НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

РОМАНЮК Віктор Сергійович

УДК 517.5

МЕТОДИ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНОЇ ТА НЕЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КЛАСІВ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий консультант

доктор фізико-математичних наук, професор
РОМАНЮК Анатолій Сергійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ВАКАРЧУК Сергій Борисович,
ВНЗ "Університет імені Альфреда Нобеля"
МОН України, м. Дніпро, професор кафедри
економіки та моделювання бізнес-процесів;

доктор фізико-математичних наук, професор
СКАСКІВ Олег Богданович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка МОН України, професор
кафедри теорії функцій і теорії ймовірностей;

доктор фізико-математичних наук, професор
ШЕВЧУК Ігор Олександрович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка МОН України,
завідувач кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться 17 квітня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 15 березня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Сучасна теорія наближення функцій ґрунтується на багатьох ідеях і значущих результатах, які на певному етапі її розвитку стали переломними. Ними закладався фундамент під створення окремих напрямків, у яких відображалися нові погляди на задачі теорії апроксимації функцій дійсної і комплексної змінних. Це, в свою чергу, стало стимулом для розробки нових методів апроксимації, які поєднували у собі фундаментальні положення не тільки теорії функцій, а й інших розділів математичного аналізу.

Один із таких переломних моментів у теорії наближення відноситься до 40-х років минулого століття. Він пов'язаний з ідеями А. М. Колмогорова щодо визначення міри оцінки (порівняння) апроксимаційних можливостей по відношенню до певних класів функцій класичних на той час агрегатів, — таких, як алгебраїчні та тригонометричні поліноми, раціональні дроби тощо. У 1936 році А. М. Колмогоров в якості такої міри запропонував величину найкращого наближення в метриці простору X множини $F \subset X$ за допомогою довільних лінійних многовидів L_n в X. Згодом така величина отримала у математичній літературі назву $n-$поперечника за Колмогоровим (колмогоровського $n-$поперечника). У випадку, коли X — деякий нормований простір з нормою $\| \cdot \|_X$, а F — центрально–симетрична множина в X, $n-$поперечник за Колмогоровим визначається формулою

$$d_n(F, X) = \inf_{L_n \in \mathcal{L}_n} \sup_{f \in F} \inf_{u \in L_n} \|f - u\|_X,$$

де $\mathcal{L}_n$ — сукупність всіх лінійних підпросторів L_n в X, $\dim L_n = n$.

Певні задачі вимагали більшої конкретики щодо структури наближаючих лінійних підпросторів, і це спонукало до запровадження інших величин лінійної апроксимації: лінійного $n-$поперечника (1960 р., В. М. Тихомиров), ортопроекційного $n-$поперечника (1982 р., В. М. Темляков), тригонометричного $n-$поперечника (1974 р., Р. С. Ісмагілов) та інших.

Виникла задача, що стала стержневою у теорії лінійної апроксимації, яка в загальній постановці полягала у відшуканні точних або асимптотичних (в розумінні сильної чи слабкої асимптотики) значень вказаних величин і, у першу чергу, $n-$поперечника за Колмогоровим.

Основними факторами, якими головним чином визначається рівень складності задачі про поперечники і відмінність у підходах до її розв'язання, є метричні характеристики простору X та гладкісні властивості елементів множини F. Як з'ясувалось, у багатьох випадках ключову роль як в оцінках поперечників, так і в оцінках інших апроксимаційних характеристик, відіграє так званий метод дискретизації.

Одну із частин дисертаційної роботи якраз і складають дослідження, спрямовані на вдосконалення старих та пошук нових підходів у застосуванні методу дискретизації до оцінки колмогоровських та інших поперечників важливих у теорії наближення класів гладких функцій однієї та кількох дійсних змінних (класів Степанця, а також класів Соболєва та Бєсова). Ці підходи поширені на розв'язання задач, пов'язаних з наближенням функцій комплексної змінної, зокрема, з оцінками колмогоровських поперечників деяких нових класів функцій, аналітичних у жорданових областях комплексної площини $\mathbb{C}$.

З кінця 90-х років минулого століття, орієнтуючись на практичне застосування у різних галузях науки і техніки, на передній план виходить інший напрям теорії наближення — нелінійна апроксимація (як функціональних множин так і множин іншої природи). Центральне місце у ньому займають апроксимаційні характеристики множини F в метричному просторі $\mathcal{X}$, що визначаються величиною так званого адаптивного наближення її елементів за допомогою лінійної комбінації n довільних елементів деякої фіксованої системи $\mathfrak{A}$ в $\mathcal{X}$. Базовою тут є величина $\sigma_n(f;\mathfrak{A};\mathcal{X})$ найкращого $n-$членного наближення елемента $f \in F$. Вперше така величина з'явилась у роботі С. Б. Стєчкіна 1955 року у формулюванні критерію абсолютної збіжності ряду Фур'є за ортогональною системою в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$.

У випадку кратної тригонометричної системи $\mathfrak{A}$ перші результати з оцінки величини $\sigma_n(F;\mathfrak{A};\mathcal{X}) := \sup\limits_{f\in F} \sigma_n(f;\mathfrak{A};\mathcal{X})$ для класів F періодичних по всіх змінних гладких функцій, що належать відомим просторам Нікольського та Соболєва (здебільшого у метриці просторів Лебега L_p), були отримані ще у 1987 році В.М. Темляковим. Пізніше ці результати були поширені на випадки інших класів, зокрема, на класи Бєсова, у роботах Е. С. Бєлінського, Дінь Зунга, А. С. Романюка та інших.

З'ясувалось, що методи оцінки величин $\sigma_n(F;\mathfrak{A};\mathcal{X})$, як і у лінійній апроксимації, суттєво різняться в залежності від умов якими характеризуються гладкісні властивості функцій класу F по кожній змінній окремо чи в сукупності (розділяють так звані ізотропний та анізотропний випадки).

Мотивацією досліджень, що стосуються нелінійної апроксимації і складають одну із частин дисертаційної роботи, стала ідея залучити до нелінійного наближення фіксованого класу F (з огляду на величину $\sigma_n(F;\mathfrak{A};\mathcal{X})$) апроксимаційних систем $\mathfrak{A}$, відмінних від тригонометричної: простіших за структурою і які б не поступалися, хоча б в окремих ситуаціях, тригонометричній системі у сенсі оцінок величин $\sigma_n(F;\mathfrak{A};\mathcal{X})$. Реалізацією цієї мети стало вивчення у дисертаційній роботі апроксимаційних можливостей кратних систем Фабера–Шаудера і Хаара стосовно ізотропних класів Бєсова.

В останні два десятиріччя зростає увага до ще одного типу задач нелінійної апроксимації функцій з декількома дійсними змінними — білінійних наближень. Цей напрямок досліджень поповнюється і низкою результатів даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідними темами "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", № державної реєстрації 0111U002079; "Структурні та апроксимаційні властивості функціональних множин", № державної реєстрації 0198U001990; "Апроксимаційні характеристики функціональних класів", № державної реєстрації 0101U000046.

Мета і завдання дослідження. Основною *метою дисертаційного дослідження* є опис класів гладких функцій, визначених на множинах різної структури у $d-$вимірному евклідовому просторі та на комплексній площині, у термінах оцінок їх наближення скінченно-вимірними агрегатами, побудованими на основі відомих та нових функціональних базисних систем.

Об'єктом дослідження є класи функцій кількох дійсних змінних, класи функцій аналітичних в областях комплексної площини; базисні функціональні системи — тригонометрична, Хаара та Фабера–Шаудера; многочлени Фабера, простори сферичних гармонік.

Предметом дослідження є апроксимаційні характеристики певних функціональних множин у нормованих просторах функцій, визначених на $\mathbb{R}^d$, на одиничному кубі $\mathbb{I}^d$, на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ та в областях комплексної площини $\mathbb{C}$: колмогоровські, тригонометричні, ортопроекційні поперечники, величини найкращих $m-$членних наближень, величини найкращих білінійних наближень, неперервні нелінійні поперечники тощо; практичний алгоритм побудови екстремальних нелінійних $m-$членних агрегатів стосовно нелінійного наближення у функціональних просторах та у просторах послідовностей; властивості інтегралів типу Коші вздовж границі жорданової області в $\mathbb{C}$; апроксимаційні властивості лінійних середніх рядів Фур'є та рядів Фабера.

Завдання дослідження. З метою отримання практичного алгоритму побудови екстремальних $m-$членних агрегатів у нелінійній апроксимації функцій, що належать ізотропним класам Бєсова $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ у просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ при $d \geq 2$, запровадити кратну базисну систему Хаара H^d, відмінну від класичної тензорної системи Хаара $\mathcal{H}^d$, але, яка б володіла важливими властивостями, якими наділена одновимірна базисна система H. Охарактеризувати класи Бєсова $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ функцій, визначених на кубі $\mathbb{I}^d$, у термінах порядкових оцінок нових апроксимаційних характеристик — величин $n-$членних проективних наближень за кратною системою Фабера–Шаудера.

Дослідити деякі класичні характеристики лінійної та нелінійної апроксимації (у сенсі встановлення їх точних за порядком оцінок) на різного типу класах Нікольського та Бєсова — періодичних функцій з декількома змінними — у просторах Лебега $L_q(\pi_d)$, $\pi_d := [0, 2\pi]^d$: тригонометричні та ортопроекційні поперечники, величини найкращих $M-$членних тригонометричних наближень. Розглянути не досліджені раніше випадки співвідношень між параметрами, що фігурують в означенні класів функцій і просторів. Знайти оцінки величин найкращих білінійних наближень на різного типу класах Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ у функціональних просторах $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$.

На основі розбиття на класи інтегралів типу Коші, яке базується на відомій класифікації $2\pi-$періодичних сумовних на періоді функцій дійсної змінної, запровадженої О. І. Степанцем, розвинути запропонований ним новий підхід до розв'язання задач апроксимації функцій аналітичних у жорданових областях Ω комплексної площини $\mathbb{C}$. Зокрема, знайти порядкові оцінки $n-$поперечників за Колмогоровим зазначених класів у заданих просторах аналітичних в Ω функцій (зокрема, у просторах неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій і у просторах Смірнова $E_p(\Omega)$).

На базі відомих просторів $LG^{\gamma}_{\mathrm{dyad}}$ функцій з однією змінною, визначених на торі $\mathbb{T}$, запровадити нову функціональну шкалу, так званих двійкових просторів Бєсова $\mathrm{dyad}B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, компактно вкладених у простори $\exp L^{\nu}$ — експоненціальні простори Орліча, що наділені нормою Люксембурга. Вивчити властивості (у тому числі — апроксимаційні) введених просторів з точки зору оцінок колмогоровських поперечників та ентропійних чисел у просторах $\exp L^{\nu}$ одиничних куль $\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$.

Знайти точні за порядком оцінки наближення класів згорток сумовних функцій з кратним ядром Пуассона за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у многогранних областях, а також оцінки колмогоровських поперечників таких класів у просторах функцій $2\pi-$ періодичних по кожній змінній і сумовних у степені q на кубі $[0, 2\pi]^d$.

Дослідити апроксимаційні можливості по відношенню до відомих класів W^r_p гладких функцій, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$, скінченно-вимірних многовидів. Результати подати у термінах асимптотичних оцінок одного типу неперервних нелінійних поперечників.

Методи дослідження. Використовуються класичні методи теорії лінійної та нелінійної апроксимацій функцій однієї та кількох дійсних змінних, методи вивчення граничних властивостей інтегралів типу Коші, а також розробляються та застосовуються нові підходи щодо наближення функцій, визначених на кубі $\mathbb{I}^d$, та функцій, аналітичних у жорданових областях комплексної площини $\mathbb{C}$.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

1) Введено кратну базисну систему Хаара H^d функцій, визначених на кубі $\mathbb{I}^d := [0,1]^d$ простору $\mathbb{R}^d$, відмінну від класичної тензорної системи Хаара $\mathcal{H}^d$ і таку, що володіє багатьма властивостями, якими наділена одновимірна базисна система $\mathbb{H}$. Систему H^d застосовано до опису ізотропних просторів Бєсова та просторів Гельдера у термінах умов на коефіцієнти Фур'є–Хаара елементів цих просторів, а також до конструктивної характеристики функцій із просторів Гельдера. Встановлено точні за порядком оцінки верхніх меж найкращих $n-$членних наближень за базисом H^d у просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ для функцій, які належать до одиничних куль просторів Бєсова та Гельдера. Вказано практичний алгоритм побудови екстремальних $n-$членних агрегатів.

2) У термінах порядкових оцінок величин $n-$членних проективних наближень за системою Фабера–Шаудера охарактеризовано ізотропні класи Бєсова $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ функцій, визначених на кубі $\mathbb{I}^d$.

3) Встановлено точні за порядком оцінки тригонометричних та ортопроекційних поперечників класів Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ та Нікольського $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{p}$ періодичних функцій з кількома змінними у просторі $L_q(\pi_d)$, за певних співвідношень між параметрами p, q та $\boldsymbol{r}$.

4) Встановлено точні за порядком оцінки величин найкращих $M-$членних тригонометричних наближень класів $\mathbb{B}^{r}_{p,\theta}$ у просторі $L_q(\pi_d)$, а також порядкові значення найкращих білінійних наближень класів функцій з $2d$ змінними, елементи яких породжені функціями з d змінними із класів $\mathbb{B}^{r}_{p,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу.

