2.17}$$

Покладаючи в (2.16) та (2.17) $t = 0$ і враховуючи той факт, що $y(t) \equiv 0$, прийдемо до рівностей $f_{m-1} = g_{m-1} = 0$. Таким чином,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-2} t^k (\exp(tA) f_k + \exp(-tA) g_k).$$

Повторюючи цю процедуру m разів, дійдемо висновку, що $f_k = g_k = 0$ для всіх $k = 0, 1, \ldots, m-1$, що й треба було довести.

Наслідок 2.1 *Будь-який розв'язок рівняння* (2.11) *на* $(-\infty, \infty)$ *допускає продовження до цілої вектор-функції зі значеннями в* $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Оскільки оператор A породжує обмежену аналітичну півгрупу, то, як випливає з теорем 1.5 та 2.4, простір усіх розв'язків рівняння (2.11) є нескінченновимірним. Більш того, для них має місце такий аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа [158].

Теорема 2.5 *Нехай* $y(t)$ *– розв'язок рівняння* (2.11). *Якщо*

$$\exists\gamma \in (0, -\omega),\ \exists c_\gamma > 0 : \|y(t)\| \le c_\gamma e^{\gamma t},\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.18}$$

де $\omega = \omega(A)$ *– тип півгрупи* $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$, *то* $y(t) \equiv 0$.

Доведення. Запишемо (2.12) як

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t),$$

де

$$y_1(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i \exp(tA) f_i, \quad y_2(t) = \sum_{i=0}^{m-1} t^i \exp(-tA) g_i. \tag{2.19}$$

Оскільки півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$ є обмеженою аналітичною, то, за формулою (1.17), при $t > 0$ маємо

$$\exp(tA) f_i = e^{tA} f_i,\ i = 0, 1, \dots, m-1.$$

З означення типу півгрупи випливає, що

$$\forall\delta \in \left(0, -\frac{\omega}{2}\right),\ \forall t \ge 0,\ \exists c_\delta > 0 : \left\|e^{tA}\right\| \le c_\delta e^{(\omega+\delta)t},$$

внаслідок чого

$$\forall t \ge 0 : \|y_1(t)\| \le \sum_{i=0}^{m-1} t^i \|\exp(tA) f_i\| \le \sum_{i=0}^{m-1} c_{i\delta} e^{(\omega+2\delta)t} \le \widetilde{c_\delta} e^{(\omega+2\delta)t}, \tag{2.20}$$

де $2\delta \in (0, -\omega)$ і стала $\widetilde{c_\delta} = \sum\limits_{i=0}^{m-1} c_{i\delta}$ залежить лише від f_i.

Нехай тепер $g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді

$$\forall \delta \in \left(0, -\frac{\omega}{2}\right),\ \forall t \geq 0 : \|g\| = \left\|e^{tA}\exp(-tA)g\right\| \leq \left\|e^{tA}\right\| \|\exp(-tA)g\| \leq$$

$$\leq c_\delta e^{(\omega+\delta)t}\|\exp(-tA)g\|.$$

Це спричиняє нерівність

$$\|\exp(-tA)g\| \geq c'_\delta e^{-(\omega+\delta)t}\|g\| \text{ при } t \geq 0,$$

а тому

$$\forall t \geq 0 : \|y_2(t)\| = \|\exp(-tA)h(t)\| \geq c'_\delta e^{-(\omega+\delta)t}\|h(t)\|,$$

де $h(t) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} t^i g_i$ і $c'_\delta = c_\delta^{-1}$ не залежить від t.

Припустимо, що $y_2(t) \not\equiv 0$. Тоді у зображенні (2.19) для $y_2(t)$ деякі $g_i \neq 0$. Не обмежуючи загальності, можна припустити, що $g_{m-1} \neq 0$, а отже,

$$\forall t > 0 : \|y_2(t)\| \geq c'_\delta e^{-(\omega+\delta)t}\left(t^{m-1}\|g_{m-1}\| - \left\|\sum_{i=0}^{m-2} t^i g_i\right\|\right) =$$

$$= c'_\delta e^{-(\omega+\delta)t} t^{m-1}\left(\|g_{m-1}\| - \left\|\sum_{i=0}^{m-2} t^{i-m+1} g_i\right\|\right).$$

Оскільки

$$\left\|\sum_{i=0}^{m-2} t^{i-m+1} g_i\right\| \to 0 \text{ при } t \to \infty$$

і $t^{m-1} > e^{-\delta t}$ для достатньо великих $t > 0$, то

$$\forall t > 0,\ \forall \delta \in \left(0, -\frac{\omega}{2}\right) : \|y_2(t)\| \geq c''_\delta e^{-(\omega+2\delta)t}, \tag{2.21}$$

де c''_δ не залежить від t. Враховуючи (2.18) та (2.20), одержуємо

$$\forall t > 0 : \|y_2(t)\| = \|y(t) - y_1(t)\| \leq$$

$$\leq \|y(t)\| + \|y_1(t)\| \leq c_\gamma e^{\gamma t} + \widetilde{c_\delta} e^{(\omega+2\delta)t} \leq c e^{\gamma t}, \tag{2.22}$$

де $c = c_\gamma + \widetilde{c_\delta}$. З нерівностей (2.21) і (2.22) випливає співвідношення

$$\forall t > 0 : c_\delta e^{-(\omega+2\delta)t} \leq \|y_2(t)\| \leq c_\gamma e^{\gamma t}.$$

Покладемо

$$\varphi(t) = \frac{\|y_2(t)\|}{c_\delta e^{-(\omega+2\delta)t}}.$$

Тоді для достатньо великих $t > 0$

$$1 \leq \varphi(t) \leq \widetilde{c} e^{(\gamma+\omega+2\delta)t}, \quad \widetilde{c} = \frac{c_\gamma}{c_\delta}.$$

При $\delta = -\dfrac{\gamma+\omega}{4}$ отримуємо для великих $t > 0$ двосторонню нерівність

$$1 \leq \varphi(t) \leq \widetilde{c} e^{\frac{\gamma+\omega}{2} t}.$$

Переходячи до границі при $t \to \infty$ і враховуючи, що $\dfrac{\gamma+\omega}{2} < 0$, прийдемо до висновку, що $1 \leq \varphi(t) \leq 0$ за умови, що $y_2(t) \neq 0$ для $t \geq 0$, що неможливо. Отже, $y_2(t) \equiv 0$ на півосі $[0, \infty)$. Тому $g_i = 0,\ i = 0, 1, \ldots m{-}1$.

Якщо припустити, що $y_1(t) \not\equiv 0$, то отримаємо $y_1(t) \neq 0$ при $t \leq 0$. Підставляючи в (2.12) $-t$ замість t, одержимо $y_1(t) \equiv 0$ на півосі $(-\infty, 0]$, звідки, за теоремою 2.4, $f_i = 0,\ i = 0, 1, \ldots, m-1$, а отже, $y(t) \equiv 0$.

Теорему доведено

Наслідок 2.2 (аналог теореми Ліувілля) *Нехай* $y(t)$ *– розв'язок однорідного рівняння* (2.11) *на* $(-\infty, \infty)$. *Тоді*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|y(t)\| < \infty \Longrightarrow y(t) \equiv 0, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

2.3 Неоднорідне m-гармонічне диференціально-операторне рівняння

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння (2.10). Позначимо через $C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ множину всіх обмежених неперервних на $\mathbb{R}$ вектор-функцій із значеннями в $\mathfrak{B}$. У подальшому припускатимемо, що $f(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Під узагальненим розв'язком рівняння (2.10) на $\mathbb{R}$ розумітимемо неперервну вектор-функцію $y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$, для якої виконується інтегральна тотожність

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left\langle \left(\frac{d^2}{dt^2} - B^* \right)^m \varphi(t), y(t) \right\rangle dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \langle \varphi(t), f(t) \rangle \, dt,$$

де $\varphi(t)$ – довільна нескінченно диференційовна вектор-функція з компактним носієм із значеннями в $\mathcal{D}(B^{*m})$ така, що $B^{*m}\varphi(t)$ є неперервною на $\mathbb{R}$, $\langle \cdot, f \rangle$ позначає дію функціоналу f на відповідний елемент. Очевидно, що класичний розв'язок рівняння (2.10) є його узагальненим розв'язком.

Теорема 2.6 *Нехай* $A^m f(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *і*

$$y_m(t) = \frac{A^{-m}}{2^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{A(|t-s_1|+|s_2-s_1|+\cdots+|s_m-s_{m-1}|)} f(s_m) \, ds_1 \ldots ds_m. \qquad (2.23)$$

Тоді $y_m^{(i)}(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^{2m-i}))$, $i = 0, 1, \ldots, 2m$, *тобто* $y_m^{(i)}(t)$ *– обмежена неперервна вектор-функція із значеннями в* $\mathcal{D}(A^{2m-i})$, $i = 0, 1, \ldots, 2m$, *і* $y_m(t)$ *– розв'язок рівняння* (2.10).

Доведення. Щоб довести це твердження, звернемось знову до методу математичної індукції.

Покладемо $m = 1$. Оскільки

$$\forall t > 0 : \left\| e^{At} \right\| < ce^{-\gamma t}, \; 0 < \gamma < -\omega(A),$$

і $Af(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, то безпосередньою перевіркою переконуємось, що

$$\begin{cases} y_1(t) &= \frac{A^{-1}}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{A|t-s_1|} f(s_1)\, ds_1 = \frac{A^{-2}}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{A|t-s_1|} Af(s_1)\, ds_1 \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^2)); \\ y_1'(t) &= \frac{A^{-1}}{2} \left(\int\limits_{-\infty}^{t} e^{A(t-s_1)} Af(s_1)\, ds_1 + \int\limits_{t}^{\infty} e^{A(s_1-t)} Af(s_1)\, ds_1 \right) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A)); \\ y_1''(t) &= f(t) + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{A|t-s_1|} Af(s_1)\, ds_1 \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}). \end{cases} \tag{2.24}$$

Звідси випливає, що $y_1(t)$ – класичний розв'язок рівняння (2.10) на $(-\infty, \infty)$.

Припустимо тепер, що для $m = k$ твердження теореми 2.6 є вірним за умови $A^k f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Тоді для $m = k + 1$ маємо

$$y_{k+1}(t) = \frac{A^{-(k+1)}}{2^{k+1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{k+1}} e^{A(|t-s_1|+|s_2-s_1|+\cdots+|s_{k+1}-s_k|)} f(s_{k+1})\, ds_1 \ldots ds_{k+1} =$$

$$\frac{A^{-2}}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{A|t-s|} z(s)\, ds = \frac{A^{-2}}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{A|s|} z(t-s)\, ds, \tag{2.25}$$

де

$$z(s) = \frac{A^{-k}}{2^k} \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{A(|s-s_2|+\cdots+|s_{k+1}-s_k|)} Af(s_{k+1})\, ds_2 \ldots ds_{k+1}.$$

Оскільки $Af(s_{k+1}) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^k))$, то, за зазначеним вище припущенням, $z^{(i)}(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^{2k-i}))$, $i = 0, 1, \ldots, 2k$, і задовольняє (2.10) з $m = k$ та $Af(t)$ замість $f(t)$. З (2.25) випливає, що

$$y_{k+1}^{(2k)}(t) = \frac{A^{-2}}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{A|t-s|} z^{(2k)}(s)\, ds.$$

Тому, в силу (2.24),

$$y_{k+1}^{(2(k+1))}(t) = z^{(2k)}(t) + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{A|t-s|} z^{(2k)}(s)\, ds \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$$

і

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - A^2 \right)^{k+1} y_{k+1}(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} - A^2 \right) \frac{A^{-2}}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{d^2}{dt^2} - A^2 \right)^k e^{A|t-s|} z(s)\, ds =$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)\frac{A^{-2}}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{A|t-s|}\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)^k z(s)\,ds =$$

$$=\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)\frac{A^{-2}}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{A|t-s|}Af(s)\,ds =$$

$$=\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)\frac{A^{-1}}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{A|t-s|}f(s)\,ds = f(t).$$

Таким чином, твердження теореми справджується для $y_{k+1}(t)$.

Теорему доведено.

Наслідок 2.3 *Якщо* $f(t)\in C_b(\mathbb{R},\mathfrak{B})$, *то* $y_m^{(k)}(t)\in C_b(\mathbb{R},\mathcal{D}(A^{2m-k}))$, $k=0,1,\ldots,m$, *і* $y_m(t)$ *– узагальнений розв'язок рівняння* (2.10).

Доведення. Той факт, що $y_m^{(k)}(t)\in C_b(\mathbb{R},\mathcal{D}(A^{2m-k})$ при $k=1,2,\ldots,m$, доводиться на основі (2.23) методом математичної індукції подібно до того, як це було зроблено в теоремі 2.6. Щоб переконатися в тому, що $y_m(t)$ – узагальнений розв'язок рівняння (2.10), розглянемо послідовність $f_n(t)=e^{\frac{1}{n}A}f(t)$, $n\in\mathbb{N}$. В силу аналітичності півгрупи $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$, $f_n(t)\in C_b(\mathbb{R},\mathcal{D}(A^n))$ для довільного $n\in\mathbb{N}$ і $f_n(t)$ збігається рівномірно до $f(t)$. Отже,

$$y_{m,n}(t)=\frac{A^{-m}}{2^m}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-A(|t-s_1|+\cdots+|s_m-s_{m-1}|)}f_n(s_m)\,ds_1\ldots ds_m$$

є класичним розв'язком рівняння (2.10) з $f(t)=f_n(t)$, а послідовність $y_{m,n}(t)$ рівномірно збігається при $n\to\infty$ до $y_m(t)$. Переходячи до границі в тотожності

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\left\langle\left(\frac{d^2}{dt^2}-B\right)^m\varphi(t),y_{m,n}(t)\right\rangle dt=\int\limits_{\mathbb{R}}\langle\varphi(t)f_n(t)\rangle\,dt,$$

одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\left\langle\left(\frac{d^2}{dt^2}-B\right)^m\varphi(t),y_m(t)\right\rangle dt=\int\limits_{\mathbb{R}}\langle\varphi(t)f(t)\rangle\,dt,$$

а отже, $y_m(t)$ – узагальнений розв'язок рівняння (2.10).

Наслідок доведено

Нагадаємо, що неперервна вектор-функція $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ називається майже періодичною (за Бором), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує стала $L_\varepsilon > 0$ така, що будь-який інтервал $(t, t + L_\varepsilon)$ з $\mathbb{R}$ містить принаймні одну точку $\tau = \tau(\varepsilon)$ із властивістю

$$\forall t \in \mathbb{R} : \|f(t) - f(t + \tau)\| < \varepsilon.$$

З наслідків 2.2, 2.3 і того факту, що узагальнений розв'язок рівняння (2.11) є класичним, випливає наступне твердження.

Теорема 2.7 *Нехай* $f(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^m))$ $(f(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}))$. *Тоді існує єдиний обмежений класичний (узагальнений) розв'язок* $y(t)$ *рівняння* (2.10) *на* $(-\infty, \infty)$ *і цей розв'язок може бути зображений у вигляді* (2.23). *Якщо* $f(t)$ *є періодичною або майже періодичною, то розв'язок є таким самим.*

2.4 Гармонічне операторно-диференціальне рівняння

Частинним випадком (2.10) $(m = 1)$ є гармонічне рівняння, тобто

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right) y(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.26}$$

де B - позитивний оператор у просторі $\mathfrak{B}$, $f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ – неперервна вектор-функція. У цьому п. розглядається питання, які умови на $f(t)$ гарантують існування єдиного обмеженого, зокрема періодичного або майже періодичного розв'язку цього рівняння.

Будемо говорити, що вектор-функція $y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B}$ задовольняє умову неперервності Гельдера з показником $\alpha \in (0, 1)$, якщо існує стала $c > 0$

така, що

$$\|y(t) - y(s)\| \leq c|t-s|^{\alpha}. \tag{2.27}$$

Клас усіх вектор-функцій $y(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, котрі задовольняють умову (2.27), позначатимемо $C_b^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Нехай також $\widetilde{C_b^{\alpha}}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ – множина вектор-функцій $y(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, для яких

$$\|y(t+s) - 2y(t) + y(t-s)\| \leq c|t-s|^{\alpha}, \ 0 < c = const.$$

Очевидно, що $C_b^{\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \subset \widetilde{C_b^{\alpha}}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

З наслідку 2.3 випливає, що якщо $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, то вектор-функція

$$z(t) = \frac{A^{-1}}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{|t-s|A} f(s)\, ds \tag{2.28}$$

є узагальненим розв'язком рівняння (2.26). Як свідчить теорема 2.6, за умови, що $f(s) \in \mathcal{D}(A)$, $\forall s \in \mathbb{R}$, і $Af(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, вектор-функція (2.28) є розв'язком рівняння (2.26). Наша мета зараз полягає у відшуканні більш широкого класу вектор-функцій $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, для яких $z(t)$ – розв'язок цього рівняння.

За допомогою заміни змінних $t - s = \xi$ в інтегралі $\int\limits_{-\infty}^{t} e^{(t-s)A} f(s)\, ds$ і $s - t = \xi$ – в інтегралі $\int\limits_{t}^{\infty} e^{(s-t)A} f(s)\, ds$ приходимо до таких зображень для $z(t)$ і $z''(t)$:

$$z(t) = \frac{A^{-2}}{2} \int\limits_{0}^{\infty} e^{sA} A\omega_f(t,s)\, ds + A^{-2} f(t), \tag{2.29}$$

де

$$\omega_f(t,s) = f(t+s) + f(t-s) - 2f(t),$$

та

$$z''(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty e^{sA} A\omega_f(t,s)\, ds. \tag{2.30}$$

Покладемо

$$\omega_2(s,f) = \sup_{|\tau|\le s} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\omega_f(t,\tau)\|.$$

Функція $\omega_2(s,f)$ є неперервною на $[0,\infty)$ при фіксованому f, і $\omega_2(0,f) = 0$. Має місце така теорема (див. [159]).

Теорема 2.8 *Нехай $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ задовольняє умову*

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega_2(s,f)}{s}\, ds < \infty. \tag{2.31}$$

Тоді $z(t)$ є розв'язком рівняння (2.26).

Доведення. Із зображень (2.29), (2.30) випливає, що якщо

$$v(t) = \int\limits_0^\infty e^{sA} A\omega_f(t,s)\, ds \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}),$$

то $z(t) \in \mathcal{D}(A)$ $(t \in \mathbb{R})$, $A^2 z(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ і $z''(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Покладемо

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = \int\limits_0^1 e^{sA} A\omega_f(t,s)\, ds + \int\limits_1^\infty e^{sA} A\omega_f(t,s)\, ds. \tag{2.32}$$

Оскільки, за теоремою 1.3, вектор-функція $e^{sA}A^{n+1}\omega_f(t,s)$ є неперервною при $(t,s) \in \mathbb{R} \times [1,\infty)$ і

$$\exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \left\| e^{sA} A^{n+1} \omega_f(t,s) \right\| \le s^{-(n+1)} e^{-\delta s} \sup_{t,s} \|\omega_f(t,s)\|,$$

то

$$v_2(t) = A^{-n} \int\limits_1^\infty e^{sA} A^{n+1} \omega_f(t,s)\, ds \in \mathcal{D}(A^n),$$

звідки

$$A^n v_2(t) = \int\limits_1^\infty e^{sA} A^{n+1} \omega_f(t,s)\, ds \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}). \tag{2.33}$$

Враховуючи, що при фіксованому $s \in (0,1]$ вектор-функція $e^{sA} A\omega_f(t,s)$ належить до $C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, а також нерівності

$$\left\| e^{sA} A\omega_f(t,s) \right\| \leq \frac{\omega_2(s,f)}{s}$$

та (2.31), одержуємо

$$\int\limits_0^1 e^{sA} A\omega_f(t,s)\, ds \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}). \tag{2.34}$$

Співвідношення (2.33), (2.34) зумовлюють включення $v(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, звідки, беручи до уваги (2.29) і (2.30), робимо висновок, що $z(t)$ – розв'язок рівняння (2.26), що й завершує доведення теореми.

Наслідок 2.4 *Якщо* $f(\cdot) \in \widetilde{C_b^\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, *то вектор-функція* $z(t)$ *– розв'язок рівняння* (2.26).

Теорема 2.9 *Нехай для кожного* $t \in (-\infty, \infty)$, $f(t) \in \mathcal{D}((-A)^\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$, *і функція* $\|(-A)^\alpha f(t)\|$ *є обмеженою. Тоді для будь-якого* $\alpha' \in (0, \alpha)$ *мають місце включення*

$$z(t) \in \mathcal{D}((-A)^{2+\alpha'}), \quad z''(t) \in \mathcal{D}((-A)^{\alpha'}),$$

вектор-функції $(-A)^{2+\alpha} z(t)$ *та* $(-A)^\alpha z''(t)$ *є неперервними на* $\mathbb{R}$ *і* $z(t)$ *– розв'язок рівняння* (2.26).

Доведення. Із зображень (2.29), і (2.30) для $z(t)$ і $z''(t)$ випливає, що для доведення теореми досить показати, що

$$v(t) = \int\limits_0^\infty e^{sA} A\omega_f(t,s)\, ds \in C_b\left(\mathbb{R}, \mathcal{D}((-A)^{\alpha'}\right) \text{ і } (-A)^{\alpha'} v(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}).$$

Подаючи $v(t)$ у вигляді (2.32) і міркуючи так само, як при доведенні теореми 2.8, дійдемо висновку, що

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_2(t) \in \mathcal{D}(A^n) \text{ і } A^n v_2(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}). \tag{2.35}$$

Візьмемо $\alpha'' = 1 - (\alpha - \alpha') < 1$. Тоді

$$e^{sA} A\omega_f(t,s) = (-A)^{1-\alpha} e^{sA} A^\alpha \omega_f(t,s) = (-A)^{-\alpha'} e^{sA} (-A)^{\alpha''} (-A)^\alpha \omega_f(t,s).$$

Оскільки

$$\left\| e^{sA} (-A)^{\alpha''} (-A)^\alpha \omega_f(t,s) \right\| \leq \frac{M_{\alpha''}}{s^{\alpha''}} \sup_{t,s \in \mathbb{R}} \|(-A)^\alpha \omega_f(t,s)\|$$

і вектор-функція $e^{sA}(-A)^{\alpha''}(-A)^\alpha \omega_f(t,s)$ є неперервною по s і по t при $(s,t) \in (0,1] \times \mathbb{R}$, то

$$(-A)^{\alpha'} v_1(t) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}). \tag{2.36}$$

Тоді із зображень (4.29), (2.30) і включень (2.35), (2.36) випливає, що $z(t)$ – розв'язок рівняння (2.26), що й треба було довести.

Виходячи з теорем 2.4, 2.8, 2.9 та наслідку 2.4, прийдемо до основної теореми цього підрозділу.

Теорема 2.10 *Нехай $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Тоді існує лише один обмежений узагальнений розв'язок $y(t)$ рівняння* (2.26) *на $(-\infty, \infty)$ і цей розв'язок зображується у вигляді* (2.28). *Якщо ж $f(\cdot) \in \widetilde{C_b^\alpha}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $\alpha \in (0,1)$, або $f(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{D}(A^\alpha))$, то цей розв'язок є класичним. У випадку, коли вектор-функція $f(t)$ є майже періодичною (періодичною), він також є майже періодичним (періодичним).*

2.5 Більш загальне диференціально-операторне рівняння

Розглянемо тепер рівняння

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^n\left(\frac{d}{dt}+A\right)^m y(t)=0,\quad t\in(-\infty,\infty),\quad n,m\in\mathbb{N}_0,\quad n+m\geq 1, \tag{2.37}$$

де A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи у просторі $\mathfrak{B}$. Основна наша мета зараз – дослідити множину усіх розв'язків цього рівняння всередині інтервалу $(-\infty,\infty)$. Зауважимо, що випадки $n=1, m=0; n=0, m=1$, а також $n=m\geq 1$ розглянуто вище. Рівняння ж вигляду (2.37) на інтервалі $(0,\infty)$ досліджувалось багатьма математиками за різних умов на поведінку розв'язків в околі точки 0 (див., наприклад, [1, 88, 98, 154]).

Як зазначено у твердженні 1.2 та теоремі 1.5, у випадку, коли A генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу, для будь-якого його цілого вектора $x: x\in\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і довільного $z\in\mathbb{C}$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^kA^kx}{k!}$ збігається у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, і оператор-функція

$$\exp(zA)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^kA^k}{k!}$$

є цілою в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, сім'я $\{\exp(zA)\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює однопараметричну групу в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$,

$$\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A)}=\mathfrak{B},\quad \mathfrak{G}_{(1)}(A)=\bigcap_{t\geq 0}\mathcal{R}(e^{tA})$$

($\mathcal{R}(\cdot)$ – область значень оператора) і

$$\forall x\in\mathfrak{G}_{(1)}(A):\exp(tA)x=\begin{cases} e^{tA}x & \text{при}\quad t\geq 0,\\ \left(e^{-tA}\right)^{-1}x & \text{при}\quad t<0.\end{cases}$$

Звідси випливає, що для довільного $z \in \mathbb{C}$ має місце включення

$$\exp(zA)\mathfrak{G}_{(1)}(A) \subset \mathfrak{G}_{(1)}(A)$$

і, якщо $0 \in \rho(A)$, то

$$A\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Вектор-функція $y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{D}(A^{n+m})$ називається розв'язком (класичним) рівняння (2.37) на $(-\infty, \infty)$, якщо вона $n + m$ разів неперервно диференційовна на $(-\infty, \infty)$ і задовольняє там це рівняння.

Теорема 2.11 *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння (2.37) на $(-\infty, \infty)$ тоді і тільки тоді, коли її можна зобразити у вигляді*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k \exp(tA) f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k, \tag{2.38}$$

де $f_k, g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Вектори f_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, і g_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, визначаються однозначно за $y(t)$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $n = 0$, тобто коли рівняння (2.37) має форму

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty). \tag{2.39}$$

При $m = 1$ теорема випливає з теореми 2.1. А саме, за цією теоремою, для того, щоб $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція $y(t)$ була розв'язком рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} \pm Ay(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

необхідно і достатньо, щоб

$$y(t) = \exp(\mp tA) y_0, \quad y_0 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Якщо вектор-функція $f(z)$ є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, то загальні розв'язки рівнянь

$$\frac{dy(t)}{dt} \pm Ay(t) = f(t), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

мають, відповідно, вигляд

$$y(t) = \exp(\mp tA)y_0 + \int\limits_0^t \exp(\mp(t-s)A)f(s)\,ds, \tag{2.40}$$

де y_0 – довільний елемент з $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Припустимо тепер, що розв'язок $y(t)$ рівняння (2.39) з $m = i-1$ зображується у вигляді

$$y(t) = \sum_{k=0}^{i-2} t^k \exp(-tA)\widetilde{g}_k, \quad \widetilde{g}_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),\ k = 0, 1, \ldots, i-2,$$

і доведемо, що таке зображення є вірним і при $m = i$.

Отже, нехай $y(t)$ – розв'язок рівняння (2.39) з $m = i$. Оскільки

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^i y(t) = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^{i-1} \left(\frac{d}{dt} + A\right) y(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

то $\left(\dfrac{d}{dt} + A\right) y(t)$ є розв'язком рівняння (2.39) з $m = i-1$, а тому

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right) y(t) = \sum_{k=0}^{i-2} t^k \exp(-tA)\widetilde{g}_k, \quad \widetilde{g}_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A).$$

Беручи до уваги, що вектор-функція у правій частині є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$, робимо висновок на основі (2.40), що

$$y(t) = \exp(-tA)g_0 + \int\limits_0^t \exp(-(t-s)A) \sum_{k=0}^{i-2} s^k \exp(-sA)\widetilde{g}_k\,ds =$$

$$= \exp(-tA)g_0 + \sum_{k=1}^{i-1} \exp(-tA)g_k,$$

де g_0, $g_k = \frac{\widetilde{g}_k}{k}$ $(k = 1, \ldots, i-1)$ – цілі вектори оператора A. Таким чином, зображення (2.38) для розв'язків рівняння (2.39) доведене. Так само доводиться зображення у вигляді першої суми з (2.38) для розв'язків рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n y(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

тобто при $m = 0$.

Нехай тепер $n = 1, m \in \mathbb{N}$, тобто рівняння (2.37) має вигляд

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)\left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Покладемо

$$z(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t).$$

Тоді $z(t)$ є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^m z(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

і, як було вже показано вище,

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)\widetilde{g}_k, \quad \widetilde{g}_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

тобто

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)\widetilde{g}_k.$$

Згідно з (2.40),

$$\exists \widetilde{\widetilde{f}}_0 \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : y(t) = \exp(tA)\widetilde{\widetilde{f}}_0 + \int\limits_0^t \exp((t-s)A) \sum_{k=0}^{m-1} s^k \exp(-sA)\widetilde{g}_k \, ds. \tag{2.41}$$

Враховуючи рівність

$$\int\limits_0^t s^k \exp(-2sA)\widetilde{g}_k \, ds = \widetilde{\widetilde{f}}_0 + \sum_{i=0}^{k} s^i \exp(-2sA)\widetilde{\widetilde{g}}_i,$$

підставляючи її в (2.41), після перегрупування відповідним чином членів дійдемо висновку, що

$$\exists f_0, g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : y(t) = \exp(tA)f_0 + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)g_k.$$

Припустимо тепер, що розв'язок $y(t)$ рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^{n-1} \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0, \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{2.42}$$

допускає зображення

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-2} t^k \exp(tA)f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)g_k, \quad f_k, g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

і позначимо

$$z(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t).$$

Тоді $z(t)$ – розв'язок рівняння (2.42), а отже,

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = \sum_{k=0}^{n-2} t^k \exp(tA)f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)g_k, \quad f_k, g_k \in \mathfrak{G}_{(1)}(A),$$

і для $y(t)$ одержуємо зображення вигляду (2.40) з

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-2} t^k \exp(tA)f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)g_k.$$

Міркуючи так само, як у попередньому випадку, завдяки формулі (2.40), прийдемо до зображення (2.38).

Доведемо тепер єдиність зображення (2.38), тобто, що

$$y(t) \equiv 0 \Longrightarrow f_k = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, n-1), \ g_k = 0 \ (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Покладемо

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k \exp(tA)f_k; \quad y_2(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA)g_k. \tag{2.43}$$

Беручи до уваги, що

$$\left(\frac{d}{dt}+A\right)^m\left(\frac{d}{dt}-A\right)^k y(t) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}+A\right)^m\left(\frac{d}{dt}-A\right)^k y_1(t),\ k=0,1,\dots,n-1,$$

і

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^n\left(\frac{d}{dt}+A\right)^k y(t) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}-A\right)^n\left(\frac{d}{dt}+A\right)^k y_2(t),\ k=0,1,\dots,m-1,$$

а також співвідношення

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^k (t^i\exp(tA))f =$$

$$= \begin{cases} i(i-1)\dots(i-k+1)t^{i-k}\exp(tA)f & \text{при} \quad k\le i \\ 0 & \text{при} \quad k>i \end{cases}$$

та

$$\left(\frac{d}{dt}+A\right)^k (t^i\exp(-tA))g =$$

$$= \begin{cases} i(i-1)\dots(i-k+1)t^{i-k}\exp(-tA)g & \text{при} \quad k\le i \\ 0 & \text{при} \quad k>i, \end{cases}$$

одержимо

$$\left(\frac{d}{dt}+A\right)^m\left(\frac{d}{dt}-A\right)^{n-1} y(t) = \left(\frac{d}{dt}+A\right)^m (n-1)!\exp(tA)f_{n-1} =$$

$$2^m(n-1)!A^m\exp(tA)f_{n-1} \tag{2.44}$$

і

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^n\left(\frac{d}{dt}+A\right)^{m-1} y(t) = \left(\frac{d}{dt}-A\right)^n (m-1)!\exp(-tA)g_{m-1} =$$

$$= (-1)^n 2^n(m-1)!A^n\exp(-tA)g_{m-1}. \tag{2.45}$$

Припустимо, що $y(t) \equiv 0$. Тоді з теореми 2.10 і рівностей (2.44), (2.45) при $t = 0$ випливає, що

$$f_{n-1} = g_{m-1} = 0,$$

тобто $y(t)$ має вигляд

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-2} t^k \exp(tA) f_k + \sum_{k=0}^{m-2} t^k \exp(-tA) g_k.$$

Повторюючи цю процедуру $\max\{n, m\}$ разів, дійдемо висновку, що усі f_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, та g_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, у зображенні (2.38) дорівнюють нулеві, що й завершує доведення теореми.

Наслідок 2.5 *Будь-який розв'язок рівняння* (2.37) *на* $(-\infty, \infty)$ *допускає продовження до цілої вектор-функції зі значеннями в* $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$.

Позначимо через s величину

$$s = s(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \mathrm{Re}\lambda,$$

де $\sigma(A)$ – спектр оператора A. Оскільки за припущенням півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$ є обмеженою аналітичною і $0 \in \rho(A)$, то $s(A)$ є не що інше, як тип $\omega(A)$ цієї півгрупи і $s < 0$.

Із твердження 1.2 і теорем 1.5, 2.10 випливає нескінченновимірність простору усіх розв'язків рівняння (2.37). Більш того, для них має місце наступний аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа [158, 160].

Теорема 2.12 *Нехай* $y(t)$ *– розв'язок рівняння* (2.37) *на* $(-\infty, \infty)$. *Якщо*

$$\exists \gamma \in (0, -s),\ \exists c_\gamma > 0 : \|y(t)\| \leq c_\gamma e^{\gamma |t|},\ t \in (-\infty, \infty), \tag{2.46}$$

то $y(t) \equiv 0$.

Доведення. Запишемо зображення (2.38) у вигляді $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, де $y_1(t)$, $y_2(t)$ визначаються формулами (2.43). Оскільки півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною, то за теоремою 1.5

$$\exp(tA)f_k = e^{tA}f_k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1,\ \text{при } t > 0.$$

З означення типу півгрупи випливає, що

$$\forall\delta \in \left(0, -\frac{s}{2}\right),\ \forall t \geq 0,\ \exists c_\delta > 0 : \left\|e^{tA}\right\| \leq c_\delta e^{(s+\delta)t},$$

звідки

$$\forall t \geq 0 : \|y_1(t)\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} t^k \|\exp(tA)f_k\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_{k\delta} e^{(s+2\delta)t} \leq \widetilde{c_\delta} e^{(s+2\delta)t}, \quad (2.47)$$

де $2\delta \in (0, -s)$ і стала $\widetilde{c_\delta} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_{k\delta}$ залежить тільки від f_k.

Нехай тепер $g \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тоді

$$\forall\delta \in \left(0, -\frac{s}{2}\right),\ \exists c_\delta > 0 : \|g\| = \left\|e^{tA}\exp(-tA)g\right\| \leq$$

$$\leq \left\|e^{tA}\right\| \|\exp(-tA)g\| \leq c_\delta e^{(s+\delta)t} \|\exp(-tA)g\|,\ \forall t \geq 0.$$

Це обумовлює нерівність

$$\|\exp(-tA)g\| \geq c'_\delta e^{-(s+\delta)t}\|g\| \text{ при } t \geq 0,$$

а тому

$$\forall t \geq 0 : \|y_2(t)\| = \|\exp(-tA)h(t)\| \geq c'_\delta e^{-(s+\delta)t}\|h(t)\|,$$

де $h(t) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} t^k g_k$ і $c'_\delta = c_\delta^{-1}$ не залежить від t.

Припустимо, що $y_2(t) \not\equiv 0$. Отже у зображенні (2.43) для $y_2(t)$ існує k, при якому $g_k \neq 0$. Без обмеження загальності можна припустити, що $g_{m-1} \neq 0$. Тоді

$$\forall t > 0 : \|y_2(t)\| \geq c'_\delta e^{-(s+\delta)t} \left(t^{m-1}\|g_{m-1}\| - \left\|\sum_{k=0}^{m-2} t^i g_k\right\|\right) =$$

$$= c'_\delta e^{-(s+\delta)t} t^{m-1} \left(\|g_{m-1}\| - \left\| \sum_{k=0}^{m-2} t^{k-m+1} g_k \right\| \right).$$

Оскільки

$$\left\| \sum_{k=0}^{m-2} t^{k-m+1} g_k \right\| \to 0 \text{ при } t \to \infty$$

і $t^{m-1} > e^{-\delta t}$ для досить великих $t > 0$, то

$$\forall \delta \in \left(0, -\frac{s}{2}\right) \exists c''_\delta > 0 : \|y_2(t)\| \geq c''_\delta e^{-(s+2\delta)t}, \ \forall t > 0, \tag{2.48}$$

де c''_δ не залежить від t. Беручи до уваги (2.47) і (2.48), одержуємо

$$\forall t > 0 : \|y_2(t)\| = \|y(t) - y_1(t)\| \leq \|y(t)\| + \|y_1(t)\| \leq c_\gamma e^{\gamma t} + \widetilde{c}_\delta e^{(s+2\delta)t} \leq c e^{\gamma t}, \tag{2.49}$$

де $c = c_\gamma + \widetilde{c}_\delta$. З нерівностей (2.48), (2.49) випливає, що існують сталі $c_\delta > 0$ та $c_\gamma > 0$ такі, що

$$\forall t > 0 : c_\delta e^{-(s+2\delta)t} \leq \|y_2(t)\| \leq c_\gamma e^{\gamma t}.$$

Позначимо

$$\varphi(t) = \frac{\|y_2(t)\|}{c_\delta e^{-(s+2\delta)t}}.$$

Тоді для досить великих $t > 0$

$$1 \leq \varphi(t) \leq \widetilde{c} e^{(\gamma+s+2\delta)t}, \quad \widetilde{c} = \frac{c_\gamma}{c_\delta}.$$

Покладаючи $\delta = -\dfrac{\gamma + s}{4}$, для достатньо великих $t > 0$ одержимо

$$1 \leq \varphi(t) \leq \widetilde{c} e^{\frac{\gamma+s}{2} t}.$$

Переходячи до границі, коли $t \to \infty$, і враховуючи, що $\dfrac{\gamma + s}{2} < 0$, робимо висновок, що $1 \leq \varphi(t) \leq 0$ за умови, що $y_2(t) \neq 0$ при $t \geq 0$, а це неможливо. Отже, $y_2(t) \equiv 0$ на півосі $[0, \infty)$. Тому $g_i = 0, \ i = 0, 1, \ldots m-1$.

Якщо припустити, що $y_1(t) \not\equiv 0$, то дійдемо висновку, що $y_1(t) \neq 0$ при $t \leq 0$. Підставляючи в (2.38) $-t$ замість t, отримаєм $y_1(t) \equiv 0$ на півосі $(-\infty, 0]$, звідки, за теоремою 2.10, $f_k = 0,\ k = 0, 1, \dots, n-1$ і, як наслідок, $y(t) \equiv 0$.

Теорему доведено.

Наслідок 2.6 (аналог теореми Ліувілля.) *Нехай* $y(t)$ *– розв'язок рівняння* (2.37) *на* $(-\infty, \infty)$. *Тоді*

$$\sup_{t \in (-\infty,\infty)} \|y(t)\| < \infty \Longrightarrow y(t) \equiv 0, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Висновки до розділу 2

У розділі 2 досліджено структуру розв'язків диференціального рівняння вигляду $\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = f(t),\ n, m \in \mathbb{N},\ n + m \geq 1$, на всій числовій осі, де A – генератор C_0-півгрупи лінійних операторів у банаховому просторі в $\mathfrak{B}$, $f(t)$ – неперервна на $(-\infty, \infty)$ $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція. Варто зазначити, що конкретні реалізації простору $\mathfrak{B}$, оператора A та n, m охоплюють чимало класів рівнянь з частинними похідними у різних функціональних просторах.

Зокрема, детально розглянуто випадки параболічного та обернено параболічного рівнянь першого порядку і як однорідного, так і неоднорідного абстрактного полігармонічного рівняння $\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = f(t)$, де B – позитивний оператор в $\mathfrak{B}$. Знайдено формулу для його розв'язків всередині $(-\infty, \infty)$ і показано, що кожен з них може бути продовжений до цілої вектор-функції у просторі цілих векторів оператора $A = -B^{1/2}$. Більш того, для розв'язків установлено аналоги принципу Фрагмена-Ліндельофа і теореми Ліувілля. Для неоднорідного рівняння знайдено умови на праву частину, за яких існує єдиний обмежений узагальнений розв'язок і цей розв'язок є класичним. Наведено формулу для його зображення.

3 Наближення розв'язків диференціально-операторних рівнянь цілими розв'язками експоненціального типу

У цьому розділі розглядається рівняння вигляду

$$y'(t) + Ay(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty), \tag{3.1}$$

де A – невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$. Доводяться прямі й обернені теореми теорії наближень слабких розв'язків цього рівняння цілими його розв'язками експоненціального типу, які встановлюють взаємно однозначну відповідність між швидкістю прямування до нуля найкращого наближення роз'язку і степенем його гладкості. Результати ілюструються на конкретному прикладі, коли оператор A породжується еліптичним диференціальним виразом другого порядку у просторі $L_2(\Omega)$ (область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ є обмеженою з гладкою межею) і певною граничною умовою.

3.1 Опис слабких розв'язків

Нехай A – невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$, а $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ – множина усіх його цілих векторів експоненціального типу:

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \Big\{ f \in C^\infty(A) \Big| \exists \alpha > 0,\ \exists c = c(f) > 0 : \\ \|A^n f\| \le c\alpha^n,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 \Big\}$$

(скрізь у подальшому під c розумітимемо сталу числову величину, відповідну до розглядуваної ситуації). Число

$$\sigma(f, A) = \inf \left\{ \alpha > 0 \middle| \exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \|A^n f\| \le c\alpha^n \right\}$$

називатимемо типом вектора f відносно оператора A (або просто A-типом).

Як показано в [122, 205],

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \left\{ f \in \mathfrak{H} \middle| f = E_\lambda g,\ \forall \lambda > 0,\ \forall g \in \mathfrak{H} \right\},$$

де $E_\lambda = E([0, \lambda])$ – спектральна міра оператора A.

Під слабким розв'язком рівняння (3.1) розуміється неперервна вектор-функція $y(t) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathfrak{H}$ така, що для довільного $t \in \mathbb{R}_+$

$$\int\limits_0^t y(s)\, ds \in \mathcal{D}(A) \quad \text{i} \quad y(t) = -A \int\limits_0^t y(s)\, ds + y(0).$$

Позначимо через S множину усіх слабких розв'язків цього рівняння. В [206] установлено, що

$$S = \left\{ y(t) : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathfrak{H} \middle|\ y(t) = e^{-tA} f, f \in \mathfrak{H} \right\}, \tag{3.2}$$

де

$$e^{-tA} f = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\, dE_\lambda f.$$

Зауважимо, що множина усіх сильних (або просто) розв'язків (3.1) дається формулою (3.2), де f перебігає всю область визначення $\mathcal{D}(A)$ оператора A.

