В І Д Г У К

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук

Деркача Володимира Олександровича

про дисертацію

Горбачука Володимира Мирославовича

”*Властивості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі*”

на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз

Дисертація присвячена дослідженню розв'язків диференціальних рівнянь на всій числовій осі або півосі, коефіцієнтами яких є необмежені оператори у банаховому просторі як над архімедовим, так і неархімедовим полем комплексних чисел, а саме:

а) описові розв'язків всередині розглядуваного інтервалу та вивченню їх поведінки при наближенні до його кінців;

б) з'ясуванню умов, за яких розв'язок допускає продовження до цілої вектор-функції скінченного порядку і скінченного типу;

в) питанням коректної постановки крайових задач (Коші, Діріхле, Неймана) для таких рівнянь;

г) прямим та оберненим теоремам наближення розв'язків рівняння його цілими розв'язками експоненціального типу;

д) дослідженню стійкості таких рівнянь і півгруп, асоційованих з ними;

е) проблемам Колмогорова та Хілле відшукання щільних у вихідному просторі множин, на елементах яких розв'язок абстрактного параболічного рівняння може бути представлений степеневим рядом (А. Колмогоров) або експоненціальною границею (Е. Хілле) від генератора півгрупи або групи, пов'язаних з рівнянням;

є) розв'язності у деяких класах аналітичних вектор-функцій рівнянь у банаховому просторі над полем p-адичних чисел.

Упродовж останніх 50 років у розвитку теорії диференціально-операторних рівнянь відбувся помітний прогрес завдяки працям таких відомих математиків, як Е. Хілле, Р. Філліпс, К. Іосіда, М. Крейн, С. Крейн, В. Лянце, С. Агмон, Л. Ніренберг, Ю. Далецький, С. Ейдельман, П. Соболевський, М. Вішик, О. Ладиженська, А. Пазі, С. Івасишен, М. Горбачук, А. Кочубей, А. Городній, В. Городецький та багато-багато інших. Добре відомо, яку роль у цій теорії відіграють півгрупові методи, котрі стали стимулом для розгляду в дисертації питань, пов'язаних з побудовою C_0-півгрупи (групи) за її генератором, а отже, й зображенням розв'язків деяких видів диференціально-операторних рівнянь степеневим рядом або експоненціальною границею від її генератора. Як бачимо, тематика дисертації досить широка і придатна для застосувань у математичній фізиці, теорії апроксимації, гідродинаміці. З огляду на все це, її актуальність не викликає сумнівів.

Дисертація складається з анотації (українською та англійською мовами), вступу, передмови, семи розділів, висновків і списку використаних джерел.

У вступі обгрунтовано актуальність теми дисертації, указано зв'язок з науковими програмами, сформульовано мету й завдання досліджень, визначено наукову новизну і практичне значення одержаних результатів, наведено відомості про їх апробацію, установи та організації, де вони доповідались і обговорювались, публікації за темою дисертації.

У першому розділі наведено попередні відомості та результати з теорії півгруп лінійних операторів у локально-опуклих, зокрема банахових просторах, які мають безпосереднє відношення до тематики дисертації, а також з теорії гладких векторів замкненого оператора A у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ (класів Жевре, просторів аналітичних, цілих та цілих експоненціального типу векторів), наведено умови щільності в $\mathfrak{B}$ цих просторів у випадку, коли A – генератор C_0-групи або обмеженої аналітичної півгрупи. Основний результат розділу стосується побудови експоненціальної функції $\exp(zA)$ від замкненого оператора A – однієї з найважливіших задач математичного аналізу. Теорія півгруп дає її розв'язок, коли A – генератор C_0-півгрупи, що є рівносильним коректній розв'язності задачі Коші для рівняння

$$y'(t) = Ay(t). \tag{1}$$

В дисертації ця проблема розв'язана для довільного замкненого оператора в $\mathfrak{B}$, множина цілих векторів якого є щільною в $\mathfrak{B}$, її розхв'зок записується у вигляді $y(t) = e^{tA}y_0,\ y_0 = y(0)$, де e^{tA} – C_0-півгрупа, породжена оператором A.