5) Знайдено оцінки величин найкращих білінійних наближень на класах Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ у функціональних просторах $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ з мішаною нормою $\|\cdot\|_{\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_m)$. Відштовхуючись від результату, розв'язано задачу про оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

6) У просторах функцій, аналітичних у жорданових областях Ω комплексної площини $\mathbb{C}$, на базі нової класифікації інтегралів типу Коші встановлено точні за порядком оцінки відхилень часткових сум рядів Фабера від функцій, які володіють певними граничними властивостями, що не описуються у термінах звичайної r–ої похідної. Знайдено точні за порядком оцінки величин найкращих наближень (на замиканні $\overline{\Omega}$ області Ω) класів таких функцій за допомогою алгебраїчних поліномів фіксованого степеня, а також порядкові оцінки $n-$поперечників за Колмогоровим зазначених класів у певних просторах аналітичних в Ω функцій, зокрема, у просторах Смірнова $E_p(\Omega)$.

7) На базі відомих просторів $LG^{\gamma}_{\mathrm{dyad}}$ функцій з однією змінною, визначених на торі $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, запроваджено нову функціональну шкалу так званих двійкових просторів Бєсова $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, компактно вкладених у простори $\exp L^{\nu}$ — експоненціальні простори Орліча, що наділені нормою Люксембурга. Встановлено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел у просторах $\exp L^{\nu}$ одиничних куль $\mathrm{dyad}\, \mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$.

8) Знайдено точні за порядком оцінки наближення у просторах Лебега $L_q(\mathbb{T}^d)$ класів згорток з кратним ядром Пуассона сумовних на торі $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$ функцій, за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром в багатогранних областях. Встановлено слабко асимтотичні значення колмогоровських поперечників таких класів у просторах $L_q(\mathbb{T}^d)$.

9) У термінах асимптотичних оцінок нелінійних поперечників з'ясовані апроксимаційні можливості скінченно-вимірних многовидів стосовно класів W^r_p гладких функцій, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер, а її результати у значній мірі доповнюють важливі розділи сучасної теорії функцій та функціонального аналізу. Деякі із результатів можуть знайти практичне застосування у певних галузях науки і техніки, що обумовлює перспективу розвитку окреслених дисертацією досліджень.

Особистий внесок здобувача. Визначення теми досліджень та її основних напрямів належать науковому консультанту, професору А. С. Романюку. Результати дисертаційної роботи опубліковані у 17-ти статтях за одноосібного авторства здобувача та в 6-ти — у співавторстві. З результатів статті [7], опублікованої у співавторстві з В. В. Савчуком, до дисертації включені лише ті, що належать здобувачу. У результатах, що опубліковані в статтях у співавторстві з А. С. Романюком [11–15], вклад авторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— 18-ти міжнародних конференціях (м. Рівне (1996, 2015), м. Кам'янець-Подільський (1997, 2012), м. Київ (1999, 2000), м. Москва, Росія (2005, 2010), м. Ужгород (2006), м. Тула, Росія (2007), м. Мелітополь (2008), с. Свитязь, Волинської області (2009), Sunny Beach, Болгарія (2010), м. Дніпропетровськ (2010), м. Донецьк (2011), Mersin, Туреччина (2012), м. Севастополь (2013), м. Чернівці (2014), м. Дніпро (2015));

— Українському математичному конгресі, Київ (2001, 2009);

— засіданнях Вченої ради Інституту математики НАН України;

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівники семінару: чл.-кор. НАН України О. І. Степанець, доктор фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк);

— міжвузівському семінарі з теорії функцій у Дніпропетровському національному університеті ім. О. Гончара, 14 червня 2017 року (керівник семінару – чл.-кор. НАН України В. П. Моторний);

— Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. Івана Франка, 28 вересня 2017 року (керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків);

— семінарі "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, 25 жовтня 2017 року, (керівники семінару: доктори фіз.-мат. наук, проф. І. О. Шевчук, проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко);

— семінарі кафедри математичного аналізу Інституту математики, економіки і механіки Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова, 27 жовтня 2017 року, (керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. А. О. Кореновський);

— Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 1 листопада 2017 року (керівники семінару: академік НАН України Ю.М. Березанський, академік НАН України Ю. С. Самойленко, чл.-кор. НАН України А. Н. Кочубей).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи викладено у 44 наукових публікаціях [1–44], із яких 23 статті [1–23] у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико-математичних наук, 16 із яких [2–5, 10–12, 14–17, 19–23] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз Web of Science, Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі списку основних позначень та означень, вступу, п'яти розділів з висновками, додатку та списку використаних джерел, що містить 208 найменувань. Повний обсяг роботи становить 347 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Основні положення дисертації з відповідними коментарями викладені у її **першому розділі**. Вказано на місце отриманих результатів у загальній теорії з окреслених напрямків.

Другий розділ присвячений лінійній та нелінійній апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій у просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$.

Нагадаємо, $L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 \le q < \infty$ (скорочене позначення: L_q), це банахів простір функцій $\varphi : \mathbb{I}^d \to \mathbb{R}$ вимірних і сумовних в степені q на $\mathbb{I}^d$, з нормою $\|\varphi\|_{L_q(\mathbb{I}^d)} = \|\varphi\|_q := \left(\int_{\mathbb{I}^d} |\varphi(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}}$, де $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ —

елемент евклідового простору $\mathbb{R}^d$. $L_\infty(\mathbb{I}^d)$ — простір функцій φ, вимірних і істотно обмежених на $\mathbb{I}^d$, з нормою $\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{I}^d)} = \|\varphi\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^d} |\varphi(\boldsymbol{x})|$.

У 1909 г. А. Хааром була побудована ортонормована на відрізку $[0,1]$ повна у просторі $L_1([0,1])$ система функцій $(h_n(x))_{n=0}^\infty$, $x \in [0,1]$, ряди Фур'є за якою для неперервних функцій збігаються до них рівномірно на $[0,1]$. Нагадаємо означення цієї системи у тих позначеннях, які зручні нам для подальшого викладу.

Позначимо через D_j, $j = 1,2,\ldots$ множину двійкових інтервалів j-го рівня відрізка $\mathbb{I} := [0,1]$: $D_j = \left\{I_j^s : s = 0,1,\ldots,2^{j-1}-1\right\}$, де $I_j^s = (s2^{-j+1},(s+1)2^{-j+1})$. Також покладемо $I_0^0 := \mathbb{I}$ і $D_0 = \{I_0^0\}$.

Визначимо функції Хаара, покладаючи $\mathrm{H}_{I_0^0}(t) = 1$, $t \in \mathbb{I}$, і для $j = 1,2,\ldots$, $s = 0,1,\ldots,2^{j-1}-1$

$$\mathrm{H}_{I_j^s}(t) = \begin{cases} |I_j^s|^{-1/2}, & t \in \left(s2^{-j+1},(s+\frac{1}{2})2^{-j+1}\right), \\ -|I_j^s|^{-1/2}, & t \in \left((s+\frac{1}{2})2^{-j+1},(s+1)2^{-j+1}\right), \\ 0, & t \in \mathbb{I} \setminus \overline{I_j^s}, \end{cases}$$

де $|I_j^s| = 2^{-j+1}$ — довжина інтервалу I_j^s, а $\overline{I_j^s}$ — його замикання. У всіх внутрішніх (по відношенню до відрізка $\mathbb{I}$) точках розриву функції $\mathrm{H}_{I_j^s}(t)$ покладаються рівними половині суми їх граничних значень зліва і справа, а в кінцевих точках відрізка $[0,1]$ — їх граничним значенням зсередини відрізка.

Система $\mathbb{H} = \{\mathrm{H}_{I_0^0}\} \bigcup \{\mathrm{H}_{I_j^s}\}_{\substack{j=1,2,\ldots \\ s=0,1,\ldots,2^{j-1}-1}}$ називається базисною системою Хаара. Упорядкуємо систему $\mathbb{H}$ наступним чином. Покладемо $h_0(t) = 1$, $t \in I_0^0$ і для $0 \le s < 2^{j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, — $h_{2^{j-1}+s}(t) = h_j^s(t) = \mathrm{H}_{I_j^s}(t)$. Отриману послідовність $(h_n)_{n=0}^\infty$ позначимо через H.

У 1928 р. Й. Шаудер показав, що система $\mathrm{H} = (h_n)_{n=0}^\infty$ є базисом у просторах Лебега $L_q([0,1])$, $1 \le q < \infty$.

На початку підрозділу 2.1 (пункт 2.1.3) означаються функціональні базисні системи H_0^d, $\mathbb{H}_0^d$ та H^d, які відрізняються одна від другої лише способом нумерації елементів фіксованої множини функцій, заданих на кубі $\mathbb{I}^d$, $d \ge 2$. Але, всі ці системи відмінні від класичної тензорної системи Хаара $\mathcal{H}^d$ не тільки за означенням, а також і за властивостями. Спершу дамо означення кратної базисної системи Хаара H_0^d. Отже, позначимо через $Q_j := \bigotimes_{i=1}^d D_j$, $j = 1,2,\ldots$ множину кубів I двійкового розбиття куба $\mathbb{I}^d$ об'ємом $|I| = 2^{(-j+1)d}$, тобто $Q_j = \left\{I_j^{\boldsymbol{l}} = \prod_{i=1}^d I_j^{l_i} : \boldsymbol{l} = (l_1,\ldots,l_d),\ 0 \leqslant l_i < 2^{j-1},\ i = \overline{1,d}\right\}$, а через $Q := \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$ — множину всіх кубів двійкового розбиття $\mathbb{I}^d$. Покладемо

$\mathrm{H}_0^d := \{\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}\} \cup \{\mathrm{H}_I\}_{I\in Q}$, де функція $\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}(\boldsymbol{x}) = 1, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d$, і для $j \in \mathbb{N}$ та $I \in Q_j$ (тобто $I = \prod_{i=1}^d I_j^{s_i}$)

$$\mathrm{H}_I(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i\in E} \mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i) \times \prod_{i\in\mathbb{T}\setminus E} |\mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i)|,$$

де E — довільна непорожня підмножина множини $\mathbb{T} := \{1, 2, \ldots, d\}$, у тому числі, допускається $E = \mathbb{T}$, і в такому випадку множник $\prod_{i\in\mathbb{T}\setminus E}$ слід замінити функцією тотожною одиниці.

Функції системи H_0^d, $d \geqslant 2$ можна "занумерувати" також векторами (точками) множини $\mathbb{Z}_+^d$, яка є об'єднанням неперетинних підмножин $Z_{0,d} := Y_{0,d}$ та $Z_{j,d} := Y_{j,d} \setminus Y_{j-1,d}$, $j = 1, 2, \ldots$, де

$$Y_{0,d} = \{\overline{0}\} = \{(0, 0, \ldots, 0)\} \in \mathbb{Z}_+^d,$$

$$Y_{j,d} = \left\{\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d :\ 0 \leqslant k_i < 2^j, i = \overline{1, d}\right\},\ j = 1, 2, \ldots .$$

Результатом такої дії є базисна система функцій з d змінними

$$\mathbb{H}_0^d = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}_+^d} := \bigcup_{j=0}^{\infty} \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_{j,d}}.$$

Упорядкуємо всі вектори $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ множини $\mathbb{Z}_+^d$, розмістивши їх у вигляді послідовності $\overline{k}^{(1)}, \overline{k}^{(2)}, \ldots, \overline{k}^{(m)}, \ldots$ так, що $\overline{k}^{(1)} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d$ і $\max\left\{\overline{k}_j^{(i)} :\ j = \overline{1, d}\right\} \leqslant \max\left\{\overline{k}_j^{(i+1)} :\ j = \overline{1, d}\right\}$ для $i = 2, 3, \ldots$. Відповідну такому упорядкуванню послідовність $\left(h_{\bar{k}^{(i)}}\right)_{i=1}^{\infty}$ функцій системи $\mathbb{H}_0^d$ позначимо через H^d. Нарешті, занумерувавши функції системи H^d згідно з відповідністю $\overline{k}^{(i)} \to i$, будемо писати $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$. Зазначимо, що *a priori* у випадку $d = 1$ системи $\mathcal{H}^1$ та $\mathrm{H}_0^1 := \mathbb{H}$ — тотожні.

Далі, у підрозділі 2.1, встановлені властивості системи функцій $\mathrm{H}^d = (h_n)_{n=1}^{\infty}$, $d \geq 2$ у просторах Лебега $L_p([0, 1]^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, аналогічні властивостям одновимірного базису Хаара H. Тут головним твердженням, що стосується системи $\mathbb{H}_0^d$, є теорема 2.1.1, в якій, зокрема, стверджується, що H^d є базисом Шаудера у просторах $L_p([0, 1]^d)$, $1 \leq p < \infty$.

