Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Горбачука Володимира Мирославовича

"Властивості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі",

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертаційна робота Горбачука В.М. присвячена дослідженню диференціальних рівнянь першого, другого та вищих порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами у банаховому просторі. У вигляді таких рівнянь можна записати чимало рівнянь з частинними похідними, в тому числі й модельні. Це дає змогу з єдиної точки зору поглянути як на звичайні диференціальні оператори, так і на оператори з частинними похідними.

Теорія абстрактних лінійних диференціальних рівнянь є однією з базових у сучасному функціональному аналізі. Початок цієї теорії та її тісний зв'язок з теорією півгруп покладений роботами Е. Хілле та К. Іосіди, які в термінах теорії півгруп операторів сформулювали перші теореми існування розв'язків задачі Коші для рівняння вигляду $y' = Ay$ з необмеженим оператором A у банаховому просторі, з'ясувавши при цьому, що для зображення розв'язку задачі Коші треба вміти відновлювати півгрупу лінійних операторів за її генератором. Півгрупові методи дослідження різних класів рівнянь використовували в своїх працях В. Феллер, П. Лакс, А. Мільгрем, В. Лянце, Т. Като, М. Крейн, С. Крейн, Ю. Далецький, Р. Філліпс, С. Агмон, С. Ейдельман, М. Горбачук, В. Горбачук, Г. Комацу, Л. Ніренберг, А. Пазі, А. Кочубей, В. Михайлець, П. Соболєвський, Ю. Любич та багато ін. Фундаментальні результати в цьому напрямку викладено в низці відомих монографій.

Останнім часом область застосувань теорії абстрактних диференціальних рівнянь і тісно пов'язаної з нею теорії півгруп значно розширилась і включає, крім теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, математичну фізику, теорію апроксимації, динаміку руху рідини тощо (С. Ангенент, В. Васільєв, С. Гефтер, М. Горбачук, В. Горбачук, М. Городній, В. Деркач, С. Івасишен, Дж. Кісінський, Ф. Клемент, А. Кочубей, О. Кутовий, Ж. Неервен, Б. де Пахтер, Х. Хейман та ін.).

На сьогодні є актуальними і викликають значний науковий інтерес такі напрями досліджень в теорії абстрактних диференціальних рівнянь: структура розв'язків всередині нескінченного інтервалу диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі та їх поведінка при наближенні до його кінців, побудова наближених розв'язків диференціально-операторних рівнянь цілими розв'язками експоненціального типу, коректна розв'язність задач Коші, Діріхле, Неймана, зображення C_0-групи лінійних операторів у банаховому просторі на множині цілих векторів її генератора (проблеми Колмогорова і Хілле), стійкість абстрактних диференціальних рівнянь у банаховому просторі і пов'язаних з ними півгруп, структура та властивості розв'язків диференціальних рівнянь у неархімедовому банаховому просторі. У дисертаційній роботі даються відповіді на зазначені питання.

Дисертація складається зі вступу, передмови, семи розділів, висновків і списку використаних джерел. У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету й задачі дослідження, відзначено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, наведено відомості про апробацію результатів роботи та публікації за темою дисертації.

У передмові наведено огляд літератури за темою дисертації та напрямів її досліджень.

У розділі 1 розв'язано відомі проблеми Колмогорова і Хілле: доведено, що простір $G_{(1)}(A)$цілих векторів оператора A, де A – генератор C_0-групи лінійних операторів, є максимальною множиною векторів, на яких ця група зображується у вигляді степеневого ряду або експоненціальної границі від оператора A (теореми 1.6 та 1.7). Результат щодо зображення C_0- групи експоненціальною границею від її генератора узагальнюється в теоремі 1.8 на випадок довільного замкненого, щільно заданого в банаховому просторі X оператора A. Крім того, у розділі встановлено, що на векторах з класу Жевре $G_{\{\gamma\}}(A)$, $\gamma < 1$, або $G_{(\gamma)}(A),\gamma \leq 1$, функція $exp(zA)x$ для щільно заданого замкненого оператора A в X,є цілою у таких просторах або локально аналітичною у просторі аналітичних векторів оператора A. Важливо також відзначити, що, фактично, знайдено два способи побудови C_0-групи безпосередньо за її генератором, без використання певних функцій від нього, на відміну від інших відомих підходів, які є складними при безпосередньому їх використанні у процесі відновлення (у таких підходах C_0-група відновлюється, наприклад, за резольвентою оператора A або за певними його наближеннями).