Неважко переконатися, що множина S утворює банахів простір відносно норми

$$\|y\|_S = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\| e^{-tA} f \right\| = \|f\|. \tag{3.3}$$

Якщо оператор A обмежений, то будь-який слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння (3.1) може бути продовжений до цілої $\mathfrak{H}$-значної вектор-функції $y(z)$ експоненціального типу

$$\sigma(y) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \|y(z)\| \le c e^{\alpha |z|} \right\}.$$

Проте це не так у випадку необмеженого A. Множина S_0 усіх слабких розв'язків рівняння (3.1), які допускають цілі експоненціального типу продовження, описується таким чином.

Теорема 3.1 *Слабкий розв'язок* $y(t)$ *рівняння* (3.1) *належить до* S_0 *тоді і тільки тоді, коли його можна подати у вигляді* (3.2) *з* $f \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$. *Множина* S_0 *є щільною в* S, *і* $\sigma(y) = \sigma(f, A)$.

Доведення. Нехай $f \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$. Тоді $f = E_\alpha f$, де $\alpha = \sigma(f, A)$. За формулою (3.2),

$$y(t) = \int_0^\alpha e^{-\lambda t}\, dE_\lambda f.$$

Звідси випливає, що $y(t)$ допускає продовження до цілої вектор-функції $y(z)$ і

$$\|y(z)\|^2 = \int_0^\alpha e^{-2\mathrm{Re} z\lambda}\, d(E_\lambda f, f) \le e^{2\sigma(f,A)|z|}\|f\|^2,$$

тобто $y(z)$ є цілою $\mathfrak{H}$-значною функцією експоненціального типу $\sigma(y) \le \sigma(f, A)$.

Навпаки, якщо $y(t) = e^{-tA}f$ можна продовжити до цілої вектор-функції експоненціального типу $\sigma(y)$, то, беручи до уваги співвідношення

$$\|y(-t)\|^2 = \int_0^\infty e^{2\lambda t}\, d(E_\lambda f, f) \le ce^{2\sigma(y)t}, \quad t \ge 0,$$

одержимо

$$\int_{\sigma(y)}^\infty e^{2t(\lambda - \sigma(y))}\, d(E_\lambda f, f) \le c.$$

Переходячи до границі під знаком інтеграла при $t \to \infty$, дійдемо висновку, на основі теореми Фату, що міра, породжена монотонною функцією $(E_\lambda f, f)$, концентрується на інтервалі $[0, \sigma(y)]$. Отже, $\sigma(f, A) \le \sigma(y)$.

Щільність S_0 в S зумовлюється щільністю в $\mathfrak{H}$ множини

$$\{E_\alpha f = E([0,\alpha])f, \forall \alpha > 0, \forall f \in \mathfrak{H}\}.$$

Теорему доведено.

З огляду на теорему 3.1 постає питання, чи можливо наблизити довільний слабкий розв'язок рівняння (3.1) його цілими розв'язками експоненціального типу. Нижче дається відповідь на це питання, а саме, доводяться прямі й обернені теореми, в яких з'ясовується зв'язок між степенем гладкості розв'язку і швидкістю прямування до нуля його найкращого наближення. І тут важливу роль відіграє операторний підхід до задач апроксимації, розвинутий в [9, 194, 207].

3.2 Аналоги теореми Джексона і нерівності Бернштейна

Нагадаємо декілька означень і понять теорії апроксимації, необхідних для формулювання подальших результатів.

Для $y \in S$ і числа $r > 0$ покладемо

$$\mathcal{E}_r(y) = \inf_{y_0 \in S_0 : \sigma(y_0) \le r} \|y - y_0\|_S.$$

Отже, $\mathcal{E}_r(y)$ – це найкраще наближення слабкого розв'язку $y(t)$ рівняння (3.1) його цілими розв'язками експоненціального типу, що не перевищує r. При фіксованому y функція $\mathcal{E}_r(y)$ не зростає і, оскільки $\overline{S_0} = S$, то $\mathcal{E}_r(y) \to 0$ при $r \to \infty$.

Для $f \in \mathfrak{H}$ покладемо також

$$\mathcal{E}_r(f, A) = \inf_{f_0 \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A) : \sigma(f_0, A) \le r} \|f - f_0\| = \|(I - E_r)f\|.$$

Якщо $y(t) = e^{-tA}f$, то, завдяки (3.3),

$$\mathcal{E}_r(y) = \mathcal{E}_r(f, A). \tag{3.4}$$

Для довільного $k \in \mathbb{N}_0$ введемо також функцію

$$\begin{aligned} \omega_k(t, y) &= \sup_{0 \le h \le t} \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j y(s + jh) \right\|, \ k \in \mathbb{N}; \\ \omega_0(t, y) &\equiv \|y\|_S, \quad t > 0. \end{aligned}$$

З формули (3.2) і рівності $e^{-sA}y(t) = y(t+s)$ одержуємо

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \omega_k(t, y) = \sup_{0 \le h \le t} \left\| \left(e^{-hA} - I\right)^k y \right\|_S.$$

Наступна теорема встановлює співвідношення між $\mathcal{E}_r(y)$ та $\omega_k(t, y)$, і вона є аналогом добре відомої теореми Джексона [173] про апроксимацію неперервної періодичної функції тригонометричними поліномами.

Теорема 3.2 *Нехай $y \in S$. Тоді*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \exists c_k > 0 : \mathcal{E}_r(y) \le c_k \omega_k\left(\frac{1}{r}, y\right), \quad r > 0. \tag{3.5}$$

Доведення. За формулою (3.2) $y(t) = e^{-tA}f$, $f \in \mathfrak{H}$. З (3.3), (3.4) випливає, що

$$\begin{aligned} \omega_k^2(t, y) &= \sup_{0 \le s \le t} \left\| \left(e^{-sA} - I\right)^k y \right\|_S^2 \ge \left\| \left(e^{-tA} - I\right)^k y \right\|_S^2 \\ &= \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \left\| \left(e^{-tA} - I\right)^k e^{-sA} f \right\|^2 \\ &= \left\| \left(e^{-tA} - I\right)^k f \right\|^2 = \int_0^\infty \left(e^{-\lambda t} - 1\right)^{2k} d(E_\lambda f, f) \\ &\ge \int_{\frac{1}{t}}^\infty \left(e^{-\lambda t} - 1\right)^{2k} d(E_\lambda f, f) \ge \left(1 - e^{-1}\right)^{2k} \mathcal{E}_{\frac{1}{t}}^2(y). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\forall t > 0 : \mathcal{E}_{\frac{1}{t}}(y) \leq \left(1 - e^{-1}\right)^{-k} \omega_k(t, y).$$

Покладаючи $r = \dfrac{1}{t}$ and $c_k = \left(1 - e^{-1}\right)^{-k}$, одержуємо (3.5).

Теорему доведено.

Позначимо через $C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$ множину усіх n разів неперервно диференційовних на $\mathbb{R}_+$ $\mathfrak{H}$-значних вектор-функцій. В силу замкненості оператора A включення $y \in S \cap C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$ зумовлює належність $y^{(k)} \in S,\ k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 3.3 *Припустимо, що* $y \in S \cap C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}),\ n \in \mathbb{N}_0$. *Тоді*

$$\forall r > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{E}_r(y) \leq \frac{c_{k+n}}{r^n} \omega_k \left(\frac{1}{r}, y^{(n)} \right),$$

де сталі c_k *є тими самими, що й у теоремі* 3.2.

Доведення. Нехай $y \in S \cap C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}), r > 0$ і $0 \leq t < \frac{1}{r}$. Завдяки властивостям C_0-півгрупи стиску, одержуємо

$$\left\| \left(e^{-tA} - I\right)^{k+n} y(s) \right\| = \left\| \left(e^{-tA} - I\right)^{n} \left(e^{-tA} - I\right)^{k} y(s) \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^t \cdots \int_0^t \left\| e^{-(s_1 + \ldots s_n)A} \right\| \left\| \left(e^{-tA} - I\right)^{k} A^n y(s) \right\| ds_1 \ldots ds_n \leq$$

$$\leq t^n \left\| \left(e^{-tA} - I\right)^{k} y^{(n)}(s) \right\|,$$

звідки

$$\omega_{k+n} \left(\frac{1}{r}, y \right) \leq \frac{1}{r^n} \omega_k \left(\frac{1}{r}, y^{(n)} \right)$$

і, на основі нерівності (3.5),

$$\mathcal{E}_r(y) \leq c_{k+n} \omega_{k+n} \left(\frac{1}{r}, y \right) \leq \frac{c_{k+n}}{r^n} \omega_k \left(\frac{1}{r}, y^{(n)} \right),$$

що й треба було довести.

Покладаючи в теоремі 3.3 $k = 0$ й беручи до уваги, що $\omega_0(t, y^{(n)}) = \|y^{(n)}\|_S$, приходимо до такого твердження.

Наслідок 3.1 *Нехай* $y \in S \cap C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$, $n \in \mathbb{N}$. *Then*

$$\forall r > 0 : \mathcal{E}_r(y) \le \frac{c_n}{r^n} \|y^{(n)}\|_S.$$

Для чисел $h > 0$ та $k \in \mathbb{N}_0$ покладемо

$$\Delta_h^k = \left(e^{-hA} - I\right)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j e^{-jhA}.$$

Лема 3.1 *Якщо* $y \in S_0$ *і* $\sigma(y) = \alpha$, *то*

$$\forall h > 0,\ \forall k, n \in \mathbb{N}_0 : \left\|\Delta_h^k y^{(n)}\right\|_S \le (\alpha h)^k \alpha^n \|y\|_S. \tag{3.6}$$

Доведення. З нерівності

$$1 - \lambda h - e^{-\lambda h} \le 0 \quad (\lambda \ge 0,\ h > 0)$$

і представлення $y(t) = e^{-tA} f$ випливає, що

$$\left\|\Delta_h^k y^{(n)}\right\|^2 = \int_0^\alpha \left(1 - e^{-\lambda h}\right)^{2k} e^{-2\lambda t} \lambda^{2n}\, d(E_\lambda f, f) \le$$

$$\le \int_0^\alpha (\lambda h)^{2k} \lambda^{2n}\, d(E_\lambda f, f) \le (\alpha h)^{2k} \alpha^{2n} \|f\|^2.$$

Це і (3.3) зумовлюють співвідношення

$$\left\|\Delta_h^k y^{(n)}\right\|_S \le (\alpha h)^k \alpha^n \|f\| = (\alpha h)^k \alpha^n \|y\|_S.$$

Лему доведено

Беручи в (3.6) $k = 0$, отримуємо аналог нерівності Бернштейна (див.[174, 175, 208]), а саме:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\|y^{(n)}\right\| \le \alpha^n \|y\|_S. \tag{3.7}$$

Покладаючи тут $n = 0$, прийдемо до співвідношення

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\|\Delta_h^k y\right\|_S \le (\alpha h)^k \|y\|_S = (\alpha h)^k \alpha^n \|y\|_S.$$

Варто зауважити, що з нерівності

$$\mathcal{E}_r(y) \le \frac{c}{r^n}, \quad r > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.8}$$

ще не випливає включення $y \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$. Тим не менше, наступне твердження, обернене до теореми 3.3, виконується.

Теорема 3.4 *Припустимо, що $y \in S$ і $\omega(t)$ – функція типу модуля неперервності, тобто:*

1) *$\omega(t)$ є неспадною неперервною на $\mathbb{R}_+$;*

2) *$\omega(0) = 0$;*

3) *$\exists c > 0,\ \forall t > 0 : \omega(2t) \le c\omega(t)$.*

Для того, щоб $y \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$, достатньо, щоб існувало число $m > 0$ таке, що

$$\forall r > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{E}_r(y) \le \frac{m}{r^n}\omega\left(\frac{1}{r}\right). \tag{3.9}$$

Доведення. Припустимо, що для $y \in S$ виконується умова (3.9). Тоді існує послідовність $y_i \in S : \sigma(y_i) < 2^i$ $(i \in \mathbb{N})$ така, що

$$\|y - y_i\|_S \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Беручи до уваги (3.7) та нерівність $\sigma(y_i - y_{i-1}) < 2^i$ $(i \in \mathbb{N})$, одержуємо

$$\begin{aligned}\left\|y_i^{(n)} - y_{i-1}^{(n)}\right\|_S \le& 2^{in}\|y_i - y_{i-1}\|_S \le 2^{in}(\|y - y_i\|_S + \|y - y_{i-1}\|_S) \le \\ \le& 2^{in}\left(\frac{m}{2^{in}}\omega\left(\frac{1}{2^i}\right) + \frac{m}{2^{(i-1)n}}\omega\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right)\right).\end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\left\|y_i^{(n)} - y_{i-1}^{(n)}\right\|_S \le m2^n\left(\frac{1}{2^n} + c\right)\omega\left(\frac{1}{2^i}\right),$$

а тому

$$\left\|y_i^{(n)} - y_{i-1}^{(n)}\right\|_S \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

В силу повноти простору S існує $\widetilde{y} \in S$ таке, що

$$\left\|y_i^{(n)} - \widetilde{y}\right\|_S \to 0, \quad \text{коли} \quad i \to \infty.$$

Таким чином, $y_i \to y,\ y_i^{(n)} \to \widetilde{y}\ (i \to \infty)$ у просторі S. Оскільки оператор $\dfrac{d^n}{dt^n}$ є замкненим в S, робимо висновок, що $y \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$ і $y^{(n)}(t) \equiv \widetilde{y}(t)$.

Доведення завершено.

Підставляючи в нерівність (3.8) $n + \varepsilon$ замість n і тим самим підсилюючи її, прийдемо до такого наслідку.

Наслідок 3.2 *Нехай для $y \in S$*

$$\exists c > 0,\ \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{E}_r(y) \leq \frac{c}{r^{n+\varepsilon}}.$$

Тоді $y \in C^n(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H})$.

3.3 Прямі й обернені теореми теорії наближень

Нехай $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ – неспадна послідовність чисел (не зменшуючи загальності, можна вважати $m_0 = 1$). Покладемо

$$C_{\{m_n\}} = C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) = \bigcup_{\alpha > 0} C_{m_n}^{\alpha}, \quad C_{(m_n)} = C_{(m_n)}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) = \bigcap_{\alpha > 0} C_{m_n}^{\alpha},$$

де

$$C_{m_n}^{\alpha} = C_{m_n}^{\alpha}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) = \\ = \left\{ y \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) \middle| \exists c = c(y) > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \left\| y^{(k)}(t) \right\| \leq c m_k \alpha^k \right\}$$

– банахів простір відносно норми

$$\|y\|_{C_{m_n}^{\alpha}} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\sup\limits_{t \in \mathbb{R}_+} \left\|y^{(k)}(t)\right\|}{\alpha^k m_k}.$$

У просторах $C_{\{m_n\}}$ та $C_{(m_n)}$ вводяться топології індуктивної та, відповідно, проективної границі просторів $C^{\alpha}_{m_n}$. Зауважимо, що простори $C_{\{n!\}} = C_{\{n^n\}}$, $C_{(n!)} = C_{(n^n)}$ ($m_n = n!$ або n^n) і $C_{\{1\}}$ ($m_n \equiv 1$) є не що інше, як простори обмежених на $\mathbb{R}_+$ разом з усіма їхніми похідними аналітичних, цілих та цілих експоненціального типу $\mathfrak{H}$-значних вектор-функцій відповідно.

У подальшому додатково припускатимемо, що для послідовності $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ виконується умова

$$\forall \alpha > 0,\ \exists c = c(\alpha) : m_n \geq c\alpha^n. \tag{3.10}$$

Позначимо

$$\tau(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{m_n}. \tag{3.11}$$

Ясно, що функція $\tau(\lambda)$ є цілою, $\tau(\lambda) \geq 1$ for $\lambda \geq 0$ і $\tau(\lambda) \uparrow \infty$ при $\lambda \to \infty$.

Теорема 3.5 *Нехай послідовність $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовольняє умову*

$$\exists c > 0\ \exists h > 1\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : m_{n+1} \leq ch^n m_n \tag{3.12}$$

Тоді мають місце такі співвідношення еквівалентності:

$$\begin{aligned} y \in C^{\infty}(\mathbb{R}^+, \mathfrak{H}) &\iff \forall \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(\tfrac{1}{r^{\alpha}}\right) \quad (r \to \infty), \\ y \in C_{\{m_n\}} &\iff \exists \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(\tau^{-1}(\alpha r)\right) \quad (r \to \infty), \\ y \in C_{(m_n)} &\iff \forall \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(\tau^{-1}(\alpha r)\right) \quad (r \to \infty) \end{aligned}$$

($\tau(\lambda)$ *визначаєтьса в* (3.11)).

Доведення. Нехай, як і раніше, A – невід'ємний самоспряжений оператор в $\mathfrak{H}$ і $C^{\infty}(A)$ – множина усіх нескінченно диференційовних векторів оператора A:

$$C^{\infty}(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n).$$

Для числа $\alpha > 0$ покладемо

$$C_{m_n}^{\alpha}(A) = \left\{ f \in C^{\infty}(A) \middle| \exists c = c(f) > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \|A^n f\| \le c\alpha^n m_n \right\}.$$

Множина $C_{m_n}^{\alpha}(A)$ – банахів простір з нормою

$$\|f\|_{C_{m_n}^{\alpha}(A)} = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\|A^n f\|}{\alpha^n m_n}.$$

Тоді

$$C_{\{m_n\}}(A) = \bigcup_{\alpha>0} C_{m_n}^{\alpha}(A) \quad \text{та} \quad C_{(m_n)}(A) = \bigcap_{\alpha>0} C_{m_n}^{\alpha}(A)$$

– лінійні локально-опуклі простори з топологіями індуктивної та, відповідно, проективної границі банахових просторів $C_{m_n}^{\alpha}(A)$.

Варто зазначити, що частинними випадками цих просторів є розглянуті вище класи Жевре

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = C_{\{n^{n\beta}\}}(A), \quad \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = C_{(n^{n\beta})}(A) \quad \left(m_n = n^{n\beta},\ \beta > 0\right)$$

та простір цілих векторів експоненціального типу оператора A

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = C_{\{1\}}(A) \quad (m_n \equiv 1).$$

Покладемо

$$\mathcal{E}_r(f, A) = \inf_{f_0 \in C_{\{1\}}(A)} \|f - f_0\|.$$

Як показано в [9], мають місце такі співвідношення еквівалентності:

$$\begin{aligned} f \in C^{\infty}(A) &\iff \forall \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(f, A) = O\left(\tfrac{1}{r^{\alpha}}\right) \quad (r \to \infty), \\ f \in C_{\{m_n\}}(A) &\iff \exists \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(f, A) = O\left(\tau^{-1}(\alpha r)\right) \quad (r \to \infty), \\ f \in C_{(m_n)}(A) &\iff \forall \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(f, A) = O\left(\tau^{-1}(\alpha r)\right) \quad (r \to \infty). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Розглянемо відображення $F : \mathfrak{H} \mapsto S$,

$$Ff = e^{-tA} f.$$

Оскільки для $y \in S$ існує єдиний вектор $f \in \mathfrak{H}$ такий, що $y = e^{-tA}f$, це відображення є взаємно однозначним. З (3.3) випливає, що F ізометрично відображає $\mathfrak{H}$ на S і

$$F\left(C^{\infty}(A)\right) = C^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}),$$

$$F\left(C_{\{m_n\}}(A)\right) = C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}), \quad F\left(C_{(m_n)}(A)\right) = C_{(m_n)}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}). \tag{3.14}$$

Доведення теореми випливає з (3.13) і (3.14), тому що $\mathcal{E}_r(f, A) = \mathcal{E}_r\left(e^{-tA}f\right)$.

Якщо $m_n = n^{n\beta}$ $(\beta > 0)$, то $\tau(r) = e^{-r^{1/\beta}}$ і наслідком теореми 3.5 є наступне твердження.

Наслідок 3.3 *Мають місце такі співвідношення еквівалентності:*

$$y \in C_{\{n^{n\beta}\}}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) \iff \exists \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r^{1/\beta}}\right) \quad (r \to \infty),$$
$$y \in C_{(n^{n\beta})}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) \iff \forall \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r^{1/\beta}}\right) \quad (r \to \infty).$$

Нагадаємо, що ціла $\mathfrak{H}$-значна вектор-функція $x(\lambda)$ має скінченний порядок росту, якщо

$$\exists \gamma > 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{C} : \|x(\lambda)\| \le \exp(|\lambda|^{\gamma}).$$

Точна нижня межа $\rho(x)$ таких γ називається порядком $x(\lambda)$. Тип цілої вектор-функції $x(\lambda)$ порядку ρ визначається як

$$\sigma(x) = \inf\left\{a > 0 : \|x(\lambda)\| \le \exp(a|\lambda|^{\rho})\right\}.$$

Оскільки півгрупа $\left\{e^{-tA}\right\}_{t \ge 0}$ є аналітичною, кожен слабкий розв'язок $y(t)$ рівняння (3.1) є аналітичним на $(0, \infty)$. Він є аналітичним і на $[0, \infty)$ тоді і тільки тоді, коли $y \in C_{\{n^n\}}$.

За наслідком 3.3

$$\exists \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r}\right) \quad (r \to \infty).$$

Що стосується можливості продовження $y(t)$ до цілої вектор-функції порядку ρ і скінченного типу $\sigma(y)$, відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 3.6 *Для того, щоб слабкий розв'язок рівняння* (3.1) *допускав продовження до цілої $\mathfrak{H}$-значної вектор-функції $y(z)$, необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r}\right) \quad (r \to \infty). \tag{3.15}$$

Розширення $y(z)$ є скінченного порядку ρ і скінченного типу тоді і тільки тоді, коли

$$\exists \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r^{1/\beta}}\right) \quad (r \to \infty),$$

де β і ρ пов'язані одне з одним формулою

$$\beta = \frac{\rho - 1}{\rho} < 1.$$

Зауважимо, що можна завжди припустити $\rho > 1$. Справді, якщо $\rho \leq 1$ і тип є скінченним, то $y \in S_0$ і немає жодного сенсу наближати розв'язок з S_0 розв'язками з того самого простору.

Доведення теореми 3.6. Нехай $y(t)$ – слабкий розв'язок рівняння (3.1). За наслідком 3.3, $y \in C_{(n^n)}$, а отже, $y(t)$ допускає продовження до цілої вектор-функції тоді і тільки тоді, коли виконується співвідношення (3.15).

Припустимо, що $y(t)$ допускає продовження до цілої $\mathfrak{H}$-значної вектор-функції $y(z)$ порядку ρ і скінченного типу σ. Тоді

$$\forall \sigma_1 > \sigma, \ \exists c = c(\sigma_1) : \|y(z)\| \leq c e^{\sigma_1 |z|^\rho}.$$

Отже,

$$\forall r > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}_0 : \left\| y^{(n)}(z) \right\| \leq \frac{n!}{2\pi} \int\limits_{|z-\zeta|=r} \frac{\|y(\zeta)\|}{|z-\zeta|^{n+1}} \, d\zeta \leq \frac{c\sigma_1 n!}{r^n} \exp\left(2\sigma_1 r^\rho\right).$$

Беручи до уваги, що функція $\dfrac{\exp(ar^\rho)}{r^n}$ досягає свого мінімуму у точці $\left(\dfrac{n}{a\rho}\right)^{1/\rho}$, і застосовуючи формулу Стірлінга

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (n \to \infty),$$

одержуємо нерівність

$$\left\| y^{(n)}(z) \right\| \leq c\left(2e^{1-\rho}\sigma_1\rho\right)^{\frac{1}{\rho}} n^{\frac{\rho-1}{\rho}n},$$

яка показує, що $y \in C_{\{n^{n\beta}\}}$, де

$$\beta \leq \frac{\rho - 1}{\rho} \Longleftrightarrow \rho \geq \frac{1}{1-\beta}, \quad \beta < 1. \tag{3.16}$$

З наслідку 3.3 випливає, що

$$\exists\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r^{1/\beta}}\right) \quad (r \to \infty). \tag{3.17}$$

Навпаки, нехай (3.17) виконується. Тоді, в силу наслідку 3.3, вектор-функція $y \in C_{\{n^{n\beta}\}}$ $(0 < \beta < 1)$ є цілою і може бути зображена рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{y^{(k)}(0)}{k!} z^k$. Для її порядку росту ρ маємо

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln \dfrac{n!}{\left\| y^{(n)}(0) \right\|}} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln\left(n! n^{-n\beta}\right)} = \frac{1}{1-\beta},$$

тобто,

$$\rho \leq \frac{1}{1-\beta}. \tag{3.18}$$

В силу (3.16) і (3.18),

$$\rho = \frac{1}{1-\beta}, \quad 0 < \beta < 1.$$

3.4 Випадок банахового простору

Прямі й обернені теореми теорії апроксимації зазвичай формулюються у банаховому просторі а їх доведення дещо складніші, ніж у гільбертовому. Нижче ми покажемо, як, наприклад, теорема 3.5 може бути переформульована у випадку банахового простору. Щоб це зробити, введемо простір $\mathfrak{H}^n$ як

$$\mathfrak{H}^n = \mathcal{D}(A^n), \quad \|f\|_{\mathfrak{H}^n} = \left(\|f\|^2 + \|A^n f\|^2\right)^{1/2}.$$

Простір $\mathfrak{H}^n$ щільно й неперервно вкладається в $\mathfrak{H}$. Позначимо через $\mathfrak{H}^{-n}$ поповнення $\mathfrak{H}$ за нормою

$$\|f\|_{\mathfrak{H}^{-n}} = \left\|(A+I)^{-n} f\right\|,$$

– так званий простір з негативною нормою, асоційований з простором $\mathfrak{H}^n$ з позитивною нормою в ланцюжку

$$\mathfrak{H}^n \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^{-n}$$

(див. [10-12]). Відповідним підбором норм в $\mathfrak{H}^n$ та $\mathfrak{H}^{-n}$ можна зробити так, щоб

$$\|f\|_{\mathfrak{H}^{-n}} \le \|f\| \le \|f\|_{\mathfrak{H}^n}.$$

Теорема 3.7 *Нехай $\mathfrak{B}$ – банахів простір у ланцюжку*

$$\mathfrak{H}^{k_1} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}^{-k_2} \tag{3.19}$$

щільно і неперервно вкладених один в одного просторів з деякими $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, а послідовність $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ має властивості (3.10) *та* (3.12)*. Тоді для слабкого розв'язку $y(t)$ рівняння* (3.1) *виконуються співвідношення еквi-*

валентності

$$y \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) \iff \forall\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y, \mathfrak{B}) = O\left(r^{-\alpha}\right) \quad (r \to \infty),$$
$$y \in C_{\{m_n\}} \iff \exists\alpha > 0, : \mathcal{E}_r(y, \mathfrak{B}) = O\left(\tau^{-1}(\alpha r)\right) \quad (r \to \infty),$$
$$y \in C_{(m_n)} \iff \forall\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y, \mathfrak{B}) = O\left(\tau^{-1}(\alpha r)\right) \quad (r \to \infty),$$

де

$$\mathcal{E}_r(y, \mathfrak{B}) = \inf_{y_0 \in S_0 : \sigma(y_0) \leq r} \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|y(s) - y_0(s)\|_{\mathfrak{B}},$$

$\tau(\lambda)$ *визначається в* (3.11), $\|\cdot\|_{\mathfrak{B}}$ *– норма в* $\mathfrak{B}$.

Доведення. Перш за все покажемо, що простори $C_{\{m_n\}}(A)$ та $C_{(m_n)}(A)$, розглядувані як підпростори $\mathfrak{H}$, збігаються з відповідними підпросторами $C^k_{\{m_n\}}(A)$ та $C^k_{(m_n)}(A)$, побудованими у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}^k$ звуженням $A \restriction \mathfrak{H}^k$, яке є невід'ємним самоспряженим оператором в $\mathfrak{H}^k$.

Отже, нехай $f \in C_{\{m_n\}}(A)$. Тоді

$$\begin{aligned} \exists\alpha > 0,\ \exists c > 0 : \left\|A^i f\right\|_{\mathfrak{H}^k} &= \left(\left\|A^i f\right\|^2 + \left\|A^{i+k} f\right\|^2\right)^{1/2} \\ &\leq c\left(\alpha^{2i} m_i^2 + \alpha^{2(i+k)} m_{k+i}^2\right)^{1/2} \leq \widetilde{c}\left(\alpha h^k\right)^i m_i, \end{aligned} \tag{3.20}$$

тобто $C_{\{m_n\}}(A) \subseteq C^k_{\{m_n\}}(A)$. Якщо ж $f \in C_{(m_n)}(A)$, то нерівність (3.20) виконується для довільного $\alpha > 0$, а тому $C_{(m_n)}(A) \subseteq C^k_{(m_n)}(A)$. Протилежні вкладення є наслідком оцінки $\left\|A^i f\right\|_{\mathfrak{B}} \leq \left\|A^i f\right\|_{\mathfrak{H}^k}$. Таким чином, маємо

$$C_{\{m_n\}}(A) = C^k_{\{m_n\}}(A), \quad C_{(m_n)}(A) = C^k_{(m_n)}(A). \tag{3.21}$$

Очевидно також, що $C^{\infty}_k(A) = C^{\infty}(A)$.

Оскільки для вектора $g \in \mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = C_{\{1\}}(A)$ $(m_n \equiv 1)$ типу $\sigma(g, A) \leq k$ виконується нерівність

$$\begin{aligned} \left\|A^i g\right\|_{\mathfrak{H}^k} = \left(\left\|A^i g\right\|^2 + \left\|A^{i+k} g\right\|^2\right)^{1/2} \leq \\ \leq c\left(\alpha^{2i} + \alpha^{2(i+k)}\right)^{1/2} \leq \widetilde{c}\alpha^i, \quad \widetilde{c} = \left(1 + \alpha^{2k}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

то простір $C_{\{1\}}(A)$ збігається з $C^k_{\{1\}}(A)$. Більш того, тип вектора g відносно оператора A у просторі $C_{\{1\}}(A)$ є такий самий, як його тип відносно оператора $A \restriction \mathfrak{H}^k$ у просторі $C^k_{\{1\}}(A)$.

Позначимо через $\widetilde{A}$ замикання A у просторі $\mathfrak{H}^{-k}$. Оператор $\widetilde{A}$ є невід'ємним самоспряженим оператором в $\mathfrak{H}^{-k}$ і, якщо $\mathfrak{H}$ розглядається як підпростір простору $\mathfrak{H}^{-k}$, то ми опиняємось у попередній ситуації. З цієї причини

$$C_{\{m_n\}}(A) = C^{-k}_{\{m_n\}}(\widetilde{A}), \quad C_{(m_n)}(A) = C^{-k}_{(m_n)}(\widetilde{A}), \tag{3.22}$$

і

$$\forall g \in C_{\{1\}}(A) = C^k_{\{1\}}(A) : \sigma(g, A) = \sigma(g, \widetilde{A}).$$

Враховуючи, що звуження (розширення) півгрупи $\left\{e^{-tA}\right\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ на простір $\mathfrak{H}^{k_1}$, $k_1 > 0$, (на $\mathfrak{H}^{-k_2}$, $k_2 > 0$) є аналітичною C_0-півгрупою стиску в $\mathfrak{H}^{k_1}$ (в $\mathfrak{H}^{-k_2}$), вкладення $C^k_{\{m_n\}}(A) \subseteq \mathfrak{B}$, $C_{(m_n)}(A) \subseteq \mathfrak{B}$ і ланцюжок (3.19), одержуємо для $y(t) = e^{-tA}f$, $f \in C_{\{m_n\}}(A)$ та $y_0(t) = e^{-tA}g$, $g \in C_{\{1\}}(A)$ нерівності

$$\left\|e^{-tA}f - e^{-tA}g\right\|_{\mathfrak{B}} \le \left\|e^{-tA}f - e^{-tA}g\right\|_{\mathfrak{H}^{k_1}} \le \|f-g\|_{\mathfrak{H}^{k_1}},$$

звідки

$$\mathcal{E}_r(y, \mathfrak{B}) = \inf_{y_0\in S_0:\sigma(y_0)\le r}\ \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left\|e^{-tA}f - e^{-tA}g\right\|_{\mathfrak{B}} \le \|f-g\|_{\mathfrak{H}^{k_1}},$$

тобто,

$$\mathcal{E}_r(y, \mathfrak{B}) \le \mathcal{E}_r(f, A \restriction \mathfrak{H}^{k_1}). \tag{3.23}$$

З (3.19) випливає, що

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : \left\|e^{-At}f - e^{-At}g\right\|_{\mathfrak{H}^{-k_2}} \le \left\|e^{-At}f - e^{-At}g\right\|_{\mathfrak{B}}.$$

Звідси одержуємо

$$\|f-g\|_{\mathfrak{H}^{-k_2}} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left\|e^{-At}f - e^{-At}g\right\|_{\mathfrak{H}^{-k_2}} \le \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left\|e^{-At}f - e^{-At}g\right\|_{\mathfrak{B}},$$

а тому

$$\inf_{g\in C_{\{1\}}(A):\sigma(g)\le r}\|f-g\|_{\mathfrak{H}^{-k_2}}\le\inf_{y_0\in S_0:\sigma(y_0)\le r}\sup_{t\in\mathbb{R}_+}\|y(t)-y_0(t)\|_{\mathfrak{B}}.$$

Отже,

$$\mathcal{E}_r(f,\widetilde{A})\le\mathcal{E}_r(y,\mathfrak{B}).\tag{3.24}$$

Нерівності (3.23), (3.24), з урахуванням (3.19), (3.21), (3.22) і теореми 3.5, завершують доведення теореми 3.7.

3.5 Випадок дискретного спектру самоспряженого оператора A

Припустимо, що A – самоспряжений оператор в $\mathfrak{H}$ з дискретним спектром, його власні значення $\lambda_k=\lambda_k(A)$, $k\in\mathbb{N}$, задовольняють умову $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-p}<\infty$ з деяким $p>0$ і λ_k пронумеровані в порядку зростання з урахуванням їх кратності. Позначимо через $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ортонормований базис в $\mathfrak{H}$ із власних векторів оператора A. Тоді спектральна функція E_λ цього оператора має вигляд

$$E_\lambda f=\sum_{\lambda_k\le\lambda}f_ke_k,$$

де $f_k=(f,e_k)$ – коефіцієнти Фур'є f, і

$$\mathcal{E}_r(f,A)=\left\|\sum_{k:\lambda_k>r}f_k^2\right\|^{1/2}.$$

Як показано в [209], справджується таке твердження.

Твердження 3.1 *Мають місце такі співвідношення еквівалентності:*

$$\begin{aligned} f \in C^{\infty}(A) &\iff \forall \alpha > 0,\ \exists c = c(\alpha) > 0 : |f_k| \le c\lambda_k^{-\alpha}, \\ f \in C_{\{1\}}(A) &\iff \exists n_0 \in \mathbb{N} : f_k = 0 \ \textit{при}\ k \ge n_0, \\ f \in C_{\{m_n\}}(A) &\iff \exists \alpha > 0,\ \exists c > 0 : |f_k| \le c\tau^{-1}(\alpha\lambda_k), \\ f \in C_{(m_n)}(A) &\iff \forall \alpha > 0,\ \exists c = c(\alpha) > 0 : |f_k| \le c\tau^{-1}(\alpha\lambda_k), \end{aligned}$$

де функція $\tau(\lambda)$ *задаєтъся формулою* (3.11).

Нехай тепер $y(t)$ – слабкий розв'язок рівняння (3.1). Тоді

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t} f_k e_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 < \infty. \tag{3.25}$$

Вектор-функція $y(t)$ є цілою експоненціального типу ($y \in S_0$) тоді і тільки тоді, коли

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : f_k = 0 \ \text{при}\ k \ge n_0.$$

Із твердження 3.1, теорем 3.3, 3.5 та еквівалентностей (3.13) випливає

Теорема 3.8 *Мають місце такі співвідношення еквівалентності:*

$$\begin{aligned} y \in C^{n}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) &\iff \mathcal{E}_{\lambda_k}(y) = O\left(\lambda_{k+1}^{-n}\right) \quad (n \to \infty), \\ y \in C^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) &\iff \forall \alpha > 0 : \mathcal{E}_{\lambda_k}(y) = O\left(\lambda_{k+1}^{-\alpha}\right) \quad (n \to \infty), \\ y \in C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) &\iff \exists \alpha > 0 : \mathcal{E}_{\lambda_k}(y) = O\left(\tau^{-1}(\alpha\lambda_{k+1})\right) \quad (n \to \infty), \\ y \in C_{(m_n)}(\mathbb{R}_+, \mathfrak{H}) &\iff \forall \alpha > 0 : \mathcal{E}_{\lambda_k}(y) = O\left(\tau^{-1}(\alpha\lambda_{k+1})\right) \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

3.6 Застосування до рівнянь з частинними похідними

Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$, де Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^q$ з кусково-гладкою границею $\partial\Omega$, і позначимо через A' оператор, породжений у просторі $L_2(\Omega)$ диференціальним виразом

$$(\mathcal{L}u)(x) = -\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{q} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right) + c(x)u(x), \tag{3.26}$$

на множині

$$\mathcal{D}(A') = \left\{ u \in C^2(\overline{\Omega}) \middle| u \restriction_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \tag{3.27}$$

Припустимо, що $a_{ik}(x), c(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ c(x) \geq 0$, а також, що вираз (3.26) є еліптичного типу в $\overline{\Omega}$. У цьому випадку всі власні значення $\mu_i(x),\ i = 1, \dots q$, матриці $\|a_{ik}(x)\|_{i,k=1}^q,\ x \in \overline{\Omega}$, мають однаковий знак; не обмежуючи загальності, можна ще припустити, що $\mu_i(x) > 0,\ x \in \overline{\Omega}$.

Оператор A' є додатно визначеним ермітовим зі щільною в $L_2(\Omega)$. областю визначення. Отже, A' допускає замикання до додатно визначеного самоспряженого оператора A в $L_2(\Omega)$. Зазвичай A називають оператором, породженим (3.26) і (3.27). Спектр оператора A дискретний, і для його власних значень $\lambda_1(A) < \lambda_2(A) < \dots < \lambda_n(A) < \dots$ виконується оцінка

$$c_1 n^{2/q} \leq \lambda_n(A) \leq c_2 n^{2/q}, \quad 0 < c_i = \text{const}, \quad i = 1, 2. \tag{3.28}$$

(див.[210]). Позначимо через $e_n(x),\ n \in \mathbb{N}$, ортонормований базис в $L_2(\Omega)$, складений із власних функцій оператора A.

У випадку, коли Ω – q-вимірний куб $0 < x_k < a,\ k = 1, \dots, q,\ a > 0$, і

$$\mathcal{L} = -\sum_{i=1}^q \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \tag{3.29}$$

формули для власних значень $\lambda_{n_1 \dots n_q},\ n_k \in \mathbb{N}$, та власних функцій $e_{n_1 \dots n_q}(x)$ оператора A мають вигляд

$$\lambda_{n_1 \dots n_q} = \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{k=1}^q n_k^2; \quad e_{n_1 \dots n_q}(x) = \left(\frac{2}{a}\right)^{q/2} \prod_{k=1}^q \sin\frac{\pi}{a} x_k.$$

Нехай $y(t) = u(t, x) \in C(\mathbb{R}_+, L_2(\Omega))$ – слабкий розв'язок задачі

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^q \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{ki}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + c(x)\right) u(t, x) = 0, \tag{3.30}$$

$$\forall t > 0,\ \forall x \in \partial\Omega : u(t,x) = 0, \tag{3.31}$$

де умови на $a_{ki}(x)$ і $c(x)$ такі самі, як і попередні. Тоді $u(t,x)$ зображується у вигляді (3.25). Покладемо

$$L_2^n = \mathcal{D}(A^n), \quad \|f\|_{L_2^n} = \left(\|f\|^2 + \|A^n f\|^2\right)^{1/2},$$

де A – оператор, породжений у просторі $L_2(\Omega)$ виразом (3.26) і граничною умовою (3.27). Простір L_2^n неперервно і щільно вкладений в $L_2(\Omega)$. Позначимо через L_2^{-n} простір з негативною нормою, що відповідає простору $L_2^n \subset L_2(\Omega)$ з позитивною нормою. У випадку, коли $\mathcal{L}$ задається виразом (3.29), L_2^n є не що інше, як простір Соболєва $\overset{\circ}{W}{}_2^{2n}(\Omega)$.

За допомогою оцінки (3.28) для $\lambda_n(A)$ і теореми 3.8, аналогічно тому, як це зроблено в доведенні теореми 3.7, приходимо до такого твердження.

Теорема 3.9 *Нехай $\mathfrak{B}$ – банахів простір і*

$$L_2^{n_1} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq L_2^{-n_2}, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N},$$

– ланцюжок неперервно і щільно вкладених один в одного просторів. Припустимо також, що послідовність $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняє (3.10) і (3.12). Тоді для слабкого розв'язку $y(t) = u(t,x)$ задачі (3.30) – (3.31) вірними є наступні співвідношення еквівалентності:

$$\begin{aligned}
y(t) \in C^\infty(\mathbb{R}_+, L_2(\Omega)) &\iff \alpha > 0 : \mathcal{E}_{\lambda_k}^{\mathfrak{B}}(y) = O\left(\tfrac{1}{(k+1)^\alpha}\right), \\
y(t) \in C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}_+, L_2(\Omega)) &\iff \exists\alpha > 0 : \mathcal{E}_{\lambda_k}^{\mathfrak{B}}(y) = O\left(\tau^{-1}\left(\alpha(k+1)^{2/q}\right)\right), \\
y(t) \in C_{(m_n}(\mathbb{R}_+, L_2(\Omega)) &\iff \forall\alpha > 0 : \mathcal{E}_{\lambda_k}^{\mathfrak{B}}(y) = O\left(\tau^{-1}\left(\alpha(k+1)^{2/q}\right)\right),
\end{aligned}$$

де

$$\mathcal{E}_{\lambda_k}^{\mathfrak{B}}(y) = \inf_{y_0 \in S_0 : \sigma(y_0) \le \lambda_k} \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|y(t) - y_0(t)\|_{\mathfrak{B}}.$$

Тут доречно зазначити, що у випадку, коли $a_{ki}(x) = \delta_{ki}$ і $c(x) \equiv 0$, користуючись теоремами вкладення для соболєвських просторів (див.,наприклад, [211-239]), можна взяти за $\mathfrak{B}$ простір $C(\overline{\Omega})$ неперервних в $\overline{\Omega}$ функцій або $L_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, і розгянути не лише задачу Діріхле, але й інші крайові задачі, зокрема, задачу Неймана.

3.7 Гіперболічний випадок

Розглянемо рівняння вигляду

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.32)$$

де A – генератор обмеженої C_0-групи лінійних операторів $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в $\mathfrak{B}$. Не обмежуючи загальності, можна вважати групу $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ ізометричною, тобто $\|U(t)\| = 1,\ t \in (-\infty, \infty)$.

Сильно неперервна вектор-функція $y(t) : (-\infty, \infty) \mapsto \mathfrak{B}$ називається слабким розв'язком рівняння (3.32), якщо для довільного $g^* \in \mathcal{D}(A^*)$

$$\frac{d}{dt}\langle y(t), g^*\rangle = \langle y(t), A^*g^*\rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

де A^* – спряжений до A оператор, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – знак парування між $\mathfrak{B}$ і двоїстим до нього простором $\mathfrak{B}^*$. Оскільки в даній ситуації оператор A замкнений і щільно заданий, то (див. [206, 212]) це означення при $t \in \mathbb{R}$ еквівалентне наведеному в п. 3.1.