У підрозділі 2.2 основним об'єктом дослідження є добре відомі класи Гельдера H_p^α функцій, визначених на одиничному кубі $\mathbb{I}^d$ простору $\mathbb{R}^d$. Отже, у пункті 2.2.1, в термінах найкращих поліноміальних наближень за кратним базисом Хаара отримана конструктивна характеристика класів H_p^α за умови, що $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leq 1$. А саме, доведено, що при $1 \leqslant p < \infty$

і $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ твердження $f \in H_p^\alpha$ і $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\alpha}$ рівносильні. Тут $E_{V_n}(f)_p$ — найкраще наближення функції f елементами підпростору $V_n := \bigcup_{j=0}^n W_j$, де $\mathrm{W}_j := \mathrm{span}\{h_{\overline{k}};\ \overline{k} \in Z_{j,d}\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Виявляється, що обмеження на параметр α тут є істотним. Це відображено у теоремі 2.2.3, в яку для цільності занесено і результат у випадку $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. Отже, покладемо

$$lip(\alpha, p) := \{f \in L_p :\ \omega(f,t)_p = o(t^\alpha),\ t \to +0\}.$$

Якщо в означенні множини $lip(\alpha, p)$ замість $\omega(f,t)_p$ використовується $\omega^*(f,t)_p$, то вживаємо позначення $lip^*(\alpha,p)$. Тут $\omega(f,t)_p$ — звичайний $p-$інтегральний модуль неперервності функції $\varphi \in L_p$, а $\omega^*(f,t)_p$ — $p-$інтегральний модуль неперервності функції φ^0 — 1–періодичного продовження функції φ за кожною змінною з $[0,1)^d$ на весь простір $\mathbb{R}^d$.

Теорема 2.2.3. *Нехай $1 \leqslant p < \infty$. Тоді*
(а) якщо $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leqslant 1$, то $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\alpha}$ рівносильне $f \in Lip(\alpha,p)$;
(б) якщо $0 < \frac{1}{p} < \alpha \leqslant 1$, то із $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\alpha}$ випливає $f \in Lip(\frac{1}{p},p)$, але необов'язково $f \in lip(\frac{1}{p},p)$, а отже і необов'язково $f \in lip^*(\frac{1}{p},p)$;
(в) якщо $0 < \alpha = \frac{1}{p} \leqslant 1$, то із $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-\frac{n}{p}}$ випливає $\omega(f,\delta)_p = O(\delta^{\frac{1}{p}}|\ln\delta|)$, але необов'язково $\omega^*(f,\delta)_p = o(\delta^{\frac{1}{p}}|\ln\delta|)$ при $\delta \to +0$.

У пункті 2.2.3 з використанням кратних систем Хаара також встановлені теореми вкладення у шкалі просторів Лебега і співвідношення, що пов'язують величини найкращих наближень у відповідних просторах (теореми 2.2.4 та 2.2.5). Точніше, дається відповідь на питання щодо достатніх умов на значення величин $E_n^*(f)_p$, які гарантують імплікацію $f \in L_p(\mathbb{I}^d) \Rightarrow f \in L_q(\mathbb{I}^d)$ при $1 \leq p < q \leq \infty$ і відповідну їй оцінку $E_n^*(f)_q$ через $E_n^*(f)_p$. Через $E_n^*(f)_p$ позначено відхилення функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ від лінійної оболонки, породженої n першими функціями базису $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^\infty$.

У підрозділі 2.3 встановлено еквівалентне представлення норм у просторах Гельдера H_p^α та Бєсова $B_{p,\theta}^\alpha$ у термінах коефіцієнтів у розкладах їх елементів за кратним базисом Хаара, або за системою H_0^d (відповідно теореми 2.3.2 та 2.3.3). Нагадаємо класичне означення просторів $B_{p,\theta}^\alpha$.

Для заданих параметрів α, p, θ, $0 < \alpha < 1$ і $1 \leq p, \theta < \infty$, нормований простір $B_{p,\theta}^\alpha$ — це множина таких функцій $\varphi \in L_p(\mathbb{I}^d)$, що $\|\varphi\|_{p,\theta}^{(\alpha)} := \|\varphi\|_p + |\varphi|_{p,\theta}^{(\alpha)} < \infty$, де півнорма $|\varphi|_{p,\theta}^\alpha$ визначається співвідношенням $|\varphi|_{p,\theta}^{(\alpha)} := \big(\int\limits_0^1 \big(\frac{\omega(\varphi;t)_p}{t^\alpha}\big)^\theta \frac{dt}{t}\big)^{\frac{1}{\theta}}$.

У підрозділі 2.4 встановлені точні за порядком оцінки найкращих $m-$членних наближень за базисом H^d в просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ для функцій, що належать одиничним кулям просторів Гельдера та Бєсова. Вказано практично здійсненний алгоритм побудови екстремальних (в розумінні точних за порядком оцінок наближень) нелінійних $m-$членних агрегатів.

Наведемо означення апроксимаційних характеристик у відповідності до кратних базисних систем Хаара.

Отже, для функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$ означимо величину $\sigma_m(f;\mathbb{H}_0^d;L_p)$ (скорочено: $\sigma_m(f)_p$) найкращого $m-$членного, $m \in \mathbb{N}$, наближення функції f за системою Хаара $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$:

$$\sigma_m(f)_p = \sigma_m(f;\, \mathbb{H}_0^d;\, L_p) = \inf_{\substack{\Lambda\subset\mathbb{Z}_+^d \\ \sharp\Lambda=m}} \inf_{c_{\overline{k}}\in\mathbb{R}} \left\| f - \sum_{\overline{k}\in\Lambda} c_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \right\|_p .$$

Покладемо $\sigma_m(F)_p = \sigma_m(F;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) := \sup\limits_{f\in F} \sigma_m(f)_p$ для $F \subset L_p$.

Далі, для функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$ і системи $\mathrm{H}^d \equiv \mathbb{H}_0^d$ визначимо $G_m^p(f;\, \mathbb{H}_0^d)(\boldsymbol{x}) := \sum_{\overline{k}\in\Lambda_f^{\max}} (f,\, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d$, де множина $\Lambda_f^{\max} \subset \mathbb{Z}_+^d$ залежить від функції f і визначається так, що $\sharp\Lambda_f^{\max} = m$ і $\min\{\|(f,\, h_{\overline{k}})h_{\overline{k}}\|_p,\, \overline{k} \in \Lambda_f^{\max}\} \ge \max\{\|(f,\, h_{\overline{k}})h_{\overline{k}}\|_p,\, \overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Lambda_f^{\max}\}$. Тут $(f, h_{\overline{k}}) := \int_{\mathbb{I}^d} f(\boldsymbol{x}) h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$, $\overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, — коефіцієнти Фур'є–Хаара функції f. Множина $\Lambda_f^{\max}$ при фіксованому m визначається таким способом неоднозначно, проте це не є істотним у подальшому викладі. Агрегати $G_m^p(f;\, \mathbb{H}_0^d)(\cdot)$ називаються *p – гріді апроксимантами* для f. У додачу до $\sigma_m(f)_p$ означимо величину

$$g_m(f)_p = g_m(f, \mathbb{H}_0^d,\, L_p) := \inf_{\sharp\Lambda_f^{\max}=m} \left\| f - \sum_{\overline{k}\in\Lambda_f^{\max}} (f,\, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}} \right\|_p ,$$

і покладемо $g_m(F)_p = g_m(F;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) := \sup\limits_{f\in F} g_m(f)_p$ для $F \subset L_p$. При $m = 0$ вважаємо, що $\sigma_0(F;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) = g_0(f; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)) := \|f\|_p$.

Важливим з точки зору оцінки величин $\sigma_m(SH_p^\alpha)_q$ та $\sigma_m(SB_{p,\,\theta}^\alpha)_q$ є таке твердження.

Теорема 2.4.1. *Нехай $1 < p < \infty$. Тоді для будь-якої функції $g \in L_p(\mathbb{I}^d)$ справедливе співвідношення*

$$g_m(g;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) \asymp \sigma_m(g;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)).$$

Головним результатом у підрозділі 2.4 є теорема 2.4.2, яка стосується оцінок величин $\sigma_m(SB^{\alpha}_{p,\,\theta})_q$. Тут $SB^{\alpha}_{p,\,\theta}$ — одинична куля у просторі $B^{\alpha}_{p,\,\theta}$.

Отже, позначимо через $\mathcal{D}$ — множину наборів $(d,\, p,\, q,\, \alpha)$ допустимих значень параметрів $d,\ p,\ q$ та α: $d \in \mathbb{N},\ 1 \le p < \infty,\ 1 < q < \infty,$ $\left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q}\right)_+ < \alpha < \frac{1}{p}$. Нагадаємо, $a_+ = \max\{a, 0\}$ для $a \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.4.2. *Нехай* $(d,\, p,\, q,\, \alpha) \in \mathcal{D}$ *і* $1 \le \theta < \infty$. *Тоді*

$$\sigma_m(SB^{\alpha}_{p,\,\theta})_q \asymp g_m(SB^{\alpha}_{p,\,\theta})_q \asymp m^{-\frac{\alpha}{d}}.$$

Аналогічний результат має місце і для класів SH^{α}_p (теорема 2.4.3).

Щодо теореми 2.4.2 зауважимо наступне: Е. С. Бєлінським при розгляді наближень класів 1–періодичних функцій $S\bar{B}^{\alpha}_{p,\theta}$ за допомогою $m-$членних агрегатів, побудованих за тригонометричною системою $\mathcal{T} = \{e^{2\pi i k x}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, у випадку $d = 1$ доведено, зокрема, що

$$\sigma_m(S\bar{B}^{\alpha}_{p,\theta};\ \mathcal{T};\ L_q(\mathbb{I})) \asymp m^{-\frac{q}{2}(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q})}$$

при $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$. Зауважимо, що класи $S\bar{B}^{\alpha}_{p,\theta}$ визначаються аналогічно класам $SB^{\alpha}_{p,\theta}$. Відмінність полягає лише у використанні інших модулів неперервності.

Зіставивши наведену оцінку з оцінкою величини $\sigma_m(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \mathrm{H}^d; L_q(\mathbb{I}))$ із теореми 2.4.2 при $d = 1$ (враховуючи також, що $S\bar{B}^{\alpha}_{p,\theta} \subset SB^{\alpha}_{p,\theta}$), можна стверджувати, що при даних обмеженнях на параметри p, q і α наближення класів $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ за допомогою тригонометричної системи, взагалі кажучи, поступається за порядком наближенню за системою Хаара (одновимірною). До такого ж висновку приходимо, зіставивши оцінки величин $\sigma_m(SB^{\alpha}_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}))$ з оцінками величин $\sigma_m(S\bar{B}^{\alpha}_{p,\theta};\ \mathcal{T};\ L_q(\mathbb{I}^d))$, знайденими С. А. Стасюком (2014), і у випадку функцій багатьох змінних.

У підрозділі 2.5, беручи за основу розклад функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ у ряд Фур'є–Хаара за базисом H^d, запроваджена нова шкала просторів $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p) \subset L_p(\mathbb{I}^d)$. Вивчено елементарні властивості таких просторів та встановлені оцінки нелінійного наближення (величини σ_m та g_m) одиничних куль у цих просторах.

У підрозділі 2.6 запроваджено нову характеристику нелінійної апроксимації елементів нормованого простору $\mathfrak{X}$ — величину *$n-$членного проективного наближення* за довільною базисною системою $\Phi \subset \mathfrak{X}$. Встановлені точні за порядком оцінки цих величин для функцій, визначених на $d-$вимірному кубі, і таких, що належать класам Бєсова, з використанням у ролі апроксимуючої системи — кратної базисної системи Фабера–Шаудера.

Нехай $\mathcal{X}$ — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, а $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}$ базис Шаудера у просторі $\mathcal{X}$. Для кожного $\varphi \in \mathcal{X}$ позначимо через $M_n(\varphi;\Phi)$ множину всіх лінійних (відносно системи Φ) комбінацій вигляду $\pi_Q(\varphi) = \sum\limits_{k\in Q} a_k\varphi_k$, де Q — довільна множина натуральних чисел, $\#Q{=}n$ (покладаємо також $M_0(\varphi;\Phi) = \{0\}$) і a_k, $k \in Q$ — коефіцієнти з розкладу φ за базисом Φ.

Назвемо $n-$членну апроксимацію довільного елемента $\varphi \in \mathcal{X}$ за допомогою елементів сімейства $M_n(\varphi;\Phi)$ *$n-$членним проективним наближенням* φ за системою Φ і означимо відповідну такому наближенню величину

$$e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathcal{X}) := \inf_{u\in M_n(\varphi;\Phi)} \|\varphi - u\|_{\mathcal{X}}.$$

Покладемо $e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathcal{X}) := \sup\limits_{\varphi\in W} e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathcal{X})$, якщо W — довільна підмножина в $\mathcal{X}$.

Отже, у підрозділі 2.6 встановлені порядкові оцінки величин $e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathcal{X})$ за наступних вихідних даних: $\mathcal{X} = L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 \le q \le \infty$; $W = SB^{\alpha}_{p,\theta}$, $0 < \alpha < 1$, $1 \le p,\theta < \infty$; Φ — так званий "діамантовий" базис у просторі $C(\mathbb{I}^d)$ неперервних на $\mathbb{I}^d$ функцій.

Зазначимо, що базис Фабера–Шаудера Φ означений у статті 2001 року за авторством Б. Чисельського та З. Чисельського.

Головним результатом підрозділу 2.6 є таке твердження.

