НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

РОМАНЮК ВІКТОР СЕРГІЙОВИЧ

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

МЕТОДИ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛІНІЙНОЇ ТА НЕЛІНІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КЛАСІВ ГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ

Спеціальність 01.01.01 — математичний аналіз

111 — Математика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

________________ В. С. Романюк

Науковий консультант
РОМАНЮК Анатолій Сергійович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2017

АНОТАЦІЯ

Романюк В.С. Методи та характеристики лінійної та нелінійної апроксимації класів гладких функцій. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — Математичний аналіз (111 — Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

З кінця 30-х років минулого століття одним із стержневих напрямків теорії апроксимації функцій став напрямок, пов'язаний з наближенням функціональних множин — класів функцій, що наділені певними диференціальними властивостями чи, як кажуть, — класів гладких функцій. Такі властивості описуються або в термінах певним способом визначеної операції диференціювання, або в термінах різного типу модулів гладкості.

Однією з основних задач теорії лінійної апроксимації вже з перших етапів її розвитку стала задача, що стосується оцінки колмогоровських поперечників класів гладких функцій у різних функціональних просторах. До нинішнього часу в цьому напрямку накопичена значна кількість результатів, серед яких є фундаментальні. Значущим дослідженням присвячена низка монографій, які стали на даний час класичними. Неодноразові посилання на них є також у даній дисертаційній роботі.

З початку нинішнього століття значних темпів розвитку набув ще один напрям теорії наближення функцій — нелінійна апроксимація. Тут однією із ключових апроксимаційних величин (характеристик) класів функцій є величина $\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathscr{X})$ найкращого $m-$членного наближення класу $F\subset\mathscr{X}$ у просторі $\mathscr{X}$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ за допомогою деякої системи $\mathfrak{A}=\{u_k\}_{k\in\Omega}$ із $\mathscr{X}$ (Ω — зліченна множина індексів), $\overline{\mathrm{span}\mathfrak{A}}=\mathscr{X}$. За своєю суттю, метод наближення, закладений в означення цієї величини, пов'язаний з конкретною апроксимуючою системою і є адаптивним до елементів класу. З точки зору практичних застосувань, поряд із задачею про встановлення асимтотики (принаймі, слабкої) по параметру m для величин $\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathscr{X})$, не менш важливою є задача, що стосується алгоритму побудови екстремальних наближаючих агрегатів. Розв'язання окреслених задач істотно залежать від вибору системи $\mathfrak{A}$. Використання тої чи іншої системи до наближення фіксованого класу $F\subset\mathscr{X}$ в підсумку оцінюється як з точки зору її структурної простоти, зручності у дослідженнях та обчисленнях, так і у порівнянні оцінок наближення.

У дисертаційній роботі, дослідженнями у вказаних напрямках, з'ясовуються апро-

ксимаційні можливості відомих та нових функціональних базисних систем стосовно певних класів гладких функцій. Областями визначення цих функцій є множини різної структури у $d-$вимірному евклідовому просторі та на комплексній площині. Основним апаратом наближення є скінченно-вимірні агрегати, до конструкції яких залучені відповідні базисні системи.

Основні положення дисертації з відповідними коментарями викладені у її *першому розділі*.

Другий розділ присвячений лінійній та нелінійній апроксимації класів функцій з однією та кількома дійсними змінними, визначених на одиничному кубі $\mathbb{I}^d$ евклідового простору $\mathbb{R}^d$.

Запроваджено базисну систему Хаара H^d, $d \geq 2$ функцій, визначених на кубі $\mathbb{I}^d$. Вивчені структурні властивості цієї системи та її можливості щодо лінійної та нелінійної апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій із просторів Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$. Зокрема: а) подано опис ізотропних просторів Бєсова та просторів Гельдера в термінах умов на коефіцієнти Фур'є–Хаара елементів цих просторів; б) описані гладкісні властивості функцій, визначених на $\mathbb{I}^d$, в припущеннях певного ступеня їх наближення поліномами, побудованими за системою H^d; в) встановлені точні за порядком оцінки верхніх меж найкращих $m-$членних наближень за базисом H^d у просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ для функцій, які належать до одиничних куль просторів Бєсова та Гельдера. Вказано практично здійснений алгоритм побудови екстремальних (в сенсі порядкових оцінок наближень) нелінійних $m-$членних агрегатів.

Також, встановлені точні за порядком оцінки величин $n-$членних проективних наближень за кратною системою Фабера–Шаудера (базисом в $C(\mathbb{I}^d)$) для функцій, що належать класам Бєсова.

Вміст *третього розділу* складають результати з лінійної та нелінійної апроксимації класів періодичних гладких функцій у просторах $L_q(\pi_d)$.

Досліджено деякі класичні апроксимаційні характеристики (в сенсі встановлення їх точних за порядком оцінок) на різного типу класах Нікольського та Бєсова — періодичних функцій з декількома змінними — у просторах Лебега. Зокрема: а) отримані точні за порядком оцінки тригонометричних та ортопроекційних поперечників ізотропних класів Бєсова $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ та Нікольського $\mathbb{H}^r_p$ в просторі $L_q(\pi_d)$ при певних співвідношеннях між параметрами p та q; б) встановлені точні за порядком оцінки величин найкращих $M-$членних тригонометричних наближень класів Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ в просторі $L_q(\pi_d)$.

Проте, в основі третього розділу лежать дослідження, що стосуються ще однієї характеристики нелінійної апроксимації — величини найкращого білінійного наближення класів періодичних функцій з $2d$ змінними. Знайдені порядкові значення найкращих білінійних наближень класів функцій з $2d$ змінними, що породжені функціями з d змінними із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу. Встановлені точні за порядком оцінки верхніх граней величин найкращих білінійних наближень на ізотропних класах Нікольського–Бєсова в функціональних просторах $L_q(\pi_{2d})$. Отримані результати є істотним доповненням до відомих оцінок розглянутих тут величин стосовно інших класів періодичних функцій з декількома змінними у просторах $L_q(\pi_d)$, наприклад, класів Соболєва $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$ чи Нікольського $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$. З іншого боку, основними твердженнями охоплені не досліджені раніше випадки співвідношень між параметрами, що фігурують в означенні класів функцій і просторів.

В заключному підрозділі третього розділу встановлено точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на класах Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ у функціональних просторах $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ із мішаною ("векторною") нормою $\|\cdot\|_{\boldsymbol{q}}$. На основі відомої теореми, що пов'язує величину білінійного наближення функцій $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$ з сингулярними числами інтегральних операторів — ядро яких тотожне функції f — розв'язано задачу про оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Четвертий розділ присвячений апроксимації функцій з комплексною змінною. Основними поміж результатів цього розділу є ті, у яких відображені апроксимаційні властивості класів функцій, які є аналітичними в однозв'язній області $\Omega\subset\mathbb{C}$, що обмежена замкнутою спрямлювальною жордановою кривою Γ. Об'єктами дослідження є класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ — множини функцій, що зображуються в області Ω інтегралами типу Коші вздовж Γ зі щільностями із підмножин $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ сумовних на Γ функцій. Встановлені оцінки наближення таких класів функцій в певних функціональних банахових просторах за допомогою скінченно-вимірних підпросторів.

Класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ вперше означені в статті, опублікованій у 1992 році, за авторством О. І. Степанця та В. С. Романюка. Вихідним пунктом в цьому означенні стала класифікація $2\pi-$періодичних сумовних на періоді функцій, що проведена у 1983 році О. І. Степанцем і базується на запровадженому ним понятті $(\psi;\beta)-$похідної.

У термінах оцінок величин найкращого поліноміального наближення та колмогоровських поперечників досліджено апроксимаційні властивості класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$, аналітичних в Ω і сумовних на Γ функцій, за різноманітних обмежень на послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$, що визначає клас $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$. А саме, у випадках, коли: а) природною межею аналітичності функцій із $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ є крива Γ — границя області Ω; б) функції з $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ аналітично продовжуються поза Γ в деяку обмежену область $\Omega' \supset \Omega$ чи навіть на всю комплексну площину.

Закладена в означенні класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ відповідність між класифікацією сумовних на Γ функцій і класифікацією $2\pi-$періодичних на $\mathbb{R}$ і сумовних на періоді функцій дозволила за відповідного обгрунтування граничних властивостей функцій із класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ роз'язати поставлені задачі, головним чином, методами теорії функцій дійсної змінної.

У *п'ятому розділі* даються відповіді на важливі питання щодо лінійної та нелінійної апроксимації певних функціональних множин у просторах функцій з областю визначення різної структури в $\mathbb{R}^d$. Зокрема, це питання, пов'язані з апроксимацією у просторах $L_q(\mathbb{T}^d)$ та у просторах Лебега $L_q(\mathbb{S}^{d-1})$, де $\mathbb{S}^{d-1}$ одинична сфера простору $\mathbb{R}^d$.

Введена до розгляду нова функціональна шкала так званих двійкових просторів Бєсова $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, компактно вкладених у простори $\exp L^{\nu}$ — експоненціальні простори Орліча, що наділені нормою Люксембурга. Основним результатом щодо просторів $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ є точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел у просторах $\exp L^{\nu}$ одиничних куль $\mathrm{dyad}\, \mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$.

Досліджені деякі апроксимаційні величини на класах $A^{\rho}_{p,\beta}$ функцій кількох змінних, періодичних по кожній із них, і таких, що зображуються у вигляді згортки елементів одиничної кулі простору $L_p(\mathbb{T}^d)$ з кратним ядром Пуассона. Зокрема: а) знайдені точні за порядком оцінки наближення таких класів за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у многогранних областях; б) при $d \geq 2$ встановлена слабка асимптотика $M-$поперечників за Колмогоровим класів $A^{\rho}_{p,\beta}$ у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$, $2 \leq q \leq p < \infty$.

У п'ятому розділі, також розв'язана задача про слабку асимптотику одного типу нелінійних поперечників класів функцій $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$. Ці класи є множинами так званих r–их інтегралів функцій сумовних на $\mathbb{S}^{d-1}$. Основний результат є істотним доповненням до області досліджень, пов'язаних з лінійною апроксимацією функціональних класів $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$.

У *Додаток А* поміщені допоміжні твердження, які регулярно використовуються в основній частині дисертаційної роботи. Вони стосуються нелінійної апроксимації у дискретних просторах — просторах послідовностей: а) обчислені значення величин

$n-$членного проективного наближення у просторі l_q^m одиничної кулі $B_p^m \subset l_p^m$ за стандартним базисом простору $\mathbb{R}^m$; б) знайдені точні за порядком оцінки величин найкращих наближень $q-$еліпсоїдів в просторах кратних послідовностей за допомогою їх ортогональних проекцій на евклідові підпростори $\mathbb{R}^n$ вимірності n.

Ключові слова: нелінійна апроксимація; колмогоровські поперечники; найкраще $n-$членне наближення; білінійні наближення; функції комплексної змінної; періодичні функції з кількома дійсними змінними; простір Лебега; простір Бєсова; простір Нікольського; простір Гельдера; кратна базисна система Хаара; кратний базис Фабера–Шаудера; тригонометрична система; сферичні гармоніки; гріді апроксиманти; $p-$гріді алгоритм; многочлени Фабера; інтеграл типу Коші;

Romanyuk V.S. Methods and characteristics of linear and nonlinear approximation of classes of smooth functions. — The Manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.01. — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

Starting in the end of 30s of the last century a direction of the research related to approximation of function sets — classes of functions that have some differential properties or so called classes of smooth functions became one of the main in the Approximation Theory. Such properties are described in terms of operation of differentiation defined in certain way or in terms of different types of modulus of smoothness.

The problem related to estimates of Kolmogorov widths of classes of smooth functions in different function spaces became one of the main problem of linear approximation from the very first stages of its development. Until now there are many results including fundamental in this direction. There are many monographs that became already classical dedicated to this research. This thesis includes multiple references to them.

Since the beginning of this century nonlinear approximation has gained significant rates of development. One of the main approximative characteristic here is the quantity $\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathscr{X})$ of best $m-$term approximation of classes $F \subset \mathscr{X}$ in the space $\mathscr{X}$ with the norm $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ by some system $\mathfrak{A} = \{u_k\}_{k\in\Omega}$ from $\mathscr{X}$ (Ω is countable set of indices), $\overline{\mathrm{span}\mathfrak{A}} = \mathscr{X}$. By its nature, the method of approximation laid in the definition of this quantity is related with each specific approximative system and is adaptive to elements of class.

From the viewpoint of practical application, along with the problem of determination of asymptotic behavior (at least weak) with respect to parameter m for quantity

$\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathscr{X})$, no less important problem is the problem related to an algorithm of determination of extreme approximative aggregates. The solution of these problems essentially depend on the choice of a system $\mathfrak{A}$. Application of one or another system to approximation of some fixed class $F \subset \mathscr{X}$ in the end is estimated both in viewpoint of simplicity of its structure, convenience in research and computation and comparison of estimates of approximation.

In this thesis we find out approximative properties of well known and new functional basis systems with respect to some classes of smooth functions. These functions are defined on sets of different structure in $d-$dimensional Euclidean space and the complex plane. The finite dimensional aggregates that are constructed by using corresponding basis systems are the main apparatus of approximation.

In the first section we write the main ideas of the thesis with corresponding comments.

The second section is dedicated to linear and nonlinear approximation of classes of functions with one and several variables that are defined on unite cube $\mathbb{I}^d$ in Euclidean space $\mathbb{R}^d$.

We introduced the basis Haar system H^d, $d \geq 2$, of functions defined on the cube $\mathbb{I}^d$. We studied structure properties of this system and its opportunities with respect to linear and nonlinear approximation of individual functions and function classes from Lebesgue space $L_q(\mathbb{I}^d)$. Namely, a) we described isotropic Besov spaces and Hölder spaces in terms of conditions on the Fourier-Haar coefficients of elements of these spaces; b) we described smooth properties of functions defined on $\mathbb{I}^d$ in the assumptions of a certain degree of their approximation by polynomials constructed with respect to the system H^d; c) we established the exact order estimates of supremums of best $m-$term approximation with respect to the basis H^d in the Lebesgue space $L_q(\mathbb{I}^d)$ of functions that belong to the units balls of Besov and Hölder spaces. We specified practically implemented algorithm of construction of extreme (in the sense of order estimates of approximative characteristics) nonlinear $m-$term aggregates.

We also obtained the exact order estimates of quantities of $n-$term projective approximations with respect to multiple Faber-Schauder system (that is a basis in $C(\mathbb{I}^d)$) for functions from Besov classes.

The third section contains results of linear and nonlinear approximation of classes of periodic smooth functions in the spaces $L_q(\pi_d)$.

We investigated some classical approximative characteristics (in the sense of establishing their exact order estimates) for different types of Nikol'skii and Besov classes of periodic functions of several variables in the Lebesgue spaces. Namely, a) we obtained the exact order estimates of trigonometric and orthoprojective widths of isotropic Besov $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ and Nikol'skii $\mathbb{H}^r_p$ classes in the space $L_q(\pi_d)$ for some relation between parameters p and q; b) we established the exact order estimates of quantities of best $m-$term approximation of Besov classes $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ in the space $L_q(\pi_d)$.

The third section contains also investigation of one more approximative characteristic of nonlinear approximation — the quantity of best bilinear approximation of classes of periodic function with $2d$ variables. We found the order values of best bilinear approximation of classes of functions with $2d$ variables that are generated by functions with d variables from classes $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ by using shifts of argument and obtained the exact order estimates of supremums of quantities of best bilinear approximation of isotropic Nikol'skii-Besov classes in functional spaces $L_q(\pi_{2d})$. Obtained results are essential addition to known estimates of considered in the thesis quantities with respect to other classes of periodic functions of several variables in the spaces $L_q(\pi_d)$, for example, Sobolev $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$ or Nikol'skii $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$ classes. On the other hand, we got results for relations between parameters that appear in definitions function classes and spaces that were not investigated earlier.

In the final section of the third chapter we establish exact order estimates for the values of the best bilinear approximations on the Nikol'skii-Besov classes $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ in the functional spaces $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ with a mixed ("vector") norm $\|\cdot\|_{\boldsymbol{q}}$. On basis of the well-known theorem, which binds a value of the bilinear approximation of functions $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$ with singular numbers of integral operators, i.e. operators which kernel is identical to the function f, the problem is solved of estimating singular numbers of integral operators with kernels from the classes $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Chapter four is devoted to the approximation of functions with complex variable. The main results of this section are those in which the approximative properties are indicated of classes of functions, which are analytic in the simply connected space $\Omega\subset\mathbb{C}$ that is bounded by a closed rectifiable Jordan curve Γ. The objects of the study are the classes $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$. These classes are the sets of functions that are represented in the domain Ω by integrals of the Cauchy type along Γ with densities from the subsets of $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ of summable on Γ functions. The estimates are established of the approximations of such classes of functions in certain functional Banach spaces with use of finite-dimensional subspaces.

The classes $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ have been firstly defined in the article, published in 1992 by A. I. Stepanets and V. S. Romanyuk. The starting point in this definition was the classification of $2\pi-$periodic summable on the period functions, that was carried out in 1983 by A. I. Stepanets and is based on the introduced by him concept of $(\psi;\beta)-$derivative.

In the terms of estimates of the values of the best polynomial approximations and Kolmogorov widths, the approximative properties of the classes $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ are investigated in the spaces $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ of analytic in Ω and summable on Γ functions, with certain restrictions on the sequence $\{\psi(k),\, k\in\mathbb{N}\}$, which defines the class $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$. Namely in cases where: a) the natural boundary of analyticity of functions from $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ is the curve Γ, which is the boundary of the domain Ω; b) functions from $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ are analytically extended from the Γ to a certain bounded domain $\Omega'\supset\Omega$ or even to the entire complex plane.

The correspondence between the classification of summable on Γ functions and the classification of functions that are $2\pi-$periodic on $\mathbb{R}$ and summations on the period, that is in the definition of the classes $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$, gave the possibility making an appropriate justification of boundary properties of functions from the classes $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ to solve stated problems mainly using methods of the theory of functions of a real variable.

In the fifth section we give answers to important questions concerning the linear and nonlinear approximation of certain functional sets in the spaces of functions with the domain of definition of a different structure in $\mathbb{R}^d$. In particular, questions concerning the approximation in the spaces $L_q(\mathbb{T}^d)$ and in Lebesgue spaces $L_q(\mathbb{S}^{d-1})$, where $\mathbb{S}^{d-1}$ is the unit sphere of the space $\mathbb{R}^d$.

A new functional scale is introduced into consideration of the so-called binary Besov spaces $\mathrm{dyad}B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ that are compactly embedded into the spaces $\exp L^{\nu}$, i.e. exponential Orlicz spaces with the Luxembourg norm. The main result for the spaces $\mathrm{dyad}B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ is the exact order estimates for the Kolmogorov widths and entropy numbers in the spaces $\exp L^{\nu}$ of single balls $\mathrm{dyad}\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$.

Certain approximative properties are investigated on the classes $A^{\rho}_{p,\beta}$ of functions of several variables, that are periodic by each variable, and those which could be presented in a form of a convolution of the elements of a unit sphere of the space $L_p(\mathbb{T}^d)$ with a multiple Poisson kernel. In particular: a) the exact order estimates are obtained of approximation of such classes by trigonometric polynomials with spectrum in multifaceted domains; b) for $d\geq 2$ we establish the weak asymptotic behavior of $M-$widths of Kolmogorov for classes $A^{\rho}_{p,\beta}$ in the space $L_q(\mathbb{T}^d)$, $2\leq q\leq p<\infty$.

In the fifth section, the problem is also solved of the weak asymptotic behavior of one type for nonlinear widths of the classes of functions $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$, that are defined on the unit sphere $\mathbb{S}^{d-1}$ of the space $\mathbb{R}^d$. These classes are the sets of so-called $r-$integrals of summable on $\mathbb{S}^{d-1}$ functions. The main result is an essential complement to the field of research that is associated with the linear approximation of the functional classes $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$.

In *Appendix A* the complimentary statements are put, that are regularly used in the main part of the dissertation. They concern nonlinear approximation in discrete spaces: spaces of sequences: a) the values are calculated of the quantities of the $n-$term projective approximations in the space l^m_q of the unit ball $B^m_p \subset l^m_p$ on the standard basis of the space $\mathbb{R}^m$; b) the exact order estimates are obtained for the best approximations of $q-$ellipsoids in spaces of multiple sequences using their orthogonal projections on the Euclidean subspaces $\mathbb{R}^m$ of the dimension n.

Key words: nonlinear approximation; Kolmogorov widths; best $n-$term approximations; bilinear approximations; functions of a complex variable; periodic functions with several real variables; Lebesgue space; Besov space; Nikol'skii space; Holder space; multiple Haar base system; multiple basis of Faber–Schauder; trigonometric system; spherical harmonics; greedy approximants; $p-$greedy algorithm; Faber polynomials; Cauchy-type integral.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ

1. *Романюк В.С.* Колмогоровские поперечники классов функций, аналитических в ограниченных областях комплексной плоскости / В. С. Романюк // Ряды Фурье: теория и приложения / Сб. трудов Ин-та математики АН Украины. — 1992. — С. 119–126.

2. *Романюк В.С.* Приближение классов аналитических функций алгебраическими многочленами и колмогоровские поперечники / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 2. — С. 236–250.

3. *Романюк В.С.* Приближение в среднем с весом классов аналитических функций алгебраическими полиномами и конечномерными подпространствами / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 5. — С. 645–662.

4. *Романюк В.С.* Оценки колмогоровских поперечников классов аналитических функций, представимых интегралами типа Коши. I / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 2. — С. 229–237.

5. *Романюк В.С.* Оценки колмогоровских поперечников классов аналитических функций, представимых интегралами типа Коши. II / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 3. — С. 346–355.

6. *Романюк В.С.* Дополнение к оценкам приближений суммами Фурье классов бесконечно-дифференцируемых функций / В. С. Романюк // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання / Праці Ін-ту математи-ки НАН України. — 2003. — **46**, — С. 131–135.

7. *Романюк В.С. , Савчук В.В.* О свойствах $p-$фаберовых операторов и их приложениях / В. С. Романюк, В. В. Савчук // Проблеми теорії функцій та суміжні питання: Зб.праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т.2, № 2. — С. 186—212.

8. *Романюк В.С.* Приближение классов кратных интегралов Пуассона / В. С. Романюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання /Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т.4, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. — С. 258–268.

9. *Романюк В.С.* Об асимптотических оценках Колмогоровских поперечников классов кратных интегралов Пуассона / В. С. Романюк // Проблеми теорії функцій та суміжні питання /Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т.5, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2008. — С. 279–285.

10. *Романюк В.С.* Нелинейные поперечники классов гладких функций, опреде-

ленных на единичной сфере в R^d / В. С. Романюк // Матем. заметки. — 2009. — **85**, № 1. — С. 147–152.

11. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 10. — С. 1348–1366.

12. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 4. — С. 536–551.

13. *Романюк В.С.* Нелинейная аппроксимация функций многих переменных из классов Бесова / В. С. Романюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання /Зб. праць Ін-ту математики НАН України. Т.7, № 1. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. — С. 199–220.

14. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского–Бесова / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн.— 2012.— **64**, № 5. — С. 685–697.

15. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Наилучшие билинейные приближения классов функций многих переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 12.— С. 1681–1699.

16. *Романюк В.С.* Конструктивная характеристика классов Гельдера и $m-$членные приближения по кратному базису Хаара / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2014. — **67**, № 3. — С. 349–360.

17. *Романюк В.С.* Кратный базис Хаара в обратных теоремах приближения и теоремах вложения / В. С. Романюк // Anal. Math. — 2015. — **66**, № 4. — P. 241–255.

18. *Романюк В.С.* Нелинейная аппроксимация в пространствах кратных последовательностей / В. С. Романюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 4. — С. 253–261.

19. *Романюк В.С.* Кратный базис Хаара и его свойства / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 9.— С. 1253–1264.

20. *Романюк В.С.* Кратный базис Хаара и $m-$членные приближения функций из классов Бесова. I / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 4. — С. 551–562.

21. *Романюк В.С.* Кратный базис Хаара и $m-$членные приближения функций из классов Бесова. II / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2016.— **68**, № 6.— С. 816–825.

22. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Оценки наилучших билинейных приближе-

ний классов $B^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ и сингулярных чисел интегральных операторов / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 9. — С. 1240–1250.

23. *Романюк В.С.* Колмогоровские поперечники и энтропийные числа в пространствах Орлича с нормой Люксембурга / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 5. — С. 682–694.

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ НА КОНФЕРЕНЦІЯХ

1. *Романюк В.С.* Слабая асимптотика поперечников по Колмогорову классов сверток периодических функций / В. С. Романюк // Теорія апроксимацій та чисельні методи: міжнародна наукова конференція присвячена 100-річчю з дня народження Є.Ремеза, м.Рівне, 19 – 21 червня 1996р.: Тези доповідей. Рівне, 1996. — С. 66.

2. *Романюк В.С.* Ортопоперечники классов бесконечно дифференцируемых функций // Ряди Фур'є теорія і застосування: математична школа, м. Кам'янець-Подільський, 1997. — С. 107–108.

3. *Romanyuk V.S., Savchuk V.V.* Approximation in the mean of classes of analytic functions by algebraic polynomals and finite-dimensional subspaces / V. S. Romanyuk, V. V. Savchuk // International conference dedicated to M.A.Lavrentyev on the occasion of his birthday centenary, Kiev, October 31-November: Abstracts. — Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2000. — P.49–50.

4. *Романюк В.С.* О приближении функций, представимых сверткой с кратным ядром Пуассона / В. С. Романюк // Український математичний конгрес – 2001. Секція 10 "Теорія наближення та гармонічний аналіз", Київ, 19–23 серпня: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. — С. 56.

5.*Романюк В.С.* Нелинейные поперечники классов гладких функций, определенных на единичной сфере в $\mathbb{R}^d$ / В. С. Романюк // Межд.конф. "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ" , посвященной столетию С.М.Никольского, Москва, 23–29 мая 2005 г., Тез.докл. — С. 187.

6. *Романюк В.С.* Нелинейная аппроксимация функций многих переменных из классов Бесова / В. С. Романюк // Міжнародна наукова конференція "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 18-23 вересня 2006 р.) : Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2006. — С. 90–91.

7. *Романюк В.С.* О приближениях классов сверток с многомерным ядром Пуас-

сона / В. С. Романюк // Международная научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики". (Россия, Тула, 19-23 ноября 2007г.) — Тула.: ТулГУ. — 2007. — С. 76–77.

8. *Романюк В.С.* Нелінійне наближення функцій багатьох змінних зі швидко спадними коефіцієнтами Фур'є / В. С. Романюк // Міжн.наук.конф. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування, 16-21 червня 2008 г., Мелітополь, Україна. — Тези доповідей. — С. 95–96.

9. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Білінійні наближення і поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Тез. допов. Конференції "Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів III", присвячена пам'яті В. К. Дзядика (1919-1998). — Київ: Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 76.

10. *Романюк В.С.* Адаптивное приближение функций многих переменных / В. С. Романюк // Тез.докл. Конференции "Функциональные методы в теории приближений и теории операторов III", посвящ.памяти В. К. Дзядика (1919-1998). — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2009. — С. 77–78.

11. *Романюк В.С.* N–членная аппроксимация в $L_q(I^d)$ классов функций многих переменных / В. С. Романюк // Тез. Международной конференции "Теория приближений", посвященной 90-летию С. Б. Стечкина, Москва, Россия, 23-26 августа 2010г.— М.: 2010. — С. 61.

12. *Романюк В.С.* Нелинейная аппроксимация классов функций многих переменных / В. С. Романюк // International Conference "Approximation Theory and Applications" in memory of N. P. Korneichuk (June 14-17, 2010, Dnepropetrovsk, Ukraine). — P. 77–78.

13. *Romanyuk A.S., Romanyuk V.S.* Best bilinear approximations and Kolmogorov widths of classes of multivariate periodic functions / A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk //Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematlcal Analysis, Differential Equations and their Applications", 15-20 September, 2010, Sunny Beach, Bulgaria: Abstracts. — P. 39–40.

14. *Романюк В.С.* Нелинейные приближения функций многих переменных по базису Хаара / В. С. Романюк // International Conference in Modern Analysis: Abstracts June 20–23, 2011, Donetsk, Ukraine. — С. 95.

15. *Романюк В.С.* Базис Хаара в просторах функцій багатьох змінних та його

апроксимативні властивості / В. С. Романюк // Міжнародна конференція ”Теорія наближення функцій та її застосування” присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця (1942-2007): Тези доповідей (Україна, Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.). — С. 91.

16. *Romanyuk A.S., Romanyuk V.S.* Best bilinear approximations of functions from Nikol'skii–Besov classes / A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk // International Conference on ”Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications”, September 04-09, 2012, Mersin - Turkey. Abstracts.

17. *Романюк В.С.* Аппроксиматывные свойства кратного базиса Хаара / В. С. Романюк // Міжнародна математична конференція ”Боголюбовські читання DIF-2013, Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013. — С. 266.

18. *Романюк В.С.* Властивості кратного базису Хаара в задачах апроксимації функцій із просторів Гельдера / В. С. Романюк // Друк. IV міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці, Україна: Тези доповідей. — Чернівецький національний університет. — 2014. — С. 173–175.

19. *Romanyuk V.S.* Nonlinear approximation of the Nikol'skii-Besov classes of the function defined on the unit cube in the Euclidean space / В. С. Романюк // Third conference. ”Mathematics for Life Sciences”. Rivne, September 15–19, 2015: Book of Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NASU, 2015. — С. 34.

20. *Романюк В.С.* Колмогоровские поперечники и энтропийные числа классов Бесова в пространствах функций с нормой Люксембурга / В. С. Романюк // International Conference dedicated to 75 th anniversary of professor Vitalii Pavlovych Motornui ”Approximation Theory and its Applications”, Dnepropetrovsk, 8–11 October, 2015: Abstracts. — Dnepropetrovsk, 2015. — P. 60.

Зміст

СПИСОК ОСНОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ ТА ОЗНАЧЕНЬ

Загальновживані позначення

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ — відповідно множини натуральних, дійсних, дійсних невід'ємних , цілих, цілих невід'ємних чисел;
- $A^m = \prod\limits_{i=1}^{m} A$, $m \in \mathbb{N}$, — декартів добуток m множин A, де A — одна із множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, або відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$;
- $\bigotimes\limits_{i=1}^{d} \mathfrak{M}(i)$ — тензорний добуток деяких множин $\mathfrak{M}(i)$, $i = \overline{1,d}$, зокрема, — функціональних;
- $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) := x_1y_1 + \cdots + x_dy_d$ — скалярний добуток елементів $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$;
- $\sharp A$, або $|A|$ — кількість точок у скінченній множині $A \subset \mathbb{Z}^d$;
- $\mathrm{card}A$ — кількість елементів деякої скінченної множини A;
- $\mathrm{vol}A$ — об'єм (міра Лебега) множини $A \subset \mathbb{R}^d$;
- $a_+ := \max\{a;0\}$ для $a \in \mathbb{R}$;
- $\mathbb{I}$ — відрізок $[0,1]$, $\mathbb{I}^d := \prod\limits_{i=1}^{d} [0,1]$;
- $\pi_m := \prod\limits_{j=1}^{m} [0,2\pi) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : \ x_j \in [0,2\pi), \ j = \overline{1,m}\}$;
- $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d \diagup 2\pi\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$ — $d-$вимірний тор;
- $\mathbb{S}^{d-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : \ \|\boldsymbol{x}\| := (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2} = 1\}$ — одинична сфера в $\mathbb{R}^d$ з центром у початку координат;
- Ω — однозв'язна область в комплексній площині $\mathbb{C}$;
- $\Gamma := \partial\Omega$ — границя області Ω;
- $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ — замикання області Ω;
- $\Omega^- = \widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{\Omega}$ — зовнішність кривої Γ, тобто доповнення області Ω до розширеної комплексної площини $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;
- $D := \{w \in \mathbb{C} : \ |w| < 1\}$ — одиничний круг в $\mathbb{C}$;

- $T := \partial D = \{w \in \mathbb{C} : \ |w| = 1\}$ — одиничне коло;

- Φ та Ψ — функції, що здійснюють конформний гомеоморфізм між зовнішністю області $\overline{\Omega}$ і зовнішністю круга $\overline{D}$, причому функція Φ задовольняє умови

$$\lim_{z\to\infty} \Phi(z)/z = \alpha > 0 \quad \text{і} \quad \Phi(\infty) = \infty;$$

- $F_k(z)$, $z \in \mathbb{C}$ — многочлен Фабера порядку k для області Ω, тобто поліноміальна частина лорановського розкладу функції $\Phi^k(z)$ в околі точки $z = \infty$;

- $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ — біноміальні коефіцієнти;

- $\overline{B}$ — замикання множини $B \subset \mathscr{X}$ за нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ банахового простору $\mathscr{X}$;

- $\operatorname{supp} f$ — носій функції f;

- $\chi_B(t)$, $t \in \mathbb{R}^d$ — характеристична функція (індикатор) множини $B \subset \mathbb{R}^d$;

- $\operatorname{span}\{\varphi_i,\ i \in A\}$ — лінійна оболонка системи елементів $\{\varphi_i,\ i \in A\}$ деякого простору.

Функціональні та векторні простори

- $L_q(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$ — простір функцій $\varphi : \ \Omega \to \mathbb{R}$, вимірних на вимірній множині $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, зі скінченною нормою

$$\|\varphi\|_{L_q(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega} |\varphi(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{q}}, \quad 1 \le q < \infty,$$

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\Omega} |\varphi(\boldsymbol{x})|;$$

- $L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 \le q < \infty$, — банахів простір функцій $\varphi : \mathbb{I}^d \to \mathbb{R}$, сумовних в степені q на $\mathbb{I}^d$, з нормою

$$\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{I}^d)} = \|\varphi\|_q := \Big(\int\limits_{\mathbb{I}^d} |\varphi(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \Big)^{\frac{1}{q}};$$

- $L_\infty(\mathbb{I}^d)$ — простір функцій φ, вимірних і суттєво обмежених на $\mathbb{I}^d$, з нормою

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{I}^d)} = \|\varphi\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^d} |\varphi(\boldsymbol{x})|;$$

- $\mathbb{B}_p := \{\varphi \in L_p(\mathbb{I}^d) : \|\varphi\|_p \le 1\}$ — одинична куля в просторі $L_p(\mathbb{I}^d)$;
- $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, — простір Лебега вимірних на $\mathbb{T}^d$ функцій $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ зі скінченною нормою
$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \left(\int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{T}^d} |f(\boldsymbol{x})|;$$
- $L_p(\pi_m)$, $1 \le p \le \infty$ — простір вимірних $2\pi-$періодичних за кожною змінною функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ зі скінченною нормою
$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}},\ \ 1 \le p < \infty,$$
$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^m} |f(\boldsymbol{x})|,\ \ p = \infty;$$
- $L_p^0(\pi_m) := \{f \in L_p(\pi_m) :\ \int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x})dx_j = 0,\ \ j = \overline{1,m}\}$;
- $(f * g)(\boldsymbol{x}) := (2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$ — згортка функцій $f,\, g \in L_1(\pi_m)$;
- $L_p = L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, $1 \le p \le \infty$ — простір функцій, визначених на $\mathbb{S}^{d-1}$, зі скінченою нормою
$$\|f\|_p = \left\{\frac{1}{\Omega}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\boldsymbol{x})|^p d\sigma(\boldsymbol{x})\right\}^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p < \infty,$$
де $d\sigma$ — елемент площі на $\mathbb{S}^{d-1}$ (поверхнева міра Лебега), Ω — площа поверхні сфери $\mathbb{S}^{d-1}$;

  L_∞ ототожнюється з простором $C = C(\mathbb{S}^{d-1})$ неперервних на $\mathbb{S}^{d-1}$ функцій f з нормою $\|f\|_\infty = \|f\|_C = \max_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{S}^{d-1}} |f(\boldsymbol{x})|$;
- $\mathcal{P}_n = \left\{p :\ p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k z^k,\ c_k \in \mathbb{C}\right\}$ — простір алгебраїчних поліномів комплексної змінної z степеня $n-1$ (або порядку n);
- $L_p(\Gamma)$, $1 \le p < \infty$ — простір функцій f вимірних і сумовних у p–ій степені на кривій Γ, з нормою
$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \|f\|_q := \left(\int_\Gamma |f(\zeta)|^p |d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}};$$

- $B_q(\Gamma)$ — одинична куля у просторі $L_q(\Gamma)$;

- $E_p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$ — простір Смірнова аналітичних в Ω функцій f;

- H_s, $1 \le s < \infty$ — простір Харді аналітичних функцій в крузі D:

$$H_s := \left\{ \varphi : \ \|\varphi\|_{H_s} = \sup_{0<\rho<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(\rho e^{it})|^s dt \right)^{\frac{1}{s}} \text{— скінченна} \right\};$$

- $\widetilde{L}_q(\Gamma)$, $1 \le q < \infty$, — простір функцій φ, визначених і вимірних на Γ, для яких скінченна величина

$$\|\varphi\|_{\widetilde{L}_q(\Gamma)} = \|\varphi\|_{\Gamma,q} := \left(\int_{\Gamma} |\varphi(z)|^q |\Phi'(z)||dz| \right)^{\frac{1}{q}},$$

  де Φ' — похідна функції Φ, продовженої неперервним чином на Γ;

- $\widetilde{B}_q(\Gamma)$ — одинична куля у просторі $\widetilde{L}_q(\Gamma)$;

- $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$, $1 < q < \infty$ — банахів простір аналітичних в Ω функцій φ, що мають майже всюди на Γ кутові граничні значення $\overline{\varphi} \in \widetilde{L}_q(\Gamma)$, з нормою $\|\varphi\|_{\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})} := \|\overline{\varphi}\|_{\widetilde{L}_q(\Gamma)}$;

- l_p^m, $0 < p \le \infty$, $m \in \mathbb{N}$ — простір векторів $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, наділений квазі-нормою (нормою при $1 \le p \le \infty$)

$$\|\boldsymbol{x}\|_{l_p^m} = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_{l_\infty^m} = \max_{1 \le i \le m} |x_i|, \quad p = \infty;$$

- $B_p^m(r) := \{\boldsymbol{x} \in l_p^m : \ \ \|\boldsymbol{x}\|_{l_p^m} \le r\}$, $r > 0$; $\quad B_p^m \equiv B_p^m(1)$.

Характеристики гладкості функцій

- $\omega(f;t)_p := \sup\limits_{0 \le \lambda_i < t \le 1} \|\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(f;\cdot)\|_{L_p(\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}})}$ — модуль неперервності ($p-$інтегральний при $1 \le p < \infty$) функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d_+$, $\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}} := \prod\limits_{i=1}^{d} [0, 1-\lambda_i]$ $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(f;\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}) - f(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{I}^d$;

- $\omega(\varphi, t)_p := \sup\limits_{0\leq\tau_i\leq t<1} \left(\int\limits_{\pi_m} |\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\tau}) - \varphi(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$ — $p-$інтегральний модуль неперервності функції $\varphi \in L_p(\pi_m)$. Тут $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in \mathbb{R}^d_+$.

Додаткові позначення

- $\gamma\mathscr{X} := \{f \in \mathscr{X} : \|f\|_{\mathscr{X}} \leq \gamma\}$, $\gamma > 0$, $\mathscr{X}$ — банахів простір; $S\mathscr{X} := 1\mathscr{X}$ — одинична куля в $\mathscr{X}$;

- $\mathscr{X} \hookrightarrow \mathscr{Y}$ означає, що для нормованих просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ справедливе вкладення $\mathscr{X} \subset \mathscr{Y}$ і для будь-якого $x \in \mathscr{X}$ існує така додатна стала C, що: $\|x\|_{\mathscr{Y}} \leq C\|x\|_{\mathscr{X}}$;

- $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність елементів деякого простору;

- $b = \{b_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ — зліченна (скінченна) система елементів деякого простору;

- $C(p, q)$, $C_1(p, q)$, $C_2(r, \theta, p)$ тощо — величини, залежні, можливо, лише від вказаних у дужках параметрів, і додатні при всіх допустимих значеннях цих параметрів;

- C, C_1, C_2 тощо — абсолютні додатні сталі, необов'язково однакові в різних місцях тексту.

Відношення

- $\asymp$ — відношення слабкої еквівалентності, тобто для виразів a та b, що визначені деякою сукупністю параметрів, запис $a \asymp b$ означає, що існують такі додатні величини c_1 та c_2, які *не залежать від одного істотного параметра*, що $c_1 b \leq a \leq c_2 b$.

- $\ll$ чи $\gg$ — порядкові нерівності, тобто $a \ll b$ ($a \gg b$), якщо існує така додатна стала C, що $a \leq Cb$ ($b \leq Ca$).

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасна теорія наближення функцій грунтується на багатьох ідеях і значущих результатах, які на певному етапі її розвитку стали переломними. Ними закладався фундамент під створення окремих напрямків, у яких відображалися нові погляди на задачі теорії апроксимації функцій дійсної і комплексної змінних. Це, в свою чергу, стало стимулом для розробки нових методів апроксимації, які поєднували в собі фундаментальні положення не тільки теорії функцій, а й інших розділів математичного аналізу.

Один із таких переломних моментів у теорії наближення відноситься до 40-х років минулого століття. Він пов'язаний з ідеями А. М. Колмогорова щодо визначення міри оцінки (порівняння) апроксимативних можливостей по відношенню до певних класів функцій класичних на той час агрегатів, таких як алгебраїчні та тригонометричні поліноми, раціональні дроби тощо. В 1936 році А. М. Колмогоров в якості такої міри запропонував величину найкращого наближення в метриці простору X множини $F \subset X$ за допомогою довільних лінійних многовидів L_n в X. Згодом така величина отримала в математичній літературі назву $n-$поперечника за Колмогоровим (колмогоровського $n-$поперечника). У випадку коли X — деякий нормований простір з нормою $\|\cdot\|_X$, а F — центрально–симетрична множина в X, $n-$поперечник за Колмогоровим визначається формулою

$$d_n(F,X) = \inf_{L_n \in \mathcal{L}_n} \sup_{f \in F} \inf_{u \in L_n} \|f-u\|_X,$$

де $\mathcal{L}_n$ — сукупність всіх лінійних підпросторів L_n в X, $\dim L_n = n$.

Певні задачі вимагали більшої конкретики щодо структури наближаючих лінійних підпросторів і це спонукало до запровадження інших величин лінійної апроксимації: лінійного $n-$поперечника (1960 р., В.М. Тихомиров), Фур'є–поперечника (1982 р., В. М. Темляков), тригонометричного $n-$поперечника (1974 р., Р. С. Ісмагілов) тощо.

Виникла задача, що стала стержневою в теорії лінійної апроксимації, яка в загальній постановці полягала у відшуканні точних або асимптотичних (в розумінні сильної чи слабкої асимптотики) значень вказаних величин і, в першу чергу, $n-$ поперечника за Колмогоровим.

Основними факторами, якими головним чином визначається рівень складності задачі про поперечники і відмінність в підходах до її розв'язання, є метричні характеристики простору X та гладкісні властивості елементів множини F.

Як з'ясувалось, у багатьох випадках ключову роль як в оцінках поперечників, так і в оцінках інших апроксимаційних характеристик, відіграє так званий метод дискретизації. В кожній окремій ситуації застосування цього методу базується на встановленні тонких зв'язків між елементами (підмножинами) "неперервних" просторів X і елементами (підмножинами) деяких "дискретних" просторів (зокрема, просторів l_p).

Одну із частин дисертаційної роботи якраз і складають дослідження спрямовані на вдосконалення старих та пошуку нових підходів у застосуванні методу дискретизації до оцінки колмогоровських та інших поперечників важливих у теорії наближення класів гладких функцій з однією та кількома дійсними змінниии (класів Степанця, а також класів Соболєва та Бєсова). Ці підходи поширені на розв'язання задач, пов'язаних з наближенням функцій комплексної змінної, зокрема, з оцінками колмогоровських поперечників деяких нових класів функцій, аналітичних в жорданових областях комплексної площини $\mathbb{C}$.

З кінця 90-х років минулого століття, орієнтуючись на практичне застосування в різних галузях науки і техніки, на передній план виходить інший напрям теорії наближення — нелінійна апроксимація (як функціональних множин так і множин іншої природи). Однією із еталонних апроксимативних характеристик в нелінійній апроксимації залишається так званий алєксандровський $N-$поперечник, запроваджений ще в 1933 році П. С. Алєксандровим. Цей поперечник характеризується величиною наближення в метриці простору X деякої множини $W \subset X$ за допомогою всіх можливих $N-$вимірних комплексів K_N, що є образами неперервних операторів $A\colon X \to K_N$. В подальшому в дослідженнях, пов'язаних з розв'язанням певних задач, за схемою $N-$поперечника за Алєксандровим були означені інші "нелінійні" поперечники і знайдені їх точні чи порядкові значення для багатьох множин як у функціональних, так і в дискретних просторах. У доповнення до цих досліджень, в дисертації розв'язана задача, що стосується слабкої асимптотики одного типу нелінійних поперечників класів функцій $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$, які є, так званими, r–ми інтегралами функцій сумовних на $\mathbb{S}^{d-1}$.

З початку нинішнього століття центральне місце в нелінійній апроксимації займають апроксимаційні характеристики множини F в метричному просторі $\mathscr{X}$, що визначаються величиною так званого адаптивного наближення її елементів за допомогою лінійних комбінацій n довільних елементів деякої фіксованої системи $\mathfrak{A}$ в $\mathscr{X}$. Базовою тут є величина $\sigma_n(f;\mathfrak{A};\mathscr{X})$ найкращого $n-$членного наближення елемента $f\in F$.

Вперше така величина з'явилась в роботі С. Б. Стєчкіна 1955 року у формулюванні критерію абсолютної збіжності рядів Фур'є за ортогональною системою в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. У випадку, коли $\mathscr{X}$ — деякий функціональний банахів простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, а $\mathfrak{A}=\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ — зліченна множина функцій в $\mathscr{X}$:

$$\sigma_m(f;\mathfrak{A};\mathscr{X}) := \inf_{\substack{\Lambda\subset\Omega\\ \sharp\Lambda=m}} \inf_{c_\alpha} \|f-\sum_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha u_\alpha\|_{\mathscr{X}}.$$

де $c_\alpha\in\mathbb{C}$, якщо u_α — комплекснозначні і $c_\alpha\in\mathbb{R}$, якщо u_α — дійснозначні; якщо $F\subset\mathscr{X}$, то

$$\sigma_n(F;\mathfrak{A};\mathscr{X}) := \sup_{f\in F}\sigma_n(f;\mathfrak{A};\mathscr{X}).$$

У випадку кратної тригонометричної системи $\mathfrak{A}$ перші результати з оцінки величини $\sigma_n(F;\mathfrak{A};\mathscr{X})$ для класів F періодичних по всіх змінних гладких функцій, що належать до відомих просторів Нікольського та Соболєва (здебільшого в метриці просторів Лебега L_p) були отримані ще в 1987 році В. М. Темляковим.

Пізніше ці результати були поширені на випадки інших класів, зокрема, на класи Бєсова в роботах Е. С. Бєлінського, Дінь Зунга, А. С. Романюка та інших.

З'ясувалось, що методи оцінки величин $\sigma_n(F;\mathfrak{A};\mathscr{X})$, як і в лінійній апроксимації, суттєво різняться в залежності від умов якими характеризуються гладкісні властивості функцій класу F по кожній змінній окремо чи в сукупності (розділяють так звані ізотропний та анізотропний випадки).

Мотивацією досліджень, що стосуються нелінійної апроксимації і складають одну із частин дисертаційної роботи, стала ідея залучити до нелінійного наближення фіксованого класу F (з огляду на величину $\sigma_n(F;\mathfrak{A};\mathscr{X})$) апроксимаційних систем $\mathfrak{A}$ відмінних від тригонометричної: простіших за структурою і які б не поступалися (хоча б в окремих ситуаціях) тригонометричній системі в сенсі оцінок величин $\sigma_n(F;\mathfrak{A};\mathscr{X})$. Реалізацією цієї мети стало вивчення в дисертаційній роботі апроксимаційних можливостей кратних систем Фабера–Шаудера та Хаара стосовно ізотропних класів Бєсова.

В останні два десятиріччя зростає увага до ще одного типу задач нелінійної апроксимації функцій з декількома дійсними змінними — білінійних наближень. Найкраще білінійне наближення, у його найбільш загальному означенні, характеризується величиною наближення в метриці простору $\mathscr{X}$ деякої множини F функцій з d змінними за допомогою скінченних лінійних комбінацій всеможливих добутків функцій з d_1 і функцій з d_2 ($d_1 + d_2 = d$) змінними. Цей напрямок досліджень поповнюється і низкою результатів даної дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково–дослідними темами "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", № державної реєстрації 0111U002079; "Структурні та апроксимаційні властивості функціональних множин", № державної реєстрації 0198U001990; "Апроксимаційні характеристики функціональних класів", № державної реєстрації 0101U000046.

Мета і завдання дослідження. Основною *метою дисертаційного дослідження* є опис класів гладких функцій, визначених на множинах різної стуктури в d – вимірному евклідовому просторі та на комплексній площині, в термінах оцінок їх наближення скінченно–вимірними агрегатами, побудованими на основі відомих та нових функціональних базисних систем.

Об'єктом дослідження є класи функцій кількох дійсних змінних, класи функцій аналітичних в областях комплексної площини; базисні функціональні системи — тригонометрична, Хаара та Фабера–Шаудера; многочлени Фабера, простори сферичних гармонік.

Предметом дослідження є апроксимативні характеристики певних функціональних множин в нормованих просторах функцій, визначених на $\mathbb{R}^d$, на одиничному кубі $\mathbb{I}^d$, на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ та в областях комплексної площини $\mathbb{C}$: колмогоровські, тригонометричні, ортопроекційні поперечники, величини найкращих m – членних наближень, величини найкращих білінійних наближень, неперервні нелінійні поперечники тощо; практичний алгоритм побудови екстремальних нелінійних m – членних агрегатів стосовно нелінійного наближення у функціональних просторах та у просторах послідовностей; опис ізотропних просторів Бєсова та просторів Гельдера функцій, визначених на $\mathbb{I}^d$, в термінах умов на їх коефіцієнти Фур'є–Хаара;

властивості інтегралів типу Коші вздовж границі жорданової області в $\mathbb{C}$; апроксимаційні властивості лінійних середніх рядів Фур'є та рядів Фабера.

Завдання дослідження:

- З метою отримання практичного алгоритму побудови екстремальних $m-$членних агрегатів у нелінійній апроксимації функцій, що належать ізотропним класам Бєсова $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ в просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ при $d \geq 2$, запровадити кратну базисну систему Хаара H^d, відмінну від класичної тензорної системи Хаара $\mathcal{H}^d$, але, яка б володіла важливими властивостями, якими наділена одновимірна базисна система H. Застосувати систему H^d до опису ізотропних просторів Бєсова та просторів Гельдера в термінах умов на коефіцієнти Фур'є–Хаара елементів цих просторів, а також до конструктивної характеристики функцій із просторів Гельдера.

- Охарактеризувати класи Бєсова $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ функцій, визначених на кубі $\mathbb{I}^d$, в термінах порядкових оцінок нових апроксимаційних характеристик — величин $n-$членних проективних наближень за кратною системою Фабера–Шаудера.

- Встановити точні за порядком оцінки тригонометричних та ортопроекційних поперечників класів Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ та Нікольського $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{p}$ періодичних функцій з кількома змінними у просторах $L_q(\pi_d)$, у випадках не розглянутих раніше співвідношень між параметрами p, q та $\boldsymbol{r}$.

- Встановити точні за порядком оцінки величин найкращих $M-$членних тригонометричних наближень класів $\mathbb{B}^{r}_{p,\theta}$ у просторі $L_q(\pi_d)$, а також точні порядки найкращих білінійних наближень класів функцій з $2d$ змінними, елементи яких породжені функціями з d змінними із класів $\mathbb{B}^{r}_{p,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу.

- Знайти оцінки величин найкращих білінійних наближень на класах Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ у функціональних просторах $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ з мішаною нормою $\|\cdot\|_{\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_m)$. На основі відомої теореми, що пов'язує величину білінійного наближення функцій $f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ з сингулярними числами інтегральних операторів — ядро яких тотожне функції f — встановити оцінки для сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

- На основі розбиття на класи інтегралів типу Коші, яке базується на відомій класифікації $2\pi-$періодичних сумовних на періоді функцій дійсної змінної, запровадженої О. І. Степанцем, розвинути запропонований ним новий підхід до розв'язання задач апроксимації функцій аналітичних в жорданових областях Ω комплексної площини $\mathbb{C}$.

- Використавши нову шкалу класів інтегралів типу Коші, встановити точні за порядком оцінки найкращих наближень (в області Ω) за допомогою алгебраїчних поліномів фіксованого степеня від функцій, які за граничними диференціальними властивостями займають проміжне положення між функціями, що аналітично продовжуються із області Ω через її границю і функціями, аналітичними в області Ω і такими, що мають певну гладкість на її границі Γ, яка не описується в термінах звичайної r–ої похідної. Знайти порядкові оцінки $n-$поперечників за Колмогоровим зазначених класів у заданих просторах аналітичних в Ω функцій (зокрема, у просторах неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій та у просторах Смірнова $E_p(\Omega)$).

- На базі відомих просторів $LG^{\gamma}_{\rm dyad}$ функцій з однією змінною, визначених на торі $\mathbb{T}$, запровадити нову функціональну шкалу, так званих, двійкових просторів Бєсова ${\rm dyad}B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ компактно вкладених у простори $\exp L^{\nu}$ — експоненціальні простори Орліча, що наділені нормою Люксембурга. Вивчити властивості (у тому числі, — апроксимаційні) введених просторів з точки зору оцінок колмогоровських поперечників та ентропійних чисел у просторах $\exp L^{\nu}$ одиничних куль ${\rm dyad}\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$.

- Знайти точні за порядком оцінки наближення класів згорток сумовних функцій з кратним ядром Пуассона за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром в многогранних областях, а також — оцінки колмогоровських поперечників таких класів в просторах $2\pi-$періодичних по кожній змінній функцій і сумовних в степені q на кубі $[0,2\pi]^d$.

- Дослідити апроксимаційні можливості по відношенню до відомих класів W^r_p гладких функцій, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$, скінченно–вимірних многовидів, що складаються із сферичних гармонік, раціональних функцій чи сплайнів з вільними вузлами. Результати подати в термінах асимптотичних оцінок одного типу неперервних нелінійних поперечників.

Методи дослідження. Використовуються класичні методи теорії лінійної та нелінійної апроксимацій функцій з однією та кількома дійсними змінними, методи вивчення граничних властивостей інтегралів типу Коші, а також впроваджуються нові підходи щодо наближення функцій, визначених на одиничному кубі $\mathbb{I}^d$ та функцій аналітичних в жорданових областях комплексної площини $\mathbb{C}$.

Наукова новизна одержаних результатів.

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у такому:

1) Визначено кратну базисну систему Хаара H^d функцій, заданих на кубі $\mathbb{I}^d := [0,1]^d$ простору $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, відмінну від класичної тензорної системи Хаара $\boldsymbol{\mathcal{H}}^d$ і таку, що володіє багатьма властивостями, якими наділена відома одновимірна базисна система $\mathbb{H}$. Систему H^d застосовано до опису ізотропних просторів Бєсова та просторів Гельдера в термінах умов на коефіцієнти Фур'є–Хаара елементів цих просторів, а також до конструктивної характеристики функцій із просторів Гельдера. Встановлені точні за порядком оцінки верхніх меж найкращих $n-$членних наближень за базисом H^d у просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ для функцій, які належать одиничним кулям просторів Бєсова та Гельдера. Вказано практичний алгоритм побудови екстремальних $n-$членних агрегатів.

2) У термінах порядкових оцінок величин $n-$членних проективних наближень за системою Фабера–Шаудера охарактеризовано ізотропні класи Бєсова $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ функцій, визначених на кубі $\mathbb{I}^d$.

3) Встановлено точні за порядком оцінки тригонометричних та ортопроекційних поперечників класів Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ та Нікольського $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{p}$ періодичних функцій з кількома змінними у просторі $L_q(\pi_d)$, за певних умов щодо параметрів p, q та $\boldsymbol{r}$.

4) Встановлено точні за порядком оцінки величин найкращих $M-$членних тригонометричних наближень класів $\mathbb{B}^{r}_{p,\theta}$ у просторі $L_q(\pi_d)$, а також порядкові значення найкращих білінійних наближень класів функцій з $2d$ змінними, елементи яких породжені функціями з d змінними із класів $\mathbb{B}^{r}_{p,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу.

5) Знайдено оцінки величин найкращих білінійних наближень на класах Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ у функціональних просторах $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ з мішаною нормою $\|\cdot\|_{\boldsymbol{q}}$. Користуючись результатом, розв'язано задачу про оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

6) У просторах функцій, аналітичних в жорданових областях Ω комплексної площини $\mathbb{C}$, на базі нової класифікації інтегралів типу Коші встановлено точні за

порядком оцінки відхилень часткових сум рядів Фабера від функцій, які володіють певними граничними властивостями, що не описуються в термінах звичайної $r-$ої похідної. Знайдено точні за порядком оцінки величин найкращих наближень (на замиканні $\overline{\Omega}$ області Ω) класів таких функцій за допомогою алгебраїчних поліномів фіксованого степеня, а також — порядкові оцінки $n-$поперечників за Колмогоровим зазначених класів у певних просторах аналітичних в Ω функцій.