У розділі 2 вивчається питання про опис всіх розв'язків рівняння

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0, \{n, m\} \subset \mathbb{N}, t \in \mathcal{J}, \qquad (1)$$

де A – генератор аналітичної C_0-півгрупи в банаховому просторі X, $\mathcal{J} = (-\infty, +\infty)$, всередині області. Конкретні реалізації X, A та n, m в (1) містять у собі різні класи рівнянь з частинними похідними у різних функціональних просторах.

У підрозділі 2.5 описано всі розв'язки рівняння (1) на $(-\infty, +\infty)$ (теорема 2.11), а саме, якщо A – генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи в X і $0 \in \rho(A)$, то вектор-функція $y(t)$ є розв'язком рівняння (1) на $(-\infty, +\infty)$ тоді і лише тоді, коли її можна подати у вигляді

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k exp(tA) f_k + \sum_{k=0}^{m-1} t^k exp(-tA) g_k, f_k, g_k \in G_{(1)}(A),$$

де $\rho(A)$ – резольвентна множина оператора A. Встановлено, що в просторі всіх розв'язків рівняння (1) на $(-\infty, +\infty)$ діє аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа.

У підрозділах 2.2 та 2.3 досліджується однорідне та, відповідно, неоднорідне m-гармонічне рівняння з позитивним оператором B, знайдено формулу для його розв'язків всередині проміжку $(-\infty, +\infty)$ (теореми 2.4, 2.6) і показано, що кожен з них може бути продовжений до цілої вектор-функції у просторі цілих векторів оператора $A = -B^{1/2}$. У випадку гармонічного рівняння $\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right) y(t) = f(t)$ ($m = 1$ у підрозділі 2.4) знайдено умови на $f(t)$, які гарантують існування єдиного обмеженого, зокрема, періодичного або майже періодичного за Борелем його розв'язку. Для розв'язків встановлено аналог принципу Фрагмена-Ліндельофа і теореми Ліувілля.

Розділ 3 присвячений вивченню питання про наближення слабких розв'язків рівняння

$$y'(t) + Ay(t) = 0, t \in [0, +\infty), \qquad (2)$$

де A – невід'ємний самоспряжений оператор у гільбертовому просторі, цілими розв'язками експоненціального типу. У підрозділі 3.1 дається опис множини S_0 усіх слабких розв'язків рівняння (2), які допускають цілі експоненціального типу продовження (зауважимо, що у випадку обмеженого оператора Aкожний слабкий розв'язок рівняння (2) володіє такою властивістю). Доведено (теорема 3.1), що слабкий розв'язок $y(t)$рівняння (2) належить до S_0 тоді і тільки тоді, коли його можна подати у вигляді $y(t) = e^{-tA} f$, де f– цілий вектор експоненціального типу оператора $A(f \in G_{\{0\}}(A))$.

У підрозділі 3.2 доведено аналог теореми Джексона, а саме, встановлено зв'язок між найкращим наближенням слабкого розв'язку $y(t)$ рівняння (2) його цілими розв'язками експоненціального типу та k-тим узагальненим модулем гладкості. Прямі й обернені теореми, в яких з'ясовується зв'язок між степенем гладкості розв'язку і швидкістю прямування до нуля його найкращого наближення, доведено в підрозділі 3.3. Знайдено необхідні й достатні умови для можливості продовження слабкого розв'язку рівняння (2) до цілої вектор-функції заданого скінченного типу й скінченного порядку (теорема 3.6).

Результати щодо прямих і обернених теорем у підрозділі 3.4 поширено на банахові простори, оснащені гільбертовими з позитивними і негативними нормами (терема 3.7). У підрозділі 3.5 розглядається випадок, коли оператор Aв (2) має суто дискретний спектр, при цьому аналог теореми 3.7 формулюється в термінах власних чисел оператора A.

Отримані результати застосовано до конкретного випадку, коли оператор Aпороджується еліптичним диференціальним виразом другого порядку в просторі $L_2(\Omega)$ (Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею) і певною граничною умовою (підрозділ 3.6). У підрозділі 3.7 дається опис усіх слабких розв'язків гіперболічного рівняння $y'(t) = Ay(t)$, $t \in \mathbb{R}$, де A – генератор обмеженої C_0-групи лінійних операторів у банаховому просторі, як і у параболічному випадку, вивчається питання про можливість наближення будь-якого слабкого розв'язку рівняння його цілими розв'язками експоненціального типу. Підрозділ 3.8 присвячений гіперболічному випадку в гільбертовому просторі.