Теорема 2.6.1. *Нехай $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\frac{d}{p} < \alpha < 1$. Тоді*

$$e_n^{\mathrm{pr}}(SB^{\alpha}_{p,\theta};\Phi;L_q) \asymp n^{-\frac{\alpha}{d}}.$$

Третій розділ присвячений апроксимації класів періодичних гладких функцій з d дійсними змінними у просторах Лебега $L_q(\pi_d)$. Досліджено деякі класичні характеристики нелінійної апроксимації (у сенсі встановлення їх точних за порядком оцінок) на різного типу класах Нікольського та Бєсова.

У підрозділі 3.1 отримано точні за порядком оцінки тригонометричних та ортопроекційних поперечників класів Бєсова $\mathbb{B}^{r}_{p,\theta}$ та Нікольського $\mathbb{H}^{r}_{p}$ періодичних функцій декількох змінних у просторі $L_q(\pi_d)$ при певних співвідношеннях між параметрами p та q.

Через $L_p(\pi_m)$, $1 \le p \le \infty$ позначимо простори вимірних 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\ldots,x_m)$ зі скінченними стандартними нормами $\|\cdot\|_p$. Повний модуль гладкості k-го ($k \in \mathbb{N}$) порядку функції $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо $\omega_k(f,t)_p$ і означимо формулою $\omega_k(f,t)_p := \sup\limits_{|\boldsymbol{h}|\le t} \| \Delta_{\boldsymbol{h}}^k f \|_p$, де $|\boldsymbol{h}|$ — евклідова норма вектора $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d$; $\Delta_{\boldsymbol{h}}^k f(\boldsymbol{x})$ — кратна різниця порядку k функції $f(\boldsymbol{x})$ у точці $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d)$ з кроком $\boldsymbol{h}$.

Кажуть, що функція $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, *належить простору* $B^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > 0$, *якщо скінченна її півнорма* $|f|_{B^r_{p,\theta}} := \left(\int_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}}$ *при* $1 \le \theta < \infty$ *і* $|f|_{B^r_{p,\infty}} := \sup\limits_{t>0} \omega_k(f,t)t^{-r}$ *при* $\theta = \infty$ *у припущенні,* $k > r$.

Норму задамо формулою $\|f\|_{B^r_{p,\theta}} := \|f\|_p + |f|_{B^r_{p,\theta}}$ і через $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ позначимо одиничну кулю у нормованому просторі $B^r_{p,\theta}$. Зазначимо, що простори $B^r_{p,\theta}$ введені О. В. Бєсовим і $B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p$, де H^r_p — простори Нікольського.

Наступна апроксимаційна характеристика введена у 1974 році Р. С. Ісмагіловим. Нехай $F \subset L_q(\pi_d)$.

Тригонометричний m *– поперечник класу* F *у просторі* $L_q(\pi_d)$ *(позначається* $d_m^T(F; L_q)$ *) визначається формулою*

$$d_m^T(F; L_q) = \inf_{\substack{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d\\ \sharp\Lambda=m}} \sup_{f\in F} \inf_{c_{\boldsymbol{k}}\in\mathbb{C}} \left\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{k}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\cdot)} \right\|_q .$$

Теорема 3.1.1. *Нехай* $1 \le p < 2 \le q < \frac{p}{p-1}$, $r > d$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тоді*

$$d_m^T(\mathbb{B}^{\,r}_{p,\,\theta}; L_q) \asymp m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Питання щодо порядкових значень поперечників $d_m^T(\mathbb{B}^{\,r}_{p,\theta}; L_q)$ у випадках $2 \le p < q \le \infty$ і $1 < p < 2,\ p' < q \le \infty$, ймовірно, дотепер залишається не з'ясованим.

Результати пункту 3.1.4 стосуються оцінок ортопроекційних поперечників класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ у просторі $L_q(\pi_d)$. Означимо величини, які є основними об'єктами дослідження. Нехай $\{u_i\}_{i=1}^m$ — довільна ортонормована у просторі $L_2(\pi_d)$ система функцій з $L_\infty(\pi_d)$ і $(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{x})\overline{u_i(\boldsymbol{x})}d\boldsymbol{x}$ для $f \in L_q(\pi_d)$. *Для* $F \subset L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, *величина*

$$d_m^\perp(F; L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^m \subset L_\infty(\pi_d)} \sup_{f\in F} \left\| f - \sum_{i=1}^m (f,u_i)u_i \right\|_q$$

називається ортопроекційним поперечником класу F *у просторі* $L_q(\pi_d)$. Поперечник $d_m^\perp(F; L_q)$ введений у 1982 році В. М. Темляковим.

Поряд з поперечниками $d_m^{\perp}(B^r_{p,\theta}; L_q)$ досліджуються величини $d_m^B(F; L_q)$, $F = B^r_{p,\theta}$, також запроваджені В.М.Темляковим. Зважаючи на те, що згідно з означенням $d_m^B(F, L_q) \le d_m^{\perp}(F, L_q)$, ці величини використовуються в оцінках знизу ортопроекційних поперечників.

Теорема 3.1.2. *Нехай* $1 \le p < q < \infty$ *і* $r > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. *Тоді при* $1 \le \theta \le \infty$ *справедливе співвідношення*

$$d_m^B(\mathbb{B}^{\,r}_{p,\,\theta}; L_q) \asymp d_m^{\perp}(\mathbb{B}^{\,r}_{p,\,\theta}; L_q) \asymp m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Теорема 3.1.3. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$, $r > 0$ *та* $1 \le q \le p \le \infty$ *і* $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$. *Тоді*

$$d_m^B(\mathbb{B}^{\,r}_{p,\,\theta}, L_q) \asymp d_m^{\perp}(\mathbb{B}^{\,r}_{p,\,\theta}, L_q) \asymp m^{-\frac{r}{d}}.$$

Ортопроекційні поперечники класів функцій як однієї, так і декількох змінних, також вивчались у роботах Е. М. Галєєва (1988, 1990), А. В. Андріанова та В. М. Темлякова (1997), А. С. Романюка (2008).

У завершальній частині пункту 3.1.4 встановлено порядкові значення величин $d_m^B(\mathbb{B}^r_{p,\theta}, L_p)$ при $p = 1$ і $p = \infty$ (теорема 3.1.4), але питання щодо точних за порядком значень величин $d_m^{\perp}(\mathbb{B}^{\,r}_{p,\theta}, L_p)$, $p = 1, \infty$, $1 \le \theta < \infty$ у випадку $d \ge 2$, ймовірно, залишається відкритим. Проте для класів $\mathbb{H}^r_p$ точні за порядком оцінки величин $d_m^{\perp}(\mathbb{H}^{\,r}_p, L_p)$, $p = 1, \infty$, для всіх вимірів $d \ge 1$ встановлені А. В. Андріановим та В. М. Темляковим (1997). Стосовно класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ в одно-вимірному випадку $(d = 1)$, у роботі А. С. Романюка (2008) доведене співвідношення: $d_m^{\perp}(\mathbb{B}^{\,r}_{1,\theta}, L_1) \asymp m^{-r}$, $r > 0$, $1 \le \theta < \infty$.

У підрозділі 3.2 встановлено точні за порядком оцінки величин $e_m(F)_q$ — найкращих $M-$членних тригонометричних наближень, та величин $e_m^{\perp}(F)_q := \sup\limits_{f\in F} \inf\limits_{\substack{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d \\ \sharp\Lambda = m}} \big\| f(\cdot) - \sum\limits_{k\in\Lambda} \hat{f}_k e^{i(k,\cdot)} \big\|_q$ — ортогональних тригонометричних наближень анізотропних класів Бєсова $F = \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\,\theta}$ у просторі L_q. Знайдено також порядкові значення найкращих білінійних наближень класів функцій з $2d$ змінними, що породжені функціями з d змінними із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу. Викладені тут результати, з одного боку, доповнюють оцінки відповідних величин, які встановлені А. С. Романюком (2003, 2007), а з другого, використовуються при оцінюванні зверху найкращих білінійних наближень функцій із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\,\theta}$.

У точці $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m_+$ визначимо повний мішаний $p-$модуль гладкості порядку l функції f: $\omega_l(f, t)_p := \sup_{|h_i| \le t_i} \|\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f\|_p$. Тут для

$\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ і $l \in \mathbb{N}$ через $\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x})$ позначено мішану l-ту різницю функції f з кроком h_j за змінною x_j, $j = \overline{1, m}$, тобто, якщо $\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} C^k_l f(x_1, \ldots, x_j + kh_j, \ldots, x_m)$, де C^k_l — біноміальні коефіцієнти, то $\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) := \Delta^l_{h_m} \ldots \Delta^l_{h_1} f(x_1, \ldots, x_m)$.

Кажемо, що функція $f \in L_p(\pi_m)$, $1 \le p \le \infty$ *належить простору* $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $r_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, *якщо скінченна її півнорма* $|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} := \Big(\int_{\pi_m} \Big(\prod\limits_{j=1}^{m} t_j^{-r_j} \omega_l(f, \boldsymbol{t})_p \Big)^\theta \prod\limits_{j=1}^{m} \frac{dt_j}{t_j} \Big)^{\frac{1}{\theta}}$ *при* $1 \le \theta < \infty$ *і* $|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} := \sup\limits_{t_j > 0} \prod\limits_{j=1}^{m} t_j^{-r_j} \omega_l(f, \boldsymbol{t})_p$ *при* $\theta = \infty$, *де* $l > \max\{r_i, \, i = \overline{1, m}\}$.

Норму у просторах $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ задамо формулою: $\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$ для $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$.

Простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, з одного боку, є узагальненнями відомих ізотропних просторів О. В. Бєсова (у випадку $\theta = \infty$ — просторів С. М. Нікольського), а з іншого — належать шкалі просторів SB мішаної гладкості, введених у 1965 році Т. І. Амановим.

Вважаємо, що координати вектора $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m)$ — параметра в означених просторах і класах, впорядковані так, що $0 < r_1 = r_2 = \ldots = r_\nu < r_{\nu+1} \le \ldots \le r_d$. Також зазначимо, через $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ позначається одинична куля у просторі $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_m)$, де $L^0_p(\pi_m)$ — підмножина таких функцій $f \in L_p(\pi_m)$, що $\int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}) dx_j = 0$, $j = \overline{1, m}$.

У пункті 3.2.2 доведено таке твердження.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $1 < q < \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді при* $1 \le \theta \le \infty$ *справедливі співвідношення*

$$e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q \asymp e^\perp_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}.$$

Характеристики $e^\perp_M(F)_q$ у випадках, коли $F = \mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$, $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$ чи $F = \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\,\theta}$ досліджені у роботах А. С. Романюка (2002, 2006).

Зазначимо, що оцінки знизу величин $e_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty)_q$ (тобто при $\theta = \infty$ у попередній теоремі) встановлені Б. С. Кашиним та В. М. Темляковим (1994).

Теорема 3.2.2 доповнює результат теореми 3.2.1 у випадку $q = 1$. Зауважимо, що порядкові значення величин $e_M(F)_1$ та $e^\perp_M(F)_1$, де F — класи $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\alpha}$ чи $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty$, у багатовимірному випадку, тобто при $d \ge 2$, ймовірно, ще не встановлені.

Наближення функцій декількох змінних лінійними комбінаціями добутків двох функцій з меншим числом змінних називають білінійними.

Одними з найбільш важливих характеристик таких наближень є величини $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ для індивідуальної функції f і $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ для класу функцій F. Наведемо означення цих величин.

Нехай $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$, $d \in \mathbb{N}$, — множина функцій $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, $2\pi-$періодичних за кожною із $2d$ змінних зі скінченною нормою

$$\|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2} := \|\|f(\cdot,\boldsymbol{y})\|_{q_1}\|_{q_2},$$

де у правій частині норма функції $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\pi_d)$, $1 \le q_1 \le \infty$, як функції зі змінною $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ (при фіксованому $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$), а потім від результату, як функції зі змінною $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ у просторі $L_{q_2}(\pi_d)$, $1 \le q_2 \le \infty$.

Для $f \in L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ *означимо величину найкращого білінійного наближення порядку* M $(M \in \mathbb{N})$ *формулою*

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j,v_j} \left\| f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}) \right\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$, $j = \overline{1,M}$. *При* $M = 0$ *вважаємо, що* $\tau_0(f)_{q_1,q_2} := \|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2}$. *Також покладемо* $\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup\limits_{f\in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}$ *для* $F \subset L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$.

У випадку, коли $q_1 = q_2 = q$ замість $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ і $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ пишемо відповідно $\tau_M(f)_q$ і $\tau_M(F)_q$.

Дослідженню величин $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ для деяких класів періодичних функцій з декількома змінними присвячена низка робіт В. Н. Темлякова (1986, 1988, 1989, 1992), А. С. Романюка (2006) та сумісні роботи автора дисертації і А. С. Романюка (2010, 2011, 2012, 2013, 2016). А, ймовірно, перший результат, що має дотик до найкращих білінійних наближень, був отриманий ще у 1907 році Е. Шмідтом у дослідженнях, пов'язаних з інтегральними рівняннями. Було з'ясовано, що наближення функцій $f(x,y)$ з двома змінними, визначених на квадраті $[0,1]\times[0,1] \subset \mathbb{R}^2$, за допомогою білінійних форм у просторі $L_{2,2}([0,1]^2)$ тісно пов'язане з властивостями інтегральних операторів $J_f(g) = \int\limits_0^1 f(x,y)g(y)dy$ з ядром $f(x,y)$. Це добре відомий у математичній літературі розклад Е. Шмідта. Окрім того, Е. Шмідт встановив рівність, яка пов'язує величини $\tau_M(f)_{2,2}$ із сингулярними числами $s_j(J_f)$ оператора J_f.