У випадку обмеженого A півгрупа e^{tA} збігається з оператор-функцією $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$. Якщо ж A не є обмеженим, то e^{tA} не завжди збігається з зазначеним степеневим рядом. У 30-х роках минулого ст. А. Колмогоровим була поставлена проблема існування для довільної C_0-групи e^{tA} максимального щільного в $\mathfrak{B}$ підпростору $\mathfrak{B}_1$, на елементах x якого група e^{tA} може бути подана у вигляді степеневого ряду. Невдовзі, у 1946 р. Е. Хілле підняв питання існування множини $\mathfrak{B}_2$ з такими самими, як у $\mathfrak{B}_1$, властивостями і такої, що $e^{tA}x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{tA}{n}\right)^n x,\ x \in \mathfrak{B}_2$ (проблема Хілле). Проблема Колмогорова була розв'язана І.М. Гельфандом (1939) для обмежених груп. У дисертації обидві проблеми розв'язано для довільної C_0-групи (Теореми 1.5, 1.7). Показано, що такі множини $\mathfrak{B}_1$ та $\mathfrak{B}_2$ існують і що $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$ є не що інше, як простір $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ цілих векторів оператора A. Більше того, цей результат поширено в Теоремі 1.8 на аналітичні C_0-півгрупи. У Теоремі 1.5 також показано, що для векторів x з класів Жевре $\mathfrak{G}_{\{\gamma\}}(A)$ типу Рум'є з $\gamma < 1$ та типу Бьорлінга $\mathfrak{G}_{(\gamma)}(A)$ з $\gamma \le 1$ вектор-функція $\exp(zA) := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n A^n}{n!}x$ є цілою у цих просторах відповідно.

У другому розділі дисертації отримані результати застосовуються для опису усіх розв'язків диференціальних рівнянь

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)^n \left(\frac{d}{dt} + A\right)^m y(t) = 0,\ t \in \mathcal{I}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0,\ n + m \le 1, \tag{2}$$

де $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$ або $\mathcal{I} = (0, \infty)$, A – генератор аналітичної C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ у банаховому просторі $\mathfrak{B}$. Зауважимо, що конкретні реалізації простору $\mathfrak{B}$, оператора A та n, m в (2) містять у собі низку класів рівнянь з частинними похідними у різних функціональних просторах. Відмітимо також, що при $\mathcal{I} = (-\infty, \infty)$ раніше розглядалися лише випадки $n = 1, m = 0; n = 0, m = 1$ та $n = m \geq 1$. В Теоремі 2.11 описано усі розв'язки такого рівняння всередині $(-\infty, \infty)$ і показано, що кожний його розв'язок допускає продовження до цілої вектор-функції зі значеннями в $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$; більше того, для розв'язків діють аналоги теорем Фрагмена-Ліндельофа і Ліувілля (Теорема 2.12).

Детальніше розглянуто випадки абстрактних параболічного і обернено параболічного рівнянь першого порядку та m-гармонічного рівняння вигляду

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - B\right)^m y(t) = 0,$$

де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, та його частинний випадок – гармонічне рівняння ($m = 1$). В усіх цих випадках описано розв'язки всередині $(-\infty, \infty)$ і доведено, що будь-який з них допускає продовження до цілої вектор-функції, знайдено умови, за яких продовження має певний скінченний порядок і скінченний тип і множина таких розв'язків є щільною у множині всіх його розв'язків. Досліджено також узагальнені розв'язки неоднорідного m-гармонічного рівняння.