7) Досліджено властивості відомих $p-$фаберових операторів і обернених до них, щодо функцій, які є аналітичними в однозв'язних областях $\Omega \subset \mathbb{C}$ зі спрямлювальною границею Γ і належать просторам Смірнова $E_p(\Omega)$. Встановлено оцінки наближення класів таких функцій за допомогою скінченно–вимірних підпросторів простору $E_q(\Omega)$.

8) На базі відомих просторів $LG^{\gamma}_{\rm dyad}$ функцій з однією змінною визначених на торі $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, запроваджено нову функціональну шкалу так званих двійкових просторів Бєсова $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ компактно вкладених у простори $\exp L^{\nu}$ — експоненціальні простори Орліча, що наділені нормою Люксембурга. Встановлені точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел у просторах $\exp L^{\nu}$ одиничних куль $\mathrm{dyad}\, \mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$.

9) Знайдено точні за порядком оцінки наближення у просторах Лебега $L_q(\mathbb{T}^d)$ класів згорток з кратним ядром Пуассона сумовних на торі $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/(2\pi\mathbb{Z})^d$ функцій, за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у многогранних областях. Встановлено слабко асимтотичні значення колмогоровських поперечників таких класів у просторах $L_q(\mathbb{T}^d)$.

10) У термінах асимптотичних оцінок нелінійних поперечників з'ясовані апроксимаційні можливості скінченно–вимірних многовидів стосовно класів W^r_p гладких функцій, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер, а її результати в значній мірі доповнюють важливі розділи сучасної теорії функцій та функціонального аналізу. Деякі із результатів можуть знайти практичне застосування у певних галузях науки і техніки, що обумовлює перспективу розвитку окреслених дисертацією досліджень.

Особистий внесок здобувача. Визначення теми досліджень та її основних напрямів належать науковому консультанту, професору А. С. Романюку. Результати дисертаційної роботи, опубліковані у 17-ти статтях за одноосібного авторства здобувача та в 6-ти — у співавторстві. З результатів статті [68], опублікованої у співавторстві з В. В. Савчуком, до дисертації включені лише ті, що належать здобувачу. У результатах, що опубліковані в статтях у співавторстві з А. С. Романюком [107–111], вклад авторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

— Міжнародній науковій конференції, присвяченій 100-річчю з дня народження Є. Ремеза, м. Рівне, 19–24 червня 1996 року;

— Математичній школі "Ряди Фур'є: теорія і застосування", м. Кам'янець-Подільський, 1997 р.;

— Міжнародній конференції з теорії наближення та її застосувань, присвяченої пам'яті В. К. Дзядика, Київ, 26–31 травня 1999 року;

— International conference dedicated to M. A. Lavrentyev on the occasion of his birthday centenary, Kiev, 31 october – 3 november 2000;

— Українському математичному конгресі, Секція 10 "Теорія наближень та гармонічний аналіз", Київ, 19–23 серпня 2001 року;

— Международной конференции "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ", посвященной столетию С. М. Никольского, Москва, 23–29 мая 2005 г.;

— Міжнародній науковій конференції "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування", Ужгород, 18–23 вересня 2006 року;

— Международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики", Россия, Тула, 19–23 ноября 2007 г.;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 70-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Мелітополь, 16–21 червня 2008 року;

— Міжнародній науковій конференції "Функціональні методи в теорії апроксимації та теорії операторів", присвяченій пам'яті В. К. Дзядика (1919–1998), Волинська область, Україна, 22–26 серпня 2009 року;

— Українському математичному конгресі – 2009 (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова), Київ, Інститут математики НАН України, 27–29 серпня 2009 року;

— International Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and Applications", September 15–20, 2010, Sunny Beach, Bulgaria;

— Міжнародній науковій конференції "Теорія наближень і її застосування", присвяченій пам'яті М. П. Корнєйчука (1920–2003), Дніпропетровськ, 14–17 червня 2010 року;

— Международной конференции "Теория приближений", посвященной 90-летию С. Б. Стечкина, Москва, Россия, 23-26 августа 2010 г.;

— International Conference in Modern Analysis, June 20–23, 2011, Donetsk, Ukraine;

— Міжнародній науковій конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007), Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 року;

— International Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications", September 04–09, 2012, Mersin-Turkey;

— Міжнародній науковій конференції "Боголюбовські читання DIF-2013", з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013 року;

— IV Міжнародній Ганській конференції, Чернівці, 30 червня – 5 липня 2014 року;

— Third Conference "Mathematics for Life Sciences", Rivne, September 15–19, 2015;

— Міжнародній науковій конференції "Теорія наближень і її застосування", з нагоди 75-річчя В. П. Моторного, Дніпропетровськ, 8–11 жовтня 2015 року;

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівники семінару: чл.-кор. НАН України О. І. Степанець, доктор фіз.-мат. наук, проф. А. С. Романюк);

— засіданнях Вченої ради Інституту математики НАН України;

— міжвузівському семінарі з теорії функцій у Дніпропетровському національному університеті ім. О. Гончара, 14 червня 2017 року (керівник семінару – чл.кор. НАН України В. П. Моторний)

— Львівському міському семінарі з теорії аналітичних функцій у Львівському національному університеті ім. Івана Франка, 28 вересня 2017 року (керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. О. Б. Скасків);

— семінарі "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, 25 жовтня 2017 року (керівники семінару: проф. І. О. Шевчук, проф. О. О. Курченко, проф. В. М. Радченко);

— семінарі кафедри математичного аналізу Інституту математики, економіки і механіки Одеського національного університету ім. І. І. Мечникова, 27 жовтня 2017 року, (керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. А. О. Кореновський);

— Київському семінарі з функціонального аналізу в Інституті математики НАН України, 1 листопада 2017 року (керівники семінару: академік НАН України Ю. М. Березанський, академік НАН України Ю. С. Самойленко, чл.кор. НАН України А. Н. Кочубей).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у фахових наукових виданнях, що входять до переліку ВАК України, у роботах [62–79, 107–111]. З них 6 — у співавторстві і 17 — одноосібно.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі списку основних позначень та означень, вступу, п'яти розділів з висновками, додатку та списку використаних джерел, що містить 208 найменувань. Повний обсяг роботи становить 347 сторінок друкованого тексту.

Розділ 1

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ ТА ГОЛОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

У даному розділі подано стислий огляд вмісту основної частини дисертаційної роботи з формулюванням головних результатів, які супроводжуються відповідними коментарями.

Другий розділ присвячений лінійній та нелінійній апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій в просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$.

Нагадаємо, через $L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 \le q < \infty$, позначається банахів простір функцій $\varphi : \mathbb{I}^d \to \mathbb{R}$ вимірних і сумовних в степені q на $\mathbb{I}^d$, з нормою

$$\|\varphi\|_{L_q(\mathbb{I}^d)} = \|\varphi\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{I}^d} |\varphi(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{q}},$$

де $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ — елемент евклідового простору $\mathbb{R}^d$. $L_\infty(\mathbb{I}^d)$ — простір функцій φ вимірних та істотно обмежених на $\mathbb{I}^d$, з нормою

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{I}^d)} = \|\varphi\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d} |\varphi(\boldsymbol{x})|.$$

Іноді замість $L_q(\mathbb{I}^d)$ вживаємо скорочене позначення L_q.

Дамо означення характеристик гладкості функцій, що належать просторам $L_p(\mathbb{I}^d)$. Нехай $1 \le p < \infty$. Означимо $p-$інтегральний модуль неперервності функції $\varphi \in L_p$:

$$\omega(\varphi, t)_p := \sup_{0 \le \tau_i \le t < 1} \left(\int\limits_{I^d_{\boldsymbol{\tau}}} |\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\tau}) - \varphi(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{R}^d_+$, $\quad I^d_{\boldsymbol{\tau}} := \prod\limits_{i=1}^{d} [0, 1 - \tau_i]$.

Також, покладемо

$$\omega(\varphi, t)_\infty := \sup_{0 \le \tau_i \le t < 1} \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\tau}}} |\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\tau}) - \varphi(\boldsymbol{x})|$$

для $\varphi \in L_\infty$.

Поряд з $p-$інтегральним модулем неперервності будемо використовувати інший, означений у такий спосіб. Продовжимо функцію $\varphi \in L_p$, задану на $[0,1)^d$ на весь $\mathbb{R}^d$ періодично за кожною змінною. Нову $1-$періодичну функцію позначимо через φ^0 і покладемо

$$\omega^*(\varphi, t)_p := \sup_{0 \leqslant \tau_i < t \leqslant 1} \|\Delta_{\boldsymbol{\tau}} \varphi^0\|_p,$$

де $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}(\varphi^0, \boldsymbol{x}) = \varphi^0(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\tau}) - \varphi^0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

Зрозуміло, що $\omega(\varphi, t)_p \leqslant \omega^*(\varphi, t)_p$, причому, як показано П. Л. Ульяновим, навіть у випадку $d = 1$ ці модулі неперервності можуть відрізнятися за порядком при $t \to +0$.

В 1909 році А. Хааром (A. Haar) [180] була побудована ортонормована на відрізку $[0,1]$ повна в просторі $L_1([0,1])$ система функцій $(h_n(x))_{n=0}^\infty$, $x \in [0,1]$, ряди Фур'є за якою для неперервних функцій збігаються до них рівномірно на $[0,1]$. Така система має надзвичайно просту структуру і складається із кусково-сталих функцій на інтервалах двійкового розбиття відрізка $[0,1]$. Нагадаємо означення цієї системи в тих позначеннях, які зручні нам у подальшому викладі.

Позначимо через D_j, $j = 1, 2, \ldots$, множину двійкових інтервалів $j-$го рівня відрізка $\mathbb{I} := [0,1]$:

$$D_j = \left\{ I_j^s : \ s = 0, 1, \ldots, 2^{j-1} - 1 \right\},$$

де $I_j^s = (s2^{-j+1}, (s+1)2^{-j+1})$. Також покладемо $I_0^0 := \mathbb{I}$ і $D_0 = \{I_0^0\}$.
Визначимо функції Хаара, поклавши

$$\mathrm{H}_{I_0^0}(t) = 1, \quad t \in \mathbb{I},$$

і для $j = 1, 2, \ldots,$ $s = 0, 1, \ldots, 2^{j-1} - 1$

$$\mathrm{H}_{I_j^s}(t) = \begin{cases} |I_j^s|^{-1/2}, & t \in \left(s2^{-j+1}, (s + \frac{1}{2})2^{-j+1}\right), \\ -|I_j^s|^{-1/2}, & t \in \left((s + \frac{1}{2})2^{-j+1}, (s+1)2^{-j+1}\right), \\ 0, & t \in \mathbb{I} \setminus \overline{I_j^s}, \end{cases}$$

де $|I_j^s| = 2^{-j+1}$ — довжина інтервалу I_j^s, а $\overline{I_j^s}$ — його замикання.

У всіх внутрішніх (по відношенню до відрізка $\mathbb{I}$) точках розриву функції $\mathrm{H}_{I_j^s}(\cdot)$ покладаються рівними половині суми їх граничних значень зліва і справа, а в кінцевих точках відрізка $[0,1]$ — їх граничним значенням зсередини відрізка.

Система $\mathbb{H} = \{\mathrm{H}_{I_0^0}\} \bigcup \{\mathrm{H}_{I_j^s}\}_{\substack{j=1,2,\dots \\ s=0,1,\dots,2^{j-1}-1}}$ називається базисною системою Хаара.

Упорядкуємо систему $\mathbb{H}$ у такий спосіб. Покладемо $h_0(t) = 1, \quad t \in I_0^0$ і для $0 \le s < 2^{j-1}, \ j = 1,2,\dots,$ — $h_{2^{j-1}+s}(t) = h_j^s(t) = \mathrm{H}_{I_j^s}(t)$. Отриману послідовність $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ позначимо через H.

У 1928 році Й. Шаудер (J. Chauder) [160] показав, що система $\mathrm{H} = (h_n)_{n=0}^{\infty}$ є базисом в просторах Лебега $L_q([0,1]), \ 1 \le q < \infty$.

На початку ***підрозділу 2.1*** (див. пункт 2.1.3) означаються функціональні базисні системи $\mathrm{H}_0^d, \ \mathbb{H}_0^d, \ \mathrm{H}^d$ та $\mathcal{H}^d$ у просторах $L_p([0,1]^d), \ 1 \le p \le \infty$. Спершу дається означення кратної базисної системи Хаара H_0^d функцій, заданих на одиничному кубі $\mathbb{I}^d, \ d \ge 2$. Отже, позначимо через $Q_j := \bigotimes_{i=1}^d D_j, \ j = 1,2,\dots$ множину кубів I двійкового розбиття куба $\mathbb{I}^d$ об'ємом $|I| = 2^{(-j+1)d}$, тобто

$$Q_j = \left\{ I_j^{\boldsymbol{l}} = \prod_{i=1}^{d} I_j^{l_i} : \ \boldsymbol{l} = (l_1,\dots,l_d), \ 0 \leqslant l_i < 2^{j-1}, \ i = \overline{1,d} \right\},$$

а через $Q := \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ — множину всіх кубів двійкового розбиття $\mathbb{I}^d$. Покладемо

$$\mathrm{H}_0^d := \{\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}\} \cup \{\mathrm{H}_I\}_{I \in Q},$$

де функція

$$\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}(\boldsymbol{x}) = 1, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d,$$

і для $j \in \mathbb{N}$ та $I \in Q_j$ (тобто $I = \prod_{i=1}^d I_j^{s_i}$)

$$\mathrm{H}_I(x_1,\dots,x_d) = \prod_{i \in E} \mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i) \times \prod_{i \in \mathbb{T} \setminus E} |\mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i)|,$$

де E — довільна непорожня підмножина множини $\mathbb{T} := \{1,2,\dots,d\}$, в тому числі, допускається $E = \mathbb{T}$ і в цьому випадку множник $\prod_{i \in \mathbb{T} \setminus E}$ замінюється одиницею.

Функції системи $\mathrm{H}_0^d, \ d \geqslant 2$, можна "занумерувати" також векторами (точками) множини $\mathbb{Z}_+^d$, яка є об'єднанням неперетинних підмножин $Z_{0,d} := Y_{0,d}$ та $Z_{j,d} := Y_{j,d} \setminus Y_{j-1,d}, \ j \in \mathbb{N}$, де

$$Y_{0,d} = \{\overline{0}\} = \{(0,0,\dots,0)\} \subset \mathbb{Z}_+^d,$$

$$Y_{j,d} = \left\{ \overline{k} = (k_1,\dots,k_d) \in \mathbb{Z}_+^d : \ 0 \leqslant k_i < 2^j, \ i = \overline{1,d} \right\}, \quad j = 1,2,\dots$$

Отже, означимо систему функцій з d змінними

$$\mathbb{H}_0^d = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}_+^d} := \bigcup_{j=0}^{\infty} \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_{j,d}},$$

поклавши $h_{\overline{0}} = \bigotimes_{i=1}^{d} h_0$ і $h_{\bar{k}} = \bigotimes_{i\in E} h_{k_i} \otimes \bigotimes_{i\in\mathbb{T}\setminus E} |h_{2^{j-1}+k_i}|$ для $\overline{k} \in Z_{j,d}$, $j \in \mathbb{N}$, де $E = \{i \in \mathbb{T} : 2^{j-1} \leqslant k_i < 2^j\}$, причому, якщо $E = \mathbb{T}$, то покладаємо $h_{\bar{k}} = \bigotimes_{i\in\mathbb{T}} h_{k_i}$.

Зрозуміло, що $\mathbb{H}_0^d = \mathrm{H}_0^d$, тобто множини $\{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ і H_0^d тотожні. Більш того, між індексацією двійковими кубами із Q_j функцій множини H_0^d і індексацією векторами із $Z_{j,d}$ функцій множини $\mathbb{H}_0^d$ встановлюється взаємно однозначна відповідність так, що $\{h_I\}_{I\in Q_j} = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_{j,d}}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Упорядкуємо вектори $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ множини $\mathbb{Z}_+^d$, розмістивши їх у вигляді послідовності $\overline{k}^{(1)}, \overline{k}^{(2)}, \ldots, \overline{k}^{(m)}, \ldots$ так, що $\overline{k}^{(1)} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d$ і для $i = 2, 3, \ldots$

$$\max\left\{\overline{k}_j^{(i)} : \ j = \overline{1, d}\right\} \leqslant \max\left\{\overline{k}_j^{(i+1)} : \ j = \overline{1, d}\right\}.$$

Відповідну такому упорядкуванню послідовність $\left(h_{\bar{k}^{(i)}}\right)_{i=1}^{\infty}$ функцій системи $\mathbb{H}_0^d$ позначимо через H^d. Нарешті, занумерувавши функції системи H^d згідно з відповідністю $\overline{k}^{(i)} \to i$, пишемо $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$.

Далі, у ***підрозділі 2.1*** встановлено властивості кратної базисної системи функцій $\mathrm{H}^d = (h_n)_{n=1}^{\infty}$, $d \geq 2$ у просторах Лебега $L_p([0,1]^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, аналогічні властивостям одновимірного базису Хаара H. Зокрема, доведено, що система H^d є базисом Шаудера в просторах $L_p([0,1]^d)$ при $1 \leq p < \infty$.

Головним твердженням, що стосується системи $\mathbb{H}_0^d$ в ***підрозділі 2.1*** є подана нижче теорема 2.1.1.

Визначимо оператори $R_j : L_1(\mathbb{I}^d) \longrightarrow \mathrm{W}_j$, де $\mathrm{W}_j := \mathrm{span}\{h_{\overline{k}} : \ \overline{k} \in Z_{j,d}\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, формулою $R_j f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{\overline{k}\in Z_{j,d}} (f; h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x})$, $f \in L_1(\mathbb{I}^d)$.

Теорема 2.1.1. *Для будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ справедливий наступний Фур'є–Хаара розклад в ряд*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j f(\boldsymbol{x}),$$

що збігається в просторі $L_p(\mathbb{I}^d)$. Послідовність $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$ є базисом Шаудера в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq p < \infty$.

У ***підрозділі 2.2*** основним об'єктом дослідження є класи Гельдера H_p^{α} функцій, визначених на одиничному кубі $\mathbb{I}^d$ простору $\mathbb{R}^d$. Дамо означення цих класів.

Отже, для $0<\alpha\leqslant 1$ і $1\leqslant p\leqslant\infty$ визначимо множини

$$H_p^\alpha(M)=\mathrm{Lip}(\alpha,p,M):=\Big\{f\in L_p:\ \omega(f,t)_p\leq Mt^\alpha\Big\},\quad M>0$$

і

$$H_p^\alpha=\mathrm{Lip}(\alpha,p):=\bigcup_{M>0}H_p^\alpha(M).$$

Лінійний простір H_p^α наділимо нормою $\|\cdot\|_{H_p^\alpha}$:

$$\|f\|_{H_p^\alpha}=\|f\|_p+\sup_{t>0}t^{-\alpha}\omega(f,t)_p.$$

Простір H_p^α зі скінченною нормою $\|\cdot\|_{H_p^\alpha}$ є банаховим при всіх $1\leq p\leq\infty$ і називається простором Гельдера-Ліпшиця (при $0<\alpha<1$ — простором Гельдера).

Отже, у ***пункті 2.2.1*** в термінах найкращих поліноміальних наближень за кратним базисом Хаара отримана конструктивна характеристика класів Гельдера H_p^α за обмеження $0<\alpha<\frac{1}{p}\leq 1$. А саме, доведено, що при $1\leqslant p<\infty$ і $0<\alpha<\frac{1}{p}$ твердження $f\in H_p^\alpha$ і $E_{V_n}(f)_p\ll 2^{-n\alpha}$ рівносильні. Тут $E_{V_n}(f)_p$ найкраще наближення функції f елементами підпростору $V_n:=\bigcup_{j=0}^n W_j$:

$$E_{V_n}(f)_p:=\inf_{c_{\overline{k}}\in\mathbb{R}}\|f-\sum_{\overline{k}\in Y_{n,d}}c_{\overline{k}}h_{\overline{k}}\|_p.$$

Виявляється, що обмеження на параметр α — істотне. У випадку $d=1$ це було з'ясовано Б. І. Голубовим [24]. Якщо $\alpha=\frac{1}{p}$, то оцінка $E_{V_n}(f)_p\ll 2^{-n\alpha}$ для $f\in L_p$ вже не обов'язково тягне за собою належність функції f простору H_p^α, однак все ж є гарантією певної гладкості функції f, що описується в термінах модулів неперервності $\omega(f,t)_p$ та $\omega^*(f,t)_p$. Це відображено в теоремі 2.2.3 із ***пункту 2.2.2***, в яку з метою завершенності занесено і результат у випадку $0<\alpha<\frac{1}{p}$.

Отже, покладемо

$$lip(\alpha,p):=\Big\{f\in L_p:\ \omega(f,t)_p=o(t^\alpha),\ t\to+0\Big\}.$$

Якщо в означенні множини $lip(\alpha,p)$ замість $\omega(f,t)_p$ використовується $\omega^*(f,t)_p$, то вживаємо позначення $lip^*(\alpha,p)$.

Теорема 2.2.3. *Нехай $1\leqslant p<\infty$. Тоді*

(а) якщо $0<\alpha<\frac{1}{p}\leqslant 1$, то $E_{V_n}(f)_p\ll 2^{-n\alpha}$ рівносильне $f\in Lip(\alpha,p)$;

(б) якщо $0<\frac{1}{p}<\alpha\leqslant 1$, то із $E_{V_n}(f)_p\ll 2^{-n\alpha}$ випливає $f\in Lip(\frac{1}{p},p)$, але необов'язково $f\in lip(\frac{1}{p},p)$, а отже і необов'язково $f\in lip^*(\frac{1}{p},p)$;

(в) якщо $0 < \alpha = \frac{1}{p} \leqslant 1$, *то із* $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-\frac{n}{p}}$ *випливає* $\omega(f,\delta)_p = O(\delta^{\frac{1}{p}}|\ln\delta|)$, *але необов'язково* $\omega^*(f,\delta)_p = o(\delta^{\frac{1}{p}}|\ln\delta|)$, $\delta \to +0$.

В ***пункті 2.2.3*** з використанням кратних систем Хаара також встановлені теореми вкладення в шкалі просторів Лебега і співвідношення, що пов'язують величини найкращих наближень у відповідних просторах (теореми 2.2.4 та 2.2.5). Точніше, дається відповідь на питання щодо достатніх умов на значення величин $E_n^*(f)_p$, які гарантують імплікацію $f \in L_p(\mathbb{I}^d) \Rightarrow f \in L_q(\mathbb{I}^d)$ при $1 \le p < q \le \infty$ і відповідну їй оцінку $E_n^*(f)_q$ через $E_n^*(f)_p$. Через $E_n^*(f)_p$ позначається відхилення функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ від лінійної оболонки n перших функцій базису $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$.

У ***підрозділі 2.3*** встановлено еквівалентне представлення норм в просторах Гельдера H_p^α та Бєсова $B_{p,\theta}^\alpha$ в термінах коефіцієнтів у розкладах їх елементів за кратним базисом Хаара, або за системою H_0^d.

Спочатку сформулюємо твердження щодо опису класів $H_p^\alpha(M)$ опосередковано через коефіцієнти Фур'є-Хаара їх елементів.

Теорема 2.3.1. *Якщо* $f \in H_p^\alpha(M)$, $0 < \alpha \le 1$, $1 \le p < \infty$, $M > 0$, *то існує така додатна стала* C, *яка не залежить від* f, *що для будь-якого* $j \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |(f,h_{\overline{k}})|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C\, 2^{-j(\alpha+\frac{d}{2}-\frac{d}{p})}. \tag{1.1}$$

Навпаки, якщо при $1 \le p < \infty$ *і* $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ *при всіх* $j = 1, 2, \ldots$ *виконується нерівність (1.1) з деякою сталою* C, *то* $f \in H_p^\alpha$.

А тепер, твердження щодо еквівалентного представлення півнорми $|\cdot|_{H_p^\alpha}$ для функцій із H_p^α. Фактично воно охоплене теоремою 2.3.1.

Теорема 2.3.2. *Нехай* $1 \le p < \infty$ *і* $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. *Тоді для кожної функції* $f \in H_p^\alpha$, $f \neq const$

$$|f|_{H_p^\alpha} \overset{f}{\asymp} \sup_j 2^{j(\alpha+\frac{d}{2}-\frac{d}{p})} \left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |(f,h_{\overline{k}}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Аналогічне до теореми 2.3.2 твердження має місце і для функцій, що належать відомим просторам Бєсова $B_{p,\theta}^\alpha$ функцій, визначених на $\mathbb{I}^d$. Нагадаємо означення цих просторів.

Для заданих параметрів α, p, θ, $0 < \alpha < 1$ *і* $1 \le p, \theta < \infty$, *нормований простір* $B_{p,\theta}^\alpha$ — *це множина функцій* φ, *що задовольняють умови:*

(i) $$\varphi \in L_p(\mathbb{I}^d);$$

$$(ii) \qquad \|\varphi\|_{p,\theta}^{(\alpha)} := \|\varphi\|_p + |\varphi|_{p,\theta}^{(\alpha)} < \infty,$$

де півнорма $|\varphi|_{p,\theta}^{\alpha}$ *визначається формулою*

$$|\varphi|_{p,\theta}^{(\alpha)} := \left[\int\limits_0^1 \left(\frac{\omega(\varphi;t)_p}{t^\alpha} \right)^\theta \frac{dt}{t} \right]^{1/\theta}.$$

$B_{p,\theta}^{\alpha}$ — сепарабельний банахів простір для будь-якої трійки параметрів α, p, θ: $0 < \alpha < 1$, $1 \le p, \theta < \infty$. Зазначимо, що при $\alpha > \frac{d}{p}$ простір $B_{p,\theta}^{\alpha}$ є підпростором банахового простору $C(\mathbb{I}^d)$, неперервних на $\mathbb{I}^d$ функцій, з рівномірною метрикою.

Теорема 2.3.3. *Нехай* $1 \le p, \theta < \infty$ *і* $0 < \alpha < \frac{1}{p}$. *Тоді для* $f \in B_{p,\theta}^{\alpha}$, $f \neq const$,

$$|f|_{p,\theta}^{(\alpha)} \asymp \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left[2^{j(\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{2})} \Big(\sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \right]^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}},$$

де $b_{\overline{k}} = (f, h_{\overline{k}}) := \int\limits_{\mathbb{I}^d} f(\boldsymbol{x}) h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$, $\overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, *— коефіцієнти Фур'є–Хаара функції* f.

У ***підрозділі 2.4*** встановлені точні за порядком оцінки найкращих $m-$членних наближень за базисом H^d в просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ для функцій, що належать до одиничних куль просторів Гельдера і Бєсова. Вказано практично здійсненний алгоритм побудови екстремальних (в розумінні точних за порядком оцінок наближень) нелінійних $m-$членних агрегатів.

Спочатку дамо означення апроксимаційних характеристик у відповідності до кратних базисних систем Хаара. Отже, для функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$ означимо величину $\sigma_m(f; \mathbb{H}_0^d; L_p)$ (скорочено: $\sigma_m(f)_p$) найкращого $m-$членного, $m \in \mathbb{N}$, наближення функції f за системою Хаара $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d}$:

$$\sigma_m(f)_p = \sigma_m(f;\, \mathbb{H}_0^d;\, L_p(\mathbb{I}^d)) = \inf_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^d \\ \sharp\Lambda = m}} \inf_{c_{\overline{k}} \in \mathbb{R}} \|f - \sum_{\overline{k} \in \Lambda} c_{\overline{k}} h_{\overline{k}}\|_p.$$

Покладемо для $F \subset L_p(\mathbb{I}^d)$

$$\sigma_m(F)_p = \sigma_m(F;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) := \sup_{f \in F} \sigma_m(f)_p.$$

Далі, для функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$ і системи $\mathrm{H}^d \equiv \mathbb{H}_0^d$ визначимо

$$G_m^p(f;\, \mathbb{H}_0^d)(\boldsymbol{x}) := \sum_{\overline{k} \in \Lambda_f^{\max}} (f,\, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d,$$

де множина $\Lambda_f^{\max} \subset \mathbb{Z}_+^d$ залежить від функції f і визначається так, що $\sharp\Lambda_f^{\max} = m$ і

$$\min\{\|(f,\, h_{\overline{k}})h_{\overline{k}}\|_p,\, \overline{k} \in \Lambda_f^{\max}\} \geq \max\{\|(f,\, h_{\overline{k}})h_{\overline{k}}\|_p,\, \overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Lambda_f^{\max}\}\,.$$

Множина $\Lambda_f^{\max}$ при фіксованому m визначається у такий спосіб неоднозначно, проте це не є істотним у подальшому викладі.

Агрегати $G_m^p(f;\, \mathbb{H}_0^d)(\boldsymbol{x})$ називаються *p – гріді апроксимантами* для f.

У додачу до $\sigma_m(f)_p$ означимо величину

$$g_m(f)_p = g_m(f, \mathbb{H}_0^d,\, L_p(\mathbb{I}^d)) := \inf_{\substack{\Lambda_f^{\max} \subset \mathbb{Z}_+^d \\ \sharp\Lambda_f^{\max} = m}} \|f - \sum_{\overline{k} \in \Lambda_f^{\max}} (f,\, h_{\overline{k}})h_{\overline{k}}\|_p,$$

і покладемо

$$g_m(F)_p = g_m(F;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) := \sup_{f \in F} g_m(f)_p.$$

для $F \subset L_p(\mathbb{I}^d)$. При $m = 0$ вважаємо, що $g_0(f; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)) := \|f\|_p$.

Важливим для визначення послідовності дій при встановленні оцінок величин $\sigma_m(SH_p^\alpha)_q$ та $\sigma_m(SB_{p,\,\theta}^\alpha)_q$ є таке твердження.

Теорема 2.4.1. *Нехай $1 < p < \infty$. Тоді для будь-якої функції $g \in L_p(\mathbb{I}^d)$ справедливе співвідношення*

$$g_m(g;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) \asymp \sigma_m(g;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)).$$

Тепер викладемо результати, що увійшли до ***пункту 2.4.3***, і стосуються оцінок величин $\sigma_m(SH_p^\alpha)_q$ та $\sigma_m(SB_{p,\,\theta}^\alpha)_q$. Але, спочатку про мотивацію відповідних досліджень.

Позначимо через SH_p^α одиничну кулю у просторі H_p^α.

Із результатів ***пункту 2.2.1***, чи із теореми 2.2.3, випливає, що при $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leq 1$

$$\sup_{f \in SH_p^\alpha} E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\,\alpha}.$$

Цілком природним є запитання: чи покращується за порядком оцінка лівої частини останньої нерівності, якщо в ролі наближаючих агрегатів замість лінійного простору V_n використати множину всеможливих лінійних комбінацій довільних m елементів системи H_0^d (або, що теж саме, базису H^d) з $m = \dim V_n = 2^{n\,d}$, адаптуючи вибір цих m елементів найкращим чином до кожної функції $f \in SH_p^\alpha$? Відповідь на це запитання міститься в теоремі 2.4.3, але головним результатом даного підрозділу є теорема 2.4.2.

Зазначимо, що Б. С. Кашин довів [35]: *якщо для* $r = 0, 1, \dots$ *і* $\alpha \in (0, 1]$

$$H^{r,\alpha} := \left\{ f: \ \|f\|_{C([0,1])} + \|f^{(r)}\|_{C([0,1])} \le 1, \quad \frac{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \le 1, \quad x, y \in [0,1] \right\},$$

де $f^{(r)}$ *—* r*–та похідна функції* f*,* $f^{(0)} \equiv f$*, то знайдеться така додатна стала* $c = c(r, \alpha)$*, що для* $m = 1, 2, \dots$ *і для будь-якої повної ортонормованої в* $L_2([0,1])$ *системи* $\Phi = (\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ *справедлива нерівність*

$$\sigma_m(H^{r,\alpha};\ \Phi;\ L_2([0,1])) \ge m^{-(r+\alpha)}\,.$$

Отже, позначимо через $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ одиничну кулю у просторі $B^{\alpha}_{p,\theta}$, а через $\mathcal{D}$ — область допустимих значень параметрів d, p, q і α :

$$\mathcal{D} = \left\{ (d,p,q,\alpha): \ d \in \mathbb{N},\ 1 \le p < \infty,\ 1 < q < \infty,\ \left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q}\right)_+ < \alpha < \frac{1}{p} \right\}.$$

Наголосимо, ключову роль у встановленні точних за порядком значень як величин $\sigma_m(SH^{\alpha}_p)_q$, так і $\sigma_m(SB^{\alpha}_{p,\theta})_q$ відіграють результати ***підрозділу 2.3***.

Теорема 2.4.2. *Нехай* $(d,\, p,\, q,\, \alpha) \in \mathcal{D}$ *і* $1 \le \theta < \infty$*. Тоді*

$$\sigma_m(SB^{\alpha}_{p,\theta})_q \asymp g_m(SB^{\alpha}_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{\alpha}{d}}.$$

Теорема 2.4.3. *Нехай* $(d,p,q,\alpha) \in \mathcal{D}$*. Тоді*

$$\sigma_m(SH^{\alpha}_p)_q \asymp g_m(SH^{\alpha}_p)_q \asymp m^{-\frac{\alpha}{d}}.$$

У коментарях до теореми 2.4.2 вказано на переваги базису Хаара H^d у нелінійній апроксимації певних функціональних класів (зокрема, — класів Бєсова) у порівнянні з тригонометричним базисом $\mathcal{T}^d = \{e^{2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$.

У ***підрозділі 2.5***, беручи за основу розклад функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ в ряд Фур'є–Хаара за базисом H^d, запроваджена нова шкала просторів $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p) \subset L_p(\mathbb{I}^d)$. Вивчені елементарні властивості таких просторів та встановлені оцінки нелінійного наближення вказаного типу для одиничних куль у цих просторах. Додамо, що простори $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$, — як лінійні підпростори $L_p(\mathbb{I}^d)$, — наділені вказаною нормою $\|f\|^{\Lambda}_{p,\theta}$,

$f \in B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$. Ця норма задається за допомогою функціонального параметра Λ і числового параметра θ у вигляді виразів, що містять величини $\|(f,h_i)h_i\|_p,\ i=0,1,\ldots,$ і певним чином характеризує функції $f \in B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ ступенем спадання до нуля цих величин.

Сформулюємо основний результат із ***підрозділу 2.5***.

Теорема 2.5.1. *Нехай* $1 \le p,\theta \le \infty$, $1 < q < \infty$ *і* $\Lambda \in \Delta_2^{(1)}(p,q,\theta,d)$. *Тоді*

$$\sigma_m(SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p);\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \asymp g_m(SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p);\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \asymp$$

$$\asymp \Lambda^{-1}(m^{\frac{1}{d}})m^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

У ***підрозділі 2.6*** запроваджено нову характеристику нелінійної апроксимації елементів нормованого простору $\mathscr{X}$ — величину *$n-$членного проективного наближення* за довільною базисною системою $\Phi \subset \mathscr{X}$. Встановлені точні за порядком оцінки таких величин для функцій, визначених на $d-$вимірному кубі, які належать класам Бєсова, із використанням у ролі апроксимуючої системи — кратної базисної системи Фабера–Шаудера.

Нехай $\mathscr{X}$ — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, а $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}$ — базис Шаудера у просторі $\mathscr{X}$, тобто для будь-якого $\varphi \in \mathscr{X}$ існує єдина числова послідовність $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ така, що $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k$ (ряд збігається за нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$).
Для кожного $\varphi \in \mathscr{X}$ позначимо через $M_n(\varphi;\Phi)$ множину всіх лінійних (відносно системи Φ) комбінацій вигляду $\pi_Q(\varphi) = \sum\limits_{k\in Q} a_k\varphi_k$, де Q — довільна множина натуральних чисел, $\#Q{=}n$ (покладаємо також $M_0(\varphi;\Phi)=\{0\}$) і $a_k,\ k \in Q$ — коефіцієнти з розкладу φ за базисом Φ.

Назвемо $n-$членну апроксимацію довільного елемента $\varphi \in \mathscr{X}$ за допомогою елементів сімейства $M_n(\varphi;\Phi)$ *$n-$членним проективним наближенням* φ за системою Φ і означимо відповідну такому наближенню величину

$$e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathscr{X}) := \inf_{u\in M_n(\varphi;\Phi)} \|\varphi - u\|_{\mathscr{X}}.$$

Покладемо

$$e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathscr{X}) := \sup_{\varphi\in W} e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathscr{X}),$$

якщо W — довільна підмножина в $\mathscr{X}$.

Зважаючи на те, що Φ — базис, зауважимо, множина $\operatorname{span}\Phi$ — щільна в $\mathscr{X}$, тобто для довільного елемента $\varphi \in \mathscr{X}$: $e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathscr{X}) \to 0$ при $n \to \infty$. Виникає задача щодо швидкості прямування до нуля послідовності $e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathscr{X})$.

Метою ***підрозділу 2.6*** є встановлення порядкових оцінок величин $e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathscr{X})$ за наступних вихідних даних:
$\mathscr{X} = L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 \le q \le \infty$;
$W = SB^{\alpha}_{p,\theta}$ — одинична куля у просторі Бєсова $B^{\alpha}_{p,\theta}$, $0 < \alpha < 1$, $1 \le p, \theta < \infty$;
Φ — так званий, "діамантовий" базис у просторі $C(\mathbb{I}^d)$ неперервних на $\mathbb{I}^d$ функцій.

Визначимо сімейство Φ ([161]). Вихідною є функція $\psi(t) = \max\{0, 1-|t|\}$, $t \in \mathbb{R}$. Позначимо через D множину всіх "двійкових" точок відрізка $\mathbb{I}$: $D = \bigcup\limits_{k\ge 0} D_k$, де $D_0 = \{0;1\}$, $D_k = \left\{\dfrac{2j-1}{2^k},\ j = 1,\dots,2^{k-1}\right\}$. Означимо спочатку сімейство функцій Фабера–Шаудера з носіями на $\mathbb{I}$ у такий спосіб:

$$\Phi_\tau(t) = \psi(2^k(t-\tau)) \text{ для } \tau \in D_k, \quad k = 0,1,2,\dots .$$

Тепер позначимо $C_0 := D_0$, $C_k = C_{k-1}\bigcup D_k$. Тоді $C_k^d = C_{k-1}^d \bigcup D_{k,d}$, де

$$D_{0,d} = D_0^d = \prod_{j=1}^{d} D_0,$$

$$D_{k,d} = \Big\{\bar\tau = (\tau_1,\dots,\tau_d) \in C_k^d :\ (\exists i :\ \tau_i \in D_k)\Big\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

і покладемо для $\bar t = (t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{I}^d$

$$\phi_{\bar\tau}(\bar t) = \prod_{j=1}^{d} \psi(2^k(t_j - \tau_j)), \quad \bar\tau \in D_{k,d}, \quad k = 0,1,2,\dots .$$

Систему $\Phi = \{\phi_{\bar\tau} :\ \bar\tau \in D^d\}$ називають "діамантовим", або мультиафінним базисом і, якщо вона упорядкована так, що $\phi_{\bar\tau}$ з $\bar\tau \in D_{k,d}$ передує $\phi_{\bar\tau}$ з $\bar\tau \in D_{k+1,d}$, то ця система (послідовність) є базисом Шаудера у банаховому просторі $C(\mathbb{I}^d)$ неперервних на $\mathbb{I}^d$ функцій відносно рівномірної на $\mathbb{I}^d$ збіжності [161]. Тобто, для кожної функції $f \in C(\mathbb{I}^d)$ існує однозначно визначене сімейство $\Phi^* = \{b_{\bar\tau} :\ \bar\tau \in D_{k,d},\ k = 0,1,2,\dots\}$ таких дійсних чисел, що

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} b_{\bar\tau}\phi_{\bar\tau}.$$

Коефіцієнти $b_{\bar{\tau}} = b_{\bar{\tau}}(f)$ є лінійними функціоналами від f і $b_{\bar{\tau}}(\phi_{\bar{\tau}'}) = \delta_{\bar{\tau}\bar{\tau}'}$, тобто системи Φ і Φ^* — біортогональні. Система Φ^* визначається явно через систему Φ (див. [195]).

Головним результатом ***підрозділу 2.6*** є таке твердження.

Теорема 2.6.1. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $\frac{d}{p} < \alpha < 1$. *Тоді*

$$e_n^{\mathrm{pr}}(SB_{p,\theta}^{\alpha}; \Phi; L_q) \asymp n^{-\frac{\alpha}{d}}\,.$$

Третій розділ присвячений лінійній та нелінійній апроксимації класів періодичних гладких функцій з d змінними у просторах Лебега $L_q(\pi_d)$.

Через $L_p(\pi_m)$, $1 \leq p \leq \infty$ позначається простір вимірних $2\pi-$періодичних за кожною змінною функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m} |f(\boldsymbol{x})|, \quad p = \infty.$$

Тут $\pi_m := \prod\limits_{j=1}^{m} [0, 2\pi) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : \quad x_j \in [0, 2\pi),\, j = \overline{1, m}\}$.

У ***підрозділі 3.1*** отримані точні за порядком оцінки тригонометричних та ортопроекційних поперечників класів Бєсова $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ та Нікольського $\mathbb{H}_p^r$ періодичних функцій декількох змінних в просторі $L_q(\pi_d)$ при певних співвідношеннях між параметрами p та q.

Спочатку означимо простори та класи функцій.

Повний модуль гладкості $k-$го порядку ($k \in \mathbb{N}$) функції $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо $\omega_k(f, t)_p$ і означимо формулою

$$\omega_k(f, t)_p := \sup_{|\boldsymbol{h}| \leq t} \| \Delta_{\boldsymbol{h}}^k f \|_p,$$

де $|\boldsymbol{h}|$ — евклідова норма вектора $\boldsymbol{h}$; $\Delta_{\boldsymbol{h}}^k f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{l=0}^{k} (-1)^{l+k} C_k^l f(\boldsymbol{x} + l\boldsymbol{h})$ — кратна різниця порядку k функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}$ з кроком $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d$, $C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}$ — біноміальні коефіцієнти.

Кажуть, що функція $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, *належить простору* $B^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $r > 0$, *якщо скінченна її півнорма*

$$|f|_{B^r_{p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty (t^{-r} \omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \omega_k(f,t) t^{-r}, & \theta = \infty, \end{cases}$$

у припущенні, $k > r$.

Норму на лінійних просторах $B^r_{p,\theta}$ задамо формулою: $\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^r_{p,\theta}}$. Далі, через $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ позначається одинична куля в просторі $B^r_{p,\theta}$, тобто

$$\mathbb{B}^r_{p,\theta} := \{ f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le 1 \}.$$

Простори $B^r_{p,\theta}$ введені О. В. Бєсовим [7] і $B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p$, де H^r_p — простори Нікольського [56].

У 1974 році Р. С. Ісмагіловим [33] введена наступна апроксимаційна характеристика. Нехай $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас. *Тригонометричний* m*–поперечник класу* F *в просторі* $L_q(\pi_d)$ *(позначається* $d^T_m(F; L_q)$ *) визначається формулою*

$$d^T_m(F; L_q) = \inf_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d \\ \sharp\Lambda = m}} \sup_{f \in F} \inf_{c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}} \left\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \cdot)} \right\|_q.$$

Встановлення оцінок знизу для поперечників $d^T_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q)$ передбачає використання результатів щодо оцінок однієї із характеристик нелінійної апроксимації, а саме величини $e_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q$. Означимо її.

Для $F \subset L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, *покладемо*

$$e_m(F)_q := \sup_{f \in F} \inf_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d \\ \sharp\Lambda = m}} \inf_{c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}} \left\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \cdot)} \right\|_q$$

Величину $e_m(F)_q$ *називають найкращим* m*–членним тригонометричним наближенням класу* F *в просторі* $L_q(\pi_d)$.

Очевидно, $e_m(F)_q \le d^T_m(F; L_q)$.

Тепер сформулюємо основний результат із ***пункту 3.1.3***.

Теорема 3.1.1. *Нехай* $1 \le p < 2 \le q < \frac{p}{p-1}$, $r > d$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тоді*

$$d^T_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp m^{-\frac{r}{d} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}}.$$

Зазначимо наступне. З доведення теореми 3.1.1 випливає, що порядкові значення поперечника $d_m^T(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q)$, $1 \le p < 2 < q < \frac{p}{p-1}$ не досягаються при наближенні класу $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ за допомогою підпростору тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік із певної фіксованої множини $P \subset \mathbb{Z}^d$.

Якщо ж $1 \le p \le q \le 2$, або $1 \le q \le p \le \infty$, то як випливає з інших результатів цього розділу, — підпростір тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з множини P вже є екстремальним (в сенсі порядкових оцінок) для поперечників $d_m^T(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q)$. Окрім того, в цих випадках, а також і у випадку теореми 3.1.1 справджується співвідношення

$$d_m^T(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp e_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q.$$

Питання щодо порядкових значень поперечників $d_m^T(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q)$ у випадках $2 \le p < q \le \infty$ і $1 < p < 2$, $p' < q \le \infty$, ймовірно, дотепер залишається без відповіді.

Перейдемо до висвітлення результатів із ***пункту 3.1.4***. Вони стосуються оцінок ортопроекційних поперечників класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ у просторі $L_q(\pi_d)$. Спочатку означимо величини, які є основними об'єктами дослідження.

Нехай $\{u_i\}_{i=1}^m$ — ортонормована в просторі $L_2(\pi_d)$ система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$ поставимо у відповідність апроксимаційний агрегат вигляду $\sum\limits_{i=1}^m (f, u_i) u_i(\cdot)$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^m$. Тут $(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{x}) \overline{u_i(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x}$.

Для $F \subset L_q(\pi_d)$ *величина*

$$d_m^\perp(F; L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^m \subset L_\infty(\pi_d)} \sup_{f \in F} \|f - \sum_{i=1}^m (f, u_i) u_i\|_q$$

називається ортопроекційним поперечником класу F *в просторі* $L_q(\pi_d)$.

Поперечник $d_m^\perp(F; L_q)$ введений у 1982 році В. М. Темляковим [144].

Дослідження поперечників $d_m^\perp(B^r_{p,\theta}; L_q)$ спираються на оцінки величин $d_m^B(F; L_q)$, $F = B^r_{p,\theta}$, також запроваджених В. М. Темляковим [144]. Вони означаються наступною формулою:

$$d_m^B(F; L_q) := \inf_{G \in L_m(B)_q} \sup_{f \in F \cap \mathcal{D}(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q.$$

Тут через $L_m(B)_q$ позначена множина лінійних операторів G, що підпорядковані умовам:

а) область визначення $\mathcal{D}(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а область значень належить підпростору вимірності m в $L_q(\pi_d)$;

б) для числа B, $B \geq 1$ і для будь-якого вектора $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d)$ виконується нерівність $\|Ge^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\|_2 \leq B$.

Легко бачити, що величини $d_m^{\perp}(F; L_q)$ та $d_m^B(F; L_q)$ пов'язані нерівністю

$$d_m^B(F; L_q) \leq d_m^{\perp}(F; L_q).$$

Тепер сформулюємо основні результати ***пункту 3.1.4***.

Теорема 3.1.2 *Нехай* $1 \leq p < q < \infty$, $r > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. *Тоді при* $1 \leq \theta \leq \infty$ *справедливе співвідношення*

$$d_m^B(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp d_m^{\perp}(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Зауважимо, що при оцінюванні знизу величин $d_m^B(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q)$ використовується метод, що застосовувався В. М. Темляковим при встановленні оцінок величин $d_m^B(F; L_q)$ для інших функціональних класів F (див., наприклад, [135, 142, 144]). Суть цього методу полягає у побудові функцій, що належать класам $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ і "погано" апроксимуються за допомогою операторів G. Окрім зазначених робіт, ортопроекційні поперечники класів функцій як однієї так і декількох змінних вивчались також в роботах [3,22, 23], 105].

Зазначимо, що на підставі оцінок в теоремах 3.1.1 та 3.1.2 можна записати

$$d_m^T(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp d_m^{\perp}(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}$$

при $r > d$, $1 \leq p < 2 \leq q < \frac{p}{p-1}$ і $1 \leq \theta \leq \infty$.

Наступне твердження за змістом аналогічне теоремі 3.1.2. Відмінність лише в обмеженнях, що стосуються значень параметрів p та q .

Теорема 3.1.3. *Нехай* $1 \leq \theta \leq \infty$, $r > 0$ *і* $1 \leq q \leq p \leq \infty$, *а також* $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$. *Тоді*

$$d_m^B(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp d_m^{\perp}(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp m^{-\frac{r}{d}}.$$

У завершальній частині ***пункту 3.1.4*** встановлено порядкові значення величин $d_m^B(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_p)$ при $p = 1$ і $p = \infty$.

Теорема 3.1.4. *Нехай* $r > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$. *Тоді при* $p = 1$ *чи* $p = \infty$

$$d_m^B(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_p) \asymp m^{-\frac{r}{d}}.$$

Порядкові значення величин $d_m^{\perp}(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_p)$ у випадку $d \geq 2$ при $p = 1$ чи $p = \infty$ і $1 \leq \theta < \infty$, ймовірно, залишаються невідомими.

Для класів $\mathbb{H}^r_p$ точні за порядком оцінки величин $d_m^{\perp}(\mathbb{H}^r_p; L_p)$, $p = 1, \infty$ для всіх вимірностей $d \geq 1$ встановлені в [3]. Стосовно класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$ в одновимірному випадку $(d = 1)$, в роботі [105] доведене співвідношення

$$d_m^{\perp}(\mathbb{B}^r_{1,\theta}; L_1) \asymp m^{-r}, \quad r > 0, \ 1 \leq \theta < \infty.$$

Співставимо одержані оцінки ортопроекційних поперечників $d_m^{\perp}(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q)$ з оцінками апроксимаційних характеристик $e_m^{\perp}(F)_q$ для класів $F = \mathbb{B}^r_{p,\theta}$, які досліджені в [106]. Отже, покладемо

$$e_m^{\perp}(F)_q := \sup_{f \in F} \inf_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d \\ \sharp\Lambda = m}} \left\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} \hat{f}_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \cdot)} \right\|_q.$$

Величина $e_m^{\perp}(F)_q$ *називається найкращим ортогональним* $m-$*членним тригонометричним наближенням класу* F *в просторі* $L_q(\pi_d)$.

Співвставивши результати теорем 3.1.1 та 3.1.2 з оцінками величин $e_m^{\perp}(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q$ [106, теорема 1], можна стверджувати, що при $1 \leq p, \theta \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, $(p, q) \neq (1, 1)$ та $r > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$ справедливе співвідношення

$$d_M^{\perp}(\mathbb{B}^r_{p,\theta}, L_q) \asymp e_m^{\perp}(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{r}{d} + (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+}.$$

У ***підрозділі 3.2*** досліджено деякі класичні характеристики нелінійної апроксимації (в сенсі встановлення їх точних за порядком оцінок) на різного типу класах Нікольського та Бєсова періодичних функцій з декількома змінними . Зокрема, тут встановлені точні за порядком оцінки величин найкращих $M-$членних тригонометричних наближень та ортогональних тригонометричних наближень анізотропних класів Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ у просторі L_q. Знайдені також порядкові значення найкращих білінійних наближень класів функцій з $2d$ змінними, що породжені функціями з d змінними із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу.

Викладені тут результати, з одного боку, доповнюють оцінки відповідних величин, які встановлені в [97, 98], а з другого, — використовуються при оцінюванні зверху величин найкращих білінійних наближень функцій із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$.

У точці $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m_+$ визначимо $\omega_l(f, t)_p := \sup\limits_{|h_i| \leq t_i} \|\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f\|_p$ — повний мішаний $p-$модуль гладкості порядку l функції f. Тут для $\boldsymbol{h} = (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ і $l \in \mathbb{N}$ через

$$\Delta^l_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) := \Delta^l_{h_m} \ldots \Delta^l_{h_1} f(x_1, \ldots, x_m)$$

позначено мішану $l-$у різницю функції f з кроком h_j за змінною x_j, $j=\overline{1,m}$, а $\Delta^l_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} C_l^k f(x_1,\ldots,x_j+kh_j,\ldots,x_m)$.

Кажемо, що функція $f \in L_p(\pi_m)$, $1 \le p \le \infty$ *належить простору* $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_m)$, $r_j>0$, $j=\overline{1,m}$, *якщо скінченна її півнорма*

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_m} \left(\prod\limits_{j=1}^{m} t_j^{-r_j} \omega_l(f,\boldsymbol{t})_p \right)^{\theta} \prod\limits_{j=1}^{m} \frac{dt_j}{t_j} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t_j>0} \prod\limits_{j=1}^{m} t_j^{-r_j} \omega_l(f,\boldsymbol{t})_p\,, & \theta=\infty, \end{cases}$$

де $l > \max\{r_i,\, i=\overline{1,m}\}$.

Норму на лінійних просторах $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ задамо формулою $\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$. Простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, з одного боку, є узагальненнями відомих ізотропних просторів Бєсова [7] (у випадку $\theta=\infty$ — просторів Нікольського [56], а з іншого — належать шкалі просторів SB мішаної гладкості, введених Т. І. Амановим в [2].

У коментарях до отриманих результатів мова йде і про відповідні результати на класах $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\alpha}}$. Їх означення міститься у підрозділі 3.2.

Вважаємо, що координати вектора $\boldsymbol{r} = (r_1,\ldots,r_m)$, як параметра в означених просторах і класах, впорядковані так, що $0<r_1=r_2=\ldots=r_\nu<r_{\nu+1}\le\ldots\le r_m$.

Через $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ позначимо одиничну кулю в просторі $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$.

У ***пункті 3.2.2*** доведено таке твердження.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $1<q<\infty$, $r_1>0$. *Тоді при* $1\le\theta\le\infty$ *справедливі співвідношення*

$$e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q \asymp e^{\perp}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+=\max\{a;0\}$.

Величини $e^{\perp}_M(F)_q$ у випадках, коли $F=\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$, $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$ чи $F=\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ вивчались в роботах [99, 100]. Зазначимо, що у випадку $\theta=\infty$, тобто для класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty$, оцінки знизу величин $e_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty)_q$, а отже, і величин $e^{\perp}_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty)_q$, встановлені в [37].

Наступне твердження доповнює результат теореми 3.2.1 у випадку $q=1$, але з певними обмеженнями щодо значень параметра r_1.

Теорема 3.2.2. *Нехай* $1\le\theta<2$, $0<r_1<\frac{1}{\theta}-\frac{1}{2}$. *Тоді справджується співвідношення*

$$e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_1 \asymp e^{\perp}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_1 \asymp M^{-r_1}.$$

Порядкові значення величин $e_M(F)_1$ та $e_M^{\perp}(F)_1$, де F — класи $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\alpha}$ чи $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{\infty}$, в багатовимірному випадку, тобто при $d \geq 2$, ймовірно, ще не встановлені.

Наближення функцій декількох змінних лінійними комбінаціями добутків двох функцій з меншим числом змінних називають білінійними. Одними з найбільш важливих характеристик таких наближень є величини $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ для індивідуальної функції f і $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ для класу функцій F. Наведемо означення цих величин.

Нехай $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$, $d \in \mathbb{N}$, — множина функцій $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, $2\pi-$ періодичних за кожною із $2d$ змінних зі скінченною нормою $\|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2} := \|\|f(\cdot,\boldsymbol{y})\|_{q_1}\|_{q_2}$, де в правій частині норма функції $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\pi_d)$, $1 \leq q_1 \leq \infty$, як функції зі змінною $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ (при фіксованому $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$), а потім від результату, як функції зі змінною $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ в просторі $L_{q_2}(\pi_d)$, $1 \leq q_2 \leq \infty$.

Для $f \in L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ *означимо величину найкращого білінійного наближення порядку* M $(M \in \mathbb{N})$ *формулою*

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j(\cdot),v_j(\cdot)} \|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$, $j = \overline{1,M}$. *При* $M = 0$ *вважаємо, що* $\tau_0(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_{q_1,q_2} := \|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2}$. *Для* $F \subset L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ *покладемо*

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}.$$

У випадку, коли $q_1 = q_2 = q$ замість $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ і $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ пишемо відповідно $\tau_M(f)_q$ і $\tau_M(F)_q$.

Дослідженню величин $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ для деяких класів періодичних функцій багатьох змінних присвячені роботи В. Н. Темлякова [135, 138–141], А. С. Романюка [100] та роботи у співавторстві А. С. Романюка та В. С. Романюка [108–111, 192].

Ймовірно перший результат, що має дотик до найкращих білінійних наближень, був отриманий Е. Шмідтом [197] ще у 1907 році в дослідженнях, пов'язаних з інтегральними рівняннями. Інтерес в отриманні оцінок величин $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ для різноманітних класів F зумовлений як їх застосуванням до розв'язання задач теорії функцій та функціонального аналізу, так, власне, і важливістю того місця в нелінійній апроксимації, яке займають білінійні наближення.