Згідно з [3], замкнений оператор A генерує C_0-групу у просторі $\mathfrak{B}$ тоді і лише тоді, коли для кожного $x \in \mathfrak{B}$ існує єдиний слабкий розв'язок $y(t)$ задачі

$$\begin{cases} y'(t) &= Ay(t),\ t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= x. \end{cases}$$

У цьому випадку

$$y(t) = U(t)x,\ t \in \mathbb{R},$$

де $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ – C_0-група, що генерується оператором A.

Якщо $x \in \mathcal{D}(A)$, то

$$U(\cdot)x \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}), \quad \forall t \in \mathbb{R} : U(t)x \in \mathcal{D}(A)$$

і

$$\frac{d}{dt}U(t)x = AU(t)x,\ t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно тоді, що для довільного $x \in \mathfrak{B}$ існує єдиний слабкий розв'язок задачі Коші

$$(CP)_\pm \qquad \begin{cases} y'(t) &= \pm Ay(t),\ t > 0, \\ y(0) &= x. \end{cases}$$

При цьому (див. [7]) обидва оператори A та $-A$ є генераторами C_0-півгруп $U_\pm(t)$ і

$$U(t) = \begin{cases} U_+(t) & \text{при} \quad t \geq 0; \\ U_-(-t) & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Позначимо через S множину всіх слабких розв'язків рівняння (3.32), тобто

$$S = \left\{ y(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{B} \middle| y(t) = U(t)f, \quad \forall f \in \mathfrak{B} \right\}. \tag{3.33}$$

Простір S є банаховим відносно норми

$$\|y\|_S = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t)f\|.$$

Множину слабких розв'язків рівняння (3.32), які допускають продовження до цілої $\mathfrak{B}$-значної вектор-функції експоненціального типу, позначатимемо, як і раніше, через S_0.

Теорема 3.10 *Нехай $y(t)$ – слабкий розв'язок рівняння* (3.32). *Тоді має місце співвідношення еквівалентності*

$$y(\cdot) \in S_0 \iff y(t) = U(t)f,\ \text{де}\ f \in C_{\{1\}}(A) = \mathfrak{G}_{\{0\}}(A). \tag{3.34}$$

Множина S_0 є щільною в S, і

$$\sigma(y) = \sigma(f, A)$$

Більш того, для $y \in S_0$ справджується аналог нерівності Бернштейна:

$$\left\|y^{(n)}\right\|_S \leq \sigma^n(y)\|y\|_S. \tag{3.35}$$

Доведення. Зображення (3.34) випливає з теореми 3.1. Далі, оскільки A – генератор обмеженої C_0-групи, то він є неквазіаналітичним і, за твердженням 1.1, $\overline{C_{\{1\}}(A)} = \mathfrak{B}$ (див. [88]). Нерівність

$$\|U(t)f - U(t)g\|_S \leq \|f - g\|$$

зумовлює щільність S_0 в S.

Нехай тепер g^* – довільний неперервний функціонал над $\mathfrak{B} : g^* \in \mathfrak{B}^*$. Якщо $f \in C_{\{1\}}(A)$, то $\langle U(t)f, g^*\rangle$ є обмеженою на $\mathbb{R}$ цілою скалярною функцією експоненціального типу $\sigma(y)$, а тому, за теоремою Бернштейна [174],

$$\left|\langle U(t)f, g^*\rangle^{(n)}\right| \leq \sigma^n \|U(t)f\| \|g^*\|.$$

Звідси випливає

$$\forall g^* \in \mathfrak{B}^* : \left|\langle y^{(n)}(t)f, g^*\rangle^{(n)}\right| \leq \sigma^n(y) \|U(t)f\| \|g^*\| \leq \sigma^n(y)\|y\|_S \|g^*\|.$$

Беручи до уваги, що $g^* \in \mathfrak{B}^*$ може бути яким завгодно, прийдемо до нерівності (3.35).

Теорему доведено.

Подібно до параболічного випадку, тут також виникає проблема можливості наближення будь-якого слабкого розв'язку рівняння (3.32) його цілими розв'язками експоненціального типу. Як і в п. 3.2, за найкраще наближення вектор-функції $y \in S$ розв'язками з S_0 візьмемо величину

$$\mathcal{E}_r(y) = \inf_{z \in S_0 : \sigma(z) \leq r} \|y - z\|_S, \quad r > 0.$$

Ми вже знаємо, що при фіксованому y функція $\mathcal{E}_r(y)$ не зростає і прямує до нуля при $r \to \infty$.

Для довільних $y \in S,\ t > 0$ та $k \in \mathbb{N}$ позначимо також через $\omega_k(t, y)$ модуль неперервності порядку k вектор-функції y:

$$\omega_k(t, y) = \sup_{|h| \leq t} \sup_{s \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j y(s + jh) \right\| \ (k \in \mathbb{N}), \quad \omega_0(t, y) \equiv \|y\|_S.$$

Із зображення (3.33) випливає, що

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \omega_k(t, y) = \sup_{|\tau| < t} \left\| (U(\tau) - I)^k y \right\|_S,$$

звідки, аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні теореми 3.2, отримаємо таке твердження.

Теорема 3.11 *Нехай $y \in S$. Тоді*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists c_k > 0 : \mathcal{E}_r(y) \leq c_k \omega_k \left(\frac{1}{r}, y \right), \quad \forall r > 0.$$

З цієї теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 3.4 *Припустимо, що $y \in S \bigcap C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B}),\ m \in \mathbb{N}_0$. Тоді*

$$\forall k \in \mathbb{N}_0,\ \forall r > 0 : \mathcal{E}_r(y) \leq \frac{c_{k+m}}{r^m} \omega_k \left(\frac{1}{r}, y^{(m)} \right)$$

(*сталі c_k такі самі, як в теоремі* 3.11).

Покладаючи в наслідку 3.4 $k = 0$ і враховуючи, що $\omega_0(t, y) = \|y\|_S$, одержуємо

Наслідок 3.5 *Нехай* $y \in S \bigcap C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B}), m \in \mathbb{N}_0$. *Тоді*

$$\forall r > 0 : \mathcal{E}_r(y) \le \frac{c_m}{r^m} \left\| y^{(m)} \right\|_S .$$

Зазначимо, що з нерівності $\mathcal{E}_r(y) \le \dfrac{c}{r^m}$, $r > 0$, ще не випливає, що $y \in C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$. Проте, перебігаючи доведення теореми 3.4 і теореми 2 з [207], прийдемо до такого висновку.

Теорема 3.12 *Нехай* $\omega(t)$ *– функція типу модуля неперервності, тобто:*

1) $\omega(t)$ *є неспадною неперервною функцією на* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$;

2) $\omega(0) = 0$;

3) $\exists \gamma > 0,\ \forall t \in [0,1] : \omega(2t) < \gamma \omega(t)$;

4) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty$.

Якщо для $y \in S$ *існують сталі* $c > 0$ *і* $m \in \mathbb{N}$ *такі, що*

$$\mathcal{E}_r(y) \le \frac{c}{r^m} \omega\left(\frac{1}{r}\right) \ (\forall r > 0),$$

то $y \in C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ *і*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right],\ \exists c_k > 0, : \omega_k(t, y) \le c_k \left(t^k \int\limits_0^t \frac{\omega(s)}{s}\, ds + \int\limits_t^1 \frac{\omega(s)}{s^{k+1}}\, ds \right).$$

Наслідок 3.6 *Нехай* $y \in S$ *і*

$$\exists \varepsilon > 0,\ \exists c > 0 : \mathcal{E}_r(y) \le \frac{c}{r^{m+\varepsilon}}.$$

Тоді $y \in C^m(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Позначимо через $C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ множину всіх нескінченно диференційовних $\mathfrak{B}$-значних вектор функцій на $\mathbb{R}$.

Наслідок 3.7 *Має місце таке співвідношення еквівалентності:*

$$y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \Longleftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : \mathcal{E}_r(y) = o\left(\frac{1}{r^k}\right).$$

3.8 Гіперболічний випадок у гільбертовому просторі

Нехай $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ – гільбертів простір. Групу $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ в даній ситуації можна вважати унітарною, оскільки (див.[213]) для будь-якої обмеженої групи в $\mathfrak{H}$ можна підібрати у цьому просторі скалярний добуток, еквівалентний вихідному, так, щоб відносно нього розглядувана група була саме такою. За теоремою Стоуна її генератор має вигляд $A = iB$, де B – самоспряжений оператор. Позначимо через $E(\Delta)$ його спектральну міру. Як показано в [122, 205],

$$C_{\{1\}}(A) = \left\{ f \in \mathfrak{H} \middle| f = E([-\alpha, \alpha])g,\ \forall \alpha > 0, \forall g \in \mathfrak{H} \right\}.$$

У цьому випадку можна явно виписати сталі c_k, що фігурують в теоремі 3.11, а саме: $c_k = \dfrac{\sqrt{k+1}}{2^k}$. Більш того, сформульовані вище прямі й обернені теореми для розв'язків скінченної гладкості можна поширити на розв'язки, що належать деяким класам нескінченно диференційовних $\mathfrak{H}$-значних вектор-функцій. Перейдемо до результатів, отриманих у цьому напрямку.

Нехай $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ – неспадна послідовність додатних чисел (не обмежуючи загальності, можна завжди припустити, що $m_0 = 1$). Покладемо

$$C_{\{m_n\}} = C_{\{m_n\}}(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) = \bigcup_{\alpha>0} C^{\alpha}_{m_n}, \quad C_{(m_n)} = C_{(m_n)}(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) = \bigcap_{\alpha>0} C^{\alpha}_{m_n},$$

де

$$C^{\alpha}_{m_n} = C^{\alpha}_{m_n}(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) = \left\{ y \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) \middle| \exists c = c(y),\ \forall k \in \mathbb{N} : \left\| y^{(k)} \right\|_S \le c\alpha^k m_k \right\} -$$

банахів простір відносно норми

$$\|y\|_{C^{\alpha}_{m_n}} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{\left\| y^{(k)} \right\|_S}{\alpha^k m_k}.$$

У просторі $C_{\{m_n\}}$ ($C_{(m_n)}$) введемо топологію індуктивної (проективної) границі банахових просторів $C^{\alpha}_{m_n}$. Зауважимо, що простори $C_{\{n!\}}, C_{(n!)}$ ($m_n = n!$) та $C_{\{1\}}$ ($m_n \equiv 1$) є не що інше, як простори обмежених на $\mathbb{R}$ аналітичних, цілих та цілих експоненціального типу $\mathfrak{H}$-значних вектор-функцій.

Як і в п. 3.3, припустимо, що послідовність $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовольняє умову (3.10), тобто

$$\forall\alpha > 0,\ \exists c = c(\alpha) > 0 : m_n \geq c\alpha^n,$$

і розглянемо функцію

$$p(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{m_n}.$$

Ідучи по слідах доведення теореми 3.5, прийдемо до наступного твердження.

Теорема 3.13 *Нехай додатково послідовність $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ має властивість*

$$\exists c > 0,\ \exists h > 1 : m_{n+1} \leq ch^n m_n.$$

Тоді виконуються такі співвідношення еквівалентності:

$$y \in C_{\{m_n\}} \Longleftrightarrow \exists\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(p^{-1}(\alpha r)\right);$$

$$y \in C_{(m_n)} \Longleftrightarrow \forall\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(p^{-1}(\alpha r)\right).$$

У випадку, коли $m_n = n^{n\beta},\ 0 < \beta < \infty$, з теореми 3.13 випливає

Наслідок 3.8 *Мають місце співвідношення*

$$y \in C_{\{n^{n\beta}\}} \Longleftrightarrow \exists\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r^{1/\beta}}\right);$$

та

$$y \in C_{(n^{n\beta})} \Longleftrightarrow \forall\alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r^{1/\beta}}\right).$$

Наслідок 3.9 *Розв'язок $y \in S$ рівняння* (3.32) *допускає продовження до цілої $\mathfrak{H}$-значної вектор-функції порядку ρ і скінченного типу тоді і тільки тоді, коли*

$$\exists \alpha > 0 : \mathcal{E}_r(y) = O\left(e^{-\alpha r^{1/\beta}}\right),$$

де ρ і β пов'язані між собою рівністю $\beta = \dfrac{\rho - 1}{\rho} < 1$.

Варто ще зазначити, що результати п. 3.7 можна поширити на випадок, коли генератор A групи $\{U(t)\}_{t\mathbb{R}}$ є неквазіаналитичним, тобто

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \|U(t)\|}{1+t^2}\, dt < \infty.$$

За цієї умови, як показано в [122], множина усіх цілих векторів експоненціального типу оператора A є щільною в $\mathfrak{B}$. Оскільки у цьому випадку група $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ може бути необмеженою, то наближення $y \in S$ розв'язками з S_0 проводиться не на $\mathbb{R}$, а на довільному скінченному проміжку $[-b, b]$, при цьому норма в S визначається як

$$\|y\|_{S,b} = \sup_{|t|\le b} \|y(t)\|,$$

а в означеннях величин $\mathcal{E}_r(y)$ та $\omega_k(t, y)$ норма $\|\cdot\|_S$ замінюється на $\|\cdot\|_{S,b}$. Теореми 3.11, 3.12 та наслідки 3.4, 3.5 залишаються вірними, лише сталі c_k в них тепер залежать від $b : c_k = c_k(b)$.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі доведено прямі й обернені теореми наближення слабких розв'язків рівняння $y'(t) + Ay(t) = 0,\ t \in [0, \infty)$, де A – невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ цілими розв'язками експоненціального типу (множина таких розв'язків позначається через S_0).

Ці теореми встановлюють взаємно однозначну відповідність між степенем гладкості розв'язку $y(t)$ і швидкістю прямування до нуля його найкращого наближення $\mathcal{E}_r(y)$ розв'язками з S_0, тип яких не перевищує r. Описано усі слабкі розв'язки зазначеного рівняння і знайдено умови, необхідні й достатні для того, щоб слабкий розв'язок допускав продовження до цілої вектор-функції експоненціального типу.

З'ясовано зв'язок між найкращим наближенням $\mathcal{E}_r(y)$ розв'язку $y(t)$ і його k-им модулем неперервності $\omega_k(t, y)$ (аналог відомої теореми Джексона). Установлено також співвідношення між поведінкою $\mathcal{E}_r(y)$ при $r \to \infty$ і включенням розв'язку $y(t)$ до певного класу Жевре типу Рум'є або Бьорлінга. Крім того, знайдено умови в термінах $\mathcal{E}_r(y)$, необхідні й достатні для можливості продовження $y(t)$ до цілої вектор-функції заданого скінченного порядку і скінченного типу.

Результати щодо прямих і обернених теорем поширено на банахові простори, оснащені гільбертовими з позитивною і негативною нормами. Такі теореми зазвичай формулюються у банаховому просторі, але їх доведення у гільбертовому є набагато простішими.

Результати продемонстровано на рівняннях з частинними похідними.

4 Простори основних та узагальнених векторів генератора аналітичної півгрупи та їх застосування до дослідження диференціально-операторних рівнянь на півосі

У цьому розділі для аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел вводяться деякі локально-опуклі простори гладких і узагальнених векторів її генератора A, досліджуються розширення та звуження заданої півгрупи на ці простори, наводяться застосування до конкретних задач, розв'язування яких потребує їх введення. Варто зазначити, що попередні розділи стосувались лише C_0-півгруп, дія яких не виходить за межі простору $\mathfrak{B}$.

4.1 Простори $\mathfrak{B}_{\{+\}}$ та $\mathfrak{B}_{(+)}$

Надалі для C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ припускатимемо, що $\ker e^{tA} = \{0\}$ для будь-якого $t > 0$. Без обмеження загальності вважатимемо також $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ півгрупою стисків.

У подальшому припускатимемо, що оператор A задовольняє умови:

a) A - генератор аналітичної C_0-півгрупи стиску $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq}$ в $\mathfrak{B}$;

b) $A \notin L(\mathfrak{B})$.

Нехай $\sigma_p(\cdot), \sigma_c(\cdot)$ і $\sigma_r(\cdot)$ - точковий, неперервний і остаточний спектри оператора відповідно. Має місце таке твердження.

Твердження 4.1 *За умов a) і b) на оператор A*

$$\forall t > 0 : 0 \in \sigma_c\left(e^{tA}\right).$$

Доведення. Із аналітичності півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ і включення $\mathcal{R}(e^{t'A}) \subset \mathcal{R}(e^{tA})$ при $t' > t$ випливає, що $0 \notin \sigma_p\left(e^{tA}\right) \bigcup \sigma_r\left(e^{tA}\right)$.

Припустимо тепер, що існує $t_0 > 0$ таке, що $0 \in \rho\left(e^{t_0 A}\right)$. Тоді

$$\forall x \in \mathfrak{B}\ \exists \gamma > 0 : \left\|e^{t_0 A} x\right\| \geq \gamma \|x\|.$$

Звідси і з теореми 1.2 одержуємо оцінку

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \|Ax\| \leq \frac{1}{\gamma}\left\|e^{t_0 A} A x\right\| \leq \frac{c}{\gamma t_0}\|x\|,$$

яка зумовлює включення $A \in L(\mathfrak{B})$, що суперечить накладеній на A умові b).

Твердження доведено.

Із твердження 4.1 випливає, що

$$\forall t > 0 : e^{tA} x = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \text{i} \quad \overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)} = \mathfrak{B},$$

а отже, оператор e^{tA} має обернений $e^{-tA} := \left(e^{tA}\right)^{-1}$.

На множині $\mathfrak{B}_t = \mathcal{R}\left(e^{tA}\right)$ введемо норму $\|x\|_t = \left\|e^{-tA} x\right\|$. Оскільки $e^{-tA} \in E(\mathfrak{B})$ і $\overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)} = \mathfrak{B}$, простір $\mathfrak{B}_t$ є банаховим відносно $\|\cdot\|_t$. Більш того, простір $\mathfrak{B}_t, t > 0$, щільно і неперервно вкладений в $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$. Позначимо через $V_s(t)$ звуження оператора e^{tA} на $\mathfrak{B}_s : V_s(t) := e^{tA} \restriction_{\mathfrak{B}_s}$.

Теорема 4.1 *Множина $\{V_s(t)\}_{t\geq 0}$ утворює обмежену аналітичну C_0-півгрупу у просторі $\mathfrak{B}_s$ з генератором $A_s = A \restriction_{\mathfrak{B}_s}$.*

Доведення. Із включення $\mathcal{R}\left(e^{(s+t)A}\right) \subset \mathcal{R}\left(e^{sA}\right)$ для довільних $t, s > 0$ і нерівності

$$\left\|e^{tA} x\right\|_s = \left\|e^{-sA} e^{tA} x\right\| = \left\|e^{tA} e^{-sA} x\right\| \leq \left\|e^{-sA} x\right\| = \|x\|_s$$

випливає, що $\{V_s(t)\}_{t\geq 0}$ – півгрупа стиску в $\mathfrak{B}_s$. Оскільки $y = e^{-sA} x \in \mathfrak{B}$ для $x \in \mathfrak{B}_s$, то співвідношення

$$\left\|e^{tA} x - x\right\|_s = \left\|e^{-sA}\left(e^{tA} x - x\right)\right\| = \left\|e^{tA} y - y\right\|$$

свідчать про те, що $\{V_s(t)\}_{t\geq 0}$ – C_0-півгрупа у просторі $\mathfrak{B}_s$, а її генератором A_s є звуження A на $\mathfrak{B}_s$. На підставі теореми 1.2 маємо

$$\forall x \in \mathfrak{B}_s,\ \exists c > 0 : \|A_s^n V_s(t)x\|_s = \left\|A^n e^{tA}x\right\|_s = \left\|e^{-sA}A^n e^{tA}x\right\| \leq$$
$$\leq \frac{c^n}{t^n} n! \left\|e^{-sA}x\right\| = \frac{c^n}{t^n} n! \|x\|_s,$$

а отже, півгрупа $\{V_s(t)\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною в $\mathfrak{B}_s$.

Теорему доведено.

Враховуючи, що $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ – півгрупа стиску, одержуємо

$$\forall t \geq 0, \forall s \geq 0, \forall x \in \mathfrak{B}_s : \|x\|_s = \left\|e^{-sA}x\right\| = \left\|e^{tA}e^{-(t+s)A}x\right\| \leq$$
$$\leq \left\|e^{-(t+s)A}x\right\| = \|x\|_{t+s}.$$

Ця нерівність і включення $\mathcal{R}\left(e^{(t+s)A}\right) \subseteq \mathcal{R}\left(e^{sA}\right)$ зумовлюють неперервне вкладення

$$\forall t \geq 0, \forall s \geq 0 : \mathfrak{B}_{s+t} \subseteq \mathfrak{B}_s.$$

Позначимо через $\mathfrak{B}_s'$ простір, спряжений до $\mathfrak{B}_s$. Із півгрупової властивості e^{sA} і аналітичності півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ випливає, що для довільного лінійного неперервного функціонала $F \in \mathfrak{B}_s'$

$$F\left(e^{sA}x\right) = 0 \Longrightarrow F\left(e^{tA}x\right) = 0 \text{ при } t \geq s.$$

Звідси робимо висновок, що $\mathfrak{B}_t$ щільно вкладається в $\mathfrak{B}_s$ і

$$V_{s'}(t) = V_s(t) \restriction_{\mathfrak{B}_{s'}} \text{ при } s' > s > 0. \tag{4.1}$$

Покладемо

$$\mathfrak{B}_{(+)} = \bigcap_{s\geq 0} \mathfrak{B}_s, \quad \mathfrak{B}_{\{+\}} = \bigcup_{s\geq 0} \mathfrak{B}_s$$

і введемо у цих просторах топологію проективної та, відповідно, індуктивної границі банахових просторів $\mathfrak{B}_s$:

$$\mathfrak{B}_{(+)} = \operatorname{proj}\lim_{s\to\infty} \mathfrak{B}_s, \quad \mathfrak{B}_{\{+\}} = \operatorname{ind}\lim_{s\to 0} \mathfrak{B}_s.$$

Оскільки індуктивна границя $\mathfrak{B}_{\{+\}}$ є регулярною (див. [4]), то збіжність $x_n \to x, n \to \infty$, у цьому просторі означає збіжність $x_n \to x$ у деякому $\mathfrak{B}_s$. Що ж до простору $\mathfrak{B}_{(+)}$, то збіжність у ньому рівносильна збіжності у кожному $\mathfrak{B}_s$. Аналогічно обмеженість, неперервність, диференційовність, аналітичність вектор-функції $y(t)$ зі значеннями в $\mathfrak{B}_{\{+\}}$ ($\mathfrak{B}_{(+)}$) означає наявність відповідної властивості у деякому (кожному) просторі $\mathfrak{B}_s$. Очевидно також, що

$$\mathfrak{B}_{(+)} = \operatorname{proj}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}_n, \quad \mathfrak{B}_{\{+\}} = \operatorname{ind}\lim_{n\to\infty} \mathfrak{B}_{1/n} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Таким чином, $\mathfrak{B}_{(+)}$ – зчисленно-нормований простір [4].

Теорема 4.2 *Простір $\mathfrak{B}_{(+)}$ є щільним в $\mathfrak{B}$, а вкладення $\mathfrak{B}_{n+1}$ у $\mathfrak{B}_n$ – строгим для довільного $n \in \mathbb{N}_0$.*

Доведення. Врахувавши щільність вкладення $\mathfrak{B}_{n+1}$ в $\mathfrak{B}_n$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$, виберемо по індукції для довільного фіксованого $x_0 \in \mathfrak{B}$ та $\varepsilon > 0$ вектори $x_n \in \mathfrak{B}_n,\ n \in \mathbb{N}$, такі, що $\|x_{n+1} - x_n\|_n \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Тоді

$$\|x_{n+1}-x_0\| \le \|x_{n+1}-x_n\|_n+\|x_n-x_{n-1}\|_{n-1}+...+\|x_1-x_0\| \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+...+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{4.2}$$

До того ж,

$$\forall k \ge 1,\ \forall m > n \ge k : \|x_{n+1} - x_n\|_k + ... + \|x_m - x_{m-1}\|_k \le$$

$$\le \|x_{n+1} - x_n\|_n + ... + \|x_m - x_{m-1}\|_{m-1} \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + ... + \frac{\varepsilon}{2^m} \le \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Таким чином,

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists y_k \in \mathfrak{B}_k : \|x_n - y_k\|_k \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Як бачимо, y_k не залежить від k, тобто $y_k = y$ ($k \in \mathbb{N}$), а тому $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{B}_k$. Переходячи в (4.2) до границі при $n \to \infty$, одержимо $\|y - x_0\| < \varepsilon$, а отже, $\overline{\mathfrak{B}_{(+)}} = \mathfrak{B}$.

Припустимо тепер, що вкладення $\mathfrak{B}_{n+1}$ в $\mathfrak{B}_n$ не є строгим. Це означає, що

$$\exists \gamma > 0 : \|x\|_{n+1} \leq \gamma \|x\|_n \Longleftrightarrow \left\| e^{-(n+1)A} x \right\| \leq \gamma \left\| e^{-nA} x \right\| .$$

Оскільки $\overline{\mathcal{R}\left(e^{nA}\right)} = \mathfrak{B}$, то

$$\forall y \in \mathfrak{B} : \left\| e^{-A} y \right\| \leq \gamma \|y\|,$$

тобто $0 \in \rho\left(e^{A}\right)$, що суперечить (див. доведення твердження 4.1) умові b) на оператор A.

Теорему доведено.

Твердження 4.2 *Для довільного* $x \in \mathfrak{B}_{(+)}$ *існують* $x_s,\ y_s \in \mathfrak{B}_{(+)}$ $(s \geq 0)$ *такі, що*

$$x = e^{sA} x_s, \quad x = e^{-sA} y_s.$$

Доведення. Оскільки для будь-якого фіксованого $t > 0$

$$\forall s \geq 0 : \mathfrak{B}_{t+s} = \mathcal{R}\left(e^{(t+s)A}\right) \subset \mathfrak{B}_s,$$

то

$$\mathfrak{B}_{(+)} = \bigcap_{s \geq 0} \mathfrak{B}_s = \bigcap_{s \geq 0} \mathfrak{B}_{t+s} = \bigcap_{s \geq t} \mathfrak{B}_{s-t}. \tag{4.3}$$

Беручи до уваги взаємну однозначність відображення $e^{tA} : \mathfrak{B} \mapsto \mathfrak{B}_t$ (твердження 4.1) і рівність (4.3), одержуємо

$$\mathfrak{B}_{(+)} = e^{tA} \mathfrak{B}_{(+)}.$$

Твердження доведено.

Позначимо через $\{V(t)\}_{t \geq 0}$ звуження півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$ на простір $\mathfrak{B}_{(+)} : V(t) = e^{tA} \upharpoonright_{\mathfrak{B}_{(+)}}$. Неважко переконатись, що його генератор $A_+ = A \upharpoonright_{\mathfrak{B}_{(+)}}$.

Теорема 4.3 *Нехай $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ – обмежена аналітична C_0-півгрупа стиску в $\mathfrak{B}$. Тоді півгрупа $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ є одностайно неперервною в $\mathfrak{B}_{(+)}$, а її генератор A_+ – неперервний оператор, визначений на всьому просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$.*

Доведення. Із твердження 4.2 випливає, що $V(t)$ взаємно однозначно відображає простір $\mathfrak{B}_{(+)}$ сам на себе і $V^{-1}(t)x = e^{-tA}x$ для довільного $x \in \mathfrak{B}_{(+)}$. За теоремою 4.1 у локально-опуклому просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$ для $V(t)$ виконуються півгрупові властивості (ii) і (iii) п. 1.1. Із твердження 4.2 також отримуємо

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{(+)}\ \forall s > 0 : \|V(t)x - x\|_s = \left\|\left(e^{tA} - I\right) e^{-sA} e^{2sA} x_{2s}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\left(e^{(t+s)A} - e^{sA}\right) x_{2s}\right\| \to 0 \text{ при } t \to 0,$$

а отже, $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ – C_0-півгрупа у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$. Співвідношення

$$\forall s, t \geq 0 : \left\|e^{tA}x\right\|_s = \left\|e^{-sA}e^{tA}x\right\| \leq \left\|e^{-sA}x\right\| = \|x\|_s$$

підтверджує одностайну неперервність півгрупи $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}_{(+)}$.

Оскільки за умовою півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною, то на підставі теореми 1.2 маємо

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathfrak{B}_{(+)} : \|Ax\|_s = \left\|e^{-sA}Ax\right\| = \left\|Ae^{\varepsilon A}e^{-(s+\varepsilon)A}x\right\| \leq \frac{c}{\varepsilon}\|x\|_{s+\varepsilon}.$$

Звідси робимо висновок, що оператор $A_+ = A \restriction_{\mathfrak{B}_{(+)}}$ є неперервним у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$. Рівність

$$\left\|\left(\frac{V(t) - I}{t} - A_+\right) x\right\|_s = \left\|\left(\frac{V(t) - I}{t} - A\right) e^{-sA}x\right\|, \quad t > 0,$$

показує, що A_+ – генератор півгрупи $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}_{(+)}$, що й завершує доведення теореми.

Для $t \in \mathbb{R}$ покладемо

$$\widetilde{V}(t) = \begin{cases} V(t) & \text{при} \quad t \geq 0, \\ V^{-1}(-t) & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

З доведення теореми 4.3 випливає такий наслідок.

Наслідок 4.1 *Якщо $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ – обмежена аналітична C_0-півгрупа у просторі $\mathfrak{B}$, то її звуження $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ на $\mathfrak{B}_{(+)}$ допускає продовження до C_0-групи $\left\{\widetilde{V}(t)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ у цьому просторі.*

Твердження 4.2 і той факт, що $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ – півгрупа стиску, обумовлюють співвідношення

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{(+)},\ \forall s' > s > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}:$$

$$\left\|A^k x\right\|_s = \left\|e^{-sA} A^k e^{s'A} x_{s'}\right\| = \left\|e^{(s'-s)A} A^k x_{s'}\right\| \leq \frac{c^k k!}{(s'-s)^k} \|x\|_{s'},$$

звідки для довільних $n, m \in \mathbb{N} : m > n$ та $z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{s'-s}{2c}$ маємо

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k!} A^k x\right\|_s \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{|z|^k}{k!} \left\|A^k x\right\|_s \leq$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m} \frac{|z|^k}{k!} \cdot \frac{c^k k!}{(s'-s)^k} \|x\|_{s'} \leq \frac{1}{2^{n-1}} \|x\|_{s'}, \quad x \in \mathfrak{B}_{(+)}.$$

Отже послідовність

$$V_n(z)x = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} A^k x, \quad \text{при } |z| < \frac{s'-s}{2c}$$

є фундаментальною в $\mathfrak{B}_{(+)}$ і, внаслідок секвенціальної повноти простору $\mathfrak{B}_{(+)}$ ряд $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k x$ збігається у цьому просторі. Враховуючи, що s' і s можна вибрати так, щоб величина $s' - s$ була як завгодно великою, приходимо до висновку, що послідовність операторів $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} A^k$ сильно збігається до оператора $\exp(zA)$ рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}$, а оператор-функція $\exp(zA)$ є цілою у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$.

Неважко переконатись, що вектор-функція $y(t) = \exp(tA)x$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} &= Ay(t), \ t \in (0, \infty), \\ y(0) &= x, \end{cases}$$

а оскільки A генерує C_0-півгрупу в $\mathfrak{B}$, то

$$y(t) = \exp(tA)x = e^{tA}x.$$

Беручи до уваги наслідок 4.1, приходимо до такого твердження.

Наслідок 4.2 *За умов наслідку* 4.1 $V(t)$ *допускає продовження до цілої оператор-функції* $\exp(zA)$ *у просторі* $\mathfrak{B}_{(+)}$.

4.2 Простори $\mathfrak{B}_{(-)}$ та $\mathfrak{B}_{\{-\}}$

У цьому пункті, як і в попередньому, на оператор A накладаються умови a) і b).

Позначимо через $\mathfrak{B}_{-t}$ $(t > 0)$ поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою

$$\|x\|_{-t} = \left\| e^{tA} x \right\|$$

і покладемо $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$. При $t' > t \geq 0$ маємо щільне й неперервне вкладення $\mathfrak{B}_{-t} \subseteq \mathfrak{B}_{-t'}$. Щоб переконатися в цьому, достатньо довести порівнянність і узгодженість норм $\| \cdot \|_{-t}$ та $\| \cdot \|_{-t'}$ в $\mathfrak{B}$. Оскільки $\left\{ e^{tA} \right\}_{t \geq 0}$ – півгрупа стиску, то перша властивість випливає із співвідношення

$$\|x\|_{-t'} = \left\| e^{t'A} x \right\| = \left\| e^{(t'-t)A} e^{tA} x \right\| \leq \left\| e^{tA} x \right\| = \|x\|_{-t}.$$

Припустимо тепер, що $\mathfrak{B} \ni x_m \to 0$ $(m \to \infty)$ у просторі $\mathfrak{B}_{-t'}$ і послідовність $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною в $\mathfrak{B}_{-t}$. Останнє означає фундаментальність послідовності $\left\{e^{tA}x_m\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ в $\mathfrak{B}$, а отже, $e^{tA}x_m$ збігається в $\mathfrak{B}$ до деякого елемента $y \in \mathfrak{B}$, звідки

$$0 = \lim_{m\to\infty} e^{t'A}x_m = \lim_{m\to\infty} e^{(t'-t)A}e^{tA}x_m = e^{(t'-t)A}y.$$

На підставі твердження 4.1 робимо висновок, що $y = 0$.

Таким чином, для довільних $t' > t > 0$ маємо щільне і неперервне вкладення

$$\mathfrak{B}_{-t} \subset \mathfrak{B}_{-t'}.$$

Зауважимо, що це вкладення є строгим, оскільки в протилежному випадку

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{-t'} : \|x\|_{-t'} \geq c\|x\|_{-t} \Longrightarrow \forall y \in \mathfrak{B} : \left\|e^{(t'-t)A}y\right\| \geq c\|y\|,$$

а це, як показано при доведенні твердженням 4.1 означало б неперервність оператора A.

Із нерівності $\left\|e^{tA}\right\| \leq 1$, щільності $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-s}$ і співвідношення

$$\forall t \geq 0,\ \forall s > 0,\ \forall x \in \mathfrak{B} : \left\|e^{tA}x\right\|_{-s} \leq \|x\|_{-s}$$

випливає, що $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ допускає неперервне продовження до півгрупи $\{U_s(t)\}_{t\geq 0}$ у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$, причому

$$\|U_s(t)\|_{\mathfrak{B}_{-s}} \leq 1. \tag{4.4}$$

Теорема 4.4 *Оператор $U_t(t)$ ізометрично відображає $\mathfrak{B}_{-t}$ на $\mathfrak{B}$, і для будь-якого фіксованого $s > 0$, $\{U_s(t)\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною C_0-півгрупою стиску у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$. Більш того,*

$$\forall s' > s > 0 : U_{s'}(t) \restriction_{\mathfrak{B}_{-s}} = U_s(t). \tag{4.5}$$

Доведення. Припустимо, що $x \in \mathfrak{B}_{-t}$. Тоді існує послідовність $\{x_n \in \mathfrak{B}\}_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to x$ в $\mathfrak{B}_{-t}$ така, що

$$\|U_t(t)x_n - U_t(t)x_m\| = \left\|e^{tA}x_n - e^{tA}x_m\right\| = \|x_n - x_m\|_{-t} \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Оскільки норми $\|\cdot\|$ та $\|\cdot\|_{-t}$ узгоджені і $e^{tA}\mathfrak{B} = \mathcal{R}\left(e^{tA}\right)$, то $U(t)x_n \to U(t)x$ в $\mathfrak{B}$, тобто

$$U_t(t)\mathfrak{B}_{-t} \subseteq \overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)}$$

(замикання розуміється у просторі $\mathfrak{B}$).

Покажемо, що має місце й протилежне включення. Справді, нехай $x \in \overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)}$. Тоді

$$\exists y_n \in \mathfrak{B}\ (n \in \mathbb{N}) : e^{tA}y_n \to x \text{ при } n \to \infty.$$

Із співвідношення

$$\|y_n - y_m\|_{-t} = \left\|e^{tA}y_n - e^{tA}y_m\right\| = \|U_t(t)y_n - U_t(t)y_m\| \to 0 \text{ при } n, m \to \infty,$$

внаслідок узгодженості норм $\|\cdot\|$ та $\|\cdot\|_{-t}$, маємо

$$\exists y \in \mathfrak{B}_{-t} : U_t(t)y = x,$$

тобто

$$\overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)} \subseteq U_t(t)\mathfrak{B}_{-t},$$

а отже, $U_t(t)\mathfrak{B}_{-t} = \overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)}$. Враховуючи, що $\overline{\mathcal{R}\left(e^{tA}\right)} = \mathfrak{B}$ внаслідок аналітичності півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$, одержуємо

$$U_t(t)\mathfrak{B}_{-t} = \mathfrak{B}.$$

З того, що $\|U_t(t)x\| = \left\|e^{tA}x\right\| = \|x\|_{-t}$ для довільного $x \in \mathfrak{B}$, і щільності $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-t}$ випливає, що

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{-t} : \|U_t(t)x\| = \|x\|_{-t}.$$

Аналогічно, внаслідок щільності $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-s}$ і неперервності $U_s(t)$ в $\mathfrak{B}_{-s}$,

$$\forall x \in \mathfrak{B}_{-s},\ \forall t_1, t_2 \geq 0 : e^{t_1 A} e^{t_2 A} x = e^{(t_1+t_2)A} x,$$

і

$$U_s(t)x - x \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

Таким чином, $\{U_s(t)\}_{t\geq 0}$ – півгрупа стиску в $\mathfrak{B}_{-s}$. Позначимо через A_{-s} її генератор. Оскільки півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною в $\mathfrak{B}$, то

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathfrak{B} : \|A_{-s}^n U_s(t)x\|_{-s} = \left\|A^n e^{tA} x\right\|_{-s} = \left\|e^{sA} A^n e^{tA} x\right\| \leq \\ \leq \frac{c^n n!}{t^n} \left\|e^{sA} x\right\| = \frac{c^n n!}{t^n} \|x\|_{-s},\end{aligned}$$

звідки, завдяки щільності $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}_{-s}$, випливає обмежена аналітичність півгрупи $U_s(t)$ у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$. Беручи також до уваги, що

$$\forall s' > s > 0 : U_{s'}(t) \restriction_{\mathfrak{B}} = U_s(t) \restriction_{\mathfrak{B}},$$

і неперервність $U_{s'}(t)$ в $\mathfrak{B}_{-s'}$, прийдемо до (4.5).

Теорему доведено.

А зараз покладемо

$$\mathfrak{B}_{\{-\}} = \operatorname*{ind\,lim}_{t\to\infty} \mathfrak{B}_{-t}, \quad \mathfrak{B}_{(-)} = \operatorname*{proj\,lim}_{t\to 0} \mathfrak{B}_{-t}.$$

Очевидно, що

$$\mathfrak{B}_{\{-\}} = \operatorname*{ind\,lim}_{n\to\infty} \mathfrak{B}_{-n}, \quad \mathfrak{B}_{(-)} = \operatorname*{proj\,lim}_{n\to\infty} \mathfrak{B}_{-\frac{1}{n}},$$

а тому простір $\mathfrak{B}_{(-)}$ є зліченно-нормованим. Оскільки оператор A не обмежений, то вкладення

$$\mathfrak{B}_{-t} \subset \mathfrak{B}_{-t'} \text{ при } t < t'$$

є строгим.

У просторі $\mathfrak{B}_{\{-\}}$ визначимо півгрупу

$$\left\{\check{U}(t)x = U_s(t)x\right\}_{t\geq 0}, \text{ якщо } x \in \mathfrak{B}_{-s}.$$

Співвідношення (4.5) гарантує коректність такого означення. За теоремою 4.4 $\left\{\check{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ є аналітичною C_0-півгрупою і $\check{U}(t) \restriction_{\mathfrak{B}} = e^{tA}$. Генератор $\check{A}$ цієї півгрупи є розширенням A в $\mathfrak{B}_{\{-\}}$.

У просторі $\mathfrak{B}_{(-)}$ розглянемо півгрупу

$$\left\{\hat{U}(t)x = U_s(t)x\right\}_{t\geq 0}, \quad \forall s \geq 0.$$

Завдяки (4.5), це означення не залежить від вибору s, а отже, також є коректним. Згідно з теоремою 4.4 $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ – аналітична C_0-півгрупа в $\mathfrak{B}_{(-)}$ і $\hat{U}(t)\mathfrak{B}_{(-)} \subset \mathfrak{B}$ при $t > 0$. Позначимо через $\hat{A}$ генератор цієї півгрупи.

Теорема 4.5 *Півгрупа* $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ *є одностайно неперервною в* $\mathfrak{B}_{(-)}$ *і має такі властивості:*

(*i*) $\forall t > 0 : \hat{U}(t)\mathfrak{B}_{(-)} \subset \mathfrak{B}$;

(*ii*) $\forall t \geq 0, \ \forall x \in \mathfrak{B} : \hat{U}(t)x = e^{tA}x$;

(*iii*) $\forall t, s > 0, \ \forall x \in \mathfrak{B}_{(-)} : \hat{U}(t+s)x = e^{tA}\hat{U}(s)x = e^{sA}\hat{U}(t)x.$

Її генератор $\hat{A}$ *визначений і неперервний на всьому просторі* $\mathfrak{B}_{(-)}$, *і* $\hat{A} \restriction_{\mathcal{D}(A)} = A$.

Доведення. Одностайна неперервність $\left\{\hat{U}(t)\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}_{(-)}$ і властивості (i) - (iii) випливають безпосередньо з теореми 4.4. Крім того, для будь-якого $t > 0$ існує $t' > 0$ таке, що оператор $\hat{A}$ діє неперервно з $\mathfrak{B}_{-t'}$ в $\mathfrak{B}_{-t}$; за t' можна взяти будь-яке число з інтервалу $(0, t)$, оскільки

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \|Ax\|_{-t} = \left\|e^{tA}Ax\right\| = \left\|Ae^{(t-t')A}e^{At'}x\right\| \leq$$
$$\leq \frac{c}{t-t'}\left\|e^{t'A}Ax\right\| = \frac{c}{t-t'}\|x\|_{-t'}.$$

Тому оператор A допускає продовження за неперервністю $\hat{A}$ на увесь простір $\mathfrak{B}_{(-)}$.