У розділі 4 для генератора обмеженої аналітичної C_0-півгрупи введено локально-опуклі простори основних (підрозділ 4.1) та узагальнених (підрозділ 4.2) векторів оператора A. Досліджено звуження і, відповідно, розширення заданої півгрупи на ці простори. За допомогою введених просторів основних і узагальнених векторів оператора A описано всі розв'язки всередині інтервалу $(0, +\infty)$ диференціально-операторного рівняння (1) у припущенні, що $0 \in \rho(A)$, рівняння $y''(t) = By(t)$, де B – слабо позитивний оператор в X (підрозділи 4.6, 4.5, теореми 4.11, 4.10). На підставі цих тверджень встановлено, що будь-який розв'язок зазначених рівнянь має граничне значення при $t \to +0$ у просторі $G'_{(1)}(A)$ та $G'_{(1)}(B^{1/2})$ відповідно і є аналітичною на $(0, +\infty)$ вектор-функцією в X. Крім того, доведено, що розв'язки задачі Коші $y'(t) = Ay(t)$, $t \in (0, +\infty)$, $y(0) = x \in G_{(1)}(\mathrm{A})$, де A – генератор аналітичної C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ в X із властивістю $Ker e^{tA} = \{0\}$, $\forall\, t > 0$, є цілими вектор-функціями, можна подати у вигляді степеневого ряду.

Розділ 5 стосується задачі Діріхле для рівняння $y''(t) = By(t)$, $t \in (0, +\infty)$, з слабо позитивним оператором B в X. У підрозділах 5.1 – 5.3 знайдено умови, які потрібно накласти на поведінку на нескінченності розв'язку однорідної задачі Діріхле на $(0, +\infty)$, щоб гарантувати його єдиність. При цьому розглядаються випадки самоспряженого оператора в гільбертовому просторі та позитивного оператора в банаховому просторі. Встановлено, що у випадку самоспряженого оператора розв'язок $y(t) = \frac{\sinh(tA)}{A} g$ однорідної задачі Діріхлена нескінченності має експоненціальний ріст тоді і тільки тоді, коли вектор g є цілим експоненціального типу для оператора A. Описано також розв'язки, які мають тип, вищий за експоненціальний. Показано, що неоднорідна задача Діріхле розв'язується однозначно з точністю до розв'язків однорідної.

У підрозділі 5.4 дається зображення розв'язків неоднорідної задачі Діріхле та наводяться умови її однозначної розв'язності. У випадку слабо позитивного оператора B в рівнянні $y''(t) - By(t) = 0,\ t \in (0, +\infty)$, узагальнено результат А. Князюка і Дж. Неервена щодо єдиності її розв'язку в класі двічі неперервно диференційовних на $[0, +\infty)$ вектор-функцій, які задовольняють умову $\|y(t)\| = 0(t),\ t \to \infty,\ y(0) = 0$, на випадок, коли $y(0) = 0$ і $\|y(t)\| = 0(t^n)$ з деяким $n \in \mathbb{N}$.

У підрозділі 5.5 вивчається поведінка на нескінченності обмежених розв'язків неоднорідної задачі Діріхле. Можливість застосування методу степеневих рядів для наближення розв'язку однозначно розв'язної неоднорідної задачі Діріхле обґрунтовується в підрозділі 5.6. Знайдено умови, необхідні й достатні для існування та єдиності розв'язку задачі Неймана, наведено формулу для його зображення (підрозділ 5.7).

Розділ 6 присвячений вивченню стійких, тобто, обмежених в околі нескінченності розв'язків рівняння $y''(t) - By(t) = 0,\ \ t \in (0, +\infty)$, зі слабо позитивним оператором B в X. Одержано критерії їх рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості. З'ясовано, що за умови рівномірної, але не рівномірної експоненціальної стійкості півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ її орбіти $e^{tA}x$ можуть прямувати до нуля при наближенні до нескінченності як завгодно повільно, однак для такої півгрупи експоненціальне спадання для всіх її орбіт неможливе.

У теоремі 6.4 встановлено, що якщо

$$\forall x \in X\ \exists p_x > 0{:}\ \int_0^\infty ||e^{tA}x||^{p_x} dt < \infty, \tag{3}$$

де $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ – C_0-півгрупа в X, то $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ є рівномірно експоненціально стійкою. Цей результат узагальнює результат Датка, Пазі, Крейна, де ставилась умова існування одного й того самого для всіх $x \in X$ числа p в (3). В умові (3) p може бути різним для різних x. Більше того, якщо півгрупа $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ нескінченно диференційовна (аналітична), то достатньо, щоб нерівність в (3) виконувалась принаймні для нескінченно диференційовних (аналітичних) векторів оператора A. У випадку рівномірної, але не рівномірної експоненціальної стійкості встановлено зв'язок між порядком спадання розв'язку $y(t)$ при наближенні t до нескінченності та властивостями його початкових даних.