У ***пункті 3.2.4*** знайдені точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень класів функцій $2d$ змінних, що породжені функціями d змінних із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу.

У випадку коли в означенні $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ функція $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ з $2d$ змінними $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$, пов'язана з деякою функцією d змінних $g(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ так, що $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, кажемо, що функція f породжується функцією g і замість $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ пишемо $\tau_M(f_g)_{q_1,q_2}$, або $\tau_M(g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,q_2}$. Якщо $F\subset L_1(\pi_d)$ — деякий клас функцій d змінних, то покладемо $\tau^*_M(F)_{q_1,q_2} := \sup\limits_{g\in F}\tau_M(f_g)_{q_1,q_2}$.

Зазначимо, Р. С. Ісмагілов [33] встановив зв'язок між величинами $\tau_M(f_g)_{2,\infty}$ і поперечниками за Колмогоровим класу F, якому належить функція g. Дослідженню величин $\tau^*_M(F)_{q_1,q_2}$ у випадках, коли $F=\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$ чи $F=\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$, присвячені роботи В.М.Темлякова [139, 142, 143] (див. також [135]), а в [100] встановлена слабка асимптотика величин $\tau^*_M(F)_{q_1,q_2}$ у випадку $F=\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ при значеннях параметрів $p,\theta,\boldsymbol{r},q_1,q_2$ відмінних від тих, що задіяні в результатах даного підрозділу, до викладу яких ми і переходимо.

Отже наступні результати стосуються порядкових оцінок величин $\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_{q_1,q_2}$, при певних значеннях параметрів p, θ, $\boldsymbol{r}$ і q_1, q_2.

Теорема 3.2.3. *Нехай* $1<q_1\le 2$, $1\le q_2\le\infty$ *і* $1\le\theta\le\infty$, $1-\frac{1}{q_1}<r_1\le 1-\frac{2}{q_1}+\frac{1}{\theta}$. *Тоді*

$$\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_{q_1,q_2}\asymp M^{-r_1+1-1/q_1}.$$

Зауважимо, що порядкові значення величин $\tau^*_M(F)_{q_1,q_2}$ у випадках, коли $F=\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{1,\alpha}$ чи $F=\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_1$, а $1<q_1\le 2$, $1\le q_2\le\infty$, $r_1>1-\frac{1}{q_1}$, ймовірно, ще не встановлені.

Теорема 3.2.4. *Нехай* $2\le q_1<\infty$, $1\le q_2\le\infty$ *і* $1\le\theta\le\infty$, $r_1>0$. *Тоді*

$$\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{q_1,q_2}\asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1}M)^{(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Наслідок 3.2.1. *Нехай* $2\le q_1<\infty$, $1\le q_2\le\infty$ *і* $r_1>0$. *Тоді*

$$\tau^*_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{\infty})_{q_1,q_2}\asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1}M)^{r_1+\frac{1}{2}}.$$

Зазначимо, що цей результат доповнює оцінки величин білінійних наближень класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$, які отримані В. М. Темляковим (див. [135, с. 100]). Щодо порядкових значень величин $\tau_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\alpha})_{q_1,q_2}$, то вони, ймовірно, ще не встановлені.

Отримані у ***пункті 3.2.4*** результати тісно пов'язані з відомими результатами, що стосуються оцінок колмогоровських поперечників деяких класів функцій. Покажемо це.

Отже, нехай F — деякий функціональний клас і f фіксована функція із F. Позначимо через F_f множину, що складається із функцій вигляду $f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, що утворюються із $f(\boldsymbol{x})$ за допомогою зсувів її аргументу $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$ на довільний вектор $\boldsymbol{y}\in\pi_d$. В такому випадку має місце рівність (див., наприклад, [135, с. 85])

$$\tau_M(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,\infty}=d_M(F_f,L_{q_1}). \tag{1.2}$$

Таким чином, якщо клас F є інваріантним відносно зсуву аргументу функцій, то згідно з (1.2) можна стверджувати, що значення величини $\tau_M(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,\infty}$ може слугувати за оцінку знизу для колмогоровського поперечника $d_M(F,L_{q_1})$ і в певних випадках ця оцінка є для нього точною за порядком.

Порівнюючи з огляду на такий факт результат теореми 3.2.4 з оцінкою колмогоровського поперечника $d_M(\mathbb{B}^r_{1,\theta};L_{q_1})$, встановленою А. С. Романюком [100, теорема 1.1], можна дійти висновку, що при $1-\frac{1}{q_1}<r_1\leq 1-\frac{2}{q_1}+\frac{1}{\theta}$, $1<q_1\leq 2$

$$\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_{q_1,\infty}\asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta};L_{q_1})(\log^{\nu-1}M)^{-r_1+1-\frac{1}{q_1}},$$

а співставивши результат наслідку 3.2.1 при $q_2=\infty$ з відповідною оцінкою колмогоровського поперечника $d_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty;L_{q_1})$, одержаною В. М. Темляковим [142], можна записати

$$\tau^*_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty)_{q_1,\infty}\asymp d_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty;L_{q_1}).$$

Дещо іншою є ситуація на класах $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, $1\leq\theta<\infty$. Інформація стосовно цього міститься у відповідних коментарях в пункті 3.2.4.

В наступному твердженні із ***пункту 3.2.4*** встановлені точні за порядком значення найкращих білінійних наближень функцій з двома змінними з класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1\leq p\leq\infty$, $\boldsymbol{r}=(r_1,r_1)$, $r_1>0$ у просторі $L_{q,q}(\pi_2)$, $1\leq q\leq\infty$, який, очевидно, в такому випадку тотожній простору $L_q(\pi_2)$.

Теорема 3.2.5. *Нехай* $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}\subset L_p(\pi_2)$. *Тоді при* $1\leq\theta<\infty$ *справджуються співвідношення*

$$\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q\asymp\begin{cases} M^{-2r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1\leq p\leq q\leq 2,\ r_1>\frac{1}{p}-\frac{1}{q},\\ M^{-2r_1}, & 2\leq p\leq q\leq\infty,\ r_1>\frac{1}{2},\\ M^{-2r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1\leq p<2<q\leq\infty,\ r_1>\frac{1}{p}.\end{cases}$$

У завершальній частині ***пункту 3.2.4*** (теорема 3.2.6) встановлені точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень функцій з двома змінними, що належать анізотропним класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ (означення див. нижче). Тут $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$, а θ числовий параметр.

У ***підрозділі 3.3*** знайдені точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на ізотропних класах Нікольського–Бєсова в функціональних просторах $L_q(\pi_{2d})$.

Сформулюємо основний результат даного підрозділу.

Теорема 3.3.1. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$. *Мають місце співвідношення*

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 \le p \le q \le 2, \quad r > 2d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}), \\ M^{-\frac{r}{d}}, & 2 \le p \le q \le \infty, \quad r > d, \\ M^{-\frac{r}{d}}, & 2 \le q \le p \le \infty, \quad r > 0, \\ M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty, \quad r > \frac{2d}{p}. \end{cases}$$

У ***підрозділі 3.4*** отримані оцінки зверху для величин найкращих білінійних наближень у просторах Лебега періодичних функцій багатьох змінних, що належать класам типу Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$. Показано, що в окремих випадках ці оцінки є точними за порядком.

У ***підрозділі 3.5*** знайдені точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на класах Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ у функціональних просторах $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$. На базі цих досліджень розв'язано задачу про оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

При $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_m)$ через $L_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$ позначимо множину функцій $f(\boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^m$, $2\pi-$періодичних за кожною із змінних, зі скінченними стандартними мішаними нормами $\|\cdot\|_{\boldsymbol{p}}$ при $1 \le p_j < \infty$, $j = \overline{1,m}$ і $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\infty}}$ при $p_j = \infty$, $j = \overline{1,m}$.
Зауважимо, що у випадку $p_1 = p_2 = \ldots = p_m = p$ простір $L_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$ збігається з простором Лебега $L_p(\pi_m)$ із стандартною нормою $\|\cdot\|_p$ і $\|f\|_{\boldsymbol{p}} \equiv \|f\|_p$.

Розглядаються лише функції $f \in L_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$, що підпорядковані умові $\int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{z}) dz_j = 0$, $j = \overline{1,m}$. Множину таких функцій позначимо через $L^0_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$.

Нехай $V_l(u)$, $u \in \mathbb{R}$ — ядро Валлє–Пуссена порядку $2l$ вигляду

$$V_l(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos ku + 2\sum_{k=l+1}^{2l-1} (1 - \frac{k-l}{l}) \cos ku$$

(при $l = 1$ другу суму вважаємо рівною нулю).

Вектору $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_m)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,m}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{z}) = \prod_{j=1}^{m} (V_{2^{s_j}}(z_j) - V_{2^{s_j - 1}}(z_j))$$

і для $f \in L^0_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$, $\boldsymbol{1} \le \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{\infty}$, покладемо

$$\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{z}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{z}),$$

де, нагадаємо, $*$ — операція згортки. Тут, для векторів $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_m)$ та $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_m)$ нерівності типу $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ слід розуміти як відповідні нерівності між їх координатами, тобто $a_i \le b_i$, $i = \overline{1,m}$.

Кажемо, що функція $f \in L^0_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $1 \le p_j \le \infty$, $j = \overline{1,m}$ *належить класу* $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ *з* $\boldsymbol{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $r_j > 0$ *і* $1 \le \theta < \infty$, *якщо виконується нерівність*

$$\left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^m} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left\| \mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{z}) \right\|^{\theta}_{\boldsymbol{p}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1.$$

Більш детальну інформацію щодо класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$, а також історію досліджень, пов'язаних з ними, можна знайти в монографіях [1, 8, 57, 104].

Визначимо величини, до дослідження яких ми вдаємося у ***підрозділі 3.5***, і дамо коротку історичну довідку щодо них.

Нехай $d \ge 1$ — натуральне число, $\boldsymbol{q} = (q_1, \dots, q_{2d})$, $1 \le q_j \le \infty$, $j = \overline{1,2d}$ і $\boldsymbol{q(1)} = (q_1, \dots, q_d)$, $\boldsymbol{q(2)} = (q_{d+1}, \dots, q_{2d})$.

Для функції $f \in L^0_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ *з* $2d$ *змінними* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ *і числа* $M \in \mathbb{N}$ *величина*

$$\tau_M(f)_{\boldsymbol{q}} := \inf_{u_i, v_i} \| f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{M} u_i(\boldsymbol{x}) v_i(\boldsymbol{y}) \|_{\boldsymbol{q}},$$

де $u_i \in L_{\boldsymbol{q(1)}}(\pi_d)$, $v_i \in L_{\boldsymbol{q(2)}}(\pi_d)$, $i = \overline{1,M}$, *називається найкращим білінійним наближенням порядку* M *функції* f *в просторі* $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$.

При $M = 0$ покладаємо $\tau_M(f)_{\boldsymbol{q}} = \|f\|_{\boldsymbol{q}}$. Для множини функцій $F \subset \boldsymbol{L}^0_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ визначимо величину

$$\tau_M(F)_{\boldsymbol{q}} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{\boldsymbol{q}}.$$

У випадку $q_j = q$, $j = \overline{1,2d}$, пишемо $\tau_M(\cdot)_q$ замість $\tau_M(\cdot)_{\boldsymbol{q}}$.

Як вже зазначалося, ймовірно, перший результат стосовно найкращих білінійних наближень, був отриманий Е.Шмідтом [197] ще в 1907 р. в дослідженнях, пов'язаних з інтегральними рівняннями. Було з'ясовано, що наближення функцій $f(x,y)$ двох змінних (визначених на квадраті $[0;1]^2 = [0;1]\times[0;1]$) білінійними формами в просторі $L_2([0;1]^2)$ тісно пов'язано з властивостями інтегральних операторів

$$(J_f\, g)(y) = \int\limits_0^1 f(x,y)g(x)dx$$

з ядром $f(x,y)$. Точніше, в [197] був отриманий розклад

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(J_f)\varphi_j(x)\psi_j(y),$$

де $\{s_j(J_f)\}_{j=1}^{\infty}$ — незростаюча послідовність сингулярних чисел оператора J_f. Окрім того, Е. Шмідтом була встановлена рівність

$$\|f(x,y) - \sum_{j=1}^{M} s_j(J_f)\varphi_j(x)\psi(y)\|_2 = \inf_{u_j,v_j\in L_2([0,1])} \|f(x,y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x)v_j(y)\|_2,$$

яка свідчить про зв'язок між величинами $\tau_M(f)_2$ для функції f і сингулярними числами $s_j(J_f)$ оператора J_f. На основі такого зв'язку в [197] одержані оцінки сингулярних чисел певних інтегральних операторів. Схожі дослідження знайшли продовження в роботах [14, 15, 59, 165, 200].

Спершу в ***підрозділі 3.5*** ми встановлюємо порядкові по параметру M значення величин $\tau_M(F)_{\boldsymbol{q}}$ для класу $F = \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ при певних значеннях параметра θ і деяких співвідношеннях між векторами $\boldsymbol{p} = (p_1,\ldots,p_{2d})$, $\boldsymbol{q} = (q_1,\ldots,q_{2d})$ і $\boldsymbol{r} = (r_1,\ldots,r_{2d})$. При цьому вихідною умовою щодо вектора $\boldsymbol{r}$ є умова, що його компоненти приймають значення $r_j = \rho_1$, $r_{d+j} = \rho_2$, $j=\overline{1,d}$, і в такому випадку клас $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ позначаємо $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Теорема 3.5.1. *Нехай* $\boldsymbol{2} \le \boldsymbol{p} \le \infty$, $\boldsymbol{2} \le \boldsymbol{q} < \boldsymbol{\infty}$ *і* $2 \le \theta < \infty$. *Тоді при* $\rho_i > \frac{1}{2}$, $i=1,2$ ($\rho_i > 0$ *при* $\boldsymbol{p} \ge \boldsymbol{q}$), *для класу* $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$ *функцій з* $2d$ *змінними має місце співвідношення*

$$\tau_M(\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta})_{\boldsymbol{q}} \asymp M^{-\rho_1-\rho_2}\,(\log^{d-1} M)^{(\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta})}.$$

Потім, використавши теорему 3.5.1, встановлено точні за порядком оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Теорема 3.5.2. *Нехай* $\boldsymbol{2 \le p \le \infty}$, $2 \le \theta < \infty$ *і* $\rho_i > 0$, $i = 1, 2$. *Тоді для класу* $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$ *функцій з* $2d$ *змінними має місце порядкове співвідношення*

$$\sup_{f \in \mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}} s_M(J_f) \asymp M^{-\rho_1-\rho_2-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{(\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta})}.$$

У **четвертому розділі** з'ясовано апроксимаційні властивості деяких класів функцій, які є аналітичними в однозв'язній області $\Omega \subset \mathbb{C}$, що обмежена замкнутою спрямлювальною жордановою кривою Γ. Дослідження полягають у встановленні оцінок наближення таких класів функцій в певних функціональних банахових просторах за допомогою скінченно-вимірних підпросторів .

Протягом другої половини минулого століття в теорії функцій комплексної змінної успішно створювався і розвивався один із основних її розділів, що стосується апроксимації на замкнутих множинах комплексної площини функцій чи класів функцій, що задані на цих множинах і є аналітичними в їх внутрішніх точках.

Найбільш вагомі здобутки і результати розвитку цього напрямку досить повно відображені в класичних монографіях В. К. Дзядика [30], П. М. Тамразова [130], В. К. Дзядика, В. І. Білого і В. В. Андрієвського [4], В. І. Смірнова і Н. А. Лєбєдєва [125], Д. Гайєра [20], П. К. Суєтіна [123] та у низці оглядових статей.

В першу чергу зусиллями цих математиків, їхніх шкіл, а також зусиллями їх послідовників, як вітчизняних так і закордонних, було створено конструктивну характеристику класів функцій неперервних на континуумах $\mathfrak{K}$ з однозв'язним доповненням в $\mathbb{C}$ і аналітичних в $\operatorname{int} \mathfrak{K}$ (внутрішніх точках континууму $\mathfrak{K}$). Створені при цьому методи стали поштовхом до інтенсивного вивчення апроксимативних властивостей інших класів аналітичних функцій, і не тільки з точки зору їх апроксимації за допомогою алгебраїчних поліномів, зокрема за допомогою частинних сум чи лінійних середніх їх рядів Фабера, а і довільних $n-$вимірних підпросторів аналітичних в $\operatorname{int} \mathfrak{K}$ функцій.

Основними об'єктами досліджень стали функціональні класи

$$H^r_p := \left\{ f \text{ аналітична в } D : \ \ \|f^{(r)}\|_{H_p} \le 1 \right\},$$

і

$$E^r_p(\Omega) := \left\{ f \text{ аналітична в } \Omega : \ \ \|f^{(r)}\|_{E_p(\Omega)} \le 1 \right\}, \ r \in \mathbb{N},$$

відповідно підмножини класичних просторів Харді H_p функцій аналітичних в крузі D і просторів Смирнова $E_p(\Omega)$ функцій аналітичних в однозв'язних областях Ω.

Найбільш завершені результати з апроксимації функцій із класів H_p^r і $E_p^r(\Omega)$ пов'язані з іменами математиків грузинської школи теорії функцій (В. М. Кокілашвілі, В. А. Пааташвілі, Г. А. Хусківадзе), азербайджанських математиків (І. І. Ібрагімов, Дж. Мамедханов), російських математиків (Л. В. Тайков, Ю. А. Фарков, О. Г. Парфьонов, К. Ю. Осіпєнко, М. І. Стєсін), українських математиків (С. Б. Вакарчук, В. М. Коновалов, І. О. Шевчук, В. І. Білий, і В. В. Андрієвський, В. В. Савчук та інші). Слід зауважити, що проблематика наближення функцій із класів $E_p^r(\Omega)$ ще далека від свого завершення. Це обумовлено головним чином тим, що в цьому випадку методи встановлення результатів потребують, в першу чергу, обгрунтування нетривіальних властивостей інтегралів типу Коші і особливих інтегралів Коші зі щільностями із функціональних просторів Лебега $L_p(\Gamma)$. В свою чергу, складність такого обгрунтування істотно залежна від структурних особливостей кривої Γ.

Нехай Ω — однозв'язна область в комплексній площині $\mathbb{C}$, границя якої є замкнутою спрямлювальною жордановою кривою (з. с. ж. к.) Γ (іноді пишемо $\Gamma = \partial\Omega$), $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ — замикання області Ω, а $\Omega^- = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ — зовнішність кривої Γ, тобто доповнення області Ω до розширеної комплексної площини $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Нехай далі Φ та Ψ — функції, що здійснюють конформний гомеоморфізм між зовнішністю області $\overline{\Omega}$ і зовнішністю круга $\overline{D} = \{w: \ |w| \le 1\}$, причому функція Φ задовольняє умови

$$\lim_{z\to\infty} \Phi(z)/z = \alpha > 0 \quad \text{і} \quad \Phi(\infty) = \infty.$$

Відомо, що відображення Φ і Ψ неперервно продовжуються до відповідних границь і є абсолютно неперервними на них.

В [113] означені класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ функцій, сумовних на з. с. ж. к. Γ — границі області $\Omega \subset \mathbb{C}$, а також їх аналітичні аналоги — класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ — множини функцій, що зображуються в області Ω інтегралами типу Коші вздовж Γ зі щільностями із $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$.

Вихідним пунктом в цих означеннях стала класифікація 2π – періодичних сумовних на періоді функцій, що проведена О. І. Степанцем (див., наприклад, [114]) і базується на запровадженому ним понятті $(\psi;\beta)$ – похідної.

Конструктивна побудова класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ полягає у встановленні взаємно однозначної відповідності між деякими множинами 2π – періодичних на $\mathbb{R}$ і сумовних на періоді функцій (а точніше, між природною реалізацією цих множин як такою, що складається із функцій, заданих на колі $T = \{w : |w| = 1\}$) і підмножинами функцій сумовних на Γ. Цим заздалегідь передбачається, що класифікована множина функцій f, визначених на Γ, задовольняє умови

$$\int\limits_{\Gamma} |f(\zeta)||d\zeta| = \int\limits_{|w|=1} |f(\Psi(w)||\Psi'(w)||dw| < \infty. \tag{1.3}$$

$$\int\limits_{\Gamma} |f(\zeta)||\Phi'(z)||d\zeta| = \int\limits_{|w|=1} |f(\Psi(w)||dw| < \infty. \tag{1.4}$$

де Ψ' та Φ' — похідні функцій Ψ та Φ, продовжених неперервним чином відповідно на T та Γ.

Множину функцій, які задовольняють умови (1.3) і (1.4) позначимо через $\widetilde{L}(\Gamma)$, а тих, що задовольняють лише умову (1.3) — через $L(\Gamma)$.

Якщо $f \in \widetilde{L}(\Gamma)$, то функцію $F(t) = f(\Psi(e^{it}))$ можна розвинути в ряд Фур'є

$$F(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(F) e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $c_k(F) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} F(t) e^{-ikt} dt$ — її коефіцієнти Фур'є.
Припустимо, що для деякої фіксованої послідовності $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ додатних дійсних чисел і числа $\beta \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z},\, k \neq 0} e^{(i\beta\pi/2)\cdot \operatorname{sgn} k} \ \frac{c_k(F)}{\psi(|k|)} e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної $2\pi-$періодичної функції, яку позначимо $F^{\psi}_{\beta}(t)$. Функція F^{ψ}_{β} називається $(\psi;\beta)-$похідною функції F (див. [114]). Функцію $\mu(\zeta)$, що визначена на Γ (яка не обов'язково належить до $L(\Gamma)$) таку, що $\mu(\Psi(e^{it})) = F^{\psi}_{\beta}(t)$ майже для всіх $t \in \mathbb{R}$, назвемо контурною $(\psi;\beta)-$похідною функції $f(\zeta)$ і позначимо $f^{\psi}_{\beta}(\zeta)$.

Через $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ позначимо підмножину функцій $f \in \widetilde{L}(\Gamma)$ таких, що $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}(\Gamma)$, де $\mathfrak{N}(\Gamma)$ —деяка підмножина функцій визначених на Γ, які задовольняють умову (1.4). Відштовхуючись від такого розбиття на класи множини $\widetilde{L}(\Gamma)$, можна класифікувати і множини аналітичних в області Ω функцій, які тим чи іншим чином пов'язані з функціями із $\widetilde{L}(\Gamma)$. В даному випадку така класифікація здійснюється для множини функцій, що задаються інтегралами типу Коші вздовж кривої Γ.

Отже, якщо

$$\mathcal{K}g(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad z \in \Omega,$$

— інтеграл типу Коші функції $g \in L(\Gamma)$, то визначимо

$$L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega) := \left\{\mathcal{K}f : \ f \in L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)\right\}.$$

Далі, позначимо через $\widetilde{L}_q(\Gamma)$, $1 < q < \infty$, — простір функцій φ, визначених і вимірних на Γ, для яких

$$\|\varphi\|_{\Gamma,q} := \left(\int_{\Gamma}|\varphi(z)|^q|\Phi'(z)||dz|\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{|w|=1}|f(\Psi(w)|^q|dw|\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

Нехай $\widetilde{B}_q(\Gamma)$ — одинична куля у просторі $\widetilde{L}_q(\Gamma)$. Покладемо $L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma) := L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ у випадку, коли $\mathfrak{N}(\Gamma) = \widetilde{B}_p(\Gamma)$ і відповідно

$$L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega) := \left\{\mathcal{K}f : \ \mathcal{K}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \ f \in L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma), \ z \in \Omega\right\}.$$

Кожна функція, що належить класам $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ має майже всюди на Γ скінченні кутові граничні значення [158], [166], які в залежності від структури множини $\mathfrak{N}(\Gamma)$ і обмежень на послідовність $\{\psi(k), \, k \in \mathbb{N}\}$ як функції володіють певними структурними властивостями такими, наприклад, як неперервність, сумовність зі степенем p за Лебегом, тощо. Це дозволяє ставити задачі щодо наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ в замкнутій області $\overline{\Omega}$ в метриці, що визначається їх властивостями на границі Γ .

У ***підрозділі 4.2*** дослідження стосуються рівномірного на $\overline{\Omega}$ наближення функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у випадку, коли область Ω фаберова.

В роботі [113] за певних обмежень на послідовність $\{\psi(k), \, k \in \mathbb{N}\}$, що визначає клас $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$, а точніше кажучи —на неперервну на додатній напівосі функцію ψ, слідом якої на множині $\mathbb{N}$ є ця послідовність, одержані поточкові оцінки відхилень від функцій з класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ їх часткових сум рядів Фабера в області Ω (подібні за типом результати є також в [119]).

Там же (тобто в [113]), у випадку коли область Ω фаберова, а функції із класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ неперервні в $\overline{\Omega}$, знайдені рівномірні на $\overline{\Omega}$ оцінки їх відхилень від часткових сум рядів Фабера. Ці оцінки подані в термінах апроксимаційних величин $(\psi;\beta)-$похідних функцій, що наближаються, а також — послідовності $\{\psi(k), \, k \in \mathbb{N}\}$.

Область Ω, обмежену з.с.ж.к. Γ, називають *фаберовою*, якщо для будь-якої функції $g \in \mathcal{A}(\overline{D})$ справджується нерівність

$$\sup_{z\in\Omega} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq C \sup_{w\in D} |g(w)|, \tag{1.5}$$

де C — величина, яка може залежати лише від області Ω.

Множину фаберових областей для яких виконується (1.5) з деякою фіксованою сталою C, позначимо $\mathcal{F}_C$. Також, покладемо $\mathcal{F} = \bigcup_{C>0} \mathcal{F}_C$.

Послідовності $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$, які є основним параметром як в означенні поняття $(\psi;\beta)-$похідної функції так і в самій класифікації множини $\widetilde{L}(\Gamma)$ (точніше, в означенні класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ та їх аналітичних аналогів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$) є, взагалі кажучи, довільними. Будемо вважати, що послідовності $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$ є слідами на множині $\mathbb{N}$ опуклих донизу функцій ψ таких, що $\lim\limits_{v\to\infty} \psi(v) = 0$. Множину таких функцій позначимо $\mathfrak{M}$.

Структурні (тобто диференціальні чи узагальнено диференціальні), а як наслідок, і апроксимаційні властивості функцій із класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$) найбільш суттєво залежать від поведінки функцій ψ. Це визначає доцільність розбиття множини $\mathfrak{M}$ на підмножини за швидкістю спадання функцій ψ. До характеризації цієї швидкості залучаються певні функції — так звані *модулі напівроспаду* μ (див. [114]).

Покладемо

$$\mathfrak{M}_c := \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad K_1 \leq \mu(\psi;t) \leq K_2, \quad K_1, K_2 > 0\};$$

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad 0 \leq \mu(\psi;t) \leq K, \quad K > 0\};$$

$$\mathfrak{M}_\infty := \{\psi \in \mathfrak{M} : \ \mu(\psi;t) \uparrow \infty,\, t \to \infty\},$$

де $\mu(t) = \mu(\psi;t) = t/(\eta(t) - t)$, $\quad \eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, а ψ^{-1} — функція обернена до ψ;

$$\mathfrak{M}_{c,\infty} := \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty;$$

В цих означеннях K_1, K_2 та K — додатні величини, які взагалі кажучи, залежать від функції ψ.

У рамках запроваджених у ***підрозділі 4.2*** означень, позначимо $\widetilde{B}(\Gamma) := \{f \in \widetilde{M}(\Gamma) : \|\widehat{F}\|_{L_\infty(0,2\pi)} \leq 1\}$ і розглянемо клас $L^{\psi}_{\beta}\widetilde{B}(\Gamma)$ та відповідний йому клас $L^{\psi}_{\beta}\widetilde{B}(\Omega)$ аналітичних в Ω функцій.

Справедливе таке твердження.

Теорема 4.2.2. *Нехай* $\Omega \in \mathcal{F}$ *і* $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty} \cap S$, $\beta \in \mathbb{R}$, *або* $\psi \in \mathfrak{M}_0 \cap S$, $\beta = 0$. *Тоді*

$$d_n(L^\psi_\beta \widetilde{B}(\Omega); \mathcal{A}(\overline{\Omega})) \asymp \psi(n)$$

У наступних трьох підрозділах четвертого розділу у термінах величин найкращого поліноміального наближення та колмогоровських поперечників досліджуються апроксимаційні властивості класів $L^\psi_{\beta,p}(\Omega)$ у просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ за різноманітних обмежень на послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$. А саме,

а) у ***підрозділі 4.3*** — у випадку, коли природною межею аналітичності функцій із $L^\psi_\beta \mathfrak{N}(\Omega)$ є крива Γ — границя області Ω;

б) ***підрозділі 4.4*** — коли функції з $L^\psi_\beta \mathfrak{N}(\Omega)$ аналітично продовжуються поза Γ в деяку обмежену область $\Omega' \supset \Omega$;

в) ***підрозділі 4.5*** — у випадку, таких обмежень на послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$, коли класи $L^\psi_{\beta,p}(\Omega)$ є множинами, які в розумінні оцінок їх наближення на $\overline{\Omega}$ за допомогою $n-$вимірних підпросторів займають проміжне положення між класами функцій, що аналітично продовжуються з області Ω через її межу і класами функцій, які є аналітичними в Ω і мають визначену "середню" ступінь гладкості на межі області Ω, якщо гладкість виражати в термінах властивостей або звичайних похідних або узагальненої $(\psi, \beta)-$похідної функції.

Банахів простір $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$, $1 < q < \infty$, складається із аналітичних в Ω функцій φ, що мають майже всюди на Γ кутові граничні значення $\overline{\varphi} \in \widetilde{L}_q(\Gamma)$ і $\|\varphi\|_{\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})} := \|\overline{\varphi}\|_{\widetilde{L}_q(\Gamma)}$. Припускається, що з.с.ж.к. Γ, яка обмежує область Ω належить множині RA_q. Пояснимо це.

Нехай ω майже всюди скінчена, додатна, вимірна на Γ функція — *вага на* Γ. Позначимо через $A_q(\Gamma; c)$, $1 < q < \infty$, множину вагових функцій ω на Γ, для яких

$$\sup_{z \in \Gamma} \sup_{r > 0} \left(\frac{1}{\mu(\theta_z(r))} \int\limits_{\theta_z(r)} |\omega(\zeta)||d\zeta| \right) \left(\frac{1}{\mu(\theta_z(r))} \int\limits_{\theta_z(r)} |\omega(\zeta)|^{-\frac{1}{q-1}} |d\zeta| \right)^{q-1} \le c,$$

де $\theta_z(r) = \{\zeta \in \Gamma : \ |\zeta - z| \le r\}$, а $\mu(A)$ — міра Лебега множини A на Γ. Це є *аналог відомої умови Маккенхаупта* (E. Muckenhoupt) [184] для ваг, визначених на спрямлювальній кривій Γ (див. [28]). Покладемо $A_q(\Gamma) = \bigcup_{c>0} A_q(\Gamma; c)$.

Отже, $\Gamma \in RA_q$, *якщо:*

i) Γ *— регулярна крива, тобто* $\sup\limits_{z \in \Gamma} \sup\limits_{r>0} \mu(\theta_z(r))/r < \infty$*;*

ii) $|\Phi'| \in A_q(\Gamma)$ *при* $1 < q < \infty$.

Означимо апроксимаційні величини, які досліджуються у ***підрозділах 4.3 — 4.5***.

Для множини $V \subset \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ покладемо

$$\mathcal{E}_n(V)_{\Gamma,q} := \sup_{\varphi \in V} \|\rho_n(\varphi;\cdot)\|_{\Gamma,q}$$

та

$$E_n(V)_{\Gamma,q} := \sup_{\varphi \in V} E_n(\varphi)_{\Gamma,q}.$$

Тут для функції $\varphi \in \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ через $\rho_n(\varphi;\cdot)$ і $E_n(\varphi;\cdot)_{\Gamma,q}$ позначено відповідно точкове в області Ω відхилення від функції φ частинної суми порядку n її ряду Фабера та величина найкращого наближення функції φ за допомогою алгебраїчних поліномів степеня не вище $n-1$ в просторі $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$.

У ***підрозділі 4.3*** за умови, коли $\Gamma \in RA_q$, і за певних обмежень на параметри за допомогою яких означається клас $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$, встановлені точні за порядком значення величин $E_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q}$ та $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q}$ (теореми 4.3.3 та 4.3.4).

Теореми 4.3.2–4.3.4 є аналогами відповідних результатів встановлених О. І. Степанцем [114, розділ V], про найкращі наближення $2\pi-$періодичних функцій з класів $L^{\psi}_{\beta}L_p$ у просторі $L_q(0,2\pi)$ за допомогою тригонометричних поліномів, і у випадку, коли Γ — одиничне коло, суттєво доповнюють деякі твердження з [131] та [150].

Але основним в ***підрозділі 4.3*** є результат що стосується колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$. Сформулюємо відповідну теорему, ввівши спочатку необхідні означення та позначення.

Через $P_{0,C}$ позначимо певну множину додатних числових послідовностей $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$, типовим представником якої є послідовність $\psi(k) = k^r, \quad r > 0$ (повне визначення множини $P_{0,C}$ міститься у пункті 4.3.2).

Нехай далі W^0_{α}, $\alpha > 0$, позначає множину таких послідовностей $\psi \in P_{0,C}$, що послідовність $\{\psi(k)k^{\alpha},\ k \in \mathbb{N}\}$ не зростає, тобто $W^0_{\alpha} := P_{0,C} \cap I_{\alpha}$.

Теорема 4.3.5. *Нехай $\Gamma \in RA_q$ і ε — довільне як завгодно мале додатне число. Тоді*

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \asymp \begin{cases} \psi(n)n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 < p \le q \le 2,\ \psi \in W^0_{1/p-1/q} \\ \psi(n)n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2 \le q < \infty,\ \psi \in W^0_{1/p+\varepsilon} \\ \psi(n), & 2 \le p \le q < \infty,\ \psi \in W^0_{0} \\ \psi(n), & 1 < q \le p < \infty,\ \psi \in W^0_{1/2+\varepsilon}. \end{cases}$$

Ця теорема доповнює і узагальнює один результат С. Б. Вакарчука [16] щодо оцінок величин $d_n(W^r E_p(\Omega); E_q(\Omega))$, де $E_q(\Omega)$ — простір Смірнова аналітичних в Ω функцій, а $W^r E_p(\Omega) = \{f \in E_p(\Omega) : \|f^{(r)}\|_{E_p} \leq 1\}$; Ω — область, обмежена кривою γ, що належить класу Ляпунова $\Lambda(1)$.

У ***підрозділі 4.4*** досліджуються апроксимаційні властивості класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ за таких обмежень на послідовність $\{\psi(k), k \in \mathbb{N}\}$, коли функції з $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ аналітично продовжуються поза Γ в деяку обмежену область $\Omega' \supset \Omega$.

Покладемо

$$\mathfrak{M}'_{\infty} := \{\psi \in I_0 : (\exists K > 0 \quad \forall t \geq 1 : \eta(t) - t \leq K)\},$$

де I_0 — множина додатних спадних до нуля на $[1, \infty)$ функцій; $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, ψ^{-1} — функція обернена до ψ. Зауважимо, якщо покласти

$$\mathfrak{N}_R := \left\{\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty} : \quad \lim_{k\to\infty} \ln|\psi(k)|^{-1/k} = R > 1\right\}$$

і

$$\mathfrak{N}_{\infty} := \left\{\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty} : \quad \lim_{k\to\infty} \ln|\psi(k)|^{-1/k} = \infty\right\},$$

то за умови $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$ можна показати, що:

i) $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ — множина функцій, аналітичних в області $\Omega_R \supset \Omega$, які обмежені кривою $\Gamma_R = \{z : |\Phi(z)| = R\}$, якщо $\Psi \in \mathfrak{N}_R$, наприклад, $\psi(t) = R^{-t}$, $R > 1$;

ii) $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ — множина цілих функцій, якщо $\psi \in \mathfrak{N}_{\infty}$, наприклад, $\psi(t) = R^{-t^r}$, R, $r > 1$.

Доведено таке твердження.

Теорема 4.4.1. *Нехай Ω — область обмежена кривою $\Gamma \in RA_q$, $q > 1$. Тоді, якщо $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$, то при $1 < p < \infty$*

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \asymp \psi(n)$$

Зазначимо, що оцінки зверху в теоремі 4.4.1 випливають з оцінок зверху для точних верхніх граней найкращих наближень алгебраїчними поліномами степеня $n-1$ по множині $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у просторі $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$, адже має місце наступне твердження.

Теорема 4.4.2. *Нехай Ω — область обмежена кривою $\Gamma \in RA_q$, $1 < p, q < \infty$ і $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \psi(n).$$

Зауважимо, що у випадку $1 < p \leq q < \infty$ за дещо більш жорстких умов на послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$ теорема 4.4.1 доведена в [62].

Основний результат ***підрозділу 4.5***, як і підрозділу 4.4, — оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у просторі $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$. Відмінність у даному випадку простежується лише в обмеженнях на послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$, яка визначає клас $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$, а як наслідок, — в апроксимаційних властивостях цих класів, які виражаються у термінах оцінок їх наближення на $\overline{\Omega}$ за допомогою $n-$вимірних підпросторів.

Із множини функцій $s: \ [1;\infty) \to \mathbb{R}$ виділимо підмножину

$$I^a := \{s: \ \ (\exists C>0 \ \ \forall t_1,\, t_2,\, 1 \le t_1 \le t_2 : \, s(t_1) \le Cs(t_2))\}$$

і покладемо

$$\mathfrak{M}''_{\infty} := \left\{\psi \in I_0: \ \ \eta(t)-t \in I^a,\, \frac{t}{\eta(t)-t} \uparrow \infty,\, t \to \infty \right\},$$

До множини $\mathfrak{M}''_{\infty}$ належить, зокрема, функція $\psi(t)=e^{-\alpha t^r}$, $\alpha>0$, $0<r<1$.

Теорема 4.5.1. *Нехай* Ω *— область, обмежена кривою* $\Gamma \in RA_q$, $q>1$. *Тоді, якщо* $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$, *то*

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \asymp \begin{cases} \psi(n)\,(\eta(n)-n)^{1/p-1/q}, & 1<p \le q \le 2, \\ \psi(n), & 2 \le p \le q < \infty, \\ \psi(n), & 2 \le q \le p < \infty, \\ \psi(n)\,(\eta(n)-n)^{1/p-1/2}, & 1<p \le 2 \le q < \infty. \end{cases}$$

Зазначимо, що у частковому випадку М. З. Двейрін [29] довів рівність

$$d_n(FH^{\overline{K}_1}_{p,K_1}; H_p) = R^{-n^r}, \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ 1 \le p \le \infty, \ \ 1/2 \le r \le 1, \ \ R>1,$$

де $FH^{\overline{K}_1}_{p,K_1}$ — клас аналітичних в $D=\{w:\,|w|<1\}$ функцій, що означаються через згортку Адамара і який співпадає з класом $L^{\psi}_{0,p}(D)$ при $\psi(t)=R^{-t^r}$, $R>1$. При $r=1$ результат М. З. Двейріна узгоджується з теоремою 4.4.1.

Оцінки зверху в теоремі 4.5.1 у випадках $1<p \le q \le 2$ та $1<q \le p<\infty$ випливають із наступного твердження.

Теорема 4.5.2. *Нехай* Ω *— область обмежена кривою* $\Gamma \in RA_q$, $1<p,q<\infty$ *і* $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \psi(n)\,(\eta(n)-n)^{(1/p-1/q)_+},$$

де $a_+ := \max\{0; a\}$.

У ***підрозділі 4.6*** розв'язана задача щодо встановлення точних за порядком значень колмогоровських поперечників класів $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$ у просторах Смірнова $E_q(\Omega)$ за певних обмежень на послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$ і для певних співвідношень між параметрами p та q. Також доведені важливі твердження, що стосуються властивостей $p-$фаберових операторів та оператора Коші.

Простір Смірнова $E_p(\Omega)$, $p > 0$, — це простір, що складається із аналітичних в Ω функцій f, для кожної із яких знайдеться послідовність $\{\Omega_j\}_{j\geq 1}$ однозв'язних областей зі спрямлювальними границями $\partial\Omega_j$, що вичерпує зсередини область Ω і така, що

$$\sup_j \int_{\partial\Omega_j} |f(w)|^p |dw| < \infty.$$

Відомо, що при $1 \leq p < \infty$ кожна функція $f \in E_p(\Omega)$, у випадку, коли границя $\Gamma = \partial\Omega$ спрямлювальна, має на Γ граничні значення по недотичних до Γ шляхах в області Ω. Причому, ці граничні значення є значеннями функції $\overline{f}$, що належить простору $L_p(\Gamma)$, $1 \leq p < \infty$, сумовних в p–ій степені функцій φ на кривій Γ, зі стандартною нормою $\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)}$. Лінійній простір $E_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, наділений нормою $\|f\|_{E_p(\Omega)} := \|\overline{f}\|_{L_p(\Gamma)}$, $f \in E_p(\Omega)$, є банаховим простором аналітичних в Ω функцій.

У випадку, коли $\Omega = D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, простір $E_p(D)$ суть простір Харді, який позначається, нагадаємо, через H_p.

Класи $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$ аналітичних в області Ω функцій, означені в [120] (див., також, [116]). Вони, як і класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$, є множинами функцій, що зображуються інтегралами типу Коші в області $\Omega \subset \mathbb{C}$, обмеженій з. с. ж. к. Γ і означаються за схожою схемою на основі класифікації $2\pi-$періодичних сумовних на періоді функцій, запровадженої О. І. Степанцем [115, 116].

Отже, нехай $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ($\psi(0) = 1$) — довільна послідовність комплексних чисел, і $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина у просторі $L_1(T)_+$ функцій степеневого типу із $L_1(T)$. Клас $L^{\psi}\mathfrak{N}(T)_+$ (див. означення в [116, с. 261]) складається із функцій $f \in L_1(T)$, — сумовних на колі T, — тригонометричний ряд Фур'є яких має вигляд

$$S[f] := \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k)\widehat{\varphi}(k)e^{ikt},$$

де $\widehat{\varphi}(k)$ — коефіцієнти Фур'є деякої функції $\varphi \in \mathfrak{N}$. Функцію f називають $\psi-$інтегралом функції φ і позначають $\mathcal{J}^{\psi}\varphi$.

Покладемо $L^{\psi}_{q,p}(T)_+ := L^{\psi}L_p(T)_+ \cap L_q(T)$, і якщо $\mathfrak{N}$ деяка підмножина $L_p(T)_+$, то

$$L^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(T)_+ := L^{\psi}\mathfrak{N}(T)_+ \cap L_q(T).$$

Отже, класи $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$, аналітичних в області Ω функцій, означаються наступним чином:

$$\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega) := T_q(L^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(T)_+) := \left\{ f = T_q(g) : g \in L^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(T)_+ \right\},$$

тобто $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$ — це образ множини $L^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(T)_+$ під дією лінійного оператора T_q, визначеного на H_q формулою

$$T_q(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} f(w)\frac{(\Psi'(w))^{1-\frac{1}{q}}}{\Psi(w) - z}dw, \quad f \in H_q,\ z \in \Omega,$$

який називається q – *фаберовим оператором*. Оберненим до оператора T_q є оператор

$$Q_q(g)(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{T} g_{\mathbb{T},q}(w)\frac{dw}{w - \tau}, \quad g \in E_q(\Omega),\ \tau \in D,$$

що визначений на $E_q(\Omega)$.
Зауважимо, оператори T_q і Q_q взаємно обернені на множині алгебраїчних многочленів $\mathcal{P} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

За припущення, що у аналітичному виразі, яким означений оператор T_q, крива Γ регулярна, можна стверджувати, що $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega) \subseteq E_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, для будь-якої послідовності ψ. Таким чином, можна вважати, що зазначеною класифікацією здійснюється розбиття множини інтегралів типу Коші і, зокрема, — розбиття на класи функцій простору Смирнова $E_q(\Omega)$.

Зрозуміло, що граничні властивості функцій із множин $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$, істотно залежать від поведінки послідовності $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, як основного параметра в означенні класів $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$.

Головні результати ***підрозділу 4.6*** стосуються оцінок колмогоровських поперечників $d_n(\mathcal{K}^{\psi}_q B_p(\Omega); E_q(\Omega))$ за різних обмежень щодо дійснозначної послідовності $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$. У випадках явного визначення послідовності ψ сформульовано наслідки основних теорем (зокрема, коли $\Omega = D$), які дають можливість співставити отримані результати з відомими твердженнями, що стосуються оцінок (точних значень) колмогоровських поперечників деяких класів функцій, аналітичних в крузі D і в жорданових областях.

Сформулюємо деякі із тверджень, що входять у ***підрозділ 4.6***, ввівши необхідні позначення. Визначимо множини

$$\mathfrak{M}_\infty^a := \left\{\psi \in I_0 : \quad \eta(t) - t \in I^a,\ t \geq 1,\ \sup_{t\geq 1} \frac{t}{\eta(t)-t} = \infty\right\}$$

та

$$\mathfrak{M}_\infty^c := \{\psi \in I_0 : \quad (\exists \beta > 0\ \forall\ t \geq 1 :\ \eta(t) - t \leq \beta)\},$$

де $\eta(t) := \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, а ψ^{-1} — функція, обернена до ψ.

Зазначимо, що до множин $\mathfrak{M}_\infty^a$ і $\mathfrak{M}_\infty^c$ належать, наприклад, функції $\psi(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, при $0 < r < 1$ і $r \geq 1$ відповідно.

Вважаємо, що члени послідовності $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$, на основі якої означається клас $\mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega)$, це значення функції $\psi \in I_0$ при натуральних значеннях аргументу.

Нехай $B_p(T)$ — одинична куля в $L_p(T)$ і $L_q^\psi B_p(T)_+ = L_{q,p}^\psi B_p(T)_+$ та $\mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega) = \mathcal{K}_{q,p}^\psi B_p(\Omega)$.

Теорема 4.6.3. *Нехай Ω — скінчена однозв'язна область, границя якої $\partial\Omega = \Gamma$ — регулярна крива. Тоді, якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^a$, то*

$$d_n(\mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega); E_q(\Omega)) \asymp \begin{cases} \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 < p \leq q \leq 2, \\ \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p \leq 2 \leq q < \infty, \\ \psi(n), & 2 \leq p \leq q < \infty, \\ \psi(n), & 1 < q \leq p < \infty\,. \end{cases}$$

Теорема 4.6.4. *Нехай Ω — скінчена однозв'язна область, границя якої $\partial\Omega = \Gamma$ — регулярна крива. Тоді, якщо $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^c$, то при $1 < p, q < \infty$*

$$d_n(\mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega); E_q(\Omega)) \asymp \psi(n).$$

Запишемо наслідок з теореми 4.6.3 у випадку, коли $\Omega = D$ і $\psi(k) = R^{-k^r}$, $0 < r < 1$, $R > 1$. Використаємо при цьому позначення $A_p^{R,r}$ для класу $\mathcal{K}_q^\psi B_p(D)$.

Наслідок 4.6.2. *При $R > 1$ і $0 < r < 1$*

$$d_n(A_p^{R,r}, H_q) \asymp \begin{cases} R^{-n^r} n^{(1-r)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}, & 1 < p \leq q \leq 2, \\ R^{-n^r}, & 2 \leq q \leq p < \infty. \end{cases}$$

Зауважимо, що у вищезгаданій роботі М. З. Двєйріна [29] доведено, що

$$d_n(A_p^{R,r}, H_p) = R^{-n^r}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

П'ятий розділ присвячений лінійній та нелінійній апроксимації певних функціональних множин у просторах функцій з областю визначення різної структури в $\mathbb{R}^d$. Зокрема, — апроксимації у просторах $L_q(\mathbb{T}^d)$, та у просторах Лебега $L_q(\mathbb{S}^{d-1})$, де $\mathbb{S}^{d-1}$ одинична сфера простору $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

У ***підрозділі 5.1*** встановлені точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел одиничних куль з двійкових просторів Бєсова $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ компактно вкладених в експоненціальні простори Орліча $\exp L^{\nu}$, що наділені нормою Люксембурга.

Ми розглядаємо функції, визначені на торі $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ідентифікуючи їх $1-$періодичними функціями на $\mathbb{R}$. Через $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір Лебега вимірних на $\mathbb{T}$ функцій зі скінченою нормою

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_{L_{\infty}(\mathbb{T})} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|.$$

Позначення $\exp L^{\nu}(\mathbb{T})$, $\nu > 0$ (або, скорочено, $\exp L^{\nu}$), зарезервовано для простору Орліча таких вимірних на $\mathbb{T}$ функцій $u : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, що для $\Phi_{\nu}(t) = t^2 \exp t^{\nu}$, $t \geq 0$, $\nu > 0$ скінченний інтеграл $\int\limits_{\mathbb{T}} \Phi_{\nu}(|u(x)|)dx$. Такий простір наділимо нормою Люксембурга

$$\|u\|_{\exp L^{\nu}(\mathbb{T})} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \int\limits_{\mathbb{T}} \Phi_{\nu} \left(\frac{|u(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}.$$

Більше інформації щодо нормованих просторів Орліча, які означаються схожим чином можна знайти, наприклад, в монографіях [31] та [34]. Відомо, що

$$\|u\|_{\exp L^{\nu}(\mathbb{T})} \sim \|u\|^{(1)}_{\exp L^{\nu}(\mathbb{T})} := \sup_{1 \leq p < \infty} p^{-1/\nu} \|u\|_{L_p(\mathbb{T})}.$$

Нехай $\Phi = \phi_0$ — парна нескінченно диференційовна на дійсній осі функція (пишемо $\Phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$) така, що $\operatorname{supp} \Phi = [-2, 2]$ і $\Phi(s) = 1$ при $|s| \leq 1$.
Покладемо

$$\phi_k(s) = \Phi(2^{-k}s) - \Phi(2^{-k+1}s), \quad k \in \mathbb{N},$$

і для $f \in L_1(\mathbb{T})$

$$L_k f(x) = \phi_k(D) f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_k(n) \widehat{f}_n e^{2\pi i n x}, \quad x \in \mathbb{R}, \; k \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\widehat{f}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є функції f по системі $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ на торі $\mathbb{T}$: $\widehat{f}_n = \int\limits_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi inx}dx$.

Для $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ і $\gamma \ge 0$ означимо простори типу Бєсова задаючи норму виразом, що характеризує ступінь спадання величин $\|L_k f\|_q$:

$$B^{0,\gamma}_{q,\theta} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) : \ \|f\|_{B^{0,\gamma}_{q,\theta}} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\theta\gamma} \|L_k f\|_q^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \text{— скінченна} \right\} \tag{1.6}$$

Відомо, що простори $B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ за такого означення не залежать від вибору функції Φ у виразі для $L_k f$ і, очевидно, $B^{0,\gamma}_{q_1,\theta_1} \subset B^{0,\gamma}_{q_2,\theta_2}$, якщо $1 \le q_2 \le q_1 \le \infty$ і $\theta_1 \le \theta_2$. Простір $B^{0,0}_{\infty,\theta}$ (тобто при $\gamma = 0$ і $q = \infty$) складається із локально інтегровних функцій тоді і тільки тоді, коли $1 \le \theta \le 2$ [182, с. 112]. Більш того, як випливає із означення (1.6), розповсюдженого на всі додатні значення θ, простір $B^{0,0}_{\infty,\theta}$ вкладається в $L_\infty(\mathbb{T})$, якщо $0 < \theta \le 1$, а при $1 < \theta \le 2$ справедливе вкладення $B^{0,0}_{\infty,\theta} \hookrightarrow \exp L^{\theta'}$, $\theta' = \frac{\theta}{\theta-1}$ [199, теорема 1.1].

Запровадимо до розгляду так звані двійкові простори типу Бєсова, замінюючи оператори L_k в означенні просторів $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ операторами $\mathbb{D}_k$ іншого вигляду (див. [199]). Отже, нехай $k \in \mathbb{Z}_+$. Для функції f, заданої на відрізку $[0,1]$, покладемо

$$\mathbb{E}_k f(x) = 2^k \int\limits_{(m-1)2^{-k}}^{m2^{-k}} f(t)dt, \quad (m-1)2^{-k} \le x < m2^{-k}, \ m = 1, \dots, 2^k$$

і визначимо

$$\mathbb{D}_0 f(x) = \mathbb{E}_0 f(x) \ \text{ та } \ \mathbb{D}_k f(x) = \mathbb{E}_k f(x) - \mathbb{E}_{k-1} f(x), \ k \in \mathbb{N}.$$

Далі будемо розглядати $1-$періодичні продовження функцій $\mathbb{E}_k f$ та $\mathbb{D}_k f$ з інтервалу $[0,1)$ на $\mathbb{R}$ як функції, що задані на $\mathbb{T}$, і відповідно — оператори $\mathbb{E}_k$ та $\mathbb{D}_k$, визначені на $L_1(\mathbb{T})$, зі значеннями в $L_\infty(\mathbb{T})$. Зазначимо, що для будь-якої функції $f \in L_1(\mathbb{T})$ майже для всіх $x \in \mathbb{T}$ справедлива рівність $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{D}_k f(x)$.

Тепер для $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ і $\gamma \ge 0$ означимо двійкові простори Бєсова

$$\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) : \ \|f\|_{\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\theta\gamma} \|\mathbb{D}_k f\|_q^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \right\}.$$

Наведемо деякі відомості, що стосуються зв'язку між просторами $B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ та $\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ з іншими відомими просторами.

В [36], Б.С. Кашин і В.М. Темляков ввели нормовані простори $LG^\gamma, \gamma > 0$, функцій f із $L_1(\mathbb{T})$, для яких $\|L_k f\|_\infty = O((k+1)^{-\gamma})$ при $k \to +\infty$, покладаючи

$$LG^\gamma(\mathbb{T}) := \{f \in L_1(\mathbb{T}) : \quad \|f\|_{LG^\gamma(\mathbb{T})} := \sup_{k\geq 0}(k+1)^\gamma \|L_k f\|_\infty < \infty\}.$$

Очевидно, при $\gamma > \frac{1}{2}$ простір $LG^\gamma(\mathbb{T})$ вкладається в $B^{0,\gamma}_{\infty,2}$. Більш того, при $\gamma > 1$ $LG^\gamma(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T})$, а при $1/2 < \gamma \leq 1$ $\quad LG^\gamma(\mathbb{T}) \subset \exp L^\nu(\mathbb{T})$ для $\nu < \frac{1}{1-\gamma}$ ([199, теорема 1.1]). Зазначимо також, що при $\gamma > \frac{1}{2}$, $\nu < 2$ чи $\nu \geq 2$, $\gamma > \frac{1}{1-\nu}$ останнє вкладення компактне ([199, теорема 1.3]).

З певної точки зору простори $LG^\gamma(\mathbb{T})$ можна розглядати як граничні в шкалі просторів $B^{0,\gamma}_{\infty,\theta}$, відповідними "граничному значенню" ∞ показника θ. В такому ж сенсі, в якості граничних в шкалі просторів $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{\infty,\theta}$ слугують простори $LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$, введені в [199]:

$$LG^\gamma_{\mathrm{dyad}} = \{f \in L_1(\mathbb{T}) : \quad \|f\|_{LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}} := \sup_{k\geq 0}(k+1)^\gamma \|\mathbb{D}_k f\|_\infty < \infty\}.$$

Відомо, що при $\gamma > \frac{1}{2}$

$$LG^\gamma \hookrightarrow LG^\gamma_{\mathrm{dyad}} \tag{1.7}$$

(див. [199, лема 3.2]).

Доповнивши шкалу просторів $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ та $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ при $1 \leq \theta < \infty$ відповідно просторами

$$B^{0,\gamma}_{p,\infty} = \{f \in L_1(\mathbb{T}) : \quad \|f\|_{B^{0,\gamma}_{p,\infty}} := \sup_{k\geq 0}(k+1)^\gamma \|L_k f\|_p < \infty\}$$

та

$$\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\infty} = \{f \in L_1(\mathbb{T}) : \quad \|f\|_{\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\infty}} := \sup_{k\geq 0}(k+1)^\gamma \|\mathbb{D}_k f\|_p < \infty\},$$

а також зауваживши, що в таких позначеннях $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \equiv LG^\gamma$ і $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \equiv LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$, у ***підрозділі 5.1*** доведено, що схоже з (1.7) вкладення зберігається і між просторами $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ та $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ при $1 \leq \theta \leq \infty$.

Основними величинами, що досліджуються в ***підрозділі 5.1*** є поперечники за Колмогоровим деяких із означених вище функціональних множин у просторах $L_p(\mathbb{T})$, та $\exp L^\nu(\mathbb{T})$, а також $m-$ті ентропійні числа простору $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ відносно простору $\exp L^\nu(\mathbb{T})$. Нагадаємо, якщо X — лінійний нормований простір з нормою $\|\cdot\|_X$, а Y — підпростір в X, що наділений нормою $\|\cdot\|_Y$, то

$m-$ им ентропійним числом простору Y відносно простору X називається величина

$$\epsilon_m(Y,X)=\inf\{\varepsilon>0:\ \exists\ \{u_j\}_{j=1}^{2^m-1},\ B_Y\subset\bigcup_{j=1}^{2^m-1}\{u_j+\varepsilon B_X\}\},$$

де B_X (B_Y) — одинична куля в X (Y).