У пункті 3.2.4 знайдено точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень класів функцій з $2d$ змінними, що породжені функціями з d змінними із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу.

У випадку, коли функція $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ з $2d$ змінними $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$, пов'язана з деякою функцією $g(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ так, що $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, кажемо, що функція f породжується функцією g і замість $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ пишемо $\tau_M(f_g)_{q_1,q_2}$, або $\tau_M(g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,q_2}$. Якщо $F\subset L_1(\pi_d)$ — деякий клас функцій з d змінними, то покладемо $\tau^*_M(F)_{q_1,q_2} := \sup\limits_{g\in F}\tau_M(f_g)_{q_1,q_2}$.

Зазначимо, Р. С. Ісмагілов (1974) встановив зв'язок між величинами $\tau_M(f_g)_{2,\infty}$ і поперечниками за Колмогоровим класу F, якому належить функція g. Дослідженню величин $\tau^*_M(F)_{q_1,q_2}$ у випадках, коли $F=\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$ чи $F=\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$, присвячені роботи В. М. Темлякова (1986, 1989), а А. С. Романюком (2006) встановлена слабка асимптотика величин $\tau^*_M(F)_{q_1,q_2}$ у випадку, коли $F=\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, при значеннях параметрів p, θ, $\boldsymbol{r}$, q_1, q_2 , відмінних від тих, що задіяні у результатах даного підрозділу. Отже, наступні результати стосуються порядкових оцінок величин $\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_{q_1,q_2}$, при певних значеннях параметрів p, θ, $\boldsymbol{r}$ і q_1, q_2.

Теорема 3.2.3. *Нехай* $1<q_1\le 2$, $1\le q_2\le\infty$ *і* $1\le\theta\le\infty$, $1-\frac{1}{q_1}<r_1\le 1-\frac{2}{q_1}+\frac{1}{\theta}$. *Тоді*

$$\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_{q_1,q_2}\asymp M^{-r_1+1-1/q_1}.$$

Зауважимо, що порядкові значення величин $\tau^*_M(F)_{q_1,q_2}$, $1<q_1\le 2$, $1\le q_2\le\infty$, $r_1>1-\frac{1}{q_1}$ у випадках, коли $F=\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{1,\alpha}$ чи $F=\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_1$, ймовірно, ще не встановлені.

Теорема 3.2.4. *Нехай* $2\le q_1<\infty$, $1\le q_2\le\infty$ *і* $1\le\theta\le\infty$, $r_1>0$. *Тоді*

$$\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{q_1,q_2}\asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1}M)^{(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Отримані у пункті 3.2.4 результати тісно пов'язані з результатами, що стосуються оцінок колмогоровських поперечників деяких класів функцій. Такі оцінки для класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ та $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, $1\le\theta<\infty$ встановлені А. С. Романюком (2006), а для класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty$ — В. М. Темляковим (1989).

У теоремі 3.2.5 із пункту 3.2.4 встановлені точні за порядком значення найкращих білінійних наближень функцій з двома змінними з класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1\le p\le\infty$, $\boldsymbol{r}=(r_1,r_1)$, $r_1>0$ у просторі $L_{q,q}(\pi_2)$, $1\le q\le\infty$, який, очевидно, у такому випадку тотожний простору $L_q(\pi_2)$.

У завершальній частині пункту 3.2.4 досліджені величини найкращих білінійних наближень функцій з двома змінними, що належать анізотропним класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$. Тут $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2)$, $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2)$ і θ — числовий параметр.

У підрозділі 3.3 знайдені точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на ізотропних класах Нікольського–Бєсова у функціональних просторах $L_q(\pi_{2d})$. Сформулюємо основний результат даного підрозділу.

Теорема 3.3.1. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$. *Мають місце співвідношення*

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\,\theta})_q \asymp \begin{cases} M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 \le p \le q \le 2, \quad r > 2d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}), \\ M^{-\frac{r}{d}}, & 2 \le p \le q \le \infty, \quad r > d, \\ M^{-\frac{r}{d}}, & 2 \le q \le p \le \infty, \quad r > 0, \\ M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty, \quad r > \frac{2d}{p}. \end{cases}$$

У підрозділі 3.5 знайдені точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на класах типу Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ у функціональних просторах $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$, $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_{2d})$ зі стандартними мішаними нормами $\|\cdot\|_{\boldsymbol{q}}$ при $1 \le q_j < \infty$, $j = \overline{1, 2d}$ і $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\infty}}$ при $q_j = \infty$, $j = \overline{1, 2d}$. На базі цих досліджень розв'язано задачу про оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Тут позначення та означення аналогічні тим, які запроваджені при розгляді функцій з просторів $L_p(\pi_m)$ з врахуванням специфіки визначення норми у просторах $L_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$.

Спершу ми встановлюємо порядкові значення величин $\tau_M(F)_{\boldsymbol{q}}$ для класу $F = \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ при певних значеннях параметра θ і для деяких співвідношень між векторами $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_{2d})$, $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_{2d})$ і $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_{2d})$. При цьому вихідною умовою щодо вектора $\boldsymbol{r}$ є така: його компоненти приймають значення $r_j = \rho_1$, $r_{d+j} = \rho_2$, $j = \overline{1, d}$, і у такому випадку клас $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ позначаємо $\mathbb{B}^{\rho_1,\,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Теорема 3.5.1. *Нехай* $\boldsymbol{2} \le \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{\infty}$, $\boldsymbol{2} \le \boldsymbol{q} < \boldsymbol{\infty}$ *і* $2 \le \theta < \infty$. *Тоді при* $\rho_i > \frac{1}{2}$ *(*$\rho_i > 0$ *при* $\boldsymbol{p} \ge \boldsymbol{q}$*),* $i = 1, 2$, *для класу* $\mathbb{B}^{\rho_1,\,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$ *функцій з* $2d$ *змінними має місце співвідношення*

$$\tau_M(\mathbb{B}^{\rho_1,\,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta})_{\boldsymbol{q}} \asymp M^{-\rho_1-\rho_2} (\log^{d-1} M)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}.$$

Потім, використавши теорему 3.5.1, встановлено точні за порядком оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Теорема 3.5.2 *Нехай* $\boldsymbol{2} \le \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{\infty}$, $2 \le \theta < \infty$ *і* $\rho_i > 0$, $i = 1, 2$. *Тоді для класу* $\mathbb{B}^{\rho_1,\,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$ *функцій з* $2d$ *змінними має місце порядкове співвідношення*

$$\sup_{f \in \mathbb{B}^{\rho_1,\,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}} s_M(J_f) \asymp M^{-\rho_1-\rho_2-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}.$$

У **четвертому розділі** з'ясовано апроксимаційні властивості деяких класів функцій, які є аналітичними в однозв'язній області $\Omega \subset \mathbb{C}$, що обмежена замкнутою спрямлювальною жордановою кривою Γ. Дослідження полягають у встановленні оцінок наближення таких класів функцій у певних функціональних банахових просторах за допомогою скінченновимірних підпросторів .

Нехай Ω — однозв'язна область у комплексній площині $\mathbb{C}$, границя якої є замкнутою спрямлювальною жордановою кривою (з. с. ж. к.) $\Gamma = \partial\Omega$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ — замикання області Ω; Φ та Ψ — функції, що здійснюють конформний гомеоморфізм між зовнішністю області $\overline{\Omega}$ і зовнішністю круга $\overline{D} = \{w : |w| \le 1\}$, причому Φ задовольняє умови $\lim\limits_{z\to\infty} \Phi(z)/z = \alpha > 0$ і $\Phi(\infty) = \infty$.

У 1992 році О. І. Степанцем та В. С. Романюком означені класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ функцій, сумовних на з. с. ж. к. Γ — границі області $\Omega \subset \mathbb{C}$, а також їх аналітичні аналоги — класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ — множини функцій, що зображуються в області Ω інтегралами типу Коші вздовж Γ зі щільностями із $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$. Вихідним пунктом у цих означеннях стала класифікація 2π – періодичних сумовних на періоді функцій, що проведена О. І. Степанцем (1983) і базується на запровадженому ним понятті $(\psi;\beta)$ – похідної.

Конструктивна побудова класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ полягає у встановленні взаємно однозначної відповідності між деякими множинами 2π – періодичних на $\mathbb{R}$ і сумовних на періоді функцій (а точніше, між природною реалізацією цих множин, як такою, що складається із функцій, заданих на колі $T = \{w : |w| = 1\}$) і підмножинами функцій, сумовних на Γ. Цим заздалегідь передбачається, що класифікована множина функцій f, визначених на Γ, задовольняє умови: 1) f — сумовна на Γ; 2) $f \circ \Psi$ — сумовна на T.

Множину функцій, які задовольняють обидві умови, позначимо через $\widetilde{L}(\Gamma)$, а тих, що задовольняють лише першу із них — через $L(\Gamma)$.

Отже, якщо $\mathcal{K}g(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$, $z \in \Omega$ — інтеграл типу Коші функції $g \in L(\Gamma)$, то визначимо $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega) := \Big\{\mathcal{K}f : \ f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)\Big\}$, де через $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ позначено підмножину функцій $f \in \widetilde{L}(\Gamma)$ таких, що контурна $(\psi;\beta)$ – похідна $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}(\Gamma)$, а $\mathfrak{N}(\Gamma)$ —деяка підмножина функцій φ, визначених на Γ, і таких, що $\varphi \circ \Psi \in L_q(T)$.

У підрозділі 4.2 дослідження стосуються рівномірного на $\overline{\Omega}$ наближення функцій з класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega) \subset \mathcal{A}(\overline{\Omega})$ у випадку, коли область Ω фаберова.

Простір $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ — це простір, що складається із аналітичних в Ω і неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій f, з нормою $\|f\|_{\mathcal{A}(\overline{\Omega})} = \max\limits_{z\in\overline{\Omega}} |f(\zeta)|$.

Область Ω, обмежену з.с.ж.к. Γ, називають *фаберовою*, якщо для будь-якої функції $g \in \mathcal{A}(\overline{D})$ справджується нерівність

$$\sup_{z\in\Omega} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta \right| \le C \sup_{w\in D} |g(w)|,$$

де C — величина, яка може залежати лише від області Ω.

Множину фаберових областей з фіксованою сталою C у зазначеній нерівності позначимо $\mathcal{F}_C$. Також, покладемо $\mathcal{F} = \bigcup_{C>0} \mathcal{F}_C$.

Надалі вважаємо, що послідовності $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ в означенні класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ та $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega))$ є слідами на множині $\mathbb{N}$ опуклих донизу функцій ψ таких, що $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$. Множину таких функцій позначимо $\mathfrak{M}$.

Структурні, а як наслідок, і апроксимаційні властивості функцій із класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$) найбільш суттєво залежать від поведінки функцій ψ. Це визначає доцільність розбиття множини $\mathfrak{M}$ на підмножини за швидкістю спадання функцій ψ. До характеризації цієї швидкості залучаються певні функції — так звані *модулі напіврозпаду* μ.

Покладемо

$$\mathfrak{M}_c := \{\psi \in \mathfrak{M} :\ K_1 \le \mu(\psi; t) \le K_2, \quad K_1, K_2 > 0\}\,;$$

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi \in \mathfrak{M} :\ 0 \le \mu(\psi; t) \le K, \quad K > 0\}\,;$$

$$\mathfrak{M}_\infty := \{\psi \in \mathfrak{M} :\ \mu(\psi; t) \uparrow \infty\}\,,$$

де $\mu(t) = \mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t)$, $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, а ψ^{-1} — функція, обернена до ψ;

$$\mathfrak{M}_{c,\infty} := \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty;$$

У цих означеннях K_1, K_2 та K — додатні величини, які, взагалі кажучи, залежать від функції ψ.

Нехай S — множина функцій ψ, визначених на $[0, \infty)$, незростаючих на $[1, \infty)$ і таких, що функції $1/\psi$ є опуклими доверху чи донизу на $[1, \infty)$. Позначимо через $\widetilde{B}(\Gamma)$ деяку множину обмежених на Γ функцій і розглянемо клас $L^{\psi}_{\beta}\widetilde{B}(\Gamma)$ та відповідний йому клас $L^{\psi}_{\beta}\widetilde{B}(\Omega)$ аналітичних в Ω функцій.

Теорема 4.2.2 *Нехай* $\Omega \in \mathcal{F}$ *і* $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty} \cap S$, $\beta \in \mathbb{R}$, *або* $\psi \in \mathfrak{M}_0 \cap S$, $\beta = 0$. *Тоді*

$$d_n(L^{\psi}_{\beta}\widetilde{B}(\Omega); \mathcal{A}(\overline{\Omega})) \asymp \psi(n)$$

Далі, позначимо через $\widetilde{L}_q(\Gamma)$, $1 < q < \infty$, — простір функцій φ, визначених і вимірних на Γ, для яких $\varphi \circ \Psi \in L_q(T)$, і покладемо $\|\varphi\|_{\Gamma,q} = \|\varphi \circ \Psi\|_{T,q}$. Нехай $\widetilde{B}_q(\Gamma)$ — одинична куля у просторі $\widetilde{L}_q(\Gamma)$. Покладемо $L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma) := L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ у випадку, коли $\mathfrak{N}(\Gamma) = \widetilde{B}_p(\Gamma)$, і за встановленою схемою означимо класи $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$.