У розділі 6 знайдено також умову, при виконанні якої множина всіх стійких розв'язків, що спадають експоненціально до нуля при $t \to \infty$, є достатньо широкою (взагалі кажучи, така множина може складатися лише з функції $y(t) \equiv 0$).

У розділі 7 розглядається рівняння $y^{(m)}(\lambda) - Ay(\lambda) = f(\lambda)$, де A – замкнений лінійний оператор у банаховому просторі Xнад полем Ω комплексних p-адичних чисел, що має обернений A^{-1}, визначений на всьому X, а $f(\lambda)$ – локально-аналітична в нулі вектор-функція. Вивчається питання існування і єдиності розв'язку в класі локально аналітичних в околі нуля вектор-функцій, його зображення і неперервної залежності від правої частини.

Головний результат цього розділу міститься в підрозділі 7.2. Тут знайдено умови на функцію f, за яких розглядуване рівняння має єдиний розв'язок у просторі аналітичних у крузі $\{\lambda \in \Omega: |\lambda|_p < \rho\}$ вектор-функцій, дається формула для розв'язку і встановлюється його неперервна залежність від f. Більш того, показано, що: 1) якщо $f(\lambda)$ – многочлен, то існує єдиний розв'язок у класі многочленів, при цьому степені $f(\lambda)$ і розв'язку однакові; 2) якщо $f(\lambda)$ – ціла вектор-функція, то рівняння має єдиний цілий розв'язок. Наведено два способи апроксимації розв'язку. В обох випадках оцінюється похибка наближення.

Розглянуто задачу Коші для зазначеного рівняння з початковими даними $y^{(k)}(0) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, яка полягає у відшуканні локально-аналітичної в 0 вектор-функції $y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$ зі значеннями в $\mathcal{D}(A)$, що задовольняє рівняння з правою частиною$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$. Знайдено умови, за яких ця задача має розв'язок і якщо це так, то коли цей розв'язок є єдиним.

Широке і грамотне використання математичних понять і підходів забезпечує високий науковий рівень проведених досліджень. Всі основні результати дисертаційної роботи є новими та строго доведеними. Вони в достатньому обсязі викладені в 23 працях: у 22 статтях у наукових фахових виданнях, з них 8 у співавторстві і 14 – самостійних, 2 статті у закордонних наукових періодичних виданнях, 7 статей у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних, а також у 27 тезах міжнародних математичних конференцій.

Зміст автореферату правильно і повністю відображає основні положення дисертації.

Дисертаційна робота оформлена акуратно і згідно з вимогами, які ставляться до оформлення дисертацій. Викладення матеріалу чітке, логічне і послідовне, хоча робота містить деякі незначні описки. Суттєвих зауважень до змісту роботи немає.

Дисертація повністю відповідає паспорту спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз і є завершеною науковою роботою. В ній отримано нові обґрунтовані фундаментальні результати, які є вагомим і значним внеском у теорію лінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі. Результати роботи та методи їх одержання можуть знайти застосування в теорії рівнянь з частинними похідними параболічного та гіперболічного типів, теорії функціональних просторів, теорії операторів у гільбертових та бананових просторах.

На підставі вищесказаного вважаю, що дисертаційна робота Горбачука Володимира Мирославовича "Властивості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі" відповідає всім вимогам щодо докторських дисертацій зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз, зокрема, вимогам постанови Кабінету Міністрів України за № 567 від 24 липня 2013 року "Про затвердження Порядку присудження наукових ступенів" зі змінами і доповненнями, внесеними постановами Кабінету Міністрів України від 19 серпня 2015 року за № 656, від 30 грудня 2015 року за № 1159, від 27 липня 2016 року за № 567 і наказом № 40 МОН України від 12 січня 2017 року, а її автор Горбачук В.М. заслуговує присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент –
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри алгебри
та інформатики Чернівецького
національного університету
імені Юрія Федьковича В.В.Городецький

Підпис В.В. Городецького засвідчую
Учений секретар Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
"12" 03 2018 р.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26.206.01 15.03.2018 р.
секретар ради Артемченко Н.Я.