Зробимо короткий огляд і аналіз відомих результатів, що стосуються величин ϵ_n та d_n в межах просторів $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, $\mathrm{dyad}\,B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, LG^γ і $\mathrm{dyad}\,LG^\gamma$. Одиничні кулі в цих просторах позначимо відповідно через $\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$, $\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}$, $\mathbb{LG}^\gamma$ і $\mathrm{dyad}\,\mathbb{LG}^\gamma$.

В роботі [36, теорема 3.1], Б.С. Кашин і В.М. Темляков встановили, що *при $\gamma>1$ справджуються співвідношення*

$$\epsilon_n(LG^\gamma,L_p)\asymp d_n(\mathbb{LG}^\gamma,L_p)\asymp\begin{cases}(\log_2 n)^{-\gamma+1}, & \textit{якщо}\ \ p=\infty,\\ (\log_2 n)^{-\gamma+1/2}, & \textit{якщо}\ \ 1\le p<\infty.\end{cases}$$

В статті [199], А. Зігер і В. Требелс (A. Seeger, W. Trebels), досліджуючи у попередньому твердженні причину стрибковості у зміні порядкових значень ентропійних чисел при переході від метрики в $L_p(\mathbb{T})$, $1\le p<\infty$, до метрики в $L_\infty(\mathbb{T})$, з метою "стирання" цього ефекту залучили простори $\exp L^\nu$ і встановили порядкові значення величин $\epsilon_m(LG^\gamma,\exp L^\nu)$ у вигляді наступного твердження:

Вкладення $LG^\gamma(\mathbb{T})\subset\exp L^\nu(\mathbb{T})$ компактне, якщо або $\gamma>1/2$, $\nu<2$, або $\nu\ge2$, $\gamma>1-\frac{1}{\nu}$. Мають місце оцінки:
1) для $\gamma>1/2$ і $\nu<2$

$$\epsilon_m(LG^\gamma,\exp L^\nu)\asymp(\log_2 m)^{\frac12-\gamma};$$

2) для $\nu\ge2$ і $\gamma>1-\frac{1}{\nu}$

$$\epsilon_m(LG^\gamma,\exp L^\nu)\asymp(\log_2 m)^{1-\frac{1}{\nu}-\gamma}.$$

Зауважимо, головна ідея методу встановлення оцінок зверху для ентропійних чисел в такому твердженні полягала у вкладенні простору LG^γ в ширший простір $LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$.

В іншому напрямі результати Б. С. Кашина і В. М. Темлякова були розповсюджені С. А. Стасюком [127] на простори $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$. А саме, доведено:

якщо $1\le\theta<\infty$ і $r>1-\frac{1}{\theta}$, то

$$\epsilon_m(B^{0,r}_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp d_m(\mathbb{B}^{0,r}_{\infty,\theta},L_\infty)\asymp(\log_2 m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}};$$

якщо ж $1 \le q < \infty$, $q \le p$, $r > \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}$, *то при* $2 \le p \le \infty$, $2 \le \theta < \infty$ *або* $2 \le p < \infty$, $\theta = \infty$ *мають місце порядкові рівності*

$$\epsilon_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp d_m(\mathbb{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp (\log_2 m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

У розвиток результатів із [199] та [127], нашою метою є встановлення точних за порядком оцінок величин $\epsilon_m(B^{0,\gamma}_{p,\theta}, \exp L^\nu)$ та $d_m(\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}, \exp L^\nu)$ для різних співвідношень між параметрами p, θ, γ і ν , в тому числі тих, що охоплені наведеними вище твердженнями. Для формулювання основного результату ***підрозділу 5.1*** введемо такі позначення.

На площині $\mathbb{R}^2$ виділимо множину

$$\Omega := \Big\{(\gamma, \nu) : \ 0 < \gamma < \infty \text{ і } 0 < \nu < \infty\Big\}$$

і визначимо такі її підмножини

$$D_1 := \Big\{(\gamma, \nu) \in \Omega : \ \ \frac{1}{2} < \gamma < 1, \ \nu < \frac{1}{1-\gamma}\Big\},$$

$$D_2 := \Big\{(\gamma, \nu) \in \Omega : \ \ \gamma \ge 1, \ 0 < \nu < \infty\Big\},$$

$$G_1 := \Big\{(\gamma, \nu) \in \Omega : \ \ \nu \le 2, \ \gamma > \frac{1}{2}\Big\},$$

$$G_2 := \Big\{(\gamma, \nu) \in \Omega : \ \ \nu \ge 2, \ \gamma > 1 - \frac{1}{\nu}\Big\}.$$

Теорема 5.1.1. *Нехай* $(\gamma, \nu) \in D_1 \cup D_2$ *і* $\Lambda_n(q, \theta, \gamma, \nu)$ *позначає будь-яку із величин* $\epsilon_n(\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$ *чи* $d_n(\mathrm{dyad}\, \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$. *Тоді*
a) якщо $(\gamma, \nu) \in G_1$ *і* $2 \le q \le \infty$, $\theta = \infty$, *то*

$$\Lambda_n(q, \theta, \gamma, \nu) \asymp (\ln n)^{\frac{1}{2}-\gamma};$$

b) якщо $(\gamma, \nu) \in G_2$ *і* $2 \le q \le \infty$, $\theta = \infty$, *то*

$$\Lambda_n(q, \theta, \gamma, \nu) \asymp (\ln n)^{1-\frac{1}{\nu}-\gamma};$$

c) якщо $(\gamma, \nu) \in \Omega$ *і* $q = \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\gamma > 1 - \frac{1}{\theta}$, *то*

$$\Lambda_n(q, \theta, \gamma, \nu) \asymp (\ln n)^{1-\frac{1}{\theta}-\gamma};$$

d) якщо $(\gamma, \nu) \in \Omega$ *і* $2 \le q < \infty$, $2 \le \theta < \infty$, $\gamma > \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}$, *то*

$$\Lambda_n(q, \theta, \gamma, \nu) \asymp (\ln n)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}-\gamma};$$

Зазначимо, що один із етапів доведення теореми 5.1.1 потребує встановлення ряду допоміжних тверджень, які оформлені у вигляді лем і зібрані до окремого пункту 5.1.3.

У ***підрозділі 5.2*** знайдені точні за порядком оцінки наближення класів згорток сумовних функцій з багатовимірним ядром Пуассона за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у многогранних областях.

Нехай $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d \big/ (2\pi\mathbb{Z})^d$ — $d-$вимірний тор і $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$ — простір вимірних $2\pi-$періодичних за кожним аргументом функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при } 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})| \quad \text{при } p = \infty.$$

Визначимо оператор I_K: $L_1(\mathbb{T}^d) \to L_1(\mathbb{T}^d)$ за допомогою рівності

$$I_K \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi * K = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(\boldsymbol{y}) K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y},$$

тобто I_K — оператор згортки з ядром $K \in L_1(\mathbb{T}^d)$, визначений на множині $L_1(\mathbb{T}^d)$. Нехай

$$W(K) = \{f : \ f(\boldsymbol{x}) = I_K \varphi(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d, \ \|\varphi\|_p \le 1\}. \tag{1.8}$$

Покладемо

(i) $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\beta}} =: W(K)$, якщо

$$K(\boldsymbol{t}) =: B_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}; \boldsymbol{\beta}) = 2^d \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_j} \cos(k_j t_j - \frac{\beta_j \pi}{2})$$

— багатовимірне ядро Бернуллі;

(ii) $A^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}} =: W(K)$, якщо

$$K(\boldsymbol{t}) =: P^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{t}) = 2^d \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} e^{-\alpha_j k_j^{r_j}} \cos(k_j t_j - \frac{\beta_j \pi}{2}),$$

$\alpha_j > 0, \ r_j > 0, \ \beta_j \in \mathbb{R}$.

У випадку коли $r_j = 1$ при всіх $j = \overline{1,d}$ і $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_d =: \alpha > 0$, покладаючи $e^{-\alpha} = \varrho$ ($0 < \varrho < 1$), клас $A^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ позначаємо через $A^{\varrho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ і, якщо ще $\beta_j = 0$, $j = \overline{1,d}$ — то через A^{ϱ}_{p}. Саме класи A^{ϱ}_{p} фігурують в твердженнях цього підрозділу, хоча як можна відслідкувати по доведеннях цих тверджень, одержані результати залишаються справедливими і для класів $A^{\varrho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ при будь-яких значеннях $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$. Відповідне класам A^{ϱ}_p ядро K у визначенні (1.8)

$$P(\varrho;\boldsymbol{t}) := 2^d \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} \varrho^{k_j} \cos k_j t_j$$

називається *багатовимірним (або кратним) ядром Пуассона.*

Зауважимо, що при $1 \le p \le \infty$ функції f із множини A^{ϱ}_p є неперервними на $\mathbb{T}^d$, а також підпорядковані умові $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\boldsymbol{x}) dx_j = 0,\ \ j = \overline{1,d}.$

Для довільної обмеженої множини $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(\Lambda)$ позначимо простір тригонометричних поліномів вигляду

$$t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C},$$

$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) := k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$ і покладемо

$$E_\Lambda(F)_q := \sup_{f\in F} \inf_{t\in T(\Lambda)} \|f-t\|_q, \quad F \subset L_q(\mathbb{T}^d).$$

Величину $E_\Lambda(F)_q$ *називаємо найкращим наближенням класу* F *в просторі* $L_q(\mathbb{T}^d)$ *за допомогою тригонометричних поліномів із* $T(\Lambda)$, *або — відхиленням класу* F *від простору* $T(\Lambda)$.

Для функції $h \in L_1(\mathbb{T}^d)$ через $S[h]$ позначимо її ряд Фур'є за тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$

$$S[h](\boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{h}_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad \widehat{h}_{\boldsymbol{k}} = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} h(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$$

і нехай

$$S_\Lambda(h;\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Lambda} \widehat{h}_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$$

— частинна сума Фур'є функції h, породжена гармоніками $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\Lambda}$. Таку суму називаємо Λ *– сумою Фур'є.*

Покладемо

$$\mathscr{E}_\Lambda(F)_q := \sup_{f\in F} \|f(\cdot) - S_\Lambda(f;\cdot)\|_q, \quad F \subset L_q(\mathbb{T}^d).$$

Величина $\mathscr{E}_\Lambda(F)_q$ *— це точна верхня грань на множині* F *відхилень в просторі* $L_q(\mathbb{T}^d)$ *елементів із* F *від* Λ *– сум Фур'є.*

У ***підрозділі 5.2*** знайдені точні за порядком по параметру n оцінки величин $\mathscr{E}_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q$ і $E_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q$, $1 \le p, q \le \infty$, коли $\Lambda = \square(n,d)$, де

$$\square(n,d) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d \ : \ \max_{1 \le j \le d} |k_j| \le n\},$$

а також, коли $\Lambda = \triangle(l,d)$, де

$$\triangle(l,d) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d \ : \ |\boldsymbol{k}|_1 := \sum_{j=1}^d |k_j| \le l\},$$

Справедливі такі твердження.

Теорема 5.2.1. *Для будь-яких* $d \in \mathbb{N}$ *при* $1 \le p, q \le \infty$

$$E_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \mathscr{E}_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \varrho^n.$$

Теорема 5.2.2. *Для будь-яких* $d \in \mathbb{N}$ *при* $1 < q \le p < \infty$

$$E_{\triangle(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \mathscr{E}_{\triangle(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \varrho^n.$$

У підсумку, можна констатувати, що для деяких співвідношень між параметрами p і q (а саме, при $1 < q \le p < \infty$) оцінки наближення класу A_p^ϱ в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$ поліномами із $T(\triangle(n,d))$ не гірші ніж оцінки наближення поліномами із $T(\square(n,d))$, незважаючи на те, що поза як

$$\dim T(\triangle(n,d)) = |\triangle(n,d)| = 2^d C_n^d,$$

$$\dim T(\square(n,d)) = |\square(n,d)| = 2^d (n+1)^d,$$

то $\dim T(\triangle(n,d)) < \dim T(\square(n,d))$ при $d \ge 2$.

Простір поліномів $T(\triangle(n,d))$, $d \ge 2$, на відміну від простору $T(\square(n,d))$, для ряду випадків (співвідношень між параметрами p та q в означенні класу A_p^ϱ та простору $L_q(\mathbb{T}^d)$) є оптимальним також і в тому розумінні, що забезпечує найкращі за порядком оцінки для колмогоровських поперечників $d_M(A_p^\varrho, L_q(\mathbb{T}^d))$ заданої розмірності M , тобто за математичною термінологією такий простір є екстремальним в задачі про значення колмогоровських поперечників певних класів функцій. Цей факт, хоча явно і не відзначений, можна відслідкувати по роботах [132, с. 239–240], [149], [171].

Зазначимо, що з цієї точки зору, найкращим підпростором для наближення функцій із класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$ є множина тригонометричних поліномів $T(\Lambda)$ зі спектром Λ у так званих "гіперболічних хрестах" $\Gamma(N,\boldsymbol{\gamma})$ (див., наприклад, [135]).

Саме в конструкції наближаючих агрегатів (поліномів) і, як наслідок, в методах одержання необхідних оцінок полягає принципова відмінність в наближенні класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ та $A^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$.

У ***підрозділі 5.3*** встановлена слабка асимптотика $M-$поперечників за Колмогоровим класів $A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1\le q\le\infty$.

Отже, в ролі апроксимуючої множини виступає множина функцій

$$A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}} = \{f:\ f(\boldsymbol{x})=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(\boldsymbol{y})P(\rho;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y},\ \ \varphi\in L_p(\mathbb{T}^d),\ \|\varphi\|_p\le 1\},$$

де для $0<\rho<1$ і $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_d)\in\mathbb{R}^d$

$$P(\rho;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{t}) := 2^d\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d}\prod_{j=1}^{d}\rho^{k_j}\cos(k_jt_j-\frac{\beta_j\pi}{2}).$$

Ще раз наголосимо: класи $A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ можна розглядати як елементи спектру означених вище множин $A^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$.

Справедливе таке твердження.

Теорема 5.3.1. *Нехай* $d\in\mathbb{N}$ *і* $2\le q\le p<\infty$. *Тоді*

$$d_M(A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}};L_q(\mathbb{T}^d)) \asymp \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}},\quad d!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot d.$$

Зазначимо, що у випадку $d=1$ в [48] знайдені точні за порядком значення поперечників $d_M(A^{r,\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}};L_q(\mathbb{T}^d))$ при $1\le p,q\le\infty$ і $r\ge 1$. Оцінки колмогоровських поперечників множин $A^{r,\alpha}_{p,\boldsymbol{\beta}}$, $0<r<1$ (у випадку $d=1$ це клас нескінченно диференційовних функцій), отримані для деяких, однак не для всіх допустимих співвідношень між параметрами p та q, $1\le p\le\infty$, $1\le q\le\infty$ (див. [136, 137], а також [49] — оцінки знизу і [48,117] — оцінки зверху).

У ***підрозділі 5.4*** розв'язана задача, що стосується слабкої асимптотики одного типу нелінійних поперечників класів функцій $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$, $d\ge 2$, які є, так званими, $r-$ми інтегралами функцій сумовних на $\mathbb{S}^{d-1}$.

Нехай $\mathbb{R}^d$ — евклідів простір точок $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$; $\mathbb{S}^{d-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \cdots + x_d^2 = 1\}$ одинична сфера в $\mathbb{R}^d$ з центром у початку координат; $L_p = L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, $1 \le p < \infty$ — простір функцій f, визначених на $\mathbb{S}^{d-1}$, зі скінченою нормою

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\boldsymbol{x})|^p d\sigma(\boldsymbol{x}) \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $d\sigma$ — елемент площі на $\mathbb{S}^{d-1}$ (поверхнева міра Лебега), Ω — площа поверхні сфери $\mathbb{S}^{d-1}$; $L_\infty = L_\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ ототожнюється з $C = C(\mathbb{S}^{d-1})$ — простором неперервних на $\mathbb{S}^{d-1}$ функцій f з нормою

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Далі, нехай $L([-1,1])$ — простір вимірних і сумовних на відрізку $[-1,1]$ комплекснозначних функцій. Визначимо операцію згортки функцій $f \in L_1(\mathbb{S}^{d-1})$ та $g \in L([-1,1])$:

$$[f * g](\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\boldsymbol{y}) g(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle) d\sigma(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Тут $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$ — скалярний добуток векторів $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$.

За допомогою операції згортки означимо основні об'єкти, що задіяні у даному підрозділі, — класи функцій, визначених на $\mathbb{S}^{d-1}$.

Позначимо через $L_p([-1,1], w_\lambda)$, $1 \le p < \infty$, — простір функцій, визначених на відрізку $[-1,1]$ і сумовних у степені p з вагою $w_\lambda(t) = (1-t^2)^{\lambda - 1/2}$, $\lambda > 0$ і вважаємо, що $L_\infty([-1;1], w_\lambda)$ — простір обмежених на $[-1,1]$ функцій.

Нехай $P_k^\lambda(t)$, $-1 \le t \le 1$ — *многочлени Гегенбауера*, або *ультрасферичні многочлени.* Зазначимо, що $P_k^\lambda(t)$ є алгебраїчними поліномами степеня k (індексу $\lambda > 0$) і множина $\{P_k^\lambda(t)\}_{k=0}^\infty$ складає повну ортогональну систему в просторі $L_2([-1,1], w_\lambda)$ (точніше, $\{P_k^\lambda(t)\}_{k=0}^\infty$ — результат ортогоналізації системи $\{1, t, t^2, \ldots\}$ у просторі $L_2([-1,1], w_\lambda)$.

Кожній функції $g \in L_p([-1,1], w_\lambda)$ можна поставити у відповідність її розклад в ряд за многочленами Гегенбауера. Якщо $r > 0$, то існує функція g_r неперервна на $[-1,1)$ і $g_r \in L_1([-1,1]; w_\lambda)$ така, що

$$g_r(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} [k(k+d-2)]^{-r/2} \frac{k+\lambda}{\lambda} P_k^\lambda(t), \quad \lambda = \frac{d-2}{2}.$$

До того ж, $g_r \in L_{p'}([-1,1], w_\lambda)$, якщо $r > \frac{d-1}{p}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ і g_r неперервна на $[-1,1]$, якщо $r > d-1$.

Означимо при $1 \le p \le \infty$ і $r > 0$ класи функцій, визначених на $\mathbb{S}^{d-1}$:

$$W_p^r(\mathbb{S}^{d-1}) := \{f : \ f(\boldsymbol{x}) = [\varphi * g_r](\boldsymbol{x}), \ \ \|\varphi\|_p \le 1, \, \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}\}.$$

Функція $f(\boldsymbol{x}) = [\varphi * g_r](\boldsymbol{x})$ називається $r-$інтегралом функції φ і позначається $I_r\varphi(\boldsymbol{x})$. Зауважимо, що $W_p^r(\mathbb{S}^{d-1}) \subset L_q(\mathbb{S}^{d-1})$ при $1 \le p, \, q \le \infty$, $r > (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$. Також зазначимо, що можна дати опис множини $W_p^r(\mathbb{S}^{d-1})$ опосередковано через операцію "узагальненого" (дробового) диференціювання функцій $g \in L_1(\mathbb{S}^{d-1})$, залучивши до цього оператор оператор Лапласа–Бельтрамі Δ_0 (див. підрозділ 5.4). В подальшому замість $W_p^r(\mathbb{S}^{d-1})$ іноді пишемо W_p^r.

Центральною апроксимаційною характеристикою, що досліджується у ***підрозділі 5.4*** є *нелінійний* n *–поперечник* $\overline{d}_n(F; X)$ множини F у банаховому просторі X з нормою $\| \cdot \|_X$:

$$\overline{d}_n(F; X) = \inf_{a, \mathcal{M}_n} \sup_{f \in F} \|f - M_n(a(f))\|_X,$$

де $a : F \to \mathbb{R}^n$ — довільне неперервне відображення, що діє із F в $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{M}_n$ — сукупність всіх неперервних відображень $M_n : \mathbb{R}^n \to X$.

Така величина означена у 2000-му році Р. А. де Вором, Р. Говардом та Ч. Мічеллі (R. A. De Vore, R. Howard, Ch. Micchelli) [167], а в [172, 173] викладена загальна схема означення цього та інших типових нелінійних поперечників, встановлені оцінки таких поперечників для класів гладких функцій, визначених на $d-$вимірному кубі простору $\mathbb{R}^d$.

Головний результат ***підрозділу 5.4*** міститься в такому твердженні.

Теорема 5.4.1. *Нехай* $r > 0$, $1 \le q \le p \le \infty$, *або* $r > (d-1)^2 + (d-1)/(1/p - 1/q)$, $1 \le p < q \le \infty$. *Тоді*

$$\overline{d}_n(W_p^r; L_q) \asymp n^{-r/(d-1)}.$$

У ***підрозділі 5.5*** знайдені двосторонні оцінки відхилень сум Фур'є в просторах $L_p(0, 2\pi)$ при $p = \infty$ від класів нескінченно–диференційовних функцій. Ці оцінки доповнюють раніше відомі для інших значень параметра p, $1 \le p \le \infty$.

Нехай $L_p(0, 2\pi)$, $1 \le p \le \infty$ — простір вимірних $2\pi-$періодичних на дійсній осі функцій φ зі скінченною нормою

$$\|\varphi\|_p = \left((2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при } 1 \le p < \infty,$$

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \quad \text{при } p=\infty.$$

Означимо такий функціональний клас (див. [114]):

$$L^\psi_{\boldsymbol{\beta},p} = \{f : f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t) D_{\psi,\boldsymbol{\beta}}(x-t)dt, \quad \varphi{\in}L_p(0,2\pi), \quad \|\varphi\|_p{\le}1, \quad \varphi\perp 1\},$$

де $D_{\psi,\boldsymbol{\beta}}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt-\frac{\boldsymbol{\beta}\pi}{2})$, а $\{\psi(k),\ k\in\mathbb{N}\}$ — довільна послідовність додатних дійсних чисел, $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}$. Зрозуміло, що $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$, якщо $f\in L^\psi_{\boldsymbol{\beta},p}$.

Позначимо через I_0 множину додатних спадних до нуля на $[1,\infty)$ функцій і покладемо

$$\mathfrak{M}''_\infty := \Big\{\psi\in I_0 : (\exists\,\alpha>1\ \exists\, t_0\ge 1\ \forall t\ge t_0 : \eta(t)-t\ge\alpha),\ t/(\eta(t)-t)\uparrow\infty\Big\},$$

де $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, ψ^{-1} — функція обернена до ψ.

Якщо $\psi\in\mathfrak{M}''_\infty$, то множина $L^\psi_{\boldsymbol{\beta},p}$ складається із функцій нескінченно-диференційовних всюди на $\mathbb{R}$ за винятком, можливо, множини точок міри нуль (див. [114, Розділ III, §5]).

Для множини $W\subset L_p(0,2\pi)$ покладемо

$$\mathcal{E}_n(W)_q := \sup_{\varphi\in W} \|\rho_n(\varphi;\cdot)\|_q,$$

де $\rho_n(\varphi;t) := \varphi(t) - S_{n-1}(\varphi,t)$, $t\in\mathbb{R}$; $S_{n-1}(\varphi,t) = \sum\limits_{k=-n+1}^{n-1} \widehat{\varphi}_k e^{ikt}$ — частинна сума порядку $2n-1$ ряду Фур'є функції φ, а $\widehat{\varphi}_k$ — її коефіцієнти Фур'є.

Основний результат ***підрозділу 5.5***.

Теорема 5.5.1. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}''_\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$ *і* $1\le p\le\infty$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_\infty \asymp \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}$$

Асимптотичні оцінки величин $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_q$ для значень параметрів p та q, відмінних від відображених в теоремі 5.5.1, можна знайти в [114].

Сформулюємо наслідок з теореми 5.5.1 у випадку, коли $\psi(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t^r}$, $\alpha>0$, $0<r<1$ (тоді $\eta(n)-n\asymp n^{1-r}$). Покладемо $L^{\alpha,r}_{\beta,p} := L^\psi_{\beta,p}$.

Наслідок 5.5.1. *Нехай* $1<p<\infty$, $\alpha>0$, $0<r<1$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n(L^{\alpha,r}_{\beta,p})_\infty \asymp \mathrm{e}^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}}$$

Розділ 2

АПРОКСИМАЦІЯ У ПРОСТОРАХ $L_q(\mathbb{I}^d)$

Запроваджено базисну систему Хаара H^d *функцій, що визначені на кубі* $\mathbb{I}^d := [0,1]^d$ *евклідового простору* $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. *Вивчені структурні властивості цієї системи та її можливості щодо лінійної та нелінійної апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій із просторів Лебега* $L_q(\mathbb{I}^d)$. *Зокрема: а) подано опис ізотропних просторів Бєсова та просторів Гельдера в термінах умов на коефіцієнти Фур'є–Хаара елементів цих просторів; б) описані гладкісні властивості функцій, визначених на* $\mathbb{I}^d$, *в припущеннях певного ступеня їх наближення поліномами, побудованими за системою* H^d; *в) встановлені точні за порядком оцінки верхніх меж найкращих* m*–членних наближень за базисом* H^d *у просторах* $L_q(\mathbb{I}^d)$ *для функцій, які належать одиничним кулям просторів Бєсова та Гельдера. Вказано практично здійснений алгоритм побудови екстремальних (в сенсі порядкових оцінок наближень) нелінійних* m*–членних агрегатів.*

Встановлені точні за порядком оцінки величин n*–членних проективних наближень за кратною системою Фабера–Шаудера (базисом в* $C(\mathbb{I}^d)$ *) для функцій, що належать класам Бєсова.*

2.1 Кратний базис Хаара і його властивості

2.1.1 Основні означення та позначення

Тут зібрані найбільш часто вживані в даному розділі означення та позначення. Інші — запроваджуються по мірі необхідності їх використання.

Загальні позначення. У викладі матеріалу використовуються стандартні позначення $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ відповідно для множин натуральних, дійсних, невід'ємних дійсних, цілих, цілих невід'ємних чисел.

Через $A^d = \prod\limits_{i=1}^{d} A$, $d \in \mathbb{N}$ позначається декартів добуток d множин A, де A — одна із множин $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, або відрізок $[a,b] \subset \mathbb{R}$, а через $\bigotimes\limits_{i=1}^{d} \mathfrak{M}(i)$ —

тензорний добуток деяких множин $\mathfrak{M}(i)$, $i=\overline{1,d}$, зокрема, — функціональних; $\sharp A$ позначає кількість точок у скінченій множині $A\subset\mathbb{Z}^d$, а $\mathrm{card}A$ — кількість елементів деякої скінченої множини A; $|A|$, або vol A — об'єм (міра Лебега) множини $A\subset\mathbb{R}^d$; $\mathrm{supp}\, f$ позначає носій функції f; $\chi_B(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ — характеристична функція множини $B\subset\mathbb{R}^d$.

Для виразів a та b, що визначені деякою сукупністю параметрів, запис $a\asymp b$ означає, що існують такі додатні величини c_1 та c_2, які *не залежать від одного суттєвого параметра*, що $c_1 b\le a\le c_2 b$. Якщо тільки $a\le c_2 b$ $(c_1 b\le a)$, то пишемо $a\ll b$ $(a\gg b)$. У більшості випадків у відношеннях $a\asymp b$ суттєвим є один із числових параметрів n,k,N тощо. В деяких ситуаціях, з метою виключення непорозумінь, параметр від якого не залежать величини c_1 та c_2 вказується явно, наприклад, $a\overset{f}{\asymp}b$.

Через $C(p)$, $C_1(d,p)$ тощо позначаються величини залежні, можливо, лише від вказаних у дужках параметрів, і додатні при всіх допустимих значеннях цих параметрів, а через C,C_1,C_2 тощо — абсолютні додатні сталі, необов'язково одинакові в різних місцях тексту.

Нарешті, однією і тією ж літерою в різних шрифтах позначаються різноманітні системи функцій Хаара:

- $\mathbb{H}$ — система функцій Хаара однієї змінної;
- H — базис Хаара в $L_p(\mathbb{I})$, $1\le p<\infty$ (упорядкована послідовність функцій системи $\mathbb{H}$);
- $\mathcal{H}^d$ — тензорна система Хаара функцій з d змінними, $d\in\mathbb{N}$;
- H_0^d — базисна система Хаара з "інтервальною" індексацією функцій з d змінними;
- $\mathbb{H}_0^d$ — базисна система Хаара з векторною індексацією функцій з d змінними;
- H^d — базис Хаара в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1\le p<\infty$, $d\in\mathbb{N}$ (упорядкована послідовність функцій системи $\mathbb{H}_0^d$).

Функціональні простори та гладкісні характеристики функцій. Через $L_q(\Omega)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, позначимо простір функцій $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}$, вимірних на вимірній множині $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, зі скінченною нормою

$$\|\varphi\|_{L_q(\Omega)}=\left(\int\limits_\Omega|\varphi(\boldsymbol{x})|^q d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{q}},\quad 1\leqslant q<\infty,$$

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\Omega} |\varphi(\boldsymbol{x})| \,.$$

У випадку $\Omega = \mathbb{I}^d$ іноді пишемо L_q замість $L_q(\mathbb{I}^d)$ і $\|\cdot\|_q$ замість $\|\cdot\|_{L_q(\mathbb{I}^d)}$ при $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Нехай $1 \le p < \infty$. Означимо $p-$інтегральний модуль неперервності функції $\varphi \in L_p$:

$$\omega(\varphi, t)_p := \sup_{0\le\tau_i\le t<1} \left(\int\limits_{I^d_\tau} |\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\tau}) - \varphi(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{R}^d_+$, $I^d_{\boldsymbol{\tau}} := \prod\limits_{i=1}^{d} [0, 1-\tau_i]$. Також, покладемо

$$\omega(\varphi, t)_\infty := \sup_{0\le\tau_i\le t<1} \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\tau}}} |\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\tau}) - \varphi(\boldsymbol{x})|$$

для $\varphi \in L_\infty$.

У певних ситуаціях виникає потреба у використанні іншого $p-$інтегрального модуля неперервності, який означається у такий спосіб. Продовжимо функцію $\varphi \in L_p$ задану на $[0,1)^d$, на весь простір $\mathbb{R}^d$ періодично за кожною змінною. Нову $1-$періодичну функцію позначимо через φ^0 і покладемо

$$\omega^*(\varphi, t)_p := \sup_{\substack{0\leqslant\tau_i<t\leqslant 1\\ i=\overline{1,d}}} \|\Delta_{\boldsymbol{\tau}}\varphi^0\|_p \,,$$

де $\Delta_{\boldsymbol{\tau}}(\varphi^0, \boldsymbol{x}) = \varphi^0(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\tau}) - \varphi^0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$.

Зрозуміло, що $\omega(\varphi, t)_p \leqslant \omega^*(\varphi, t)_p$, причому, як показано П. Л. Ульяновим, навіть у випадку $d = 1$ ці модулі неперервності можуть відрізнятися за порядком при $t \to +0$.

2.1.2 Історичні відомості та задачі

Як зазначено у першому розділі, в 1909 р. А. Хааром [180] була побудована ортонормована в просторі $L_2([0,1])$, повна в просторі $L_1([0,1])$ система функцій $(h_n(x))_{n=0}^\infty$, $x \in [0,1]$, ряди Фур'є за якою для неперервних функцій збігаються до них рівномірно на $[0,1]$. Така система має досить просту структуру і складається із кусково-сталих функцій на інтервалах двійкового розбиття відрізка $[0,1]$.

У 1928 р. Й. Шаудер [160] показав, що система $\mathrm{H} = (h_n)_{n=0}^\infty$ є базисом в просторах Лебега $L_q([0,1])$, $1 \le q < \infty$. Хоча, очевидно, система H не може бути базисом в просторі $C([0,1])$ неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій, — ще в 1910 г. Г. Фабер показав, що будь-яка неперервна на $[0,1]$ функція однозначно розкладається в рівномірно збіжний до неї ряд за системою функцій $\{\psi_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, де

$$\psi_0(x) \equiv 1, \quad \psi_n(x) = \int\limits_0^x \chi_n(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le x \le 1\,.$$

В 1927 р. Й. Шаудер [159] довів, що аналогічне твердження справедливе і щодо системи функцій $\{\widetilde{\psi}_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, які відрізняються від функцій системи $\{\psi_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ лише сталими множниками; система $\{\widetilde{\psi}_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ є базисом в просторі $C[0,1]$.

Системному вивченню рядів по системі Хаара H присвячена робота П. Л. Ульянова [146], в якій, зокрема, досліджені питання збіжності рядів Фур'є (по системі H) функцій з деяких класів, а також, — встановлені оцінки для коефіцієнтів Фур'є–Хаара для елементів із просторів вимірних на $[0,1]$ функцій.

В 1972 р. опублікована стаття Б. І. Голубова [24], в якій викладені фундаментальні результати, що характеризують апроксимаційні властивості системи H щодо функцій із просторів $L_q([0,1])$, $1 \le q < \infty$ та $C([0,1])$. Основний вміст цих результатів складають прямі та обернені теореми.

У 2015 р. С. Б. Вакарчук та О. М. Щитов [19] встановили оцінки наближень індивідуальних функцій $f \in L^1_p([0,1])$ за допомогою поліномів по системі H в термінах норм $\|f^{(1)}\|_p$ і $\|f^{(1)} - \overline{S}^{(1)}_n(f)\|_p$. Дослідженням, що стосуються оцінок наближення відомих класів W^1H_ω та C^1 — неперервних на $[0,1]$ функцій, за допомогою частинних сум їх рядів по системі Фабера–Шаудера у метриці простору $\varphi(L)$ (зокрема, за нормою $\|\cdot\|_p$ простору $L_p([0,1])$) присвячені роботи [17, 18] цих же авторів.

2.1.3 Означення функціональних систем H^d_0, $\mathbb{H}^d_0$, H^d та $\mathcal{H}^d$

У першому розділі визначені функціональні системи H^d_0, $\mathbb{H}^d_0$ та H^d — кратні базисні системи Хаара функцій, заданих на одиничному кубі $\mathbb{I}^d$, $d \ge 2$.

Подамо більш повні означення цих систем. Означимо спочатку кратну базисну систему Хаара H^d_0 функцій, заданих на одиничному кубі $\mathbb{I}^d$, $d \ge 2$. Позначимо через $Q_j := \bigotimes_{i=1}^d D_j$, $j = 1, 2, \ldots$ множину кубів I двійкового розбиття куба $\mathbb{I}^d$ об'ємом $|I| = 2^{(-j+1)d}$, тобто

$$Q_j = \left\{ I^{\boldsymbol{l}}_j = \prod_{i=1}^d I^{l_i}_j : \ \boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_d), \ 0 \leqslant l_i < 2^{j-1}, \ i = \overline{1,d} \right\},$$

а через $Q := \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ — множину всіх кубів двійкового розбиття $\mathbb{I}^d$. Покладемо

$$\mathrm{H}_0^d := \{\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}\} \cup \{\mathrm{H}_I\}_{I\in Q},$$

де функція

$$\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}(\boldsymbol{x}) = 1, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d,$$

а для $j \in \mathbb{N}$ та $I \in Q_j$ (тобто $I = \prod_{i=1}^d I_j^{s_i}$)

$$\mathrm{H}_I(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i\in E} \mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i) \times \prod_{i\in \mathbb{T}\setminus E} |\mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i)|,$$

де E — довільна непорожня підмножина множини $\mathbb{T} := \{1, 2, \ldots, d\}$, в тому числі, допускається $E = \mathbb{T}$ і в цьому випадку множник $\prod_{i\in\mathbb{T}\setminus E}$ замінюється одиницею.

Зауважимо, що сукупністю всіх підмножин E із заданим числом $\operatorname{card} E \neq d$ і множиною $E = \mathbb{T}$ за допомогою останньої формули визначається $2^d - 1$ функцій з носіями на фіксованому кубі $I \in Q_j$, а отже на кожному кубі $I_j^{\boldsymbol{l}} = \prod_{i=1}^d I_j^{l_i}$, $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_d)$, $0 \leqslant l_j < 2^{j-1}$, $i = \overline{1, d}$.

Тепер подамо систему H_0^d, $d \geqslant 2$ іншим способом, виходячи із одновимірного базису Хаара H і використовуючи при цьому векторну нумерацію функцій, що належать до цієї системи. З цією метою розіб'ємо множину $\mathbb{Z}_+^d$ на неперетинні підмножини $Z_{0,d} := Y_{0,d}$ і $Z_{j,d} := Y_{j,d} \setminus Y_{j-1,d}$, $j = 1, 2, \ldots$, де

$$Y_{0,d} = \{\overline{0}\} = \{(0, 0, \ldots, 0)\} \subset \mathbb{Z}_+^d,$$

$$Y_{j,d} = \left\{\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d : \ 0 \leqslant k_i < 2^j, i = \overline{1, d}\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Зрозуміло, що $\mathbb{Z}_+^d = \bigcup_{j=0}^{\infty} Z_{j,d}$. Зауважимо також, що $\sharp Y_{j,d} = 2^{jd}$ і $\sharp Z_{j,d} \asymp 2^{jd}$.

Отже, означимо систему функцій з d змінними

$$\mathbb{H}_0^d = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}_+^d} := \bigcup_{j=0}^{\infty} \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_{j,d}},$$

поклавши

$$h_{\overline{0}} = \bigotimes_{i=1}^{d} h_0,$$

а для $\overline{k} \in Z_{j,d}$, $j = 1, 2, \ldots$

$$h_{\bar{k}} = \bigotimes_{i\in E} h_{k_i} \otimes \bigotimes_{i\in\mathbb{T}\setminus E} |h_{2^{j-1}+k_i}|,$$

де $E = \{i \in \mathbb{T} : 2^{j-1} \leqslant k_i < 2^j\}$ причому, якщо $E = \mathbb{T}$, то покладаємо $h_{\bar{k}} = \bigotimes_{i\in\mathbb{T}} h_{k_i}$.

Зрозуміло, що $\mathbb{H}_0^d = \mathrm{H}_0^d$, тобто множини $\{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ і H_0^d тотожні. Більше того, між індексацією двійковими кубами із Q_j функцій множини H_0^d і індексацією векторами із $Z_{j,d}$ функцій множини $\mathbb{H}_0^d$ встановлюється взаємно однозначна відповідність так, що $\{h_I\}_{I\in Q_j} = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_{j,d}}$, $j = 1, 2, \ldots$. Як було зазначено, для кожного $j = 1, 2, \ldots$ і $\boldsymbol{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $0 \leq l_i < 2^{j-1}$, $i = \overline{1, d}$, на двійковому кубі $I_j^{\boldsymbol{l}} = \prod\limits_{i=1}^{d} I_j^{l_i} \in Q_j$ зосереджені носії рівно $2^d - 1$ функцій із множини $\{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_+^d}$ (відповідну множину таких функцій позначимо через $\mathrm{H}(j; \boldsymbol{l})$).

Упорядкуємо вектори $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ множини $\mathbb{Z}_+^d$, розмістивши їх у вигляді послідовності $\overline{k}^{(1)}, \overline{k}^{(2)}, \ldots, \overline{k}^{(m)}, \ldots$ так, що $\overline{k}^{(1)} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d$ і для $i = 2, 3, \ldots$

$$\max\left\{\overline{k}_j^{(i)} : \ j = \overline{1, d}\right\} \leqslant \max\left\{\overline{k}_j^{(i+1)} : \ j = \overline{1, d}\right\}.$$

Відповідну такому упорядкуванню послідовність $\left(h_{\bar{k}^{(i)}}\right)_{i=1}^{\infty}$ функцій системи $\mathbb{H}_0^d$ позначимо через H^d. Тепер, занумерувавши функції системи H^d згідно відповідності $\overline{k}^{(i)} \to i$, записуємо $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$.

На завершення цього пункту зауважимо, що класичною кратною системою функцій Хаара є система $\mathcal{H}^d$, яка визначається як тензорний добуток базисних систем Хаара функцій з однією змінною із відповідною індексацією функцій паралелепіпедами множини $\mathbb{D}^d$ двійкового розбиття куба $\mathbb{I}^d$:

$$\mathcal{H}^d = \bigotimes_{i=1}^{d} \mathbb{H} = \{\mathrm{H}_I\}_{I\in\mathbb{D}^d}.$$

Таким чином, для заданих $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ і $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_k = 0, \ldots, 2^{j_k-1} - 1$,
$k = \overline{1, d}$, і відповідно для $I = \prod\limits_{k=1}^{d} I_{j_k}^{s_k}$ ($I_{j_k}^{s_k} \in D_{j_k}$, $k = \overline{1, d}$), покладаємо

$$\mathrm{H}_I(x_1, \ldots, x_d) := \prod_{k=1}^{d} \mathrm{H}_{I_{j_k}^{s_k}}(x_k).$$

Вивченню властивостей системи $\mathcal{H}^d$, $d \geq 2$, переважно стосовно задач нелінійної апроксимації функцій, присвячена низка нещодавніх робіт В. М. Темлякова та інших математиків, а кореневою є робота В. М. Темлякова [206].
Зазначимо, що *a priori* у випадку $d = 1$ системи $\mathcal{H}^1$ та $\mathrm{H}_0^1 := \mathbb{H}$ — тотожні.

2.1.4 Представлення часткових сум Фур'є–Хаара

В силу означення ортонормованої в $L_2(\mathbb{I}^d)$ системи $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ будь-яку функцію $f \in L_1(\mathbb{I}^d)$ можна розкласти в ряд Фур'є –Хаара

$$f(\boldsymbol{x}) \sim \sum_{\overline{k}\in\mathbb{Z}_+^d} (f, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}),$$

де $(f, h_{\overline{k}}) = \int\limits_{\mathbb{I}^d} f(\boldsymbol{x}) h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$, $\overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d$, — коефіцієнти Фур'є–Хаара функції f.

Через P_n позначимо оператор $P_n : L_1 \to V_n$ ортогонального проектування простору $L_1(\mathbb{I}^d)$ на підпростір

$$V_n := \operatorname{span}\left\{h_{\bar{k}},\ \overline{k} \in Y_{n,d}\right\} = \left\{u:\ u = \sum_{\bar{k}\in Y_{n,d}} c_{\bar{k}} h_{\bar{k}},\ c_{\bar{k}} \in \mathbb{R}\right\},$$

тобто

$$P_n f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\bar{k}\in Y_{n,d}} (f, h_{\bar{k}})\ h_{\bar{k}}(\boldsymbol{x}), \quad f \in L_1(\mathbb{I}^d)\,.$$

Функції $P_n f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d$ назвемо поліедральними сумами Фур'є–Хаара функції f.

Твердження 2.1.1. *Для будь-якої функції $f \in L_1(\mathbb{I}^d)$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ справедливе представлення*

$$P_n f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|\mathcal{I}|} \int\limits_{\mathcal{I}} f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathcal{I},$$

де $\mathcal{I} \in Q_{n+1}$, тобто $\mathcal{I}$ — двійковий куб, $\mathcal{I} \subset \mathbb{I}^d$, $\operatorname{vol} \mathcal{I} = 2^{-nd}$.

Доведення твердження 2.1.1. У випадку $d = 1$ доведення твердження можна знайти в [38, Розділ 3, §1, с. 78–80]. При $d > 1$ доведення базується на аналогічних міркуваннях. Достатньо лише зауважити, що при будь-яких $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_1(\mathbb{I}^d)$ та $I \in Q_{n+1}$ для функції

$$m_n(f; \boldsymbol{x}) := \frac{1}{|I|} \int\limits_{I} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in I,$$

$$m_n(f; \boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d \backslash I,$$

так як і у випадку $d = 1$, при $\mathcal{I} \in Q$ та $\boldsymbol{x} \in \mathcal{I}$ справедлива рівність

$$P_n f(\boldsymbol{x}) = P_n(m_n(f; \cdot))(\boldsymbol{x}) = m_n(f; \boldsymbol{x}).$$

♦

Зауваження 2.1.1. *У представленні із твердження 2.1.1 не відслідковані значення функції* $P_n f(\cdot)$ *на "сітці" двійкового розбиття куба* $\mathbb{I}^d$*, проте у встановленні необхідних нам властивостей оператора* P_n *такі значення не є суттєвими.*

2.1.5 Про одну властивість системи H_0^d

Сформулюємо і доведемо одне важливе твердження про оцінку L_p–норми елементів простору $\mathrm{W}_j := \mathrm{span}\{h_{\overline{k}};\ \overline{k} \in Z_{j,d}\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Лема 2.1.1. *Для довільної системи дійсних чисел* $\{a_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_{j,d}}$, $j = 1, 2, \ldots$, *мають місце співвідношення*

$$\Bigg\| \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Bigg\|_p \asymp 2^{-j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{2}\right)} \left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |a_{\overline{k}}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{2.1}$$

$$\| \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \|_\infty \asymp 2^{\frac{jd}{2}} \max_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |a_{\overline{k}}|. \tag{2.2}$$

Доведення леми 2.1.1. Спочатку доведемо в (2.1) нерівність зі знаком $\ll$. Зафіксувавши j, поділимо множину індексів $Z_{j,d}$ на неперетинні підмножини $Z_{j,d}(\boldsymbol{l})$, як це зроблено у пункті 2.1.3. Таким чином,

$$Z_{j,d}(\boldsymbol{l}^{(1)}) \cap Z_{j,d}(\boldsymbol{l}^{(2)}) = \varnothing \ \text{ при } \ \boldsymbol{l}^{(1)} \ne \boldsymbol{l}^{(2)}$$

і

$$Z_{j,d} = \bigcup_{\boldsymbol{l}\in Y_{j-1,d}} Z_{j,d}(\boldsymbol{l}), \ \text{ а також } \ \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_{j,d}} = \bigcup_{\boldsymbol{l}\in Y_{j-1,d}} \mathrm{H}(j;\boldsymbol{l}).$$

З іншого боку, враховуючи, що $\mathrm{card}\,\mathrm{H}(j;\boldsymbol{l}) = 2^d - 1$ для будь-якого $\boldsymbol{l} \in Y_{j-1,d}$, розіб'ємо множину $\{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_{j,d}}$ на $2^d - 1$ неперетинних підмножин $\mathcal{H}_j^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^d - 1$ таких, що кожна функція $h_{\overline{k}} \in \mathrm{H}(j;\boldsymbol{l})$, $\boldsymbol{l} \in Y_{j-1,d}$, належить рівно до однієї із множин $\mathcal{H}_j^{(i)}$ і, таким чином, $\{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_{j,d}} = \bigcup\limits_{i=1}^{2^d-1} \mathcal{H}_j^{(i)}$.

Зрозуміло, що $\mathrm{card}\ \mathcal{H}_j^{(i)} = \sharp Y_{j-1,d} = 2^{(j-1)d}$ для будь-якого $i = 1, \ldots, 2^d - 1$ і $\mathrm{supp}\ h_{\overline{k}(1)} \cap \mathrm{supp}\ h_{\overline{k}(2)} = \varnothing$, якщо $h_{\overline{k}(1)}, h_{\overline{k}(2)} \in \mathcal{H}_j^{(i)}$ (для деякого $i = 1, \ldots, 2^d - 1$) і $\overline{k}(1) \ne \overline{k}(2)$.

Позначимо через $Z_{j,d}^{(i)}$ — множину таких індексів (векторів) $\overline{k}$, що функція $h_{\overline{k}}$ належить множині $\mathcal{H}_j^{(i)}$ (тоді $\sharp Z_{j,d}^{(i)} = 2^{(j-1)d}$). Спочатку зазначимо, за допомогою безпосередніх обчислень можна показати, що при $j = 1, 2, \ldots$ та $\boldsymbol{l} \in Y_{j-1,d}$

$$\|h_{\overline{k}}\|_p = |I_j^{\boldsymbol{l}}|^{1/p-1/2} = 2^{-jd(1/p-1/2)}, \quad \overline{k} \in Z_{j,d}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{2.3}$$

Тоді, застосувавши нерівність $(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p+b^p)$, $a, b > 0$, $1 \le p < \infty$, маємо

$$\Big\| \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big\|_p^p = \Big\| \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big\|_p^p =$$

$$= \int_{\mathbb{I}^d} \Big| \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big|^p d\boldsymbol{x} \le C(p,d) \sum_{i=1}^{2^d-1} \int_{\mathbb{I}^d} \Big| \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big|^p d\boldsymbol{x} =$$

$$= C(p,d) \sum_{i=1}^{2^d-1} \Big\| \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big\|_p^p = C(p,d) \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}^{(i)}} |a_{\overline{k}}|^p \|h_{\overline{k}}\|_p^p =$$

$$= C(p,d) \sum_{i=1}^{2^d-1} 2^{-jd(1/p-1/2)p} \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}^{(i)}} |a_{\overline{k}}|^p = C(p,d) 2^{-jd(1/p-1/2)p} \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |a_{\overline{k}}|^p,$$

Звідси випливає оцінка зверху в (2.1).

Оцінка знизу у співвідношенні (2.1) у випадку $p = 2$ — тривіальний наслідок того, що система $\{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ є ортонормованою в $L_2(\mathbb{I}^d)$. Більше того, справедлива рівність

$$\Big\| \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big\|_2^2 = \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |a_{\overline{k}}|^2. \tag{2.4}$$

Доведемо оцінку знизу в (2.1) для довільного p, $1 \le p < \infty$.

Оскільки $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$, — упорядкована згідно з пунктом 2.1.3 послідовність функцій із $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_+^d}$, — є базисом в просторах $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$ (див. нижче теорему 2.1.1), то на підставі одного твердження із [26] існує таке α, $0 < \alpha < 1$, що для будь-якої сукупності дійсних чисел $\{c_k\}_{k=1}^{n+m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, має місце нерівність

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n+m} c_k h_k \Big\|_p \ge \alpha \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k h_k \Big\|_p \tag{2.5}$$

(при $p = 2$, очевидно, $\alpha = 1$).

В свою чергу, аналогічно тому, що встановлено в [24, §2, с. 261–262] у випадку $d = 1$, співвідношення (2.5) тягне нерівність

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n+m} c_k h_k \Big\|_p \ge \Big(1 + \frac{1}{\alpha}\Big)^{-1} \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k h_k \Big\|_p. \tag{2.6}$$

Справді, в силу нерівності (2.5), при $1 \le p < \infty$

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n+m} c_k h_k \Big\|_p \ge \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k h_k \Big\|_p - \Big\| \sum_{k=1}^{n} c_k h_k \Big\|_p \ge$$

$$\ge \Big\| \sum_{k=n+1}^{n+m} c_k h_k \Big\|_p - \frac{1}{\alpha} \Big\| \sum_{k=1}^{n+m} c_k h_k \Big\|_p ,$$

звідки і випливає (2.6).

Наслідком нерівностей (2.5) та (2.6) є наступне твердження: знайдеться така додатна стала γ, що

$$\Big\| \sum_{k=n}^{m} c_k h_k \Big\|_p \le \gamma \Big\| \sum_{k=l}^{M} c_k h_k \Big\|_p , \tag{2.7}$$

для будь-яких натуральних чисел n, m, l та M, пов'язаних співвідношенням $l \le n < m \le M$.

Використавши мультиіндексну (векторну) нумерацію функцій базису H^d, тобто — систему $\mathbb{H}_0^d$, на підставі (2.7) можна записати

$$\max_{1 \le i \le 2^d - 1} \Big\| \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big\|_p \le \Big\| \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big\|_p . \tag{2.8}$$

Але ж в доведенні оцінки зверху в лемі 2.1.1 показано, що при $1 \le i \le 2^d - 1$

$$\Big\| \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big\|_p = 2^{-jd(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})} \Bigg(\sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}^{(i)}} |a_{\overline{k}}|^p \Bigg)^{\frac{1}{p}} .$$

А тому, поєднавши цю рівність з нерівністю (2.8), отримаємо

$$\Big\| \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big\|_p^p \ge \frac{1}{(2^d - 1)\gamma^p} \sum_{i=1}^{2^d - 1} \Big\| \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}^{(i)}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \Big\|_p^p = C(d,p) 2^{-jd(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})p} \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |a_{\overline{k}}|^p ,$$

що є шуканою оцінкою знизу у співвідношенні (2.1).

Для завершення доведення леми 2.1.1, не вдаючись до деталізації, достатньо зауважити, що співвідношення (2.2), яке в ній знаходиться, є простим наслідком рівності (2.3). ♦

2.1.6 Властивості оператора Фур'є–Хаара P_n

Лема 2.1.2. *Для будь-якої функції* $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$ *і* $n \in \mathbb{Z}_+$, *справедливі нерівності*

$$(i) \qquad \|P_n f\|_p \le C_1(d,p)\|f\|_p,$$

$$(ii) \qquad \|f - P_n f\|_p \le C_2(d,p)\omega(f; 2^{-n})_p,$$

а для $f \in \mathrm{V}_n$

$$(iii) \qquad \omega(f;\delta)_p \le C(d,p)\Big(\min\{\delta 2^n; 1\}\Big)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p.$$

Доведення леми 2.1.2. Встановлення нерівності (ii) проводиться за схемою доведення такої нерівності у випадку $d=1$ (див. [38], теорема 2, с. 81–82 для $p=\infty$ і теорема 3, с. 82–83 для $1 \le p < \infty$) з використанням твердження 2.1.1. До детального викладу ми не вдаємося.

Нерівність (i) є простим наслідком (ii). Справді, врахувавши, що для будь-яких $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ і δ, $0 \le \delta \le 1$, очевидно, $\omega(f;\delta)_p \le 2\|f\|_p$, маємо

$$\|P_n f\|_p = \|f - (f - P_n f)\|_p \le \|f\|_p + \|f - P_n f\|_p \le$$

$$\le \|f\|_p + C_2(d,p)\omega(f;2^{-n})_p \le (1 + 2C_2(d,p))\|f\|_p = C_1(d,p)\|f\|_p.$$

Приступаючи до доведення (iii), нагадаємо означення $\omega(f;t)_p$. Якщо $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$ і $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in \mathbb{R}_+$, то

$$\omega(f;t)_p := \sup_{0 \le \lambda_i < t \le 1} \|\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(f;\cdot)\|_{L(\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}})},$$

де $\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}} = \prod\limits_{i=1}^{d}[0; 1-\lambda_i]$ і $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(f;\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}) - f(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{I}^d$.
Нерівність $\omega(f;\delta)_p \le C\|f\|_p$ зі сталою $C=2$, як було зазначено вище, виконується рівномірно по всіх δ, $0 \le \delta \le 1$ для будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ і, зокрема, для $f \in \mathrm{V}_n$. Її можна уточнити для $f \in \mathrm{V}_n$ і $0 < \delta < 2^{-n}$ при $n = 1, 2, \ldots$.

Справді, нехай $j \in \mathbb{N}$, задано δ, $0 < \delta < 2^{-j}$ і $0 \le \lambda_i < \delta$, $i = \overline{1,d}$. Розглянемо різницю $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(h_{\overline{k}};\boldsymbol{x}) = h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}) - h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x})$, $\overline{k} \in Z_{j,d}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}}$. Зауваживши, що $\mathrm{supp}\, h_{\overline{k}} \in Q_j$ при $\overline{k} \in Z_{j,d}$, а точніше, $\mathrm{supp}\, h_{\overline{k}} = I_j^{\boldsymbol{s}^*}$ для деякого $\boldsymbol{s}^* = (s_1^*, \ldots, s_d^*)$, $0 \le s_i^* < 2^{j-1}$, $i = \overline{1,d}$, і $|I_j^{\boldsymbol{s}^*}| = 2^{(-j+1)d}$, бачимо, що в силу означення функції $h_{\overline{k}}$, $\overline{k} \in Z_{j,d}$, різниця $\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(h_{\overline{k}};\boldsymbol{x})$ відмінна від нуля лише на деякій множині $\Sigma(\boldsymbol{\lambda}) \subset \mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}} \cap I_j^{\boldsymbol{s}^*}$ об'ємом

$|\Sigma(\boldsymbol{\lambda})| \le C\delta^d,\ C>0$. Тому, врахувавши, що в силу нерівності $|a\pm b|^p \le 2^{p-1}(|a|^p+|b|^p)$, $a,\ b\in\mathbb{R},\ \ 1\le p<\infty$ буде

$$|\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(h_{\overline{k}}\,;\boldsymbol{x})|^p \le 2^p|h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x})|^p, \quad \boldsymbol{x}\in\Sigma(\boldsymbol{\lambda}), \tag{2.9}$$

виводимо співвідношення

$$\|\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(h_{\overline{k}}\,;\cdot)\|^p_{L_p(\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}})} = \int_{\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}}} |h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}) - h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} =$$

$$= \int_{\Sigma(\boldsymbol{\lambda})} |h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\lambda}) - h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} < |\Sigma(\boldsymbol{\lambda})|\cdot \max_{\boldsymbol{x}\in\Sigma(\boldsymbol{\lambda})} |\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(h_{\overline{k}}\,;\boldsymbol{x})|^p \le$$

$$\le C\delta^d\cdot 2^p(2^{jd})^{\frac{p}{2}} = C(p)\delta^d\cdot 2^{jd}\cdot\left(2^{-jd(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\right)^p \le C(d,p)\delta\cdot 2^j\|h_{\overline{k}}\|_p^p.$$

Також, звернемо увагу на очевидну рівність $\|\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(h_{\overline{0}}\,;\cdot)\|_{L_p(\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}})} = 0$.

