ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Горбачука Володимира Мирославовича «Властивості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі», подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Актуальність теми. Абстрактні диференціальні рівняння є зручним узагальненням для скінченних та нескінченних систем диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь з частинними похідними, інтегро-диференціальних та функціонально-диференціальних рівнянь. Ці класи рівнянь адекватно описують реальні процеси з фізики, економіки, біології, тощо. Тому їх дослідження важливе як з теоретичної, так і з практичної точки зору. При цьому ключовим етапом розв'язування великого класу задач з дослідження абстрактних диференціальних рівнянь є вивчення властивостей розв'язків лінійних диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами, яке тісно пов'язане з теорією напівгруп операторів. Ця теорія активно розвивалася в роботах Е.Хілле, К.Іосіди, В.Феллера, Т.Като, Р.С.Філліпса, І.Міядери, С.Крейна, М.Вішика, О.Ладиженської, Ю.Далецького, М.Красносельського, Дж.Ліонса, Дж.Гольдстейна, М.Горбачука, В.Горбачук, С.Піскарьова, Ю.Кондратьєва та багатьох інших математиків. Проте мало дослідженими залишалися, зокрема, питання щодо поведінки розв'язків таких рівнянь при наближенні до кінців нескінченного інтервалу, коректності деяких крайових задач для таких рівнянь, наближення цих розв'язків цілими розв'язками експоненціального типу, зображення розв'язку у вигляді степеневого ряду (проблема Колмогорова) або експоненціальної границі (проблема Хілле) від генератора відповідної напівгрупи на максимальному скрізь щільному у початковому просторі лінійному многовиді. Саме цим актуальним питанням і присвячена дисертаційна робота В.М.Горбачука.

Основні наукові результати роботи. Дисертаційна робота В.М.Горбачука складається зі вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел. Також вона містить анотацію українською та англійською мовами.

У вступі обгрунтовується актуальність теми досліджень, наукова новизна та теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Також висвітлено особистий внесок здобувача та апробація результатів дисертації.

У передмові наведено огляд літератури за темою дисертації, а також вказано основні напрями досліджень.

У першому розділі розв'язано дві класичні проблеми – про відшукання для довільної C_0-групи лінійних операторів у банаховому просторі максимальних щільних у ньому підмножин, на елементах яких ця напівгрупа зображується відповідно у вигляді експоненціального степеневого ряду (проблема Колмогорова) або експоненціальної границі (проблема Хілле) від її генератора.

Основним результатом другого розділу є теорема 2.11 про зображення класичного розв'язку $y(t)$ диференціального рівняння

$$\left(\frac{d}{dt}-A\right)^n\left(\frac{d}{dt}+A\right)^m y(x)=0,\ t\in R, \tag{1}$$

у якому A – генератор обмеженої аналітичної C_0-напівгрупи, $0\in\rho(A)$, n,m – невід'ємні цілі числа. Також доведено аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа у просторі розв'язків цього рівняння. Потім у другому розділі більш детально досліджується m-гармонічне рівняння

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}-B\right)^m y(x)=0,\ t\in R, \tag{2}$$

у якому B – позитивний оператор. Зокрема, при $m=1$ отримано умови, за яких його розв'язок допускає продовження до цілої функції скінченного порядку і скінченного типу; досліджено питання про існування узагальненого розв’язку та обмеженого класичного розв’язку рівняння (2); для неоднорідного рівняння (2) при $m=1$ знайдено умови, які гарантують існування єдиного обмеженого на усій числовій осі розв'язку.

У третьому розділі отримано прямі й обернені теореми про наближення слабких розв’язків рівняння

$$y'(t)+Ay(t)=0,\ t\in[0,\infty), \tag{3}$$

у якому A – невід'ємний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі, цілими розв'язками експоненціального типу. Також вивчається питання щодо можливості продовження слабкого розв'язку цього рівняння до цілої функції скінченного порядку і скінченного типу. У подальшому ці результати узагальнюються на випадок банахового простору, оснащеного гільбертовими просторами з позитивною і негативною у сенсі Березанського нормами.

Також наведено цікаве нетривіальне застосування цих результатів для випадку, коли оператор A породжується еліптичним диференціальним виразом другого порядку у просторі $L_2(\Omega)$, де Ω – обмежена область в R^n з гладкою межею, і деякою граничною умовою.

У четвертому розділі для обмеженої аналітичної C_0-напівгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ у банаховому просторі $\boldsymbol{B}$ визначаються локально опуклі простори $\boldsymbol{B}_{(+)}$ гладких векторів та $\boldsymbol{B}_{(-)}$ узагальнених векторів її генератора. Це дозволяє продовжити звуження початкової напівгрупи до C_0-групи у просторі $\boldsymbol{B}_{(+)}$, а також побудувати таку аналітичну C_0-напівгрупу на $\boldsymbol{B}_{(-)}$ з визначеним на всьому $\boldsymbol{B}_{(-)}$ і неперервним генератором $\hat{A}$, що звуження $\hat{A}$ на $D(A)$ співпадає з A. В результаті вдається отримати зображення розв’язків рівняння (1) і у випадку, коли $t \in (0,\infty)$.

Також більш детально досліджуються розв'язки рівняння другого порядку

$$y''(t) - By(t) = 0,\ t \in (0,\infty), \tag{4}$$

у якому B – слабко позитивний оператор, та розв'язки рівняння (1), яке розглядається на півосі.