Доведемо тепер, що $\hat{A}\restriction_{\mathcal{D}(A)} = A$. Справді,

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{(t+\Delta t)A}x - e^{tA}x}{\Delta t} \text{ існує у просторі } \mathfrak{B}.$$

Тим паче у просторі $\mathfrak{B}_{(-)}$ існує границя

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{U(t+\Delta t)x - U(t)x}{\Delta t} = \hat{A}x = Ax.$$

Теорему доведено

4.3 Підростори нескінченно диференційовних векторів генератора аналітичної півгрупи

Нехай $A \in E(\mathfrak{B})$. Припустимо, що $0 \in \rho(A)$. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що

$$\forall x \in \mathcal{D}(A) : \|Ax\| \geq \|x\| \tag{4.6}$$

і

$$A \notin L(\mathfrak{B}). \tag{4.7}$$

Позначимо через $C^n = C^n(A)$ множину $\mathcal{D}(A^n)$. Ця множина утворює банахів простір $\mathfrak{B}^n$ відносно норми $\|x\|_{C^n} = \|A^n x\|$, відомий (див. [211]) як абстрактний соболєвський простір. Замкненість оператора A і співвідношення (4.6) обумовлюють нерівність

$$\|A^n x\| \leq \left\|A^{n+1}x\right\|, \quad \forall x \in \mathcal{D}(A^{n+1}),$$

а отже, щільне й неперервне вкладення

$$C^{n+1} \subset C^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Його строгість доводиться від супротивного.

Дійсно, припустимо, що для деякого $n \in \mathbb{N}_0$, $C^{n+1} = C^n$ топологічно. Тоді

$$\exists c_n > 0 \quad \forall x \in C^{n+1} : \|x\|_{C^{n+1}} \le c_n \|x\|_{\mathfrak{B}^n}.$$

Оскільки $\mathcal{R}(A^n) = \mathfrak{B}$, то

$$\forall y \in \mathfrak{B} : \|Ay\| \le c_n \|y\|,$$

тобто $A \in L(\mathfrak{B})$, що суперечить (4.7).

Позначимо через $C^{-n} = C^{-n}(A)$ поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою

$$\|x\|_{C^{-n}} = \left\|A^{-n}x\right\|.$$

Із співвідношень (4.6), (4.7) випливає щільне і неперервне строге вкладення

$$C^{-n} \subset C^{-(n+1)}.$$

Теорема 4.6 *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$ в $\mathfrak{B}$. Тоді*

$$\forall t > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : C^{-n} \subset \mathfrak{B}_{-t}$$

щільно і неперервно.

Доведення. Для підтвердження щільності й неперервності зазначеного вкладення достатньо довести порівнянність і узгодженість норм $\|\cdot\|_{C^{-n}}$ та $\|\cdot\|_{-t}$. Перша з цих властивостей зумовлюється співвідношенням

$$\|x\|_{-t} = \left\|e^{tA}x\right\| = \left\|e^{tA}A^nA^{-n}x\right\| \le \frac{c^n n!}{t^n}\left\|A^{-n}x\right\| = c_n\|x\|_{C^{-n}},$$

котре є наслідком теореми 1.2.

Припустимо тепер, що послідовність $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ збігається у просторі $\mathfrak{B}_{-t}$ до 0 при $k \to \infty$ і є фундаментальною в C^{-n}. Тоді послідовність

$\{A^{-n}x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є фундаментальною в $\mathfrak{B}$, а тому збігається до деякого вектора $y \in \mathfrak{B}$. З іншого боку, завдяки неперервності оператора $e^{tA}A^n$ в $\mathfrak{B}$ при $t > 0$,

$$A^n e^{tA} A^{-n} x_k \to A^n e^{tA} y \text{ при } k \to \infty.$$

Враховуючи, що

$$A^n e^{tA} A^{-n} x_k = e^{tA} x_k \to 0 \text{ в } \mathfrak{B},$$

одержуємо $A^n e^{tA} y = 0$. Оскільки $0 \in \rho(A)$, то $e^{tA}y = 0$. За твердженням 4.1 $y = 0$, а тому норми $\|\cdot\|_{C^{-n}}$ і $\|\cdot\|_{-t}$ узгоджені. Таким чином, $C^{-n} \subseteq \mathfrak{B}_{-t}$ щільно і неперервно. Якби $C^{-n} = \mathfrak{B}_{-t}$, то існувала б стала $d_n > 0$ така, що

$$\forall x \in \mathfrak{B} : \|x\|_{C^{-n}} \leq d_n \|x\|_{-t}.$$

Тоді, взявши до уваги, що $\mathcal{R}(A^n) = \mathfrak{B}$, і можливість зображення довільного елемента $y \in \mathfrak{B}$ у вигляді $y = A^n x$, одержали б оцінку

$$\|y\| \leq d_n \left\| e^{tA} A^{-n} y \right\|, \quad \forall y \in \mathfrak{B},$$

з якої випливало б, що $\left(e^{tA}A^{-n}\right)^{-1} \in L(\mathfrak{B})$, а це суперечить твердженню 4.1 і умові (4.7).

Теорему доведено

Покладемо

$$C^{\infty} = C^{\infty}(A) = \operatorname*{proj\,lim}_{n\to\infty} C^n, \quad C^{-\infty} = C^{-\infty}(A) = \operatorname*{ind\,lim}_{n\to\infty} C^{-n}.$$

Виходячи із викладеного вище, отримуємо ланцюжок попарно неперервних і щільних вкладень

$$\mathfrak{B}_{(+)} \subset \mathfrak{B}_{\{+\}} \subset C^{\infty} \subset \mathfrak{B} \subset C^{-\infty} \subset \mathfrak{B}_{\{-\}} \subset \mathfrak{B}_{(-)}.$$

Оскільки усі банахові простори C^n відмінні один від одного у зліченно-нормованому просторі C^∞, то (див. [115]) для довільної монотонно неспадної послідовності $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ можна підібрати $x \in C^\infty$ так, щоб

$$\|x\|_{C^n} = \|A^n x\| \geq m_n.$$

З огляду на це, у п. 3.3 розглянуто підпростори $C_{\{m_n\}}(A)$ та $C_{(m_n)}(A)$ простору $C^\infty(A)$, для елементів x яких послідовність $\{A^n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ має певний порядок зростання при $n \to \infty$. Існує зв'язок між просторами $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A) = C_{\{n^n\}}(A)$ та $\mathfrak{G}_{(1)}(A) = C_{(n^n)}(A)$ аналітичних та, відповідно, цілих векторів оператора A і просторами $\mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$ та $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$. Цей зв'язок установлюється такою теоремою.

Теорема 4.7 *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$. Тоді*

$$\mathfrak{G}_{(1)}(A) = \mathfrak{B}_{(+)}(A), \quad \mathfrak{G}_{\{1\}}(A) = \mathfrak{B}_{\{+\}}(A),$$

причому топології відповідних пар просторів є еквівалентними.

Доведення. Нехай $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$. За теоремою 1.5

$$x = e^{tA} x_t \ (\forall t > 0) \text{ де } x_t = \exp(-tA)x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A), \quad \forall t > 0,$$

тобто

$$x \in \bigcap_{t>0} \mathcal{R}\left(e^{tA}\right) = \mathfrak{B}_{(+)}(A)$$

і

$$\begin{aligned} \|x\|_t = \left\|e^{-tA}x\right\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(-A)^k x\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\left\|A^k x\right\| \leq \\ \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^n x\|}{\alpha^n n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha t)^k \leq 2\|x\|_{\mathfrak{G}_1^\alpha}, \ \forall \alpha < \frac{1}{2t}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Припустимо тепер, що $x \in \mathfrak{B}_{(+)} = \bigcap\limits_{t>0} \mathcal{R}\left(e^{tA}\right)$. Тоді для довільного $t > 0$ існує таке $g_t \in \mathfrak{B}$, що $x = e^{tA} g_t$. За теоремою 1.2

$$\|A^n x\| = \left\|A^n e^{tA} g_t\right\| \leq \frac{c^n n!}{t^n} \left\|e^{-tA} x\right\| = \frac{c^n n!}{t^n} \|x\|_t,$$

тобто $x \in \mathfrak{G}_1^{c/t}$ і

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_1^{c/t}} \leq \|x\|_t. \tag{4.9}$$

Таким чином, $\mathfrak{B}_{(+)} = \mathfrak{G}_{(1)}$. Згідно із співвідношеннями (4.8) і (4.9), які виконуються для довільного $t > 0$, топології цих просторів еквівалентні.

Якщо $x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}$, то за теоремою 1.5 $\exp(zA)x$ є локально аналітичною вектор-функцією, тобто існує $r > 0$ таке, що ця функція є аналітичною в крузі $O_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. У цьому випадку співвідношення (4.8), а отже, й (4.9) виконуються лише для $t \in (0, r)$. Користуючись ними, помічаємо еквівалентність топологій просторів $\mathfrak{G}_{\{1\}}$ та $\mathfrak{B}_{\{+\}}$.

Теорему доведено.

Розглянемо тепер випадок, коли простір $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ є гільбертовим зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ і нормою $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$. При розв'язуванні багатьох задач математичного аналізу замість пари просторів – основного і спряженого до нього – часто-густо звертаються до трійки щільно й неперервно вкладених один в одного гільбертових просторів. Коротка схема побудови такої трійки полягає у наступному (див. [12]).

Нехай $\mathfrak{H}_0$ - гільбертів простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, а $\mathfrak{H}_+$ – щільна в ньому множина, котра сама утворює гільбертовий простір відносно іншого скалярного добутку, причому

$$\forall f \in \mathfrak{H}_+ : \|f\|_{\mathfrak{H}_0} \leq \|f\|_{\mathfrak{H}_+}.$$

$\mathfrak{H}_+$ називається простором з позитивною нормою (або коротко – позитивним), а його елементи – основними векторами. Кожний елемент $f \in \mathfrak{H}_0$

породжує антилінійний неперервний функціонал l_f над $\mathfrak{H}_+$ за формулою

$$\forall g \in \mathfrak{H}_+ : l_f(g) = (f, g)_{\mathfrak{H}_0}.$$

Через $\mathfrak{H}_-$ позначається поповнення $\mathfrak{H}_0$ за новою нормою

$$\|f\|_{\mathfrak{H}_-} = \|l_f\| = \sup_{g \in \mathfrak{H}_+} \frac{|(f, g)_{\mathfrak{H}_0}|}{\|g\|_{\mathfrak{H}_+}} \leq \|f\|_{\mathfrak{H}_0}.$$

Елементи цього простору називаються узагальненими векторами, а сам простір $\mathfrak{H}_-$ – негативним. Простір $\mathfrak{H}_-$ є гільбертовим і збігається зі спряженим до $\mathfrak{H}_+ : \mathfrak{H}_- = \mathfrak{H}_+^{'}$. Таким чином, маємо трійку неперервно і щільно вкладених один в одного гільбертових просторів

$$\mathfrak{H}_+ \subseteq \mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}_-,$$

норми яких задовольняють умову

$$\forall f \in \mathfrak{H}_+ : \|f\|_{\mathfrak{H}_+} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_0} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_-}. \tag{4.10}$$

Для $f \in \mathfrak{H}_-$ і $g \in \mathfrak{H}_+$ визначений "скалярний добуток"$(f, g)_{\mathfrak{H}_0}$ – білінійна форма, яка при $f \in \mathfrak{H}_0$ збігається зі скалярним добутком в $\mathfrak{H}_0$. Для нього також виконується нерівність Коші-Буняковського

$$|(f, g)_{\mathfrak{H}_0}| \leq \|f\|_{\mathfrak{H}_-} \|g\|_{\mathfrak{H}_+}.$$

Більш того, для довільного антилінійного неперервного функціоналу l над $\mathfrak{H}_+$ існує єдиний вектор $f \in \mathfrak{H}_-$, за допомогою якого цей функціонал набирає вигляду

$$\forall g \in \mathfrak{H}_+ : l(g) = l_f(g) = (f, g)_{\mathfrak{H}_0}.$$

Нехай тепер $C \in E(\mathfrak{H}_0) : \mathcal{R}(C) = \mathfrak{H}_0$ і

$$\forall f \in \mathcal{D}(C) : \|Cf\|_{\mathfrak{H}_0} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_0}. \tag{4.11}$$

Тоді $\mathfrak{H}_+ = \mathcal{D}(C)$ є гільбертовим простором відносно скалярного добутку

$$(f,g)_{\mathfrak{H}_+} = (Cf, Cg)_{\mathfrak{H}_0} \quad (f,g \in \mathcal{D}(C)),$$

причому нерівність (4.11) означає, що

$$\forall f \in \mathcal{D}(C) : \|f\|_{\mathfrak{H}_0} \leq \|f\|_{\mathfrak{H}_+}, \tag{4.12}$$

тобто $\mathfrak{H}_+ = \mathcal{D}(C)$ - позитивний простір у вкладенні $\mathfrak{H}_+ \subseteq \mathfrak{H}_0$. У цьому випадку негативний простір $\mathfrak{H}_-$ є не що інше, як поповнення $\mathfrak{H}_0$ за нормою $\|f\|_{\mathfrak{H}_-} = \left\|C^{-1}f\right\|_{\mathfrak{H}_0}$, породженою скалярним добутком

$$(f,g)_{\mathfrak{H}_-} = \left(C^{-1}f, C^{-1}g\right)_{\mathfrak{H}_0} \quad (f,g \in \mathfrak{H}_0).$$

Якщо за оператор C взяти e^{-tA} ($t > 0$ фіксоване), де A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи в $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}_0$, то $C = e^{-tA}$ задовольняє умову (4.11) і простір $\mathfrak{B}_t$ є позитивним відносно $\mathfrak{H}_0$, а $\mathfrak{B}_{-t}$ – відповідним негативним.

Розглянемо сім'ю гільбертових просторів $\mathfrak{H}_\tau$, де τ перебігає впорядковану множину T, щільно й неперервно вкладених в $\mathfrak{H}_0$ і таких, що

$$\forall f \in \mathfrak{H}_\tau : \|f\|_{\mathfrak{H}_\tau} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_0}.$$

Припустимо також, що при $\tau_1 < \tau_2$, $\mathfrak{H}_{\tau_1} \supseteq \mathfrak{H}_{\tau_2}$ $(\mathfrak{H}_{\tau_1} \subset \mathfrak{H}_{\tau_2})$, ці вкладення є щільними й неперервними і $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_{\tau_1}} \leq \|\cdot\|_{\mathfrak{H}_{\tau_2}}$ $\left(\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_{\tau_1}} \geq \|\cdot\|_{\mathfrak{H}_{\tau_2}}\right)$.

Покладемо

$$\mathfrak{H}_{pr} = \operatorname{proj}\lim_{\tau \in T} \mathfrak{H}_\tau, \quad \mathfrak{H}_{ind} = \operatorname{ind}\lim_{\tau \in T} \mathfrak{H}_\tau.$$

Зауважимо, що індуктивна границя $\mathfrak{H}_{ind}$ є регулярною. Як показано в [12], має місце таке твердження.

Твердження 4.3 *Нехай* $\mathfrak{H}_{pr}$ $(\mathfrak{H}_{ind})$ *– проективна (індуктивна) границя гільбертових просторів* $\mathfrak{H}_\tau,\ \tau \in T$, *пов'язаних з* $\mathfrak{H}_0$ *і* $\mathfrak{H}_{-\tau}$ *ланцюжком*

$$\mathfrak{H}_\tau \subseteq \mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}_{-\tau}, \quad \|f\|_{\mathfrak{H}_\tau} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_0} \geq \|f\|_{\mathfrak{H}_{-\tau}}.$$

Тоді для спряженого до $\mathfrak{H}_{pr}$ $(\mathfrak{H}_{ind})$ *простору* $\mathfrak{H}'_{pr}$ $(\mathfrak{H}'_{ind})$ *виконується топологічна рівність*

$$\mathfrak{H}'_{pr} = \operatorname{ind}\lim_{\tau\in T} \mathfrak{H}_{-\tau} \quad \left(\mathfrak{H}'_{ind} = \operatorname{proj}\lim_{\tau\in T} \mathfrak{H}_{-\tau}\right)$$

(простори $\mathfrak{H}'_{pr}$ *та* $\mathfrak{H}'_{ind}$ *наділені сильною топологією спряженого простору).*

Як і у випадку гільбертових просторів, можна надати сенс виразу $(f,g)_{\mathfrak{H}_0}$ для $f \in \mathfrak{H}_{pr},\ g \in \mathfrak{H}'_{pr}$ $(f \in \mathfrak{H}_{ind},\ g \in \mathfrak{H}'_{ind})$, а саме: якщо $f \in \mathfrak{H}_{pr},\ g \in \mathfrak{H}'_{pr}$ $(f \in \mathfrak{H}_{ind},\ g \in \mathfrak{H}'_{ind})$, тобто $f \in \mathfrak{H}_\tau$ при довільному (деякому) $\tau \in T$, то $(f,g)_{\mathfrak{H}_0}$ слід розуміти як розширення за неперервністю скалярного добутку з $\mathfrak{H}_0 \times \mathfrak{H}_0$ на $\mathfrak{H}_\tau \times \mathfrak{H}_{-\tau}$. Ясно, що $(f,g)_{\mathfrak{H}_0}$ – неперервна білінійна форма на $\mathfrak{H}_{pr} \times \mathfrak{H}'_{pr}$ $(\mathfrak{H}_{ind} \times \mathfrak{H}'_{ind})$. Виходячи із викладеного вище і враховуючи твердження 4.3, отримуємо таку теорему.

Теорема 4.8 *Нехай* A *– генератор обмеженої аналітичної* C_0*-півгрупи у гільбертовому просторі* $\mathfrak{H}$. *Тоді*

$$\mathfrak{H}'_{(+)} = \mathfrak{H}_{\{-\}}, \quad \mathfrak{H}'_{\{+\}} = \mathfrak{H}_{(-)}.$$

З теорем 4.7 і 4.8 випливає наслідок.

Наслідок 4.3 *Якщо* A *генерує обмежену аналітичну* C_0*-півгрупу у гільбертовому просторі* $\mathfrak{H}$,*то*

$$\mathfrak{G}'_{(1)} = \mathfrak{H}_{\{-\}}, \quad \mathfrak{G}'_{\{1\}} = \mathfrak{H}_{(-)}.$$

А зараз продемонструємо, як зображення Лагранжа для групи зсувів поширюється на аналітичні C_0-півгрупи.

Теорема 4.9 *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\le 0}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$. Тоді для довільного $x \in \mathfrak{B}_{(+)} = \mathfrak{B}_{(+)}(A)$ ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k x$$

збігається у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$ (а отже, й у просторі $\mathfrak{B}$) до $\exp(zA)$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Навпаки, якщо зазначений ряд збігається у просторі $\mathfrak{B}$ рівномірно на будь-якому компакті $K \subset \mathbb{C}$, то $x \in \mathfrak{B}_{(+)}$. Для довільного $x \in \mathfrak{B}$ цей ряд збігається до $\exp(zA)$ рівномірно на кожному $K \subset \mathbb{C}$ у просторі $\mathfrak{B}_{\{-\}}$.

Доведення. Рівномірна збіжність зазначеного ряду до $\exp(zA)$ у просторі $\mathfrak{B}_{(+)}$ на будь-якому компакті $K \subset \mathbb{C}$ випливає з теорем 1.5 та 4.7. Його збіжність у просторі $\mathfrak{B}$ в точці $z = t \in (0, \infty)$ обумовлює оцінку

$$\forall k \in \mathbb{N} : \left\| \frac{t^k}{k!} A^k x \right\| \le c_t.$$

Оскільки $t \in (0, \infty)$ – довільне, то $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) = \mathfrak{B}_{(+)}(A)$. За теоремою 1.2 для довільного $x \in \mathfrak{B}$

$$e^{sA} x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{D}(A^k)$$

і

$$\exists c > 0 : \left\| A^k e^{sA} \right\| \le \frac{c^k k!}{s^k}.$$

Тоді

$$\forall m > n \quad \forall z : |z| < \frac{s}{2c} : \left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k!} A^k x \right\|_{-s} =$$

$$= \left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{z^k}{k!} A^k e^{sA} x \right\| \le \sum_{k=n}^{m} \left(\frac{|z|^k c}{s} \right)^k \le \frac{1}{2^{n-1}} \to 0,\ n \to \infty,$$

а отже, наведений вище ряд збігається у просторі $\mathfrak{B}_{-s}$ при $|z| < \frac{s}{2c}$ і для кожного компакту $K \subset \mathbb{C}$ можна підібрати s так, щоб цей ряд рівномірно збігався на ньому в $\mathfrak{B}_{-s}$, а тому й у просторі $\mathfrak{B}_{\{-\}} = \operatorname{ind}\lim_{s\to\infty} \mathfrak{B}_{-s}$.

Далі, оскільки $\mathfrak{B}_{(+)}$ щільний в $\mathfrak{B}$, то

$$\exists \left\{ x_n \in \mathfrak{B}_{(+)} \right\}_{n \in \mathbb{N}_0} : x_n \to x \text{ в } \mathfrak{B}.$$

Тоді для довільного $z : |z| < \frac{s}{2c}$ маємо

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k (x - x_n) \right\|_{-s} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k e^{sA} (x - x_n) \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{zs}{s} \right| \|x - x_n\| \le 2\|x - x_n\|.$$

Беручи до уваги, що

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k x_n = e^{zA} x_n,$$

і неперервність e^{zA} в $\mathfrak{B}$, прийдемо до рівності

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} A^k x = e^{zA} x,$$

Теорему доведено.

4.4 Застосування до диференціально-операторних рівнянь першого порядку

Нехай A – генератор C_0-півгрупи $\left\{ e^{tA} \right\}_{t \ge 0}$ в $\mathfrak{B}$ із властивістю $\ker e^{tA} = \{0\}$ $(\forall t > 0)$. Вектор-функція $y(t) : (0, \infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$ називається розв'язком рівняння

$$y'(t) = Ay(t), \quad t \in (0, \infty), \tag{4.14}$$

на $(0,\infty)$, якщо вона сильно неперервно диференційовна на $(0,\infty)$ і задовольняє там це рівняння. Зауважимо, що жодних умов на поведінку $y(t)$ в нулі не накладається. Взагалі кажучи, в точці нуль $y(t)$ може бути невизначеним. Як показано в [214], має місце таке твердження.

Твердження 4.4 . *Нехай оператор A генерує C_0-півгрупу $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ таку, що $\ker e^{tA} = \{0\}$ для будь-якого $t > 0$. Для того, щоб вектор-функція $y(t)$ була розв'язком рівняння* (4.14)*, необхідно і достатньо, щоб вона допускала зображення вигляду*

$$y(t) = e^{t\hat{A}}y_0, \quad y_0 \in \mathfrak{B}_{(-)}(A).$$

Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння

$$y'(t) + Ay(t) = 0, \quad t \in (0,\infty), \tag{4.15}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$y(t) = \exp(tA)y_0, \quad y_0 \in \mathfrak{B}_{(+)}(A).$$

У теоремах 1.5, 1.8 та 4.9 вказано реальний шлях побудови C_0-півгрупи $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ за її генератором A, тому що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt} &= Ay(t),\ t \in (0,\infty), \\ y(0) &= x \in \mathfrak{B} \end{cases} \tag{4.16}$$

записується у вигляді $y(t) = U(t)x$, якщо ця проблема поставлена коректно, і є декілька підходів до такої побудови, серед яких (див. п. 1.5) – підходи Ейлера-Хілле та Іосіди. Суттєвою відмінністю підходу, наведеного у цих теоремах, є те, що розв'язки задачі Коші (4.16) з початковими даними x, які є цілими векторами оператора A, можна подати за допомогою виключно його степенів, а не досить складних функцій від нього. Оскільки простір $\mathfrak{B}_{(+)}(A)$ щільний в $\mathfrak{B}$, коли півгрупа $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$ є аналітичною, тобто рівняння (4.14) – абстрактне параболічне, то для довільного $x \in \mathfrak{B}$ існує послідовність $\{x_n \in \mathfrak{B}_{(+)}(A) = \mathfrak{G}_{(1)}(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, така, що

$$\forall t \in [0, \infty) : U(t)x_n \to U(t)x \text{ при } n \to \infty.$$

Більш того, ця збіжність є рівномірною на $[0, \infty)$, і точний розв'язок задачі Коші може бути зображений у вигляді

$$y(t) = U(t)x = \lim_{n \to \infty} U(t)x_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x_n.$$

У випадку, коли $x \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)$, вектор-функцію

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x$$

можна розглядати як наближений розв'язок цієї задачі. Враховуючи нерівність

$$\forall \alpha > 0, \ \exists c_\alpha > 0 : \|A^n x\| \leq c_\alpha \alpha^n n!,$$

одержуємо

$$\|y(t) - y_n(t)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|A^k x\| \leq c_\alpha \sum_{k=n+1}^{\infty} t^k \alpha^k = c_\alpha (t\alpha)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (t\alpha)^k.$$

Виберемо α так, щоб $t\alpha \leq \frac{1}{2}$. Тоді

$$\|y(t) - y_n(t)\| \leq c_\alpha 2^{-n}.$$

Крім того, $y_n(0) = x$.

Таким чином, $y_n(t)$ – наближений розв'язок задачі Коші (4.16) на $\left[0, \frac{1}{2\alpha}\right]$. Оскільки α може набувати довільного значення з $(0, \infty)$, то вектор-функція $y_n(t)$ є наближеним розв'язком цієї задачі на кожному інтервалі

$[0, b],\ 0 \leq b < \infty$. Для відхилу $y_n'(t) - Ay_n(t)$ на цьому інтервалі маємо оцінку

$$\|y_n'(t) - Ay_n(t)\| \leq \left\| \frac{t^n}{n!} A^{n+1} x \right\| \leq c_\alpha (n+1) t^n \alpha^{n+1} = \alpha c_\alpha (n+1) 2^{-n}.$$

Припустимо знову, що x – довільний вектор з $\mathfrak{B}$. Має місце таке твердження.

Наслідок 4.4 *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{U(t) = e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$, а $y(t)$ – розв'язок задачі Коші* (4.16) *з $x \in \mathfrak{B}$. Тоді існує послідовність $\{x_m \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)\}_{m \in \mathbb{N}} : x_m \to x$ в $\mathfrak{B}$ така, що*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall b > 0,\ \exists n, m \in \mathbb{N} : \left\| y(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x_m \right\| < \varepsilon,\ t \in [0, b].$$

Доведення. Оскільки $\overline{\mathfrak{B}_{(+)}(A)} = \mathfrak{B}$, то для вектора x існує $x_m \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)$ $(m \in \mathbb{N})$, для якого

$$\|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді

$$\forall t \in [0, \infty) : \left\| y(t) - e^{tA} x_m \right\| \leq \|x - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

З рівномірної збіжності ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_m$ випливає існування такого $n \in \mathbb{N}$, що

$$\sup_{t \in [0,b]} \left\| e^{tA} x_m - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x_m \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

звідки

$$\sup_{t \in [0,b]} \left\| y(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x_m \right\|$$

$$\leq \sup_{t \in [0,b]} \left\| y(t) - e^{tA} x_m \right\| + \sup_{t \in [0,b]} \left\| e^{tA} x_m - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x_m \right\| < \varepsilon.$$

Наслідок доведено.

4.5 Опис розв'язків диференціального рівняння другого порядку на $(0,\infty)$ у банаховому просторі

Розглянемо рівняння вигляду

$$y''(t) = By(t), \quad t \in (0,\infty), \tag{4.17}$$

де B - слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, тобто $B \in E(\mathfrak{B})$, $\rho(B) \supset (-\infty, 0)$ і існує стала $M > 0$ така, що

$$\forall \lambda > 0 : \|R(-\lambda; B)\| \leq \frac{M}{\lambda}. \tag{4.18}$$

Якщо, крім того, $0 \in \rho(B)$, то оператор B називається позитивним.

Згідно з [157](див. також [1]), оператор B має тип $(\omega, M(\theta))$, якщо $\rho(-B)$ містить сектор $\Sigma_{\pi-\omega} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \pi - \omega\}$ і оцінка (4.18) виконується на кожному промені $z = re^{i\theta}$, $0 < r < \infty$, $\theta < \pi - \omega$ з константою $M = M(\theta)$. Якщо оператор B має тип $(\omega, M(\theta))$ з $\omega < \frac{\pi}{2}$, тоді $-B$ генерує аналітичну півгрупу в $\mathfrak{B}$ з кутом $\frac{\pi}{2} - \omega$, рівномірно обмежену в секторі $\Sigma_{\frac{\pi}{2}-\omega-\varepsilon}, 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2} - \omega$.

Для слабо позитивного оператора B є визначеними степені B^α, $0 \leq \alpha < 1$, і за умови, що $(\omega, M(\theta))$ - тип оператора B, тип оператора B^α дорівнює $(\alpha\omega, M_\alpha(\theta))$. Звідси випливає таке твердження.

Твердження 4.5 (*див.* [1, 157]). *Якщо B - слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$ з типом $(\omega, M(\theta))$, то оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу з кутом аналітичності $\frac{\pi-\omega}{2}$.*

Під розв'язком рівняння (4.17) на $(0,\infty)$ розумітимемо вектор-функцію $y(t) : (0,\infty) \mapsto \mathcal{D}(B)$, двічі неперервно диференційовну в $\mathfrak{B}$, яка задовольняє (4.17). Жодних умов на поведінку розв'язку в околі нуля не накладається.

Теорема 4.10 . *Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння (4.17) на $(0,\infty)$ тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$y(t) = e^{t\hat{A}} f + \frac{\sinh(tA)}{A} g, \;\; f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A), \;\; g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A), \tag{4.19}$$

де $A = -B^{1/2}$.

Доведення. Нехай $y(t)$ - розв'язок рівняння (4.17) на $(0,\infty)$. З огляду на те, що $A^2 = B$, це рівняння можна записати як

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = 0.$$

Покладемо $z(t) = \left(\dfrac{d}{dt} - A\right) y(t)$. Тоді $z(t)$ - розв'язок рівняння

$$\frac{dz(t)}{dt} = -Az(t), \;\; t \in (0,\infty),$$

з оператором $A = -(-A)$, котрий генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу. За твердженням 4.4

$$z(t) = \exp(-tA)g, \;\; g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A),$$

а тому вектор-функція $y(t)$ на $(0,\infty)$ задовольняє рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = \exp(-tA)g, \;\; t \geq 0, \;\; g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A).$$

На основі твердження 4.4 і рівності

$$\int\limits_0^z \exp((z-2s)A)\, ds = \frac{\sinh(zA)}{A}$$

одержуємо

$$y(t) = e^{t\hat{A}} f + \int\limits_0^t e^{(t-s)A} \exp(-sA) g\, ds =$$

$$= e^{t\hat{A}} f + \int_0^t \exp((t-2s)A) g \, ds = e^{t\hat{A}} f + \frac{\sinh(tA)}{A} g,$$

де $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A), \ g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що вектор-функція вигляду (4.19) є розв'язком рівняння (4.17) на $(0, \infty)$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що у випадку, коли $0 \in \rho(A)$, формулу (4.19) можна записати як

$$y(t) = e^{t\hat{A}} f_0 + \exp(-sA) g_0, \quad f_0 \in \mathfrak{B}_{(-)}(A), \ g_0 \in \mathfrak{B}_{(+)}(A). \tag{4.20}$$

Тут

$$f_0 = f + \frac{1}{2} A^{-1} g \in \mathfrak{B}_{(-)}(A), \quad g_0 = -\frac{1}{2} A^{-1} g.$$

З твердження 4.5 випливає

Наслідок 4.5 . *Будь-який розв'язок рівняння* (4.17) *на* $(0, \infty)$ *має граничне значення при* $t \to 0$ *у просторі* $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$ *і є аналітичною на* $(0, \infty)$ *вектор-функцією у просторі* $\mathfrak{B}$. *Для того щоб розв'язок допускав продовження до цілої вектор-функції в* $\mathfrak{B}$, *необхідно й достатньо, щоб* $y(0) \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)$.

4.6 Про розв'язки диференціально-операторних рівнянь вищих порядків на півосі

Головна наша мета зараз – дослідити розв'язки рівняння вигляду

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \ n, m \in \mathbb{N}_0; \ n + m \geq 1, \tag{4.21}$$

де A – генератор аналітичної C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$. Варто зазначити, що конкретні реалізації простору $\mathfrak{B}$, оператора A та m, n в рівнянні (4.21) містять у собі чимало класів рівнянь із частинними похідними в різних функціональних просторах.

Вектор-функція $y(t) : [0, \infty) \mapsto \mathcal{D}\left(A^{n+m}\right)$ називається розв'язком рівняння (4.21) на $(0, \infty)$, якщо вона $n+m$ разів неперервно диференційовна на $(0, \infty)$ і задовольняє там це рівняння (жодних умов на поведінку розв'язку в околі точки 0 не накладається).

Зауважимо, що випадок $m = n$ розглянуто в [13]. Згідно з [13], для того, щоб вектор-функція $y(t)$ була розв'язком рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - A^2\right)^m y(t) = 0, \quad t \in (0, \infty),\ m \in \mathbb{N}, \tag{4.22}$$

необхідно і достатньо, щоб вона допускала зображення

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k e^{t\hat{A}} f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k, \tag{4.23}$$

де $f_k \in \mathfrak{B}_{(-)}(A),\ g_k \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)$, причому вектори f_k, g_k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ однозначно визначаються за $y(t)$.

Припустимо тепер, що $n \neq m$. Має місце таке твердження.

Теорема 4.11 . *Нехай A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи у просторі $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$. Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння (4.21) на $(0, \infty)$ тоді і тільки тоді, коли її можна подати у вигляді*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k e^{t\hat{A}} f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k,\ f_k \in \mathfrak{B}_{(-)}(A),\ g_k \in \mathfrak{B}_{(+)}(A). \tag{4.24}$$

Вектори f_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ та g_k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ однозначно визначаються за $y(t)$

Доведення. Розглянемо спочатку рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^p y(t) = 0, \quad t \in (0, \infty), p \in \mathbb{N}, \tag{4.25}$$

і доведемо, що його розв'язок має вигляд

$$y(t) = \sum_{i=0}^{p-1} t^i e^{t\hat{A}} \widetilde{f_i}, \quad \widetilde{f_i} \in \mathfrak{B}_{(-)}(A). \tag{4.26}$$

При $p = 1$ це випливає з твердження 4.4.

Припустимо тепер, що розв'язок рівняння (4.25) з $p = k - 1$ зображується як

$$y(t) = \sum_{i=0}^{k-2} t^i e^{t\hat{A}} \widetilde{f_i}, \quad \widetilde{f_i} \in \mathfrak{B}_{(-)}(A),$$

і покажемо, що таке зображення має місце й при $p = k$.

Отже, нехай $y(t)$ – розв'язок рівняння (4.25) з $p = k - 1$. Оскільки

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^k y(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right)^{k-1} \left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = 0,$$

то $\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t)$ є розв'язком рівняння (4.25) з $p = k - 1$, а тому

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right) y(t) = \sum_{i=0}^{k-2} t^i e^{t\hat{A}} \widetilde{f_i}, \quad \widetilde{f_i} \in \mathfrak{B}_{(-)}(A), i = 0, 1, \ldots, k-2,$$

де вектор-функція

$$f(t) = \sum_{i=0}^{k-2} t^i e^{t\hat{A}} \widetilde{f_i}$$

є неперервною (навіть аналітичною) у просторі $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$. Тоді

$$\begin{aligned} y(t) =& e^{t\hat{A}} f_0 + \int_0^t e^{(t-s)\hat{A}} \sum_{i=0}^{k-2} s^i e^{s\hat{A}} \widetilde{f_i}\, ds = \\ =& \sum_{i=0}^{k-1} e^{t\hat{A}} t^i f_i, \quad f_i = \frac{\widetilde{f_i}}{i},\ i = 1, \ldots k-1. \end{aligned}$$

Таким чином, зображення (4.26) для розв'язків рівняння (4.25) доведено. Так само доводиться зображення другою сумою з (4.24) розв'язків рівняння
$$\left(\frac{d}{dt}+A\right)^m y(t)=0, \quad t\in(0,\infty), m\in\mathbb{N},$$
(випадок $n=0$).

А зараз у припущенні, що $n>m$, запишемо рівняння (4.21) у вигляді
$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^p\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)^m y(t)=0, \quad t\in(0,\infty),\ p=n-m,$$
і покладемо
$$z(t)=\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)^m y(t).$$
Вектор-функція $z(t)$ є розв'язком рівняння (4.25), а отже,
$$z(t)=\sum_{i=0}^{p-1} t^i e^{t\hat{A}}\widetilde{f}_i, \quad \widetilde{f}_i\in\mathfrak{B}_{(-)}(A),\ i=1,\ldots,p-1.$$
Як бачимо, $y(t)$ – розв'язок неоднорідного m-гармонічного рівняння
$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-A^2\right)^m y(t)=\sum_{i=0}^{p-1} e^{t\hat{A}}P(t), \quad t\in(0,\infty), \tag{4.27}$$
де $P(t)$ – многочлен степеня $p-1$:
$$P(t)=\sum_{i=0}^{p-1} t^i\widetilde{f}_i.$$
За частинний розв'язок цього рівняння можна взяти вектор-функцію $t^m e^{t\hat{A}}Q(t)$, де $Q(t)=\sum\limits_{i=0}^{p-1} t^i f_i$ – многочлен того самого степеня, що й $P(t)$, а f_i пов'язані з $\widetilde{f}_i$ лінійними співвідношеннями, що не виводять за межі $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$. Тому
$$\begin{aligned} y(t)&=\sum_{i=0}^{m-1} t^i e^{t\hat{A}}\widetilde{f}_i+\sum_{i=0}^{m-1} t^i\exp(-tA)g_i+t^m e^{t\hat{A}}Q(t)=\\ &=\sum_{i=0}^{n-1} t^i e^{t\hat{A}}f_i+\sum_{i=0}^{m-1} t^i\exp(-tA)g_i, \end{aligned}$$

де

$$f_i \in \mathfrak{B}_{(-)}(A)\ (i = 1, \dots n-1),\ g_i \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)\ (i = 1, \dots m-1),\ t \in (0, \infty).$$

Аналогічно доводиться випадок $n < m$.

Достатність умов теореми підтверджується безпосередньою перевіркою, що вектор-функція (4.24) є розв'язком рівняння (4.21) на $(0, \infty)$.

Доведемо єдиність зображення (4.24), тобто, що тотожність $y(t) \equiv 0$ зумовлює рівності $f_k = 0,\ k = 0, 1, \dots, n-1$ та $g_k = 0,\ k = 0, 1, \dots, m-1$.

Покладемо

$$y_1(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k e^{t\hat{A}} f_k, \quad y_2(t) = \sum_{k=0}^{m-1} t^k \exp(-tA) g_k. \tag{4.28}$$

Беручи до уваги, що для $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^m \left(\frac{d}{dt} - A\right)^k y(t) = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m \left(\frac{d}{dt} - A\right)^k y_1(t),$$

і

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^k y(t) = \left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^k y_2(t),$$

для $k = 0, 1, \dots, m-1$, а також співвідношення

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^k (t^i e^{t\hat{A}}) f =$$

$$= \begin{cases} i(i-1)\dots(i-k+1) t^{i-k} e^{t\hat{A}} f & \text{при} \quad k \le i \\ 0 & \text{при} \quad k > i \end{cases}$$

та

$$\left(\frac{d}{dt} + A\right)^k (t^i \exp(-tA)) g =$$

$$= \begin{cases} i(i-1)\dots(i-k+1) t^{i-k} e^{t\hat{A}} f & \text{при} \quad k \le i \\ 0 & \text{при} \quad k > i \end{cases}$$

$(f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A),\ g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A))$, одержуємо

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}+A\right)^m \left(\frac{d}{dt}-A\right)^{n-1} y(t) = & \\ &= \left(\frac{d}{dt}+A\right)^m (n-1)! e^{t\hat{A}} f_{n-1} = \\ &= 2^m (n-1)! \hat{A}^m e^{t\hat{A}} f_{n-1}\end{aligned} \tag{4.29}$$

і

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}-A\right)^n \left(\frac{d}{dt}+A\right)^{m-1} y(t) = & \\ &= \left(\frac{d}{dt}-A\right)^n (m-1)! \exp(-tA) g_{m-1} = \\ &= (-1)^n 2^n (m-1)! \exp(-tA) g_{m-1}\end{aligned} \tag{4.30}$$

Припустимо тепер, що $y(t) \equiv 0$. Тоді з теореми 4.11 і рівностей (4.29), (4.30) при $t = 0$ випливає, що

$$f_{n-1} = g_{m-1} = 0,$$

тобто $y(t)$ має вигляд

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-2} t^k e^{t\hat{A}} f_k + \sum_{k=0}^{m-2} t^k \exp(-tA) g_k.$$

Повторюючи цю процедуру $\max\{n, m\}$ разів, прийдемо до висновку, що усі $f_k,\ k = 0, 1, \dots, n-1$, та $g_k,\ k = 0, 1, \dots, m-1$, у зображенні (4.24) дорівнюють нулеві, що й завершує доведення теореми.

Наслідок 4.6 *Будь-який розв'язок рівняння* (4.21) *на* $(0, \infty)$ *є аналітичною в* $\mathfrak{B}$ *вектор-функцією на* $(0, \infty)$ *із значеннями в* $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$.

Доведення. Оскільки розв'язок $y(t)$ рівняння (4.21) на $(0, \infty)$ зображується у вигляді $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, де $y_1(t)$ і $y_2(t)$ визначаються формулою

(4.28), і $y_2(t)$ - ціла вектор-функцієя із значеннями в $\mathfrak{G}_{(1)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, то досить довести, що $y_1(t)$ є аналітичною на $(0, \infty)$ $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$-значною функцією.

Якщо $f_k \in \mathfrak{B},\ k = 0, 1, \ldots, m-1$, то з аналітичності півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ випливає, що $t^k e^{tA}$, а тому й $y_1(t)$ є аналітичними на $(0, \infty)$ $\mathfrak{B}$-значними вектор-функціями. Значення $y_1(t)$ належать до $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ (див. [9, 32, 55]).

Припустимо тепер, що $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A)$. Зафіксуємо довільне $t_0 > 0$. Тоді, виходячи з властивостей півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$, одержуємо при $t > t_0$

$$e^{t\widehat{A}} f = e^{(t-t_0)A} e^{t_0 \widehat{A}} f \quad \text{і} \quad e^{t_0 \widehat{A}} f \in \mathfrak{B}.$$

Тому $e^{t\widehat{A}} f$ є аналітичною вектор-функцією із значеннями в $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$ на (t_0, ∞). Враховуючи, що t_0 – довільне, то $e^{t\widehat{A}} f$, а отже й $y_1(A)$ є $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$-значною вектор-функцією, аналітичною на $(0, \infty)$ в $\mathfrak{B}$.

Наслідок доведено.

З теореми 4.5 про властивості півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ і зображення (4.24) випливає також наступне твердження.

Наслідок 4.7 *Кожний розв'язок $y(t)$ рівняння (4.21) на $(0, \infty)$ і його похідні будь-якого порядку мають граничні значення в точці нуль у просторі $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$.*

Природно постає питання: за яких умов на розв'язок $y(t)$, усі f_k ($k = 0, 1, \ldots, m-1$) в його зображенні (4.24) належать до вихідного простору $\mathfrak{B}$? Відповідь дає така теорема.