Далі, для $f\in \mathrm{V}_n$ (тобто $f(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{\overline{k}\in Y_{n,d}} c_{\overline{k}}h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_{j=0}^{n}\sum\limits_{\overline{k}\in Z_{j,d}} c_{\overline{k}}h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}),\ c_{\overline{k}}\in\mathbb{R}$) і $0<\delta<2^{-n},\ n\in\mathbb{N}$, на основі міркувань, що застосовані для доведення леми 2.1.1, врахувавши (2.9) та (2.7), отримаємо

$$\|\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(f;\cdot)\|_{L_p(\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}})} \le \sum_{j=0}^{n}\left\|\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} c_{\overline{k}}\Delta_{\boldsymbol{\lambda}}(h_{\overline{k}}\,;\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\lambda}})} \le$$

$$\le C_1(d,p)\sum_{j=1}^{n}(\delta 2^j)^{\frac{1}{p}}\cdot 2^{-jd(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}}|c_{\overline{k}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le C_2(d,p)\sum_{j=1}^{n}(\delta 2^j)^{\frac{1}{p}}\left\|\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} c_{\overline{k}}h_{\overline{k}}\right\|_p \le C_3(d,p)\sum_{j=1}^{n}(\delta 2^j)^{\frac{1}{p}}\left\|\sum_{\overline{k}\in Y_{n,d}} c_{\overline{k}}h_{\overline{k}}\right\|_p \le$$

$$\le C_4(d,p)\sum_{j=1}^{n}(\delta 2^j)^{\frac{1}{p}}\cdot\|f\|_p \le C(d,p)(\delta 2^n)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p. \tag{2.10}$$

Із означення $\omega(f;\delta)_p$, з урахуванням (2.10) приходимо до нерівності (iii).

Лема 2.1.2 доведена. ♦

Нерівності (i) и (ii) із леми 2.1.2 можуть бути розповсюджені на випадок більш загальних, ніж P_n, операторів. Для множини $\Omega\subset\mathbb{Z}^d_+$ такої, що $Y_{n,d}\subset\Omega\subset Y_{n+1,d}$, визначимо оператори $P^{\Omega}_n,\ n\in\mathbb{Z}_+$, що діють за формулою

$$P^{\Omega}_n f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\bar{k}\in\Omega}(f,h_{\bar{k}})h_{\bar{k}}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{I}^d.$$

Позначимо $S := \bigcup\limits_{\bar{k}\in\Omega\cap Z_{n+1,d}} \operatorname{supp} h_{\bar{k}}$, де, нагадаємо, $Z_{n+1,d} = Y_{n+1,d} \setminus Y_{n,d}$. Тоді

$$P_n^\Omega f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} P_{n+1} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in S, \\ P_n f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d \setminus \overline{S}. \end{cases}$$

З урахуванням відомих властивостей модуля неперервності $\omega(f,t)_p$ функції f, із (ii) при $Y_{n,d} \subset \Omega \subset Y_{n+1,d}$, $n \in \mathbb{N}$ отримаємо

$$\|f - P_n^\Omega f\|_p^p = \int_{\mathbb{I}^d} |f(\boldsymbol{x}) - P_n^\Omega f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} = \int_S |f(\boldsymbol{x}) - P_{n+1} f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} +$$

$$+ \int_{\mathbb{I}^d \setminus S} |f(\boldsymbol{x}) - P_n f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \leqslant \int_{\mathbb{I}^d} |f(\boldsymbol{x}) - P_{n+1} f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} + \int_{\mathbb{I}^d} |f(\boldsymbol{x}) - P_n f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \leqslant$$

$$\leqslant C_5(d,p) \left(\omega^p(f, 2^{-n-1})_p + \omega^p(f, 2^{-n})_p\right) \leqslant C_6(d,p) \omega^p(f, 2^{-n})_p,$$

тобто

$$\|f - P_n^\Omega f\|_p \leqslant C_7(d,p)\, \omega(f, 2^{-n})_p\,. \tag{2.11}$$

Як наслідок (2.11), отримуємо також більш загальну ніж (i) нерівність

$$\|P_n^\Omega f\|_p \leqslant C_8(d,p)\, \|f\|_p\,. \tag{2.12}$$

2.1.7 Про базисність системи $\mathbb{H}_0^d$ в просторі $L_p(\mathbb{I}^d)$

Викладені вище результати є основою у доведенні головного твердження, що стосується системи $\mathbb{H}_0^d$. У цьому твердженні використовується поняття "базису Шаудера" .

Означення 2.1.1. *Послідовність $U = (u_k)_{k=1}^\infty$ називається базисом Шаудера у банаховому просторі $\mathscr{X}$, якщо для кожного елемента $f \in \mathscr{X}$ існує єдиний розклад в $\mathscr{X}$*

$$f = \sum_{k=1}^\infty a_k(f) u_k,$$

де $a_k(f) =< f, u_k^* >$, $k \in \mathbb{N}$ — лінійні обмежені функціонали на спряженому до $\mathscr{X}$ просторі $\mathscr{X}^*$ і $< u_i, u_k^* >= \delta_{ik}$.

Отже, розглянемо систему $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in Z_+^d}$ і систему $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^\infty$ — упорядковану відповідно до пункту 2.1.3 послідовність функцій із $\mathbb{H}_0^d$.

Для множин $\mathrm{W}_j := \mathrm{span}\{h_{\overline{k}};\ \ \overline{k} \in Z_{j,d}\}$, $j = 0, 1, \ldots$ визначимо оператори $R_j : L_1(\mathbb{I}^d) \longrightarrow \mathrm{W}_j$, на базі співвідношення

$$R_j f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} (f; h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}),\ f \in L_1(\mathbb{I}^d).$$

Теорема 2.1.1. *Для будь-якої функції* $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$ *справедливий наступний Фур'є–Хаара розклад в ряд*

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j f(\boldsymbol{x}), \tag{2.13}$$

що збігається у просторі $L_p(\mathbb{I}^d)$. *Послідовність* $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$ *є базисом Шаудера в* $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$.

Доведення теореми 2.1.1. Для доведення другої частини теореми достатньо перевірити для H^d виконання критерію базисності заданої послідовності елементів банахового простору (див. [38], теорема 6, с. 19).

По-перше, ортонормована в $L_2(\mathbb{I}^d)$ система H^d, згідно з нерівністю (ii) із леми 2.1.2 (а, точніше, згідно з нерівністю (2.11)), — повна в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$. По-друге, система H^d є мінімальною в цих просторах, оскільки для неї при $d > 1$ справедливий аналог твердження 4 із [38, с. 16].

Нарешті, враховуючи, що для системи H^d виконується нерівність (2.12), згідно критерію базисності доходимо висновку, що H^d — базис в $L_p(\mathbb{I}^d)$. Як наслідок, має місце представлення (2.13) при $1 \le p < \infty$. Справедливість (2.13) при $p = \infty$ (натомість і при $1 \le p < \infty$) випливає безпосередньо із нерівності (ii) леми 2.1.2. ■

Зауваження 2.1.2. *Розклад (2.13), а також співвідношення* (i), (ii) *та* (iii) *леми 2.1.2 справедливі і у просторі* $C(\mathbb{I}^d)$ *неперервних на* $\mathbb{I}^d$ *функцій з нормою* $\|\cdot\|_\infty$, *якщо покласти* $\omega(f,\delta)_\infty = \omega(f,\delta) := \sup\limits_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_{l_2^d} \le \delta} |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})|$, $0 < \delta \le 1$.

2.2 Обернені теореми наближення і теореми вкладення

В термінах найкращих поліноміальних наближень за кратним базисом Хаара отримана конструктивна характеристика класів Гельдера H_p^α *функцій, визначених на одиничному кубі* $\mathbb{I}^d$ *простору* $\mathbb{R}^d$, *за обмеження* $0 < \alpha < \frac{1}{p} \le 1$.

На основі оцінок найкращих наближень за допомогою поліномів по базису Хаара доведені обернені теореми для функцій, визначених на одиничному кубі d *– вимірного евклідового* *простору; тобто описані гладкісні властивості функцій, які досягають певного ступеня наближення поліномами по кратній системі Хаара. Встановлені теореми вкладення в шкалі просторів Лебега, а також, — співвідношення, що пов'язують величини найкращих наближень у відповідних просторах.*

2.2.1 Конструктивна характеристика класів Гельдера

Спочатку, на додачу до останньої нерівності (iii) в лемі 2.1.2, доведемо твердження щодо оцінки зверху модуля неперервності $\omega(f;\cdot)_p$ довільної функції $f \in L_p$ через її найкращі наближення за допомогою лінійної оболонки скінченного числа фіксованих функцій базису H^d. З цією метою введемо додаткові позначення і означення, а також сформулюємо і доведемо одне просте, але важливе, допоміжне твердження.

Позначимо через $E_{V_n}(f, \mathbb{H}_0^d, L_p)$ найкраще наближення функції f елементами підпростору V_n:

$$E_{V_n}(f, \mathbb{H}_0^d, L_p) := \inf_{c_{\overline{k}} \in \mathbb{R}} \|f - \sum_{\overline{k} \in Y_{n,d}} c_{\overline{k}} h_{\overline{k}}\|_p.$$

Зауважимо, що $\dim V_n = \sharp Y_{n,d} = 2^{nd}$. В подальшому будемо використовувати скорочене позначення $E_{V_n}(f)_p$ для $E_{V_n}(f, \mathbb{H}_0^d, L_p)$.

Наступне твердження у випадку $d = 1$ доведено в [146].

Лема 2.2.1. *Для будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ при $1 \le p \le \infty$ справедливе співвідношення*

$$E_{V_n}(f)_p \asymp \|f - P_n\, f\|_p. \tag{2.14}$$

Доведення леми 2.2.1. Нерівність $\gg$ у співвідношенні (2.14)тривіальна, а для доведення нерівності $\ll$ достатньо скористатися співвідношенням (i) леми 2.1.2. Справді, позначивши через $P_n^*\, f \in V_n$ поліном найкращого наближення (за допомогою підпростору V_n) функції f в просторі $L_p(\mathbb{I}^d)$, можна записати

$$\|f - P_n\, f\|_p \le \|f - P_n(P_n^*\, f) + P_n(P_n^*\, f) - P_n\, f\|_p \le$$

$$\le \|f - P_n^*\|_p + \|P_n(P_n^*\, f) - P_n\, f\|_p \le (1 + C_1(d,p)) E_{V_n}(f)_p.$$

Зазначимо, існування полінома $P_n^*\, f$ гарантовано скінченною вимірністю підпростору V_n (див., наприклад, [45, с. 12]). ♦

Теорема 2.2.1. *Нехай $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$*

$$\omega(f, 2^{-n})_p \le C_p^{(1)}\, 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{k=0}^{n} 2^{\frac{k}{p}}\, E_{V_k}(f)_p, \tag{2.15}$$

де $C_p^{(1)} > 0$ *— величина, що залежить лише від* p.

Зауваження 2.2.1. *У випадку* $d = 1$ *нерівність (2.15), а також її наслідок (нерівність (2.18) доведені Б. І. Голубовим [24] з вказівкою найменших, у певному сенсі, значень величин* $C_p^{(1)}$ *та* $C_p^{(2)}$*. Там же, в [24], висвітлена історія встановлення нерівностей типу (2.15) і (2.18) для системи Хаара.*

Доведення теореми 2.2.1. Для $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ і $n \in \mathbb{N}$, відштовхуючись від рівності $f = f - P_n f + \sum\limits_{k=0}^{n} R_k f$, згідно з (iii) леми 2.1.2, взявши до уваги нерівність $\omega(f,\delta)_p \le 2\|f\|_p$, $0 < \delta \le 1$, маємо

$$\omega(f, 2^{-n})_p \le \omega(f - P_n f, 2^{-n})_p + \sum_{k=0}^{n} \omega(R_k f, 2^{-n})_p \le$$

$$\le 2(\|f - P_n f\|_p + 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{p}} \|R_k f\|_p). \tag{2.16}$$

Тут враховано, що $\omega(R_0 f, 2^{-n}) = 0$.

Позначимо $d_n(f)_p := \|f - P_n f\|_p$. Тоді, оскільки $R_k f = (f - P_{k-1} f) - (f - P_k f)$, $k \in \mathbb{N}$ і $\|R_k f\|_p \le d_{k-1}(f)_p + d_k(f)_p$, то можна стверджувати, що наслідком нерівності (2.16) є нерівність

$$\omega(f, 2^{-n}) \le C_p^{(0)}\, 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{k=0}^{n} 2^{\frac{k}{p}} d_k(f), \tag{2.17}$$

де $C_p^{(0)}$ – додатна величина, що залежить від p, яку, взагалі кажучи, можна обмежити зверху абсолютною сталою. Застосувавши до (2.17) лему 2.2.1, отримаємо нерівність (2.15). ■

Приведемо простий наслідок теореми 2.2.1. Позначимо через $E_n^*(f)_p$ величину найкращого наближення функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ елементами лінійної оболонки n перших функцій базису $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$:

$$E_n^*(f)_p := \inf_{c_k \in \mathbb{R}} \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k h_k\|_p.$$

Наслідок 2.2.1. *Нехай* $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$. *Тоді*

$$\omega\Big(f, \frac{1}{N}\Big)_p \le C_p^{(2)}\, N^{-\frac{1}{p}} \sum_{k=1}^{N} k^{\frac{1}{p}-1} E_{k^d}^*(f)_p, \tag{2.18}$$

де $C_p^{(2)}$ *— додатна величина, яка залежить лише від* p.

Доведення наслідку 2.2.1. Нехай натуральні числа n та N такі, що $2^n < N \leq 2^{n+1}$. Тоді із нерівності (2.15), в силу монотонності $E_{V_m}(f)_p$ і $E_l^*(f)_p$ відповідно по параметрах m і l, отримаємо

$$\omega\big(f, \frac{1}{N}\big)_p \leq \omega(f, 2^{-n})_p \leq C_p^{(1)}\, 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{m=0}^{n} 2^{\frac{m}{p}} E_{V_m}(f)_p \leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{p}} C_p^{(1)}\, 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{m=0}^{n-1} 2^{\frac{m}{p}} E_{V_m}(f)_p \leq 2^{\frac{2}{p}} C_p^{(1)}\, N^{-\frac{1}{p}} \sum_{m=0}^{n-1} 2^{\frac{m}{p}} E_{V_m}(f)_p. \tag{2.19}$$

З іншого боку,

$$\sum_{k=1}^{N} k^{\frac{1}{p}-1} E_{k^d}^*(f)_p \geq \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}} 2^{\frac{m}{p}}\, 2^{-(m+1)} E_{V_m}(f)_p \geq \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} 2^{\frac{m}{p}}\, E_{V_m}(f)_p. \tag{2.20}$$

Поєднавши (2.19) і (2.20), приходимо до нерівності (2.18) з $C_p^{(2)} = 2^{\frac{2}{p}+1}\, C_p^{(1)}$. ♦

Зауваження 2.2.2. *а) У випадку $d = 1$ при $p = 1$ співвідношення (2.18) є аналогом нерівності А. П. Тімана і М. П. Тімана [134, с. 344], в якій використані величини найкращих наближень періодичних функцій по системі $\mathcal{T} = \{e^{i\,l\,x}\}_{l=0}^{\infty}$.*

б)Нерівність

$$\omega\big(f, \frac{1}{N}\big)_p \leq C\, N^{-(\frac{1}{p}+\varepsilon)} \sum_{k=1}^{N} k^{\frac{1}{p}+\varepsilon-1}\, E_{k^d}^*(f)_p$$

при $\varepsilon > 0$ не може бути справедливою із жодною додатною сталою C, яка була б не залежна від n, а при $\varepsilon < 0$ вона є "грубішою", ніж при $\varepsilon = 0$ (обгрунтування див. у [24, с. 265] для випадку $d = 1$).

Взявши за основу викладені вище результати даного підрозділу, можна дати конструктивну характеристику класів Гельдера H_p^α для певного спектру значень параметрів α та p.

Отже, для $0 < \alpha \leqslant 1$ і $1 \leqslant p \leqslant \infty$ визначимо множини

$$H_p^\alpha(M) = \mathrm{Lip}(\alpha, p, M) := \Big\{ f \in L_p :\ \omega(f,t)_p \leq M t^\alpha \Big\}, \quad M > 0$$

і

$$H_p^\alpha = \mathrm{Lip}(\alpha, p) := \bigcup_{M>0} H_p^\alpha(M).$$

Лінійний простір H_p^α наділимо нормою $\|\cdot\|_{H_p^\alpha}$:

$$\|f\|_{H_p^\alpha} = \|f\|_p + \sup_{t>0} t^{-\alpha} \omega(f,t)_p.$$

Зауважимо, що $|f|_{H_p^\alpha} := \sup\limits_{t>0} t^{-\alpha}\omega(f,t)_p$ — півнорма на H_p^α. Простір H_p^α зі скінченою нормою $\|\cdot\|_{H_p^\alpha}$ є банаховим при всіх $1 \le p \le \infty$, і називається простором Гельдера–Ліпшиця (при $0 < \alpha < 1$ — простором Гельдера).

Теорема 2.2.2. *Нехай* $1 \le p < \infty$ *і* $0 < \alpha < \frac{1}{p}$*. Для того, щоб* $f \in H_p^\alpha$*, необхідно і достатньо виконання нерівності* $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\,\alpha}$.

Доведення теореми 2.2.2. Необхідність є безпосереднім наслідком співвідношень (ii) із леми 2.1.2 та (2.15).

Достатність випливає із теореми 2.2.1. Справді, для $n \in \mathbb{N}$ при $2^{-(n+1)} < \delta \le 2^{-n}$ і $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ маємо

$$\omega(f,\delta)_p \le \omega(f,\,2^{-n})_p \le C_p^{(1)}\,2^{-\frac{n}{p}} \sum_{k=0}^{n} 2^{\frac{k}{p}} E_{V_k}(f)_p \le$$

$$\le C_1\,2^{-\frac{n}{p}} \sum_{k=0}^{n} 2^{\frac{k}{p}}\,2^{-k\,\alpha} \le C_2\,2^{-n\,\alpha} \le C_3\,\delta^\alpha,$$

тобто $f \in H_p^\alpha$. ■

2.2.2 Найкраще наближення та гладкість функцій

У попередньому підрозділі опосередковано, через оцінки величин $E_{V_n}(f)_p$, дано конструктивну характеристику класів Гельдера H_p^α. А саме, доведено, що при $1 \leqslant p < \infty$ і $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ твердження $f \in H_p^\alpha$ і $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\alpha}$ рівносильні. Виявляється, що обмеження щодо параметра α в такому висновку є суттєвим. У випадку $d = 1$ це було з'ясовано Б. І. Голубовим [24]. Якщо $\alpha = \frac{1}{p}$, то оцінка $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\alpha}$ для $f \in L_p$ уже не обов'язково тягне за собою належність функції f простору H_p^α, однак все ж є гарантією певної гладкості функції f, що описується в термінах модулів неперервності $\omega(f,t)_p$ та $\omega^*(f,t)_p$. Це відображено в наступній теоремі, в яку для цілісності занесено результат і у випадку $0 < \alpha < \frac{1}{p}$.

Покладемо

$$lip(\alpha,p) := \Big\{ f \in L_p :\ \omega(f,t)_p = o(t^\alpha),\ t \to +0 \Big\},$$

$$lip^*(\alpha,p) := \Big\{ f \in L_p :\ \omega^*(f,t)_p = o(t^\alpha),\ t \to +0 \Big\}.$$

Теорема 2.2.3. *Нехай* $1 \leqslant p < \infty$. *Тоді*

(a) якщо $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leqslant 1$, *то* $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\alpha}$ *рівносильне* $f \in Lip(\alpha,p)$;

(б) якщо $0 < \frac{1}{p} < \alpha \leqslant 1$, *то із* $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\alpha}$ *випливає* $f \in Lip(\frac{1}{p}, p)$, *але необов'язково* $f \in lip(\frac{1}{p}, p)$, *а отже і необов'язково* $f \in lip^*(\frac{1}{p}, p)$;

(в) якщо $0 < \alpha = \frac{1}{p} \leqslant 1$, *то із* $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-\frac{n}{p}}$ *випливає* $\omega(f,\delta)_p = O(\delta^{\frac{1}{p}}|\ln\delta|)$, *але необов'язково* $\omega^*(f,\delta)_p = o(\delta^{\frac{1}{p}}|\ln\delta|)$, $\delta \to +0$.

Доведення теореми 2.2.3. Твердження (а) — тотожне теоремі 2.2.2 — доведене у попередньому підрозділі. Твердження (б) і (в) у ствердній частині (так як і твердження (а)) є безпосередніми наслідками нерівності типу Джексона (ii) із леми 2.1.2 і нерівності (2.15). Справді, для $n \in \mathbb{Z}_+$ при $2^{-(n+1)} < \delta \leqslant 2^{-n}$ маємо

$$\omega(f,\delta)_p \leqslant \omega(f, 2^{-n})_p \leqslant C_p^{(1)} 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{k=0}^{n} 2^{\frac{k}{p}} E_{V_k}(f)_p \leqslant C_p^{(2)} 2^{-\frac{n}{p}} \sum_{k=0}^{n} 2^{\frac{k}{p}} 2^{-k\alpha},$$

звідки, у випадку (б) — $\omega(f,\delta)_p \leqslant C_p^{(3)} \delta^{\frac{1}{p}}$, а у випадку (в) — $\omega(f,\delta)_p \leqslant C_p^{(4)} \delta^{\frac{1}{p}} |\ln\delta|$.

Доведення другої частини твердження (б), почнемо з визначення функції

$$f(t) = \mathrm{H}_{I_1^0}(t_1) \prod_{i=2}^{d} \chi_{I_1^0}(t_i), \quad \boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d,$$

де, нагадаємо, $\chi_A(y)$, $y \in \mathbb{R}$ — характеристична функція множини $A \subset \mathbb{R}$. Тоді, очевидно, $E_{V_n}(f)_p = 0$ при $n \geqslant 2$, зокрема, $E_{V_n}(f)_p = O(2^{-\frac{n}{p}})$ при $n \to \infty$. Однак $f \notin lip\left(\frac{1}{p}, p\right)$. Справді, для будь-якого $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{I}^d$ маємо

$$\|\Delta_{\boldsymbol{\tau}} f\|_p = \left(\int_{\mathbb{I}^d_{\boldsymbol{\tau}}} |f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\tau}) - f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \prod_{i=2}^{d} (1-\tau_i)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{1-\tau_1} |\mathrm{H}_{I_1^0}(x_1+\tau_1) - \mathrm{H}_{I_1^0}(x_1)|^p dx_1 \right)^{\frac{1}{p}} = 2\sqrt{2}\, \tau_1^{\frac{1}{p}} \prod_{i=2}^{d} (1-\tau_i)^{\frac{1}{p}}$$

і $\sup\limits_{0 \leqslant \tau_i < t \leqslant 1} \|\Delta_{\boldsymbol{\tau}} f\|_p = C_p t^{\frac{1}{p}}$, $C_p > 0$, а отже $f \notin lip\left(\frac{1}{p}, p\right)$ і, тим більше, $f \notin lip^*\left(\frac{1}{p}, p\right)$.

Нарешті, для доведення другої частини твердження (в) достатньо знайти таку функцію $f_1 \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, що $E_{V_n}(f_1)_p = O(2^{-\frac{n}{p}})$, але співвідношення $\omega^*(f_1,\delta)_p = o(\delta^{\frac{1}{p}}|\ln\delta|)$ не виконується. Покладемо

$$f_1(t) = \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} \mathscr{X}_{I(k,d)}(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d), \tag{2.21}$$

де $I(k,d)\subset Q_k$, точніше, $I(k,d)=\prod\limits_{i=0}^{d} I_k^0$ — куб $k-$го рівня двійкового розбиття куба $\mathbb{I}^d$, а

$$\mathscr{X}_{I(k,d)}(\boldsymbol{t})=H_{I_k^0}(t_1)\prod_{i=2}^{d}\chi_{I_k^0}(t_i),\quad \boldsymbol{t}\in\mathbb{I}^d.$$

Обгрунтовуючи коректність означення функції f_1 формулою (2.21), доведемо збіжність за нормою простору $L_p(\mathbb{I}^d)$ ряду у правій частині (2.21) і в той же час покажемо, що $E_{V_n}(f_1)_p=O(2^{-\frac{n}{p}})$. Для $n\in\mathbb{N}$ маємо

$$E_{V_n}(f_1)_p\leqslant\Bigg\|\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}}\mathscr{X}_{I(k,d)}\Bigg\|_p\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}}\|\mathscr{X}_{I(k,d)}\|_p\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-\frac{k}{2}}2^{-k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-\frac{k}{p}}\ll 2^{-\frac{n}{p}}.$$

Тепер, оцінимо $p-$модуль неперервності $\omega^*(f_1,\cdot)_p$ функції f_1:

$$\omega^*(f_1,2^{-N})_p\geqslant\omega^*(P_Nf_1,2^{-N})_p-\omega^*(f_1-P_Nf_1,2^{-N})_p\geqslant$$

$$\geqslant\omega^*(P_Nf_1,2^{-N})_p-2\|f_1-P_Nf_1\|_p. \tag{2.22}$$

Але ж, $\|f_1-P_Nf_1\|_p\asymp E_{V_N}(f_1)_p$ (див. лему 2.2.1), а $E_{V_N}(f_1)_p\ll 2^{-\frac{N}{p}}$ і якщо показати, що не виконується співвідношення $\omega^*(P_Nf_1,2^{-N})_p=o(2^{-\frac{N}{p}}N)$, $N\to\infty$, а точніше, що $\omega^*(P_Nf_1,2^{-N})_p\geqslant C_p2^{-\frac{N}{p}}N$, то можна стверджувати, — різниця у правій частині (2.22) є додатною, починаючи з деякого достатньо великого N. І, як наслідок (2.22), тоді є суперечливим співвідношення $\omega^*(f_1,\delta)_p=o(\delta^{\frac{1}{p}}|\ln\delta|)$, $\delta\to+0$.

Отже, позначивши $\xi(N):=(\xi_1(N),\ldots,\xi_d(N))$ — $d-$вимірний вектор з координатами $\xi_i(N)=2^{-(N+1)}$, $i=\overline{1,d}$, та поклавши

$$\mathfrak{I}_N^d:=\left\{\boldsymbol{t}=(t_1,\ldots,t_d):\ t_1\in[1-2^{-(N+1)},1],\ t_j\in[0,1],\ j=\overline{2,d}\ \right\},$$

маємо (далі через f^0 позначено $1-$періодичне за кожною із змінних продовження функції $f\in L_p(\mathbb{I}^d)$)

$$\omega^*(P_Nf_1,2^{-N})_p\geqslant\omega^*(P_Nf_1,2^{-(N+1)})_p\geqslant$$

$$\geqslant\left(\int_{\mathfrak{I}_N^d}\left|\sum_{k=2}^{N}2^{-\frac{k}{2}}\Big(\mathscr{X}^0_{I(k,d)}(t+\xi(N))-\mathscr{X}^0_{I(k,d)}(t)\Big)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$= \left(\int_{\mathfrak{I}_N^d} \left| \sum_{k=2}^{N} 2^{-\frac{k}{2}} \mathscr{X}^0_{I(k,d)}(t+\xi(N)) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{1-2^{-(N+1)}}^{1} \left| \sum_{k=2}^{N} 2^{-\frac{k}{2}} H^0_{I_k^0}(t_1+\xi_1(N)) \right|^p dt_1 \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2.23)$$

Враховуючи, що $H^0_{I_k^0}(t_1+2^{-(N+1)}) = 2^{\frac{k}{2}}$ при $t_1 \in [1-2^{-(N+1)}, 1]$, виконавши елементарні перетворення виразу під знаком інтеграла у правій частині (2.23), отримаємо $\omega^*(P_N f_1, 2^{-N})_p \geqslant C_p 2^{-\frac{N}{p}} N$.

Теорема 2.2.3 доведена. ■

2.2.3 Теореми вкладення в шкалі просторів L_p

В цьому підрозділі дається відповідь на питання щодо достатніх умов на значення величин $E_n^*(f)_p$, які гарантують імплікацію $f \in L_p(\mathbb{I}^d) \Rightarrow f \in L_q(\mathbb{I}^d)$ при $1 \le p < q \le \infty$ і відповідну їй оцінку $E_n^*(f)_q$ через $E_n^*(f)_p$. У випадку наближень за тригонометричною системою $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ функцій з однією змінною це питання достатньо повно вивчено в роботах [43, 44, 147], а аналоги основних результатів із [147] у випадку наближення за базисом Хаара функцій з однією змінною (тобто при $d=1$) встановлені Б. І. Голубовим [24].

Наступна теорема у випадку $d=1$ доведена Б. І. Голубовим [24].

Теорема 2.2.4. *Нехай* $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < q < \infty$ *і* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} E_k^*(f) k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} < \infty$. *Тоді* $f \in L_q(\mathbb{I}^d)$, *причому*

$$E_n^*(f)_q \ll n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E_n^*(f)_p + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} E_k^*(f)_p \,.$$

Доведення теореми 2.2.4. Оскільки $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$ — ортогональний базис в $L_p(\mathbb{I}^d)$ при $1 \le p < \infty$, то для будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ справедливий розклад

$$f(\boldsymbol{x}) = S_n f(\boldsymbol{x}) + \sum_{k=0}^{\infty} \Big(S_{n2^{(k+1)d}} f(\boldsymbol{x}) - S_{n2^{kd}} f(\boldsymbol{x}) \Big), \qquad (2.24)$$

де $S_m f(\boldsymbol{x}) := S_m(f, \boldsymbol{x}) := \sum\limits_{i=1}^{m} (f, h_i) h_i(\boldsymbol{x})$ — частинна сума Фур'є-Хаара порядку m, $(f, h_i) = \int\limits_{\mathbb{I}^d} f(t) h_i(t) dt$, $i = 1, 2, \ldots$ — коефіцієнти Фур'є функції f по системі H^d.
Співвідношення (2.24) є базовим при оцінюванні $E_n^*(f)_q$. Долучимо до нього ще деякі факти.

Спочатку, беручи за основу лему 2.1.1, дотримуючись схеми доведення леми 4 із [24] (для випадку $d = 1$), неважко показати, що для довільної системи дійсних чисел $\{a_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in K_j}$, де $K_j := Z_{j,d} \cup Z_{j+1,d}$, $j \in \mathbb{N}$, справедливі співвідношення

$$\Big\| \sum_{\bar{k}\in K_j} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}} \Big\|_s \asymp 2^{-j\left(\frac{d}{s}-\frac{d}{2}\right)} \left(\sum_{\bar{k}\in K_j} |a_{\bar{k}}|^s \right)^{\frac{1}{s}}, \ 1 \leqslant s < \infty, \tag{2.25}$$

$$\Big\| \sum_{\bar{k}\in K_j} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}} \Big\|_\infty \asymp 2^{\frac{jd}{2}} \max_{\bar{k}\in K_j} |a_{\bar{k}}|. \tag{2.26}$$

Зауважимо лише, що при встановленні нерівності $\gg$ в (2.25), в якості допоміжної, використовується також нерівність (2.7).

Далі, у пункті 2.2.1, використовуючи нерівність (i) із леми 2.1.2, для $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ доведено співвідношення (див. (2.14)) $\|f - P_n f\|_p \asymp E_{V_n}(f)_p$. Таким же чином, використавши нерівність (2.12) (замість нерівності (i) із леми 2.1.2), при $Y_{n,d} \subset \Omega \subset Y_{n+1,d}$ маємо

$$\|f - P_n^{\Omega} f\|_p \asymp E_{\mathcal{L}(\Omega)}(f)_p\,, \tag{2.27}$$

де $E_{\mathcal{L}(\Omega)}(f)_p$ — величина найкращого наближення функції f в просторі $L_p(\mathbb{I}^d)$ елементами підпростору $\mathcal{L}(\Omega) = \{u :\ u(\boldsymbol{x}) = \sum_{\bar{k}\in\Omega} c_{\bar{k}}\, h_{\bar{k}}(\boldsymbol{x}),\ c_{\bar{k}} \in \mathbb{R}\}$.

Поклавши $l = \sharp\,\Omega$, співвідношення (2.27) можна подати у вигляді

$$\|f - S_l f\|_p \asymp E_l^*(f)_p, \tag{2.28}$$

на додачу стверджуючи, що (2.28) виконується при будь-яких значеннях $l \in \mathbb{N}$.

Продовжимо доведення теореми 2.2.4.

Отже, нехай $m \in \mathbb{Z}_+$ і $2^{md} < n \leq 2^{(m+1)d}$. Тоді, враховуючи, що $n2^{kd} > 2^{(k+m)d}$ і $n2^{(k+1)d} \leq 2^{(k+m+2)d}$, а різниця $S_{n2^{(k+1)d}} f - S_{n2^{kd}} f$ належить $W_{k+m+1} \cup W_{k+m+2}$, застосувавши для оцінки $\|S_{n2^{(k+1)d}} f - S_{n2^{kd}} f\|$ співвідношення (2.25), а потім (2.27), при $1 \leq p < q < \infty$ маємо

$$\|S_{n2^{(k+1)d}} f - S_{n2^{kd}} f\|_q \ll 2^{(k+m)d\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \left(\sum_{s=n2^{kd}+1}^{n2^{(k+1)d}} |(f, h_s)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll 2^{(k+m)d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} \left(\sum_{s=n2^{kd}+1}^{n2^{(k+1)d}} |(f, h_s)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \asymp$$

$$\asymp 2^{(k+m)d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|S_{n2^{(k+1)d}} f - S_{n2^{kd}} f\|_p \ll (n2^{kd})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E_{n2^{kd}}^*(f)_p. \tag{2.29}$$

При $q=+\infty$, використавши (2.26), переконуємося, що нерівність

$$\|S_{n2^{(k+1)d}}f - S_{n2^{kd}}f\|_q \ll (n2^{kd})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E^*_{n2^{kd}}(f)_p \tag{2.30}$$

справджується також при $1 \le p < q = +\infty$. Із (2.27), беручи до уваги (2.29) та (2.30), при $1 \le p < q \le \infty$ отримаємо

$$E^*_n(f)_q \le \|f - S_n f\|_q \le \sum_{k=0}^{\infty} \|S_{n2^{(k+1)d}}f - S_{n2^{kd}}f\|_q \ll \sum_{k=0}^{\infty} (n2^{kd})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E^*_{n2^{kd}}(f)_p \ll$$

$$\ll n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E^*_n(f)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1} E^*_j(f)_p\,.$$

Теорема 2.2.4 доведена. ■

Теорема 2.2.5. *Нехай* $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < q < \infty$. *Тоді*

$$\|f\|_q \le C_1(p,q) \left\{ \|f\|_p + \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2} (E^*_k(f)_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \tag{2.31}$$

і для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$E^*_n(f)_q \le C_2(p,q) \left\{ n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} E^*_n(f)_p + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-2} (E^*_k(f)_p)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}. \tag{2.32}$$

Зауваження 2.2.3. *а) У випадку* $d=1$ *теорема 2.2.5 доведена в [24].*

б) При $p=1$, $q=2$ *у випадку наближення тригонометричними поліномами (при* $d=1$ *) в останній нерівності множник* $n^{\frac{1}{2}}$ *можна замінити на* 1 *[147].*

в) У випадку наближення за допомогою системи Хаара $\mathbb{H}^d$ *множник* $n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ *в (2.32) не можна замінити жодним іншим, що має порядок* $o(n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}})$ *[24].*

Доведення теореми 2.2.5. Як випливає із міркувань П. Л. Ульянова [147, с. 121], нерівність (2.32) є наслідком нерівності (2.31) (причому, у такому висновку роль і вимірності d і апроксимаційної системи функцій не є визначальною). Отже достатньо довести (2.31).

Схема доведення нерівності (2.31) схожа на ту, що застосована Б. І. Голубовим [24] у випадку $d=1$. Вихідною є нерівність, доведена П. Л. Ульяновим [148, с. 668–671]: *якщо* $d=1$ *і* $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < q < \infty$, *то*

$$\|f\|_q \le C(p,q) \left\{ \|f\|_1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2} \big(\omega(f,1/n)_p\big)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}, \tag{2.33}$$

де додатна величина $C(p,q)$ залежить лише від p та q.

Фактично, повторивши доведення П. Л. Ульянова, неважко переконатися у справедливості нерівності (2.33) і у випадку $d>1$. Але, згідно з наслідком 2.2.1 (див. нерівність (2.18)

$$\omega\left(f,\frac{1}{n}\right)_p \ll n^{-\frac{1}{p}}\sum_{j=1}^{n} j^{\frac{1}{p}-1}E_j^*(f)_p. \tag{2.34}$$

Підставивши в (2.33) замість $\omega(f,\frac{1}{n})_p$ праву частину із (2.34), отримаємо (врахувавши, що $\|f\|_1 \le \|f\|_p,\ 1<p<\infty$)

$$\|f\|_q \le C(p,q)\left\{\|f\|_p + \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^{\frac{1}{p}-1}E_j^*(f)_p\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \tag{2.35}$$

Тепер, застосуємо до правої частини (2.35) нерівність Харді–Літтлвуда [151, с. 308]: *якщо $a_n \ge 0,\ n=1,2,\ldots$ і $1<\alpha<\infty$, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q \le C(\alpha,q)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}(na_n)^q.$$

Поклавши $a_k = k^{\frac{1}{p}-1}E_k^*(f)_p$, можна записати

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{p}-1}E_k^*(f)_p\right)^q \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-2}\big(E_n^*(f)\big)_p^q.$$

Поєднавши цю нерівність з (2.35), отримаємо (2.31).

Теорема 2.2.5 доведена. ■

2.3 Еквівалентне представлення норми в просторах H_p^α та $B_{p,\theta}^\alpha$

Встановлено еквівалентне представлення норм в просторах Гельдера H_p^α та Бєсова $B_{p,\theta}^\alpha$ в термінах коефіцієнтів у розкладах їх елементів за кратним базисом Хаара, або за системою H_0^d.

2.3.1 Опис просторів H_p^α

Спочатку сформулюємо і доведемо твердження щодо опису класів $H_p^\alpha(M)$ опосередковано через коефіцієнти Фур'є-Хаара їх елементів.

Теорема 2.3.1. *Якщо* $f \in H_p^\alpha(M)$, $0 < \alpha \le 1$, $1 \le p < \infty$, $M > 0$, *то існує така додатна стала* C, *яка не залежить від* f, *що для будь-якого* $j \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |(f, h_{\overline{k}})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le C\, 2^{-j(\alpha + \frac{d}{2} - \frac{d}{p})}. \tag{2.36}$$

Навпаки, якщо при $1 \le p < \infty$ *і* $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ *при всіх* $j = 1, 2, \ldots$ *виконується нерівність (2.36) з деякою сталою* C, *то* $f \in H_p^\alpha$.

Доведення теореми 2.3.1. Спочатку зауважимо, умова $f \in H_p^\alpha(M)$ рівносильна існуванню такої додатної сталої M_1, яка не залежить від f, що

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} 2^{k\,\alpha} \omega(f, 2^{-k})_p \le M_1. \tag{2.37}$$

Справді, покладемо $a(t) := t^{-\alpha}\, \omega(f,t)_p$. Оскільки для $\omega(f,t)_p$ справедлива нерівність $\omega(f, \lambda t)_p \le (\lambda + 1)\omega(f,t)_p$, $\lambda > 0$ і $\omega(f,t)_p$ не спадає на $[0, \infty\,)$, то при $1 \le p < \infty$ і $t \in [\,2^{-k-1}, 2^{-k}\,]$, $k \in \mathbb{Z}_+$ маємо $\frac{1}{2} a(2^{-k}) \le a(t) \le 2^\alpha\, a(2^{-k})$. Тому

$$M \ge \sup_{t > 0} t^{-\alpha} \omega(f,t)_p \asymp \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} 2^{k\,\alpha} \omega(f, 2^{-k})_p. \tag{2.38}$$

Доведемо першу частину теореми 2.3.1.

Нехай $f \in H_p^\alpha(M)$. Тоді, згідно з (2.37) $\omega(f, 2^{-k})_p \ll 2^{-k\,\alpha}$, а отже, використавши лему 2.1.1 і нерівність (ii) із леми 2.1.2, тимчасово покладаючи $b_{\overline{k}}(f) := (f, h_{\overline{k}})$, для будь-якого $j \in \mathbb{N}$ маємо

$$\left(\sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}(f)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ll 2^{j(\frac{d}{p} - \frac{d}{2})} \left\| \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} b_{\overline{k}}(f) h_{\overline{k}} \right\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-j(\frac{d}{2} - \frac{d}{p})} (\|f - P_j f\|_p + \|f - P_{j-1} f\|_p) \ll 2^{-j(\frac{d}{2} - \frac{d}{p})} \omega(f, 2^{-j})_p \ll 2^{-j(\alpha + \frac{d}{2} - \frac{d}{p})}. \tag{2.39}$$

Тепер доведемо другу частину теореми 2.3.1. В силу теореми 2.2.1 для довільної функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $l \in \mathbb{Z}_+$ маємо

$$\omega(f, 2^{-l})_p \ll 2^{-\frac{l}{p}} \sum_{k=0}^{l} 2^{\frac{k}{p}} \|f - P_k\, f\|_p. \tag{2.40}$$

Але ж, за виконання (2.36) при $1 \le p < \infty$, на підставі леми 2.1.1 можна записати

$$\|f - P_k\, f\|_p \le \sum_{j=k+1}^{\infty} \| \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} b_{\overline{k}}(f)\, h_{\overline{k}} \|_p \ll$$

$$\ll \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j(\frac{d}{p}-\frac{d}{2})}\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}(f)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ll \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j\,\alpha} \ll 2^{-k\,\alpha}, \tag{2.41}$$

а значить, при $0<\alpha<\frac{1}{p}$ із (2.40) отримаємо $\omega(f,2^{-l})_p \le C_0 2^{-l\,\alpha}$, $l\in\mathbb{Z}_+$. Тобто, згідно із вище зазначеним (див. співвідношення (2.37) приходимо до висновку, що $f\in H_p^{\alpha}$. Теорема 2.3.1 доведена. ■

А тепер твердження щодо еквівалентного представлення півнорми $|\cdot|_{H_p^\alpha}$ для функцій із H_p^{α}. Фактично воно охоплене теоремою 2.3.1.

Теорема 2.3.2. *Нехай* $1\le p<\infty$ *і* $0<\alpha<\frac{1}{p}$. *Тоді для кожної функції* $f\in H_p^{\alpha}$, $f\neq const$

$$|f|_{H_p^\alpha} \overset{f}{\asymp} \sup_j 2^{j(\alpha+\frac{d}{2}-\frac{d}{p})}\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |(f,h_{\overline{k}}|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.42}$$

Доведення теореми 2.3.2. Якщо $f\in H_p^{\alpha}$, то (див. співвідношення (2.39))

$$2^{j(\frac{d}{2}-\frac{d}{p})}\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |(f,h_{\overline{k}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ll \omega(f,2^{-j})_p,$$

а ця нерівність, у сукупності із співвідношенням (2.38) і означенням $|f|_{H_p^\alpha}$ рівносильна нерівності

$$\sup_j 2^{j(\alpha+\frac{d}{2}-\frac{d}{p})}\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |(f,h_{\overline{k}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ll |f|_{H_p^\alpha}.$$

З іншого боку, у доведені другої частини теореми 2.3.1 встановлено (див.(2.40) та (2.41)): якщо

$$\sup_j 2^{j(\alpha+\frac{d}{2}-\frac{d}{p})}\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |(f,h_{\overline{k}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} := C_f \le C,$$

де C — деяка абсолютна стала, то $f\in H_p^{\alpha}(M)$ з $M=\gamma\,C$, $\gamma>0$. Беручи це до уваги, маємо

$$|f|_{H_p^\alpha} \ll \sup_j 2^{j(\alpha+\frac{d}{2}-\frac{d}{p})}\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |(f,h_{\overline{k}}|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема 2.3.2 доведена. ■

2.3.2 Опис просторів $B^{\alpha}_{p,\theta}$

Аналогічне до теореми 2.3.2 твердження має місце і для функцій, що належать до відомих просторів Бєсова $B^{\alpha}_{p,\theta}$ функцій, визначених на $\mathbb{I}^d$. Нагадаємо означення цих просторів.

Означення 2.3.1. *Для заданих параметрів α, p, θ, $0<\alpha<1$ і $1\le p,\theta<\infty$, нормований простір $B^{\alpha}_{p,\theta}$ — це множина функцій φ, що задовольняють умови:*

(i) $$\varphi\in L_p(\mathbb{I}^d);$$

(ii) $$\|\varphi\|^{(\alpha)}_{p,\theta}:=\|\varphi\|_p+|\varphi|^{(\alpha)}_{p,\theta}<\infty,$$

де півнорма $|\varphi|^{\alpha}_{p,\theta}$ визначається співвідношенням

$$|\varphi|^{(\alpha)}_{p,\theta}:=\left(\int\limits_0^1\left(\frac{\omega(\varphi;t)_p}{t^{\alpha}}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\theta}}.$$

$B^{\alpha}_{p,\theta}$ — сепарабельний банахів простір для будь-якої трійки параметрів α, p, θ: $0<\alpha<1$, $1\le p,\theta<\infty$. Зазначимо, що при $\alpha>\frac{d}{p}$ простір $B^{\alpha}_{p,\theta}$ є підпростором банахового простору $C(\mathbb{I}^d)$, неперервних на $\mathbb{I}^d$ функцій, з рівномірною метрикою.

Теорема 2.3.3. *Нехай $1\le p,\theta<\infty$ і $0<\alpha<\frac{1}{p}$. Тоді для $f\in B^{\alpha}_{p,\theta}$, $f\ne const$,*

$$|f|^{(\alpha)}_{p,\theta}\overset{f}{\asymp}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\left[2^{j(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{2})}\Big(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}}|b_{\overline{k}}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\right]^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{2.43}$$

де $b_{\overline{k}}=(f,h_{\overline{k}}):=\int\limits_{\mathbb{I}^d}f(\boldsymbol{x})h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$, $\overline{k}\in\mathbb{Z}^d_+$, — коефіцієнти Фур'є–Хаара функції f.

Доведення теореми 2.3.3. Спочатку зауважимо, що для $f\in B^{\alpha}_{p,\theta}$

$$\int\limits_0^1\left(\frac{\omega(f;t)_p}{t^{\alpha}}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}\left(\frac{\omega(f;t)_p}{t^{\alpha}}\right)^{\theta}\frac{dt}{t}. \tag{2.44}$$

Покладемо $a(t):=t^{-\alpha}\omega(f;t)_p$. Оскільки для $p-$модуля неперервності $\omega(f;t)_p$, $1\le p<\infty$, справедлива нерівність $\omega(f;\lambda t)_p\le(\lambda+1)\omega(f;t)_p$, $\lambda>0$ і $\omega(f;t)_p$ не спадає на $[0,\infty)$, то при $t\in[2^{-k-1},2^{-k}]$, $k\in\mathbb{Z}_+$, має місце співвідношення

$$\frac{1}{2}a(2^{-k})\le a(t)\le 2^{\alpha}a(2^{-k}).$$

Значить
$$\int\limits_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} (a(t))^\theta \frac{dt}{t} \asymp (a(2^{-k}))^\theta = \left(2^{k\alpha}\omega(f;2^{-k})_p\right)^\theta$$
і, як наслідок, маємо
$$|f|_{p,\theta}^{(\alpha)} \asymp \left[\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\alpha}\omega(f;2^{-k})_p\right)^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.45}$$

У подальшому процес приведення співвідношення (2.45) до вигляду (2.43) передбачає використання дискретної нерівності Харді (див. [170], розділ 2, §3, лема 3.4): *якщо для послідовностей* $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *та* $b = (b_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *невід'ємних дійсних чисел з деякими додатними* C_0 *і* μ *виконується одна із двох умов*

(a)
$$b_k \le C_0\left(\sum_{j=k}^{\infty} a_j^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}},$$

(b)
$$b_k \le C_0 2^{-k\lambda}\left(\sum_{j=-\infty}^{k} (2^{j\lambda}a_j)^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad \lambda > 0,$$

то справджується нерівність (для будь-якого $\theta > 0$ *)*
$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{k\alpha}b_k)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \le CC_0\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^{k\alpha}a_k)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad C = C(\alpha,\theta), \tag{2.46}$$
при $0 < \alpha < \infty$ *у випадку* (a) *і при* $0 < \alpha < \lambda$ *у випадку* (b).

Отже, продовжимо еквівалентні (в сенсі відношення $\asymp$) перетворення правої частини співвідношення (2.45). Будемо діяти за схемою, що запропонована в роботі [163].

Для $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ і $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\bar{k}}\}_{\bar{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$ (див. підрозділ 2.1) покладемо
$$P_n f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\bar{k}\in Y_{n,d}} (f,h_{\bar{k}})h_{\bar{k}}(\boldsymbol{x}), \qquad R_k f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\bar{k}\in Z_{k,d}} (f,h_{\bar{k}})h_{\bar{k}}(\boldsymbol{x})\,.$$

Нехай $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$. Відштовхуючись від рівності $f = f - P_n f + \sum\limits_{k=0}^{n} R_k f$, згідно з теоремою 2.2.1, враховуючи нерівність $\omega(\varphi;\delta)_p \le 2\|\varphi\|_p$, $\delta > 0$, при $n \in \mathbb{N}$ маємо
$$\omega(f;2^{-n})_p \le \omega(f - P_n f;2^{-n})_p + \sum_{k=0}^{n}\omega(R_k f;2^{-n})_p \le$$

$$\leq 2\left(\|f-P_nf\|_p+2^{-n/p}\sum_{k=1}^{n}2^{k/p}\|R_kf\|_p\right) \tag{2.47}$$

(тут враховано, що $\omega(R_0f;2^{-n})_p=0$).

Позначимо $d_n(f)_p:=\|f-P_nf\|_p$. Тоді, оскільки $R_kf=(f-P_{k-1}f)-(f-P_kf)$, $k\in Z_+$, $P_{-1}f:=0$ і

$$\|R_kf\|_p\leq d_{k-1}(f)_p+d_k(f)_p, \tag{2.48}$$

то наслідком нерівності (2.47) є нерівність

$$\omega(f;2^{-n})_p\leq C_0 2^{-n/p}\sum_{k=0}^{n}2^{k/p}d_k(f)_p, \tag{2.49}$$

де C_0 — деяка додатна стала (яку можна підібрати як незалежну від p).

Від умови (2.49) (порівняй з умовою (b) при $\mu=1$, поклавши $b_n=\omega(f;2^{-n})_p$, $a_n=d_n(f)_p$, $n\in\mathbb{Z}_+$ і $b_n=a_n=0$, $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+$), застосувавши дискретну нерівність Харді (2.46), приходимо до нерівності

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\alpha}\omega(f;2^{-k})_p\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}\leq C_0C\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\alpha}d_k(f)_p\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}, \tag{2.50}$$

яка справедлива при $1\leq\theta<\infty$ і $0<\alpha<\frac{1}{p}$.

Поєднавши (2.50) та (2.45), маємо

$$|f|_{p,\theta}^{(\alpha)}\ll\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\alpha}d_k(f)_p\right)^{\theta}\right)^{1/\theta} \tag{2.51}$$

при $0<\alpha<\frac{1}{p}$.

Далі, для будь-якої функції $f\in L_p(\mathbb{I}^d)$ справедливий розклад $f=P_nf+\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}R_kf$ зі збіжністю правої частини до f за нормою простору $L_p(\mathbb{I}^d)$. Тому

$$d_n(f)_p=\|f-P_nf\|_p\leq\sum_{k=n}^{\infty}\|R_{k+1}f\|_p. \tag{2.52}$$

Нерівність (2.52), як і (2.49), також обумовлює виконання дискретної нерівності Харді, тобто при $1\leq\theta<\infty$ і $\alpha>0$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\alpha}d_k(f)_p\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}\leq C\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{k\alpha}\|R_kf\|_p\right)^{\theta}\right)^{1/\theta}. \tag{2.53}$$

Поєднавши (2.52) з (2.51), приходимо до висновку, що при $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ справджується співвідношення

$$|f|_{p,\theta}^{(\alpha)} \ll \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha} \|R_k f\|_p \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}}. \tag{2.54}$$

З іншого боку, на підставі (2.48) і нерівності (ii) із леми 2.1.2, маємо

$$\|R_k f\|_p \le C(d,p)\omega(f; 2^{-k})_p,$$

що, в поєднанні із співвідношенням (2.45), тягне нерівність

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha} \|R_k f\|_p \right)^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll |f|_{p,\theta}^{(\alpha)} \tag{2.55}$$

Нарешті, еквівалентність (2.43) є наслідком співвідношень (2.54) та (2.55), поєднаних з лемою 2.1.1, — і справедлива при $1 \le \theta < \infty$, $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$.

Теорема 2.3.3 доведена. ■

2.4 Нелінійне наближення класів SH_p^α та $SB_{p,\theta}^\alpha$

Встановлені точні за порядком оцінки найкращих m – членних наближень за базисом H^d в просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$ для функцій, що належать одиничним кулям просторів Гельдера та просторів Бесова. Вказано практично здійсненний алгоритм побудови екстремальних (в розумінні точних за порядком оцінок наближень) нелінійних m – членних агрегатів.

2.4.1 Характеристика m – членних наближень за базисом H^d

Спочатку нагадаємо означення основних величин із теорії нелінійної апроксимації. Нехай $\mathscr{X}$ — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$ і $\mathfrak{A} = \{u_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ така система елементів із $\mathscr{X}$, що $\overline{\operatorname{span}\mathfrak{A}} = \mathscr{X}$. Тут Ω — зліченна множина індексів, зокрема, $\Omega = \mathbb{Z}^d$ — множина цілочислових точок (векторів) в $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Величина найкращого m – членного, $m \in \mathbb{N}$, наближення елемента $f \in \mathscr{X}$ по системі $\mathfrak{A}$ означається так:

$$\sigma_m(f; \mathfrak{A}; \mathscr{X}) := \inf_{\substack{\Lambda\subset\Omega \\ \sharp\Lambda = m}} \inf_{c_\alpha \in \mathbb{R}} \|f - \sum_{\alpha\in\Lambda} c_\alpha u_\alpha\|_{\mathscr{X}}.$$

Такою величиною визначається найменша похибка апроксимації f за допомогою всіх лінійних комбінацій із m елементів системи $\mathfrak{A}$. Також, покладемо $\sigma_0(f; \mathfrak{A}; \mathscr{X}) = \|f\|_{\mathscr{X}}$.

Якщо F — деяка фіксована підмножина в $\mathscr{X}$, то означимо

$$\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathscr{X}) := \sup_{f\in F} \sigma_m(f;\mathfrak{A};\mathscr{X}).$$

Однією із визначальних в теорії нелінійної апроксимації є задача встановлення асимптотики (принаймі, — слабкої) для величин $\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathscr{X})$ при заданих $\mathscr{X}$, $\mathfrak{A}$ та F. Доповняльною, і більш вагомою з точки зору практичних застосувань є задача, що стосується побудови алгоритму на основі якого визначається множина $\Lambda_f \subset \Omega$, $\sharp\Lambda_f = m$ для $f \in F$ і такі коефіцієнти $c_\alpha(f)$, $\alpha \in \Lambda_f$, що

$$\sigma_m(F;\mathfrak{A};\mathscr{X}) \asymp \sup_{f\in F} \|f - \sum_{\alpha\in\Lambda_f} c_\alpha(f) u_\alpha\|_{\mathscr{X}}.$$

У деяких ситуаціях розв'язок такої задачі є досить простим. Наприклад, якщо $\mathscr{X} = \mathscr{H}$ — сепарабельний гильбертів простір і $\mathfrak{A}$ — ортонормований базис в $\mathscr{H}$, то значення величин $\sigma_m(f;\mathfrak{A};\mathscr{H})$ з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$, що індукована скалярним добутком в $\mathscr{H}$, реалізується за наближення так званими *гріді апроксимантами*, а відповідний алгоритм їх побудови називається *чисто гріді алгоритмом* (англ.: **pure greedy algorithm — PGA**).

В основі PGA (у спрощеному варіанті) лежить вибір m найбільших за абсолютною величиною коефіцієнтів Фур'є $c_\alpha(f)$ елемента f по системі $\mathfrak{A}$ (і цим, як наслідок, визначається відповідна множина Λ_f). Зрозуміло, що гріді апроксиманти визначаються таким чином, взагалі кажучи, неоднозначно, однак всі вони дають одне і те ж значення наближення елемента f в $\mathscr{H}$. В загальному випадку використання PGA для побудови апарату "хорошої" нелінійної апроксимації елемента $f \in F$ грунтується на властивостях системи $\mathfrak{A}$ і істотно залежить від них. Наприклад, якщо $\mathscr{X} = L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d \big/ (2\pi\mathbb{Z})^d$, $\mathcal{T} = \{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$, то гріді апроксиманти функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$ мають вигляд

$$G_m(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{m} \widehat{f}(k^j) e^{i(k^j,\boldsymbol{x})},$$

де $|\widehat{f}(k^1)| \ge |\widehat{f}(k^2)| \ge \ldots \ge |\widehat{f}(k^m)| \ge \ldots$ — упорядковані за незростанням абсолютні величини коефіцієнтів Фур'є функції f по системі $\mathcal{T}$.