У наступних трьох підрозділах **четвертого розділу** у термінах величин найкращого поліноміального наближення та колмогоровських поперечників досліджуються апроксимаційні властивості класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ за різноманітних обмежень щодо послідовності $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$. А саме,

а) у підрозділі 4.3 — у випадку, коли природною межею аналітичності функцій із $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ є крива Γ — границя області Ω;

б) у підрозділі 4.4 — коли функції з $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ аналітично продовжуються поза Γ у деяку обмежену область $\Omega' \supset \Omega$;

в) у підрозділі 4.5 — у випадку таких обмежень на послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$, коли класи $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ є множинами, які в розумінні оцінок їх наближення на $\overline{\Omega}$ за допомогою n-вимірних підпросторів займають проміжне положення між класами функцій, що аналітично продовжуються з області Ω через її межу, та класами функцій, які є аналітичними в Ω і мають визначену "середню" ступінь гладкості на межі області Ω, якщо гладкість виражати в термінах або звичайних похідних, або узагальненої (ψ, β)-похідної функції.

Банахів *простір* $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$, $1 < q < \infty$ складається із аналітичних в Ω функцій φ, що мають майже всюди на Γ кутові граничні значення $\overline{\varphi} \in \widetilde{L}_q(\Gamma)$ і $\|\varphi\|_{\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})} := \|\overline{\varphi}\|_{\widetilde{L}_q(\Gamma)}$.

Кажемо, що з.с.ж.к. Γ, яка обмежує область Ω, належить множині RA_q ($\Gamma \in RA_q$), якщо:

i) Γ — регулярна крива, тобто $\sup\limits_{z\in\Gamma}\sup\limits_{r>0}\mu(\theta_z(r))/r < \infty$, де $\theta_z(r) = \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - z| \le r\}$, а $\mu(A)$ — міра Лебега множини $A \subset \Gamma$;

ii) $|\Phi'| \in A_q(\Gamma)$, $1 < q < \infty$, де $A_q(\Gamma)$ — множина вагових функцій ω на Γ, для яких має місце *аналог відомої умови Маккенхаупта* (B. Muckenhoupt (1972)) для ваг, визначених на спрямлювальній кривій.

У підрозділі 4.3 за умови, коли $\Gamma \in RA_q$, і за певних обмежень на параметри, за допомогою яких означається клас $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$, встановлені точні за порядком значення величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q}$ та $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q}$ (теореми 4.3.3 та 4.3.4) — відповідно величини найкращого наближення класу $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ за допомогою алгебраїчних поліномів степеня не вище n

в просторі $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$, та відхилень від функцій $\varphi \in L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ частинних сум порядку n їх рядів Фабера. Але основним у підрозділі 4.3 є результат, що стосується колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ (теорема 4.3.5).

У підрозділі 4.4 досліджено апроксимаційні властивості класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ за таких обмежень на послідовність $\{\psi(k), k \in \mathbb{N}\}$, коли функції з $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ аналітично продовжуються поза Γ в деяку обмежену область $\Omega' \supset \Omega$.

Отже, покладемо $\mathfrak{M}'_{\infty} := \{\psi \in I_0 : (\exists\, K > 0 \ \ \forall t \geq 1 : \eta(t) - t \leq K)\}$, де I_0 — множина спадних до нуля функцій $\psi : [1, \infty) \to [0, \infty)$, а $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, ψ^{-1} — функція обернена до ψ.

Теорема 4.4.1. *Нехай Ω — область обмежена кривою $\Gamma \in RA_q$, $q > 1$. Тоді, якщо $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$, то при $1 < p < \infty$*

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \asymp \psi(n).$$

Основний результат підрозділу 4.5, як і підрозділу 4.4, — оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у просторі $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ (теорема 4.5.1). Відмінність у вихідних умовах лише в обмеженнях на послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$, яка визначає клас $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$.

У підрозділі 4.6 досліджено апроксимаційні властивості класів $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$ у просторах Смірнова $E_q(\Omega)$. Класи $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$, як і класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$, є множинами функцій, що зображуються інтегралами типу Коші в області $\Omega \subset \mathbb{C}$, обмеженій з. с. ж. к. Γ , і означаються за схожою схемою на основі вище згаданої класифікації $2\pi-$періодичних сумовних на періоді функцій, запровадженої О. І. Степанцем, із залученням так званого *q – фаберового оператора* T_q і оберненого до нього оператора Q_q.

Головні результати підрозділу 4.6 — теореми 4.6.2–4.6.3 — стосуються оцінок колмогоровських поперечників $d_n(\mathcal{K}^{\psi}_q B_p(\Omega); E_q(\Omega))$ за різних обмежень щодо послідовності $\psi = \{\psi(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$, подібних тим, які містяться у відповідних теоремах з підрозділів 4.3–4.5.

У **п'ятому розділі** досліджено деякі характеристики лінійної та нелінійної апроксимації у просторах Лебега класів гладких функцій з однією і кількома дійсними змінними, визначених на торі $\mathbb{T}^d$ і на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$.

У підрозділі 5.1 встановлені точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел одиничних куль з двійкових просторів Бєсова $\mathrm{dyad}B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, компактно вкладених в експоненціальні простори Орліча $\exp L^{\nu}$, що наділені нормою Люксембурга.

Ми розглядаємо функції, визначені на торі $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ідентифікуючи їх 1–періодичними функціями на $\mathbb{R}$. Через $L_p(\mathbb{T})$, $1\le p\le\infty$ позначимо простори Лебега вимірних на $\mathbb{T}$ функцій зі скінченними стандартними нормами. Позначення $\exp L^\nu(\mathbb{T})$, $\nu>0$ (або, скорочено, $\exp L^\nu$), використовується для простору Орліча таких вимірних на $\mathbb{T}$ функцій $u:\ \mathbb{T}\to\mathbb{C}$, що для $\Phi_\nu(t)=t^2\exp t^\nu$, $t\ge 0$, $\nu>0$, скінчений інтеграл $\int\limits_{\mathbb{T}}\Phi_\nu(|u(x)|)dx$. Такий простір наділимо нормою Люксембурга

$$\|u\|_{\exp L^\nu(\mathbb{T})}:=\inf\left\{\lambda>0:\ \int\limits_{\mathbb{T}}\Phi_\nu\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)dx\le 1\right\}.$$

Запровадимо до розгляду так звані двійкові простори типу Бєсова. Отже, нехай $k\in\mathbb{Z}_+$. Для функції f, заданої на відрізку $[0,1]$, покладемо

$$\mathbb{E}_kf(x)=2^k\int\limits_{(m-1)2^{-k}}^{m2^{-k}}f(t)dt,\ (m-1)2^{-k}\le x<m2^{-k},\ m=1,\ldots,2^k,$$

і визначимо $\mathbb{D}_0f(x)=\mathbb{E}_0f(x)$ та $\mathbb{D}_kf(x)=\mathbb{E}_kf(x)-\mathbb{E}_{k-1}f(x)$, $k\in\mathbb{N}$. Далі розглядаються 1–періодичні продовження функцій $\mathbb{E}_kf$ та $\mathbb{D}_kf$ з інтервалу $[0,1)$ на $\mathbb{R}$ як функції, що задані на $\mathbb{T}$, і відповідно оператори $\mathbb{E}_k$ та $\mathbb{D}_k$, визначені на $L_1(\mathbb{T})$, зі значеннями в $L_\infty(\mathbb{T})$.

Тепер для $1\le q\le\infty$, $1\le\theta<\infty$ і $\gamma\ge 0$ означимо простори

$$\text{dyad }B^{0,\gamma}_{q,\theta}:=\left\{f\in L_1(\mathbb{T}):\ \|f\|_{\text{dyad}B^{0,\gamma}_{q,\theta}}\text{— скінченна}\right\},$$

де $\|f\|_{\text{dyad}B^{0,\gamma}_{q,\theta}}:=\left(\sum_{k=0}^\infty(k+1)^{\theta\gamma}\|\mathbb{D}_kf\|_q^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}$. Нагадаємо, що в означенні класичних просторів типу Бєсова $B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ замість функцій $\mathbb{D}_kf$ використовуються функції L_kf — певні лінійні середні ряду Фур'є функції f по системі $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Простори $B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ та dyad $B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ певним чином пов'язані з іншими відомими просторами.

Так, у 2007 році Б. С. Кашин і В. М. Темляков ввели нормовані простори LG^γ, $\gamma>0$, функцій f із $L_1(\mathbb{T})$, для яких $\|L_kf\|_\infty=O((k+1)^{-\gamma})$ при $k\to+\infty$, поклавши $\|f\|_{LG^\gamma(\mathbb{T})}:=\sup\limits_{k\ge0}(k+1)^\gamma\|L_kf\|_\infty<\infty$. В якості ж "граничних" у шкалі просторів dyad $B^{0,\gamma}_{\infty,\theta}$ слугують простори LG^γ_{dyad}, введені у 2009 році А. Зігером і В. Требелсом (A. Seeger, W. Trebels):

$$LG^\gamma_{\text{dyad}}=\{f\in L_1(\mathbb{T}):\ \|f\|_{LG^\gamma_{\text{dyad}}}:=\sup_{k\ge0}(k+1)^\gamma\|\mathbb{D}_kf\|_\infty<\infty\}.$$

Відомо, що при $\gamma > \frac{1}{2}$ справедливе вкладення $LG^\gamma \hookrightarrow LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$.

Поповнивши шкалу просторів $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ та dyad $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ для $1 \le \theta < \infty$ відповідно просторами $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \equiv LG^\gamma$ та dyad $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \equiv LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$, у підрозділі 5.1 доведено, що схоже вкладення зберігається і між просторами $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ та dyad $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ при $1 \le \theta \le \infty$.

Основними величинами, що досліджуються у підрозділі 5.1, є поперечники за Колмогоровим деяких із означених вище функціональних множин у просторах $L_p(\mathbb{T})$ та $\exp L^\nu(\mathbb{T})$, а також $m-$ті ентропійні числа простору dyad $B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ відносно простору $\exp L^\nu(\mathbb{T})$. Нагадаємо, якщо X — лінійний нормований простір з нормою $\|\cdot\|_X$, а Y — підпростір в X, що наділений нормою $\|\cdot\|_Y$, то

$m-$им ентропійним числом простору Y відносно простору X називається величина

$$\epsilon_m(Y,X) = \inf\left\{\varepsilon > 0 :\ \exists\ \{u_j\}_{j=1}^{2^m-1},\ B_Y \subset \bigcup_{j=1}^{2^m-1}\{u_j + \varepsilon B_X\}\right\},$$

де B_X (B_Y) — одинична куля в X (Y).

Одиничні кулі у просторах $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, dyad $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, LG^γ та dyad LG^γ позначимо відповідно через $\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$, dyad $\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$, $\mathbb{LG}^\gamma$ та dyad $\mathbb{LG}^\gamma$.

Б. С. Кашин і В. М. Темляков (2007) встановили , що *при $\gamma > 1$ справджуються співвідношення $\epsilon_n(LG^\gamma, L_p) \asymp d_n(\mathbb{LG}^\gamma, L_p) \asymp (\log_2 n)^{-\gamma+1}$, якщо $p = \infty$ і $\epsilon_n(LG^\gamma, L_p) \asymp d_n(\mathbb{LG}^\gamma, L_p) \asymp (\log_2 n)^{-\gamma+1}$, якщо $1 \le p < \infty$.*

У 2009 році А. Зігер і В. Требелс, досліджуючи у такому твердженні причину стрибковості у зміні порядкових значень ентропійних чисел при переході від метрики в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$ до метрики в $L_\infty(\mathbb{T})$, з метою "стирання" цього ефекту, залучили простори $\exp L^\nu$ і встановили порядкові значення величин $\epsilon_m(LG^\gamma, \exp L^\nu)$. У розвиток цих досліджень у підрозділі 5.1 встановлено точні за порядком оцінки величин $\epsilon_m(B^{0,\gamma}_{p,\theta}, \exp L^\nu)$ та $d_m(\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}, \exp L^\nu)$ для різних співвідношень між параметрами p, θ, γ та ν.

На площині виділимо множину $\Omega := \{(\gamma,\nu) :\ 0 < \gamma < \infty \text{ і } 0 < \nu < \infty\}$ і визначимо такі її підмножини: $D_1 := \{(\gamma,\nu) \in \Omega :\ \frac{1}{2} < \gamma < 1,\ \nu < \frac{1}{1-\gamma}\}$, $D_2 := \{(\gamma,\nu) \in \Omega :\ \gamma \ge 1,\ 0 < \nu < \infty\}$, $G_1 := \{(\gamma,\nu) \in \Omega :\ \nu \le 2,\ \gamma > \frac{1}{2}\}$, $G_2 := \{(\gamma,\nu) \in \Omega :\ \nu \ge 2,\ \gamma > 1 - \frac{1}{\nu}\}$.