У п'ятому розділі досліджуються розв'язки задачі Діріхле для рівняння (4) з позитивним оператором B. Вивчається питання про зображення таких розв'язків та їхню єдиність. Також досліджується неоднорідна задача Діріхле і задача Неймана для рівняння (4), а також вивчається питання про розв'язність $n+1$ раз інтегровної задачі Коші у класі аналітичних функцій.

Одним з основних результатів шостого розділу є наслідок 6.1 про те, що у випадку слабко позитивного оператора B рівняння (4) є рівномірно стійким (рівномірно експоненціально стійким) тоді і тільки тоді, коли такою ж є напівгрупа $\{e^{tA}\}_{t\ge 0}$, де $A = -B^{1/2}$. Також у цьому розділі отримано нові критерії рівномірної експоненціальної стійкості C_0-напівгрупи. Зокрема, теорема 6.4 з цієї серії узагальнює відповідні результати Датка, Пазі і М.Крейна.

У сьомому розділі описано аналітичні розв'язки неоднорідного диференціального рівняння $y^{(m)}(\lambda) - Ay(\lambda) = f(\lambda)$ над полем p-адичних чисел. Також обґрунтовуються два методи їх апроксимації многочленами і вивчається питання про розв'язність задачі Коші для цього рівняння.

Наукова новизна одержаних результатів. В дисертації В.М.Горбачука вперше одержано такі результати:

- Розв'язано проблему Колмогорова та проблему Хілле про опис максимальних, щільних у даному банаховому просторі множин, на елементах яких C_0-група лінійних операторів зображується відповідно у вигляді експоненціального степеневого ряду або експоненціальної границі від її генератора.
- Знайдено умови на елемент банахового простору, за яких експоненціальна функція від замкненого оператора, задана на цьому елементі, є цілою функцією скінченного порядку і скінченного типу.
- Описано множину усіх розв'язків на числовій осі та на півосі параболічних та еліптичних (зокрема, m-гармонічного) диференціально-операторних рівнянь. Доведено аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа для таких рівнянь.
- Отримано зображення розв'язків однорідної та неоднорідної задачі Діріхле для еліптичного диференціально-операторного рівняння на півосі. Знайдено умови, за яких ця задача є коректною.
- Описано множину усіх розв'язків однорідної задачі Неймана для еліптичного диференціально-операторного рівняння на півосі, а також $n+1$ раз інтегровної задачі Коші у класі аналітичних функцій.

- Знайдено критерії рівномірної та рівномірно екпоненціальної стійкості еліптичного диференціально-операторного рівняння на півосі, а також умови, за яких це рівняння є рівномірно, але не рівномірно екпоненціально стійким.
- Описано множину усіх аналітичних розв'язків неоднорідного диференціального рівняння m-го порядку у банаховому просторі, яке розглядається над полем p-адичних чисел.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Її результати та розроблені методи можуть бути застосовані як для подальшого розвитку абстрактної теорії напівгруп і дослідження властивостей розв'язків диференціально-операторних рівнянь, так і для отримання результатів щодо якісної поведінки розв'язків для широкого класу диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Всі результати, що виносяться на захист, є новими, математично обґрунтованими. Доведення теорем коректні. Висновки відповідають змісту дисертації.

Результати дисертаційної роботи Горбачука В.М. з достатньою повнотою опубліковані в 22 статтях у наукових виданнях, що входять до переліку фахових видань з фізико-математичних наук, зокрема 7 – у виданнях, включених до наукометричної бази Scopus, та 27 тезах наукових конференцій.

Автореферат відповідає змісту дисертації і відображає її основні положення. У дисертації і авторефераті для опублікованих у співавторстві робіт визначено особистий внесок дисертанта. Основні результати дисертації апробовані на багатьох конференціях та наукових семінарах.

Дисертація відповідає встановленим вимогам щодо кількості публікацій за темою дисертації у фахових виданнях, а також щодо об'єму та оформлення дисертаційних робіт.

Критичні зауваження та побажання.

1. Варто було б вказати, що аналогічне до теореми 2.12 твердження, але тільки для рівняння першого порядку зі змінним операторним коефіцієнтом, наведено на с.247 книги Д.Хенрі «Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений», Москва: Мир, 1985.
2. Корисно було б навести приклад напівгрупи, для якої виконується умова (6.9) теореми 6.4, але не виконується її аналог з одним і тим же числом p для всіх елементів банахового простору.
3. Варто було б навести більш детальні доведення теореми 6.5 та наслідків 7.1 – 7.4.
4. Доцільно було б вказати у змісті номери сторінок з висновками до кожного з розділів і уточнити назву пункту 5.8.
5. У дисертації зустрічаються окремі описки та мовні помилки (див., наприклад, с.6, 72, 139, 196, 211, 228, 245).

Висновки. Зазначені зауваження не мають принципового значення і не впливають на загальну позитивну оцінку дисертації. За актуальністю теми, обсягом виконаних досліджень, новизною і науковою цінністю отриманих результатів дисертаційна робота Горбачука Володимира Мирославовича «Властивості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі» задовольняє вимогам пп. 9,10,12,13,14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою КМУ № 567 від 24.07.2013 р. (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами КМУ № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.06.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор – Горбачук Володимир Мирославович – заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент,
декан механіко-математичного факультету
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка,
доктор фізико-математичних наук,
професор М.Ф. Городній

Підпис засвідчую
Вчений секретар
Караульна
20.03.2018 р.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Україна * Ідентифікаційний код 02070944

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д26.206.01 20.03.2018р.
секретар ради

Інститут математики Академії наук України
Канцелярія