В [204] доведено, що для будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$

$$\|f(\cdot) - G_m(f;\cdot)\|_p \le (1 + 3m^{|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|}) \sigma_m(f;\mathcal{T};L_p(\mathbb{T}^d)), \quad 1 \le p \le \infty.$$

Проте, в [169] встановлені оцінки величин $\sigma_m(F;\mathcal{T};L_p(\mathbb{T}^d))$ для деяких класів F гладких функцій (зокрема, для класів типу Нікольського–Бєсова), які в поєднанні з оцінками величин $\sup\limits_{f\in F}\|f(\cdot)-G_m(f;\cdot)\|_p$, отриманими в [204], свідчать, що при певних припущеннях має місце співвідношення

$$\sup_{f\in F}\|f(\cdot)-G_m(f;\cdot)\|_p \asymp \sigma_m(F;\mathcal{T};L_p(\mathbb{T}^d)).$$

Визначальною умовою як для побудови, так і використання простих гріді аппроксимант для наближення в $L_p(\mathbb{T}^d)$, $1<p<\infty$, є рівномірна обмеженість базису $\mathfrak{A}$, — зокрема, базису $\mathcal{T}$, що задіяний в PGA, — тобто

$$\frac{1}{M}\le \|u_\alpha\|_1\le\|u_\alpha\|_p\le\|u_\alpha\|_\infty\le M.$$

Зазначимо, таке співвідношення зумовлює рівність за порядком кожного доданку $\|\langle f;u_\alpha\rangle u_\alpha\|_p$ та модулів $|\langle f;u_\alpha\rangle|$ коефіцієнтів Фур'є $\langle f;u_\alpha\rangle$, $\alpha\in\Omega$, функції $f\in L_p(\mathbb{T}^d)$ по системі $\mathfrak{A}$.

Прикладами систем, які не підпорядковані умові рівномірної обмеженості (у функціональних просторах $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1\le p<2$), є базисна система Хаара $\mathcal{H}^d$ (див. [205]) і система Хаара $\mathbb{H}_0^d=\{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in\mathbb{Z}^d}$ функцій з d змінними. Як вже показано, система $\mathbb{H}_0^d$ після належного упорядкування є базисом в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1\le p<\infty$, який позначається через H^d.

Зазначимо, *a priori* у випадку $d=1$ обидві системи тотожні, тобто $\mathcal{H}^1\equiv\mathbb{H}_0^1$, і є базисними системами (базисом Хаара–Шаудера) в $L_p(\mathbb{I})$, $1\le p<\infty$ [38, розділ 3].

Оскільки $\mathrm{H}^d=(h_i)_{i=1}^\infty$ — ортонормований базис Шаудера в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1\le p<\infty$, то для кожної функції $f\in L_p(\mathbb{I}^d)$ справедливий розклад (див. теорему 2.1.1)

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{\infty}(f,h_i)h_i(\boldsymbol{x}) \tag{2.56}$$

(ряд збігається в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1\le p<\infty$), де, нагадаємо $(f,h_i)=\int\limits_{\mathbb{I}^d}f(\boldsymbol{x})h_i(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$ — коефіцієнти Фур'є–Хаара функції f.

Відомо, навіть у випадку $d=1$ при $1\le p<2$ для деякої функції $f\in L_p(\mathbb{I}^d)$, можливо, $\varlimsup\limits_{i\to\infty}|(f,h_i)|=+\infty$. За такої умови побудова простих гріді апроксимант згідно PGA для кожної функції f із $L_p(\mathbb{I}^d)$ є практично неможливою. Однак із розкладу (2.56) випливає, що $\|(f,h_i)h_i\|_p\to 0$ при $i\to\infty$, а тому можна означити апарат нелінійного наближення f за допомогою так званого *гріді алгоритму* G^p (Greedy Algorithm G^p), ймовірно, вперше застосованому в [206] у випадку $d=1$ та в [205] у випадку $d\ge 1$, при наближенні апаратами, які побудовані на базі кратної системи Хаара $\mathcal{H}^d$ — тензорного добутку відомих одновимірних систем Хаара $\mathbb{H}$.

Слід зауважити, що в згаданих роботах поняття гріді апроксимант вкладається в термін "гріді алгоритм".

Отже, дамо означення апроксимаційних характеристик у відповідності до кратних базисних систем Хаара та уточнимо деякі із згаданих термінів.

Для функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$ означимо величину $\sigma_m(f; \mathbb{H}_0^d; L_p)$ (скорочено: $\sigma_m(f)_p$) найкращого $m-$членного, $m \in \mathbb{N}$, наближення функції f за системою Хаара $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d}$:

$$\sigma_m(f)_p = \sigma_m(f;\, \mathbb{H}_0^d;\, L_p) := \inf_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}_+^d \\ \sharp\Lambda = m}} \inf_{c_{\overline{k}} \in \mathbb{R}} \|f - \sum_{\overline{k} \in \Lambda} c_{\overline{k}} h_{\overline{k}}\|_p.$$

Покладемо для $F \subset L_p$

$$\sigma_m(F)_p = \sigma_m(F;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) := \sup_{f \in F} \sigma_m(f)_p.$$

Далі, для функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$ і системи $\mathrm{H}^d \equiv \mathbb{H}_0^d$ визначимо

$$G_m^p(f;\, \mathbb{H}_0^d)(\boldsymbol{x}) := \sum_{\overline{k} \in \Lambda_f^{\max}} (f,\, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}), \ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d,$$

де множина $\Lambda_f^{\max} \subset \mathbb{Z}_+^d$ залежить від функції f і визначається таким чином, що $\sharp\Lambda_f^{\max} = m$ і

$$\min\{\|(f,\, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}\|_p,\, \overline{k} \in \Lambda_f^{\max}\} \ge \max\{\|(f,\, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}\|_p,\, \overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Lambda_f^{\max}\}.$$

Агрегати

$$G_m^p(f;\, \mathbb{H}_0^d)(\boldsymbol{x}) := \sum_{\overline{k} \in \Lambda_f^{\max}} (f,\, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}), \ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{I}^d,$$

називаються $p-$*гріді апроксимантами* для f. На додачу до $\sigma_m(f)_p$ означимо величину

$$g_m(f)_p = g_m(f; \mathbb{H}_0^d;\, L_p) := \inf_{\substack{\Lambda_f^{\max} \subset \mathbb{Z}_+^d \\ \sharp\Lambda_f^{\max} = m}} \|f - \sum_{\overline{k} \in \Lambda_f^{\max}} (f,\, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}\|_p,$$

і покладемо

$$g_m(F)_p = g_m(F;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) := \sup_{f \in F} g_m(f)_p.$$

для $F \subset L_p$. При $m = 0$ вважаємо, що $g_0(f; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)) := \|f\|_p$.

У подальшому використовуються аналогічні означення і для підсистем $\mathcal{K}$ в H^d, що визначаються звуженням множини індексів $\mathbb{Z}_+^d$ до деякої множини Ω, а також і для інших систем, та з іншою індексацією їх елементів. Однією із основних у всіх випадках таких означень є умова, щоб число доданків у наближаючому агрегаті було рівним m.

Зазначимо, у випадку $d > 1$ гріді апроксиманти $G_m^p(f; \mathrm{H}^d)$ та $G_m^p(f; \mathcal{H}^d)$ наділені, взагалі кажучи, не однаковими можливостями щодо наближення індивідуальної функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$, у порівнянні з відповідними найкращими $m-$членними наближеннями. Так, відомо, що при $1 \le p \le \infty$ не для кожної функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ виконується порядкова рівність

$$g_m(f; \mathcal{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)) \asymp \sigma_m(f; \mathcal{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)).$$

Більш детальну інформацію щодо зазначеної обставини можна знайти в [206].

У противагу цьому, базис H^d, $d > 1$ наслідує за багатьма структурними та апроксимаційними властивостями одновимірний базис Хаара $\mathrm{H}^1 = \mathbb{H}$. Одна із таких властивостей, в контексті останньої порядкової рівності, розкрита в наступному підрозділі і полягає в тому, що для будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 < p < \infty$, має місце співвідношення

$$g_m(f; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)) \asymp \sigma_m(f; \mathrm{H}^d; L_p(\mathbb{I}^d)),$$

яке у випадку $d = 1$ встановлене В. М. Темляковим [206]. Таке співвідношення сприяло розв'язанню в повному об'ємі згаданих на початку підрозділу задач стосовно величин $\sigma_m(F; \mathfrak{A}; \mathscr{X})$ у випадках, коли:

$F = SB^{\alpha}_{p,\theta}$, $1 \le p, \theta < \infty$, $0 < \alpha < 1$, — одинична куля в ізотропному просторі Бєсова функцій із $L_p(\mathbb{I}^d)$ і/або

$F = SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$, $1 \le p, \theta \le \infty$, — одинична куля в просторі типу Нікольського–Бєсова (точне означення подано в одному з наступних підрозділів) і/або

$F = SH^{\alpha}_p$ одинична куля у просторі Гельдера H^{α}_p, $0 < \alpha < \frac{1}{p} \le 1$;

$\mathfrak{A} = \mathrm{H}^d$ — кратний базис Хаара в $L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 \le q < \infty$;

$\mathscr{X} = L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 < q < \infty$, — простір Лебега функцій з d змінними.

Уточнені обмеження на параметри p, q, θ, α та Λ вказані у формулюваннях відповідних теорем.

2.4.2 $m-$членні наближення та гріді апроксимація за базисом H^d

Теорема 2.4.1. *Нехай* $1 < p < \infty$. *Тоді для будь-якої функції* $g \in L_p(\mathbb{I}^d)$ *справедливе співвідношення*

$$g_m(g;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) \asymp \sigma_m(g;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)).$$

Доведення теореми 2.4.1. Нерівність $\gg$ виконується *a priori* за означенням обох величин.

В [205] при $d = 1$ доведена нерівність $g_m(g;\ \mathcal{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) \ll \sigma_m(g;\ \mathcal{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d))$ в контексті вивчення системи $\mathcal{H}^d$ базисних функцій Хаара декількох змінних, визначених як тензорний добуток базисів Хаара функцій однієї змінної. При $d \geq 2$ така нерівність, взагалі кажучи, не виконується [205].

Однак, при $d = 1$ системи H^d та $\mathcal{H}^d$ — це одна і та ж множина функцій. Тому для встановлення нерівності $g_m(g;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d)) \ll \sigma_m(g;\ \mathrm{H}^d;\ L_p(\mathbb{I}^d))$ при $d \geq 2$ (для системи H^d) достатньо лише поновити доведення цієї нерівності у випадку $d = 1$ [205]. Попередньо необхідно тільки проіндексувати функції системи H^d кубами I двійкового розбиття у відповідності з пунктом 2.1.3, відштовхуючись від системи H_0^d, яка при $d = 1$ тотожна системі $\mathbb{H}$, що задіяна в доведенні на яке ми посилаємося.

2.4.3 Найкращі $m-$членні наближення класів SH_p^α та $SB_{p,\theta}^\alpha$ за базисом Хаара

Викладемо результати, що стосуються оцінок величин $\sigma_m(SH_p^\alpha)_q$ і $\sigma_m(SB_{p,\theta}^\alpha)_q$. Але, спочатку про мотивацію відповідних досліджень.

Позначимо через SH_p^α одиничну кулю у просторі H_p^α . Із теореми 2.2.2 випливає, що при $0 < \alpha < \frac{1}{p} \leq 1$ $\sup\limits_{f \in SH_p^\alpha} E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\,\alpha}$. Цілком природним є запитання: чи покращується за порядком оцінка в правій частині останньої нерівності, якщо в ролі наближаючих агрегатів замість лінійного простору V_n використати множину всеможливих лінійних комбінацій довільних m елементів системи H_0^d (або, що теж саме, базису H^d) з $m = \dim V_n = 2^{n\,d}$, адаптуючи вибір цих m елементів у найкращий спосіб до кожної функції $f \in SH_p^\alpha$? Відповідь на це запитання міститься в теоремі 2.4.3, але головним результатом даного підрозділу є теорема 2.4.2.

Отже, позначимо через $SB_{p,\theta}^\alpha$ одиничну кулю у просторі $B_{p,\theta}^\alpha$, тобто $SB_{p,\theta}^\alpha := \{f \in B_{p,\theta}^\alpha :\ \|f\|_{p,\theta}^{(\alpha)} \leq 1\}$, а через $\mathcal{D}$ — область допустимих значень параметрів $d,\ p,\ q$

та α:

$$\mathcal{D} = \left\{(d,p,q,\alpha): \quad d\in\mathbb{N}, \quad 1\le p<\infty, \quad 1<q<\infty, \quad \left(\frac{d}{p}-\frac{d}{q}\right)_+ < \alpha < \frac{1}{p}\right\}.$$

Тут, нагадаємо, $a_+ = \max\{a, 0\}$ для $a\in\mathbb{R}$.

Теорема 2.4.2. *Нехай* $(d,\ p,\ q,\ \alpha)\in\mathcal{D}$ *і* $1\le\theta<\infty$. *Тоді*

$$\sigma_m(SB^{\alpha}_{p,\theta})_q \asymp g_m(SB^{\alpha}_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{\alpha}{d}}.$$

Доведення теореми 2.4.2. Спочатку зауважимо таке. На підставі теореми 2.4.1 для доведення теореми 2.4.2 достатньо встановити потрібну оцінку зверху для величини σ_m і оцінку знизу для величини g_m . При цьому зазначимо, що метод встановлення таких оцінок передбачає використання результатів із Додатку А, які стосуються нелінійної апроксимації так званих q −еліпсоїдів у дискретних просторах — просторах кратних послідовностей.

Оцінка зверху. Нехай для $j\in\mathbb{Z}_+$

$$W_j := \{\varphi : \varphi(\boldsymbol{t}) = \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}}(\boldsymbol{t}),\ \boldsymbol{t}\in\mathbb{I}^d,\ a_{\overline{k}}\in\mathbb{R}\}.$$

Через W^p_j позначимо лінійний простір W_j, наділений нормою охоплюючого його простору $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1\le p<\infty$.

Якщо $\varphi\in W^p_j\cap B^{\alpha}_{p,\theta}$, то згідно з теоремою 2.3.3 і лемою 2.1.1 відповідно

$$(I) \qquad \|\varphi\|^{(\alpha)}_{p,\theta} \asymp 2^{j(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{2})}\|a\|_{l^{m_j}_p},$$

$$(II) \qquad \|\varphi\|_q \asymp 2^{-j(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})}\|a\|_{l^{m_j}_q},\ 1\le q\le\infty,$$

де $a = \{a_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_{j,d}}$, $m_j := \sharp Z_{j,d}$.

Далі, нехай $f\in B^{\alpha}_{p,\theta}\subset L_q(\mathbb{I}^d)$. Тоді, якщо $n\in\mathbb{N}$ — задано і $(n_j)^{\infty}_{j=0}$ така послідовність цілих невід'ємних чисел, що $\sum\limits_{j=0}^{\infty} n_j\le n$, то оптимальний (в розумінні точності наближення за порядком) агрегат $n-$членної апроксимації функції f по системі H^d вибираємо у вигляді

$$S^{(n)}(f;\mathrm{H}^d)(\boldsymbol{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} G^p_{n_j}(f_j;\mathrm{H}^d)(\boldsymbol{t}), \qquad \boldsymbol{t}\in\mathbb{I}^d,$$

де $G^p_m(f_j;\mathrm{H}^d)$ — функції, визначені у пункті 2.4.1.

Тоді для будь-якого q, $1 \le q \le \infty$,

$$\|f - S^{(n)}(f; \mathrm{H}^d)\|_q \le \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j - G^p_{n_j}(f_j; \mathrm{H}^d)\|_q. \tag{2.57}$$

Далі, із співвідношень (I) і (II) випливає, що для $f \in SB^{\alpha}_{p,\theta}$

$$\|f_j\|_p \asymp 2^{-j(\frac{d}{p}-\frac{d}{2})} \|(b_{\overline{k}})_{\overline{k}\in Z_{j,d}}\|_{l_p^{m_j}} \asymp 2^{-j(\frac{d}{p}-\frac{d}{2})} \cdot 2^{-j(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{2})} \|f_j\|^{(\alpha)}_{p,\theta} \le$$

$$\le 2^{-j\alpha} \|f_j\|^{(\alpha)}_{p,\theta} \ll 2^{-j\alpha},$$

тобто

$$f_j \in C2^{-j\alpha}(W^p_j \cap B_p) \tag{2.58}$$

з деякою додатною сталою C.

Тепер розглянемо сімейство лінійних операторів $A_j : W_j \to \mathbb{R}^{m_j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, що діють за правилом

$$g_j(\boldsymbol{t}) = \sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}}(\boldsymbol{t}) \quad \longrightarrow \quad a^{(j)} = (a_{\overline{k}})_{\overline{k}\in Z_{j,d}}.$$

Для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$ оператором A_j здійснюється взаємно-однозначне відображення між лінійними просторами W_j та $\mathbb{R}^{m_j}$ і, згідно із співвідношенням (II),

$$\|A_j\|_p := \|A_j\|_{L_p(\mathbb{I}^d)\to l_p^{m_j}} \ll 2^{j(\frac{d}{p}-\frac{d}{2})}, \tag{2.59}$$

а якщо $A_j^{-1} :\ \mathbb{R}^{m_j} \to W_j$ — оператор, що є оберненим до A_j, то

$$\|A_j^{-1}\|_q := \|A_j^{-1}\|_{l_q^{m_j}\to L_q(\mathbb{I}^d)} \ll 2^{-j(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})}. \tag{2.60}$$

Позначимо $\varepsilon := \{e_1, \ldots, e_n\}$ — канонічний (стандартний) базис в $\mathbb{R}^n$, а через $G^{(\varepsilon)}_m :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$, — оператор, що діє за правилом

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \ \longrightarrow G^{(\varepsilon)}_m\ \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} x_{k_j} e_{k_j},$$

$\{k_j\}_{j=1}^m$ — така підсистема системи $\{1, \ldots, n\}$, що $|x_{k_1}| \ge |x_{k_2}| \ge \ldots \ge |x_{k_m}|$. При $m = 0$ вважаємо, що $G^{(\varepsilon)}_m \boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$). Для $B \subset l^n_s$ означимо

$$g_m(B;\ \varepsilon;\ l^n_s) := \sup_{\boldsymbol{x}\in B} \|\boldsymbol{x} - G^{(\varepsilon)}_m \boldsymbol{x}\|_{l^n_s}.$$

Із (2.57), скориставшись теоремою 2.4.1, взявши до уваги (2.58)–(2.60), отримаємо: для $f \in SB^{\alpha}_{p,\theta}$ і $n_j \le m_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f - S^{(n)}(f; \mathrm{H}^d)\|_q \ll \sum_{j=0}^{\infty} \|f_j - G^p_{n_j}(f_j; \mathrm{H}^d)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_{n_j}(f_j;\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \ll \sum_{j=0}^{\infty} \inf_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}_{j,d} \\ \sharp\Lambda = n_j}} \|f_j - \sum_{\overline{k} \in \Lambda} (f_j, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{\infty} \|A_j^{-1}\|_q \cdot \|A_j\|_p \cdot 2^{-j\alpha} \sup_{b \in B_p^{m_j}} \|b - G^{(\varepsilon)}_{n_j} b\|_{l_q^{m_j}} \ll$$

$$\ll \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{q})} g_{n_j}(B_p^{m_j};\ \varepsilon;\ l_q^{m_j}), \quad 1 \le q \le \infty. \tag{2.61}$$

Таким чином, можна стверджувати, що для будь-якого натурального числа n і такої послідовності $(n_j)_{j=0}^{\infty}$ цілих невід'ємних чисел, що $\sum\limits_{j=0}^{\infty} n_j \le n$ і $n_j \le m_j = \sharp Z_{j,d}$ виконується нерівність

$$\sigma_n(SB^{\alpha}_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \ll \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j(\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{q})} g_{n_j}(B_p^{m_j};\ \varepsilon;\ l_q^{m_j}) \tag{2.62}$$

для будь-якого q, $1 \le q < \infty$.

Перш ніж продовжити оцінку величин $\sigma_n(SB^{\alpha}_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d))$, зробимо зауваження стосовно наведеної нижче нерівності (2.63) і щодо обумовлених нею подальших дій. Нехай задано натуральне число n, $n \ge 2^d$. Підберемо таке $s \in \mathbb{Z}_+$, щоб виконувалось співвідношення $\sum\limits_{j=0}^{s} \sharp Z_{j,d} \le n < \sum\limits_{j=0}^{s+1} \sharp Z_{j,d}$, або враховуючи, що $\bigcup\limits_{j=0}^{l} Z_{j,d} = Y_{l,d}$, $Z_{j_1,d} \cap Z_{j_2,d} = \oslash$, $j_1 \ne j_2$ і $\sharp Y_{l,d} = 2^{ld}$, — рівносильне йому співвідношення $2^{sd} \le n < 2^{(s+1)d}$. Оскільки, очевидно, при $1 \le p,\, q,\, \theta < \infty$ і α таких, що $\left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q}\right)_+ < \alpha < \frac{1}{p}$, справедливі нерівності

$$\sigma_{2^{(s+1)d}}(SB^{\alpha}_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \le \sigma_n(SB^{\alpha}_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \le \sigma_{2^{sd}}(SB^{\alpha}_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)), \tag{2.63}$$

то оцінку зверху для величин $\sigma_n(SB^{\alpha}_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d))$ достатньо довести для $n = 2^{sd}$, $s = 0, 1, \ldots$, а також лише для таких значень параметрів p, q і α, що $1 \le p \le q < \infty$ і $\frac{d}{p} - \frac{d}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$. Для інших значень параметрів p, q та α із області $\mathcal{D}$ оцінка зверху випливає із оцінки зверху при $1 < p = q < \infty$ внаслідок вкладення $L_{q_1} \hookrightarrow L_{q_2}$, $1 \le q_2 \le q_1 < \infty$.

Отже, нехай зафіксовано $s \in \mathbb{N}$ і $n = 2^{sd} =: M_s$. Для додатного числа δ покладемо

$$n_j = \begin{cases} m_j, & 0 \le j \le s-1, \\ [C2^{-\delta(j-s)} m_s], & j \ge s, \end{cases}$$

де C — така додатна стала, що $\sum\limits_{j=0}^{\infty} n_j \le n$ (нагадаємо, $m_0 = 1$ і $m_j = (2^d - 1)2^{(j-1)d}$, $j = 1, 2, \ldots$). Зрозуміло, що

$$\sum_{j=0}^{\infty} n_j \le \sum_{j=0}^{s-1} m_j + m_s \cdot C \sum_{j=s}^{\infty} 2^{-\delta(j-s)} \le M_s = n,$$

якщо $C < C(\delta) = 1 - 2^{-\delta}$.

Повернемося до нерівності (2.62) і продовжимо оцінку її правої частини. Але, попередньо зауважимо, що у Додатку А встановлені точні за порядком оцінки величин $g_n(B_p^m;\ \varepsilon;\ l_q^m)$ при $0 < p, q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ і $m = [\gamma n] + 1$, $\gamma > 1$. А саме,

$$g_n(B_p^{[\gamma n]+1};\ \varepsilon;\ l_q^{[\gamma n]+1}) \asymp n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}. \tag{2.64}$$

Очевидно, при $0 \le j \le s - 1$

$$g_{n_j}(B_p^{m_j};\ \varepsilon;\ l_q^{m_j}) = 0. \tag{2.65}$$

Далі, із означення послідовності $(n_j)_{j=0}^{\infty}$ випливає, — можна знайти таке $\lambda = \lambda(\delta) > 1$, що для $s^* = [\lambda s] + 1$ буде $n_j = 0$, якщо $j > s^*$ і $n_j \ge 1$, якщо $s \le j \le s^*$. Тоді, згідно з означенням величин $g_n(B_p^m;\ \varepsilon;\ l_q^m)$ при $n = 0$, беручи до уваги нерівність $\| \cdot \|_{l_q^m} \le \| \cdot \|_{l_p^m}$, $1 \le p < q < \infty$, можна записати при $j > s^*$

$$g_{n_j}(B_p^{m_j};\ \varepsilon;\ l_q^{m_j}) \le 1, \quad 1 \le p \le q < \infty. \tag{2.66}$$

Для j, $s \le j \le s^*$, згідно з (2.64) при $1 \le p < q < \infty$

$$g_{n_j}(B_p^{m_j};\ \varepsilon;\ l_q^{m_j}) \ll (2^{-\delta(j-s)} m_s)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}. \tag{2.67}$$

Отже, із співвідношення (2.62), використавши (2.65)–(2.67), при $1 \le p < q < \infty$ та $\frac{d}{p} - \frac{d}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$ отримаємо

$$g_n(SB_{p,\theta}^{\alpha};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \ll \sum_{j=s}^{s^*} 2^{-\alpha j} \cdot 2^{j(\frac{d}{p} - \frac{d}{q})} (2^{-\delta(j-s)} m_s)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} +$$

$$+ \sum_{j=s^*+1}^{\infty} 2^{-j(\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{q})} = m_s^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} 2^{\delta s(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \cdot \sum_{j=s}^{s^*} 2^{-\alpha j} \cdot 2^{j(\frac{d}{p} - \frac{d}{q})} \cdot 2^{\delta j(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} +$$

$$+\sum_{j=s^*+1}^{\infty}2^{-j(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{q})}\ll m_s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}2^{\delta s(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\cdot\sum_{j=s}^{s^*}2^{-\beta j}+2^{-s^*(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{q})}, \tag{2.68}$$

де $\beta:=\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{q}-\delta(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$. Якщо число δ задовольняє умову $0<\delta<(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{q})/(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$, то тоді $\beta>0$, а отже, врахувавши при оцінці другого доданка, що $s^*=[\lambda s]+1$, $\lambda>1$, отримаємо

$$g_n(SB^\alpha_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d))\ll m_s^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}2^{\delta s(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\cdot 2^{-\beta s}+2^{-\alpha s}\asymp 2^{-\alpha s}=n^{-\frac{\alpha}{d}}. \tag{2.69}$$

Аналогічно, при $1\le p=q<\infty$, $0<\alpha<\frac{1}{p}$, врахувавши, що для j, $s\le j\le s^*$, очевидно, $g_{n_j}(B_p^{m_j};\ \varepsilon;\ l_p^{m_j})\le 1$, отримаємо

$$g_n(SB^\alpha_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d))\ll\sum_{j=s+1}^{\infty}2^{-\alpha j}\ll 2^{-\alpha s}\asymp n^{-\frac{\alpha}{d}}. \tag{2.70}$$

Оцінка знизу. Достатньо встановити таку оцінку для $g_m(SB^\alpha_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d))$ за умов $1\le q\le p<\infty$ та $0<\alpha<\frac{1}{p}$. Для заданого натурального числа m, $m>2^d$ підберемо таке $n\in\mathbb{N}$, що $\sharp Y_{n-2,d}\le m<\sharp Y_{n-1,d}$, тобто $2^{(n-2)d}\le m<2^{(n-1)d}$. Зауваживши, що $\sharp Z_{j,d}=\sharp\big(Y_{j,d}\setminus Y_{j-1,d}\big)=2^{jd}-2^{(j-1)d}=2^{(j-1)d}(2^d-1)$ (а тоді, зрозуміло, $\sharp Z_{n,d}\ge\sharp Y_{n-1,d}>m$), розглянемо простір $B(n)$ поліномів по системі $\widetilde{H}^d_n=\{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_{n,d}}$ вигляду

$$R_nf(\boldsymbol{x})=\sum_{\overline{k}\in Z_{n,d}}b_{\overline{k}}(f)h_{\overline{k}}(\boldsymbol{x}),\quad f\in L_q(\mathbb{I}^d), \tag{2.71}$$

(отже, $B(n)\subset W_n$). Далі, нехай $B(n)^\alpha_{p,\theta}$ — підпростір із $B^\alpha_{p,\theta}\subset L_q(\mathbb{I}^d)$, що складається із функцій $f\in B(n)$, тобто $B(n)^\alpha_{p,\theta}:=B(n)\cap B^\alpha_{p,\theta}$. Тоді

$$g_m(SB^\alpha_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d))\ge g_m(SB(n)^\alpha_{p,\theta};\ \widetilde{H}^d_n;\ L_q(\mathbb{I}^d)). \tag{2.72}$$

Розглянемо відображення $A:\ B(n)\to\mathbb{R}^{m_n}$ $(m_n=\sharp Z_{n,d})$, що $Af:=\{b_{\overline{k}}(f)\}_{\overline{k}\in Z_{n,d}}$, $f\in B(n)$. Тоді для $f\in B(n)^\alpha_{p,\theta}$, згідно з (I) $\|f\|^{(\alpha)}_{p,\theta}\asymp 2^{n(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{2})}\|Af\|_{l_p^{m_n}}$, а для $f\in B(n)$ згідно з (II) $\|f\|_q\asymp 2^{-n(\frac{d}{q}-\frac{d}{2})}\|Af\|_{l_q^{m_n}}$. Тому, аналогічно, як і при встановленні оцінок зверху, відштовхуючись від (2.71), знаходимо

$$g_m(SB(n)^\alpha_{p,\theta};\ \widetilde{H}^d_n;\ L_q(\mathbb{I}^d))\gg$$

$$\gg\sup_{f\in SB(n)^\alpha_{p,\theta}}\inf_{\substack{\Lambda\subset\mathbb{Z}_{n,d}\\ \sharp\Lambda=m}}\|f-\sum_{\overline{k}\in\Lambda}b_{\overline{k}}(f)h_{\overline{k}}\|_q\gg 2^{-n\alpha}2^{nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}g_m(B_p^{m_n};\ \varepsilon;\ l_q^{m_n}).$$

Звідси, враховуючи, що $m_n \asymp m \asymp 2^{nd}$, застосувавши до оцінки $g_m(B_p^{m_n};\ \varepsilon;\ l_q^{m_n})$ співвідношення (2.64), у поєднанні з (2.72) отримаємо

$$g_m(SB^\alpha_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \gg 2^{-n\alpha} \asymp m^{-\frac{\alpha}{d}}.$$

Теорема 2.4.2 доведена. ■

Щодо теореми 2.4.2 зауважимо наступне: Е. С. Бєлінським [5] при розгляді наближень класів $1-$періодичних функцій $S\bar{B}^\alpha_{p,\theta}$ за допомогою $m-$членних агрегатів побудованих за тригонометричною системою $\mathcal{T} = \{e^{2\pi ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$, у випадку $d=1$ доведено, зокрема, що

$$\sigma_m(S\bar{B}^\alpha_{p,\theta};\ \mathcal{T};\ L_q(\mathbb{I})) \asymp m^{-\frac{q}{2}(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}$$

при $1 \le p \le 2 < q < \infty$, $\frac{1}{p}-\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$.

Зауважимо, що класи $S\bar{B}^\alpha_{p,\theta}$ визначаються аналогічно класам $SB^\alpha_{p,\theta}$. Відмінність полягає лише у використанні інших модулів неперервності, інформацію щодо яких можна отримати із [146].

Порівнюючи наведену оцінку з оцінкою величини $\sigma_m(SB^\alpha_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}))$ із теореми 2.4.2 при $d=1$ (враховуючи також, що $S\bar{B}^\alpha_{p,\theta} \subset SB^\alpha_{p,\theta}$), легко показати, що при даних обмеженнях на параметри p, q та α наближення класів $SB^\alpha_{p,\theta}$ за допомогою тригонометричної системи, взагалі кажучи, поступається за порядком наближенню за системою Хаара (одновимірною). Підтвердженням цього факту, наприклад, у випадку $p=2$, $q=4$, і відповідно $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$, є достатньо просте порівняння вказаних оцінок, яке використовує лише відповідну геометричну ілюстрацію для даної множини параметрів p, q та α.

До такого ж висновку приходимо і у випадку $d \ge 2$. Для цього достатньо порівняти оцінки величин $\sigma_m(SB^\alpha_{p,\theta};\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}))$ з оцінками величин $\sigma_m(S\bar{B}^\alpha_{p,\theta};\ \mathcal{T};\ L_q(\mathbb{I}^d))$, знайденими С. А. Стасюком [201].

Теорема 2.4.3. *Нехай* $(d,p,q,\alpha) \in \mathcal{D}$. *Тоді*

$$\sigma_m(SH^\alpha_p)_q \asymp g_m(SH^\alpha_p)_q \asymp m^{-\frac{\alpha}{d}}.$$

Доведення теореми 2.4.3 фактично є повторенням доведення теореми 2.4.2. Очевидної корекції потребують лише ті місця, де використовується співвідношення (I) із доведення теореми 2.4.2. Цим співвідношенням стверджується: якщо $\varphi \in W_j$, $j \in Z_+$, тобто $\varphi(t) = \sum\limits_{\bar{k}\in\mathbb{Z}_{j,d}} a_{\bar{k}} h_{\bar{k}}(t)$, $a_{\bar{k}} \in \mathbb{R}$ і, до того ж, $\varphi \in B^\alpha_{p,\theta}$, $1 \le p, \theta < \infty$,

$0 < \alpha < \frac{1}{p}$, то

$$\|\varphi\|_{p,\theta}^{(\alpha)} \asymp 2^{j(\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{2})} \|a\|_{l_p^{m_j}},$$

$a = \{a_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in Z_{j,d}}$, $\|a\|_{l_p^{m_j}} := \left(\sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |a_{\overline{k}}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $m_j := \sharp Z_{j,d}$ і $\|\cdot\|_{p,\theta}^{(\alpha)}$ — норма в просторі $B_{p,\theta}^{\alpha}$. У випадку, коли $\varphi \in H_p^{\alpha}(M)$, $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ (також за умови, що $\varphi \in W_j$), в силу теореми 2.3.2

$$\|\varphi\|_{H_p^{\alpha}} \asymp 2^{j(\alpha - \frac{d}{p} + \frac{d}{2})} \|a\|_{l_p^{m_j}}. \tag{2.73}$$

Співвідношення (2.73) відіграє істотну роль в оцінці зверху величин $\sigma_M(SH_p^{\alpha})_q$.

Оцінка знизу для $g_m(SH_p^{\alpha})_q$, а згідно з теоремою 2.4.1 і для $\sigma_m(SH_p^{\alpha})_q$, є прямим наслідком такої оцінки для $g_m(SB_{p,\theta}^{\alpha})_q$ в теоремі 2.4.2, якщо зауважити, що $SB_{p,\theta}^{\alpha} \subset SH_p^{\alpha}$ при $1 \le \theta < \infty$. Останнє вкладення — результат порівняння виразів (з коефіцієнтами Фур'є-Хаара) у співвідношеннях для півнорм $|f|_{p,\theta}^{(\alpha)}$ та $|f|_{H_p^{\alpha}}$, $f \in SB_{p,\theta}^{\alpha}$ (див. теореми 2.3.3 та 2.3.2). ∎

2.5 Апроксимація функцій із просторів $B_{\theta}^{\Lambda}(L_p)$

Запроваджена нова шкала просторів $B_{\theta}^{\Lambda}(L_p) \subset L_p(\mathbb{I}^d)$, вивчені елементарні властивості таких просторів та встановлені оцінки зазначеного типу нелінійного наближення одиничних куль у цих просторах.

2.5.1 Означення та елементарні властивості

Беручи за основу розклад функції $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ в ряд Фур'є–Хаара за базисом H^d запровадимо до розгляду простори $B_{\theta}^{\Lambda}(L_p)$, — як лінійні підпростори $L_p(\mathbb{I}^d)$, що наділені вказаною нормою $\|f\|_{p,\theta}^{\Lambda}$, $f \in B_{\theta}^{\Lambda}(L_p)$. Ця норма задається за допомогою функціонального параметра Λ і числового параметра θ у вигляді виразів, що містять величини $\|(f, h_i)h_i\|_p$, $i = 0, 1, \ldots$, і певним чином характеризує функції $f \in B_{\theta}^{\Lambda}(L_p)$ ступенем спадання до нуля цих величин. Кінцевою метою є встановлення для класів $SB_{\theta}^{\Lambda}(L_p)$ аналога основних результатів попереднього підрозділу — теорем 2.4.2 та 2.4.3.

У вихідному варіанті означення просторів $B_{\theta}^{\Lambda}(L_p)$ використаємо базисну систему функцій H_0^d (див. пункт 2.1.3).

Отже, нехай Q_j, $j \in \mathbb{N}$,— множина кубів I об'ємом $\mathrm{vol}\,\mathrm{I} = 2^{(-j+1)d}$ двійкового розбиття куба $\mathbb{I}^d$. На кожному кубі $\mathrm{I} \in Q_j$, як зазначено раніше, зосереджені носії рівно 2^d-1 функцій системи H_0^d. Позначимо ці функції $\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{(i)}$, $i=0,1,\ldots$. Таким чином, маємо відповідність

$$Q_j \ni \mathrm{I} \quad \longleftrightarrow \quad \{\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{(i)}\}_{i=1}^{2^d-1} \in \mathrm{H}_0^d.$$

Покладемо

$$\mathrm{H}(j) := \{\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{(i)} : \ \mathrm{I} \in Q_j, \ i=1,2,\ldots,2^d-1\}.$$

Далі, нехай $\Lambda : \ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — довільна неспадна функція, визначена на $\mathbb{R}_+$. Множину таких функцій позначимо через P_0.

Означення 2.5.1. *Для* $1 \le p \le \infty$ *і* $\Lambda \in P_0$ *нормовані простори* $B_\theta^\Lambda(L_p)$ *— це множини функцій* $f \in L_p^0(\mathbb{I}^d)$*, для яких*

$$\|f\|_{p,\theta}^\Lambda := \left(\sum_{j=1}^\infty \Lambda^\theta(2^j) \sum_{\mathrm{I}\in Q_j} \sum_{i=1}^{2^d-1} \|c_{\mathrm{I}}^{(i)}(f)\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{(i)}\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

і

$$\|f\|_{p,\infty}^\Lambda := \sup_j \Lambda(2^j) \sum_{\mathrm{I}\in Q_j} \sum_{i=1}^{2^d-1} \|c_{\mathrm{I}}^{(i)}(f)\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{(i)}\|_p < \infty, \quad \theta = \infty,$$

де $c_{\mathrm{I}}^{(i)}(f) = \int\limits_{\mathbb{I}^d} f(\boldsymbol{x})\mathrm{H}_{\mathrm{I}}^{(i)}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$, $i \in \mathbb{N}$, *— коефіцієнти Фур'є функції* f *по системі* $\mathrm{H}_0^d = \bigcup\limits_{j=1}^\infty \mathrm{H}(j) \cup \{\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}\}$, *а* $L_p^0(\mathbb{I}^d) := \Big\{ f \in L_p(\mathbb{I}^d) : \ \int\limits_{\mathbb{I}^d} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = 0 \Big\}$.

У подальшому функція Λ, окрім умови $\Lambda \in P_0$, підпорядковується деяким додатковим обмеженням. Дамо наступні означення.

Означення 2.5.2. *Функція* $\varphi : \ (0;\infty) \longrightarrow (0;\infty)$ *задовольняє* $\Delta_2^{(1)}$ *–умову (пишемо:* $\varphi \in \Delta_2^{(1)}$*), якщо існують такі сталі* $C_1, C_2 > 1$*, що*

$$C_1 \le \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} \le C_2.$$

Означення 2.5.3. *Якщо* $1 \le p, q, \theta \le \infty$ *і* $d \in \mathbb{N}$*, то для функції* $\Lambda \in P_0$ *запис* $\Lambda \in \Delta_2^{(1)}(p,q,\theta,d)$ *означає, що функція* $\Lambda(t) \cdot t^{-\left(\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{\theta}\right)_+ + \left(\frac{d}{p}-\frac{d}{q}\right)_+\right)} \in \Delta_2^{(1)}$.

Покладемо $\xi = \xi(p,q,\theta) = \left(\frac{d}{p} - \frac{d}{\theta}\right)_+ + \left(\frac{d}{p} - \frac{d}{q}\right)_+$ і визначимо

$$A = \{(p,q,\theta) : \ 1 \le p, \, q, \, \theta \le \infty \text{ і } \xi > 0\},$$

$$A_0 = \{(p,q,\theta) : \ 1 \le p, \, q, \, \theta \le \infty \text{ і } \xi = 0\}.$$

Зрозуміло, що при $(p,q,\theta)\in A_0$ (тобто, $1\le\theta\le p\le\infty$ та $1\le q\le p\le\infty$) умови $\Lambda\in\Delta_2^{(1)}(p,q,\theta,d)$ і $\Lambda\in P_0\cap\Delta_2^{(1)}$ рівносильні. Прикладами функцій, що задовольняють умову $\Lambda\in P_0\cap\Delta_2^{(1)}$, є функції $\Lambda(t)=\ln t$ і $\Lambda(t)=t^\beta$, $\beta>0$. Умову $\Lambda\in\Delta_2^{(1)}(p,q,\theta,d)$ при $(p,q,\theta)\in A$ задовольняють, наприклад, функції $\Lambda(t)=t^\beta$, $\beta>\xi$, та $\Lambda(t)=t^\xi\ln^\gamma(t+1)$, $\gamma>0$.

Зафіксуємо деякі прості властивості просторів $B_\theta^\Lambda(L_p)$; частина з них є елементарними наслідками означення 2.5.2 (далі покладаємо $\overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,\theta}:=B^\alpha_{p,\theta}\cap L_p^0(\mathbb{I}^d)$):

(a) Для будь-яких p, $1\le p\le\infty$ і $\Lambda\in P_0$

$$B^\Lambda_{\theta_1}(L_p)\hookrightarrow B^\Lambda_{\theta_2}(L_p),\ \ 1\le\theta_1<\theta_2\le\infty.$$

(b) Якщо $1\le p=\theta<\infty$ і $\Lambda(t)=t^\alpha$, $0<\alpha<\frac{1}{p}$, то

$$\overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,p}\sim B_p^{(\alpha)}(L_p),$$

тобто простори $\overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,p}$ і $B_p^\Lambda(L_p)=:B_p^{(\alpha)}(L_p)$, $\Lambda(t)=t^\alpha$, як множини функцій — тотожні, а відповідні норми елементів — еквівалентні.

Справді, за вказаних обмежень щодо параметрів p та Λ, при $1\le\theta<\infty$ для будь-якої функції $f\in B_\theta^{(\alpha)}(L_p):=B_\theta^\Lambda(L_p)$, $\Lambda(t)=t^\alpha$ маємо

$$\|f\|^\Lambda_{p,\theta}=\left(\sum_{j=1}^\infty 2^{j\alpha\theta}\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}}|b_{\overline{k}}(f)|^\theta\cdot 2^{-j\theta\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{\theta}}=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^\infty 2^{j\left(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{2}\right)\theta}\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}}|b_{\overline{k}}(f)|^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}},\tag{2.74}$$

де, нагадаємо, $b_{\overline{k}}(f):=(f,h_{\overline{k}})$, $\overline{k}\in Z_{j,d}$.

З іншого боку, згідно з теоремою 2.3.3 для будь-якої функції $f\in\overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,\theta}$, $1\le p,\theta<\infty$, при $0<\alpha<\frac{1}{p}$

$$\|f\|_{B^\alpha_{p,\theta}}:=\|f\|^{(\alpha)}_{p,\theta}\asymp\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\left[2^{j\left(\alpha-\frac{d}{p}+\frac{d}{2}\right)}\Big(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}}|b_{\overline{k}}(f)|^p\Big)^{1/p}\right]^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}.\tag{2.75}$$

Співставивши (2.74) та (2.75) при $p=\theta$, маємо $\|f\|^{(\alpha)}_{p,p}\asymp\|f\|^\Lambda_{p,p}$, $f\in B_\theta^{(\alpha)}(L_p)$, що й доводить властивість (b).

(c) $$\overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,\theta}\hookrightarrow B_\theta^{(\alpha)}(L_p)\text{ при }1\le p<\theta<\infty,\ \ 0<\alpha<\frac{1}{p}.$$

$$(d) \qquad \overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,\theta} \hookleftarrow B^{(\alpha)}_{\theta}(L_p) \text{ при } 1 \le \theta < p < \infty, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{p}.$$

Для доведення, як і в попередньому випадку ($p = \theta$, властивість (b)), достатньо порівняти (2.74) та (2.75), взявши до уваги нерівність $||\cdot||_{l^s_\gamma} \le ||\cdot||_{l^s_\mu}$, $1 \le \mu < \gamma < \infty$.

Розв'язок задачі про конструктивну характеристику просторів $B^{(\alpha)}_{\theta}(L_p)$ в термінах величин найкращих $m-$членних наближень, щоправда лише у випадку $d = 1$, при $1 < \theta = p < \infty$ і $0 < \alpha < \frac{1}{p}$ (а тоді згідно з властивістю (b) $B^{(\alpha)}_{\theta}(L_p) \sim \overset{\circ}{B}{}^{\alpha}_{p,p}$), як частковий випадок більш загального результату, можна знайти в [205]. А саме, доведено, що

$$f \in B^{(\alpha)}_{p}(L_p) \Longleftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sigma_m(f;\ \mathrm{H};\ L_\tau(\mathbb{I}))m^{\alpha - \frac{1}{p}}\right]^p < \infty,$$

де $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$, $0 < \alpha < 1$ і параметри p, τ та α пов'язані співвідношенням $p = \left(\alpha + \frac{1}{\tau}\right)^{-1}$, тобто $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{\tau}$ (зрозуміло, що тоді $1 < p < \tau < \infty$ і $0 < \alpha < \frac{1}{p}$).

Нами, у випадку довільного $d \in \mathbb{N}$ вивчені апроксимаційні властивості системи H^d стосовно класів $SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ $1 \le p, \theta \le \infty$ (одиничних куль в просторах $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$) на широкому спектрі зміни функціонального параметра Λ, і зокрема, при $\Lambda(t) = t^r$, $0 < r < \frac{1}{p}$, $1 \le p < \infty$. Однак, питання щодо конструктивного (у вигляді прямих та обернених теорем) опису просторів $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ в термінах величин $\sigma_m(f;\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d))$, $f \in B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ у загальній постановці залишається поки що без відповіді.

2.5.2 Головний результат

Теорема 2.5.1. *Нехай* $1 \le p, \theta \le \infty$, $1 < q < \infty$ *і* $\Lambda \in \Delta^{(1)}_2(p, q, \theta, d)$. *Тоді*

$$\sigma_m(SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p);\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \asymp g_m(SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p);\ \mathrm{H}^d;\ L_q(\mathbb{I}^d)) \asymp \Lambda^{-1}(m^{\frac{1}{d}})m^{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\theta}\right)_+}.$$

Доведення теореми 2.5.1. Вихідним пунктом є представлення норм елементів просторів $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$, що використовує векторну нумерацію функцій Хаара, тобто — систему $\mathbb{H}^d_0$. А саме, легко бачити, що для $f \in B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$

$$\|f\|^{\Lambda}_{p,\theta} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \Lambda^{\theta}(2^j) 2^{-j\theta d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)} \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}(f)|^{\theta}\right)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{2.76}$$

$$\|f\|^{\Lambda}_{p,\infty} = \sup_j \Lambda(2^j) 2^{-jd\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)} \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}(f)|. \tag{2.77}$$

Наступні етапи доведення теореми 2.5.1 є повтореннями, — з незначними відмінностями, що викликані умовами на функцію Λ в (2.76), (2.77), — доведення теореми 2.4.2. Опишемо ці відмінності у тезисному вигляді, а також встановимо порядок дій, до яких вони зумовлюють.

Ключова роль при встановленні як оцінок зверху, так і оцінок знизу в теоремі 2.4.2 належала співвідношенням (I) і (II) із її доведення. Співвідношення (II) не пов'язане безпосередньо з класами функцій, що апроксимуються, і тому залишається в силі і при доведенні теореми 2.5.1. Замість співвідношення (I), як наслідку теореми 2.3.3 про еквіваленте представлення норми в просторах $B^{\alpha}_{p,\theta}$, при встановлені оцінок знизу в теоремі 2.5.1 слід використати для $\varphi \in W_j \cap B^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ рівності

$$\|\varphi\|^{\Lambda}_{p,\theta} = \Lambda(2^j) 2^{-j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{2}\right)} \|a\|_{l^{m_j}_{\theta}} \tag{2.78}$$

у випадку $1 \le \theta < \infty$ та

$$\|\varphi\|^{\Lambda}_{p,\infty} = \Lambda(2^j) 2^{-j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{2}\right)} \|a\|_{l^{m_j}_{1}} \tag{2.79}$$

у випадку $\theta = \infty$.

В доведенні оцінки зверху в теоремі 2.4.2 визначальним було вкладення (2.58) за умови $f \in SB^{\alpha}_{p,\theta}$. Його аналогом для $f \in SB^{\Lambda}_{\theta}(L_p)$ є вкладення

$$f_j \in C\Lambda^{-1}(2^j) 2^{j\left(\frac{d}{p}-\frac{d}{\theta^*}\right)_+}(W_j \cap B_p),$$

де $\theta^* = \theta$, якщо $1 \le \theta < \infty$, і $\theta^* = p$, якщо $\theta = \infty$. В доведенні такого вкладення замість (I) слід використати (2.78) при $1 \le \theta < \infty$ і (2.79) при $\theta = \infty$, а також, додатково, відоме співвідношення $\|\cdot\|_{l^n_{p_1}} \le n^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \|\cdot\|_{l^n_{p_2}}$, $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$.

Очевидній корекції підлягають також міркування, що використовуються при переході від нерівності (2.68) до нерівностей (2.69) та (2.70). Тут слід взяти до уваги умову $\Lambda \in \Delta^{(1)}_2(p,q,\theta,d)$, яка фактично є умовою вкладення $B^{\Lambda}_{\theta}(L_p) \subset L_q(\mathbb{I}^d)$. ■

2.6 Апроксимація класів $SB^{\alpha}_{p,\theta}$ за кратною системою Фабера–Шаудера

Встановлені точні за порядком оцінки величин n – членних проективних наближень за системою Фабера–Шаудера для функцій, визначених на d – вимірному кубі, і які належать класам Бесова.

2.6.1 Базові означення та коротка історична довідка

Нехай $\mathscr{X}$ — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$, а $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}$ — базис Шаудера у просторі $\mathscr{X}$, тобто для будь-якого $\varphi \in \mathscr{X}$ існує єдина числова послідовність $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ така, що $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k$ (ряд збігається за нормою $\|\cdot\|_{\mathscr{X}}$).

Відомо, якщо Φ — базис в $\mathscr{X}$, то існує таке сімейство лінійних функціоналів $\Phi^* = \{\varphi_k^*\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{X}^*$ ($\mathscr{X}^*$ — простір, спряжений до $\mathscr{X}$), що $a_k = \langle\varphi;\varphi_k^*\rangle$, $\varphi \in \mathscr{X}$, $k = 1, 2, \ldots$. Сімейства Φ та Φ^* біортогональні, тобто $<\varphi_i;\varphi_k^*>=\delta_{ik}$.

Для кожного $\varphi \in \mathscr{X}$ позначимо через $M_n(\varphi;\Phi)$ множину всіх лінійних (відносно системи Φ) комбінацій вигляду $\pi_Q(\varphi) = \sum\limits_{k\in Q} a_k\varphi_k$ де Q — довільна множина натуральних чисел, $\#Q{=}n$ (покладаємо також $M_0(\varphi;\Phi) = \{0\}$) і $a_k, k \in Q$ — коефіцієнти з розкладу φ за базисом Φ.

Назвемо $n-$членну апроксимацію довільного елемента $\varphi \in \mathscr{X}$ за допомогою елементів сімейства $M_n(\varphi;\Phi)$ *$n-$членним проективним наближенням* φ за системою Φ. Похибка апроксимації за параметром n вимірюється величиною

$$e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathscr{X}) := \inf_{u\in M_n(\varphi;\Phi)} \|\varphi - u\|_{\mathscr{X}}.$$

Покладемо

$$e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathscr{X}) := \sup_{\varphi\in W} e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathscr{X}),$$

якщо W — довільна підмножина в $\mathscr{X}$.

Зважаючи на те, що Φ — базис, зауважимо, множина $\operatorname{span}\Phi$ — щільна в $\mathscr{X}$, тобто для довільного елемента $\varphi \in \mathscr{X}$: $e_n^{\mathrm{pr}}(\varphi;\Phi;\mathscr{X}) \to 0$ при $n \to \infty$. Виникає задача щодо швидкості прямування до нуля послідовності $e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathscr{X})$.

У зв'язку з численними застосуваннями подібного роду $n-$членних наближень (див., наприклад, [168]), задача стосовно знаходження асимптотичних оцінок величин $e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathscr{X})$ і більш загальна задача про оцінки величин найкращого $n-$членного наближення $\sigma_n(W;\Phi;\mathscr{X})$ розв'язана для багатьох класів функцій W і **ортогональних** базисів Φ (у відповідних просторах $\mathscr{X} \supset W$). Наприклад, для тригонометричного базису експонент $\Phi = \{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ відомі асимптотичні оцінки зазначених величин в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$ при всіх q, $1 \le q \le \infty$ у випадку, коли W — функціональний клас Соболєва чи Бєсова–Нікольського (див. [169]).

В [168] наведена досить повна бібліографія робіт, що стосуються $n-$членної апроксимації за допомогою агрегатів, побудованих і за іншими базисами Φ, які складаються, наприклад, із вейвлетів чи сплайнів (див. також [172–174, 202, 203, 205, 206]).

Проте, зазначимо, такі базиси мають різні властивості щодо нелінійного наближення класів гладких функцій і, зокрема, — класів $SB^{\alpha}_{p,\theta}$, означених у пункті 2.3.2.

У даному підрозділі задача полягає у встановленні порядкових оцінок величин $e_n^{\mathrm{pr}}(W;\Phi;\mathscr{X})$ за наступних вихідних даних:

$\mathscr{X} = L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 \le q \le \infty$;

$W = SB^{\alpha}_{p,\theta}$ — одинична куля у просторі Бєсова $B^{\alpha}_{p,\theta}$, $0<\alpha<1$, $1 \le p,\theta < \infty$;

Φ — так званий, "діамантовий" базис у просторі $C(\mathbb{I}^d)$ неперервних на $\mathbb{I}^d$ функцій.

В пункті 2.6.2 означається основний об'єкт — функціональний базис Φ і формулюються допоміжні та основний результати, а в пункті 2.6.3 подається доведення основної теореми.

2.6.2 Допоміжні твердження та головний результат

Визначимо сімейство Φ (див. [161]). Вихідною тут є функція $\psi(t) = \max\{0, 1-|t|\}$, $t \in \mathbb{R}$. Позначимо через D множину всіх "двійкових" точок відрізка $\mathbb{I}$: $D = \bigcup\limits_{k\ge 0} D_k$, де $D_0 = \{0;1\}$, $D_k = \left\{\dfrac{2j-1}{2^k},\ j = 1,\dots,2^{k-1}\right\}$. Означимо спочатку сімейство функцій Фабера–Шаудера з носіями на $\mathbb{I}$ наступним чином:

$$\Phi_\tau(t) = \psi(2^k(t-\tau)) \text{ для } \tau \in D_k, \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Тепер позначимо $C_0 := D_0$, $C_k = C_{k-1}\bigcup D_k$. Тоді $C^d_k = C^d_{k-1}\bigcup D_{k,d}$, де

$$D_{0,d} = D_0^d = \prod_{j=1}^{d} D_0,$$

$$D_{k,d} = \left\{\bar\tau = (\tau_1,\dots,\tau_d) \in C_k^d : \ (\exists i : \ \tau_i \in D_k)\right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Покладемо для $\bar t = (t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{I}^d$

$$\phi_{\bar\tau}(\bar t) = \prod_{j=1}^{d} \psi(2^k(t_j-\tau_j)), \quad \bar\tau \in D_{k,d}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Систему $\Phi = \{\phi_{\bar\tau} : \ \bar\tau \in D^d\}$ називають "діамантовим", або мультиафінним базисом і, якщо вона упорядкована так, що $\phi_{\bar\tau}$ з $\bar\tau \in D_{k,d}$ передує $\phi_{\bar\tau}$ з $\bar\tau \in D_{k+1,d}$, то ця система (послідовність) є базисом Шаудера у банаховому просторі $C(\mathbb{I}^d)$ неперервних на $\mathbb{I}^d$ функцій відносно рівномірної на $\mathbb{I}^d$ збіжності [161]. Тобто, для кожної функції

$f \in C(\mathbb{I}^d)$ існує однозначно визначене сімейство $\Phi^* = \{b_{\bar\tau} : \ \bar\tau \in D_{k,d},\, k = 0, 1, 2, \ldots\}$ таких дійсних чисел, що

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} b_{\bar\tau} \phi_{\bar\tau}. \tag{2.80}$$

Коефіцієнти $b_{\bar\tau} = b_{\bar\tau}(f)$ є лінійними функціоналами від f і $b_{\bar\tau}(\phi_{\bar\tau'}) = \delta_{\bar\tau\bar\tau'}$, тобто системи Φ та Φ^* — біортогональні.