Теорема 4.12 *Якщо простір $\mathfrak{B}$ є рефлексивним, то розв'язок $y(t)$ рівняння (4.21) на $(0, \infty)$ можна подати у вигляді (4.24) з $f_k \in \mathfrak{B}$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) тоді і тільки тоді, коли*

$$\left\| \left(\frac{d}{dt} - A \right)^k y(t) \right\| < \infty, \quad t \in (0, 1], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{4.31}$$

Доведення. Нехай $y(t)$ - розв'язок рівняння (4.21) на $(0,\infty)$. За теоремою 4.10 $y(t)=y_1(t)+y_2(t)$, де $y_i(t)$ $(i=1,2)$ визначаються формулою (4.28). Але $y_2(t)$ - ціла вектор-функція із значеннями в $\mathfrak{B}_{(+)}(A)=\mathfrak{G}_{(1)}(A)$. Тому виконання умови (4.31) для $y(t)$ рівносильне її виконанню для $y_1(t)$. Отже при доведенні теореми можна обмежитись випадком

$$y(t)=y_1(t)=\sum_{k=0}^{n-1} t^k e^{t\widehat{A}} f_k.$$

Оскільки

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^{n-1} y(t)=(n-1)!e^{t\widehat{A}} f_{n-1}, \quad t\in(0,\infty). \tag{4.32}$$

то, як показано в В [9, 19], у випадку рефлексивного $\mathfrak{B}$ для $f\in\mathfrak{B}_{(-)}(A)$ справджується співвідношення еквівалентності

$$\sup_{t\in(0,1]} \|e^{t\widehat{A}} f\|<\infty \Longleftrightarrow f\in\mathfrak{B}.$$

Звідси, беручи до уваги (4.32), випливає, що

$$\sup_{t\in(0,1]} \left\|\left(\frac{d}{dt}-A\right)^{n-1} y(t)\right\|<\infty \Leftrightarrow f_{n-1}\in\mathfrak{B}.$$

Із формули (див. [29])

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^{k} y_(t)=\sum_{i=k}^{n-1} i(i-1)\dots(i-k+1)t^{i-k} e^{t\widehat{A}} f_i \tag{4.33}$$

при $k=n-2$ також одержуємо

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^{n-2} y(t)=(n-2)!e^{t\widehat{A}} f_{n-2}+(n-1)!te^{t\widehat{A}} f_{n-1}. \tag{4.34}$$

Внаслідок обмеженості на $(0,1]$ другого доданку в (4.33) маємо

$$\sup_{t\in(0,1]} \left\|\left(\frac{d}{dt}-A\right)^{n-2} y(t)\right\|<\infty \Longleftrightarrow \sup_{t\in(0,1]} \|e^{t\widehat{A}} f_{n-2}\|<\infty \Longleftrightarrow f_{n-2}\in\mathfrak{B}.$$

Повторюючи ці міркування n разів, знайдемо, що $f_{n-3}, \dots, f_0 \in \mathfrak{B}$.

Теорему доведено.

Із наведеного вище доведення видно, що умова (4.31) еквівалентна існуванню граничних значень у нулі вектор-функцій $\left(\frac{d}{dt} - A\right)^k y(t)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) у просторі $\mathfrak{B}$. У випадку, коли $n = 1$ і $\mathfrak{B}$ рефлексивний, обмеженість розв'язку в околі нуля рівносильна існуванню його граничного значення у точці 0 в $\mathfrak{B}$. Але, як показано в [5], це, взагалі кажучи, не так при $n > 1$. Наприклад, для бігармонічного рівняння $\left(B = -\dfrac{d^2}{dx^2}\right)$ із обмеженості в середньому квадратичному розв'язку в околі границі ще не випливає існування середньоквадратичного граничного значення.

Висновки до розділу 4

Цей розділ присвячено вивченню розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі всередині інтервалу $(0, \infty)$ та їх граничних значень. З цією метою для генератора обмеженої аналітичної C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t \geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ введено локально-опуклі простори $\mathfrak{B}_{(+)}(A)$ ($\mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$) основних (підрозділ 4.1) і $\mathfrak{B}_{\{-\}}(A)$ ($\mathfrak{B}_{(-)}(A)$) узагальнених (підрозділ 4.2) векторів оператора A. Досліджено звуження і, відповідно, розширення заданої півгрупи на ці простори. У випадку гільбертового простору доведено, що вектор-функкця $\exp(zA)x$ є цілою в $\mathfrak{H}_{(+)}(A)$ і $\exp(tA)x = e^{tA}x$, якщо $x \in \mathfrak{H}_{(+)}(A)$, тобто $\exp(tA)x$ – розв'язок задачі Коші $y'(t) = Ay(t), t \in (0, \infty); y(0) = x \in \mathfrak{H}_{(+)}(A)$. За допомогою введених просторів основних і узагальнених векторів оператора A описано усі розв'язки всередині $(0, \infty)$ рівнянь $y'(t) \mp Ay(t) = 0$ на півосі $(0, \infty)$. Підкреслимо, що жодних умов на поведінку $y(t)$ в нулі не накладалось (взагалі кажучи, $y(t)$ може бути невизначеним в точці 0). Показано також, що за наближені розв'язки задачі Коші у параболічному випадку з початковою умовою $y(0) = x \in \mathfrak{B}$ можна взяти частинні суми експоненціального ряду на векторах послідовності $x_m \in \mathfrak{B}_{(+)}(A) : x_m \to x$ в $\mathfrak{B}$.

Для рівняння другого порядку $y''(t) - By(t) = 0$ на півосі зі слабо позитивним оператором B у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ одержано зображення його розв'язків на $(0, \infty)$, з якого видно, що будь-який розв'язок цього рівняння має граничне значення при $t \to 0$ у просторі $\mathfrak{B}_{(-)}(B^{1/2})$ і є аналітичною на $(0, \infty)$ вектор-функцією в $\mathfrak{B}$. Наведено умови, за яких розв'язок допускає продовження до цілої вектор-функції у цьому просторі. Досліджено також розв'язки однорідного рівняння вищих порядків з розділу 2 (але вже не на всій осі, а на півосі) у припущенні, що A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$ і $0 \in \rho(A)$.

5 Задачі Діріхле, Неймана та $(n+1)$-раз інтегрована задача Коші

У цьому розділі розглядається рівняння другого порядку вигляду

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - By(t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \tag{5.1}$$

де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, тобто $B \in E(\mathfrak{B})$, $\rho(B) \supset (-\infty, 0)$ і

$$\exists M = \text{const}\ \forall \lambda > 0 : \|R(-\lambda); B)\| \leq \frac{M}{\lambda}.$$

Якщо $0 \in \rho(B)$, то оператор B – позитивний.

У попередньому розділі показано, що вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння (5.1) на $(0, \infty)$ тоді і тільки тоді, коли її можна подати як

$$y(t) = e^{t\hat{A}}f + \frac{\sinh(tA)}{A}g, \quad f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A),\ g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A), \tag{5.2}$$

де ,

$$\begin{array}{rclcl} \dfrac{\sinh(tA)}{A} & = & \displaystyle\int_0^t \cosh(sA)\, ds & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k} \\ \cosh(tA) & = & \dfrac{\exp(tA) + \exp(-tA)}{2} & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k}, \end{array} \quad A = -B^{1/2}, \tag{5.3}$$

а отже, кожний розв'язок рівняння (5.1) на $(0, \infty)$ є аналітичною на цьому інтервалі вектор-функцією у просторі $\mathfrak{B}$. Із зображення (5.2) також випливає, що будь-який розв'язок цього рівняння має граничне значення в точці 0 у просторі $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$ і для того, щоб розв'язок допускав продовження до цілої вектор-функції в $\mathfrak{B}$, необхідно і достатньо, щоб $y(0) \in \mathfrak{B}_{(+)}(A) = \mathfrak{G}_{(1)}(A)$

5.1 Однорідна задача Діріхле

Задача Діріхле для рівняння (5.1) полягає у відшуканні для заданого $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A)$ розв'язку $y(t)$ цього рівняння, що задовольняє умову

$$y(t) \to f \text{ в просторі } \mathfrak{B}_{(-)}(A) \text{ при } t \to 0. \tag{5.4}$$

Теорема 4.11 показує, що у випадку слабо позитивного B ця задача має безліч розв'язків. Усі вони описуються формулою (4.19). Таким чином, розглядувана задача розв'язується однозначно з точністю до розв'язків однорідної задачі Діріхле

$$y(t) \to 0 \text{ у просторі } \mathfrak{B}_{(-)}(A) \text{ при } t \to 0, \tag{5.5}$$

розв'язки якої мають вигляд

$$y(t) = \frac{\sinh(tA)}{A} g, \quad g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A) = \mathfrak{G}_{(1)}(A). \tag{5.6}$$

Природно постає питання, які умови потрібно накласти на поведінку на нескінченності розв'язку задачі (5.1), (5.5), щоб гарантувати його єдиність.

Розглянемо спочатку випадок, коли B – самоспряжений оператор у гільбертовому просторі.

5.2 Випадок самоспряженого B

Нехай $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ – гільбертів простір, B – самоспряжений оператор в ньому і $E_\lambda = E_\lambda(B)$ – його спектральна функція.

Теорема 5.1 *Якщо для розв'язку однорідної задачі Діріхле* (5.5) *для рівняння* (5.1) *виконується оцінка*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon > 0 : \|y(t)\| \le c_\varepsilon e^{\varepsilon t}, \tag{5.7}$$

то $y(t) = tg,\ g \in \ker B$. *Зокрема, якщо* $\ker B = \{0\}$, *то* $y(t) \equiv 0$.

Доведення. З оцінки (5.7) випливає, що

$$e^{-2\varepsilon t}\|y(t)\|^2 = \int\limits_0^\infty \frac{\sinh^2 \lambda t}{\lambda^2} e^{-2\varepsilon t}\, d(E_\lambda g, g) \leq c_\varepsilon^2,$$

звідки

$$\int\limits_0^\infty e^{2(\lambda-\varepsilon)t}\, d(E_\lambda g, g) \leq$$

$(0 < c = const)$. За теоремою Фату (див.[223, 224])

$$(E_\lambda g, g) = \text{ const } \text{ при } \lambda \geq \varepsilon^2.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, то $(E_\lambda g, g) = \text{const}$ на $(0, \infty)$. Таким чином, функція $(E_\lambda g, g)$ може мати стрибок лише в нулі, тобто $Ag = 0$. Тоді (5.6) спричиняє рівність $y(t) = tg$.

Теорему доведено

Наступні теореми характеризують більш детально елемент g у зображенні (5.6) розв'язку однорідної задачі Діріхле в залежності від поведінки $y(t)$ при $t \to \infty$.

Теорема 5.2 *Нехай оператор* B *– самоспряжений в* $\mathfrak{H}$. *Вектор* g *у зображенні* (5.6) *належить до простору* $\mathfrak{G}_{(0)}(A)$, *тобто є цілим експоненціального типу для оператора* A, *тоді і тільки тоді, коли*

$$\exists c > 0, \exists \alpha > 0 : \|y(t)\| \leq ce^{\alpha t} \tag{5.8}$$

для достатньо великих $t > 0$.

Доведення. Припустимо, що розв'язок (5.5) задачі (5.5) задовольняє

(5.8). Тоді

$$
\begin{aligned}
&e^{-2\alpha t}\|y(t)\|^2 = \\
&\qquad = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sinh \lambda t}{\lambda}\right)^2 e^{-2\alpha t}\, d(E_\lambda g, g) = \\
&\qquad = \int\limits_0^\alpha + \int\limits_\alpha^\infty \left(\frac{\sinh \lambda t}{\lambda}\right)^2 e^{-2\alpha t}\, d(E_(\lambda g, g) = \\
&\qquad = \frac{1}{4}\int\limits_0^\alpha + \frac{1}{4}\int\limits_\alpha^\infty \frac{e^{2(\lambda-\alpha)t} + e^{-2(\lambda+\alpha)t} - 2}{\lambda}\, d(E_\lambda g, g) \le c^2.
\end{aligned}
$$

Переходячи до границі при $t \to \infty$, на основі теореми Фату робимо висновок, що міра $dE_\lambda g, g)$ зосереджена лише на відрізку $[0, \alpha^2]$, тобто $g = E(\Delta)h,\ h \in \mathfrak{H},\ \Delta \subseteq [0, \alpha^2]$. Отже, g – цілий вектор експоненціального типу оператора A.

З іншого боку, якщо $g = E(\Delta)h,\ h \in \mathfrak{H},\ \Delta \subset [0, \alpha)$ – скінченний проміжок, то при достатньо великих $t > 0$ маємо

$$
\|y(t)\|^2 = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sinh \lambda t}{\lambda}\right)^2 d(E_\lambda g, g) = \int\limits_0^\alpha \left(\frac{\sinh \lambda t}{\lambda}\right)^2 d(E_\lambda h, h) \le c e^{2\alpha t}.
$$

Теорему доведено

Теорема 5.2 показує, що розв'язок однорідної задачі Діріхле на нескінченності може мати експоненціальний ріст тоді і тільки тоді, коли в його представленні (5.6) вектор g є цілим експоненціального типу для оператора A. Розв'язки типу, вищого за експоненціальний, описуються таким чином.

Нехай $\gamma(t) > 0$ – неперервна на $[0, \infty)$ функція така, що

$$
\forall \lambda > 0 : G^2(\lambda) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sinh \lambda t}{\lambda}\right)^2 \gamma(t)\, dt < \infty. \tag{5.9}
$$

Це означає, що $\gamma(t)$ спадає на нескінченності швидше за будь-яку експоненту. Позначимо через Y_γ сукупність усіх розв'язків $y(t)$ задачі (5.5), для яких

$$\|y\|^2_{Y_\gamma} = \int\limits_0^\infty \|y(t)\|^2 \gamma(t)\, dt < \infty.$$

Простір Y_γ гільбертів відносно скалярного добутку

$$(y, z)_{Y_\gamma} = \int\limits_0^\infty (y(t), z(t))\gamma(t)\, dt.$$

Ясно, що Y_γ містить у собі всі розв'язки розглядуваної задачі, зростаючі експоненціально на ∞.

Теорема 5.3 *За умови самоспряженості оператора B вектор g у зображенні* (5.6) *розв'язку однорідної задачі Діріхле належить до гільбертового простору*

$$\mathfrak{H}_G(A) = \mathcal{D}\left(G(A)\right), \quad (f, x)_{\mathfrak{H}_G(A)} = \left(G(A)f, G(A)x\right),$$

побудованого по функції $G(\lambda)$, визначеній у (5.9)*, тоді і тільки тоді, коли $y(t) \in Y_\gamma$. Більш того, формула* (5.6) *установлює ізометричний ізоморфізм просторів Y_γ та $\mathfrak{H}_G(A)$*

Доведення. Сформульоване твердження випливає з рівностей

$$\|y\|^2_{Y_\gamma} = \int\limits_0^\infty \|y(t)\|^2 \gamma(t)\, dt = \int\limits_0^\infty \gamma(t) \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sinh \lambda t}{\lambda} \right)^2 d(E_\lambda g, g) \right) dt$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{\sinh \lambda t}{\lambda} \right)^2 \gamma(t)\, dt \right) d(E_\lambda g, g) = \int\limits_0^\infty G^2(\lambda)\, d(E_\lambda g, g) = \|g\|^2_{\mathfrak{H}_G(A)}.$$

Зокрема, при

$$\gamma(t) = \gamma_\mu(t) = e^{-2\mu t^p}, \quad p > 1,\ \mu > 0,$$

для

$$G_\mu(\lambda) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sinh \lambda t}{\lambda}\right)^2 \gamma_\mu(t)\, dt$$

виконуються оцінки

$$c_{\varepsilon,1} \exp\left(k_1 \lambda^{p/2(p-1)}\left(\mu^{1/(1-p)} - \varepsilon\right)\right) \le$$

$$\le G_\mu(\lambda) \le c_{\varepsilon,2} \exp\left(k_2 \lambda^{p/2(p-1)}\left(\mu^{1/(1-p)} + \varepsilon\right)\right)$$

($c_{\varepsilon,i} > 0$, $k_i > 0$ – сталі, $\varepsilon > 0$ як завгодно мале), за допомогою яких знаходяться умови на ріст $y(t)$ при $t \to \infty$, за яких вектор g належить до одного з класів $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ або $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta < 1$. А саме, має місцу таке твердження.

Наслідок 5.1 *Для того, щоб розв'язок* $y(t)$ *задачі* (5.1), (5.5) *допускав зображення* (5.6) *з* $g \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ $\left(\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)\right)$ *з* $\beta < 1$, *необхідно і достатньо, щоб існували* $c > 0$ *та* $\mu > 0$ *(для* $\mu > 0$ $\exists c > 0$*) такі, що*

$$\|y(t)\| \le c \exp\left(\mu t^{1/(1-\beta)}\right),$$

(β *і* p *пов'язані між собою співвідношенням* $p = \dfrac{1}{1-\beta}$*).*

5.3 Випадок позитивного B у банаховому просторі

У цьому підрозділі нас буде цікавити питання єдиності розв'язку однорідної задачі Діріхле (5.5) для рівняння (5.1) з позитивним оператором B, а саме, які умови на поведінку на нескінченності розв'язку цієї задачі гарантують його єдиність. Відповідь дає така теорема.

Теорема 5.4 . *Нехай* B *- позитивний оператор у просторі* $\mathfrak{B}$ *з типом* $(\omega, M(\theta))$. *Якщо розв'язок* $y(t)$ *однорідної задачі Діріхле* (5.5) *для* *рівняння* (5.1) *задовольняє умову*

$$\exists a>0, \exists c_a>0 : \|y(t)\| \le c_a e^{at^\beta}, \ t \in (0,\infty), \tag{5.10}$$

де $\beta < \dfrac{\pi}{\pi+\omega}$, *то* $y(t)\equiv 0$.

Доведення. Припустимо, що для розв'язку $y(t)$ задачі Діріхле (5.1), (5.5) виконується умова (5.10). Оскільки

$$0\in\rho(A), \ A=-B^{1/2}, \text{ і } A^{-1}\mathfrak{B}_{(+)}(A)\subseteq \mathfrak{B}_{(+)}(A),$$

то

$$y(t)=\frac{\sinh(tA)}{A}x=\frac{\exp(tA)-\exp(-tA)}{2}A^{-1}x=\frac{\exp(tA)x_0-\exp(-tA)x_0}{2},$$

де $x_0=A^{-1}x\in\mathfrak{B}_{(+)}(A)$. Обмежена аналітичність півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$ зумовлює оцінку (5.10) (можливо, з іншою сталою c_a) і для вектор-функції $z(t)=\exp(-tA)x_0$. Зафіксуємо довільне $t_0>0$. Тоді з групової властивості $\exp(tA)$ випливає рівність

$$z(t)=e^{(t_0-t)A}z(t_0), \quad t\in[0,t_0],$$

звідки

$$z^{(n)}(t)=(-1)^nA^ne^{(t_0-t)A}z(t_0).$$

За теоремою 1.2

$$\|z^{(n)}(t)\|=\|A^ne^{(t_0-t)A}z(t_0)\|\le c^nn^n(t_0-t)^{-n}\|z(t_0)\|. \tag{5.11}$$

Покладаючи $t=0, \ t_0=n^{1/\beta}$, одержуємо

$$\|z^{(n)}(0)\|=\|A^nx_0\|\le c^nn^nc_ae^{an}n^{-n/\beta}\le c_ac^ne^{an}n^{(1-\frac{1}{\beta})n}.$$

Ця оцінка показує, що вектор-функція

$$h(z)=(I-zA)^{-1}x_0=\sum_{k=0}^{\infty}z^kA^kx_0$$

є цілою. Порядок її росту

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}, \quad M(r) = \max_{|z|=r} \|h(z)\|,$$

обчислюється за формулою (див. [136])

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln(\sqrt[n]{\|A^n x_0\|})^{-1}} \le \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln((ce)^{-1} n^{\frac{1}{\beta}-1})} =$$

$$= \frac{\beta}{1-\beta} < \frac{\frac{\pi}{\pi+\omega}}{1-\frac{\pi}{\pi+\omega}} = \frac{\pi}{\omega}.$$

Оскільки A - генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи з кутом $\dfrac{\pi-\omega}{2}$, то його резольвента $R(z;A)$ є аналітичною в секторі $\Sigma_{\pi-\frac{\omega}{2}}$, і, якщо $0 < \varepsilon < 2\pi - \omega$, то

$$\|h(z)\| = \|z^{-1}(A - zI)^{-1}x_0\| \le M_\varepsilon, \text{ коли } z \in \Sigma_{\pi - \frac{\omega+\varepsilon}{2}}. \tag{5.12}$$

Але порядок росту ρ вектор-функції $h(z)$ менший за $\frac{\pi}{\omega}$. Тому ε в (5.12) можна вибрати так, щоб $\rho < \dfrac{\pi}{\omega+\varepsilon}$.

З нерівності (5.12) випливає, що ціла вектор-функція $h(z)$ з $\rho < \dfrac{\pi}{\omega+\varepsilon}$ є обмеженою на сторонах кута $|\arg(-z)| < \frac{\omega+\varepsilon}{2}$. За теоремою Фрагмена-Ліндельофа (див. [136]) $\|h(z)\| < M_\varepsilon$ всередині цього кута. Тоді нерівність (5.12) обумовлює обмеженість $h(z)$ у всій комплексній площині, і за теоремою Ліувілля

$$h(z) = (I - zA)^{-1}x_0 \equiv x_1 \in \mathcal{D}(A),$$

тобто $x_0 = x_1 - zAx_1$, що можливо лише при $Ax_1 = 0$. Враховуючи включення $0 \in \rho(A)$, дійдемо висновку, що $x_1 = 0$, звідки $x_0 = 0$, а отже, $y(t) \equiv 0$. Теорему доведено.

У випадку, коли B - нормальний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, теорема 3 допускає уточнення.

Теорема 5.5 . *Нехай B - позитивний нормальний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ з типом $(\omega, M(\theta))$. Якщо для розв'язку $y(t)$ однорідної задачі Діріхле 5.1, 5.5 виконується умова*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists c = c(\varepsilon) > 0 : \|y(t)\| \leq ce^{\varepsilon t},\ t \in (0, \infty), \tag{5.13}$$

то $y(t) \equiv 0$.

Доведення. Як і в теоремі 5.4,співвідношення (5.13) для розв'язку $y(t)$ еквівалентне умові

$$\forall\varepsilon > 0, \exists c = c(\varepsilon) > 0 : \|z(t)\| \leq ce^{\varepsilon t},\ t \in (0, \infty),$$

на доданок $z(t) = e^{-tA}x_0$ з виразу

$$y(t) = e^{tA}x_0 - e^{-tA}x_0, \quad x_0 \in \mathfrak{B}_{(+)}(A).$$

Користуючись спектральним розкладом функцій від нормального оператора, одержуємо

$$e^{-2\varepsilon t}\|z(t)\|^2 \leq \int\limits_{|\arg\lambda| < \frac{\pi-\omega}{2}} e^{2(\mathrm{Re}\lambda - \varepsilon)t}\, d(E_\lambda x_0, x_0) \leq c \tag{5.14}$$

(E_λ - розклад одиниці оператора $-A$, $(\cdot,\cdot)$ - скалярний добуток в $\mathfrak{H}$). При всіх $\lambda : \mathrm{Re}\lambda > \varepsilon$ підінтегральна функція прямує до нескінченності при $t \to \infty$. За теоремою Фату про граничний перехід під знаком інтеграла в нерівностях, $(E(\Delta)x_0, x_0) = 0$ для довільної борельової множини $\Delta \in \{\lambda : \mathrm{Re}\lambda > \varepsilon\}$. Беручи до уваги, що ε можна вибрати як завгодно малим, і рівність $\ker A = \{0\}$, отримаємо $(E(\Delta)x_0, x_0) \equiv 0$ для будь-якої борельової множини $\Delta \in \mathbb{R}^2$.

Теорему доведено.

Зауважимо, що теореми 5.4, 5.5 можна узагальнити на випадок слабо позитивного B, але тепер з відповідних оцінок випливатиме, що $y(t) = tx$, де $x \in \ker B$.

Наступна теорема підтверджує точність у певному сенсі оцінок (5.10) та (5.13).

Теорема 5.6 *Нехай B - позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, а $y(t)$ - розв'язок однорідної задачі Діріхле для рівняння* (5.1). *Тоді при $\alpha \geq 1$ справджуються співвідношення еквівалентності*

$$y'(0) \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) \Leftrightarrow \exists a > 0, \exists c = c(a) > 0 : \|y(t)\| \leq ce^{at^{\alpha}},\ t \in [0, \infty),$$

та

$$y'(0) \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A) \Leftrightarrow \forall a > 0, \exists c = c(a) > 0 : \|y(t)\| \leq ce^{at^{\alpha}},\ t \in [0, \infty),$$

де α і β пов'язані між собою рівністю $\beta = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha}$.

Доведення. Припустимо,що

$$\forall a > 0, \exists c = c(a) > 0 : \|y(t)\| \leq ce^{at^{\alpha}},\ t \in [0, \infty).$$

Як і в доведенні теореми 5.4, робимо висновок, що для довільного $a > 0$ існує стала $\widetilde{c}_a > 0$ така, що вектор-функція

$$z(t) = \exp(-tA)x_0, \quad x_0 = A^{-1}y'(0) \in \mathfrak{B}_{(+)}(A),$$

задовольняє нерівність

$$\|z(t)\| \leq \widetilde{c}_a e^{at^{\alpha}},\ t > 0. \tag{5.15}$$

Звідси отримуємо оцінку

$$\|A^n x_0\| \leq c^n n^n t_0^{-n} \|z(t_0)\|$$

з деякою сталою $c > 0$. Покладаючи в (5.11) $t_0 = \left(\frac{n}{a}\right)^{1/\alpha}$, приходимо до нерівності

$$\|A^n x_0\| \leq \widetilde{c}_a c^n (a^{1/\alpha} e)^n n^{n\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Оскільки a довільне, то $ca^{1/\alpha}e$ також можна вибрати яким завгодно, а тому $x_0 \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta = \dfrac{\alpha-1}{\alpha}$ і, отже, $y'(0) = Ax_0 \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$.

Навпаки, нехай $y'(0) \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ $(0 \leq \beta < 1)$. Тоді

$$\forall a > 0 \ \exists c_a > 0 : \|A^n y'(0)\| \leq c_a a^n n^{n\beta},$$

звідки

$$\forall t > 0 : \|\exp(-tA)y'(0)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left\|A^k y'(0)\right\| \leq c_a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a^{k\beta}. \qquad (5.16)$$

Розглянемо цілу функцію

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} a^n n^{n\beta}$$

порядку

$$\rho = \rho(\varphi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln(n!^{1/n}/an^{\beta})} = \frac{1}{1-\beta} = \alpha.$$

Її тип

$$\sigma = \sigma(\varphi) = \overline{\lim_{n\to\infty}} (n^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt[n]{a^n n^{n\beta}}) = a.$$

З нерівності (5.16) випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c_\varepsilon > 0 : \|\exp(-tA)y'(0)\| \leq c_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)t^\alpha}.$$

Оскільки

$$y(t) = \frac{\exp(tA) - \exp(-tA)}{2} A^{-1} y'(0)$$

і при $t > 0$, $\left\|\exp(tA)A^{-1}y'(0)\right\| \leq c$, то

$$\|y(t)\| \leq \widetilde{c}_\varepsilon e^{(a+\varepsilon)t^\alpha}.$$

Аналогічно доводиться перше твердження теореми.

Теорему доведено.

З теореми 5.6 випливає, що в теоремі 4.5 не можна відмовитись від того, що ε є довільним.

5.4 Неоднорідна задача Діріхле

Неоднорідна задача Діріхле для рівняння (5.1) полягає у відшуканні двічі неперервно диференційовної в $(0,\infty)$ функції $y(t) : (0,\infty) \mapsto \mathcal{D}(A)$, для якої

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y''(t) & = & By(t), \ t \in (0,\infty), \\ \lim\limits_{t\to+0} y'(t) & = & f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A) \end{array} \right. \tag{5.17}$$

(границя розуміється в топології простору $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$). Припустивши, що $y(t)$ – розв'язок (5.17), помічаємо, що вектор-функція $y(t)-e^{t\widehat{A}}f$ – розв'язок однорідної задачі

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y''(t) & = & By(t), \ t \in (0,\infty), \\ \lim\limits_{t\to+0} y'(t) & = & 0, \end{array} \right.$$

а тому

$$y(t) - e^{t\widehat{A}}f = \frac{\sinh(tA)}{A}g, \quad g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A).$$

Враховуючи обмеженість $e^{t\widehat{A}}f$, на основі зображення (5.2) та теорем 5.1-5.3 приходимо до такого висновку.

Теорема 5.7 *Вектор-функція $y(t)$ є розв'язком неоднорідної задачі Діріхле* (8.11) *тоді і тільки тоді, коли вона допускає зображення*

$$y(t) = e^{t\widehat{A}}f + \frac{\sinh(tA)}{A}g, \quad f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A), \ g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A).$$

Якщо $\ker A = \{0\}$, *то за умови* (5.8) *розглядувана задача однозначно розв'язна.*

В роботі [221] показано, що якщо оператор B є слабо позитивним, то існує єдиний двічі сильно диференційовний на $[0,\infty)$ розв'язок задачі

$$\begin{cases} y''(t) &= By(t),\ t \in [0,\infty), \\ y(0) &= y_0 \in \mathcal{D}(A), \quad \sup\limits_{t\geq 0} \|y(t)\| < \infty. \end{cases}$$

Цей результат уточнений в [14] таким чином: функція $y(t) \in C^2([0,\infty),\mathfrak{B})$ така, що $y''(t) = By(t)$ (оператор B – слабо позитивний), $\|y(t)\| = o(t)$ $(t \to \infty)$, $y(0) = 0$, тотожно дорівнює нулеві. Це уточнення допускає таке узагальнення.

Теорема 5.8 *Нехай B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$. Тоді вектор-функція $y(t) \in C^2([0,\infty),\mathfrak{B})$, що задовольняє умови*

$$y''(t) = By(t),\ y(0) = 0,\ \|y(t)\| = o\left(t^n\right)\ (t \to \infty)\ \textit{з деякимп} \in \mathbb{N},$$

має вигляд $y(t) = tf$, $f \in \ker A$. Зокрема, якщо $\ker A = \{0\}$, то $y(t) \equiv 0$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $a > 0$. Тоді (див. [222]) існують комутуючі між собою та A оператори $F(t,a)$, що виконують роль $\dfrac{\sinh(a-t)A}{\sinh(aA)}$, такі, що оператор-функція $F(t,a)$ є аналітичною на $(0,a]$ і сильно неперервною на $[0,a]$ по t, $F(0,a) = I$ і $F(a,a) = 0$; розв'язок $y(t)$ рівняння (5.1) на відрізку $[0,a]$, що задовольняє умову $y(0) = 0$, зображується у вигляді

$$y(t) = F(a-t,a)y(a),\ t \in [0,a]. \tag{5.18}$$

Більш того,

$$\left\|F^{(n)}(t,a)\right\| \leq \frac{b^{n+1}n^n(1+c)^{n+2}}{t^n}, \quad n = 0,1,\ldots,$$

де $b > 0$ не залежить від a та n. Внаслідок співвідношення $\|y(a)\| = o(a^n)$, маємо

$$\left\|y^{(n)}(t)\right\| \leq \frac{c\|y(a)\|a^n}{(a-t)^n a^n} \to 0 \text{ при } a \to \infty,\ t \in [0,a),$$

звідки робимо висновок, що $y^{(n)}(t) \equiv 0$.

Отже,

$$y(t) = f_0 + tf_1 + \cdots + t^{n-1}f_{n-1}, \quad f_i \in \mathcal{D}(B) \ (i = 0, \ldots, n-1).$$

Останнє випливає з того, що: $y(t)$ можна записати як $y(t) = g_0 + (t - t_0)g_1 + \cdots + (t - t_0)^{n-1}g_{n-1}$ ($t_0 > 0$; замкненість B і комутація B з $F(t, a)$ обумовлюють співвідношення $g_i = \dfrac{y^{(i)}(t_0)}{i!} \in \mathcal{D}(B)$; $f_k \in \mathcal{D}(B)$ як лінійна комбінація векторів g_i.

Оскільки $y(0) = 0$, то $f_0 = 0$, тобто

$$y(t) = tf_1 + t^2 f_2 + \cdots + t^{n-1}f_{n-1}.$$

Підставляючи цей вираз для $y(t)$ в рівняння (5.1), одержимо тотожність

$$2f_2 + 3 \cdot 2tf_3 + \cdots + (n-1)(n-2)t^{n-3}f_{n-1} = tBf_1 + \cdots + t^{n-1}Bf_{n-1},$$

з якої випливає, що $f_{2i} = 0$ і, більш того, $f_{n-2} = f_{n-1} = 0$. Припустимо для визначеності, що n парне. Тоді

$$Bf_{n-3} = 0, \ Bf_{n-5} = (n-3)(n-4)f_{n-3}, \ldots \ Bf_1 = 6f_3.$$

Таким чином, вектор f_{n-3} є власним для оператора B з нульовим власним значенням, а вектори $f_{n-5}, \ldots, f_3, f_1$ – кореневими, і

$$(B + \lambda I)^{-1} f_{n-(2k+1)} = \frac{f_{n-(2k+1)}}{\lambda} - \frac{(n-2k+1)(n-2k)f_{n-(2k-1)}}{\lambda^2},$$

$$k = 2, 3, \ldots \frac{n}{2}.$$

Внаслідок слабкої позитивності B ця рівність можлива лише при $f_{n-(2k-1)} = 0$, звідки $y(t) = tf$.

Теорему доведено.

5.5 Поведінка на нескінченності обмежених розв'язків неоднорідної задачі Діріхле

Розглянемо тепер розв'язки $y(t)$ рівняння (5.1) на $(0, \infty)$, для яких $y(t) \to f$ у просторі $\mathfrak{B}_{-}(A)$ і виконується умова (5.10). На основі представлення (5.2) і теореми 5.4 вони зображуються у вигляді

$$y(t) = e^{t\hat{A}}f, \ f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A),$$

де $\left\{e^{t\hat{A}}\right\}_{t\geq 0}$ - розширення півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ на $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$. Ставиться питання про більш точну оцінку поведінки таких розв'язків при $t \to \infty$.

Лема 5.1 *Нехай $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ - обмежена аналітична C_0-півгрупа в $\mathfrak{B}$, $\left\{e^{t\hat{A}}\right\}_{t\geq 0}$ – її розширення на $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$. Тоді:*

1) $\forall f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A) \ \exists c_f > 0 : \left\|e^{t\hat{A}}f\right\| \leq c_f$ *при достатньо великих* $t > 0$*;*

2) *для того щоб*

$$\forall f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A) : \left\|e^{t\hat{A}}f\right\| \to 0 \text{ при } t \to \infty,$$

достатньо, щоб таке прямування відбувалось лише для $f \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)$.

3) *для того щоб існувало число* $\delta > 0$ *таке, що*

$$\forall f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A) \ \exists c_f > 0 : \left\|e^{t\hat{A}}f\right\| \leq c_f e^{-\delta t},$$

достатньо, щоб ця нерівність виконувалась принаймні для $f \in \mathfrak{B}_{(+)}(A)$.

Доведення. Доведення випливає з того, що при $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A), \ t_0 > 0$, на основі властивостей півгрупи $\left\{e^{t\hat{A}}\right\}_{t\geq 0}$ і теореми 4.7, $e^{t_0\hat{A}}f \in \mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$ і

$$e^{t\hat{A}}f = e^{(t-t_0)A}e^{t_0\hat{A}}f \text{ при } t \geq t_0.$$

Наступна теорема дає більш детальну характеристику поведінки $y(t)$ на нескінченності.

Теорема 5.9 *Будь-який розв'язок неоднорідної задачі Діріхле* (5.17), *який при великих* $t > 0$ *задовольняє* (5.10), *є обмеженим на нескінченності. Кожен такий розв'язок прямує до нуля на нескінченності тоді і тільки тоді, коли* $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$. *Для того, щоб це спадання було експоненціальним, необхідно і достатньо, щоб* $0 \in \rho(A)$.

Доведення. Перше твердження випливає безпосередньо з леми 5.1.

Припустимо, що розв'язок $y(t) = e^{t\hat{A}}f,\ f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A)$ прямує до нуля при $t \to \infty$. Очевидно тоді, що $0 \notin \sigma_p(A)$. Тотожність

$$\forall f \in \mathcal{D}(A) \quad e^{tA}f - f = A\int\limits_0^t e^{\xi A} f\, d\xi$$

вказує на те, що $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathfrak{B}$, а отже, $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$.

Нехай, навпаки, $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$. Тоді з теореми 1.2 випливає, що

$$\forall f \in \mathcal{D}(A) \quad e^{tA}Af \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Беручи до уваги обмеженість $\|e^{tA}\|$ на $[0, \infty)$ і щільність $\mathcal{R}(A)$ в $\mathfrak{B}$, робимо висновок, що $\forall f \in \mathfrak{B},\ e^{tA}f \to 0$ при $t \to \infty$. За лемою 5.1, $e^{t\hat{A}}f \to 0,\ t \to \infty$, і для будь-якого $f \in \mathfrak{B}_-(A)$.

За умови, що $0 \in \rho(A)$, внаслідок обмеженої аналітичності $(e^{tA})_{t\geq 0}$, множина $\{z : Rez > -\delta$ з деяким $\delta > 0$ належить до $\rho(A)$ і, отже, $\omega(A) \leq -\delta$. Тому $e^{tA}f \to 0$ при $t \to \infty$ для довільного $f \in \mathfrak{B}$, а за лемою 1, і для будь-якого $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A)$.

Якщо розвязок $y(t)$ розглядуваної задачі спадає на нескінченності експоненціально, тобто

$$\exists \omega > 0 \quad \forall f \in \mathfrak{B} : \ \left\|e^{tA}f\right\| \leq c_f e^{-\omega t},$$

то $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z > -\omega\} \subset \rho(A)$.

Теорему доведено.

5.6 Метод степеневих рядів у наближеному розв'язанні задачі Діріхле

У цьому підрозділі показується, що у випадку, коли неоднорідна задача Діріхле (5.17), де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, однозначно розв'язна, для знаходження наближених розв'язків можна застосувати метод степеневих рядів. Дійсно, за теоремою 4.10, розв'язок $y(t)$ цієї задачі зображується у вигляді

$$y(t) = e^{t\hat{A}} f, \quad f = y(0) \in \mathfrak{B}_{(-)}(A),$$

де оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну півгрупу з кутом аналітичності $\theta = \dfrac{\pi - \omega}{2}$, ($\omega$ - тип оператора B).

Припустимо, що $f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\dfrac{\omega}{\pi} < \beta < 1$. Тоді $y(t)$ можна подати як

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k f, \ t \in [0, \infty).$$

За наближений розв'язок задачі (5.17) візьмемо

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k f, \ t \in [0, \infty).$$

Оскільки $f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, то

$$\forall \alpha > 0 \ \exists c = c(\alpha) : \|A^k f\| \le c\alpha^k k^{k\beta}.$$

Тому для $0 \le t \le b < \infty$ маємо

$$\|y(t) - y_n(t)\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|A^k f\| \le c_1 \sum_{n+1}^{\infty} t^k \alpha^k k!^{\beta - 1} =$$

$$= c_1 t^{n+1} \alpha^{n+1} (n+1)!^{\beta - 1} \sum_{k=n+1}^{\infty} t^{k-n-1} \alpha^{k-n-1} \left(\frac{k!}{(n+1)!} \right)^{\beta - 1} =$$

$$= c_1 t^{n+1}\alpha^{n+1}(n+1)!^{\beta-1}\sum_{i=0}^{\infty} t^i\alpha^i i^{\beta-1}\left(\frac{(i+n+1)!}{i!(n+1)!}\right)^{\beta-1} \le$$

$$\le c_1 t^{n+1}\alpha^{n+1}(n+1)!^{\beta-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i\alpha^i}{i!^{1-\beta}} = c(b,\alpha)(n+1)!^{\beta-1}.$$

Враховуючи, що $\alpha > 0$ довільне, виберемо його настільки малим, щоб $c(b,\alpha)$ було також достатньо малим. Таким чином, для довільного фіксованого $b > 0$

$$\sup_{t\in[0,b]}\|y_n(t) - y(t)\| \le c(b,\alpha)(n+1)!^{\beta-1} \tag{5.19}$$

з як завгодно малою константою $c(b,\alpha)$. Крім того, $y_n(0) = f$. Отже, якщо $f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, $0 \le \beta < 1$, то $y_n(t)$ - конструктивна апроксимація наближення розв'язку задачі (5.17) і чим менше β, тим менша похибка наближення.

Для відхилу $\|y_n''(t) - By_n(t)\|$ на проміжку $[0,b]$ одержуємо оцінку

$$\|y_n''(t) - By_n(t)\| = \left\|\sum_{k=2}^{n}\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}A^k f - \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}A^{k+2}f\right\| =$$

$$= \left\|\frac{t^{n-1}A^{n+1}f}{(n-1)!} + \frac{t^n A^{n+2}f}{n!}\right\| \le \widetilde{c}(b,\alpha)(n-1)!^{\beta-1},$$

у якій сталу $\widetilde{c}(b,\alpha)$ при фіксованому b можна зробити як завгодно малою.

Нехай тепер f - довільний елемент з $\mathfrak{B}$. За твердженням 1.2 $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{B}$ при $\beta > \dfrac{\omega}{\pi}$. Тому існує послідовність $f_m \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ така, що $f_m \to f$ в $\mathfrak{B}$ при $m \to \infty$. Внаслідок обмеженості півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$, послідовність $y_m(t) = e^{tA}f_m$ збігається рівномірно на $[0,\infty)$ до $e^{tA}f$. У свою чергу, $y_m(t)$ можна наблизити поліномами вигляду

$$\sum_{k=0}^{n_m}\frac{t^k}{k!}A^k f_m. \tag{5.20}$$

Як показує оцінка (5.19), порядок цієї апроксимації є $n_m^{\beta-1}$. Тоді поліноми (5.20) наближають роз'язок $y(t)$ в топології простору $\mathfrak{B}$ на $[0,b]$. Якщо ж

$f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A)$, то поліноми (5.20) здійснюють наближення $y(t)$ в топології простору $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$ на довільному компакті з $[0, \infty)$ і по нормі простору $\mathfrak{B}$ на довільному компакті з $(0, \infty)$.

5.7 Задача Неймана

Розглянемо тепер однорідну задачу Неймана

$$\begin{cases} y''(t) = By(t), \ t \in (0, \infty), \\ \lim\limits_{t \to +0} y'(t) = 0 \end{cases} \tag{5.21}$$

(B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, границя береться у просторі $\mathfrak{B}_{\{-\}}(A)$).

Між розв'язками задачі (5.21) і однорідної задачі Діріхле для рівняння (5.1) існує взаємно однозначна відповідність (див. [40]), а саме: якщо $z(t)$ – розв'язок однорідної задачі Діріхле для (5.1), то $y(t) = z'(t)$ – розв'язок однорідної задачі Неймана; навпаки, якщо $y(t)$ – розв'язок однорідної задачі Неймана, то $z(t) = \int\limits_0^t y(\xi)\, d\xi$ – розв'язок однорідної задачі Діріхле. Звідси випливає, що вектор-функція $y(t)$ є розв'язком задачі (5.21) тоді і тільки тоді, коли вона може бути зображена у вигляді

$$y(t) = \cosh tAx, \quad x \in \mathfrak{B}_{(+)}(A).$$

Користуючись цим зображенням, для розв'язків однорідної задачі Неймана одержуємо аналоги теорем 5.1 - 5.3.