У третьому розділі описано усі слабкі розв'язки рівняння

$$y'(t) + Ay(t) = 0, \quad t \in [0, \infty), \tag{3}$$

де A – самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Доведено прямі та обернені теореми теорії наближень таких розв'язків цілими розв'язками експоненціального типу, які встановлюють взаємно однозначну відповідність між швидкістю прямування до нуля найкращого наближення $\mathcal{E}_r(y)$ розв'язку $y(t)$ та степенем його гладкості. В Теоремі 3.2 встановлено співвідношення між найкращим наближенням $\mathcal{E}_r(y)$ слабкого розв'язку рівняння (3) та його k-им модулем неперервності $\omega_k(t, y)$ – аналог добре відомої теореми Джексона про апроксимацію неперервної періодичної функції тригонометричними поліномами. Знайдено умови в термінах поведінки $\mathcal{E}_r(y)$ для можливості продовження слабкого розв'язку $y(t)$ до цілої вектор-функції скінченного порядку і скінченного типу (Теорема 3.5). Одержані у цьому розділі результати переформульовано для випадку банахового простору, оснащеного гільбертовими з позитивною та негативною в сенсі Ю.М. Березанського нормами. Наведено застосування до рівнянь з частинними похідними.

У четвертому розділі для аналітичної C_0-півгрупи $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ з генеатором A у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ введено деякі локально-опуклі простори гладких та узагальнених векторів оператора A, вивчено властивості звужень та, відповідно, розширень заданої півгрупи на ці простори. Введення цих просторів дало змогу отримати зображення для усіх розв'язків рівняння (2) на півосі $(0, \infty)$ всередині цього інтервалу та дослідити їх граничні значення в нулі (Теорема 4.11).

У п'ятому розділі розглянуто задачу Діріхле для рівняння

$$y''(t) - By(t) = 0, \quad t \in (0, \infty), \tag{4}$$

де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$, яка полягає у відшуканні для заданого $f \in \mathfrak{G}'_{(1)}(A)$, $A = -B^{1/2}$ розв'язку, що задовольняє умову $y(t) \to f$ у просторі $\mathfrak{G}'_{(1)}(A)$ при $t \to 0$. В Теоремі 5.7 показано, що неоднорідна задача ($f \neq 0$) розв'язується однозначно з точністю до розв'язків однорідної ($f = 0$). Знайдено умови на поведінку розв'язку однорідної задачі Діріхле, які гарантують його єдиність (Теорема 5.9).

Розглянуто також однорідну задачу Неймана для рівняння (4), де B – слабо позитивний оператор в $\mathfrak{B}$. Її вивчення базується на існуванні взаємно однозначної відповідності між розв'язками цієї задачі та однорідної задачі Діріхле для цього ж рівняння.

В розділі 6 досліджуються стійкі (тобто обмежені в околі нескінченно віддаленої точки) розв'язки рівняння (4). Рівняння (4) називається рівномірно стійким (відп. рівномірно експоненціально стійким) , якщо для будь-якого його стійкого розв'язку $y(t)$ виконується рівність $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ (відп. $\exists \omega > 0 : \lim\limits_{t\to\infty} e^{\omega t} y(t) = 0$). Варто зауважити, що стійкість розглядуваного рівняння еквівалентна стійкості того самого виду C_0-півгрупи, породженої оператором $A = -B^{1/2}$. В дисертації наведено умови в термінах спектру оператора A, необхідні для рівномірної та рівномірної експоненціальної стійкості рівняння (4). В Теоремі 6.4 знайдено наступний критерій рівномірної експоненціальної стійкості C_0-півгрупи: рівномірна експоненціальна стійкість півгрупи $\left\{e^{tA}x\right\}_{t\geq 0}$ еквівалентна нерівності

$$\forall x \in \mathfrak{B}\ \exists p_x > 0 : \int\limits_0^\infty \left\|e^{tA}x\right\|^{p_x} dt < \infty,$$

який узагальнює відповідні результати А. Пазі, Р. Датка, М. Крейна у тому розумінні, що у них $p_x \equiv p$ не залежить від x. У випадку рівномірної, але не рівномірної експоненціальної стійкості рівняння (4) встановлено зв'язок між порядком спадання розв'язків $y(t)$ при наближенні t до нескінченності та властивостями їх початкових умов (Теорема 6.5).