Система Φ^* визначається явно через систему Φ (див. [195]) наступними формулами:

$$b_{\bar\tau}(f) = f(\bar\tau), \quad \bar\tau \in D_{0,d},$$

$$b_{\bar\tau}(f) = \frac{1}{2^d} \sum_{\varepsilon = \{-1,1\}^d} (f(\bar\tau) - f(\bar\tau^\varepsilon)), \quad \bar\tau \in D_{k,d}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де

$$\overline{\tau}^\varepsilon = \{\tau_1^\varepsilon, \ldots, \tau_d^\varepsilon\} \quad \text{і} \quad \tau_i^\varepsilon = \begin{cases} \tau_i + \varepsilon_i \cdot 2^{-k}, & \tau_i \in D_k, \\ \tau_i, & \tau_i \in C_{k-1}. \end{cases}$$

Розглянемо скінченновимірний проекційний оператор $R_k : \ C(\mathbb{I}^d) \to C(\mathbb{I}^d) :$ $R_k(f) = \sum\limits_{\bar\tau \in D_{k,d}} b_{\bar\tau}(f) \phi_{\bar\tau}$. Відомо, що для будь-якої функції $f \in C(\mathbb{I}^d)$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} R_k(f)$ збігається до f за нормою $\|\cdot\|_\infty$. Частинні суми $P_k(f) = \sum\limits_{l=0}^{k} R_l(f)$ інтерполюють f на множині C_k^d, тобто для $k \geq 0 :$ $f(\bar\tau) = P_k(f)(\bar\tau)$, $\bar\tau \in C_k^d$.

Сформулюємо відомі твердження, в яких відображені інші властивості системи Φ, які використовуються у доведенні теореми 2.6.1.

Твердження А$_2$. [162] *Для будь-яких* $a_{\bar\tau} \in \mathbb{R}$, $\bar\tau \in D_{k,d}$ *і* $1 \leq q \leq \infty$

$$\Big\| \sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} a_{\bar\tau} \phi_{\bar\tau} \Big\|_q \asymp 2^{-dk/q} \Bigg(\sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} |a_{\bar\tau}|^q \Bigg)^{\frac{1}{q}}, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Зокрема, $\|\phi_{\bar\tau}\|_q \asymp 2^{-dk/q}$, $\bar\tau \in D_{k,d}$.

Твердження Б$_2$. [162] *Нехай* $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ *і* $\frac{d}{p} < \alpha < 1$. *Тоді, якщо* $f \in B^\alpha_{p,\theta}$, *то*

$$\|f\|^\alpha_{p,\theta} \asymp \Bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \Big[2^{k(\alpha - \frac{d}{p})} \Big(\sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} |b_{\bar\tau}|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big]^\theta \Bigg)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Головний результат розкрито в наступному твердженні.

Теорема 2.6.1. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\frac{d}{p} < \alpha < 1$. *Тоді*

$$e_n^{\mathrm{pr}}(S\,B^{\alpha}_{p,\theta}; \Phi; L_q) \asymp n^{-\alpha/d}.$$

2.6.3 Доведення головної теореми

Оцінка зверху проводиться за такою ж схемою, як у доведенні теореми 2.4.2.

Нехай для $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\mathcal{F}_k = \mathrm{lin}\Big\{\phi_{\bar\tau}, \bar\tau \in D_{k,d}\Big\} = \left\{\varphi:\ \varphi(\boldsymbol{t}) = \sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} a_{\bar\tau}\phi_{\bar\tau}(\boldsymbol{t}),\ a_{\bar\tau} \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{t} \in \mathbb{I}^d\right\}.$$

Якщо $\varphi \in \mathcal{F}_k \cap B^{\alpha}_{p,\theta}$, то згідно з твердженнями Б$_2$ і А$_2$ відповідно:

(I) $\|\varphi\|^{\alpha}_{p,\theta} \asymp 2^{k(\alpha - d/p)}\|a\|_{l_p^{m_k}}$, де $a = \{a_{\bar\tau}\}_{\bar\tau \in D_{k,d}}$, $m_k = \#D_{k,d}$;

(II) $\|\varphi\|_q \asymp 2^{-dk/q}\|a\|_{l_q^{m_k}}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Для $\varphi \in \mathcal{F}_k$ виберемо таку множину $\Lambda_k^{(m)} \subset D_{k,d}$, що $\#\Lambda_k^{(m)} = m$ і

$$\min\{|a_{\bar\tau}|,\ \bar\tau \in \Lambda_k^{(m)}\} \ge \max\{|a_{\bar\tau}|,\ \bar\tau \in D_{k,d}\backslash\Lambda_k^{(m)}\}.$$

Зазначимо, що за таких умов множина $\Lambda_k^{(m)}$ при заданому m для деяких функцій φ може визначатися, взагалі кажучи, не однозначно, проте певний вибір (множини $\Lambda_k^{(m)}$) не впливає на кінцевий результат.

Для $n \in \mathbb{Z}_+$ нехай $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ така послідовність невід'ємних цілих чисел, що $\sum_{k=0}^{\infty} n_k \le n$. Звісно, в такій послідовності може бути лише скінченне число ненульових n_k. Через $G_m(\varphi)$, $m \le m_k$, позначимо поліном $G_m(\varphi)(t) = \sum\limits_{\bar\tau \in \Lambda_k^{(m)}} a_{\bar\tau}\phi_{\bar\tau}(t)$, і для $f \in B^{\alpha}_{p,\theta}$ оптимальний (в сенсі порядкових оцінок наближення) агрегат проективної $n-$членної апроксимації задамо у вигляді

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{\infty} G_{n_k}(f_k).$$

Тоді

$$\|f - S_n(f)\|_q \le \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k - G_{n_k}(f_k)\|_q, \tag{2.81}$$

де $f_k(\boldsymbol{t}) = \sum\limits_{\bar\tau \in D_{k,d}} b_{\bar\tau}\phi_{\bar\tau}(\boldsymbol{t})$, $k \in \mathbb{Z}_+$, а $b_{\bar\tau}$ — коефіцієнти із розкладу (2.80).

Далі, із співвідношень (II) і (I) випливає: якщо $f \in SB^{\alpha}_{p,\theta}$, то

$$\|f_k\|_p \asymp 2^{-dk/p} \|\{b_{\overline{\tau}}\}_{\overline{\tau} \in D_{k,d}}\|_{l_p^{m_k}} \asymp 2^{-k(\alpha-d/p)} 2^{-dk/p} \|f\|^{\alpha}_{p,\theta} \ll 2^{-k\alpha},$$

тобто

$$f_k \in C\, 2^{-k\alpha} (\mathcal{F}_k \cap \mathbb{B}_p), \tag{2.82}$$

де $\mathbb{B}_p = \{f \in L_p(\mathbb{I}^d) : \ \|f\|_p \le 1\}$ — одинична куля у просторі $L_p(\mathbb{I}^d)$, а C — деяка додатна стала.

Тепер розглянемо сімейство лінійних операторів $A_k : \ \mathcal{F}_k \to \mathbb{R}^{m_k}, \ \ k \in \mathbb{Z}_+$, що діють за правилом

$$\varphi_k(\boldsymbol{t}) =: \sum_{\overline{\tau} \in D_{k,d}} a_{\overline{\tau}} \phi_{\overline{\tau}}(\boldsymbol{t}) \quad \longrightarrow \quad a^{(k)} =: \{a_{\overline{\tau}}\}_{\overline{\tau} \in D_{k,d}}.$$

При кожному $k \in \mathbb{Z}_+$ оператор A_k здійснює взаємно-однозначне відображення між лінійними просторами $\mathcal{F}_k$ та $\mathbb{R}^{m_k}$ і згідно із співвідношенням (II)

$$\|A_k\|_p := \|A_k\|_{L_p(\mathbb{I}^d) \to l_p^{m_k}} \ll 2^{dk/p}, \tag{2.83}$$

а для оператора $A_k^{-1} : R^{m_k} \to \mathcal{F}_k$, оберненого до A_k,

$$\|A_k^{-1}\|_q := \|A_k^{-1}\|_{l_q^{m_k} \to L_q(\mathbb{I}^d)} \ll 2^{-dk/q}. \tag{2.84}$$

Тому із (2.81), враховуючи (2.82)—(2.84), маємо

$$\sup_{f \in SB^{\alpha}_{p,\theta}} \|f - S_n(f)\|_q \ll \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{f_k \in 2^{-k\alpha} B_p} \|f_k - G_{n_k}(f_k)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{k=0}^{\infty} \|A_k^{-1}\|_q \cdot \|A_k\|_p \cdot 2^{-k\alpha} \sup_{b^{(k)} \in B_p^{m_k}} \|b^{(k)} - \mathcal{J}_{n_k}(b^{(k)})\|_{l_q^{m_k}} \ll$$

$$\ll \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(\alpha + d(1/q - 1/p))k} \sup_{b^{(k)} \in B_p^{m_k}} \|b^{(k)} - \mathcal{J}_{n_k}(b^{(k)})\|_{l_q^{m_k}}, \tag{2.85}$$

де $b^{(k)} = \{b_{\overline{\tau}}\}_{\overline{\tau} \in D_{k,d}}$ і для $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{s=1}^{m} x_s e_s$ $\Big(\varepsilon = \{e_s\}_{s=1}^{m}$ — канонічний базис в $l_q^m \Big)$ $\mathcal{J}_n(\boldsymbol{x}) := \sum\limits_{j=1}^{n} x_{s_j} e_{s_j}$, а $\{s_j\}_{j=1}^{n}$ — така система натуральных чисел, що $|x_{s_1}| \ge |x_{s_2}| \ge \ldots \ge |x_{s_m}|$.

Але ж

$$\sup_{b^{(k)} \in B_p^{m_k}} \|b^{(k)} - \mathcal{J}_{n_k}(b^{(k)})\|_{l_q^{m_k}} = e^{\perp}_{n_k}(B_p^{m_k}; l_q^{m_k}) \tag{2.86}$$

(означення $e^{\perp}_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_q)$ див. у Додатку А).
А тому, поєднавши співвідношення (2.85) та (2.86), можна стверджувати, що

$$e^{\mathrm{pr}}_n(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \Phi; L_q) \ll \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} 2^{dk(1/p-1/q)} e^{\perp}_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_q) \tag{2.87}$$

(нагадаємо, що $m_k = \# D_{k,d} \asymp 2^{kd}$).

Продовження оцінки зверху правої частини (2.87), потребує певних зауважень, які полягають у наступному. Нехай задано натуральне число n, $n \geq 2^d$. Виберемо таке число s, $s \in \mathbb{Z}_+$, що

$$\sum_{k=0}^{s} \# D_{k,d} \leq n < \sum_{k=0}^{s+1} \# D_{k,d},$$

тобто $M_s \leq n < M_{s+1}$. Оскільки, очевидно, за припущень щодо значень параметрів p, q, θ та α маємо

$$e^{\mathrm{pr}}_{M_{s+1}}(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \Phi; L_q) \leq e^{\mathrm{pr}}_n(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \Phi; L_q) \leq e^{\mathrm{pr}}_{M_s}(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \Phi; L_q)$$

і $M_s \asymp 2^{sd} \asymp n$, то можна дійти висновку про справедливість твердження теореми 2.6.1 при $n \in \mathbb{N}$ у припущенні, що воно виконується лише при $n = M_s$, $s = 0, 1, \ldots$. Тобто теорему достатньо довести для n, що містяться у послідовності $(M_s)_{s=0}^{\infty}$.
На додачу зауважимо, що згідно з нерівністю $\|\cdot\|_\gamma \leq \|\cdot\|_\infty$, $1 < \gamma < \infty$ оцінку зверху в теоремі 2.6.1 при $n = M_s$ достатньо встановити при $q = \infty$.

Нехай $n = M_s$, $s \in \mathbb{N}$ — фіксоване. Вибравши довільне δ, $0 < \delta < \alpha p - d$ (нагадаємо, що $\alpha > d/p$), покладемо

$$n_k = \begin{cases} m_k, & 0 \leq k \leq s-1, \\ [C 2^{-\delta(k-s)} m_s], & k \geq s, \end{cases}$$

де $[x]$ — ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$, а C — додатна стала, значення якої згодом уточнюється. Маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k \leq \sum_{k=0}^{s-1} m_k + m_s C \sum_{k=s}^{\infty} 2^{-\delta(k-s)} \leq M_s = n,$$

якщо $C < C_\delta = 1 - 2^{-\delta}$..

Згідно з нерівністю (2.87)

$$e^{\mathrm{pr}}_n(SB^{\alpha}_{p,\theta}; \Phi; L_\infty) \ll \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} 2^{dk/p} e^{\perp}_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_\infty). \tag{2.88}$$

Тепер зазначимо, що при $0 \le k \le s-1$

$$e^{\perp}_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_\infty) = 0, \tag{2.89}$$

а при $k \ge s$, згідно з теоремою А.1.1 із Додатку А

$$e^{\perp}_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_\infty) \ll (2^{-\delta(k-s)} m_s)^{-1/p}. \tag{2.90}$$

Тут враховано, що існує таке s^*, $s^* \ge s$, що при $k > s^*$ буде $n_k = 0$, і при таких k, очевидно, $e^{\perp}_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_\infty) < 1$ $\big($достатньо лише взяти до уваги нерівність $||\cdot||_{l^N_\nu} \le ||\cdot||_{l^N_\mu}$, $1 \le \mu < \nu \le \infty\big)$. Отже при $k > s^*$ оцінку для $e^{\perp}_{n_k}(B^{m_k}_p; l^{m_k}_\infty)$ також можна подати у вигляді (2.90).

Таким чином, із співвідношення (2.88), взявши до уваги (2.89) та (2.90), отримаємо

$$e^{\mathrm{pr}}_n(SB^\alpha_{p,\theta}; \Phi; L_\infty) \ll \sum_{k=s+1}^{\infty} 2^{-\alpha k} 2^{dk/p} (2^{-\delta(k-s)} m_s)^{-1/p} =$$

$$= m_s^{-1/p} 2^{\delta s(-1/p)} \sum_{k=s+1}^{\infty} 2^{-\alpha k} 2^{dk/p} 2^{\delta k/p} = m_s^{-1/p} 2^{\delta s(-1/p)} \sum_{k=s+1}^{\infty} 2^{-\beta k},$$

де $\beta = \alpha - \frac{d}{p} - \frac{\delta}{p}$. Оскільки $\delta < \alpha p - d$, то $\beta > 0$, а отже

$$e^{\mathrm{pr}}_n(SB^\alpha_{p,\theta}; \Phi; L_\infty) \ll m_s^{-1/p} 2^{\delta s(-1/p)} 2^{-\beta s} \asymp 2^{-\alpha s} \asymp n^{-\alpha/d},$$

У підсумку, при $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ і $\frac{d}{p} < \alpha < 1$

$$e^{\mathrm{pr}}_n(SB^\alpha_{p,\theta}; \Phi; L_q) \ll n^{-\alpha/d}.$$

Оцінка знизу. Нехай $n \ge 2^d$. Виберемо таке k, $k \ge 2$, що

$$\#D_{k-2,d} \le n < \#D_{k-1,d},$$

Простору $L_q(\mathbb{I}^d)$ поставимо у відповідність лінійний простір $B(k)$ поліномів за системою $\widetilde{\Phi}_k = \{\phi_{\bar\tau}\}_{\bar\tau \in D_{k,d}}$ вигляду

$$R_k(g) = \sum_{\bar\tau \in D_{k,d}} b_{\bar\tau}(g) \phi_{\bar\tau}, \quad g \in L_q(\mathbb{I}^d),$$

і нехай $B(k)^\alpha_{p,\theta}$ — підпростір у $SB^\alpha_{p,\theta}$, що складається із функцій $f \in B(k)$, тобто

$$B(k)^\alpha_{p,\theta} = B(k) \cap SB^\alpha_{p,\theta}.$$

Тоді, очевидно,

$$e^{\mathrm{pr}}_n(SB^\alpha_{p,\theta}; \Phi; L_q) \ge e^{\mathrm{pr}}_n(B(k)^\alpha_{p,\theta}; \widetilde{\Phi}_k; L_q).$$

Розглянемо таке відображення $A' : \ B(k) \to \mathbb{R}^{m_k}$ (де, нагадаємо, $m_k = \#D_{k,d}$), що $A'(f) := \{b_{\bar\tau}(f)\}_{\bar\tau \in D_{k,d}}, \ \ f \in B(k)$. Тоді, згідно з твердженням **??** для $f \in B(k)^\alpha_{p,\theta}$

$$\|f\|^\alpha_{p,\theta} \asymp 2^{k(\alpha - d/p)} \|A'(f)\|_{l_p^{m_k}},$$

і для $f \in B(k)$

$$\|f\|_q \asymp 2^{-\alpha\, k/q} \|A'(f)\|_{l_q^{m_k}}.$$

Тому, зрозуміло, що

$$e_n^{\mathrm{pr}}(B(k)^\alpha_{p,\theta}; \widetilde{\Phi}_k; L_q) \asymp 2^{kd(1/p - 1/q)} \cdot 2^{-k\alpha} \cdot e_n^{\perp}(B_p^{m_k}; l_q^{m_k}),$$

і для завершення оцінки залишається скористатися теоремою А.1.1 із Додатку А (див. також зауваження А.1.2), у відповідності до якої

$$e_n^{\perp}(B_p^{m_k}; l_q^{m_k}) \asymp 2^{kd(1/q - 1/p)}.$$

У підсумку отримаємо

$$e_n^{\mathrm{pr}}(SB^\alpha_{p,\theta}; \Phi; L_q) \geq e_n^{\mathrm{pr}}(B(k)^\alpha_{p,\theta}; \widetilde{\Phi}_k; L_q) \asymp 2^{-k\alpha} \asymp n^{-\alpha/d}.$$

Теорема 2.6.1 доведена. ■

2.7 Висновки до розділу 2

Досліджені структурні властивості нової базисної системи Хаара H^d функцій, що визначені на кубі $\mathbb{I}^d := [0,1]^d$ евклідового простору $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. З'ясовані її можливості щодо лінійної та нелінійної апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій із просторів Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$. Зокрема, встановлені точні за порядком оцінки верхніх меж найкращих $m-$членних наближень за базисом H^d у просторах $L_q(\mathbb{I}^d)$ для функцій, які належать одиничним кулям просторів Бєсова та Гельдера. Вказано практично здійсненний алгоритм побудови екстремальних (в сенсі порядкових оцінок наближень) нелінійних $m-$членних агрегатів.

Зазначено про особливості системи H^d у порівнянні з класичної тензорною системою Хаара $\mathcal{H}^d$.

Проведено порівняльний аналіз ефективності базису Хаара H^d та тригонометричного базису $\mathcal{T}^d = \{e^{2\pi i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ у їх застосуванні до нелінійної апроксимації класів Бєсова.

Також у даному розділі вперше встановлені точні за порядком оцінки величин $n-$членних проективних наближень за кратною системою Фабера–Шаудера (базисом в $C(\mathbb{I}^d)$) для функцій, що належать класам Бєсова.

Всі результати розділу 2 складають основу статей [72, 74–78]. Частина з них охоплена попередньою публікацією [80].

Результати підрозділу 2.1 складають основу публікації [75]. Терема 2.2.1 доведена в [75], а в [76] подано її розширений варіант (теорема 2.2.3) з доповненням у вигляді обернених теорем для значень $\frac{1}{p} \leq \alpha \leq 1$.

Результати підрозділів 2.4 та 2.5 доведені і опубліковані відповідно в [74] і [77], [78], а базові допоміжні твердження, що використовуються в доведеннях теорем 2.4.2, 2.4.3 та 2.5.1 і стосуються оцінок величин найкращих $m-$*членних наближень компактів в просторах кратних послідовностей, сформульовані і доведені в [73] і поміщені у Додаток А дисертаційної роботи.*

Результати підрозділу 2.6 опубліковані у роботі [72].

Розділ 3

АПРОКСИМАЦІЯ У ПРОСТОРАХ $L_q(\pi_d)$

Досліджено деякі класичні характеристики лінійної та нелінійної апроксимації (в сенсі встановлення їх точних за порядком оцінок) на різного типу класах Нікольського та Бєсова — періодичних функцій з декількома змінними — в просторах Лебега. Зокрема:

а) отримані точні за порядком оцінки тригонометричних та ортопроекційних поперечників класів Бєсова $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ та Нікольського $\mathbb{H}^r_p$ періодичних функцій декількох змінних в просторі $L_q(\pi_d)$ при певних співвідношеннях між параметрами p та q;

б) встановлені точні за порядком оцінки величин найкращих M –членних тригонометричних наближень класів Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ в просторі $L_q(\pi_d)$. Знайдені також порядкові значення найкращих білінійних наближень класів функцій з $2d$ змінними, що породжені функціями з d змінними із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу;

в) знайдені точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на ізотропних класах Нікольського–Бєсова в функціональних просторах $L_q(\pi_{2d})$;

г) отримані оцінки зверху для величин найкращих білінійних наближень у просторах Лебега періодичних функцій багатьох змінних, що належать класам типу Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$. Показано, що в окремих випадках ці оцінки є точними за порядком;

д) знайдені точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на класах Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ у функціональних просторах $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$. На базі цих досліджень розв'язано задачу про оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

3.1 Тригонометричні та ортопроекційні поперечники

Отримані точні за порядком оцінки тригонометричних та ортопроекційних поперечників класів Бєсова $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ та Нікольського $\mathbb{H}^r_p$ періодичних функцій декількох змінних в просторі L_q при певних співвідношеннях між параметрами p та q.

3.1.1 Базові позначення, означення та допоміжні твердження

Нехай $\mathbb{R}^m$ — $m-$вимірний евклідів простір з елементами $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$; π_m, $\mathbb{R}^m_+$, $\mathbb{Z}^m$, $\mathbb{Z}^m_+$ і $\mathbb{N}^m$ — підмножини точок в $\mathbb{R}^m$ із списку основних позначень та означень; якщо $\Lambda \in \mathbb{Z}^m$, то $|\Lambda|$ позначає кількість точок скінченної множини Λ.

$L_p(\pi_m)$, $1 \le p \le \infty$ — простір вимірних $2\pi-$періодичних за кожною змінною функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$ зі скінченними нормами

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m} |f(\boldsymbol{x})|, \ \ p = \infty.$$

Для $f, g \in L_1(\pi_m)$ означимо оператор згортки $*$ формулою

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) dy.$$

Далі, нехай $V_l(u)$, $l \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$ позначає ядро Валлє–Пуссена вигляду

$$V_l(u) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{l} \cos ku + 2 \sum_{k=l+1}^{2l-1} \frac{2l - k}{l} \cos ku$$

(при $l = 1$ другу суму покладаємо рівною нулю).
Багатовимірне ядро $V_l(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$, $m \ \ge 2$ означимо формулою $V_l(\boldsymbol{x}) = \prod\limits_{j=1}^{m} V_l(x_j)$.
На множині $L_p(\pi_m)$ визначимо оператор згортки $\boldsymbol{V}_l : L_p(\pi_m) \longrightarrow L_1(\pi_m)$, що діє згідно з формулою

$$\boldsymbol{V}_l f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} f(\boldsymbol{y}) V_l(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) dy.$$

Отже, значеннями оператора $\boldsymbol{V}_l$ є кратні середні Валлє-Пуссена функції $f \in L_p(\pi_m)$

$$V_l(f; \boldsymbol{x}) := \boldsymbol{V}_l f(\boldsymbol{x}),$$

які у відомий спосіб можна подати і у вигляді тригонометричних поліномів, що породжуються розкладами функцій f в ряд Фур'є за кратною тригонометричною системою.

Якщо $f \in L_p(\pi_m)$, а

$$A_s(\boldsymbol{x}) := 2^m \prod_{j=1}^{m} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j - 1}}(x_j)),$$

$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_m)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, m}$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ (при $s_j = 0$ вважаємо, що $V_{2^{s_j-1}}(x_j) = 0$), то покладемо

$$\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}} f(\boldsymbol{x}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{x}).$$

Таким чином, для кожного $\boldsymbol{s}$ за допомогою оператора $\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}$ визначаються деякі кратні середні $A_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) := \mathbb{A}_{\boldsymbol{s}} f(\boldsymbol{x})$ функції $f \in L_p(\pi_m)$, які в силу відомих властивостей оператора згортки можна подати у вигляді тригонометричного полінома з певними коефіцієнтами, залежними від f. Зазначимо, що розмірність таких поліномів для всіх $f \in L_p(\pi_m)$ дорівнює $2^{|\boldsymbol{s}|_1}$. Тут, і надалі, для $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^m$: $|\boldsymbol{s}|_1 := |s_1| + \ldots + |s_m|$.

Сформулюємо декілька відомих важливих тверджень (нерівностей), які систематично використовуються в доведеннях результатів даного розділу. Перше — нерівність С. М. Нікольського про співвідношення норм тригонометричних поліномів в просторах $L_p(\pi_d)$ та $L_q(\pi_d)$, $p \neq q$.

Визначимо наступні множини:

$$P^d(\boldsymbol{K}) := \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : |k_j| \le K_j,\ j = \overline{1, d}\right\}, \quad \boldsymbol{K} = (K_1, \ldots, K_d) \in \mathbb{Z}_+^d;$$

$$C^d(N) := \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : |k_j| \le N,\ j = \overline{1, d}\right\}, \quad N = 1, 2, \ldots;$$

$$T(\Lambda) := \left\{ f :\ f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})},\ c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C},\ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \right\}, \quad \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$$

і для $1 \le q \le \infty$

$$T(C^d(N))_q := \{f \in T(C^d(N)) :\ \|f\|_q \le 1\}.$$

Теорема H$_3$ [56]. *Нехай* $\boldsymbol{N} = (N_1, \ldots, N_d)$, $N_j \in \mathbb{Z}_+$ *і* $t \in T(P^d(\boldsymbol{N}))$. *Тоді при* $1 \le q < p \le \infty$ *справедлива нерівність*

$$\|t\|_p \le 2^d \prod_{j=1}^{d} N_j^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|t\|_q \,. \tag{3.1}$$

Нерівність (3.1) має в математичній літературі назву "нерівності різних метрик". У випадку $d = 1$ і $p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [178].

Нерівність Гельдера: для довільних числових послідовностей $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ та $b = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ при $1 < \gamma < \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k b_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^{\gamma'} \right)^{\frac{1}{\gamma'}}, \tag{3.2}$$

$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma'}=1.$

Нерівність Мінковського: при $1 \le p \le \infty$ для довільних функцій $f_k \in L_p(\pi_d)$, $k=\overline{1,l}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{l} f_k \right\|_p \le \sum_{k=1}^{l} \|f_k\|_p. \tag{3.3}$$

Нерівність (3.3) за належного її трактування має місце і при $l=\infty$. А саме: якщо при $l=\infty$ ряд у правій частині 3.3 збігається, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{l} f_k$ збігається у просторі $L_p(\pi_d)$ і має місце нерівність 3.3 (з $l=\infty$).

3.1.2 Класи функцій

Нехай $k \in \mathbb{N}$ і $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^d$. Для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо

$$\triangle_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_d)$$

і визначимо кратну різницю порядку k функції $f(\boldsymbol{x})$ в точці $\boldsymbol{x}$ з кроком $\boldsymbol{h}$ формулами

$$\Delta_{\boldsymbol{h}}^k f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{\boldsymbol{h}} \Delta_{\boldsymbol{h}}^{k-1} f(\boldsymbol{x}), \quad \Delta_{\boldsymbol{h}}^0 f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}).$$

Кратну різницю $\Delta_{\boldsymbol{h}}^k f(\boldsymbol{x})$ можна подати також у вигляді

$$\Delta_{\boldsymbol{h}}^k f(\boldsymbol{x}) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^{l+k} C_k^l f(\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{h}),$$

де C_k^l — біноміальні коефіцієнти.

Повний модуль гладкості $k-$го порядку функції $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо $\omega_k(f,\cdot)_p$ і визначимо формулою

$$\omega_k(f,t)_p := \sup_{|\boldsymbol{h}|\le t} \| \Delta_{\boldsymbol{h}}^k f \|_p, \quad t \ge 0,$$

де $|\boldsymbol{h}|$ — евклідова норма вектора h.

Кажуть, що функція $f \in L_p(\pi_d)$, $1 \le p \le \infty$, *належить простору* $B_{p,\theta}^r$, $1 \le \theta \le \infty$, $r>0$, *якщо скінченна її півнорма*

$$|f|_{B_{p,\theta}^r} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty (t^{-r}\omega_k(f,t)_p)^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1 \le \theta < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} \omega_k(f,t) t^{-r}, & \theta = \infty, \end{cases}$$

у припущенні, $k > r$.

Норму на лінійних просторах $B^r_{p,\theta}$ задамо формулою $\|f\|_{B^r_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^r_{p,\theta}}$. Простори $B^r_{p,\theta}$ введені О. В. Бєсовим [7] і $B^r_{p,\infty} \equiv H^r_p$, де H^r_p — простори Нікольського [56]. В подальших міркуваннях зручніше користуватися еквівалентним означенням норми функцій з просторів $B^r_{p,\theta}$ і H^r_p, яке має за основу розклад функцій в ряд Фур'є за тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$, $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) := k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$.

У прийнятих в пункті 3.1.1 позначеннях — із заміною $\boldsymbol{s}$ на s саме у випадку, коли $\boldsymbol{s} = (s_1,\ldots,s_d)$ і $s_j = s$, $j = \overline{1,d}$ — для норми $\|f\|_{B^r_{p,\theta}}$ мають місце співвідношення (див., наприклад, [51]):

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{B^r_{p,\theta}} &\asymp \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta}\,\|A_s(f;\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}},\ 1\le\theta<\infty,\\
\|f\|_{B^r_{p,\infty}} &\asymp \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr}\,\|A_s(f;\cdot)\|_p.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

У випадку $1 < p < \infty$ в (3.4) замість $A_s(f,\cdot)$ можна використати "блоки" ряду Фур'є функції f. Нехай для $s \in \mathbb{Z}_+$

$$
\mu(s) := \left\{\boldsymbol{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{Z}^d :\ \ 2^{s-1} \le \max\{|k_j|,\ j = \overline{1,d}\,\} < 2^s\right\}.
$$

Для $f \in L_p(\pi_d)$ позначимо

$$
f_0(\boldsymbol{x}) = \widehat{f}(0), \quad f_s(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mu(s)} \widehat{f}(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},\ \ s = 1,2,\ldots,
$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{t})\,e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})}d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f. Тоді

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{B^r_{p,\theta}} &\asymp \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr\theta}\,\|f_s(\cdot)\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}},\ 1\le\theta<\infty,\\
\|f\|_{B^r_{p,\infty}} &\asymp \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} 2^{sr}\,\|f_s(\cdot)\|_p.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

В подальшому $\mathbb{B}^r_{p,\theta} := \{f \in L_p(\pi_d) : \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \le 1\}$ — одинична куля в просторі $B^r_{p,\theta}$.

3.1.3 Тригонометричні поперечники класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ у просторі L_q

Наступна апроксимаційна характеристика введена Р. С. Ісмагіловим [33]. Отже, нехай $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас. *Тригонометричний* m*–поперечник класу* F *в просторі* $L_q(\pi_d)$ *(позначається:* $d^T_m(F;L_q)$ *) визначається формулою*

$$
d^T_m(F;L_q) = \inf_{\Omega_m}\sup_{f\in F}\inf_{t(\Omega_m;\cdot)} \|f(\cdot) - t(\Omega_m;\cdot)\|_q,
$$

де

$$t(\Omega_m;\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{m}c_je^{i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x})},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,$$

$\Omega_m=\{\boldsymbol{k}^1,\dots,\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{m}}\}$ *— набір векторів* $\boldsymbol{k}^j=(k_1^j,\dots,k_d^j)$, $j=\overline{1,m}$ *цілочислової гратки* $\mathbb{Z}^d$, c_j *— довільні комплексні числа.*

Означення величин $d_m^T(F;L_q)$ саме в такій формі є зручним в його подальшому використанні. Однак, за аналогією з означенням величин $e_m(F)_q$ найкращого $m-$членного тригонометричного наближення класу F в просторі $L_q(\pi_d)$ (див. нижче), можна записати

$$d_m^T(F;L_q)=\inf_{\substack{\Lambda\subset\mathbb{Z}^d\\ \sharp\Lambda=m}}\sup_{f\in F}\inf_{c_{\boldsymbol{k}}\in\mathbb{C}}\left\|f(\cdot)-\sum_{\boldsymbol{k}\in\Lambda}c_{\boldsymbol{k}}e^{i(\boldsymbol{k},\cdot)}\right\|_q$$

Сформулюємо відомі твердження, які використовуються в доведенні основного результату.

Лема A$_3$ [6]. *Нехай* $2\le q<\infty$. *Тоді для довільного тригонометричного полінома*

$$P(\Omega_m;\boldsymbol{x})=\sum_{j=1}^{m}e^{i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x})},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$$

і для будь-якого $n\le m$ *знайдеться тригонометричний поліном* $\widetilde{P}(\Omega_n;\cdot)$, *що містить не більше ніж* n *гармонік, і така додатна стала* C_q, *що*

$$\|P(\Omega_m;\cdot)-\widetilde{P}(\Omega_n;\cdot)\|_q\le C_q\,mn^{-\frac{1}{2}},$$

причому $\Omega_n\subset\Omega_m$, *всі коефіцієнти* $\widetilde{P}(\Omega_n;\boldsymbol{x})$ *однакові і не перевищують за абсолютною величиною числа* mn^{-1}.

Теорема A$_3$ [51]. *Нехай* $f\in L_p(\pi_d)$, $1<p<\infty$. *Тоді існують такі додатні сталі* $C_1(p)$ *та* $C_2(p)$, *що*

$$C_1(p)\|f\|_p\le\left\|\left(\sum_{s=0}^{\infty}|f_s|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\le C_2(p)\|f\|_p. \tag{3.6}$$

Встановлення оцінок знизу для поперечників $d_m^T(\mathbb{B}^r_{p,\theta};L_q)$ передбачає використання результатів щодо оцінок найкращих $m-$членних тригонометричних наближень функцій з класів $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$. Для їх формулювання введемо необхідні позначення і означення.

Для $F \subset L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, *покладемо*

$$e_m(F)_q := \sup_{f \in F} \inf_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d \\ \sharp\Lambda = m}} \inf_{c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}} \left\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}, \cdot)} \right\|_q$$

Величину $e_m(F)_q$ *називають найкращим* m*–членним тригонометричним наближенням класу* F *в просторі* $L_q(\pi_d)$.

Очевидно,

$$e_m(F)_q \le d_m^T(F; L_q), \qquad F \subset L_q. \tag{3.7}$$

Відоме таке твердження.

Теорема Б$_3$ [169]. *Нехай* $1 \le p,\, q,\, \theta \le \infty$ *і*

$$r(p,q) := \begin{cases} d(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+, & 1 \le p \le q \le 2, \text{ або } 1 \le q \le p \le \infty, \\ \max\{\frac{d}{p}; \frac{d}{2}\}, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Тоді для $r > r(p,q)$

$$e_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{r}{d} + (\frac{1}{p} - \max\{\frac{1}{q}; \frac{1}{2}\})_+}.$$

Тепер сформулюємо і доведемо основний результат даного підрозділу.

Теорема 3.1.1. *Нехай* $1 \le p < 2 \le q < \frac{p}{p-1}$, $r > d$, $1 \le \theta \le \infty$. *Тоді*

$$d_m^T(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp m^{-\frac{r}{d} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}}. \tag{3.8}$$

Доведення теореми 3.1.1. Оцінка знизу в (3.8) (навіть за умови $r > \frac{d}{p}$) випливає із теореми Б$_3$, якщо взяти до уваги співвідношення (3.7). Переходячи до доведення в (3.8) оцінки зверху зауважимо, її достатньо отримати для класів $\mathbb{H}^r_p$.

Отже, за заданим числом $m \in \mathbb{N}$ підберемо таке $l \in \mathbb{N}$, щоб виконувалось співвідношення $2^{(l-1)d-1} \le m \le 2^{ld-1}$ і покладемо $\alpha = \left(\frac{r}{d} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2}\right) / \left(\frac{r}{d} - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$. Для $s \in Z_+$ позначимо

$$n_s = \begin{cases} 2^{sd}, & 0 \le s < l, \\ [2^{lr} 2^{sd(1 - \frac{r}{d})}], & l \le s \le [\alpha l] + 1, \\ 0, & s > [\alpha l] + 1, \end{cases} \tag{3.9}$$

де $[\,a\,]$ — ціла частина числа $a \in \mathbb{R}$.

Тоді, взявши до уваги, що $r>d$, можна записати

$$\sum_s n_s \le \sum_{s=0}^{l-1} 2^{sd} + \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{lr} 2^{sd(1-\frac{r}{d})} \ll$$

$$\ll 2^{ld} + 2^{lr} \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{sd(1-\frac{r}{d})} \ll 2^{ld} + 2^{lr}\cdot 2^{ld(1-\frac{r}{d})} = 2\cdot 2^{ld} \asymp m.$$

Для тригонометричного полінома

$$t_s(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mu(s)} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,$$

де, нагадаємо, $\mu(s) := \{\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}^d: \quad 2^{s-1}\le \max\{|k_j|,\ j=\overline{1,d}\,\} < 2^s\}$, через $t(\Omega_{n_s};\cdot)$ позначимо тригонометричний поліном, що наближає $t_s(\cdot)$ згідно з лемою А$_3$, тобто

$$\|t_s(\cdot) - t(\Omega_{n_s};\cdot)\|_q \ll 2^{sd} n_s^{-\frac{1}{2}},$$

причому $\Omega_{n_s}\subset\mu(s)$, всі коефіцієнти $t(\Omega_{n_s};\cdot)$ однакові і не перевищують числа $2^{(s+1)d} n_s^{-1}$.

Розглянемо простір тригонометричних поліномів з такими "номерами" гармонік, які належать об'єднанню множин $P=\bigcup\limits_{0\le s<l}\mu(s)$ та $Q=\bigcup\limits_{l\le s\le[\alpha l]+l}\Omega_{n_s}$ і покажемо, що цей простір є екстремальним для поперечника $d_m^T(\mathbb{H}_p^r, L_q)$ в сенсі його порядкових значень.

Нехай f — довільна функція з класу $\mathbb{H}_p^r$. Побудуємо поліном t з "номерами" гармонік із $P\cup Q$ за формулою

$$t(\boldsymbol{x}) := \sum_{s=0}^{l-1} f_s(\boldsymbol{x}) + \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} (t(\Omega_{n_s};\cdot) * f_s)(\boldsymbol{x}). \tag{3.10}$$

Тоді

$$\|f-t\|_q \le \left\| \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} (f_s - (f_s * t(\Omega_{n_s};\cdot)) \right\|_q + + \left\| \sum_{s>[\alpha l]+1} f_s \right\|_q =: J_1 + J_2. \tag{3.11}$$

Знайдемо спочатку оцінку зверху для доданка J_2. Оскільки для $f\in\mathbb{H}_p^r$ виконується нерівність $\|A_s(f,\cdot)\|_p \le 2^{-sr}$, $s\in\mathbb{Z}_+^d$, то згідно з нерівністю Мінковського (3.3) і нерівністю Нікольського (3.1) можна записати

$$J_2 = \left\| \sum_{s>[\alpha l]+1} f_s \right\|_q \le \sum_{s>[\alpha l]+1} \|\, f_s \,\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s>[\alpha l]+1} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|A_s(f,\cdot)\|_p \leq \sum_{s>[\alpha l]+1} 2^{-sd(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \ll 2^{-\alpha ld(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}. \tag{3.12}$$

Беручи до уваги значення α, з (3.12) знаходимо

$$J_2 \ll 2^{-ld(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} \asymp m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.13}$$

Перейдемо до встановлення оцінки зверху доданка J_1. З цією метою для кожного числа s, що задовольняє співвідношення $l \leq s \leq [\alpha l]+1$, розглянемо лінійний оператор T_s, який діє на функцію f таким чином:

$$T_s f(\boldsymbol{x}) = f * (t_s(\cdot) - t(\Omega_{n_s};\cdot)), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Доведемо допоміжне твердження.

Лема 3.1.1. *Нехай* $1 < p < 2 < q < \frac{p}{p-1}$. *Тоді для норми оператора* T_s, *що діє із* L_p *в* L_q *(записуємо:* $\|T_s\|_{p\to q}$*), виконується співвідношення*

$$\|T_s\|_{p\to q} := \sup_{\|f\|_p \leq 1} \|T_s f\|_q \ll 2^{sd} n_s^{-(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})},$$

де $p' = \frac{p}{p-1}$.

Доведення леми 3.1.1. Згідно з інтерполяційною теоремою Рісса-Торіна (див., наприклад, [32, с. 144])

$$\|T_s\|_{p\to q} \leq \|T_s\|_{2\to 2}^{1-\lambda} \, \|T_s\|_{1\to q^*}^{\lambda}, \tag{3.14}$$

де параметри λ та q^* визначаються за допомогою рівностей

$$\lambda = \frac{2}{p} - 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{2} + \frac{\lambda}{q^*}.$$

Знайдемо оцінки величин $\|T_s\|_{2\to 2}$ та $\|T_s\|_{1\to q^*}$. Взявши до уваги, що коефіцієнти полінома $t_s(\cdot)-t(\Omega_{n_s};\cdot)$ однакові і не перевищують за абсолютною величиною числа $2^{(s+1)d} n_s^{-1} + 1$, на підставі рівності Парсеваля маємо

$$\|T_s\|_{2\to 2} \ll 2^{sd} n_s^{-1}. \tag{3.15}$$

Далі, застосувавши один наслідок узагальненої нерівності Мінковського [57, с. 33], а потім лему А3, можна записати

$$\|T_s f\|_{q^*} \leq \|f\|_1 \, \|t_s(\cdot) - t(\Omega_{n_s};\cdot)\|_{q^*} \ll \|f\|_1 2^{sd} n_s^{-\frac{1}{2}}.$$

Звідси, з урахуванням стандартного означення величин $\|T_s\|_{1\to q^*}$, випливає

$$\|T_s\|_{1\to q^*} \ll 2^{sd} n_s^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.16}$$

Підставивши в (3.14) замість $\|T_s\|_{2\to 2}$ і $\|T_s\|_{1\to q^*}$ оцінки з (3.16) та (3.15), виконавши елементарні обчислення, приходимо до потрібної оцінки величин $\|T_s\|_{p\to q}$.

Лема 3.1.1 доведена. ♦

Повертаючись до оцінювання доданка J_1, спочатку припустимо, що $p \in (1,2)$. В такому випадку, скориставшись послідовно теоремою A_3, нерівністю Мінковського (3.3) і лемою 3.1.1, отримаємо

$$J_1 \leq \left\| \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} |f_s - (f_s * t(\Omega_{n_s};\cdot))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_q = \left\| \sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} |f_s - (f_s * t(\Omega_{n_s};\cdot))|^2 \right\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \left\| |f_s - (f_s * t(\Omega_{n_s};\cdot))|^2 \right\|_{\frac{q}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \left\| f_s - (f_s * t(\Omega_{n_s};\cdot)) \right\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \left\| T_s f_s \right\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \left\| T_s \right\|_{p\to q}^2 \|f_s\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{2sd} \, n_s^{-(1+\frac{2}{p'})} \|f_s\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.17}$$

Підставивши в (3.17) замість n_s їх значення з (3.9) і виконавши елементарні обчислення, маємо

$$J_1 \ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{2sd} \, 2^{-lr(1+\frac{2}{p'})} \, 2^{-sd(1-\frac{r}{d})(1+\frac{2}{p'})} \|f_s\|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2^{-lr(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})} \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{sd(\frac{2}{p}-1)(1-\frac{r}{d})} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.18}$$

Оскільки за умовою теореми справедливі нерівності $1-\frac{r}{d} < 0$ і $\frac{2}{p}-1 > 0$, то з (3.18) знаходимо

$$J_1 \ll 2^{-lr(\frac{1}{2}+\frac{1}{p'})} \cdot 2^{ld(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(1-\frac{r}{d})} = 2^{-ld(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{2})} \asymp m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.19}$$

Таким чином, підставивши в (3.11) замість J_1 і J_2 відповідні їм оцінки з (3.19) і (3.13), отримаємо

$$\|f-t\|_q \ll m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \quad 1 < p < 2 \leq q < \frac{p}{p-1}.$$

Наслідком останнього співвідношення є шукана оцінка зверху для тригонометричного поперечника $d_m^T(\mathbb{H}_p^r; L_q)$, $1 < p < 2 \leq q < \frac{p}{p-1}$, а отже і для поперечника $d_m^T(\mathbb{B}_{p,\theta}^r; L_q)$ при $1 \leq \theta < \infty$.

Завершальним пунктом доведення теореми 3.1.1 є встановлення оцінки зверху для тригонометричного поперечника $d_m^T(\mathbb{H}_1^r; L_q)$ при $2 \leq q < \infty$.

Нехай q_1 — довільне число, що задовольняє умову $1 < q_1 < 2$, яке буде уточнене нижче. Фактично повторивши при оцінюванні зверху величини J_1 міркування, використані у випадку $1 < p < 2$, отримаємо

$$J_1 \ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \|T_s f_s\|_q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \|T_s\|_{q_1 \to q} \, \|f_s\|_{q_1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} \|T_s\|_{q_1 \to q}^2 \, \|A_s(f, \cdot)\|_{q_1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{2sd} \, n_s^{-(1+\frac{2}{q_1'})} \, \|A_s(f, \cdot)\|_{q_1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.20)$$

Тепер, застосувавши до $\|A_s(f, \cdot)\|_{q_1}$ нерівність різних метрик (3.1) і підставивши в (3.20) замість n_s їх значення з (3.9), після елементарних обчислень маємо

$$J_1 \ll \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{2sd} \, n_s^{-(1+\frac{2}{q_1'})} \, 2^{2sd(1-\frac{1}{q_1})} \|A_s(f, \cdot)\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 2^{-\frac{lr}{2}(1+\frac{2}{q_1'})} \left(\sum_{s=l}^{[\alpha l]+1} 2^{sd + \frac{2sr}{q_1'} - sr} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нарешті, узгодивши вибір числа $q_1' > 2$ з умовою $sd + \frac{2sr}{q_1'} - sr < 0$ (можливість такого вибору гарантована умовою $r > d$ в теоремі), отримаємо

$$J_1 \ll 2^{-\frac{lr}{2}(1+\frac{2}{q_1'})} \, 2^{\frac{ld}{2} + \frac{lr}{q_1'} - \frac{lr}{2}} = 2^{-lr + \frac{ld}{2}} = 2^{-ld(\frac{r}{d} - \frac{1}{2})} \asymp m^{-\frac{r}{d} + \frac{1}{2}}.$$

Звідси, з врахуванням встановленої вище оцінки зверху величини J_2, випливає шукана оцінка зверху для поперечника $d_m^T(\mathbb{H}_1^r; L_q)$, а отже і для поперечника $d_m^T(\mathbb{B}_{1,\theta}^r; L_q)$ при $1 \leq \theta < \infty$.

Теорема 3.1.1 доведена. ■

На завершення даного підрозділу зробимо такі зауваження.

Зауваження 3.1.1. *З доведення теореми 3.1.1 безпосередньо випливає, що порядкові значення поперечника* $d_m^T(\mathbb{B}_{p,\theta}^r; L_q)$, $1 \leq p < 2 < q < \frac{p}{p-1}$ *не досягаються при наближенні класу* $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ *за допомогою підпростору тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік із множини* $P = \bigcup\limits_{0 \leq s < l} \mu(s)$, $2^{ld} \asymp m$.

Якщо ж $1 \le p \le q \le 2$, *або* $1 \le q \le p \le \infty$, *як випливає з теореми* $Б_3$ *і результатів одержаних нижче, — підпростір тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік з множини* P *є екстремальним (в сенсі порядкових оцінок) для поперечників* $d_m^T(\mathbb{B}_{p,\theta}^r; L_q)$. *Окрім того, в цих випадках, а також і у випадку теореми 3.1.1 справджується співвідношення*

$$d_m^T(\mathbb{B}_{p,\theta}^r; L_q) \asymp e_m(\mathbb{B}_{p,\theta}^r; L_q).$$

Зауваження 3.1.2. *Питання щодо порядкових значень поперечників* $d_m^T(\mathbb{B}_{p,\theta}^r; L_q)$ *у випадках* $2 \le p < q \le \infty$ *та* $1 < p < 2,\ p' < q \le \infty$, *ймовірно, ще не з'ясоване.*

3.1.4 Ортопроекційні поперечники класів $\mathbb{B}_{p,\theta}^r$ у просторі L_q

Спочатку означимо величини, які є основними об'єктами дослідження в цьому підрозділі. Нехай $\{u_i\}_{i=1}^m$ — ортонормована в просторі $L_2(\pi_d)$ система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$. Кожній функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апроксимаційний агрегат вигляду $\sum\limits_{i=1}^m (f, u_i) u_i(\cdot)$, тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^m$. Тут, і надалі, $(f, u_i) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\pi_d} f(\boldsymbol{x}) \overline{u_i(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x}$.

Для $F \subset L_q(\pi_d)$ *величина*

$$d_m^\perp(F; L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^m \subset L_\infty(\pi_d)} \sup_{f \in F} \|f - \sum_{i=1}^m (f, u_i) u_i\|_q \tag{3.21}$$

називається ортопроекційним поперечником класу F *в просторі* $L_q(\pi_d)$.

Поперечник $d_m^\perp(F; L_q)$ введений В. М. Темляковим [144]. Поряд з поперечниками $d_m^\perp(B_{p,\theta}^r; L_q)$ досліджуються величини $d_m^B(F; L_q)$, $F = B_{p,\theta}^r$, також запроваджені В. М. Темляковим [144]. Вони означаються наступною формулою:

$$d_m^B(F; L_q) := \inf_{G \in L_m(B)_q} \sup_{f \in F \cap \mathcal{D}(G)} \|f(\cdot) - Gf(\cdot)\|_q. \tag{3.22}$$

Тут через $L_m(B)_q$ позначена множина лінійних операторів G, що підпорядковані умовам:

а) область визначення $\mathcal{D}(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а область значень належить підпростору вимірності m в $L_q(\pi_d)$;

б) для числа B, $B \ge 1$ і для будь-якого вектора $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d)$ виконується нерівність $\|Ge^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})}\|_2 \le B$.

Зазначимо, що до $L_m(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на підпростір вимірності m в $L_q(\pi_d)$, а також оператори, дія яких на ортонормованій системі функцій визначається за допомогою мультиплікаторів, заданих такою послідовністю $\{\lambda_l\}$, що $|\lambda_l| \le 1$ для всіх l.

Легко бачити, що величини $d_m^{\perp}(F;L_q)$ та $d_m^{B}(F;L_q)$ пов'язані нерівністю

$$d_m^{B}(F;L_q) \le d_m^{\perp}(F;L_q). \tag{3.23}$$

Отже, оцінки (знизу) величин $d_m^{B}(F;L_q)$ можуть слугувати за оцінки знизу для поперечників $d_m^{\perp}(F;L_q)$ і, навпаки, оцінки (зверху) поперечників $d_m^{\perp}(F;L_q)$ можна використовувати для оцінювання зверху величин $d_m^{B}(F;L_q)$. Такий факт береться до уваги при доведенні відповідних тверджень. Зауважимо також, що при оцінюванні знизу величин $d_m^{B}(\mathbb{B}^r_{p,\theta};L_q)$ використовується метод, що застосовувався В. М. Темляковим при встановленні оцінок величин $d_m^{B}(F;L_q)$ для інших функціональних класів F (див., наприклад, [135, 142, 144]). Суть цього методу полягає у побудові функцій, що належать класам $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ і "погано" апроксимуються за допомогою операторів G. Окрім зазначених робіт, ортопроекційні поперечники класів функцій як з однією так і з декількома змінними вивчались також в роботах [3, 22, 23, 105].

Тепер перейдемо до формулювання і доведення основних результатів даного підрозділу.

Теорема 3.1.2. *Нехай* $1 \le p < q < \infty$, $r > d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$. *Тоді при* $1 \le \theta \le \infty$ *справедливе співвідношення*

$$d_m^{B}(\mathbb{B}^r_{p,\theta};L_q) \asymp d_m^{\perp}(\mathbb{B}^r_{p,\theta};L_q) \asymp m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \tag{3.24}$$

Доведення теореми 3.1.2. Спочатку отримаємо в (3.24) оцінку зверху. Зауважимо, що з урахуванням співвідношення (3.23) і вкладення $B^r_{p,\theta} \subset H^r_p$, $1 \le \theta < \infty$, достатньо встановити необхідну оцінку зверху для величини $d_m^{\perp}(\mathbb{H}^r_p;L_q)$.

Отже, за заданим достатньо великим $m \in \mathbb{N}$ підберемо число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{(n+1)d} \le m < 2^{(n+2)d}$ і розглянемо для $f \in \mathbb{H}^r_p$ наближення її частинною сумою Фур'є вигляду

$$S_n(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{s=0}^{n} f_s(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Зазначимо, що кількість гармонік в $S_n(f,\cdot)$ дорівнює $\sum\limits_{s=0}^{n}|\mu(s)|$ і не перевищує числа $2^{(n+1)d}$.

Оскільки для $f \in \mathbb{H}_p^r$ виконується співвідношення $\|A_s(f,\cdot)\|_p \le 2^{-sr}$, то згідно з нерівностями Мінковського (3.3) і різних метрик Нікольського (3.1) можна записати

$$\|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_q = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_s \right\|_q \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_s\|_q \asymp \sum_{s=n+1}^{\infty} \|A_s(f,\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{sd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|A_s(f,\cdot)\|_p \ll \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sd(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp 2^{-nd(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})}.$$

Звідси, враховуючи властивість монотонності поперечників за параметром розмірності наближаючого простору, маємо

$$d_m^B(\mathbb{H}_p^r; L_q) \le d_m^{\perp}(\mathbb{H}_p^r; L_q) \le \sup_{f \in \mathbb{H}_p^r} \|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll 2^{-nd(\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \ll m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Повертаючись до встановлення в (3.24) оцінок знизу зауважимо, що відповідні оцінки достатньо отримати для величини $d_m^B(\mathbb{B}_{p,1}^r; L_q)$. Попередньо зробимо деякі зауваження і, для зручності, сформулюємо допоміжні твердження, що використовуються.

Отже, надалі при оцінюванні знизу величин $d_m^B(F; L_q)$, $F \subset L_q$, вважаємо, що оператори G належать множині $L_m(B)_2$. У випадку $q \ge 2$ умова $G \in L_m(B)_2$ є прямим наслідком умови $G \in L_m(B)_q$, а при $q < 2$ умова $G \in L_m(B)_2$, як буде видно із процесу встановлення оцінок знизу і із наведених нижче міркувань, не є обмежувальною.

Справді, нехай $V_L(\boldsymbol{x}) = \prod\limits_{j=1}^{d} V_L(\boldsymbol{x}_j)$ — ядро Валле–Пуссена для куба $[-L; L]^d$ з ребром довжиною $2L+1$ і $V_L f = f * V_L$. Відомо (див., наприклад, [30]), що для будь-якого тригонометричного полінома t з "номерами" гармонік із $[-L; L]^d$ і для будь-якої функції $f \in L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$ справедливі співвідношення

$$V_L t = t, \quad \|V_L f\|_q \le 3^d \|f\|_q.$$

Нехай $G \in L_m(B)_q$. Розглянемо оператор $A = V_L G$. Очевидно, $A \in L_m(B)_2$ і можна записати

$$\|t - At\|_q \le 3^d \|t - Gt\|_q. \tag{3.25}$$

Така нерівність дозволяє стверджувати, що при встановленні порядкових оцінок знизу величин $d_m^B(F \cap \mathcal{T}; L_q)$, де $\mathcal{T}$ — множина тригонометричних поліномів, умови $G \in L_m(B)_2$ і $G \in L_m(B)_q$ рівносильні.

Отже, нехай оператор $G \in L_m(B)_2$ і для довільного вектора $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$

$$Ge^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^k \psi_l(\boldsymbol{x}),$$

де $\overline{m}$ вимірність підпростору в $L_2(\pi_d)$ значень оператора G, а $\{\psi_l\}_{l=1}^{\overline{m}}$ — ортонормований базис в цьому підпросторі. Зауважимо, що $\overline{m} \leq m$ і для всіх $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$

$$\sum_{l=1}^{\overline{m}} |a_l^k|^2 \leq B^2, \tag{3.26}$$

а також для довільного l

$$\sum_{\boldsymbol{k}} |\widehat{\psi}_l(\boldsymbol{k})|^2 \leq 1. \tag{3.27}$$

Далі буде використане твердження, отримане В. М. Темляковим.

Лема Б$_3$. [142] *Нехай A такий лінійний оператор, що для довільного $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$*

$$Ae^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^{\boldsymbol{k}} \psi_l(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

де $\{\psi_l\}_{l=1}^{\overline{m}}$ — задана система функцій, для якої $\|\psi_l\|_2 \leq 1$, $l = \overline{1, m}$.