5.8 Про розв'язність $(n+1)$-раз інтегровної задачі Коші в класі аналітичних вектор-функцій

Нехай A – замкнений оператор в $\mathfrak{B}$ і $0 < \tau < \infty$. Під $C_0[\tau]$-задачею Коші розумітимемо задачу відшукання вектор-функції $u(t) \in C([0, \tau], \mathcal{D}(A)) \cap$

$C^1([0,\tau],\mathfrak{B})$, що задовольняє систему

$$\begin{cases} u'(t) &= Au(t), \quad t\in[0,\tau], \\ y(0) &= x, \quad x\in\mathfrak{B}. \end{cases} \qquad C_0[\tau]$$

Подібно до [225], для $n\in\mathbb{N}_0$ $C_{n+1}[\tau]$-задача Коші полягає у знаходженні вектор-функції $v(t)\in C([0,\tau],\mathcal{D}(A))\cap C^1([0,\tau],\mathfrak{B})$, для якої

$$\begin{cases} v'(t) &= Av(t)+\dfrac{t^n}{n!}x, \quad t\in[0,\tau], \\ v(0) &= 0 \end{cases} \qquad C_{n+1}[\tau]$$

При цьому задача $C_n[\tau]$ вважається коректною, якщо для будь-якого $x\in\mathfrak{B}$ вона має розв'язок і цей розв'язок єдиний.

Неважко переконатися, що задача $C_1[\tau]$ коректна тоді і тільки тоді, коли A – генератор C_0-півгрупи [2].

Розглянемо функцію

$$\Phi_n(\lambda,t)=\frac{e^{\lambda t}-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(t\lambda)^k}{k!}}{\lambda^{n+1}}, \quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Ця функція має властивості:

1) при фіксованому λ $\Phi_n(\lambda,t)$ є цілою по t, а при фіксованому t – цілою по λ;

2) $\dfrac{d\Phi_n(\lambda,t)}{dt}=\Phi_{n-1}(\lambda,t)$,

$$\frac{d^k\Phi_n(\lambda,t)}{dt^k}=\lambda^k\Phi_n(\lambda,t)+\frac{\lambda^{k-1}t^n}{n!}+\cdots+\frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!}, \quad k=0,1,\dots n;$$

3) $\dfrac{d^k\Phi_n(\lambda,0)}{dt^k}=0, \quad k=0,1,\dots n, \qquad \dfrac{d^{n+1}\Phi_n(\lambda,0)}{dt^{n+1}}=1.$

У випадку, коли A – нормальний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$, виходячи з перелічених властивостей і операційного числення для A, одержуємо наступне твердження.

Лема 5.2 *Нехай A – нормальний оператор в $\mathfrak{H}$ і $x \in \mathfrak{H}$. Для того, щоб вектор-функція $v(t)$ була розв'язком $C_{n+1}[\tau]$-задачі Коші, необхідно й достатньо, щоб*

$$\int\limits_{\sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda, \tau)|^2 \, d(E_\lambda x, x) < \infty,$$

при цьому розв'язок можна подати у вигляді

$$v(t) = \int\limits_{\sigma(A)} \Phi_n(\lambda, t) \, dE_\lambda x.$$

Тут E_λ – розклад одиниці оператора A, а $\sigma(A)$ – його спектр.

Коректність задачі $C_{n+1}[\tau]$ у випадку нормального A рівносильна визначеності замкненого оператора $\Phi_{n-1}(A, t),\ t \in [0, \tau]$, на всьому просторі $\mathfrak{H}$, а отже, за теоремою Банаха про замкнений графік, його обмеженості, тобто співвідношенню

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda, t)| < \infty, \quad t \in [0, \tau].$$

З останньої нерівності і леми 5.2 випливає

Теорема 5.10 *Нехай A – нормальний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Задача $C_{n+1}[\tau]$ є коректною тоді і тільки тоді, коли існують числа $R > 0,\ c > 0$ такі, що*

$$\sigma(A) \subseteq K_R \cup E_c(n, \tau),$$

де

$$K_R = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq R\}, \quad E_c(n, \tau) = \{\lambda = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : \sigma > 0, |\tau| \geq c e^{(\sigma\tau)/n}\}.$$

Як наслідок, з теореми 5.10 одержуємо

Наслідок 5.2 *Якщо A – самоспряжений оператор в $\mathfrak{H}$ і задача $C_{n+1}[\tau]$ коректна для деяких n і τ, то оператор A напівобмежений зверху. Останнє ж еквівалентне коректності задачі $C_1[\tau]$ для довільного $\tau > 0$.*

З теореми 5.10 також випливає, що у випадку нормального A коректність задачі $C_{n+1}[\tau]$ спричиняє коректність $C_{m+1}[\tau']$ за умови, що $m \geq n$ і $\tau' = \frac{m}{n}\tau$.

Розглянемо тепер загальноу ситуацію, коли A – довільний замкнений оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$. Нагадаємо, що вектор $x \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^k)$ має скінченний порядок, якщо існує число $\gamma \in \mathbb{R}$ таке, що для достатньо великих $k \in \mathbb{N}$

$$\|A^k x\| \leq k^{k\gamma}.$$

Точна нижня межа $\beta = \beta(x)$ таких γ – це порядок вектора x. Під типом вектора x порядку β розуміється величина

$$\alpha = \alpha(x) = \inf\{\delta > 0 : \|A^k x\| \leq \delta^k k^{k\beta}, \quad k > k_0(\delta)\}.$$

Нас цікавить, які умови на вектор x слід накласти для того, щоб задача $C_{n+1}[\tau]$ мала аналітичний в околі нуля розв'язок, і коли цей розв'язок можна продовжити до цілої вектор-функції скінченного порядку ρ і скінченного типу σ. Нагадаємо, що ціла вектор-функція $y(z)$ має порядок ρ, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує стала c_ε така, що

$$|y(z)| \leq c_\varepsilon e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}.$$

Той факт, що ця функція має тип σ означає, що

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists c_\varepsilon : |y(z)| \leq c_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho}.$$

Теорема 5.11 *Задача $C_{n+1}[\tau]$ має аналітичний в околі нуля розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\beta(x) \leq 1$. Для того, щоб розв'язок допускав* *продовження до цілої вектор-функції, необхідно й достатньо, щоб виконувалась одна з наступних умов:*

1) $\beta(x) < 1$,

2) $\beta(x) = 1,\ \alpha(x) = 0$.

Цілий розв'язок має порядок ρ і тип σ тоді і тільки тоді, коли вектор x має порядок β і тип α, пов'язані з ρ і σ співвідношеннями

$$\rho = \frac{1}{1-\beta}, \quad \sigma = \frac{(\alpha e)^\rho}{\rho e}.$$

У випадку, коли $\beta(x) \leq 1$, розв'язок $v(t)$ зображується у вигляді

$$v(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} t^k A^{k-(n+1)} x.$$

Припустимо, що задача $C_{n+1}[\tau]$ коректна, і позначимо через $\mathcal{S}^n(A)$ множину її розв'язків, коли x перебігає весь простір $\mathfrak{B}$, а через $\mathcal{S}^n_\rho(A)$ – підмножину з $\mathcal{S}^n(A)$ всіх розв'язків, які допускають продовження до цілих вектор-функцій порядку $\rho < \infty$. Будемо говорити, що $\mathcal{S}^n_\rho(A)$ щільна в $\mathcal{S}^n(A)$, якщо для кожного $v \in \mathcal{S}^n(A)$ існує послідлвність $v_n \in \mathcal{S}^n_\rho(A)$ така, що $\max\limits_{t\in[0,\tau]} \|v(t) - v_n(t)\| \to 0$, при $n \to \infty$.

Теорема 5.12 *Припустимо, що A – нормальний оператор в $\mathfrak{H}$. Якщо задача $C_{n+1}[\tau]$ коректна, то множина $\mathcal{S}^n_\rho(A)$ є щільною в $\mathcal{S}^n(A)$.*

Зауважимо, що теореми 5.11 і 5.12 у випадку $C_0[\tau]$-задачі Коші містяться в [122].

Покладемо

$$S_\theta = \{z \in \ : |\arg z| \leq \theta\}, \quad P_{\theta,R} = S_\theta \cup K_R.$$

Теорема 5.13 *Нехай A – замкнений оператор в банаховому просторі $\mathfrak{B}$ і $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$. Припустимо також, що в області $\mathbb{C} \setminus P_{\theta,R}$ з $R > 0, 0 \leq$*

$\theta < \frac{\pi}{2}$ існує резольвента $R(z;A)$ оператора A і

$$\|R(z;A))\| \le M(1+|z|)^N,$$

де $0 < M = \text{const},\ -1 \le N = \text{const}$. Тоді задача $C_{n+1}[\tau]$ є коректною для довільних $n \in \mathbb{N}_0$ і $\tau > 0$, і при $\rho > 1/(1-\frac{2\theta}{\pi})$ множина $\mathcal{C}^n_\rho(A)$ є щільною в $\mathcal{S}^n(A)$.

Наслідок 5.3 *Якщо A – генератор аналітичної C_0-півгрупи з кутом аналітичності θ, то множина $\mathcal{C}^n_\rho(A)$ з $\rho > 1/(1-\frac{2\theta}{\pi})$ є щільною в $\mathcal{S}^n(A)$*

Висновки до розділу 5

У цьому розділі досліджено задачі Діріхле та Неймана для рівняння $y''(t) - By(t) = 0$ на півосі $(0,\infty)$, де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, а також $(n+1)$-раз інтегровану задачу Коші для рівняння $y'(t) = Ay(t), t \in [0,\tau]$, із замкненим в $\mathfrak{B}$ оператором A. Показано, що неоднорідна задача Діріхле розв'язується однозначно з точністю до розв'язків однорідної. У випадку гільбертового простору і самоспряженого оператора B в ньому знайдено умову, за якої $y(t) = tg,\ g \in \ker B$, і з'ясовано залежність вектора g від поведінки $y(t)$ при $t \to \infty$.

Частина розділу присвячена зображенню розв'язків неоднорідної задачі Діріхле і відшуканню умов її однозначної розв'язності. У випадку слабо позитивного B узагальнено результат А. Князюка [14, 15] і Дж. Неервена [16] щодо єдиності її розв'язку у класі двічі неперервно диференційовних на $[0,\infty)$ вектор-функцій, які задовольняють умову $\|y(t)\| = o(t)\ \ (t \to \infty),\ y(0) = 0$, на випадок, коли $y(0) = 0$ і $\|y(t)\| = o(t^n)$ з деяким $n \in \mathbb{N}$.

Крім того, доведено можливість застосування методу степеневих рядів для наближення розв'язку однозначно розв'язної неоднорідної задачі Діріхле. Що стосується задачі Неймана, то знайдено умови, необхідні і достатні для існування та єдиності її розв'язку, виведено формулу для його зображення.

6 Про поведінку на нескінченності стійких розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі

Під стійким розв'язком рівняння

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - By(t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \tag{5.1}$$

де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, розумітимемо його розв'язок, обмежений в околі нескінченно віддаленої точки.

Рівняння (5.1) називається:

1) *рівномірно стійким*, якщо

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \tag{6.1}$$

для будь-якого його стійкого розв'язку $y(t)$;

2) *рівномірно експоненціально стійким*, якщо

$$\exists \omega > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{\omega t} y(t) = 0 \tag{6.2}$$

для всіх стійких розв'язків цього рівняння .

If $\dim \mathfrak{B} < \infty$, обидва означення є еквівалентними. Але це, взагалі кажучи, не так, якщо $\dim \mathfrak{B} = \infty$.

Оскільки жодних умов на поведінку стійкого розв'язку в околі точки 0 не накладається, такий розв'язок може мати особливість при наближенні до нуля, тобто можливий випадок, коли $\lim\limits_{t\to 0} y(t) = \infty$; більш того, порядок росту $y(t)$ при $t \to 0$ може бути яким завгодно.

У випадку, коли неоднорідна задача Діріхле для рівняння (5.1) поставлена коректно (відповідна однорідна задача однозначно розв'язна), за теоремою 5.5 достатньо в означеннях 1), 2) поставити вимогу, щоб рівності (6.1),(6.2) виконувались принаймні для всіх аналітичних стійких розв'язків. Точніше, має місце таке твердження.

Теорема 6.1 *Нехай B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$ і $A = -B^{1/2}$. Рівняння* (5.1) *є рівномірно* (*рівномірно експоненціально*) *стійким тоді і тільки тоді, коли рівність* (6.1) *(рівність* (6.2)*) виконується для усіх його аналітичних на* $[0, \infty)$ *стійких розв'язків.*

Доведення. Як вже зазначалось вище, за умов теореми на оператор B, множина усіх неперервних в нулі стійких розв'язків $y(t)$ рівняння (5.1) описується формулою

$$y(t) = e^{t\hat{A}} f + \frac{\sinh(tA)}{A} g, \quad f = y_0 = y(0) \in \mathfrak{B},\ g \in \mathfrak{B}_{(+)}(A), \qquad (6.3)$$

Якщо півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ є аналітичною і y_0 перебігає множину $\mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$ всіх аналітичних векторів оператора A, то вираз (6.3) дає усі аналітичні на $[0, \infty)$ стійкі розв'язки рівняння (5.1).

Нехай $y(t)$ – довільний стійкий розв'язок рівняння (5.1) на $(0, \infty)$. Тоді, беручи до уваги властивості півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ (теорема 4.5), твердження 4.4 і наслідок 4.6, робимо висновок, що

$$\exists y_0 \in \mathfrak{B}_{\{+\}}(A) : y(t) = e^{t_0\hat{A}} y_0 = e^{(t-t_0)A} e^{t\hat{A}} y_0,\ t > t_0. \qquad (6.4)$$

Оскільки $e^{t\hat{A}} y_0 \in \mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$ і для довільного фіксованого $t_0 > 0,\ t - t_0 \to \infty$ при $t \to \infty$, то з рівностей (6.4) випливає, що якщо співвідношення (6.1) виконується для всіх неперервних в нулі стійких розв'язків рівняння (5.1), то $y(t) \to 0$ для будь-якого стійкого розв'язку на $(0, \infty)$ цього рівняння. Так само рівність

$$e^{\omega t} \|y(t)\| = e^{\omega t_0} e^{\omega(t-t_0)} \|e^{(t-t_0)A} e^{t_0\hat{A}} y_0\| \qquad (6.5)$$

показує, що якщо співвідношення (6.2) виконується для довільного неперервного в нулі стійкого розв'язку, то воно є вірним і для будь-якого стійкого розв'язку на $(0, \infty)$.

Припустимо тепер, що півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ є аналітичною. За твердженням 2 з [226],

$$\forall t > 0, \forall y_0 \in \mathfrak{B}_{(-)}(A) : e^{tA} y_0 \in \mathfrak{B}_{\{+\}}(A).$$

З (6.4) і (6.5) випливає, що виконання умов (6.1),(6.2) для всіх аналітичних на $[0, \infty)$ стійких розв'язків рівняння (5.1) зумовлює їх правильність для будь-якого стійкого розв'язку на $(0, \infty)$.

Теорему доведено.

Згідно з [16], C_0- півгрупа $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ називається:

(i) рівномірно стійкою, якщо

$$\forall x \in \mathfrak{B} : \lim_{t\to\infty} \|U(t)x\| = 0;$$

(ii) рівномірно експоненціально стійкою, якщо існують сталі $M > 0$ та $\omega > 0$ такі, що

$$\forall t \geq 0 : \|U(t)\| \leq M e^{-\omega t}.$$

Оскільки усі неперервні в нулі стійкі розв'язки $y(t)$ рівняння (5.1) описуються формулою (6.3), де y_0 перебігає весь простір $\mathfrak{B}$, то теорему 6.1 у випадку рівняння другого порядку можна переформулювати в термінах стійкості C_0-півгруп. А саме, має місце таке твердження.

Наслідок 6.1 *Нехай B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$. Для того щоб рівняння* (5.1) *було рівномірно (рівномірно експоненціально) стійким, достатньо, щоб півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ була рівномірно (рівномірно експоненціально) стійкою. Якщо півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є аналітичною, то у* *співвідношенні*

$$\forall y_0 = y(0) \in \mathfrak{B} : e^{tA} y_0 \to 0 \text{ при } t \to 0 \quad (e^{\omega t} e^{tA} y_0 \to 0 \text{ при } t \to 0) \tag{6.6}$$

достатньо обмежитися лише векторами $y_0 \in \mathfrak{B}_{\{+\}}(A)$.

Варто зазначити, що чимало праць різних математиків було присвячено установленню критеріїв рівномірної та рівномірно експоненціальної стійкості для C_0-півгруп (див., наприклад, [227-237]). Наведемо декілька нещодавно отриманих нами результатів у цьому напрямі.

Теорема 6.2 *Нехай B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$ і $A = -B^{1/2}$. Для того, щоб C_0-semigroup $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ була рівномірно стійкою, необхідно, щоб $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$. Якщо півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ є рівномірно експоненціально стійкою, то $0 \in \rho(A)$. Для того, щоб $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ була рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійкою, небхідно, щоб $0 \in \sigma_c(A)$. У випадку, коли $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною, наведені вище умови є також достатніми.*

Доведення. Припустимо, що півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є рівномірно стійкою і $0 \in \sigma_p(A)$. Тоді існує вектор $x \in \mathcal{D}(A),\ x \neq 0$, такий, що

$$\lim_{t\to\infty} e^{tA} x = x \neq 0,$$

а це суперечить рівномірній стійкості $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$.

Нехай тепер $0 \in \sigma_r(A)$. Тоді $\overline{\mathcal{R}(A)} \neq \mathfrak{B}$, звідки випливає, що

$$\exists f \in \mathfrak{B}^* \ (f \neq 0),\ \forall x \in \mathcal{D}(A) : f(Ax) = 0 \tag{6.7}$$

($\mathfrak{B}^*$ – спряжений до $\mathfrak{B}$ простір).

Розглянемо функцію

$$\varphi_x(t) = f(e^{tA} x).$$

Оскільки $e^{tA}\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ при $t > 0$, функція $\varphi_x(t)$ є неперервно диференційовною на $[0, \infty)$ і

$$\varphi_x'(t) = -f(Ae^{tA}x) \equiv 0.$$

Отже, $\varphi_x(t) = c_x = const$ на $[0, \infty)$. Враховуючи, що

$$\varphi_x(0) = f(x) = \lim_{t \to 0} f(e^{tA}x) = 0,$$

маємо $f(x) = 0$ для довільного $x \in \mathcal{D}(A)$. Беручи до уваги щільність $\mathcal{D}(A)$ в $\mathfrak{B}$ і неперервність f, прийдемо до висновку, що $f = 0$, а це суперечить (6.7). Таким чином, рівномірна стійкість $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ обумовлює включення $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$.

Далі, припустимо, що півгрупа $\left\{e^{At}\right\}_{t\geq 0}$ є рівномірно експоненціально стійкою. Тоді

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\lambda > -\omega\} \subset \rho(A).$$

. Оскільки $\omega > 0$, то $0 \in \rho(A)$. Звідси випливає, що якщо $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійка, то $0 \in \sigma_c(A)$.

Нехай тепер C_0-півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною і $0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A)$, а отже, $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathfrak{B}$. Тоді

$$\forall g \in \mathcal{R}(A)\ \exists x \in \mathcal{D}(A) : g = Ax.$$

Обмеженість і аналітичність $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ спричиняють співвідношення

$$\left\|e^{tA}g\right\| = \left\|e^{tA}Ax\right\| \leq \frac{c_x\|x\|}{t} \to 0 \text{ при } t \to \infty \ (0 < c_x = const).$$

Беручи до уваги щільність $\mathcal{R}(A)$ в $\mathfrak{B}$, на основі принципу рівномірної обмеженості (теорема Банаха-Штейнгауза) переконуємось, що $e^{tA}g \to 0$ при $t \to \infty$ для довільного $g \in \mathfrak{B}$, а це означає, що півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є рівномірно стійкою.

Якщо $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною і $0 \in \rho(A)$, то спектр $\sigma(A)$ оператора A розміщений у секторі

$$S(\varphi, \delta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda + \delta)| < \pi - \varphi\}$$

з деякими $\delta > 0$ і $\varphi \in (0, \pi]$. Тому $S(A) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(A)} \mathrm{Re}\lambda < 0$. Оскільки, в силу аналітичності $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$, $S(A) = -\omega(A)$, приходимо до висновку, що ця півгрупа є рівномірно експоненціально стійкою. Звідси також випливає, що якщо обмежена аналітична C_0-півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійкою, то $0 \in \sigma_c(A)$.

Теорему доведено.

Теорема 6.3 *Нехай $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ – C_0-півгрупа в $\mathfrak{B}$ і $\gamma(t) > 0$ – неперервна на $[0, \infty)$ функція така, що $\gamma(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Якщо*

$$\forall x \in \mathfrak{B}, \exists c = c(x) > 0 : \left\|e^{tA}x\right\| \leq c\gamma(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{6.8}$$

то $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є рівномірно експоненціально стійкою. У випадку, коли півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ диференційовна (аналітична) на $(0, \infty)$, для рівномірної експоненціальної стійкості такої півгрупи достатньо, щоб нерівність (6.8) виконувалась принаймні для $x \in C^\infty(A)$ $(x \in \mathfrak{A}(A))$.

Доведення. Позначимо через $C_\gamma([0, \infty), \mathfrak{B})$ банахів простір усіх неперервних на $[0, \infty)$ вектор-функцій $y(t)$ із властивістю

$$\|y\|_\gamma = \sup_{t\geq 0} \frac{\|y(t)\|}{\gamma(t)} < \infty.$$

Оператор

$$C : \mathfrak{B} \mapsto C_\gamma([0, \infty), \mathfrak{B}), \quad Cx = e^{tA}x,$$

допускає замикання. Справді, припустимо, що $x_n \to 0$ в $\mathfrak{B}$ і $e^{tA}x_n \to y(t)$ в $C_\gamma([0, \infty), \mathfrak{B})$.Оскільки $e^{tA}x_n \to 0$ рівномірно на кожному компакті з

$[0, \infty)$, то $y(t) \equiv 0$. Беручи до уваги, що оператор C визначений на всьому $\mathfrak{B}$, робимо висновок за теоремою про замкнений графік (див., наприклад, [238, 239]), що C є неперервним. Отже,

$$\exists d > 0 : \left\| e^{tA} x \right\|_{\gamma} \leq d \|x\|,$$

звідки

$$\left\| e^{tA} x \right\| \leq d\gamma(t).$$

Враховуючи (див.[16]), що тип (рівномірна границя росту)

$$\omega_0 = \inf \left\{ \omega \in \mathbb{R} : \exists M > 0 \text{ таке, що } \left\| e^{tA} \right\| \leq M e^{\omega t}, \ \forall t \geq 0 \right\} =$$

$$= \inf_{t>0} \frac{\ln \left\| e^{tA} \right\|}{t} > 0,$$

одержуємо

$$\left\| e^{tA} \right\| \leq c_{\omega_0 - \varepsilon} e^{-(\omega_0 - \varepsilon)t}, \quad 0 < c_{\omega_0 - \varepsilon} = const, \quad 0 < \varepsilon < \omega_0,$$

а це означає, що півгрупа $\left\{ e^{tA} \right\}_{t \geq 0}$, а отже й рівняння (5.1), рівномірно експоненціально стійкі.

Припустимо тепер, що півгрупа $\left\{ e^{tA} \right\}_{t \geq 0}$ є диференційовною і нерівність (6.8) виконується для $x \in C^{\infty}(A)$. Зафіксуємо $t_0 > 0$. Згідно з [226]

$$\forall x \in \mathfrak{B} : g = e^{t_0 A} x \in C^{\infty}(A).$$

Звідси одержуємо

$$\forall t \geq t_0 : \left\| e^{tA} x \right\| = \left\| e^{(t - t_0)A} e^{t_0 A} x \right\| \leq c_g \gamma(t - t_0).$$

Покладемо

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(0) & \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ \gamma(t - t_0) & \text{при} \quad t > t_0 \end{cases}$$

та

$$\widetilde{c_x} = \max\left\{\frac{1}{\gamma(0)}\max_{t\in[0,t_0]}\left\|e^{-At}x\right\|, c_g\right\}.$$

Тоді

$$\forall x \in \mathfrak{B}, \forall t \in [0,\infty) : \left\|e^{tA}x\right\| \le \widetilde{c_x}\gamma_1(t),$$

а отже, півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\ge0}$ є рівномірно експоненціально стійкою.

Для випадку аналітичної півгрупи, схема доведення така сама. Теорему доведено

Теорема 6.3 показує, що за умови рівномірної, але не рівномірної експоненціальної стійкості півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge0}$, її орбіти $e^{tA}x$ можуть прямувати до нуля при наближенні до нескінченності як завгодно повільно. Проте для такої півгрупи експоненціальне спадання для всіх її орбіт не можливе. Дійсно, припустимо, що

$$\forall x \in \mathfrak{B}\ \exists c = c(x) > 0\ \exists \omega_x > 0 : \left\|e^{tA}x\right\| \le ce^{-\omega_x t}.$$

Тоді

$$\forall x \in \mathfrak{B} : \left\|e^{tA}x\right\| \le c_1\frac{1}{1+t}, \quad 0 < c_1 = c\sup_{t\in[0,\infty)}\left\{(1+t)e^{-\omega_x t}\right\}.$$

Покладаючи в теоремі 6.3 $\gamma(t) = \dfrac{1}{1+t}$, приходимо до висновку, що півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge0}$ є рівномірно експоненціально стійкою всупереч зробленому вище припущенню.

Наступна теорема представляє ще один критерій рівномірної експоненціальної стійкості півгрупи.

Теорема 6.4 *Нехай* $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge0}$ *–* C_0*-півгрупа в* $\mathfrak{B}$*. Якщо*

$$\forall x \in \mathfrak{B},\ \exists p_x > 0 : \int\limits_0^\infty \left\|e^{tA}x\right\|^{p_x}\, dt < \infty, \tag{6.9}$$

то $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ *є рівномірно експоненціально стійкою. У випадку диференційовності (аналітичності) цієї півгрупи достатньо, щоб умова* (6.9) *виконувалась принаймні для нескінченно диференційовних (аналітичних) векторів оператора* A.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою: $\left\|e^{tA}\right\| \leq c = const,\ t \in (0,\infty)$. Як вже зазначалось вище, можна припустити без обмеження загальності, що $c = 1$, ввівши в $\mathfrak{B}$ еквівалентну $\|\cdot\|$ норму

$$\|x\|_1 = \sup_{t\in[0,\infty)} \left\|e^{tA}x\right\|,$$

відносно якої $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є півгрупою стисків. Тоді для жодного $x \in \mathfrak{B}$ функція $\left\|e^{tA}x\right\|$ не зростає і, в силу (6.9), маємо

$$\forall x \in \mathfrak{B}\ \exists c_x > 0 : \left\|e^{tA}x\right\| \leq c_x(1+t)^{-\frac{1}{p_x}},$$

звідки

$$\forall x \in \mathfrak{B},\ \exists \widetilde{c_x} > 0 : \left\|e^{tA}x\right\| \leq \widetilde{c_x}\frac{1}{\ln(2+t)},$$

де

$$\widetilde{c_x} = \sup_{t\in[0,\infty)} \frac{\ln(2+t)}{(1+t)^{\frac{1}{p_x}}}c_x.$$

За теоремою 6.3 півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є рівномірно експоненціально стійкою.

Нехай тепер $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ не є обмеженою на $[0,\infty)$. Оскільки її ріст при наближенні до нескінченності не вище за експоненціальний, то

$$\exists \omega > 0\ \exists c > 0 : \left\|e^{tA}\right\| \leq ce^{\omega t}.$$

Припустимо, що для деякого $x \in \mathfrak{B}$ співвідношення (6.9) виконується, але $\left\|e^{tA}x\right\|$ не прямує до 0 на нескінченності. Отже, існує послідовність $t_i \to \infty$ така, що

$$\left\|e^{t_iA}x\right\| > \delta \text{ з деяким } \delta > 0.$$

Виберемо цю послідовність так, щоб $t_{i+1} - t_i > \omega^{-1}$. Тоді для $s \in \triangle_i = [t_i - \omega^{-1}, t_i]$, одержуємо

$$\delta \leq \left\| e^{t_i A} x \right\| \leq \left\| e^{(t_i - s)A} \right\| \left\| e^{sA} x \right\| \leq c e^{\omega \omega^{-1}} \left\| e^{sA} x \right\| = ce \left\| e^{sA} x \right\| .$$

Звідси випливає, що

$$\forall s \in \triangle_i : \left\| e^{sA} x \right\| \geq (ce)^{-1} \delta,$$

а тому,

$$\int\limits_0^\infty \left\| e^{tA} x \right\|^{p_x} dt \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} \int\limits_{\triangle_i} \left\| e^{tA} x \right\|^{p_x} dt = \infty,$$

що суперечить (6.9). Таким чином, для довільного $x \in \mathfrak{B}$, $\left\| e^{tA} x \right\|$ не зростає і розглядуваний випадок зводиться до наведеного вище випадку обмеженої півгрупи.

Останнє твердження теореми випливає з тотожності

$$\int\limits_{t_0}^\infty \left\| e^{tA} x \right\|^q dt = \int\limits_{t_0}^\infty \left\| e^{(t - t_0 A)} e^{t_0 A} x \right\|^q dt = \int\limits_0^\infty \left\| e^{\xi A} e^{t_0 A} x \right\|^q d\xi$$

($t_0 > 0$ та $q > 0$ довільні) і того факту, що $e^{t_0 A} x \in C^\infty(A)$ $\;(e^{t_0 A} x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A))$, якщо $\left\{ e^{tA} \right\}_{t \geq 0}$ є диференційовною (аналітичною). Теорему доведено.

Варто зазначити, що теорема 6.4 узагальнює відповідні результати Датка [17], Пазі [18], М. Крейна [19], де ставилась умова існування одного й того самого для всіх $x \in \mathfrak{B}$ числа p в (6.9). В теоремі 6.4 p може бути різним для різних x. Більш того, якщо півгрупа $\left\{ e^{tA} \right\}_{t \geq 0}$ нескінченно диференційовна (аналітична), то достатньо, щоб нерівність в (6.9) виконувалась принаймні для нескінченно диференційовних (аналітичних) векторів оператора A.

З теореми 6.3 випливає таке твердження.

Наслідок 6.2 *Нехай $\gamma(t)$ – неперервна монотонно неспадна функція на $[0,\infty)$ така, що $\gamma(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Якщо для будь-якого розв'язку $y(t)$ коректно поставленої неоднорідної задачі Діріхле* (5.17)

$$\exists c = c(y) : \|y(t)\| \le c\gamma(t) \text{ при } t \ge 1,$$

то рівняння (5.1) *є рівномірно експоненціально стійким.*

Зауважимо також, що у випадку, коли A – генератор рівномірно експоненціально стійкої C_0-півгрупи, кожний розв'язок $y(t)$ рівняння (5.1) прямує до нуля експоненціально при наближенні до нескінченності, а саме,

$$\forall a < -\omega_0 : \lim_{t\to\infty} y(t)e^{at} = 0.$$

Що стосується рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійких півгруп, то, як показує теорема 6.3, це, взагалі кажучи, не так. Постає питання з'ясування зв'язку між порядком спадання до нуля розв'язків $y(t)$ при наближенні t до нескінченності й властивостями їхніх початкових даних. Беручи до уваги [240] і теореми 5.5 та 5.6, прийдемо до наступного твердження.

Теорема 6.5 *Нехай $A = -B^{1/2}$, де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, і $0 \in \sigma_c(A)$. Якщо $y(t)$ – неперервний в 0 розв'язок рівняння* (5.1), *то справджуються такі співвідношення еквівалентності:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{t\to\infty} t^n y(t) = 0 \Longleftrightarrow y(0) \in C^\infty(A^{-1});$$

$$\exists a > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{a\sqrt{t}} y(t) = 0 \Longleftrightarrow y(0) \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A^{-1});$$

$$\forall a > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{a\sqrt{t}} y(t) = 0 \Longleftrightarrow y(0) \in \mathfrak{G}_{(1)}(A^{-1}).$$

За умови, що розв'язок $y(t)$ експоненціально спадає на ∞, маємо

$$\exists a > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{at} y(t) = 0 \Longleftrightarrow y(0) \in \mathfrak{G}_{(0)}(A^{-1}),$$

де $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A^{-1})$, $\mathfrak{G}_{(1)}(A^{-1})$ *та* $\mathfrak{G}_{(0)}(A^{-1})$ *– простори аналітичних, цілих та цілих експоненціального типу векторів оператора* A^{-1} *відповідно.*

Якщо півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є обмеженою аналітичною, то оператор A^{-1} також генерує аналітичну півгрупу (див., наприклад, [241]) і, як показано там, $\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A^{-1})} = \mathfrak{B}$; більш того, множина стійких розв'язків рівняння (5.1), поведінка яких при $t \to \infty$ подібна до поведінки $e^{-a\sqrt{t}}$, є щільною у множині усіх його стійких розв'язків. Що ж до множини стійких розв'язків, спадаючих на ∞ експоненціально, то вона може складатися лише з тривіального розв'язку $y(t) \equiv 0$, навіть коли кут аналітичності півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{2}$. Але якщо в такому випадку

$$\int\limits_0^1 \ln\ln M(s)\, ds < \infty, \quad M(s) = \sup_{\mathrm{Im}\lambda \geq s} \left\| A(A-\lambda I)^{-1} \right\|,$$

то $\overline{\mathfrak{G}_{(1)}(A^{-1})} = \mathfrak{B}$ і сукупність усіх стійких розв'язків, спадаючих експоненціально до 0 при наближенні до ∞, є достатньо широкою.

Висновки до розділу 6

Цей розділ присвячено дослідженню стійких розв'язків рівняння $y''(t) - By(t) = 0$, $t \in (0,\infty)$, зі слабо позитивним B в $\mathfrak{B}$. Одержано критерії їх рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості. Деякі з них узагальнюють відповідні результати Р. Датка, А. Пазі, М. Крейна [17-19]. У випадку рівномірної, але не рівномірної експоненціальної стійкості з'ясовується зв'язок між порядком спадання розв'язку $y(t)$ при наближенні до ∞ та властивостями його початкових даних.

7 Про аналітичні розв'язки неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі над неархімедовим полем

У цьому розділі розглядається рівняння вигляду $y^{(m)} - Ay = f$, де A – замкнений лінійний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ над полем Ω комплексних p-адичних чисел, що має обернений, визначений на всьому $\mathfrak{B}$, і f – локально аналітична в нулі $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція. Основна увага приділяється питанням існування і єдиності локально аналітичного в точці 0 розв'язку цього рівняння. Встановлюються умови, необхідні й достатні для того, щоб задача Коші для такого рівняння була коректною у класі локально аналітичних функцій. Основні результати опубліковано в [267, 268].

7.1 Деякі класи аналітичних вектор-функцій

Позначимо через $\Omega = \Omega_p$ поповнення алгебраїчного замикання поля Q_p p-адичних чисел (p – просте число) котре, у свою чергу, є поповненням поля Q раціональних чисел відносно p-адичної норми

$$|a|_p = p^{-\nu} \quad \text{якщо} \quad a = p^{\nu}\frac{n}{m} \in Q,$$

де цілі числа n, m взаємно прості з p (деталі див. в [20 - 24]). Нехай також $\mathfrak{B}$ – банахів простір над полем Ω, тобто лінійний простір з нормою $\|\cdot\| : \mathfrak{B} \mapsto \mathbb{R}_+$ яка має такі властивості:

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\forall\lambda \in \Omega \; \forall x \in \mathfrak{B} : \|\lambda x\| = |\lambda|_p \|x\|$;

3) $\forall x, y \in \mathfrak{B} : \|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$;

4) простір $\mathfrak{B}$ є повним відносно $\|\cdot\|$.

У подальшому ми матимемо справу зі степеневими рядами типу

$$y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n, \quad c_n \in \mathfrak{B}, \quad \lambda \in \Omega. \tag{7.1}$$

Ряд (7.1) збігається у точці λ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} \|c_n\| |\lambda|_p^n = 0.$$

Під його радіусом збіжності зазвичай розуміється число

$$r = r(y) = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|c_n\|} \right)^{-1}.$$

При $r > 0$ ряд (7.1) визначає $\mathfrak{B}$-значну вектор-функцію у відкритому крузі

$$\mathcal{D}(0, r^-) = \{\lambda \in \Omega : |\lambda|_p < r\}.$$

Для довільного $\tau : 0 < \tau < r$ збіжність (7.1) є абсолютною і рівномірною у довільному замкненому крузі $\mathcal{D}(0, \tau) = \{\lambda \in \Omega : |\lambda|_p \leq \tau\}$.

Для числа $\alpha > 0$ позначимо через $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{B})$ множину всіх $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій $y(\lambda)$ вигляду (7.1) таких, що

$$r(y) \geq \alpha \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} \|c_n\| \alpha^n = 0.$$

Лінійна множина $\mathfrak{A}_\alpha$ утворює банахів простір над полем Ω з нормою

$$\|y\|_\alpha = \sup_{n \in \mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N}} \|c_n\| \alpha^n.$$

Оскільки

$$\|y\|_{\alpha_2} \geq \|y\|_{\alpha_1} \quad \text{при} \quad \alpha_1 < \alpha_2, \ y \in \mathfrak{A}_{\alpha_2},$$

то вкладення

$$\mathfrak{A}_{\alpha_2} \subseteq \mathfrak{A}_{\alpha_1},$$

індуковане звуженням на область визначення, є неперервним. Покладемо

$$\mathfrak{A}_{r^-} = \mathfrak{A}_{r^-}(\mathfrak{B}) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\uparrow r} \mathfrak{A}_\alpha.$$

Простір $\mathfrak{A}_{r^-}$ складається з $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій, аналітичних в $\mathcal{D}(0, r^-)$. Послідовність $\{y_n \in \mathfrak{A}_{r^-}\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається до y в $\mathfrak{A}_{r^-}$, якщо

$$\forall\alpha \in (0, r) : \lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_\alpha = 0.$$

Множина

$$\mathfrak{A}_\infty = \mathfrak{A}_\infty(\mathfrak{B}) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\to\infty} \mathfrak{A}_\alpha$$

є не що інше, як простір цілих $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій.

Вектор-функція $y(\lambda)$ називається локально аналітичною в точці 0, якщо існує $\alpha > 0$ таке, що $y \in \mathfrak{A}_\alpha$. У просторі $\mathfrak{A}_0$ всіх локально аналітичних в 0 $\mathfrak{B}$-значних вектор-функцій вводиться топологія індуктивної границі банахових просторів $\mathfrak{A}_\alpha$:

$$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}_0(\mathfrak{B}) = \operatorname{ind}\lim_{\alpha\to 0} \mathfrak{A}_\alpha.$$

Послідовність $\{y_n \in \mathfrak{A}_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається в $\mathfrak{A}_0$, якщо усі вектор-функції $y_n(\lambda)$ належать до $\mathfrak{A}_\alpha$ з деяким α і $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ збігається у просторі $\mathfrak{A}_\alpha$.

Для числа $\beta > 0$ покладемо також

$$E_\beta(A) = \{x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \big| \exists c = c(x) > 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 : \|A^k x\| \le c\beta^k\}.$$

Лінійна множина $E_\beta(A)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|x\|_{E_\beta} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^n x\|}{\beta^n}.$$

Позначимо через $E(A)$ простір цілих векторів експоненціального типу оператора A:

$$E(A) = \operatorname{ind}\lim_{\beta\to\infty} E_\beta(A) = \bigcup_{\beta>0} E_\beta(A).$$

Під типом $\sigma(x) = \sigma(x, A)$ вектора $x \in E(A)$ розуміється величина

$$\sigma(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|A^n x\|^{1/n}.$$

У випадку, коли $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{B}$, простір $E(A)$ збігається з $\mathfrak{B}$ і

$$\forall x \in \mathfrak{B} : \sigma(x) \leq \|A\|.$$

7.2 Головний результат

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y^{(m)}(\lambda) - Ay(\lambda) = f(\lambda), \tag{7.2}$$

де A – замкнений лінійний оператор в $\mathfrak{B}$, $f \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$ з деяким $\rho > 0$. Під розв'язком цього рівняння у відкритому крузі $\mathcal{D}(0, \rho^-)$ розумітимемо вектор-функцію $y(\lambda) : \mathcal{D}(0, \rho^-) \mapsto \mathcal{D}(A)$ з $\mathfrak{A}_{\rho^-}$, що задовольняє (7.2) в $\mathcal{D}(0, \rho^-)$. У подальшому припускається, що оператор A має обернений A^{-1}, визначений на всьому $\mathfrak{B}$.

Позначимо через s величину

$$s = s(A^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^{-n}\|}.$$

Якщо $\mathfrak{B}$ – банахів простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, тоді s – спектральний радіус оператора A^{-1}.

Теорема 7.1 *Нехай A – замкнений лінійний оператор в $\mathfrak{B}$, який має обмежений обернений A^{-1}, а*

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n, \quad b_n \in \mathfrak{B}, \tag{7.3}$$

належить до $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ *з* $\rho > s^{\frac{1}{m}}$. *Тоді існує єдиний розв'язок* $y(\lambda)$ *рівняння* (7.2) *в класі* $\mathfrak{A}_{\rho^-}$. *Цей розв'язок має вигляд*

$$y(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(nm)}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n, \tag{7.4}$$

де

$$c_n = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mk+n)!}{n!} A^{-(k+1)} b_{mk+n}. \tag{7.5}$$

Більш того, розв'язок $y(\lambda)$ *неперервно залежить від правої частини рівняння* (7.2), *тобто якщо послідовність* $\{f_n \in \mathfrak{A}_{\rho^-}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *збігається до* 0 *у просторі* $\mathfrak{A}_{\rho^-}$, *то послідовність відповідних розв'язків* $\{y_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *рівняння* (7.2) *з* $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ *збігається до 0 у просторі* $\mathfrak{A}_{\rho^-}$.

Спочатку доведемо таке твердження.

Лема 7.1 *Нехай* $f \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$. *Тоді для кожного* $r : 0 < r < \rho$ *існує стала* $c = c(r)$ *така, що*

$$\forall \lambda \in \mathcal{D}(0, \rho^-) : \|f^{(n)}(\lambda)\| \leq \frac{c}{r^n}.$$

Доведення. Оскільки будь-яка точка $\lambda_0 \in \mathcal{D}(0, \rho^-)$ є центром круга $\mathcal{D}(0, \rho^-)$, то вектор-функція $f(\lambda)$ може бути представлена рядом

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!} (\lambda - \lambda_0)^n,$$

який збігається у крузі $\{\lambda : |\lambda - \lambda_0|_p \leq r\}$ ($r \in (0, \rho)$ довільне) (див. [24]). Звідси випливає, що існує стала $c = c(r) > 0$ така, що

$$\frac{\|f^{(n)}(\lambda_0)\| r^n}{|n!|_p} \leq c,$$

а тому

$$\|f^{(n)}(\lambda_0)\| r^n \leq c |n!|_p.$$

Беручи до уваги, що $|n!|_p \leq 1$, одержуємо

$$\|f^{(n)}(\lambda_0)\|r^n \leq c,$$

що й треба було довести.