Теорема 5.1.1. *Нехай $(\gamma,\nu) \in D_1 \cup D_2$ і $\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu)$ позначає будь-яку із величин $\epsilon_n(\mathrm{dyad}\ B^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$ чи $d_n(\mathrm{dyad}\ \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$. Тоді*

а) якщо $(\gamma,\nu) \in G_1$ і $2 \le q \le \infty$, $\theta = \infty$, то $\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu) \asymp (\ln n)^{\frac{1}{2}-\gamma}$;

b) якщо $(\gamma,\nu)\in G_2$ *і* $2\le q\le\infty,\ \theta=\infty$, *то* $\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu)\asymp(\ln n)^{1-\frac{1}{\nu}-\gamma}$;

c) якщо $(\gamma,\nu)\in\Omega$ *і* $q=\infty,\ 1\le\theta<\infty,\ \gamma>1-\frac{1}{\theta}$, *то*

$$\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu)\asymp(\ln n)^{1-\frac{1}{\theta}-\gamma};$$

d) якщо $(\gamma,\nu)\in\Omega$ *і* $2\le q<\infty,\ 2\le\theta<\infty,\ \gamma>\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}$, *то*

$$\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu)\asymp(\ln n)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}-\gamma};$$

У підрозділі 5.2 знайдено точні за порядком оцінки наближення класів згорток сумовних функцій з багатовимірним ядром Пуассона за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у многогранних областях.

Нехай $\mathbb{T}^d=\mathbb{R}^d\big/(2\pi\mathbb{Z})^d$ — $d-$вимірний тор і $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1\le p\le\infty$ — простори вимірних на $\mathbb{T}^d$ функцій $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,\ldots,x_d)$ зі скінченними стандарними нормами $\|\cdot\|_p$ при $1\le p<\infty$ і $\|\cdot\|_\infty$ при $p=\infty$.

Визначимо оператор $I_K\colon\ L_1(\mathbb{T}^d)\to L_1(\mathbb{T}^d)$ за допомогою рівності

$$I_K\varphi(\boldsymbol{x})=\varphi*K=(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d}\varphi(\boldsymbol{y})K(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y},$$

тобто I_K — оператор згортки з ядром $K\in L_1(\mathbb{T}^d)$, визначений на множині $L_1(\mathbb{T}^d)$. Нехай

$$W(K)=\{f:\ f(\boldsymbol{x})=I_K\varphi(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^d,\ \|\varphi\|_p\le 1\}$$

і $A^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}=:W(K)$, якщо

$$K(\boldsymbol{t})=:P^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{t})=2^d\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d}\prod_{j=1}^{d}e^{-\alpha_j k_j^{r_j}}\cos(k_jt_j-\frac{\beta_j\pi}{2}),$$

$\alpha_j>0$, $r_j>0$, $\beta_j\in\mathbb{R}$. У випадку коли $r_j=1$ при всіх $j=\overline{1,d}$ і $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_d=:\alpha>0$, покладаючи $e^{-\alpha}=\varrho\ (0<\varrho<1)$, клас $A^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ позначаємо через $A^{\varrho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ і, якщо ще $\beta_j=0$, $j=\overline{1,d}$ — то через A^{ϱ}_{p}. Відповідне класам A^{ϱ}_{p} ядро $P(\varrho;\boldsymbol{t}):=2^d\sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d}\prod\limits_{j=1}^{d}\varrho^{k_j}\cos k_jt_j$ називається *багатовимірним (або кратним) ядром Пуассона.*

Для довільної обмеженої множини $\Lambda\subset\mathbb{Z}^d$ через $T(\Lambda)$ позначимо простір тригонометричних поліномів t вигляду $t(\boldsymbol{x})=\sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\Lambda}c_{\boldsymbol{k}}e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$, $c_{\boldsymbol{k}}\in\mathbb{C}$ і покладемо

$$E_\Lambda(F)_q:=\sup_{f\in F}\inf_{t\in T(\Lambda)}\|f-t\|_q,\quad F\subset L_q(\mathbb{T}^d).$$

Величину $E_\Lambda(F)_q$ *називаємо найкращим наближенням класу* F *у просторі* $L_q(\mathbb{T}^d)$ *за допомогою тригонометричних поліномів із* $T(\Lambda)$, *або відхиленням у просторі* $L_q(\mathbb{T}^d)$ *класу* F *від підпростору* $T(\Lambda)$.

Для функції $h \in L_1(\mathbb{T}^d)$, нехай $S_\Lambda(h; \boldsymbol{x}) = \sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\Lambda} \widehat{h}_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$ — частинна сума тригонометричного ряду Фур'є функції h, породжена множиною гармонік $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\Lambda}$. Таку суму називаємо Λ*–сумою Фур'є.*

Покладемо

$$\mathcal{E}_\Lambda(F)_q := \sup_{f\in F} \|f(\cdot) - S_\Lambda(f;\cdot)\|_q, \quad F \subset L_q(\mathbb{T}^d).$$

Величина $\mathcal{E}_\Lambda(F)_q$ *— це точна верхня грань на множині* F *відхилень у просторі* $L_q(\mathbb{T}^d)$ *елементів із* F *від* Λ*–сум Фур'є.*

У підрозділі 5.2 знайдено точні за порядком відносно параметра n оцінки величин $\mathcal{E}_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q$ і $E_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q$, $1 \le p, q \le \infty$, коли $\Lambda = \square(n,d) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d \ : \ \max\limits_{1\le j\le d} |k_j| \le n\}$, а також, коли $\Lambda = \triangle(l,d) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d \ : \ \sum\limits_{j=1}^{d} |k_j| \le l\}$.

Теорема 5.2.1. *Для будь-яких* $d \in \mathbb{N}$ *при* $1 \le p, q \le \infty$

$$E_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \mathcal{E}_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \varrho^n.$$

Теорема 5.2.2. *Для будь-яких* $d \in \mathbb{N}$ *при* $1 < q \le p < \infty$

$$E_{\triangle(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \mathcal{E}_{\triangle(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \varrho^n.$$

З огляду на теореми 5.2.1 та 5.2.2 можна констатувати, що для деяких співвідношень між параметрами p та q (а саме, при $1 < q \le p < \infty$) оцінки наближення класу A_p^ϱ у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$ поліномами із $T(\triangle(n,d))$ не поступаються оцінкам наближення поліномами із $T(\square(n,d))$, незважаючи на те, що $\dim T(\triangle(n,d)) < \dim T(\square(n,d))$ при $d \ge 2$.

У підрозділі 5.3 встановлено слабку асимптотику $M-$поперечників за Колмогоровим класів $A_{p,\boldsymbol{\beta}}^\rho$ у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \le q \le \infty$.

Теорема 5.3.1. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$ *і* $2 \le q \le p < \infty$. *Тоді*

$$d_M(A_{p,\boldsymbol{\beta}}^\rho; L_q(\mathbb{T}^d)) \asymp \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}}, \quad d! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot d.$$

Зазначимо, що у випадку $d = 1$ О.К. Кушпелем (1987) знайдені точні за порядком значення поперечників $d_M(A_{p,\boldsymbol{\beta}}^{r,\boldsymbol{\alpha}}; L_q(\mathbb{T}^d))$ при $1 \le p, q \le \infty$ і $r \ge 1$.

У підрозділі 5.4 розв'язана задача, що стосується слабкої асимптотики одного типу нелінійних поперечників відомих класів $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$ функцій, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$, які є так званими $r-$ми інтегралами функцій, сумовних на $\mathbb{S}^{d-1}$.

Нехай $L_p = L_p(\mathbb{S}^{d-1}), 1 \le p < \infty$, – простір функцій, визначених на $\mathbb{S}^{d-1}$, зі стандарною скінченною $p-$інтегральною нормою $\|\cdot\|_p$; L_∞ ототожнюється з $C = C(\mathbb{S}^{d-1})$ — простором функцій, неперервних на $\mathbb{S}^{d-1}$ з рівномірною нормою.

Центральною апроксимаційною характеристикою, що досліджується у підрозділі 5.4, є нелінійний $n-$поперечник $\overline{d}_n(F;X)$ множини F у банаховому просторі X з нормою $\|\cdot\|_X$:

$$\overline{d}_n(F;X) = \inf_{a,\mathcal{M}_n} \sup_{x\in F} \|f - M_n(a(f))\|_X,$$

де $a : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — довільне неперервне відображення, що діє із F в $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{M}_n$ — сукупність всіх неперервних відображень $M_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$.

Така величина означена у 2000-му році Р. А. де Вором, Р. Говардом та Ч. Мічеллі (R. A. De Vore, R. Howard, Ch. Micchelli).

Теорема 5.4.1. *Нехай* $1 \le q \le p \le \infty$ *і* $r > 0$*, або* $1 \le p < q \le \infty$ *і* $r > (d-1)^2 + (d-1)/(1/p - 1/q)$. *Тоді*

$$\overline{d}_n(W^r_p(\mathbb{S}^{d-1}); L_q) \asymp n^{-r/(d-1)}.$$

ВИСНОВКИ

Досліджено властивості нової базисної системи Хаара H^d функцій, що визначені на кубі $\mathbb{I}^d := [0,1]^d$ евклідового простору $\mathbb{R}^d$, $d \ge 2$. З'ясовані її можливості щодо лінійної та нелінійної апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій із просторів Бєсова та Гельдера у просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$. Вказано практично здійснений алгоритм побудови екстремальних (у сенсі порядкових оцінок наближень) нелінійних $m-$членних агрегатів.

Проведено порівняльний аналіз ефективності базису Хаара H^d та тригонометричного базису $\mathcal{T} = \{e^{2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ у їх застосуванні до нелінійної апроксимації класів Бєсова.

Вперше встановлені точні за порядком оцінки величин $n-$членних проективних наближень за кратною системою Фабера–Шаудера (базисом в $C(\mathbb{I}^d)$) для функцій, що належать класам Бєсова.

Досліджено деякі класичні характеристики лінійної та нелінійної апроксимації (у сенсі встановлення їх точних за порядком оцінок) на різного типу класах Нікольського та Бєсова — періодичних функцій з декількома змінними — у просторах Лебега $L_q(\pi_d)$: тригонометричні та ортопроекційні поперечники, величини найкращих M – членних тригонометричних наближень. Основними твердженнями охоплені не досліджені раніше випадки співвідношень між параметрами, що фігурують в означенні класів функцій і просторів.

Вперше встановлено точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на класах Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ у функціональних просторах $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$, наділених звичайною чи мішаною нормами. Розв'язано задачу про оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Розвинуто теорію наближення класів функцій, які є аналітичними в однозв'язній області $\Omega \subset \mathbb{C}$, що обмежена замкнутою спрямлювальною жордановою кривою Γ. Об'єктами дослідження стали класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ — множини функцій, що зображуються в області Ω інтегралами типу Коші вздовж Γ зі щільностями із підмножин $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$, сумовних на Γ функцій.

На базі відомих просторів $LG^{\gamma}_{\mathrm{dyad}}$ функцій з однією змінною, визначених на торі $\mathbb{T}$, запроваджено нову функціональну шкалу, так званих двійкових просторів Бєсова $\mathrm{dyad}B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, компактно вкладених у простори $\exp L^{\nu}$ — експоненціальні простори Орліча, що наділені нормою Люксембурга. Встановлені точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел у просторах $\exp L^{\nu}$ одиничних куль $\mathrm{dyad}\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$.

Досліджено деякі апроксимаційні величини на класах $A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ функцій кількох змінних, періодичних по кожній із них, і таких, що зображуються у вигляді згортки елементів одиничної кулі простору $L_p(\mathbb{T}^d)$ з кратним ядром Пуассона: а) знайдено точні за порядком оцінки наближення таких класів за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у багатогранних областях; б) встановлено слабку асимптотику M – поперечників за Колмогоровим класів $A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$, $2 \le q \le p < \infty$.

Розв'язано задачу про слабку асимптотику одного типу нелінійних поперечників класів функцій $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$, які є множинами так званих r – их інтегралів функцій, сумовних на $\mathbb{S}^{d-1}$. Основний результат є істотним доповненням до області досліджень, пов'язаних з лінійною апроксимацією функціональних класів $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Романюк В.С.* Колмогоровские поперечники классов функций, аналитических в ограниченных областях комплексной плоскости / В. С. Ро-

манюк // Ряды Фурье: теория и приложения / Сб. трудов Ин-та математики АН Украины. — 1992. — С. 119–126.

2. *Романюк В.С.* Приближение классов аналитических функций алгебраическими многочленами и колмогоровские поперечники / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 2. — С. 236–250.

3. *Романюк В.С.* Приближение в среднем с весом классов аналитических функций алгебраическими полиномами и конечномерными подпространствами / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 5. — С. 645–662.

4. *Романюк В.С.* Оценки колмогоровских поперечников классов аналитических функций, представимых интегралами типа Коши. I / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 2. — С. 229–237.

5. *Романюк В.С.* Оценки колмогоровских поперечников классов аналитических функций, представимых интегралами типа Коши. II / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 3. — С. 346–355.

6. *Романюк В.С.* Дополнение к оценкам приближений суммами Фурье классов бесконечно-дифференцируемых функций / В. С. Романюк // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математи-ки НАН України. — 2003. — **46**. — С. 131–135.

7. *Романюк В.С.* О свойствах p-фаберовых операторов и их приложениях / В. С. Романюк, В. В. Савчук // Проблеми теорії функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, № 2. — С. 186—212.