У сьомому розділі описано всі аналітичні розв'язки диференціального рівняння n-го порядку над полем p-адичних чисел. Встановлено неперервну залежність розв'язку від правої частини рівняння. Наведено два способи апроксимації розв'язку і в обох випадках оцінки похибки наближення та нев'язки (відхилу). Наведено приклади застосування до рівнянь з частинними похідними.

Зауваження. У дисертації трапляються описки, наприклад:
(1) на стор. 51 треба замінити $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ на $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$;
(2) на стор. 58 треба замінити "пролсторі" на "просторі";
(3) на стор. 68 у реченні " $\mathfrak{F}_{\tau_1}$ є підпростором простору $\mathfrak{F}_{\tau_1}$ " треба замінити останнє $\mathfrak{F}_{\tau_1}$ на $\mathfrak{F}_{\tau_2}$;
(4) на стор. 79 при визначенні $\mathfrak{A}_c(\mathfrak{B})$ треба замінити $r \to 0$ на $r \to \infty$;
(5) на стор. 101 (4-тий рядок доведення) треба замінити "розв'язоком" на "розв'язком";
(6) на стор. 211 у формулах (5.17) і тій, що під нею, у виразі $\lim\limits_{t\to 0} y'(t) = 0$ потрібно $y'(t)$ замінити на $y(t)$.

Ці недоліки не є суттєвими і не впливають на загальне враження від дисертації.

Переходячи до загальної оцінки дисертації, відмітимо, що в ній отримано низку нових, вагомих і цікавих результатів в теорії абстрактних диференціальних рівнянь у банаховому просторі, які охоплюють різноманітні класи диференціальних рівнянь з частинними похідними, включаючи модельні, та теорії граничних задач для них, в теорії апроксимації розв'язків таких рівнянь цілими розв'язками експоненціального типу, теорії стійкості диференціально-операторних рівнянь, теорії півгруп лінійних операторів у банаховому просторі, у якій було розв'язано відомі проблеми Колмогорова та Хілле, у дослідженні диференціальних рівнянь і задачі Коші для них у неархімедовому банаховому просторі над полем p-адичних чисел. Усі наведені в дисертації результати є новими. Вони чітко сформульовані й строго доведені, вчасно опубліковані, що забезпечує достовірність основних дисертаційних положень та висновків з них. Автореферат правильно відображає зміст дисертації.

На підставі сказаного вважаю, що дисертаційна робота "Властивості розв'язків диференціальних рівнянь у банаховому просторі на нескінченному інтервалі" за актуальністю тематики і одержаними в ній науковими результатами повністю відповідає усім вимогам щодо докторських дисертацій зі спеціальності 01.01.01 - математичний аналіз, зокрема вимогам постанови Кабінету Міністрів України за № 567 від 24 липня 2013 року "Про затвердження Порядку присудження наукових ступенів" зі змінами і доповненнями, внесеними постановами Кабінету Міністрів України від 19 серпня 2015 року за №656, від 30 грудня 2015 року за №1159, від 27 липня 2016 року за №567 і наказом №40 МОН України від 12 січня 2017 року, а її автор Горбачук В. М. заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Офіційний опонент –
доктор фізико-математичних наук, професор,
19 березня 2018 р. В.О. Деркач

Підпис професора кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь Донецького національного університету імені Василя Стуса, Деркача Володимира Олександровича засвідчую

Міністерство освіти і науки України Донецький національний університет імені Василя Стуса Ідентифікаційний код 02070803

Вчений секретар Донецького
національного університету
імені Василя Стуса О. Г. Важеніна

Інститут математики Академії наук України Канцелярія

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д26.206.01 27.03.2018 р.
секретар ради /Артемченко Ж.Я./