Доведення теореми 7.1. Нехай $f \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$. Тоді ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(nm+k)}(\lambda), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{7.6}$$

збігаються рівномірно в крузі $\mathcal{D}(0, r)$ з будь-яким $r : 0 < r < \rho$.

Справді, за визначенням $s = s(A^{-1})$ та лемою 7.1, для довільного $\varepsilon > 0$ і достатньо великих $n \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$\|A^{-(n+1)} f^{(nm+k)}(\lambda)\| \leq \frac{c(s+\varepsilon)^n}{r^{nm+k}} = \left(\frac{s+\varepsilon}{r^m}\right)^n \cdot \frac{c}{r^k}, \quad 0 < c = c(r, \varepsilon) = const.$$

Оскільки $\rho > s^{\frac{1}{m}}$, число $\varepsilon > 0$ можна підібрати так, щоб $\sqrt[m]{s+\varepsilon} < \rho$. Беручи в лемі 7.1 $r \in (\sqrt[m]{s+\varepsilon}, \rho)$, отримаємо нерівність

$$\|A^{-(n+1)} f^{(nm+k)}(\lambda)\| \leq \frac{c}{r^k} q^n, \tag{7.7}$$

де $0 < q = \dfrac{s+\varepsilon}{r^m} < 1$. Отже, усі ряди (7.6) збігаються рівномірно у будь-якому замкненому крузі $\mathcal{D}(0, r)$ з $r < \rho$. Звідси випливає, що $\mathfrak{B}$-значна вектор-функція

$$y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(nm)}(\lambda)$$

є нескінченно диференційовною в $\mathcal{D}(0, \rho^-)$ і її значення належать до $\mathcal{D}(A)$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що ця вектор-функція задовольняє (7.2).

Оскільки

$$f^{(nm)}(\lambda) = \sum_{k=nm}^{\infty} \frac{k! b_k}{(k-nm)!} \lambda^{k-nm} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(nm+j)!}{j!} b_{nm+j} \lambda^j,$$

то

$$y(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(nm+j)!}{j!} b_{nm+j} \lambda^j =$$

$$= -\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nm+j)!}{j!} A^{-(n+1)} b_{nm+j} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \lambda^j, \tag{7.8}$$

де $c_j, \ j \in \mathbb{N}_0$, визначаються формулою (7.5).

Варто зазначити, що перестановка рядів у (7.8) можлива тому, що завдяки оцінці

$$\|b_{nm+j}\| \leq \frac{c}{r^{nm+j}},$$

виконується нерівність

$$\left\| \frac{(nm+j)!}{j!} A^{-(n+1)} b_{nm+j} \lambda^j \right\| \leq c q^n \left(\frac{r'}{r} \right)^j$$

для $|\lambda| < r'$, де числа $\varepsilon > 0$ в $q = \frac{s+\varepsilon}{r^m}$, r' та r такі, що $r^m > s + \varepsilon$, $r' < r < \rho$, можна вибрати довільним способом. Таким чином, $y \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$.

Доведемо тепер єдиність розв'язку рівняння (7.2) у класі $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ with $\rho > s^{\frac{1}{m}}$. Для цього достатньо, щоб однорідне рівняння

$$y^{(m)}(\lambda) - Ay(\lambda) = 0. \tag{7.9}$$

мало в $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ щонайбільше тривіальний розв'язок.

За теоремою 1 (див. [26]), будь-який локально аналітичний в 0 розв'язок $y(\lambda)$ рівняння (7.9) зображується у вигляді

$$y(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} F_k(\lambda, A) x_k, \tag{7.10}$$

де $x_k \in E(A), \ k = 0, 1, \ldots, m-1$, і

$$\forall x \in E(A), \forall \lambda \in \Omega : F_k(\lambda, A)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n x}{(mn+k)!} \lambda^{nm+k}. \tag{7.11}$$

Як показано в [26], радіус збіжності $r(F_k(\cdot, A)x)$ ряду (7.11) не залежить від k і обчислюється за формулою

$$r(F_k(\cdot, A)x) = \sigma^{-\frac{1}{m}}(x)p^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{7.12}$$

(Тут $\sigma(x)$ – тип вектора $x \in E(A)$). Крім того,

$$F_k^{(i)}(0, A)x = \delta_{ik}x. \tag{7.13}$$

Отже,

$$y(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n x_k}{(nm+k)!}\lambda^{nm+k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{A^n x_k}{(nm+k)!}\lambda^{nm+k}.$$

Внаслідок (7.12) радіус збіжності цього ряду

$$r(y) = \min_{k=0,1,\dots,m-1}\sigma^{-\frac{1}{m}}(x_k)p^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{7.14}$$

Припустимо, що $x_k \neq 0$ для принаймні одного k. Оскільки

$$\sqrt[n]{\|x_k\|} = \sqrt[n]{\|A^{-n}A^n x_k\|} \leq \sqrt[n]{\|A^{-n}\|}\sqrt[n]{\|A^n x_k\|},$$

то

$$1 \leq s\sigma(x_k),$$

а отже,

$$\sigma^{-\frac{1}{m}}(x_k) \leq s^{\frac{1}{m}}.$$

Тоді рівність (7.14) зумовлює нерівність

$$r(y) \leq s^{\frac{1}{m}}.$$

Останнє означає, що нетривіальний розв'язок $y(\lambda)$ рівняння (7.9) може бути аналітичним лише в крузі, радіус якого не перевищує $s^{\frac{1}{m}}$, що суперечить припущенню теореми.

Щоб завершити доведення, потрібно ще встановити неперервну залежність розв'язку $y(\lambda)$ рівняння (7.2) від $f(\lambda)$.

Припустимо, що послідовність

$$f_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}\lambda^k \in \mathfrak{A}_{\rho^-}, \quad n \in \mathbb{N},$$

збігається при $n \to \infty$ до 0 у просторі $\mathfrak{A}_{\rho^-}$, тобто

$$\forall r_1 < \rho : \|f_n\|_{r_1} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \|b_{n,k}\| r_1^k \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{7.15}$$

і доведено, що для розв'язків

$$y_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{n,k}\lambda^k$$

з $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ рівняння (7.2) з $f_n(\lambda)$ замість $f(\lambda)$ виконується співвідношення

$$\|y_n\|_{r_2} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \|c_{n,k}\| r_2^k \to 0 \quad (n \to \infty)$$

для довільного $r_2 < \rho$.

З (7.15) випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ і достатньо великих $n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$\|b_{n,k}\| \le \frac{\varepsilon}{r_1^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді

$$\|c_{n,k}\| = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(mj+k)!}{k!} A^{-(j+1)} b_{n,mj+k} \right\| \le$$

$$\le c \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon(s+\delta)^j}{r_1^{mj+k}} = \frac{c\varepsilon}{r_1^k} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{s+\delta}{r_1^m} \right)^j, \ 0 < c = const,$$

де $\delta > 0$ підібрано так, щоб $r_1^m > s + \delta$. Таким чином,

$$\|c_{n,k}\| \le c_1 \frac{\varepsilon}{r_1^k}, \quad 0 < c_1 = const,$$

і
$$\|y_n(\lambda)\| \le c_1\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^k < c\varepsilon,$$
де $0 < c = c(r_1, r_2, \delta) = const$, а це, в силу довільності вибору таких r_1, r_2, спричиняє збіжність послідовності $\{y_n(\lambda)\}_{n\in\mathbb{N}}$ до 0 в $\mathfrak{A}_{\rho^-}$-топології.

Теорему доведено.

За умов теореми 7.1, мають місце такі наслідки.

Наслідок 7.1 *Припустимо, що $f(\lambda)$ – многочлен. Тоді в класі многочленів існує єдиний розв'язок рівняння* (7.2)*. Більш того, якщо $f(\lambda)$ – многочлен степеня n, то степінь розв'язку є також n.*

Наслідок 7.2 *Нехай $f \in \mathfrak{A}_\infty$, тобто вектор-функція $f(\lambda)$ є цілою. Тоді рівняння* (7.2) *має єдиний розв'язок $y \in \mathfrak{A}_\infty$.*

Зауважимо, що у випадку, коли $\mathfrak{B}$ – банахів простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел, оператор A обмежений і $m = 1$, цей результат був отриманий в [239] у припущенні, що $f(\lambda)$ – ціла вектор-функція мінімального експоненціального типу ($\|f(\lambda)\| \le c(\varepsilon)e^{\varepsilon|\lambda|}$ для довільного $\varepsilon > 0$). Випадок довільного замкненого A, що має обмежений обернений, розглянуто в [269].

Наслідок 7.3 *Якщо $s = s(A^{-1}) = 0$ і $f \in \mathfrak{A}_0$, то існує єдиний локально аналітичний в* 0 *розв'язок рівняння* (7.2).

Наслідок 7.4 *Якщо $s = s(A^{-1}) = 0$, то $E(A) = \{0\}$.*

У випадку, коли простір $\mathfrak{B}$ є банаховим над полем $\mathbb{C}$, це твердження доведене в [270].

7.3 Про наближення розв'язку

Розглянемо рівняння (7.2) з правою частиною

$$f_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} b_k \lambda^k$$

замість $f(\lambda)$, тобто $f_n(\lambda)$ – частинна сума ряду (7.3) для $f \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$, і позначимо через $y_n(\lambda)$ розв'язок цього рівняння з $\mathfrak{A}_{\rho^-}$. Як свідчить теорема 7.1, такий розв'язок єдиний. За наслідком 7.1 $y_n(\lambda)$ є многочленом n-го степеня:

$$y_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \lambda^k.$$

Користуючись (7.5), безпосередньою перевірити переконуємось, що

$$c_{n,k} = -\sum_{i:mi+k \le n} \frac{(mi+k)!}{k!} A^{-(i+1)} b_{mi+k}.$$

Оскільки $f_n \to f$ в $\mathfrak{A}_{\rho^-}$, приходимо на основі теореми 7.1 до висновку, що $y_n \to y$ у тій самій топології. Очевидно також, що в цьому випадку нев'язка $A(y - y_n) - (y^{(m)} - y_n^{(m)}) = f - f_n$ наближається до нуля в $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ при $n \to \infty$.

Розглянемо тепер інший спосіб апроксимації. Покладемо

$$y_n(\lambda) = -\sum_{k=0}^{n} A^{-(k+1)} f^{(km)}(\lambda). \tag{7.16}$$

Беручи до уваги (7.4) та (7.7), для розв'язку $y \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$ рівняння (7.2) одержуємо

$$\|y(\lambda) - y_n(\lambda)\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} A^{-(i+1)} f^{(im)}(\lambda) \right\| \le$$

$$c \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{s+\varepsilon}{r^m} \right)^i = c \left(\frac{s+\varepsilon}{r^m} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{s+\varepsilon}{r^m} \right)^{-1} = c_1 \left(\frac{s+\varepsilon}{r^m} \right)^n,$$

де $c_1 = c_1(r, \varepsilon) = const$, $r : s + \varepsilon < r < \rho$ довільне, $\varepsilon > 0$ як завгодно мале. Таким чином, приходимо до оцінки поточкової збіжності $y_n(\lambda)$ до $y(\lambda)$, рівномірної в $\mathcal{D}(0, r)$, а саме:

$$\|y(\lambda) - y_n(\lambda)\| \le c_1 \left(\frac{s + \varepsilon}{r^m} \right)^n. \tag{7.17}$$

Для відхилу наближеного розв'язку $y_n(\lambda)$ у цьому випадку маємо

$$\|A(y(\lambda) - y_n(\lambda)) - (y^{(m)}(\lambda) - y_n^{(m)}(\lambda))\|$$

$$\le \max\{\|A(y(\lambda) - y_n(\lambda))\|, \|y^{(m)}(\lambda) - y_n^{(m)}(\lambda)\|\}.$$

Враховуючи, що

$$\|A(y(\lambda) - y_n(\lambda))\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} A^{-i} f^{(im)}(\lambda) \right\|$$

та

$$\|y^{(m)}(\lambda) - y_n^{(m)}(\lambda)\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} A^{-(i+1)} f^{((i+1)m)}(\lambda) \right\|,$$

аналогічно тому, як це було зроблено вище, одержуємо

$$\forall \lambda \in \mathcal{D}(0, r) : \|A(y(\lambda) - y_n(\lambda))\| \le c \left(\frac{s + \varepsilon}{r^m} \right)^n$$

і

$$\forall \lambda \in \mathcal{D}(0, r) : \|y^{(m)}(\lambda) - y_n^{(m)}(\lambda)\| \le c \left(\frac{s + \varepsilon}{r^m} \right)^{n+1}$$

з $0 < c = c(r, \varepsilon) = const$, звідки

$$\|A(y(\lambda) - y_n(\lambda)) - (y^{(m)}(\lambda) - y_n^{(m)}(\lambda))\| \le c \left(\frac{s + \varepsilon}{r^m} \right)^n. \tag{7.18}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 7.2 *За умов теореми* 7.1 *на оператор* A *та вектор-функцію* $f(\lambda)$, *похибка наближення розв'язку* $y(\lambda)$ *рівняння* (7.2) *вектор-функціями* $y_n(\lambda)$ *вигляду* (7.16) *вираховується за формулою* (7.17). *Що стосується нев'язки* $A(y - y_n) - (y^{(m)} - y_n^{(m)})$, *то вона може бути оцінена за допомогою* (7.18).

7.4 Задача Коші

Цей підрозділ присвячений вивченню задачі Коші

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y^{(m)}(\lambda) - Ay(\lambda) & = & f(\lambda) \\ y^{(k)}(0) & = & y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \end{array} \right. \tag{7.19}$$

яка полягає у знаходженні локально аналітичної вектор-функції

$$y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$$

із значеннями в $\mathcal{D}(A)$, що задовольняє (7.19), де

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_k \lambda^k \in \mathfrak{A}_0.$$

Як показує наслідок 7.3, задача (7.19) не обов'язково розв'язна. Тому постає питання, за яких умов на $f(\lambda)$ та початкові дані $\{y_k\}_{k=0}^{m-1}$, ця задача має розв'язок, і якщо це так, то чи є він єдиним.

Припустимо спочатку, що $f \in \mathfrak{A}_\infty$. За наслідком 7.2, існує єдиний розв'язок

$$z(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

рівняння (7.2) у класі $\mathfrak{A}_\infty$. Нехай $y \in \mathfrak{A}_0$ – інший розв'язок (7.2). Тоді $y - z \in \mathfrak{A}_0$ є розв'язком однорідного рівняння (7.9). З огляду на (7.10),

$$y(\lambda) - z(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} F_k(\lambda, A) x_k, \quad x_k \in E(A),$$

звідки

$$y_k = x_k + k! a_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

оскільки функція $F_k(\lambda, \nu)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{d^m F_k(\lambda, \nu)}{d\lambda^m} = \nu F_k(\lambda, \nu)$$

що задовольняє умову

$$\frac{d^j F_k(0,\nu)}{d\lambda^j} = \delta_{kj}, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Отже, для того щоб задача Коші (7.19) була розв'язною, необхідно, щоб

$$y_k - k! a_k \in E(A), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Неважко перевірити, що ця умова є також достатньою для розв'язності задачі (7.19). Звідси випливає, що якщо $s = s(A^{-1}) = 0$ (за наслідком 7.4 це обумовлює рівність $E(A) = \{0\}$), то задача (7.19) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$y_k = k! a_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

У випадку, коли $\mathcal{D}(A) = \mathfrak{B}$, простір $E(A)$ збігається з $\mathfrak{B}$ і задача Коші (7.19) є розв'язною для будь-яких $y_k \in \mathfrak{B}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Єдиність розв'язку в обох цих випадках випливає з [26].

Варто зазначити, що все сказане вище є вірним і тоді, коли $f \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$ з $\rho > s^{\frac{1}{m}}$. Таким чином, приходимо до наступного твердження.

Теорема 7.3 *Нехай оператор A є оборотним, $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathfrak{B}$ і $f \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$ з деяким $\rho > s^{\frac{1}{m}}$. Тоді задача Коші (7.19) є однозначно розв'язною в $\mathfrak{A}_0$ тоді і тільки тоді, коли $y_k - k! a_k \in E(A)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, де a_k – коефіцієнти єдиного розв'язку $z(\lambda)$ рівняння (7.2), аналітичного в крузі $\mathcal{D}(0, \rho^-)$, тобто*

$$a_k = -\frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} A^{-(n+1)} f^{(nm+k)}(0), \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{7.20}$$

Наслідок 7.5 *Нехай $s = s(A^{-1}) = 0$. Для того щоб задача Коші (7.19) мала єдиний розв'язок $y(\lambda)$ в $\mathfrak{A}_0$, необхідно і достатньо, щоб $y_k = k! a_k$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, де a_k визначаються формулою (7.20).*

Наслідок 7.6 *Якщо оператор A обмежений, то задача Коші* (7.19) *є однозначно розв'язною в* $\mathfrak{A}_0$ *для будь-яких* $y_k \in \mathfrak{B}$.

Залишається відкритою проблема, чи існує розв'язок задачі (7.19) у випадку, коли $f(\lambda)$ є довільною локально аналітичною в точці 0 вектор-функцією, тобто $f \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$, але $\rho \le s^{\frac{1}{m}}$.

7.5 Застосування до рівнянь з частинними похідними

Покажемо, як наведені вище результати можуть бути застосовані до диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Нехай $\mathfrak{B}$ – простір функцій $\varphi(x)$ із значеннями в Ω, аналітичних на n-вимірній кулі

$$\mathcal{D}_n(0,\rho) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega^n : \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|_p^2 \right)^{1/2} \le \rho \right\},$$

тобто функцій $\varphi(x)$ вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha} \varphi_\alpha x^\alpha, \quad \varphi_\alpha \in \Omega,$$

для яких

$$\lim_{|\alpha| \to \infty} |\varphi_\alpha|_p \rho^{|\alpha|} = 0,$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. Простір $\mathfrak{B}$ є банаховим над полем Ω відносно норми

$$\|\varphi\| = \sup_{\alpha} |\varphi|_p \rho^{|\alpha|}.$$

Диференціальні оператори

$$\varphi \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{\alpha} \alpha_i \varphi_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_i^{\alpha_i - 1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

є обмеженими в $\mathfrak{B}$, і

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\| = \frac{1}{\rho}.$$

Оператор множення

$$T : \varphi \mapsto \theta\varphi, \quad \varphi \in \mathfrak{B},$$

на елемент $\theta \in \mathfrak{B}$ – також обмежений, і

$$\|T\| = \|\theta\|.$$

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\sum_{|\beta|=0}^{q} a_\beta(x)D^\beta u(t,x) - u(t,x) = f(t,x),$$

$$(t,x) \in \mathcal{D}(0,r^-) \times \mathcal{D}_n(0,\rho), \quad f \in \mathfrak{A}_{r^-}(\mathfrak{B}), \tag{7.21}$$

де $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $\beta_i \in \mathbb{N}_0$, $a_\beta \in \mathfrak{B}$, $D^\beta = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}}$. Це рівняння можна подати у вигляді (7.2), якщо за A взяти оператор

$$\varphi \mapsto A\varphi = \sum_{|\beta|=0}^{q} a_\beta D^\beta \varphi, \quad \varphi \in \mathfrak{B}.$$

Із співвідношення

$$\left\|\sum_{|\beta|=0}^{q} a_\beta D^\beta \varphi\right\| \le \max_\beta \left\|a_\beta D^\beta \varphi\right\| \le \max_\beta \|a_\beta\| \left\|D^\beta \varphi\right\| \le \max_\beta \left\{\rho^{-|\beta|}\|a_\beta\|\right\} \|\varphi\|$$

випливає, що оператор A є обмеженим в $\mathfrak{B}$ і

$$\|A\| \le \max_\beta \left\{\rho^{-|\beta|}\|a_\beta\|\right\}.$$

Згідно з теоремою 7.1, при $r > \gamma^{1/m}$, де $\gamma = \max_\beta\{\rho^{-|\beta|}\|a_\beta\|\}$, існує єдиний розв'язок рівняння (7.21), аналітичний в $\mathcal{D}(0,r^-) \times \mathcal{D}_n(0,\rho)$.

Висновки до розділу 7

У розділі 7 розглядається рівняння $y^{(m)}(t) - Ay(\lambda) = f(\lambda)$, де A – замкнений лінійний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ над полем Ω комплексних p-адичних чисел , що має обернений A^{-1}, визначений на всьому $\mathfrak{B}$, а $f(\lambda)$ – локально аналітична в нулі вектор-функція.

Основну увагу приділено питанням існування і єдиності розв'язку у класі $\mathfrak{A}_0$ локально аналітичних в околі нуля вектор-функцій, його зображення і неперервної залежності від правої частини.

Головний результат розділу міститься в підрозділі 7.2. Тут доводиться, що якщо $f(\lambda) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \lambda^n \in \mathfrak{A}_{\rho^-}$ з $\rho > s^{1/m}$, $s = \sqrt[n]{\|A^{-n}\|}$, де $b_n \in \mathfrak{B}$, $\lambda \in \Omega$, $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ – простір аналітичних у крузі $\{\lambda \in \Omega : |\lambda|_p < \rho\}$ вектор-функцій, то розглядуване рівняння має єдиний розв'язок у класі $\mathfrak{A}_{\rho^-}$, дається формула для розв'язку і встановлюється його неперервна у просторі $\mathfrak{A}_{\rho^-}$ залежність від $f(\lambda)$. Більш того, показується, що: 1) якщо $f(\lambda)$ – многочлен, то існує єдиний розв'язок у класі многочленів, при цьому степені $f(\lambda)$ і розв'язку однакові; 2) якщо $f(\lambda)$ – ціла вектор-функція, то рівняння має єдиний цілий розв'язок.

Наведено два способи апроксимації розв'язку. В обох випадках оцінюються похибка наближення і нев'язка (відхил).

Розглянуто задачу Коші для зазначеного рівняння з початковими даними $y^{(k)}(0) = y_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1$, яка полягає у відшуканні локально аналітичної в 0 вектор-функції $y(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ зі значеннями в $\mathcal{D}(A)$, що задовольняє рівняння з правою частиною $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n \in \mathfrak{A}_0$. Ця задача не завжди розв'язна, а тому шукались умови на $f(\lambda)$, за яких вона має розв'язок, і якщо це так, то коли цей розв'язок є єдиним. Випадки $m = 1$ та $f = 0$ розглянуто в [25, 26].

Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язків диференціальних рівнянь першого, другого та вищих порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами у банаховому просторі. Інтенсивність розвитку розвитку такої теорії останнім часом можна пояснити необхідністю розгляду проблем, що виникають при моделюванні еволюційних процесів. Виявляється, що для зображення розв'язків задачі Коші для таких рівнянь і вивчення їх асимптотики треба вміти відновлювати півгрупу лінійних операторів за її генератором. Раніше це відновлення здійснювалось різними способами не за самим генератором, а за деякими функціями від нього, що значно ускладнювало процес. Так, задача Коші з початковими даними у вихідному просторі розглядалась багатьма математиками (див., наприклад, [84 - 97]. Теорія звужень і розширень аналітичних півгруп, представлена в [98], дала змогу досліджувати граничні задачі для абстрактних диференціальних рівнянь на коректність постановки у різних класах гладких та узагальнених вектор-функцій, а операторний підхід до теорії апроксимації, розвинутий в [9], уможливив наближення розв'язків (не лише класичних, але й слабких і узагальнених) цілими розв'язками експоненціального типу і точне оцінювання похибки наближення. Більш того, з'явилася можливість дослідити задачу Коші для рівнянь не лише в архімедовому, але й неархімедовому (над полем p-адичних чисел) банаховому просторі. p-адична техніка посіла важливе місце у багатьох галузях математичних досліджень, зокрема в теоріях чисел, представлень, p-адичних соленоїдів тощо. Як сказано в [20], "цей прекрасний новий світ неархімедового аналізу відкриває важливі перспективи для розвитку алгебри, теорії чисел і корисних застосувань".

З огляду на історію розвитку функціонального аналізу, теорії диференціальних рівнянь та теорії наближень, результати дисертації роблять свій помітний внесок в теорію еволюційних рівнянь та її застосувань до розв'язування нових задач математичної фізики – у цьому й полягає актуальність проведених в ній досліджень. Її тематика, як неважко побачити, належить до одного з найважливіших напрямів сучасного функціонального аналізу – теорії абстрактних диференціальних рівнянь, початок якої був закладений Е. Хілле та К. Іосідою (1948), які одержали перші теореми існування розв'язків задачі Коші для рівняння $y' = Ay$ з необмеженим оператором A , сформульовані в термінах теорії півгруп. Згодом Е. Хілле і Р. Філліпс розпочали побудову теорії абстрактної задачі Коші для рівнянь у банаховому просторі, а у 1953-54 рр. П. Лакс, А. Мільграм та В. Лянце застосували півгрупові методи до дослідження різних класів параболічних рівнянь. З тих пір, як Т. Като розглянув випадок, коли $A = A(t)$ залежить від t, теорія диференціальних рівнянь у банаховому просторі і тісно пов'язана з нею теорія півгруп сформували самостійну галузь досліджень, яка з роками все більше й більше привертає привертає увагу математиків. Започатковане Е. Хілле й К. Іосідою, М. Крейном і Ю. Далецьким установлення зв'язку між цими двома теоріями знайшло своє продовження в роботах С. Крейна, П. Соболєвського, Р. Філліпса, Е. Девіса, А. Пазі, Р. Датка, В. Арендта, В. Фоміна, М. Горбачука, Ю. Латушкіна, Ж. Неервена, А. Кочубея, В. Городецького, В. Михайлеця, Дж. Кісінського, М. Городнього, В. Васільєва, С. Піскарьова та багатьох ін. Фундаментальні результати у цьому напрямку викладено у цілій низці монографій, серед яких [1, 2, 6 - 8, 16, 86] та ін., а також оглядових статтях [89, 90]. В роботі отримано такі нові результати:

Розв'язано проблеми Колмогорова і Хілле про існування для довільної сильно неперервної групи (півгрупи) у банаховому просторі щільних в ньому множин, на яких ця група (півгрупа) може бути зображена у вигляді степеневого ряду або експоненціальної границі від її генератора. Тим самим було знайдено спосіб відновлення групи (півгрупи) безпосередньо за її генератором, а не функціями від нього, що ускладнювало процес відновлення. Описано усі розв'язки всередині нескінченного інтервалу (осі або півосі) параболічних та еліптичних диференціальних рівнянь у банаховому просторі. Зокрема, детально вивчено розв'язки як однорідного, так і неоднорідного полігармонічного диференціально-операторного рівняння, коефіцієнтом якого є позитивний оператор. Досліджено розв'язки диференціальних рівнянь вищих порядків певного вигляду на всій числовій осі й півосі, коефіцієнтами яких є позитивні оператори у банаховому просторі. Доведено прямі й обернені теореми теорії наближень розв'язків диференціального рівняння у гільбертовому просторі його цілими розв'язками експоненціального типу, які встановлюють взаємно однозначну відповідність між швидкістю прямування до нуля найкращого наближення та степенем гладкості розв'язку і з яких, зокрема, випливає аналог теореми Джексона про апроксимацію неперервної періодичної функції тригонометричними поліномами. Описано структуру розв'язків задачі Діріхле для абстрактного еліптичного диференціального рівняння другого порядку на півосі і знайдено умови, за яких ця задача є коректно поставленою. Досліджено однорідну задачу Неймана. Доведено, що для розв'язків абстрактних еліптичних диференціальних рівнянь на півосі діє аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа.Для еліптичного диференціального рівняння на півосі у банаховому просторі встановлено критерії його рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості. Знайдено також умови, за яких рівняння є рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійким. Описано усі аналітичні розв'язки неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку у банаховому просторі над полем p-адичних чисел.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. - Москва: Наука, 1967. - 464 с.

2. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. - New York: Springer-Verlag, 1983. - 279 p.

3. *Arendt W.* Vector-valued Laplace Transform and Cauchy Problems / W. Arendt, C.J.K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander. - Basel: Birkh*ä*user, 2000. - 455 p.

4. *Канторович Л.В.* Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. - Москва: Физматгиз, 1959. - 684 с.

5. *Yosida K.* Functional Analysis / K. Yosida. - Berlin: Springer-Verlag, 1965. - 624 p.

6. *Хилле Е.* Функциональный анализ и полугруппы / Е. Хилле, Р. Филлипс. - Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. - 829 с.

7. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. - Киев: Вища школа , 1989. - 347 с.

8. *Клемент Ф.* Однопараметрические полугруппы / Ф. Клемент, Х. Хейманс, С. Ангенент, К. ван Дуйн, Б. де Пахтер. - Москва: Мир, 1992. - 351 с.

9. *Gorbachuk M.L.* Operator approach to approximation problems / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk // St. Peterburg Math. J. - 1998. - V. 9, № 6. - P. 1097 - 1109.

10. *Березанский Ю.М.* Пространства с негативной нормой / Ю.М. Березанский // Успехи матем. наук. - 1963. - Т. 43, № 1. - С. 63 - 96.

11. *Березанский Ю.М.* Некоторые применения пространств с отрицательной нормой / Ю.М. Березанский // Studio, Math. Ser. Spec. - 1963. - № 1. - С. 25 - 26.

12. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. - Киев: Наукова думка, 1965. - 798 с.

13. *Горбачук М.Л.* Про розв'язки диференціальних рівнянь еліптичного типу в банаховому просторі на півосі / М.Л. Горбачук, В.І. Горбачук // Матем. методи та фізико-механічні поля. - 2008. - Т. 51, № 2. - С. 14 - 25.

14. *Князюк А.В.* Задача Дирихле для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве / А.В. Князюк // Укр. мат. журн. - 1985. - Т. 37, № 2. - С. 256 - 260.

15. *Князюк А.В.* Единственность в задаче Дирихле на полуоси в банаховом просранстве / А.В. Князюк // Нелинейные задачи математической физики. - Донецк: АН УССР, 1987. - С. 63.

16. *Neerven J.* The Asymptotic Behavior of Semigroups of Linear Operators / Jan van Neerven. - Berlin: Birkh*ä*user-Verlag, 1996. - 237 p.

17. *Datko R.* Extending a theorem of A. Liapunov to Hilbert space / R. Datko // J. Math. Anal. Appl. - 1970. - V. 32. - p. 610 - 616.

18. *Pazy A.* On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space / A. Pazy // SIAM J. Math. Anal. - 1972. - V. 3. - p. 291 - 294.

19. *Крейн М.Г.* Замечание об одной теореме из статьи В.А. Якубовича "Частотная теорема для случая, когда ... ", II / М.Г. Крейн // Сиб. мат. журн. - 1977. - Т. 18, № 6. - С. 1411 - 1413.

20. *Коблиц Н.* p-Адические числа, p-адический анализ и дзета-функции / Н. Коблиц. - Москва: Мир, 1982. - 102 с.

21. *Schihof W.H.* Ultrametric Calculus, an Introduction to p-Adic Analysis / W.H. Schihof. - London etc.: Cambrige University Press, 1984. - 306 p.

22. *Dwork B.* An Introduction to G-Functions / B. Dwork, G. Gerotto, and F.J. Sullivan. - Princeton-New Jersey: Princeton University Press, 1994. - 323 p.

23. *Владимиров В.С.* p-Адический анализ и математическая физика / В.С. Владимиров, И.В. Волович, Е.И. Зеленов. - Москва: Физматлит, ВО "Наука", 1994. - 352 с.

24. *Хренников А.Ю.* Неархимедов анализ и его приложения / А.Ю. Хренников. - Москва: Физматлит, 2003. - 216 с.

25. *Gorbachuk M.L.* On the Cauchy problem for differential equations in a Banach space over the field of p-adic numbers / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk // Methods Funct. Anal. Topology. - 2003. - V. 9, № 3. - P. 207 - 212.

26. *Gorbachuk M.L.* On the Cauchy problem for differential equations in a Banach space over the field of p-adic numbers / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk // Proc. Steklov Inst. - 2004. - V. 245. - P. 91 - 97.

27. *Петровский И.Г.* О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными / И.Г. Петровский // Успехи матем. наук. - 1946. - Т. 1, № 3, 4. - С. 44 - 70.

28. *Ладыженская О.А.* О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения / О.А. Ладыженская // Матем. сб. - 1950. - Т. 27, № 2 - С. 175 - 184.

29. *Лопатинский Я.Б.* Поведение решений линейной эллиптической системы в окрестности изолированной особой точки / Я.Б. Лопатинский // ДАН СССР. - 1951. - Т. 79. - С. 727 - 730.

30. *Hille E.* The abstract Cauchy problem and Cauchy problem for parabolic differential equations / E. Hille // J. Anal. Math. - 1953-54. - V. 3. - P. 81 - 196.

31. *Шилов Г.Е.* Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами / Г.Е. Шилов // Успехи матем. наук. - 1955. - Т. 10, № 4. - С. 89 - 100.

32. *Вишик М.И.* Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений / М.И. Вишик, О.А. Ладыженская // Успехи матем. наук. - 1956. - Вып. 6. - С. 41 - 97.

33. *Вишик М.И.* Стабилизация решений параболических уравнений / М.И. Вишик, Л.А. Люстерник // ДАН СССР. - 1956. - Т. 111,

№ 2. - С. 273 - 275.

34. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. - Москва: ИЛ, 1957. - 375 с.

35. *Слободецкий Л.Н.* О фундаментальном решении и задаче Коши для параболической системы / Л.Н. Слободецкий // Матем. сб. - 1958. - Т. 46, № 2. - С. 229 - 258.

36. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных / Л. Хермандер. - Москва: Изд-во иностр. лит, 1959. - 132 с.

37. *Agmon S.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Comm. Pure and Appl. Math. - 1959. - V. 12. - P. 623 - 727.

38. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производных с растущими коэффициентами / Я.И. Житомирский // Изв. вузов. Математика. - 1959. - № 1. - С. 55 - 74.

39. *Березанский Ю.М.* О задаче Дирихле для уравнения колебания струны / Ю.М. Березанский // Укр. мат. журн. - 1960. - Т. 12, № 4. - С. 363 - 372.

40. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. - Москва: Госиздат. физ.-мат. лит. - 1961. - 400 с.

41. *Прокопенко Л.Н.* Задача Коши для уравнений второго порядка с растущими коэффициентами / Л.Н. Прокопенко // ДАН СССР. - 1962.

- Т. 144, № 6. - С. 1221 - 1224.

42. *Ильин А.М.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа / А.М. Ильин, А.С. Калашников, О.А. Олейник // Успехи матем. наук. - 1962. - Т. 17, № 3. - С. 3 - 46.

43. *Ивасишен С.Д.* О продолжении решений задачи Коши для параболических систем / С.Д. Ивасишен, С.Д. Эйдельман // ДАН СССР. - 1963. - Т. 149, № 6. - С. 1274 - 1277.

44. *Березанский Ю.М.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений / Ю.М. Березанский, С.Г Крейн. Я.А. Ройтберг // ДАН СССР. - 1963. - Т. 148, № 4. - С. 745 - 748.

45. *Михайлов В.П.* О задаче Дирихле для параболического уравнения, I / В.П. Михайлов // Матем. сб. - 1963. - Т. 61, № 1. - С. 40 - 64; П там же. - 1963. - Т. 62. - С. 140 - 159.

46. *Ройтберг Я.А.* Локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений / Я.А. Ройтберг // Укр. мат. журн. - 1963. - Т. 15, № 4. - С. 444 - 448.

47. *Ройтберг Я.А.* Общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами / Я.А. Ройтберг, З.Г. Шефтель // ДАН СССР. - 1963. - Т. 148, № 5. - С. 1034 - 1037.

48. *Солонников В.А.* Оценки решений общих краевых задач для эллиптических систем / В.А. Солонников // ДАН СССР. - 1963. - Т. 151, № 4. - С. 783 - 785.

49. *Ройтберг Я.А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы области обобщенных решений / Я.А. Ройтберг // ДАН СССР. - 1964. - Т. 157, № 4. - С. 798 - 801.

50. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / С.Д. Эйдельман. - Москва: Наука, 1964. - 443 с.

51. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / В.А. Солонников // Труды матем. инст. им. В.А. Стеклова. - 1965. - Т. LXXXШ.

52. *Лионс Ж.-Л.* Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. - Москва: Мир, 1971. - 371 с.

53. *Стейн И.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс. - Москва: Мир, 1974.

54. *Chabrowski J.* Representation theorems and Fatou theorems for parabolic systems in the sense of Petrovskii / J. Chabrowski // Colloc. Math. - 1974. - V. 31, № 2. - C. 301 - 315.

55. *Ниренберг Л.* Лекции о линейных дифференциальных уравнениях в частных производных / Л. Ниренберг // Успехи матем. наук. - 1975. - Т. 30, № 4. - С. 147 - 204.

56. *Михайлов В.П.* О граничных значениях решений эллиптических уравнений в области с гладкой границей / В.П. Михайлов // Мат. сб. - 1976. - Т. 101, № 2. - С. 163 - 168.

57. *Горбачук В.И.* О граничных значениях решений однородных дифференциальных уравнений / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук // ДАН

СССР - 1976. - Т. 228, № 5. - С. 1021 - 1024.

58. *Петрушко И.М.* О граничных значениях решений параболических уравнений / И.М. Петрушко // Мат. сб. - 1977. - Т. 103, № 3. - С. 404 - 429.

59. *Ройтберг Я.А.* О предельных значениях по поверхностям, параллельным границе, обобщенных решений эллиптических уравнений / Я.А. Ройтберг // ДАН СССР - 1978. - Т. 238, № 6. - С. 1303 - 1306.

60. *Крехивский В.В.* Смешанная задача для параболических уравнений / В.В. Крехивский // Краевые задачи матем. физики: Сб. науч. трудов. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. - С. 45 - 50.

61. *Ройтберг Я.А.* О существовании предельных значений обобщенных решений эллиптических уравнений на границе области / Я.А. Ройтберг // Сиб. мат. журн. - 1979. - Т. 20, № 2. - С. 386 - 396.

62. *Гущин А.К.* О граничных значениях решений эллиптических уравнений / А.К. Гущин, В.П. Михайлов // Мат. сб. - 1979. - Т. 108, № 1. - С. 3 - 21.

63. *Михайлов В.П.* О граничных свойствах решений эллиптических уравнений / В.П. Михайлов // Мат. заметки. - 1980. - Т. 27, № 1. - С. 137 - 145.

64. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач / А.А. Дезин. - Москва: Наука, 1980. - 208 с.

65. *Гущин А.К.* О граничных значениях решений эллиптических уравнений / А.К. Гущин, В.П. Михайлов // Обобщенные функции и их применение в математической физике: Тр. межд. конф. (Москва, 1980).

- Москва: Матем. ин-т им. В.А. Стеклова, ВЦ АН СССР, 1981. - С. 189 - 205.

66. *Дубинский Ю.А.* К теории задачи Коши для уравнений в частных производных / Ю.А. Дубинский // Докл. АН СССР - 1981. - Т. 259, № 4. - С. 781 - 785.

67. *Михайлов Ю.А.* О граничных значениях в $L_p, p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей / Ю.А. Михайлов // Мат. сб. - 1983. - Т. 120, № 4. - С. 569 - 588.

68. *Петрушко И.М.* О граничных и начальных условиях в $L_p, p > 1$, решений параболических уравнений / И.М. Петрушко // Мат. сб. - 1984. - Т. 125, № 4. - С. 489 - 521.

69. *Пташник Б. Й.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б.Й. Пташник. - Киев: Наукова думка, 1984. - 264 с.

70. *Богоявленский О.И.* Краевые задачи математической физики / О.И. Богоявленский, В.С. Владимиров, А.К. Гущин, Ю.Н. Дрожжинов, В.В. Жаринов, В.П. Михайлов // Тр. МИАН СССР. - Москва: Наука, 1986. - Т. 175. - С. 63 - 103.

71. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators, 2. Differential Operators with Constant Coefficients / L.Hörmander. - Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983. - 455 p.

72. *Житарашу Н.В.* О корректной разрешимости общих модельных параболических граничных задач в пространстве $H^s(\Omega), -\infty < s < \infty$

/ Н.В. Житарашу // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1987. - Т. 51, № 5. - С. 962 - 993.

73. *Михайлов В.П.* О поведении вблизи границы решений эллиптических уравнений / В.П. Михайлов // Нелинейные задачи математической физики. - Донецк: ИПММ, 1991.

74. *Житарашу Н.В.* Параболические граничные задачи / Н.В. Житарашу, С.Д. Эйдельман. - Кишинев. - 1992. - 328 с.

75. *Городецький В.В.* Задача Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу S' / В.В. Городецький, В.А. Літовченко // Допов. АН України. - 1992. - № 10. - С. 6 - 9.

76. *Городецький В.В.* Про гладкі розв'язки B-параболічних рівнянь та множини їх початкових значень / В.В. Городецький // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. - Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. - Вип. 12. - С. 268 - 272.

77. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В.В. Городецький. - Чернівці: Рута, 1998. - 225 с.

78. *Evans L.* Partial Differential Equations / L. Evans. - Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence, 1998. - 390 p.

79. *Eidelman S.D.* Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasishen, A.N. Kochubei. - Basel etc.: Birkh*ä*user, 2004. - 390 p.

80. *Городецький В.В.* Задача Діріхле для одного класу еволюційних рівнянь / В.В. Городецький, Я.М. Дрінь // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 501. Математика. - Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. - С. 24 - 32.

81. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики / Р. Рихтмайер. - М.: Мир, 1982. - 488 с.

82. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. - М.: Мир, 1972. - 740 с.

83. *Мидзохата С.М.* Теория уравнений с частными производными / С.М. Мидзохата. - М.: Мир, 1977. - 604 с.

84. *Рид М.* Методы современной математической физики. Т. 2. Гармонический анализ. Самосопряженность / М. Рид, Б. Саймон. - М.: Мир, 1978. - 395 с.

85. *Данфорд Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. - М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. - 895 с.

86. *Davies E.B.* One-parameter Semigroups / E.B. Davies. - London: Acad. Press, 1980. - 307 p.

87. *Chicone C.* Evolution Semigroups in Dinamical Systems and Differential Equations / C. Chicone, Yu. Latushkin. - American Mathematical Society, 1999. - 361 p.

88. *Gorbachuk V.I.* Boundary Value Problems for Operator Differential Equations / V.I. Gorbachuk, M.L. Gorbachuk. - Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publishers, 1991. - 347 p.

89. *Горбачук В.И.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / В.И. Горбачук, А.В. Князюк // Успехи матем. наук. - 1989. - Т. 44, № 3. - С. 55 - 91.

90. *Крейн С.Г.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн, М.И. Хазан // Итоги науки и техники. Матем. анализ. - 1983. - Т. 21. - С. 130 - 263.

91. *Laubenfels de R.* Entire solutions of the abstract Cauchy problem / R. de Laubenfels // Semigroup Forum. - 1991. - V. 42. - P. 83 - 105.