8. *Романюк В.С.* Приближение классов кратных интегралов Пуассона / В. С. Романюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **4**, № 1. — С. 258–268.

9. *Романюк В.С.* Об асимптотических оценках Колмогоровских поперечников классов кратных интегралов Пуассона / В. С. Романюк // Проблеми теорії функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 279–285.

10. *Романюк В.С.* Нелинейные поперечники классов гладких функций, определенных на единичной сфере в R^d / В. С. Романюк // Матем. заметки. — 2009. — **85**, № 1. — С. 147–152.

11. *Романюк А.С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 10. — С. 1348–1366.

12. *Романюк А.С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 4. — С. 536-551.

13. *Романюк В.С.* Нелинейная аппроксимация функций многих переменных из классов Бесова / В. С. Романюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 1. — С. 199–220.

14. *Романюк А.С.* Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского–Бесова / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн.— 2012.— **64**, № 5. — С. 685– 697.

15. *Романюк А.С.* Наилучшие билинейные приближения классов функций многих переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 12.— С. 1681–1699.

16. *Романюк В.С.* Конструктивная характеристика классов Гельдера и $m-$членные приближения по кратному базису Хаара / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2014. — **67**, № 3. — С. 349–360.

17. *Романюк В.С.* Кратный базис Хаара в обратных теоремах приближения и теоремах вложения / В. С. Романюк // Anal. Math. — 2015. — **66**, № 4. — P. 241–255.

18. *Романюк В.С.* Нелинейная аппроксимация в пространствах кратных последовательностей / В. С. Романюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 4. — С. 253–261.

19. *Романюк В.С.* Кратный базис Хаара и его свойства / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 9.— С. 1253–1264.

20. *Романюк В.С.* Кратный базис Хаара и m-членные приближения функций из классов Бесова. I / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 4. — С. 551–562.

21. *Романюк В.С.* Кратный базис Хаара и m-членные приближения функций из классов Бесова. II / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2016.— **68**, № 6.— С. 816–825.

22. *Романюк А.С.* Оценки наилучших билинейных приближений классов $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ и сингулярных чисел интегральных операторов / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 9. — С. 1240–1250.

23. *Романюк В.С.* Колмогоровские поперечники и энтропийные числа в пространствах Орлича с нормой Люксембурга / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 5. — С. 682–694.

24. *Романюк В.С.* Слабая асимптотика поперечников по Колмогорову классов сверток периодических функций / В. С. Романюк // Теорія апроксимацій та чисельні методи: міжнародна наукова конференція присвячена 100-річчю з дня народження Є. Ремеза, м.Рівне, 19 – 21 червня 1996 р.: Тези доповідей. — Рівне, 1996. — С. 66.

25. *Романюк В.С.* Ортопоперечники классов бесконечно дифференцируемых функций // Ряди Фур'є теорія і застосування: математична школа, м. Кам'янець-Подільський, 1997. — С. 107–108.

26. *Romanyuk V.S.* Approximation in the mean of classes of analytic functions by algebraic polynomials and finite-dimensional subspaces / V. S. Romanyuk, V. V. Savchuk // International conference dedicated to M. A. Lavrentyev on the occasion of his birthday centenary, Kiev,October 31-November: Abstracts. — Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2000. — P. 49–50.

27. *Романюк В.С.* О приближении функций, представимых сверткой с кратным ядром Пуассона / В. С. Романюк // Український математичний конгрес – 2001. Секція 10: "Теорія наближення та гармонічний аналіз", Київ, 19–23 серпня: Тези доповідей. — К: Ін-т математики НАН України, 2001. — С. 56.

28. *Романюк В.С.* Нелинейные поперечники классов гладких функций, определенных на единичной сфере в $\mathbf{R}^d$ / В. С. Романюк // Межд.конф. "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященной столетию С. М. Никольского, Москва, 23–29 мая 2005 г., Тез. докл. — С. 187.

29. *Романюк В.С.* Нелинейная аппроксимация функций многих переменных из классов Бесова / В. С. Романюк // Міжнародна наукова конференція "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 18-23 вересня 2006 р.) : Тези доповідей. — К: Ін-т математики НАН України, 2006. — С. 90–91.

30. *Романюк В.С.* О приближениях классов сверток с многомерным ядром Пуассона / В. С. Романюк // Международная научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики". (Россия, Тула, 19-23 ноября 2007г.) — Тула.: ТулГУ, 2007. — С. 76–77.

31. *Романюк В.С.* Нелінійне наближення функцій багатьох змінних зі швидко спадними коефіцієнтами Фур'є / В. С. Романюк // Міжн. наук. конф. "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", 16-21 червня 2008 г., Мелітополь, Україна: Тези доповідей. — С. 95–96.

32. *Романюк А.С.* Білінійні наближення і поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Тез. допов. конференції "Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів III", присвячена пам'яті В. К. Дзядика (1919-1998). — К: Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 76.

33. *Романюк В.С.* Адаптивное приближение функций многих переменных / В. С. Романюк // Тез. докл. конференции "Функциональные методы в теории приближений и теории операторов III", посвящ. памяти В.К.Дзядыка (1919-1998).- К: Ин-т математики НАН Украины, 2009. — С. 77–78.

34. *Романюк В.С.* $N-$членная аппроксимация в $L_q(I^d)$ классов функций многих переменных / В. С. Романюк // Тез. Международной конференции "Теория приближений", посвященной 90-летию С. Б. Стечкина,

(Россия, Москва, 23-26 августа 2010 г).— М.: 2010. — С. 61.
35. *Романюк В.С.* Нелинейная аппроксимация классов функций многих переменных / В. С. Романюк // International Conference "Approximation Theory and Applications" in memory of N. P. Korneichuk (June 14-17, 2010, Dnepropetrovsk, Ukraine). — P. 77–78.
36. *Romanyuk A.S.* Best bilinear approximations and Kolmogorov widths of classes of multivariate periodic functions / A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk //Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematlcal Analysis, Differential Equations and their Applications", 15-20 September, 2010, Sunny Beach, Bulgaria: Abstracts. — P. 39–40.
37. *Романюк В.С.* Нелинейные приближения функций многих переменных по базису Хаара / В. С. Романюк // International Conference in Modern Analysis: Abstracts June 20–23, 2011, Donetsk, Ukraine. — С. 95.
38. *Романюк В.С.* Базис Хаара в просторах функцій багатьох змінних та його апроксимативні властивості / В. С. Романюк // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування", присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007): Тези доповідей (Україна, Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.). — С. 91.
39. *Romanyuk A.S.* Best bilinear approximations of functions from Nikol'skii–Besov classes / A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk // International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications", September 04-09, 2012, Mersin, Turkey. Abstracts.
40. *Романюк В.С.* Аппроксиматывные свойства кратного базиса Хаара / В. С. Романюк // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013, Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. — К: Ін-т математики НАН України, 2013. — С. 266.
41. *Романюк В.С.* Властивості кратного базису Хаара в задачах апроксимації функцій із просторів Гельдера / В. С. Романюк // IV міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана, 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці, Україна: Тези доповідей. — Чернівецький національний університет. — 2014. — С. 173–175.
42. *Romanyuk V.S.* Nonlinear approximation of the Nikol'skii-Besov classes of the function defined on the unit cube in the Euclidean space / В. С. Романюк // Third conference. "Mathematics for Life Sciences". Rivne, September 15–19, 2015: Book of Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NASU, 2015. — P. 34.
43. *Романюк В.С.* Колмогоровские поперечники и энтропийные числа классов Бесова в пространствах функций с нормой Люксембурга / В. С. Романюк // International Conference dedicated to 75th

anniversary of professor Vitalii Pavlovych Motornui "Approximation Theory and its Applications", Dnepropetrovsk, 8–11 October, 2015: Abstracts. — Dnepropetrovsk, 2015. — P. 60.

АНОТАЦІЇ

Романюк В.С. Методи та характеристики лінійної та нелінійної апроксимації класів гладких функцій. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – "Математичний аналіз" (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

У дисертаційній роботі досліджуються апроксимаційні можливості відомих та нових функціональних базисних систем стосовно певних класів гладких функцій. Областями визначення цих функцій є множини різної структури у $d-$вимірному евклідовому просторі та на комплексній площині. Основним апаратом наближення є скінченно-вимірні агрегати, до конструкції яких залучені відповідні базисні системи. Більшість результатів подано у вигляді точних за порядком оцінок класичних характеристик лінійної та нелінійної апроксимації певних класів гладких функцій у відповідних просторах Лебега: колмогоровських, тригонометричних, ортопроекційнних поперечників; величин найкращих $m-$членних наближень за фіксованою базисною системою; величин найкращих білінійних наближень тощо.

Ключові слова: нелінійна апроксимація; колмогоровські поперечники; найкраще n-членне наближення; білінійні наближення; функції комплексної змінної; періодичні функції з кількома дійсними змінними; простір Лебега; простір Бєсова; простір Нікольського; простір Гельдера; кратна базисна система Хаара; кратний базис Фабера–Шаудера; тригонометрична система; сферичні гармоніки; гріді апроксиманти; $p-$гріді алгоритм; многочлени Фабера; інтеграл типу Коші;

Романюк В.С. Методы и характеристики линейной и нелинейной аппроксимации классов гладких функций. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "математический анализ" (111 – Математика). – Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

В диссертационной работе исследуются аппроксимационные возможности известных и новых функциональных базисных систем касательно некоторых классов гладких функций. Областями определения этих функций являются множества разной структуры в $d-$мерном евклидовом пространстве и на комплексной плоскости. В качестве основного аппарата приближениия выступают конечномерные агрегаты, в конструкции которых используются соответствующие базисные системы. Большинство результатов представлены в виде точных по порядку оценок классических характеристик линейной и нелинейной аппроксимации определенных классов гладких функций в соответствующих пространствах Лебега: колмогоровских, тригонометрических, ортопроекционных поперечников; величин наилучших $m-$членных приближений по фиксированной базисной системе; величин наилучших билинейных приближений и т. п.

Ключевые слова: нелинейная аппроксимация; колмогоровские поперечники; наилучшее $n-$членное приближение; билинейное приближение; функции комплексной переменной; периодические функции с несколькими действительными переменными; пространство Лебега; пространство Бесова; пространство Никольского; пространство Гельдера; кратная базисная система Хаара; кратный базис Фабера–Шаудера; тригонометрическая система; сферические гармоники; гриди аппроксиманты; $p-$гриди алгоритм; многочлены Фабера; интеграл типа Коши.

Romanyuk V.S. Methods and characteristics of linear and nonlinear approximation of classes of smooth functions. — The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.01. — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

Starting in the end of 30s of the last century a direction of the research related to approximation of function sets — classes of functions that have some differential properties or so called classes of smooth functions became one of the main in the Approximation Theory. Such properties are described in terms of operation of differentiation defined in certain way or in terms of different types of modulus of smoothness.

The problem related to estimates of Kolmogorov widths of classes of smooth functions in different function spaces became one of the main problem of linear approximation from the very first stages of its development. Until now there are many results including fundamental in this direction. There are many monographs that became already classical dedicated to this research. This thesis includes multiple references to them.

Since the beginning of this century nonlinear approximation has gained significant rates of development. One of the main approximative characteristic

here is the quantity $\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathcal{X})$ of best $m-$ term approximation of classes $F\subset\mathcal{X}$ in the space $\mathcal{X}$ with the norm $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ by some system $\mathfrak{A}=\{u_k\}_{k\in\Omega}$ from $\mathcal{X}$ (Ω is countable set of indices), $\overline{\mathrm{span}\mathfrak{A}}=\mathcal{X}$. By its nature, the method of approximation laid in the definition of this quantity is related with each specific approximative system and is adaptive to elements of class.

From the viewpoint of practical application, along with the problem of determination of asymptotic behavior (at least weak) with respect to parameter m for quantity $\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathcal{X})$, no less important problem is the problem related to an algorithm of determination of extreme approximative aggregates.

The solution of these problems essentially depend on the choice of a system $\mathfrak{A}$. Application of one or another system to approximation of some fixed class $F\subset\mathcal{X}$ in the end is estimated both in viewpoint of simplicity of its structure, convenience in research and computation and comparison of estimates of approximation.

In this thesis we find out approximative properties of well known and new functional basis systems with respect to some classes of smooth functions. These functions are defined on sets of different structure in $d-$dimensional Euclidean space and the complex plane. The finite dimensional aggregates that are constructed by using corresponding basis systems are the main apparatus of approximation.

Most of results are presented in a form of exact-order estimates for classical characteristics of linear and nonlinear approximation of certain classes of smooth functions in appropriate Lebesgue spaces: Kolmogorov, trigonometric widths, orthowidths; quantities of the best $m-$term approximations with respect to a fixed basis system; quantities of the best bilinear approximations, etc.

Key words: nonlinear approximation; Kolmogorov widths; best $n-$term approximations; bilinear approximations; functions of a complex variable; periodic functions with several real variables; Lebesgue space; Besov space; Nikol'skii space; Holder space; multiple Haar base system; multiple basis of Faber–Schauder; trigonometric system; spherical harmonics; greedy approximants; p–greedy algorithm; Faber polynomials; Cauchy-type integral.

Підп. до друку 12. 03. 2018. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 2,5. Ум. друк. арк. 2,3. Тираж 120 пр. Зам. 26.

Інститут математики НАН України,
01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3