92. *Фомин В.И.* О решении задачи Коши для линейного уравнения второго порядка в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифф. уравн. - 2002. - Т. 38, № 8. - С. 1140 - 1141.

93. *Zhang X.* Infinite boundary value problems for first order differential equations in a Banach space / X. Zhang // Math. Appl. - 2005. - V. 18, № 1. - P. 153 - 160.

94. *Фомин В.И.* Об общем решении линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными ограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифф. уравн. - 2005. - Т. 41, № 5. - С. 656 - 660.

95. *Фомин В.И.* О решении задачи Коши для дифференциального уравнения второго порядка с постоянными неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве / В.И. Фомин // Дифф. уравн. - 2005. - Т. 41, № 8. - С. 1130 - 1133, 1152.

96. *Zhang X.* Boundary value problems on an infinite interval for first-order differential equations in a Banach space / X. Zhang // Acta Anal. Funct.

Appl. - 2007. - V. 9, № 3. - P. 227 - 232.

97. *Ільченко Ю.В.* Задача Коші для диференціального рівняння в банаховому просторі з узагальненим сильно позитивним операторним коефіцієнтом / Ю.В. Ільченко, А.В. Чайковський // Укр. мат. журн. - 2012. - Т. 63, № 8. - С. 1213 - 1233.

98. *Gorbachuk M.* On extensions and restrictions of semigroups of linear operators in a Banach space and their applications / M. Gorbachuk, V. Gorbachuk // Math. Nachr. - 2012. - V. 285, № 14-15. - P. 1860 - 1879.

99. *Euler L.* Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus / L. Euler // Comment. Acad. Sci. Petropolit. - 1728. - V. 3. - P. 124 - 137.

100. *Peano G.* Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari / G. Peano // Atti Reale Acad. Sci. Torino. - 1887. - V. 22. - P. 293 - 302.

101. *Nathan D.S.* One-parameter groups of transformations in abstract vector spaces / D.S. Nathan // Duke Math. J. - 1935. - V. 1. - P. 518 - 526.

102. *Nagumo M.* Einige analitische Untersuchungen in linearen, metrischen Ringen / M. Nagumo // Jup. J. Math. - 1936. - V. 13. - P. 59 - 80.

103. *Yosida K.* On the group embedded in the metrical complete ring / K. Yosida // Jup. J. Math. - 1936. - V. 13. - P. 7 - 26.

104. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук / Л. Шварц. - М.: Мир, 1965. - 412 с.

105. *Lagrange J.L.* Nouvelle espèce de calcul / J.L. Lagrange // Nouv. Mém. Acad. Rou. Sci. Bell.-Lett. - 1772. - V. 3. - P. 185 - 218.

106. *Stone M.H.* On one-parameter unitary groups in Hilbert space / M.H. Stone // Ann. Math. - 1932. - V. 33. - P. 643 - 648.

107. *Гельфанд И.М.* Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве / И.М. Гельфанд // Докл. АН СССР. - 1939. - Т. 25, № 9. - С. 713 - 718.

108. *Горбачук В.М.* Зображення групи лінійних операторів у банаховому просторі на множині цілих векторів її генератора / В.М. Горбачук, М.Л. Горбачук // Укр. мат. журн. - 2015. - Т. 67, № 5. - С. 592 - 601.

109. *Gorbachuk M.L.* The representation of a C_0-semigroup of linear operators in a Banach space on the set of entire vectors of its generator / M.L. Gorbachuk, V.M. Gorbachuk // Integr. Equ. Oper. Theory. - 2016. - V. 85, № 4. - P. 497 - 512.

110. *Autret L.* Entire vectors and time reversible Cauchy problem / L. Autret // Semigroup Forum. - 1993. - V. 46. - P. 347 - 351.

111. *Autret L.* Entire propagator / L. Autret // Proceedings of the Amer.Math. Soc. - 1994. - V. 120, № 4. - P. 1151 - 1158.

112. *Nelson E.* Analytic vectors / E. Nelson // Ann. Math. - 1959. - V. 70, № 3. - P. 572 - 615.

113. *Goodman R.W.* Analytic and entire vectors for representation of the Lie groups / R.W. Goodman // Trans. Amer. Math. Soc. - 1969. - V. 143. - P. 55 - 76.

114. *Радыно Я.В.* Пространство векторов экспоненциального типа / Я.В. Радыно // Докл. АН БССР. - 1983. - Т. 27, № 9. - С. 791 - 793.

115. *Гельфанд И.М.* Пространства основных и обобщенных функций / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. - М.: Физматгиз, 1958. - 307 с.

116. *Komatsu H.* Ultradistributions. I / H. Komatsu // J. Facul. Sci. Univ. Tokyo. - 1973. - V. 20, № 1. - P. 25 - 105.

117. *Beals R.* Semigroups and abstract Gevrey spaces / R. Beals // J. of Funct. Analysis. - 1972. - V. 10, № 3. - P. 300 - 308.

118. *Gorbachuk M.L.* On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space / M.L. Gorbachuk, Yu.G. Mokrousov // Meth. Funct. Anal. Topology. - 2002. - V. 8, № 1. - P. 23 - 29.

119. *Горбачук М.Л.* О плотности подпространств аналитических векторов замкнутого оператора в банаховом пространстве / М.Л. Горбачук, Ю.Г.Мокроусов // Функц. анализ и его прил. - 2001. - Т. 36, № 1. - С. 77 - 80.

120. *Nussbaum A.E.* A note on quasi-analytic vectors / A.E. Nussbaum // Stud. Math. - 1969. - V. 33. - P. 305 - 309.

121. *Koutry A. E.* Vecteurs α-quasi analytiques et semi-groups analytiques / A.E. Koutry // C.r. Acad. sci. Paris. - 1989. - V. 309, Ser. 1. - P. 767 - 769.

122. *Горбачук М.Л.* Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь / М.Л. Горбачук // Укр. мат. журн. - 2000. - Т. 52, № 5. - С. 596 - 607.

123. *Дубинский Ю.А.* Пределы банаховых пространств. Теоремы вложения. Приложения к пространствам Соболева бесконечного порядка / Ю.А. Дубинский // Матем. сб. - 1979. - Т. 110, № 3. - С. 428 - 439.

124. *Дубинский Ю.А.* Пределы монотонных последовательностей банаховых пространств / Ю.А. Дубинский // Докл. АН СССР. - 1980. - Т. 251, № 3. - С. 537 - 540.

125. *Kisynski J.* Semi-groups of Operators and Some of Their Applications to Partial Differential Equations / J. Kisynskii. - Lublin: AWK "MAGIC", 2013. - 100 p.

126. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators, I. Distribution Theory and Fourier Analysis / L.Hörmander. - Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983. - 462 p.

127. *Nagel R.* One-Parameter Semigroups of Posinive Operators / R. Nagel // Lect. Notes Math., V. 1184. - Berlin: Springer-Verlag, 1986.

128. *Васильев В.В.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения / В.В. Васильев, С.Г. Крейн, С.И. Пискарев // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. - 1990. - Т. 28. - С. 87 - 201.

129. *Arendt W.* One-parameter semigroups of positive operators / W. Arendt, A. Grabosch, G. Greiner // Lecture Notes Math. - 1986. - V. 1184. - 460 p.

130. *Князюк А.В.* Граничные значения бесконечно дифференцируемых полугрупп. Препринт 85.69 / А.В. Князюк. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - 47 с.

131. *Hirsh F.* Integrales de resolventes et calcus symbolique / F. Hirsh // Ann. Inst. Fourier. - 1972. - V. 22, № 4. - P. 239 - 264.

132. *Пустыльник Е.И.* О функциях позитивного оператора / Е.И. Пустыльник // Матем. сб. - 1982. - Т. 119, № 1. - P. 32 - 47.

133. *Кашпировский А.И.* О совпадении пространств $S_\alpha \bigcap S^\beta$ и S_α^β / А.И. Кашпировский // Функц. анализ и его прил. - 1980. - Т. 14, № 2. - P. 60 - 61.

134. *Горбачук М.Л.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора цілими векторами експоненціального типу / М.Л. Горбачук, В.І.Горбачук // Укр. мат. журн. - 1995. - Т. 47, № 5. - С. 616 - 628.

135. *Любич Ю.И.* Об операторах с отделимым спектром / Ю.И. Любич, В.И.Мацаев // Матем. сб. - 1962. - Т. 56, № 4. - С. 433 - 468.

136. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / Б.Я. Левин. - М.: Гос. издат. тех-теор. лит., 1956. - 632 с.

137. *Cauchy A.L.* Cours d'Analize de l'Ecole Royale Polytechnique / A.L. Cauchy // Première Partie Analyse Algéebrique. - 1821.

138. *Banach S.* Sur l'equation fonctionelle $f(x+y) = f(x)+f(y)$ / S. Banach // Fund. Math. - 1920. V. 1. - P. 123-124.

139. *Sierpinski W.* Sur l'equation fonctionelle $f(x+y) = f(x) + f(y)$ / W. Sierpsnski // Fund. Math. - 1920. V. 1. - P. 116-122.

140. *Gramegna M.* Serie di equazioni differenziali lineari edequazioni integro-differenziali / M. Gramegna // Atti Reale Acad. Sci. Torino. - 1910. - V. 45. - P. 291 - 313.

141. *Хилл Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилл. - М.: Изд-во иностр. лит., 1951. - 619 с.

142. *Горбачук В.І.* Задача Коші для диференціальних рівнянь вищих порядків у банаховому просторі / В.І. Горбачук, М.Л. Горбачук // Допов. НАН України. - 2008. - № 8. - С. 7 - 13.

143. *Hadamard J.* Le principe de Huygens / J. Hadamard // Bull. Soc. Math. France. - 1924. - V. 52. - P. 610 - 640.

144. *Gorbachuk V.M.* On the structure of solutions of operator-differential equations on the whole real axis / V.M. Gorbachuk // Meth. Funct. Anal. Topology. - 2015. - V. 21, № 2. - P. 170 - 178.

145. *Горбачук В.М.* Про розв'язки диференціальних рівнянь у банаховому просторі на всій числовій осі / В.М. Горбачук // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. - 2015. - Т. 12, № 2. - С. 113 - 125.

146. *Горбачук В.М.* Структура розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі / В.М. Горбачук // Допов. НАН України. - 2016. - № 2. - С. 7 - 12.

147. *Горбачук В.И.* Граничные значения решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук // Мат. сб. - 1977. - Т. 101, № 1. - С. 124 - 150.

148. *Князюк А.В.* Граничные значения решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / А.В. Князюк // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1984. - № 9. - С. 12 - 14.

149. *Князюк А.В.* Граничные значения решений эволюционных уравнений в банаховом пространстве / А.В. Князюк // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Киев, 1985. - 15 с.

150. *Горбачук В.И.* Граничные значения решений дифференциально-операторного уравнения второго порядка / В.И. Горбачук // Донецк: ИПММ АН УССР, 1991. - С. 35.

151. *Горбачук В.И.* Некоторые граничные задачи для дифференциально-операторного уравнения второго порядка / В.И. Горбачук // Успехи матем. наук. - 1991. - Т. 46, Вып. 6. - С. 49-50.

152. *Горбачук В.И.* О граничных значениях гармонических в шаре функций / В.И. Горбачук // Успехи мат. наук. - 1990. - Т. 45, № 4. - С. 112.

153. *Gorbachuk V.M.* On solutions of parabolic and elliptic type differential equations on $(-\infty, \infty)$ in a Banach space / V.M. Gorbachuk // Meth. Funct. Anal. Topology. - 2008. - V. 14, № 2. - P. 177 - 183.

154. *Engel K.-J.* One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations / K.-J. Engel, R. Nagel. - Berlin: Springer, 2000.

155. *Gorbachuk M.L.* On behavior at infinity of solutions of parabolic differential equations in a Banach space / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk // Meth. Funct. Anal. Topology. - 2014. - V. 20, № 3. - P. 274 - 283.

156. *Gorbachuk M.L.* On the well-posed solvability in some classis of entire functions of the Cauchy problem for differential equations in a Banach space / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk // Meth. Funct. Anal. Topology. - 2005. - V. 11, № 2. - P. 113 - 125.

157. *Komatsu H.* Fractional powers of operators / H. Komatsu // Pacific J. Math. - 1966. - V. 19, № 2. - P. 285 - 346.

158. *Lax P.D.* A Fragmen-Lindelöf theorem in harmonic analysis and its application to some questions in the theory of elliptic equations / P.D. Lax // Comm Pure Appl. Math. - 1957. - V. 10. - P. 361 - 389.

159. *Горбачук В.М.* Умови існування обмежених розв'язків диференціального рівняння у банаховому просторі на всій числовій осі / В.М. Горбачук // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. - 2016. - Т. 13, № 1. - С. 88 - 97.

160. *Титчмарш Е.* Теория функций / Е. Титчмарш. - М.: Наука, 1980. - 464 с.

161. *Кашпировский А.И.* Граничные значения решений некоторых классов однородных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве / А.И. Кашпировский // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Киев, 1981. - 18 с.

162. *Кнюх Б.И.* О представлении и граничных значениях решений однородного дифференциально-операторного уравнения второго порядка / Б.И. Кнюх // Укр. мат. журн. - 1986. - Т. 38, № 1. - С. 101 - 104.

163. *Кнюх Б.И.* Об одной задаче для дифференциального уравнения Штурма-Лиувилля с операторными коэффициентами / Б.И. Кнюх // Укр. мат. журн. - 1986. - Т. 38, № 2. - С. 242 - 245.

164. *Фишман И.П.* О представлении общего решения дифференциально-операторного уравнения / И.П. Фишман // Укр. мат. журн. - 1984. - Т. 36, № 6. - С. 804 - 808.

165. *Фишман И.П.* О граничных значениях решений дифференциально-операторных уравнений / И.П. Фишман // Укр. мат. журн. - 1985. -

Т. 37, № 3. - С. 388 - 393.

166. *Фишман И.П.* О граничных значениях решений дифференциально-операторных уравнений / И.П. Фишман // Исследования по теоретическим и прикладным вопросам математики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. - С. 81.

167. *Федорова Л.Б.* Граничные значения решений неоднородных дифференциально-операторных уравнений / Л.Б. Федорова // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1983. - № 7. - С. 22 - 25.

168. *Федак И.В.* О корректной разрешимости задачи Коши для неоднородного дифференциально-операторного уравнения, связанного с колебаниями стратифицированной жидкости / И.В. Федак // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. - С. 52 - 57.

169. *Горбачук М.Л.* Задача Коши для дифференциально-операторного уравнения, связанного с колебаниями стратифицированных жидкостей / М.Л. Горбачук, И.В. Федак // Докл. АН СССР. - 1987. - Т. 297, № 1. - С. 14 - 17.

170. *Горбачук М.Л.* Операторний підхід до теореми Коші-Ковалевської / М.Л. Горбачук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 1998. - Т. 41, № 2. - С. 7 - 12.

171. *Gorbachuk M.L.* Equations connected with the stratified fluid motion / M.L. Gorbachuk, A.Ya. Shklyar // Nonlinear and turbulent processes in physics, V. 2. - Kiev: Naukova dumka, 1988. - P. 32 - 35.

172. *Vallée-Poussin CH.J.* Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle / CH.J. Valle-Poissin // Bul. Ac. Belgique, 1910.

173. *Jackson D.* On approximation by trigonometric sums and polynomials /D. Jackson // Trans. Amer. Math. Soc. - 1912. - V. 14. - P. 491 - 515.

174. *Bernstein S.* Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynômes /S. Bernstein // Acta Math. - 1913. - V. 37. - P. 1 - 57.

175. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер // М: Наука, 1965. - 407 с.

176. *Крейн М.Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций / М.Г. Крейн // Докл. АН СССР. - 1938. - Т. 18, № 4, 5. - С. 245 - 251.

177. *Крейн М.Г.* О наилучшей аппроксимации непрерывных дифференцируемых функций на всей вещественной оси / М.Г. Крейн // Докл. АН СССР. - 1938. - Т. 18, № 9. - С. 619 - 624.

178. *Favard J.* Sur les meilleurs procédés d'approximation de certains classes de functions par des polynô trigonométriques / J. Favard // Bul. Sci. Math. - 1937. - V. 61. - № 9. - С. 209 - 224, 243 - 266.

179. *Стечкин С.Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами / С.Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. Математика. - 1956. - Т. 20. - С. 643 - 648.

180. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций / С.Б. Стечкин // Изв. АН СССР. Сер. Математика. - 1951. - Т. 15. - С. 219 - 242.

181. *Никольский С.М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами / С.М. Никольский // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. - 1945. - Т. 15. - С. 1 - 58.

182. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский . - М: Наука, 1977. - 456 с.

183. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. - М: Гос. издат. Физ.-мат. лит., 1960. – 664 с.

184. *Тиман А.Ф.* Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p / А.Ф. Тиман // Матем. сб. - 1958. Т. 46, № 1. - С. 125 - 132.

185. *Zygmund A.* The approximation of smooth functions by typical of their Fourier series / A. Zygmund // Duke Math J. - 1945. - V. 12, № 4. - P. 695 - 704.

186. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. - М: Наука, 1977. - 510 с.

187. *Степанец А.И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А.И. Степанец. - Киев: Наукова думка, 1981. - 339 с.

188. *Степанец А.И.* Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. - 2002. - Т. 54, № 1. - С. 106 - 124.

189. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона и точные значения поперечников классов функций в пространствах $S^p, 1 \le p < \infty$, / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. - 2004. - Т. 56, № 5. - С. 595 - 605.

190. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n-поперечников классов (ψ, β)-дифференцируемых функций в L_2 / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. - 2016. - Т. 66, 68, № 6, 8, 10. - С. 723, 745; 1021 - 1036; 1299 - 1319.

191. *Романюк А.С.* Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных / А.С. Романюк // Праці Інституту математики НАН України. - 2012. - Т. 93. - 352 с..

192. *Сердюк А.С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в метриці простору L_p / А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. - 2005. - Т. 57, №10. - С. 1395 - 1408.

193. *Степанец А.И.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций / А.И. Степанец, А.С. Сердюк // Укр. мат. журн. - 2000. - Т. 52, №3. - С. 375 - 395.

194. *Купцов Н.П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов / Н.П. Купцов // Успехи мат. наук. - 1968. - Т. 23, № 4. - С. 118 - 178.

195. *Терехин А.П.* Ограниченная группа операторов и наилучшее приближение / А.П. Терехин // Дифф. уравнения и вычислительная математика. - 1975. - Вып. 2. - С. 3 - 28.

196. *Торба С.М.* Прямі та обернені теореми наближених методів розв'язування задачі Коші / С.М. Торба // Укр. мат. журн. - 2007. - Т. 59, № 6. - С. 838 - 852.

197. *Grushka Ya.* Direct theorems in the theory of approximation of vectors in a Banach space with exponential type entire vectors / Ya. Grushka, S. Torba // Meth. Funct. Anal. Topology. - 2007. - V. 13, № 3. - P. 267 - 278.

198. *Горбачук М.Л.* Прямі і обернені теореми в теорії наближень у гільбертовому просторі / М.Л. Горбачук, Я.І. Грушка, С.М. Торба // Допов. НАН України. - 2004. - № 9. - С. 20 - 25.

199. *Grushka Ya.I.* Direct approximation problems for semigroups in Hilbert space / Ya.I. Grushka // Meth. Funct. Anal. Topology. - 1999. - V. 5, № 2. - P. 12 - 21.

200. *Горбачук М.Л.* О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве / М.Л. Горбачук, В.В. Городецкий // Укр. мат. журн. - 1984. - Т. 36, № 4 - С. 500 - 502.

201. *Горбачук М.Л.* О решениях дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве / М.Л. Горбачук, В.В. Городецкий // Успехи мат. наук. - 1984. - Т. 39, № 4. - С. 140.

202. *Кашпіровський О.І.* Апроксимація розв'язків диференціально-операторних рівнянь за допомогою операторних поліномів / О.І. Кашпіровський, Ю.В. Митник // Укр. мат. журн. - 1998. - Т. 50, № 11 - С. 1506 - 1516.

203. *Кашпіровський О.І.* Апроксимація гладких розв'язків операторно-диференціальних рівнянь / О.І. Кашпіровський // Наук. зап. НАУКМА. Фіз.-мат. науки. - 2002. - Т. 20 - С. 16 - 21.

204. *Торба С.М.* Характеризація швидкості збіжності одного наближеного методу розв'язування абстрактної задачі Коші / С.М. Торба, О.І. Кашпіровський // Укр. мат. журн. - 2008. - Т. 60, № 4 - С. 557 - 569.

205. *Горбачук В.И.* О пространствах бесконечно дифференцируемых векторов неотрицательного самосопряженного оператора / В.И. Горбачук // Укр. мат. журн. - 1983. - Т. 35, № 5 - С. 617 - 621.

206. *Ball J.M.* Strongly continuous semigroups, weak solutions and the variation constants formula / J.M. Ball // Proc. Amer. Math. Soc. - 1977. - V. 63, № 2. - P. 370 - 373.

207. *Горбачук М.Л.* Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца / М.Л. Горбачук, Я.І. Грушка, С.М. Торба // Укр. мат. журн. - 2005. - Т. 57, № 5 - С. 633 - 643.

208. *Бернштейн С.Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени / С.Н. Бернштейн. - Соч. М: Изд-во АН СССР, 1952, Т. 1. - С. 11 - 104.

209. *Gorbachuk V. I.* On summability of expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators / V.I. Gorbachuk // Soviet Math. Dokl. - 1987. - V. 35, № 1 - P. 11 - 15.

210. *Михлин С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин // М: Высшая школа, 1977. - 395 с.

211. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев // М: Наука, 1988. - 386 с.

212. *Goldberg S.* Unbounded Linear Operators: Theory and Applications / S. Goldberg // New York: Mc Graw-Hill, 1966. - 395 c.

213. *Nagy de Sz B.* On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space / B. de Sz Nagy // Acta Sci. Math. Szeged. - 1947. - V. 11, № 3. - P. 152 - 157.

214. *Горбачук М.Л.* Про одне узагальнення еволюційного критерію Березанського самоспряженості оператора / М.Л. Горбачук, В.І. Горбачук // Укр. мат. журн. - 2000. - Т. 52, № 5 - С. 608 - 615.

215. *Горбачук В.М.* Про коректну розв'язність задачі Діріхле для диференціально-операторних рівнянь у банаховому просторі / В.М. Горбачук, М.Л. Горбачук // Укр. мат. журн. - 2006. - Т. 58, № 11 - С. 1462 - 1476.

216. *Крейн С.Г.* Граничные задачи для уравнения в гильбертовом пространстве / С.Г. Крейн, Г.И. Лаптев // Докл. АН СССР. - 1962. - Т. 146, № 3 - С. 535 - 538.

217. *Крейн С.Г.* Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве, I / С.Г. Крейн, Г.И. Лаптев // Дифф. уравнения, П. - 1966. - № 3 - С. 382 - 390.

218. *Крейн С.Г.* Корректность граничных задач для дифференциальнного уравнения второго порядка в банаховом пространстве, П / С.Г. Крейн, Г.И. Лаптев // Дифф. уравнения, П. - 1966. - № 7 - С. 919 - 926.

219. *Соболевский П.Е.* О дифференциальных уравнениях второго порядка в банаховом пространстве / П.Е. Соболевский // Докл. АН СССР. - 1962. - Т. 146, № 4 - С. 774 - 777.

220. *Соломяк М.З.* Дифференциальные уравнения в пространствах Банаха и их приложения / М.З. Соломяк // Изв. высш. учебн. зав. Математика, 1. - 1960. - С. 198 - 209.

221. *Balakrischnan A.* Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them / A. Balakrischnan // Pacific J. Math. - 1960. - V. 10, № 2 - С. 419 - 439.

222. *Gorbachuk V.M.* The Dirichlet problem for a differential-operator equation of second order on the half-line / V.M. Gorbachuk // Selecta Mathematica Sovietica. - 1991. - V. 10, № 1 - P. 81 - 89.

223. *Привалов И.И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций / И.И. Привалов. - М.-Л.: Гостехизат, 1950. - 336 с.

224. *Fatou P.* Series trigonometricues et series de Taylor / P. Fatou // Acta Math. - 1906. - V. 30. - P. 335 - 400.

225. *Arendt W.* Local integrated semigroups: evolution with jumps of regularity / W. Arendt, O. Mennaoui, V. Keyantuo // J. Math. Anal. Appl. - 1994. - V. 186. - P. 572 - 595.

226. *Gorbachuk M.L.* On behavior at infinity of solutions of elliptic differential equations in a Banach space / M.L. Gorbachuk, V.M. Gorbachuk // Meth. Funct. Anal. Topology. - 2017. - V. 23, № 2 . - P. 108 - 122.

227. *Крейн М.Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М.Г. Крейн. - Киев: Академия наук Укр. ССР, Ин-т математики, 1964. - 186 с.

228. *Далецкий Ю.Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. - М.:

Наука, 1970. - 534 с.

229. *Arendt W.* Asymptotic stability of Schrödinger semigroups on $L^1(\mathbb{R}^n)$ / C.J.K. Batty, Ph. Benilan // Math. Z. - 1992. - V. 209. - P. 511 - 518.

230. *Batty C.J.K.* Asymptotic behavior of semigroups of linear operators / C.J.K. Batty // Functtional Analysis and Operator Theory. - Banach Centre Publications. - 1994. - V. 30. - P. 35 - 52.

231. *Huang F.L.* Exponential stability of linear dynamical systems in Banach spaces / F.L. Huang // J. Diff. Eq. - 1993. - V. 104. - P. 307 - 324.

232. *Latushkin Y.* Evolutionary semigroups and Lyapunov theorems in Banach spaces / Y. Latushkin, S. Montgomery-Smith // J. Func. Anal. - 1995. - V. 127. - P. 173 - 197.

233. *Lyubich Yu. I.* Asymptotic stability of linear differential equations on Banach spaces / Yu. I. Lyubich, Q.V. Phóng // Studia Math. - 1988. - V. 88. - P. 37 - 42.

234. *Neerven J.* Exponential stability of operators and operator semigroups / J. Neerven // J. Func. Anal. - 1995. - V. 130. - P. 293 - 309.

235. *Scylar G.M.* On the asymptotic stability of a linear differential equation in a Banach space / G.M. Scylar, V. Ya. Shirman // Teor. Funksii Funtsional Anal. Prilozhen. - 1982. - V. 37. - P. 127 - 132.

236. *Zheng Q.* The exponential stability and the perturbation problem of linear evolution systems in Banach spaces / Q. Zheng // J. Sichuan Univ. - 1988. - V. 25. - P. 401 - 411.

237. *Мамедов Я.Д.* Асимптотическая устойчивость дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченным оператором / Я.Д. Мамедов // Уч. зап. Азерб. гос. ун-та, сер. физ.-мат. и хим. н. - 1960. - Т. 1. - С. 3 - 7.

238. *Люстерник Л.А.* Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. - М.: Изд-во иностр. лит., 1956. - 252 с.

239. *Березанский Ю.М.* Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. - Львів: "Університетська бібліотека", 2014. - 559 с.

240. *Горбачук В.І.* Про поведінку на нескінченності орбіт рівномірно стійких півгруп / В.І. Горбачук, М.Л. Горбачук // Укр. мат. журн. - 2006. - Т. 58, № 2. - С. 148 - 159.

241. *Laubenfels de R.* Inverses of generators / R. de Laubenfels // Proc. Amer. Math. Soc. - 1988. - V. 104, № 2. - P. 443 - 448.

242. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения / А.М. Ляпунов // Собр. соч., 2. - М.: Изд. АН СССР, 1956.

243. *Ишлинский А.Ю.* Об устойчивости вращения на струне осесимметричных твердых тел с полостями, заполненными жидкостью / А.Ю. Ишлинский, М.Л. Горбачук, М.Е. Темченко // Сб. статей "Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства". - М.: "Машиностроение", 1986. - С. 234 - 247.

244. *Massera J.* Linear Differential Equations and Function Spaces / J. Massera, J. Schaffer. - New York and London: Academic Press, 1966.

245. *Gorbachuk M.L.* On behavior of weak solutions of operator differential equations on $(0, \infty)$ / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk // Modern Analysis and Applications. Operator Theory: Advances and Applications. - Berlin: Birkhäuser, 2009. - V. 191. - P. 115 - 126.

246. *Якубович В.А.* Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и контроля являются гильбертовыми, с применениями к некоторым задачам синтеза оптимальных контролей, II / В.А. Якубович // Сиб. мат. журн. - 1975. - Т. 16, № 5. - С. 828 - 845.

247. *Бутырин А.А.* О поведении решений операторно-дифференциальных уравнений на бесконечности / А.А. Бутырин // Укр. мат. журн. - 1994. - Т. 46, № 7. - С. 809 - 813.

248. *Tomilov Yu.V.* On asymptotic behavior of C_0-semigroups / Yu.V. Tomilov // Conf. on Math. Analysis and Applications. Abstracts. - Lincöping, Sweden. - 1996. - P. 87.

249. *Городній М.Ф.* Стійкість обмежених розв'язків диференціальних рівнянь з малим параметром у банаховому просторі / М.Ф. Городній // Укр. мат. журн. - 2003. - Т. 55, № 7. - С. 889 - 900.

250. *Эйдельман С.Д.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений / С.Д. Эйдельман, Я.М. Дринь // Приближенные методы математического анализаю - Киев, 1974. - С. 60 - 99.

251. *Городецький В.В.* Про слабку стабілізацію розв'язків задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь / В.В. Городецький, В.А. Літовченко // Інтегральні перетворення та їх застосування до

крайових задач: Зб. наук. праць. - Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. - Вип. 8. - С. 191 - 195.

252. *Городецький В.В.* Про слабку стабілізацію розв'язків задачі Коші для лінійних параболічних рівнянь з оператором Бесселя / В.В. Городецький, І.В. Житарюк, В.П. Лавренчук // Допов. НАН України. - 1993. - № 2 . - С. 5 - 9.

253. *Маркин М.В.* О поведении на бесконечности ограниченных решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М.В. Маркин // Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений: Сб. научн. трудов. - Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1991. - С. 56 - 62.

254. *Кочубей А.Н.* О стабилизации решений диссипативных гиперболических уравнений / А.Н. Кочубей // Дифференц. уравнения. - 1987. - Т. 22, № 10. - С. 1771 - 1778.

255. *Кочубей А.Н.* О стабилизации решений диссипативных гиперболических уравнений с почти периодическими коэффициентами / А.Н. Кочубей // Дифференц. уравнения. - 1987. - Т. 23, № 12. - С. 2087 - 2094.

256. *Горбачук В.М.* Про розв'язність диференціальних рівнянь у неархімедовому банаховому просторі в класі аналітичних вектор-функцій / В.М. Горбачук // Допов. НАН України. - 2010. - № 12. - С. 7 - 13.

257. *Gorbachuk V.I.* On holomorphic solutions of some inhomogeneous linear differential equations in a Banach space over a non-Archimedean field / V.I. Gorbachuk, V.M. Gorbachuk // p-Adic Numbers, Ultrametric

Analysis and Applications. - 2010. - V. 2, № 1. - P. 21 - 28.

258. *Gefter S.* On holomorphic solutions of some implisit differential equations in a Banach space / S. Gefter, T. Stulova // Operator Theory: Adv. Appl. - 2009. - V. 191. - P. 323 - 332.

259. *Gorbachuk M.L.* On completeness of the set of root vectors for unbounded operators / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk // Meth. Funct. Anal. Topology. - 2006. - V. 12, № 4. - P. 353 - 362.

260. *Владимиров В.С.* Суперанализ, 1. Дифференциальное исчисление / В.С. Владимиров, И.В. Волович // ТМФ. - 1984. - Т. 59, № 1. - С. 3 - 27.

261. *Владимиров В.С.* Суперанализ, 1. P-Adic Quantum Mechanics / В.С. Владимиров, И.В. Волович // Commun. Math. Phys. - 1989. - Т. 123. - С. 659 - 676.

262. *Владимиров В.С.* P-Adic numbers in mathematical physics / V.S. Vladimirov, I.V. Volovich, E.I. Zelenov // Singapoure: World Scientific Publ., 1993.

263. *Volovich I.V.* Harmonic analysis and p-adic strings / I.V. Volovich // Lett. Math. Phys. - 1988. - V. 16. - P. 61 - 64.

264. *Kochubei A.N.* Heat equation in a p-adic ball / A.N. Kochubei // Meth. Funct. Anal. Topology. - 1996. - V. 22, № 3-4. - P. 53 - 58.

265. *Kochubei A.N.* Pseudo-differential operators over the field of p-adic numbers / A.N. Kochubei // Nonlinear Boundary Value Problems. - 1997. - V. 7, № 3-4. - P. 120 - 125.

266. *Кочубей А.Н.* Фундаментальные решения псевдодифференциальных уравнений, связанных с p-адическими квадратичными формами / А. Н. Кочубей // Изв. РАН. - 1998. - Т. 62, № 6. - С. 103 - 124.

267. *Kochubei A.N.* Heat equation in the non-Archimedean infinite-dimensional analysis / A.N. Kochubei // Abstracts of the Conference on Partial Differential Equations PDE-2000. - Clausthab. - 2000. - P. 29 - 30.

268. *Kochubei A.N.* Pseudo-differential Equations and Stochastics over non-Archimedean Fields. - Marcel Dekker, New York, 2001. - 320 p.

269. *Горбачук В.М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка в банаховом пространстве / В.М. Горбачук // Укр. мат. журн. - 1988. - Т. 40, № 5. - С. 629-632.

270. *Горбачук В.М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторных уравнений /В.М. Горбачук // Докл. АН СССР - 1989. - Т. 308, № 1. - С. 23-27.

271. *Горбачук В.М.* Условия экспоненциальной устойчивости дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве / В.М. Горбачук // Успехи мат. наук - 1990. - Т. 45, № 4. - С. 128.

272. *Горбачук В.М.* О представлении и асимптотической единственности решений абстрактного параболического уравнения / В.М. Горбачук // Успехи мат. наук. - 1993. - Т. 48, № 4. - С. 181.

273. *Горбачук В.М.* Про єдиність розв'язку задач Діріхле і Неймана для диференціально-операторного рівняння другого порядку еліптично-

го типу на півосі / В.М. Горбачук // Укр. мат. журн. - 1994. - Т. 46, № 11. - С. 1564-1568.

274. *Gorbachuk V.M.* On the exponential stability of solutions of differential equations in a Banach space / V.M. Gorbachuk // Нелинейные граничные задачи. - Сборник научных трудов Ин-та прикладной математики и механики НАН Украины. - 2001. - Вып. 11. - С. 52-56.

275. *Горбачук В.М.* Про розв'язність $(n+1)$-разів інтегровної задачі Коші в класі аналітичних вектор-функцій / В.М. Горбачук // Доповіді НАН України . - 2002. - № 6. - С. 7-10.

276. *Горбачук М.Л.* Умови існування обмежених, майже періодичних і періодичних розв'язків еліптичних рівнянь у банаховому просторі / М.Л. Горбачук, В.М. Горбачук // Доповіді НАН України. - 2009, № 11. - С. 7-12.

277. *Горбачук В.М.* Зображення груп лінійних операторів у банаховому просторі степеневими рядами / В.М. Горбачук, М.Л. Горбачук // Доповіді НАН України. - 2013. - № 9. - С. 22-28.

278. *Горбачук В.М.* Прямі й обернені теореми теорії наближень розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі / В.М. Горбачук // Доповіді НАН України. -2016. - № 7. - С. 12-18.

279. *Gorbachuk V.M.* On approximation of solutions of operator-differential equations with their entire solutions of exponential type / V.M. Gorbachuk // Methods Funct. Anal. Topology. - 2016. - V. 22, № 3. - P. 245-255.

280. *Горбачук В.М.* Простори гладких та узагальнених векторів генератора аналітичної півгрупи та їх застосування / В.М. Горбачук, М.Л.

Горбачук // Укр. мат. журн. - 2017. - Т. 69, № 4. - С. 479-508.

281. *Горбачук В.М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторного уравнения первого порядка / В.М. Горбачук, М.Л. Горбачук // Функциональные методы в прикладной математике и математической физике.Тезисы докладов Всесоюзной школы молодых ученых, т. 2. - Ташкент. - 1988. - С. 70-71.

282. *Горбачук В.М.* Про асимптотичну єдиність розв'язку абстрактного обернено параболічного рівняння / В.М. Горбачук // Міжн. наук. конф., присв. пам'яті акад. М.П.Кравчука. - Київ-Луцьк. - 1992. Тези. - С. 47.

283. *Горбачук В.М.* Про єдиність розв'язку задачі Неймана для диференціального рівняння другого порядку в банаховому просторі / В.М. Горбачук // Всеукраїнська наук. конф. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь". - Дрогобич. - 1994. Тези. - С. 40.

284. *Gorbachuk V.M.* Solvability and asymptotic uniqueness of the Cauchy problem for an inversely parabolic equation in a Banach space / V.M. Gorbachuk // The Third International Congress on Industrial and Applied Mathematics. - Hamburg. - 1995. Abstracs. - P. 79.

285. *Gorbachuk V.M.* Evolutionary completeness criterion for the set of root vectors of a compact operator / V.M. Gorbachuk // Міжнародна конференція з функціонального аналізу. - Київ. - 2001. Тези. - С. 33.

286. *Gorbachuk V.M.* Locally integrated semigroups of normal operators in a Hilbert space / V.M. Gorbachuk // International Conference "Differential

Equations and Related Topics”. - Moscow. - 2001. - Abstracts. - P. 151-152.

287. *Горбачук В.М.* Локально інтегровані півгрупи нормальних операторів у гільбертовому просторі / В.М. Горбачук // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька. - Дрогобич. - 2004. Тези. - С. 55.

288. *Gorbachuk V.M.* On solvability of (n+1)-times integrable Cauchy problem in the class of finite order and finite type entire vector-valued functions / V.M. Gorbachuk // Internatinal Conference "Analysis and Related Topics". - Lviv. - 2005. Abstracts. - P. 31.

289. *Gorbachuk V.M.*On uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for a second-order differential equation in a Banach space / V.M. Gorbachuk // International Conference on Diferential Equations Dedicated to the 100th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky. - Lviv. - 2006. Abstracts. - P. 97.

290. *Gorbachuk V.M.* On the well-posedness of the Dirichlet problem for elliptic-type operator-differential equations / V.M. Gorbachuk // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька. - Дрогобич. - 2007. Abstracts. - С. 71.

291. *Gorbachuk V.M.* On existence of finite order and finite type entire solutions for differential equations in a Banach space on the whole real axis / V.M. Gorbachuk // International Conference on Analysis and Topology. - Lviv. - 2008. Abstracts. - P. 19.

292. *Горбачук В.М.* Про класичні розв'язки диференціальних рівнянь елі-

птичного типу на всій осі у банаховому просторі / В.М. Горбачук // Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. - Київ. - 2008. Тези. - С. 98.

293. *Горбачук В.М.* Про розв'язки неоднорідних еліптичних рівнянь у банаховому просторі на всій осі / В.М. Горбачук // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М.Боголюбова та 70-річчя М.І.Нагнибіди. - Чернівці. - 2009. Тези. - С. 29.

294. *Горбачук В.М.* Умови існування обмежених розв'язків еліптичних рівнянь у банаховому просторі / В.М. Горбачук // Український математичний конгресс 2009. - Київ. - 2009. Тези.

295. *Горбачук В.М.*Про аналітичність розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь у банаховому просторі над полем p-адичних чисел / В.М. Горбачук // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. - Київ. - 2010. Тези. - С. 113.

296. *Горбачук В.М.* Про цілі розв'язки неоднорідних диференціальних рівнянь у банаховому просторі над полем p-адичних чисел / В.М. Горбачук // Міжнародна конференція "Сучасні проблеми аналізу присв'ячена 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету ім. Ю. Федьковича. - Чернівці. - 2010. Тези. - С. 61.

297. *Горбачук В.І.* Про коректну розв'язність у класі аналітичних векторфункцій задачі Коші для диференціальних рівнянь у банаховому просторі над неархімедовим полем / В.І. Горбачук, В.М. Горбачук // International Conference of Functional Analysis. - Lviv. - 2010. Abstracts of Reports. - С. 101.

298. *Горбачук В.М.* Про коректну розв'язність у класі локально аналітичних вектор-функцій диференціальних рівнянь у банаховому просторі / В.М. Горбачук, В.І. Горбачук // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". - Івано-Франківськь. - 2011. Тези доповідей. - С. 39.

299. *Горбачук В.М.* Об аналитических решениях дифференциальных уравнений в банаховом пространстве над неархимедовым полем / В.М. Горбачук // International Conference "Differential Equations and Related Topics", dedicated to Ivan G. Petrovskii. - Moscow. - 2011. Abstracts. - P. 181

300. *Горбачук В.М.* Про зображення однопараметричних груп лінійних операторів у банаховому просторі степеневими рядами / В.М. Горбачук // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. - Київ. - 2012. Тези доп. - С. 72.

301. *Gorbachuk V.M.* On approximation of solutions of the Cauchy problem for parabolic differential equations in a Banach space / V.M. Gorbachuk // International Conference "Theory of Approximation of Functions and its Applications", dedicated to the 70th anniversary of corresponding member of NAS of Ukraine, Professor A.I. Stepanets (1942-2007). - Kamianets-Podilsky. - 2012. Abstracts. - P. 128.

302. *Gorbachuk V.M.* The representation of one-parameter linear semigroups in the power series form / V.M. Gorbachuk // International conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. - Lviv. - 2012. Abstracts. - P. 282.

303. *Gorbachuk V.M.* On uniqueness of solutions of the homogeneous Dirichlet

problem for differential equatons in a Banach space on a semiaxis / V.M. Gorbachuk // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука. - Київ. - 2014. Тези. Т. 1. - С. 17.

304. *Горбачук В.М.* Про розв'язки диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу у банаховому просторі на всій осі / В.М. Горбачук // Четверта Міжнародна Ганська Конференція, присв'ячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. - Чернівці. - 2014. Тези. - С. 35-36.

305. *Горбачук В.М.* Про структуру розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на всій числовій осі / В.М. Горбачук // Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука. - Київ. - 2015. Матеріали конференції. Т. 1. - С. 61-62.

306. *Горбачук В.М.* Про орбіти групи лінійних операторів у банаховому просторі / В.М. Горбачук // Наукова конференція, присв'ячена 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге. - Чернівці. - 2015. Тези. - С.32-33.

307. *Gorbachuk V.M.* On solutions of differential equations in a Banach space on $(-\infty, \infty)$ / V.M. Gorbachuk // International V. Skorobohatko Mathematical Conference . - Drohobych. - 2015. Abstracts. - P. 49.

308. *Горбачук В.М.* Про орбіти C_0-груп лінійних операторів у банаховому просторі / В.М. Горбачук // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Кравчука. - Київ. - 2016. Матеріали конференції. II. - С. 76-77.

309. *Горбачук В.М.* Про наближення розв'язків задачі Коші для абстра-

ктного параболічного рівняння в банаховому просторі / В.М. Горбачук // Вісімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Кравчука. - Київ. - 2017. Матеріали конференції. І. - С. 43-47.