Тоді для будь-якого тригонометричного полінома $t(\cdot)$ з d змінними справедлива нерівність

$$\min_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}} ReAt(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \leq \left\{ \overline{m} \sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{\boldsymbol{k}} |\, a_l^k \,\widehat{t}(\boldsymbol{k})\,|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Повернемося до оцінювання знизу величин $d_m^B(\mathbb{B}_{p,1}^r; L_q)$. Для $n \in \mathbb{N}$ розглянемо функцію

$$\varphi_n(\boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{k}^n,\boldsymbol{x})} \prod_{j=1}^{d} K_{2^{n-2}-1}(\boldsymbol{x}_j),$$

де

$$K_{l-1}(t) = \sum_{|k| \leq l-1} \left(1 - \frac{|k|}{l}\right) e^{ikt}$$

— ядро Фейєра порядку $2l-1$, $K_m(t) \equiv 1$ при $m < 0$, а $\boldsymbol{k}^n := (k_1^n, \ldots, k_d^n)$,

$$k_j^n = \begin{cases} 2^{n-1} + 2^{n-2}, & n \geq 2, \\ 1, & n = 1. \end{cases}$$

Далі, нехай $\rho(n) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) : 2^{n-1} \le |k_j| < 2^n,\ j = \overline{1,d}\}$ і $T(\rho(n))$ позначає множину тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік із $\rho(n)$. Зауважимо, що "номери" гармонік у визначенні функції φ_n (їх множину позначимо через Q_n) належать множині $\rho(n)$. Відповідно через $T(\mu(n))$ позначимо множину тригонометричних поліномів з "номерами" гармонік із $\mu(n)$. Звернемо увагу на те, що $\rho(n) \subset \mu(n)$, а відповідно $T(\rho(n)) \subset T(\mu(n))$.

Нехай задано оператор $G \in L_m(B)_q$, $m <| Q_n |$. Розглянемо оператор A вигляду

$$A = (S_n - S_{n-1})G.$$

Тоді $A \in L_m(B)_q$ і областю значень оператора A є підпростір $A_m \subset T(\mu(n))$ розмірності $\dim A_m = \overline{m} \le m$. Окрім того, внаслідок теореми A$_3$

$$\|S_l\|_{q\to q} \le C(d,q), \quad 1 < q < \infty,\ l \in \mathbb{Z}_+,$$

і тому для $f \in T(\mu(n))$ можна записати

$$\|f - Af\|_q = \|(S_n - S_{n-1})(f - Gf)\|_q \ll \|f - Gf\|_q,$$

а, як наслідок,

$$\inf_{A \in L_m(B)_q} \sup_{f \in \mathbb{B}^r_{p,\theta} \cap T(\mu(n))} \|f - A\, f\|_q \ll d^B_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q), \tag{3.28}$$

де інфімум взято по множині $L_m(B)_q$ операторів A з областю значень $\mathcal{A}_m \subset T(\mu(n))$.

Оцінимо знизу ліву частину співвідношення (3.28). Спочатку нехай $q = \infty$. Розглянемо величину

$$I := \sup_{\boldsymbol{y}} \|\varphi_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - A\varphi_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\|_\infty.$$

Легко бачити, що

$$I \ge \varphi_n(0) - \min_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}} Re A\varphi_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}). \tag{3.29}$$

Оцінимо кожний із доданків в правій частині (3.29). Згідно з визначенням функції φ_n можна записати

$$\varphi_n(0) \ge C_d\,|Q_n|, \quad C_d > 0. \tag{3.30}$$

Далі, нехай $\{\psi_l\}_{l=1}^{\overline{m}}$ — ортонормований базис в $\mathcal{A}_m$ і

$$Ae^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a_l^{\boldsymbol{k}} \psi_l(\boldsymbol{x}).$$

Тоді

$$\left(\sum_{l=1}^{\overline{m}} |a_l^{\boldsymbol{k}}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq B$$

і згідно з лемою Б$_3$ маємо

$$\min_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}} ReA\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \leq \left\{\overline{m}\sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |a_l^{\boldsymbol{k}}\,\widehat{\varphi}_n(\boldsymbol{k})|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left\{\overline{m}\sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} |a_l^{\boldsymbol{k}}\,|^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\overline{m}\sum_{\boldsymbol{k}\in Q_n} \sum_{l=1}^{\overline{m}} |a_l^{\boldsymbol{k}}\,|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leq B(m\,|Q_n|)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.31)$$

Тепер, за заданим достатньо великим $n \in \mathbb{N}$ підберемо сталі C_1 і C_2, $0 < C_1 < C_2 < 1$ так, що $C_1\, 2^{nd} \leq m < C_2\, 2^{nd}$ і виконується нерівність

$$C_d|Q_n| > 2B(m|Q_n|)^{\frac{1}{2}}.$$

Тоді, взявши до уваги (3.29)–(3.31), врахувавши, що $|Q_n| \asymp 2^{nd}$, отримаємо

$$I = \sup_{\boldsymbol{y}} \|\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - A\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\|_\infty \geq$$

$$\geq C_d|Q_n| - B(m|Q_n|)^{\frac{1}{2}} > B(m|Q_n|)^{\frac{1}{2}} \gg 2^{nd}.$$

А отже, знайдеться $\boldsymbol{y}^*$, що

$$\|\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*) - A\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)\|_\infty \gg 2^{nd}. \qquad (3.32)$$

Нехай тепер має місце випадок $1 < q < \infty$. Оскільки степінь поліномів $t \in T(\mu(n))$ за кожною із змінних x_j, $j = \overline{1,d}$ не перевищує числа 2^n, то згідно з нерівністю різних метрик Нікольського (3.1) можемо записати $\|t\|_\infty \ll 2^{\frac{nd}{q}} \|t\|_q$.

Таким чином, із (3.32) знаходимо

$$\|\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*) - A\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)\|_q \gg$$

$$\gg 2^{-\frac{nd}{q}} \|\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*) - A\varphi_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^*)\|_\infty \gg 2^{-\frac{nd}{q}} 2^{nd} = 2^{nd(1-\frac{1}{q})}. \qquad (3.33)$$

Завершуючи встановлення оцінок знизу для величин $d_m^B(\mathbb{B}^r_{p,1}; L_q)$, розглянемо функцію

$$g(\boldsymbol{x}) = C2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})}\varphi_n(\boldsymbol{x}), \quad C > 0.$$

Згідно з властивостями ядра Фейєра при $1 \le p \le \infty$ маємо $\|A_n(\varphi_n, \cdot)\|_p \asymp 2^{nd(1-\frac{1}{p})}$, а отже, взявши до уваги еквівалентне стандартному подання норми $\|\varphi_n\|_{\mathbb{B}^r_{p,1}}$, можна записати

$$\|\varphi_n\|_{\mathbb{B}^r_{p,1}} \asymp \sum_s 2^{sr}\|A_s(\varphi_n, \cdot)\|_p \asymp$$

$$\asymp 2^{nr}\|A_n(\varphi_n, \cdot)\|_p \asymp 2^{nr} \cdot 2^{nd(1-\frac{1}{p})} = 2^{nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})}.$$

Звідси випливає, що при належному виборі додатної сталої C функція g належить класу $\mathbb{B}^r_{p,1}$.

Таким чином, використавши оцінки (3.32) та (3.33) відповідно при $q = \infty$ та $1 < q < \infty$, на підставі (3.28) отримаємо

$$d^B_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \gg d^B_m(\mathbb{B}^r_{p,1}; L_q) \gg \|g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^*) - Ag(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^*\|_q \gg$$

$$\gg 2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})}\|\varphi_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^*) - A\varphi_n(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^*)\|_q \gg$$

$$\gg 2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})} \cdot 2^{nd(1-\frac{1}{q})} = 2^{-nd(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} \asymp m^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Оцінка знизу, а разом з нею і теорема 3.1.2 доведені. ■

Зауваження 3.1.3. *Співставивши оцінки (3.8) і (3.24) при* $1 \le p < 2 \le q < \frac{p}{p-1}$, $r > d$ *і* $1 \le \theta \le \infty$, *можна записати*

$$d^T_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp d^\perp_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}.$$

Наступне твердження за змістом аналогічне теоремі 3.1.2. Відмінність лише в обмеженнях, що стосуються значень параметрів p та q.

Теорема 3.1.3. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$, $r > 0$ *і* $1 \le q \le p \le \infty$, *а також* $(p, q) \notin \{(1, 1), (\infty, \infty)\}$. *Тоді*

$$d^B_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp d^\perp_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \asymp m^{-\frac{r}{d}}. \tag{3.34}$$

Доведення теореми 3.1.3. Як і в доведенні попередньої теореми, для встановлення в (3.34) оцінок зверху достатньо встановити їх для поперечника $d^\perp_m(\mathbb{H}^r_p; L_q)$. Підберемо за заданим достатньо великим $m \in \mathbb{N}$ число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{(n+1)d} \le m < 2^{(n+2)d}$ і розглянемо наближення функції $f \in \mathbb{H}^r_p$ її частинною сумою Фур'є $S_n(f, \cdot)$.

Нехай спочатку $1 < p = q < \infty$. Тоді для $f \in \mathbb{H}^r_q$, згідно з нерівністю Мінковського (3.3), беручи до уваги співвідношення $\|f_s\|_q \le 2^{-sr}$, маємо

$$\|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_q = \Bigg\| \sum_{s=n+1}^{\infty} f_s \Bigg\|_q \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \|f_s\|_q \le \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr} \asymp m^{-\frac{r}{d}}$$

і

$$d^B_m(\mathbb{H}^r_p; L_q) \le d^\perp_m(\mathbb{H}^r_p; L_q) \le \sup_{f \in \mathbb{H}^r_p} \|f(\cdot) - S_n(f,\cdot)\|_q \ll m^{-\frac{r}{d}}. \tag{3.35}$$

У випадку $1 < q < p \le \infty$ необхідні оцінки випливають, з урахуванням вкладення $H^r_p \subset H^r_q$, із (3.35) . Справді,

$$d^B_m(\mathbb{H}^r_p; L_q) \le d^\perp_m(\mathbb{H}^r_p; L_q) \le d^\perp_m(\mathbb{H}^r_q; L_q) \ll m^{-\frac{r}{d}}. \tag{3.36}$$

Для інших, не розглянутих співвідношень між параметрами p та q, необхідні оцінки величин, що розглядаються, випливають із (3.36). А саме, при $q = 1$ і $p \in (1, \infty)$, скориставшись нерівністю $\|\cdot\|_1 < \|\cdot\|_p$ і оцінкою (3.36), отримаємо

$$d^B_m(\mathbb{H}^r_p; L_1) \le d^\perp_m(\mathbb{H}^r_p; L_1) < d^\perp_m(\mathbb{H}^r_p; L_p) \ll m^{-\frac{r}{d}}.$$

Якщо ж $1 < q < \infty$, $p = \infty$, то згідно з вкладенням $H^r_\infty \subset H^r_q$, взявши до уваги (3.36), можна записати

$$d^B_m(\mathbb{H}^r_\infty; L_q) \le d^\perp_m(\mathbb{H}^r_\infty; L_q) \le d^\perp_m(\mathbb{H}^r_q; L_q) \ll m^{-\frac{r}{d}}.$$

Оцінки зверху для величин $d^B_m(\mathbb{H}^r_p; L_q)$ та $d^\perp_m(\mathbb{H}^r_p; L_q)$, а отже і для величин $d^B_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q)$ та $d^\perp_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q)$ при $1 \le \theta < \infty$ доведені.

Переходячи до доведення в (3.34) оцінок знизу, зауважимо, що достатньо встановити їх для величин $d^B_m(\mathbb{B}^r_{\infty,1}; L_1)$. Окрім того, посилаючись на зроблені на початку даного підрозділу зауваження стосовно операторів G, вважаємо виконаним щодо них припущення $G \in L_m(B)_2$.

Отже, нехай $G \in L_m(B)_2$, а n таке, що $|\mu(n-1)| < 4B^2 m \le |\mu(n)|$, де, нагадаємо, $|\mu(l)|$ — число елементів множини $\mu(l) \subset \mathbb{Z}^d$. Розглянемо наближення функцій $e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$, $\boldsymbol{k} \in \mu(n)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, за допомогою операторів $G \in L_m(B)_2$. Позначимо $\beta_{\boldsymbol{k}} = (Ge^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})})$. Тоді, оскільки

$$Ge^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{l=1}^{\overline{m}} a^{\boldsymbol{k}}_l \psi_l(\boldsymbol{x}),$$

то $\beta_{\boldsymbol{k}} = \sum\limits_{l=1}^{\overline{m}} a_l^{\boldsymbol{k}} \widehat{\psi}_l(\boldsymbol{k})$ і $|\beta_{\boldsymbol{k}}|^2 \leq B^2 \sum\limits_{l=1}^{\overline{m}} |\widehat{\psi}_l(\boldsymbol{k})|^2$. Отже, зважаючи на нерівності (3.26) та (3.27), маємо

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mu(n)} |\beta_{\boldsymbol{k}}|^2 \leq B^2 \sum_{\boldsymbol{k}\in\mu(n)} \sum_{l=1}^{\overline{m}} |\widehat{\psi}_l(\boldsymbol{k})|^2 = B^2 \sum_{l=1}^{\overline{m}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\mu(n)} |\widehat{\psi}_l(\boldsymbol{k})|^2 \leq B^2 \sum_{l=1}^{\overline{m}} 1 = B^2 \overline{m}.$$

Звідси, враховуючи вибір числа n, приходимо до висновку, що знайдеться такий вектор $\boldsymbol{k}^0 \in \mu(n)$, що $|\beta_{\boldsymbol{k}^0}| \leq \frac{1}{2}$. В такому випадку можна записати

$$\frac{1}{2} \leq |1 - \beta_{\boldsymbol{k}^0}| = |(e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})} - Ge^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}, e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})})| \leq \|e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})} - Ge^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}\|_1. \qquad (3.37)$$

Нарешті, взявши до уваги вище зазначене, скориставшись співвідношенням (3.37), для $G \in L_m(B)_1$ маємо

$$\|e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})} - Ge^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}\|_1 \geq \frac{1}{2} 3^{-d}. \qquad (3.38)$$

Тепер, розглянемо функцію $g_1(\boldsymbol{x}) = 2^{-nr} e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}$. Оскільки

$$\|g_1\|_{B^r_{\infty,1}} \asymp \sum_s 2^{sr} \|A_s(g_1,\cdot)\|_\infty = 2^{nr} \|A_n(g_1,\cdot)\|_\infty = 2^{nr} \cdot 2^{-nr} = 1,$$

то при деякому додатному C функція $Cg_1 \in B^r_{\infty,1}$ і згідно з (3.38)

$$\|g_1(\cdot) - Gg_1(\cdot)\|_1 = 2^{-nr} \|e^{i(\mathbf{k^0},\boldsymbol{x})} - Ge^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{x})}\|_1 \gg 2^{-nr}.$$

Звідси

$$d_m^{\perp}(B^r_{\infty,1}; L_1) \geq d_m^B(B^r_{\infty,1}; L_1) \gg m^{-\frac{r}{d}}.$$

Теорема 3.1.3 доведена. ∎

На завершення встановимо порядкові значення величин $d_m^B(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_p)$ при $p = 1$ та $p = \infty$.

Теорема 3.1.4. *Нехай* $r > 0$, $1 \leq \theta \leq \infty$. *Тоді при* $p = 1$ *чи* $p = \infty$

$$d_m^B(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_p) \asymp m^{-\frac{r}{d}}. \qquad (3.39)$$

Доведення теореми 3.1.4. Встановимо в (3.39) оцінку зверху при $\theta = \infty$, тобто для класів $\mathbb{H}^r_p$. Тоді при $1 \leq \theta < \infty$ такі оцінки залишаться справедливими внаслідок вкладення $B^r_{p,\theta} \subset H^r_p$. За заданим достатньо великим $m \in \mathbb{N}$ підберемо число $n \in \mathbb{N}$ із співвідношення $2^{nd} \le m < 2^{(n+1)d}$ і розглянемо для $f \in \mathbb{H}^r_p$ наближаючий поліном вигляду

$$t_n(f,\boldsymbol{x}) = \sum_{s=0}^{n} A_s(f,\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Як зазначалося вище, оператор G, що ставить у відповідність функції f поліном такого вигляду, належить множині $L_m(1)_2$. Зауважимо, що $\deg t_n = (2^{n+1}-1)^d$. Оскільки для $f \in \mathbb{H}^r_p$ при $p=1$ чи $p=\infty$, має місце співвідношення $\|A_s(f,\cdot)\|_p \le 2^{-sr}$, то застосувавши нерівність Мінковського (3.3), маємо

$$\|f(\cdot) - t_n(f,\cdot)\|_p = \left\| \sum_{s=n+1}^{\infty} A_s(f,\cdot) \right\|_p \le \sum_{s=n+1}^{\infty} \|A_s(f,\cdot)\|_p \le \sum_{s=n+1}^{\infty} 2^{-sr} \ll 2^{-nr}.$$

Звідси отримаємо

$$d^B_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q) \le d^B_m(\mathbb{H}^r_p; L_q) \le \sup_{f \in \mathbb{H}^r_p} \|f(\cdot) - t_{n-1}(f,\cdot)\|_p \ll m^{-\frac{r}{d}}.$$

Необхідна оцінка знизу в (3.39) випливає із відповідної оцінки величини $d^B_m(\mathbb{B}^{\,r}_{\infty,1}; L_1)$, яка встановлена у доведенні попередньої теореми.

Теорема 3.1.4 доведена. ■

Зауваження 3.1.4. *Порядкові значення величин* $d^{\perp}_m(\mathbb{B}^{\,r}_{p,\theta}; L_p)$, $p=1$ *чи* $p=\infty$, *а* $1 \le \theta < \infty$ *у випадку* $d \ge 2$, *ймовірно, залишаються невідомими.*

Для класів $\mathbb{H}^r_p$ *точні за порядком оцінки величин* $d^{\perp}_m(\mathbb{H}^r_p; L_p)$, $p = 1, \infty$ *для всіх вимірностей* $d \ge 1$ *встановлені в [3]. Стосовно класів* $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$, $1 \le \theta < \infty$ *в одновимірному випадку* $(d=1)$ *в роботі [105] доведене співвідношення*

$$d^{\perp}_m(\mathbb{B}^{\,r}_{1,\theta}; L_1) \asymp m^{-r}, \quad r > 0, \ 1 \le \theta < \infty.$$

На завершення, порівняємо одержані оцінки поперечників $d^{\perp}_m(\mathbb{B}^r_{p,\theta}; L_q)$ з оцінками апроксимаційних характеристик $e^{\perp}_m(F)_q$ класів $F = \mathbb{B}^r_{p,\theta}$, які досліджені в [106].

Отже, покладемо

$$e^{\perp}_m(F)_q := \sup_{f \in F} \inf_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{Z}^d \\ \sharp\Lambda = m}} \left\| f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{k} \in \Lambda} \hat{f}_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\cdot)} \right\|_q .$$

Величина $e^{\perp}_m(F)_q$ *називається найкращим ортогональним* $m-$*членним тригонометричним наближенням класу* F *в просторі* $L_q(\pi_d)$.

Порівнюючи результати теорем 3.1.1 та 3.1.2 з оцінками величин $e^{\perp}_{m}(\mathbb{B}^{r}_{p,\theta})_q$ [106, теорема 1], можна стверджувати, що при $1 \leq p,\theta \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, $(p,q) \neq (1,1)$ та $r > d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+$ справедливе співвідношення

$$d^{\perp}_{M}(\mathbb{B}^{r}_{p,\theta}, L_q) \asymp e^{\perp}_{m}(\mathbb{B}^{r}_{p,\theta})_q \asymp m^{-\frac{r}{d}+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}.$$

3.2 Асимптотичні оцінки величин найкращих тригонометричних та білінійних наближень

Встановлені точні за порядком оцінки величин найкращих M –членних тригонометричних наближень класів Бесова $B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$ в просторі L_q. Знайдені також порядкові значення найкращих білінійних наближень класів функцій з $2d$ змінними, що породжені функціями з d змінними із класів $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ за допомогою зсувів аргументу.

3.2.1 Класи функцій

Означимо мішану $l-$у різницю функції f з кроком h_j за змінною x_j, $j=\overline{1,m}$. Для $\boldsymbol{h}=(h_1,\ldots,h_m)\in\mathbb{R}^m$ та $l\in\mathbb{N}$ покладемо

$$\Delta^{l}_{\boldsymbol{h}} f(\boldsymbol{x}) := \Delta^{l}_{h_m}\ldots\Delta^{l}_{h_1} f(x_1,\ldots,x_m),$$

де

$$\Delta^{l}_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = \Delta_{h_j}\Delta^{l-1}_{h_j} f(\boldsymbol{x}), \quad \Delta^{0}_{h_j} f(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}),$$

$$\Delta_{h_j} f(\boldsymbol{x}) \equiv \Delta^{1}_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = f(x_1,\ldots,x_j+h_j,\ldots,x_m) - f(\boldsymbol{x}).$$

Відомо, що

$$\Delta^{l}_{h_j} f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k+l} C^{k}_{l} f(x_1,\ldots,x_j+kh_j,\ldots,x_m).$$

Визначимо повний мішаний $p-$модуль гладкості порядку l функції f:

$$\omega_l(f,\boldsymbol{t})_p := \sup_{|h_i|\leq t_i} \|\Delta^{l}_{\boldsymbol{h}} f\|_p, \quad \boldsymbol{t}=(t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{R}^m_+.$$

Кажемо, що функція $f \in L_p(\pi_m)$, $1\leq p\leq\infty$, *належить простору* $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1\leq\theta\leq\infty$, $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_m)$, $r_j>0$, $j=\overline{1,m}$, *якщо скінченна її півнорма*

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} := \begin{cases} \left(\int\limits_{\pi_m} \left(\prod\limits_{j=1}^{m} t_j^{-r_j}\omega_l(f,\boldsymbol{t})_p\right)^{\theta} \prod\limits_{j=1}^{m}\frac{dt_j}{t_j}\right)^{\frac{1}{\theta}}, & 1\leq\theta<\infty, \\ \sup\limits_{t_j>0} \prod\limits_{j=1}^{m} t_j^{-r_j}\omega_l(f,\boldsymbol{t})_p, & \theta=\infty, \end{cases}$$

де $l > \max\{r_i,\ i = \overline{1,m}\}$.
Норму на лінійних просторах $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ задамо формулою $\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} = \|f\|_p + |f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$.

В [50] простори $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ охарактеризовані в термінах так званого декомпозиційного нормування належних їм функцій, на базі їх розкладу в ряд Фур'є за тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^m}$. Саме таке нормування використовується, зокрема, в доведенні належності тієї чи іншої функції простору $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, або деякому класу з цього простору.

Сформулюємо результат із [50] у відповідності до прийнятих нижче означень і позначень. Для вектора $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_m)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,m}$, покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : [2^{s_j-1}] \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1, m\}$$

і для $f \in L_p(\pi_m)$ означимо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m,$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.
Позначимо

$$L^0_p(\pi_m) := \{f \in L_p(\pi_m) : \int\limits_0^{2\pi} f(\boldsymbol{x}) dx_j = 0, \quad j = \overline{1,m}\}.$$

Нехай $p \in (1, \infty)$. В [50] доведено, що для півнорми $|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$ функції $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_m)$ справедливі співвідношення

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^\theta_p \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty \tag{3.40}$$

і

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p \,, \tag{3.41}$$

а також показано, що на множині $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_m)$ півнорма $|\cdot|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}$ насправді є нормою.

Так звані порядкові (або точні за порядком) співвідношення (3.40) та (3.41) при певній їх модифікації мають місце і у випадках $p = 1$ та $p = \infty$: для $f \in B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \cap L^0_p(\pi_m)$ справедливі співвідношення (див. зауваження 2.1 в [50], а також [2])

$$|f|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^\theta_p \right)^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \le \theta < \infty \tag{3.42}$$

і

$$|f|_{B^{r}_{p,\infty}} \asymp \sup_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^m_+} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})}\|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_p\,. \tag{3.43}$$

Зауважимо, співвідношення (3.42) та (3.43) справджуються і при $1<p<\infty$.

Оскільки в коментарях до отриманих результатів мова йде про відповідні результати на класах $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\,\alpha}$, то нагадаємо означення і цих класів функцій.

Нехай $F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{r}=(r_1,\dots,r_m)$ — багатовимірні аналоги ядер Бернуллі, тобто

$$F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha}) = 2^m\sum_{\boldsymbol{k}}\prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_j}\cos(k_jx_j-\frac{\alpha_j\pi}{2}),\quad r_j>0,\ \alpha_j\in\mathbb{R},$$

де в сумі задіяні лише такі вектори $\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_m)$, що $k_j\in\mathbb{N}$, $j=\overline{1,m}$. Позначимо через $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\,\alpha}$ (див., наприклад, [141, с. 31]) клас функцій f, які можна подати у вигляді

$$f(\boldsymbol{x}) = \varphi(\cdot)*F_{\boldsymbol{r}}(\cdot,\boldsymbol{\alpha}) = (2\pi)^{-m}\int\limits_{\pi_m}\varphi(\boldsymbol{y})F_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{\alpha})d\boldsymbol{y},$$

де $\varphi\in L_p(\pi_m)$, $\|\varphi\|_p\le 1$.

З метою однозначного трактування результатів, надалі вважаємо, що координати вектора $\boldsymbol{r}=(r_1,\dots,r_m)$, як параметра в означених просторах і класах, впорядковані так, що $0<r_1=r_2=\ldots=r_\nu<r_{\nu+1}\le\ldots\le r_m$, а $\boldsymbol{\gamma}=(\gamma_1,\dots,\gamma_m)$ — вектор з координатами $\gamma_j=\frac{r_j}{r_1}$, $j=\overline{1,m}$. Також зазначимо, через $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ позначається одинична куля в просторі $B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, а точніше,

$$\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} := \{f\in L^0_p(\pi_m) : \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}}\le 1\}.$$

3.2.2 Найкращі тригонометричні наближення

В даному підрозділі встановлено точні за порядком оцінки найкращих $M-$членних тригонометричних та ортогональних тригонометричних наближень функцій з класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\,\theta}$. Викладені тут результати, з одного боку, доповнюють оцінки відповідних величин, які встановлені в [97, 98], а з другого — використовуються при оцінюванні зверху найкращих білінійних наближень функцій із класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\,\theta}$.

Означимо апроксимаційні характеристики (див. пункт 3.1.3).

Для $f\in L_q(\pi_d)$, $1\le q\le\infty$ *покладемо*

$$e_M(f)_q := \inf_{\boldsymbol{k}^j,c_j}\|f(\boldsymbol{x})-\sum_{j=1}^{M}c_j\,e^{i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x})}\|_q, \tag{3.44}$$

де $\{\boldsymbol{k}^j\}_{j=1}^M$ *— система векторів* $\boldsymbol{k}^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$ *з цілочисловими координатами,* c_j *— довільні комплексні числа. Величину* $e_M(f)_q$ *називають найкращим* M*–членним тригонометричним наближенням функції* f *в просторі* L_q*.*
Якщо $F \subset L_q(\pi_d)$ — деякий функціональний клас, то покладемо

$$e_M(F)_q := \sup_{f \in F} e_M(f)_q. \tag{3.45}$$

Величина $e_M(f)_2$ для функцій f з однією змінною вперше з'явилась в роботі С. Б. Стєчкіна [129] у формулюванні критерію абсолютної збіжності ортогональних рядів. Дещо пізніше величини (3.44) та (3.45) почали досліджувати уже з точки зору апроксимації індивідуальних функцій і класів функцій відповідно. Частково історія таких досліджень відображена в бібліографії, наведеній в [97] та [98].

Нехай Ω_M — довільний набір із M $d-$вимірних векторів $\boldsymbol{k}^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $j = \overline{1, M}$ з цілочисловими координатами. Для $f \in L_q^0(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, покладемо

$$S_{\Omega_M}(f, \boldsymbol{x}) := \sum_{j=1}^{M} \widehat{f}(\boldsymbol{k}^j) e^{i(\boldsymbol{k}^j, \boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Розглянемо величину $e_M^{\perp}(f)_q = \inf\limits_{\Omega_M} \|f(\cdot) - S_{\Omega_M}(f, \cdot)\|_q$ і для функціонального класу $F \subset L_q(\pi_d)$ означимо

$$e_M^{\perp}(F)_q := \sup_{f \in F} e_M^{\perp}(f)_q.$$

Величину $e_M^{\perp}(F)_q$ *називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу* F *в просторі* L_q*.*

Легко бачити, що для величин $e_M^{\perp}(F)_q$ та $e_M(F)_q$ справджується нерівність

$$e_M(F)_q \le e_M^{\perp}(F)_q. \tag{3.46}$$

Величини $e_M^{\perp}(F)_q$ у випадках, коли $F = \mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$, $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$, чи $F = \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ вивчались в роботах [99], [100]. Має місце також наступне твердження.

Теорема 3.2.1. *Нехай* $1 < q < \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді при* $1 \le \theta \le \infty$ *справедливі співвідношення*

$$e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q \asymp e_M^{\perp}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q \asymp M^{-r_1} (\log^{\nu-1} M)^{(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta})_+}, \tag{3.47}$$

Доведення теореми 3.2.1. Згідно з (3.46) оцінки зверху в (3.47) достатньо отримати для величини $e_M^{\perp}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q$, а знизу — для $e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q$. Оцінка зверху для

$e^{\perp}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q$ випливає із такої оцінки для величини $e^{\perp}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q$, $1<q<p<\infty$, $p\geq 2$ [97] згідно з вкладенням $B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}\subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$.

На початку доведення оцінки знизу в (3.47), зауважимо, її достатньо встановити у випадку $\nu=d$. При цьому використовується один результат Б. С. Кашина і В. М. Темлякова [37], формулювання якого потребує введення деяких позначень. Отже, для вектора $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_d)$, де s_j — парні числа, $s_j>0$, $j=\overline{1,d}$, позначимо

$$\rho^+(\boldsymbol{s}):=\{\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d):\quad k_j\in\mathbb{N},\quad 2^{s_j-1}\leq k_j<2^{s_j}\}$$

і для $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2d$, покладемо

$$S_n=\left\{\boldsymbol{s}:\,(\mathbf{s},\mathbf{1})=2\left[\frac{n}{2}\right]\right\},\quad \overline{Q}_n=\bigcup_{\boldsymbol{s}\in S_n}\rho^+(\boldsymbol{s}),$$

де $[\,a\,]$ — ціла частина числа a. Зазначимо, що (див., наприклад, [37])

$$|S_n|\asymp n^{d-1}\quad\text{та}\quad|\overline{Q}_n|\asymp 2^n\,n^{d-1}.$$

Зрозуміло, необхідну оцінку знизу величини $e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q$ достатньо отримати для M, що задовольняють нерівності $C_1(d)|\overline{Q}_n|<M\leq C_2(d)|\overline{Q}_n|$, де $C_1(d)$, $C_2(d)$ — додатні сталі, які можуть залежати лише від параметра d. Отже, нехай $T(\overline{Q}_n)$ позначає множину поліномів t вигляду

$$t(\boldsymbol{x})=\sum_{|\boldsymbol{k}|\in\overline{Q}_n}c_{\boldsymbol{k}}e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})},\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,$$

де $|\boldsymbol{k}|=(|k_1|,\ldots,|k_d|)$. В [37], у вигляді наслідку із загального твердження, встановленого там же, показано: *при* $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_1)\in\mathbb{R}^d$, $r_1>0$ *і* $1<q\leq\infty$

$$e_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty\cap T(\overline{Q}_n))_q\geq C(q,d,\boldsymbol{r})M^{-r_1}(\log^{d-1}M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{3.48}$$

Використаємо (3.48) для встановлення шуканої оцінки знизу величини $e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q$. Оскільки для $f\in\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty\cap T(\overline{Q}_n)$ справджується співвідношення

$$\|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|_\infty\ll 2^{-(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})},\ \boldsymbol{s}\in S_n,$$

то при $1\leq\theta\leq\infty$ для $f\in\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}\cap T(\overline{Q_n})$

$$\|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}}\asymp\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in S_n}2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta}\|A_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)\|^\theta_\infty\right)^{\frac{1}{\theta}}\ll\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in S_n}1\right)^{\frac{1}{\theta}}\asymp n^{\frac{d-1}{\theta}}.$$

Отже, якщо $f \in \mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{\infty} \cap T(\overline{Q}_n)$, то функція $g(\boldsymbol{x}) = C_1 n^{-\frac{d-1}{\theta}} f(\boldsymbol{x})$ (з деякою додатною сталою C_1) належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n)$. Зважаючи на це, використавши (3.48), маємо

$$e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q \geq e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta} \cap T(\overline{Q}_n))_q \gg$$
$$\gg n^{-\frac{d-1}{\theta}} e_M(H^{\boldsymbol{r}}_{\infty} \cap T(\overline{Q}_n))_q \gg M^{-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Встановлена оцінка збігається за порядком з оцінкою зверху величини $e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q$ у випадку $r_1 > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$. Якщо ж $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$, то зазначимо наступне. З одного боку, оскільки у такому випадку оцінка зверху величини $e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q$ не залежить від вимірності простору $\mathbb{R}^d$, то відповідну оцінку знизу достатньо довести в одновимірному випадку, тобто при $d = 1$. З іншого ж боку, в одновимірному випадку, за схемою, яка застосована вище, неважко отримати шукану оцінку знизу величини $e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_q$ одразу для всіх додатних значень параметра r_1.

Теорема 3.2.1 доведена. ■

Зауваження 3.2.1. *У випадку $\theta = \infty$, тобто для класів $H^{\boldsymbol{r}}_{\infty}$, оцінки знизу величин $e_M(H^{\boldsymbol{r}}_{\infty})_q$, а отже і величин $e^{\perp}_M(H^{\boldsymbol{r}}_{\infty})_q$, встановлена в [37].*

Наступне твердження доповнює результат теореми 3.2.1 у випадку $q = 1$, але за певних обмежень щодо значень параметра r_1.

Теорема 3.2.2. *Нехай $1 \leq \theta < 2$, $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$. Тоді справджується співвідношення*

$$e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_1 \asymp e^{\perp}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_1 \asymp M^{-r_1}.$$

Доведення теореми 3.2.2. Оцінки зверху величин $e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_1$ та $e^{\perp}_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_1$ випливають із (3.47), якщо взяти до уваги нерівність $\|\cdot\|_1 < \|\cdot\|_q$, $q > 1$. Оскільки така оцінка зверху величини $e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_1$ не залежить від вимірності простору $\mathbb{R}^d$, то відповідну їй оцінку знизу достатньо встановити в одновимірному випадку. Але ж, з іншого боку, в одновимірному випадку оцінка знизу для $e_M(\mathbb{B}^{r_1}_{\infty,\theta})_1$ є наслідком результату отриманого в [169], і є саме тією, яку необхідно встановити.

Теорема 3.2.2 доведена. ■

Зауваження 3.2.2. *Порядкові значення величин $e_M(F)_1$ та $e^{\perp}_M(F)_1$, де F це класи $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\alpha}$ чи $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{\infty}$, в багатовимірному випадку, тобто при $d \geq 2$, ймовірно, ще не встановлені.*

3.2.3 Про білінійні наближення функцій

Наближення функцій декількох змінних лінійними комбінаціями добутків двох функцій з меншим числом змінних називають білінійними. Одними з найбільш важливих характеристик таких наближень є величини $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ для індивідуальної функції f та $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ для функціонального класу F . Наведемо означення цих величин.

Нехай $L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$, $d \in \mathbb{N}$, — множина функцій $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$, 2π–періодичних за кожною із $2d$ змінних зі скінченною нормою

$$\|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2} := \|\|f(\cdot,\boldsymbol{y})\|_{q_1}\|_{q_2},$$

де в правій частині норма функції $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\pi_d)$, $1 \le q_1 \le \infty$, як функції зі змінною $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ (при фіксованому $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$), а потім від результату, як функції зі змінною $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ в просторі $L_{q_2}(\pi_d)$, $1 \le q_2 \le \infty$.

Для $f \in L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ *означимо величину найкращого білінійного наближення порядку* M $(M \in \mathbb{N})$ *формулою*

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{\substack{u_j(\cdot),v_j(\cdot)\\ j=\overline{1,M}}} \|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2}, \qquad (3.49)$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$, $j = \overline{1,M}$.
При $M = 0$ *вважаємо, що* $\tau_0(f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))_{q_1,q_2} := \|f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_{q_1,q_2}$. *Для* $F \subset L_{q_1,q_2}(\pi_{2d})$ *покладемо*

$$\tau_M(F)_{q_1,q_2} := \sup_{f\in F} \tau_M(f)_{q_1,q_2}. \qquad (3.50)$$

У випадку, коли $q_1 = q_2 = q$ замість $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ і $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ пишемо відповідно $\tau_M(f)_q$ і $\tau_M(F)_q$.

Дослідженню величин $\tau_M(F)_{q_1,q_2}$ для деяких класів періодичних функцій багатьох змінних присвячені роботи В. Н. Темлякова [135], [138–141], А. С. Романюка [100] та роботи у співавторстві А. С. Романюка та В. С. Романюка [108–111], [192].

Ймовірно перший результат, що має дотик до найкращих білінійних наближень, був отриманий Е. Шмідтом [197] ще у 1907 році в дослідженнях, пов'язаних з інтегральними рівняннями. Було з'ясовано, що наближення функцій $f(x,y)$ з двома змінними, визначених на квадраті $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, білінійними формами в просторі $L_{2,2}([0,1]^2)$ тісно пов'язане з властивостями інтегральних операторів

$$J_f(g) = \int_0^1 f(x,y)g(y)dy$$

з ядром $f(x,y)$. Точніше, в [197] був отриманий розклад (нині відомий в математичній літературі як розклад Е. Шмідта)

$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(J_f)\varphi_j(x)\psi_j(y),$$

де $\{s_j(J_f)\}_{j=1}^{\infty}$ — незростаюча послідовність (незростаюча перестановка) сингулярних чисел оператора J_f, тобто $s_j(J_f)=\lambda_j(J_f^*J_f)$, $\{\lambda_j(T)\}_{j=1}^{\infty}$ — послідовність власних чисел оператора T, J_f^* — оператор, що є спряженим до оператора J_f, і, нарешті, $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ та $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормовані системи власних функцій операторів $J_fJ_f^*$ та $J_f^*J_f$ відповідно.

Окрім того, Е. Шмідт встановив рівність

$$\left\|f(x,y)-\sum_{j=1}^{M}s_j(J_f)\varphi_j(x)\psi_j(y)\right\|_{2,2}=\inf_{u_j,v_j\in L_2[0,1]}\left\|f(x,y)-\sum_{j=1}^{M}u_j(x)v_j(y)\right\|_{2,2},\quad(3.51)$$

яка пов'язує величини $\tau_M(f)_{2,2}$ із сингулярними числами $s_j(J_f)$ оператора J_f. Пізніше, такий зв'язок був використаний в розв'язанні задачі щодо оцінок сингулярних чисел інтегральних операторів в роботі М. Ш. Бірмана та М. З. Соломяка [14], а також, — щодо оцінок величин $\tau_M(f)_{2,2}$ в роботі Н. В. Мірошина та В. В. Хромова [54]. Також зазначимо, Ч. Мічеллі та А. Пінкус [185], дослідивши білінійні наближення деяких функцій з двома змінними, визначених на квадраті $[0,1]\times[0,1]$, застосували одержані результати до виявлення точних значень поперечників класів диференційованих функцій. З більш детальною інформацією по зазначених питаннях можна познайомитися, звернувшись до бібліографічних посилань в роботі Е. М. Чіні [164]. Звертаємо увагу також на роботи М.-Б. А. Бабаєва [10], [11], в яких розглядаються питання білінійних наближень неперіодичних функцій.

3.2.4 Найкращі білінійні наближення функцій спеціального виду

У випадку коли в (3.49) функція $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ з $2d$ змінними $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$ пов'язана із деякою функцією з d змінними $g(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$ так, що $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, кажемо, що функція f породжується функцією g і замість $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ пишемо $\tau_M(f_g)_{q_1,q_2}$, або $\tau_M(g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,q_2}$.

Якщо $F\subset L_1(\pi_d)$ — деякий клас функцій з d змінними, то покладемо

$$\tau_M^*(F)_{q_1,q_2}:=\sup_{g\in F}\tau_M(f_g)_{q_1,q_2}.\quad(3.52)$$

Зазначимо, Р. С. Ісмагілов [33] встановив певний зв'язок між величинами $\tau_M(f_g)_{2,\infty}$ і поперечниками за Колмогоровим класу F, якому належить функція g.

Дослідженню величин $\tau_M^*(F)_{q_1,q_2}$ у випадках, коли $F = \mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$ чи $F = \mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$, присвячені роботи В. М. Темлякова [139], [142], [143] (див. також [135]), а в [100] встановлена слабка асимптотика величин $\tau_M^*(F)_{q_1,q_2}$ у випадку, коли $F = \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ при значеннях параметрів p, θ, q_1, q_2 відмінних від тих, що задіяні в результатах даного підрозділу, до викладу яких ми і переходимо.

Отже, наступні результати стосуються порядкових оцінок величин $\tau_M^*(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_{q_1,q_2}$, при певних значеннях параметрів p, θ, $\boldsymbol{r}$ та q_1, q_2.

Теорема 3.2.3. *Нехай* $1 < q_1 \le 2$, $1 \le q_2 \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, $1 - \frac{1}{q_1} < r_1 \le 1 - \frac{2}{q_1} + \frac{1}{\theta}$. *Тоді*

$$\tau_M^*(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1+1-\frac{1}{q_1}}. \tag{3.53}$$

Доведення теореми 3.2.3. Оцінка зверху в (3.53) випливає із оцінки найкращих $M-$членних тригонометричних наближень класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$ в метриці простору L_{q_1}, $1 < q_1 \le 2$. В [97, теорема 3.1] , зокрема, при $p = 1$ встановлено співвідношення

$$e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_{q_1} \asymp M^{-r_1+1-1/q_1}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1-1+\frac{2}{q_1}-\frac{1}{\theta})_+},$$

яке за умов теореми 3.2.3 набуває вигляду

$$e_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_{q_1} \asymp M^{-r_1+1-\frac{1}{q_1}}. \tag{3.54}$$

Таким чином, з одного боку, згідно з (3.54) для кожної функції f, що належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$, знайдеться множина таких векторів $\boldsymbol{k}^1, \dots, \boldsymbol{k}^M$, $\boldsymbol{k}^j = (k_1^j, \dots, k_d^j)$, $k_i^j \in \mathbb{Z}$, $i = \overline{1,d}$ і чисел $c_1, \dots, c_M$, що

$$\|f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{M} c_j\, e^{i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x})}\|_{q_1} \ll M^{-r_1+1-\frac{1}{q_1}}. \tag{3.55}$$

З іншого боку, ліву частину (3.55) можна подати у вигляді

$$\|f(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{M} c_j\, e^{i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x})}\|_{q_1} = \|f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{M} c_j\, e^{i(\boldsymbol{k}^j,(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))}\|_{q_1,\infty} =$$

$$= \|f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{M} c_j\, e^{i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x})} e^{-i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{y})}\|_{q_1,\infty}. \tag{3.56}$$

Поєднавши (3.55) та (3.56), маємо

$$\|f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\sum_{j=1}^{M}c_j\, e^{i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x})}e^{-i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{y})}\|_{q_1,\infty}\ll M^{-r_1+1-\frac{1}{q_1}}. \tag{3.57}$$

Нарешті, поклавши в (3.57) $c_je^{i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{x})}=u_j(\boldsymbol{x})$ і $e^{-i(\boldsymbol{k}^j,\boldsymbol{y})}=v_j(\boldsymbol{y})$, приходимо безпосередньо до шуканої оцінки зверху для величини $\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_{q_1,q_2}$.

На початку доведення в (3.53) оцінки знизу зауважимо наступне. Оскільки встановлена оцінка зверху для величин $\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_{q_1,q_2}$ не залежить від вимірності простору $\mathbb{R}^d$, то таку ж оцінку знизу достатньо довести для одновимірного випадку, тобто при $d=1$. Окрім того, поза як $B^{\boldsymbol{r}}_{1,1}\subset B^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}$, $1<\theta<\infty$, то достатньо обмежитись випадком, коли $\theta=1$.

В доведенні використовується наступне допоміжне твердження.
Нехай $C(N)$ позначає таку множину цілих чисел k, що $|k|\le N$.
Лема B$_3$ [135, с. 107]. *Нехай задана така функція*

$$g(x)=\sum_{k\in C(2N)}\widehat{g}(k)e^{ikx},\quad x\in\mathbb{R},$$

що $|\widehat{g}(k)|\le 1$ *і* $|\widehat{g}(k)|=1$ *при* $k\in C(N)$. *Тоді справедливе співвідношення*

$$\tau_N(g(x-y))_{2,1}\gg N^{\frac{1}{2}}.$$

Отже, за числом M підберемо таке $n\in\mathbb{N}$, що $2^{n-1}\le M<2^n$ і розглянемо білінійне наближення функції $V_{2^{n+2}}(x-y)$. Нехай системи функцій $\{u_i(x)\}_{i=1}^M$ та $\{v_i(y)\}_{i=1}^M$, $x,\, y\in\mathbb{R}$ такі, що

$$\left\|V_{2^{n+2}}(x-y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\right\|_{q_1,1}\le 2\tau_M\big(V_{2^{n+2}}(x-y)\big)_{q_1,1}.$$

Якщо $\mathbf{V}_l$ — оператор Валле-Пуссена, $\mathbf{V}_l[\,f\,]:=f*V_l$, то поза як

$$\left\|\mathbf{V}_{2^{n+3}}\left(V_{2^{n+2}}(x-y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\right)\right\|_{q_1,1}=$$

$$=\left\|V_{2^{n+2}}(x-y)-\sum_{i=1}^{M}\mathbf{V}_{2^{n+3}}[u_i(x)v_i(y)]\right\|_{q_1,1}$$

і для $f\in L_q(\pi)$, $1\le q\le\infty$ справджується нерівність $\|\mathbf{V}_l(f)\|_q\le 3\|f\|_q$, то, без втрати загальності, можна вважати, що функції u_i та v_i є тригонометричними поліномами, "номери" гармонік в яких належать множині $C(2^{n+3})$ і при цьому справедлива оцінка

$$\left\|V_{2^{n+2}}(x-y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\right\|_{q_1,1}\ll\tau_M\big(V_{2^{n+2}}(x-y)\big)_{q_1,1}. \qquad (3.58)$$

Таким чином, використавши нерівність різних метрик Нікольського (3.1), а також (3.58), можна записати

$$\left\|V_{2^{n+2}}(x-y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\right\|_{2,1}\ll 2^{n(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}\left\|V_{2^{n+2}}(x-y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\right\|_{q_1,1}\ll$$

$$\ll 2^{n(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}\tau_M\big(V_{2^{n+2}}(x-y)\big)_{q_1,1}. \qquad (3.59)$$

Далі, беручи до уваги співвідношення зв'язку між числами M та n, використовуючи лему B$_3$, із (3.59) знаходимо

$$\tau_M\big(V_{2^{n+2}}(x-y)\big)_{q_1,1}\gg 2^{-n(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}\left\|V_{2^{n+2}}(x-y)-\sum_{i=1}^{M}u_i(x)v_i(y)\right\|_{2,1}\gg$$

$$\gg 2^{-n(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})}M^{\frac{1}{2}}\asymp 2^{-n(\frac{1}{q_1}-1)}. \qquad (3.60)$$

Тепер розглянемо функцію

$$f_1(t)=C_2 2^{-nr_1}V_{2^{n+2}}(t),\quad t\in\mathbb{R},\ C_2>0.$$

Неважко переконатися, що при належному підборі додатної сталої C_2 така функція належить класу $\mathbb{B}^{r_1}_{1,1}$. Справді, поза як згідно з властивостями ядра Валлє-Пуссена $\|V_{2^{n+2}}\|_1\le C_3$, де C_3 — деяка додатна стала, то беручи до уваги означення $\|V_{2^{n+2}}\|_{B^{r_1}_{1,1}}$, можна записати

$$\big\|V_{2^{n+2}}\big\|_{B^{r_1}_{1,1}}\asymp\sum_{s}2^{sr_1}\|A_s(V_{2^{n+2}},\cdot)\|_1\le\sum_{s=0}^{n+3}2^{sr_1}\|A_s(V_{2^{n+2}},\cdot)\|_1\ll 2^{(n+3)r_1}\asymp 2^{nr_1}.$$

Отже, $f_1\in\mathbb{B}^{r_1}_{1,1}$.

Нарешті, використавши оцінку (3.60), встановлюємо співвідношення

$$\tau^*_M(\mathbb{B}^{r_1}_{1,1})_{q_1,q_2}\ge\tau_M(f_1(x-y))_{q_1,q_2}\gg 2^{-nr_1}\tau_M(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q_1,1}\gg$$

$$\gg 2^{-nr_1}2^{-n(\frac{1}{q_1}-1)}=2^{-n(r_1-1+\frac{1}{q_1})}\asymp M^{-r_1+1-\frac{1}{q_1}}.$$

Оцінка знизу, а разом з нею і теорема 3.2.3 доведені. ■

Зауваження 3.2.3. *Порядкові значення величин* $\tau_M^*(F)_{q_1,q_2}$, *у випадках, коли* $F = \mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{1,\alpha}$ *чи* $F = \mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_1$, *а* $1 < q_1 \leq 2$, $1 \leq q_2 \leq \infty$, $r_1 > 1 - \frac{1}{q_1}$, *ймовірно, ще не встановлені.*

Теорема 3.2.4. *Нехай* $2 \leq q_1 < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$ *і* $1 \leq \theta \leq \infty$, $r_1 > 0$. *Тоді*

$$\tau_M^*(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}. \tag{3.61}$$

Доведення теореми 3.2.4. Оцінка зверху в (3.61) випливає із теореми 3.2.1, узгоджуючись зі схемою встановлення оцінки зверху в попередній теоремі.

Переходячи до доведення у (3.61) оцінки знизу зауважимо — її достатньо встановити, очевидно, за припущення $\nu = d$.

Нехай M — довільне натуральне число, а число $n \in \mathbb{N}$ таке, що для кількості елементів множини $Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},1)=n} \rho(\boldsymbol{s})$ справджується нерівність:

$$|Q_n| > 4M \tag{3.62}$$

(відомо, що $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$). Розглянемо функцію

$$f_2(\boldsymbol{x}) = C_4 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \sum_{(\boldsymbol{s},1)=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j), \quad C_4 > 0,$$

де для $t \in \mathbb{R}$

$$R_k(t) = \sum_{l=2^{k-1}}^{2^k-1} \varepsilon_l e^{ilt}, \quad \varepsilon_l = \pm 1,$$

— поліноми Рудіна–Шапіро (див., наприклад, [38, с. 155]). Для таких поліномів має місце нерівність $\|R_k\|_\infty \ll 2^{\frac{k}{2}}$. Зазначимо, у випадку $\theta = \infty$ множник $n^{-\frac{d-1}{\theta}}$ в означенні функції f_2 потрібно замінити одиницею.

Покажемо, що при певному підборі додатної сталої C_4 функція f_2 належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$. З цією метою покладемо

$$F_n(\boldsymbol{x}) := \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(\boldsymbol{x}_j)$$

і зауважимо, для таких векторів $\boldsymbol{s}$, що $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) = n$, справедлива рівність

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(F_n, \boldsymbol{x}) = \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(\boldsymbol{x}_j).$$

Нехай $\theta \in [1, \infty)$, тоді

$$\|F_n\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}} = \left(\sum_{\boldsymbol{s}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}(F_n,\cdot)\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{\boldsymbol{s}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left\| A_{\boldsymbol{s}}(\cdot) * \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(F_n,\cdot) \right\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le \left(\sum_{\boldsymbol{s}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|A_{\boldsymbol{s}}\|_1^\theta \left\| \sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} \delta_{\boldsymbol{s}'}(F_n,\cdot) \right\|_\infty^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} \|\delta_{\boldsymbol{s}'}(F_n,\cdot)\|_\infty \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{\boldsymbol{s}} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} \left\| \prod_{j=1}^d R_{\boldsymbol{s}'_j}(\cdot) \right\|_\infty \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \le n} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \left(\sum_{\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'\|_\infty \le 1} 2^{(\boldsymbol{s}',\boldsymbol{1})\frac{1}{2}} \right)^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \le n+d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\frac{\theta}{2}} \right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \le n+d} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})(r_1+\frac{1}{2})\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{3.63}$$

Далі, оскільки при $\alpha > 0$

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1}) \le l} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\alpha} = \sum_{m=d}^{l} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=m} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\alpha} = \sum_{m=d}^{l} 2^{m\alpha} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=m} 1 \asymp \sum_{m=d}^{l} 2^{m\alpha} m^{d-1} \asymp 2^{\alpha l} l^{d-1},$$

то із (3.63) маємо $\|F_n\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}} \ll 2^{n(r_1+\frac{1}{2})} n^{\frac{d-1}{\theta}}$.

Аналогічно, при $\theta = \infty$ $\|F_n\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\infty}} \ll 2^{n(r_1+\frac{1}{2})}$. Таким чином, на підставі отриманих співвідношень можна стверджувати, що для деякої додатної сталої C_4 функція f_2 належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, $1 \le \theta \le \infty$.

Продовжуючи доведення оцінки знизу в (3.61), використаємо наступне твердження.

Лема Г$_3$ [135, с. 98]. *Нехай задано число M, а число $n \in \mathbb{N}$ таке, що для кількості елементів множини $Q_n = \bigcup\limits_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})=n} \rho(\boldsymbol{s})$ виконується умова (3.62). Тоді для будь-якої функції g вигляду*

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in Q_n} \widehat{g}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \ |\widehat{g}(\boldsymbol{k})| = 1, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

справедлива оцінка

$$\inf_{u_i(\boldsymbol{x}),v_i(\boldsymbol{y})} \|g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{M} u_i(\boldsymbol{x})v_i(\boldsymbol{y})\|_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}.$$

Оскільки функція F_n задовольняє умови леми Γ_3, то для величин $\tau_M(f_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{2,1}$ маємо

$$\tau_M(f_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}} 2^{-n(r_1+\frac{1}{2})} n^{-\frac{d-1}{\theta}} \asymp M^{-r_1}(\log^{d-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

Звідси випливає потрібна оцінка знизу величини $\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{q_1,q_2}$ у випадку $r_1 \geq \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$. Якщо ж $0 < r_1 < \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$, то спочатку зауважимо наступне. Поза як у такому випадку, оцінка зверху величини $\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{q_1,q_2}$ не залежить від розмірності простору $\mathbb{R}^d$, то і відповідну оцінку знизу достатньо довести при $d = 1$. Але, з іншого боку, в одновимірному випадку викладені вище міркування дозволяють встановити шукані оцінки знизу величини $\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{q_1,q_2}$ одразу для всіх додатних значень параметра r_1.

Теорема 3.2.4 доведена. ■

Взявши в (3.61) $\theta = \infty$, можна сформулювати таке твердження.

Наслідок 3.2.1. *Нехай* $2 \leq q_1 < \infty$, $1 \leq q_2 \leq \infty$ *і* $r_1 > 0$. *Тоді*

$$\tau^*_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{\infty})_{q_1,q_2} \asymp M^{-r_1}(\log^{\nu-1} M)^{r_1+\frac{1}{2}}. \tag{3.64}$$

Зазначимо, що цей результат доповнює оцінки величин білінійних наближень класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$, які отримані В. М. Темляковим (див., [135, с. 100]). Щодо порядкових значень величин $\tau_M(\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\alpha})_{q_1,q_2}$ — то вони, ймовірно, ще не встановлені.

Отримані в даному підрозділі результати, певним чином пов'язані з результатами, що стосуються оцінок колмогоровських поперечників деяких класів функцій. Покажемо це.

Отже, нехай F — деякий функціональний клас і f фіксована функція із F. Позначимо через F_f множину, що складається із функцій вигляду $f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, що утворюються із $f(\boldsymbol{x})$ за допомогою зсувів її аргументу $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ на довільний вектор $\boldsymbol{y} \in \pi_d$. В такому випадку має місце рівність (див., наприклад, [135, с. 85])

$$\tau_M(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,\infty} = d_M(F_f, L_{q_1}). \tag{3.65}$$

Таким чином, якщо клас F інваріантний відносно зсуву аргументу функцій, то згідно з (3.65) можна стверджувати, що значення величини $\tau_M(f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,\infty}$ може слугувати за оцінку знизу для колмогоровського поперечника $d_M(F, L_{q_1})$ і в певних випадках ця оцінка є для нього точною за порядком.

Зауваження 3.2.4. *Порівнюючи результат теореми 3.2.4 з оцінкою колмогоровського поперечника* $d_M(\mathbb{B}^r_{1,\theta}; L_{q_1})$ [100, *теорема 1.1*], *можна дійти висновку, що при* $1 < q_1 \leq 2$ *та* $1 - \frac{1}{q_1} < r_1 \leq 1 - \frac{2}{q_1} + \frac{1}{\theta}$

$$\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_{q_1,\infty} \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta}; L_{q_1})(\log^{\nu-1} M)^{-r_1+1-\frac{1}{q_1}}.$$

Зауваження 3.2.5. *Співставивши оцінку (3.64) при* $q_2 = \infty$ *з відповідною оцінкою колмогоровського поперечника* $d_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty; L_{q_1})$ [142], *неважко дійти висновку, що*

$$\tau^*_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty)_{q_1,\infty} \asymp d_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_\infty; L_{q_1}).$$

Дещо відмінною є ситуація на класах $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}$, $1 \leq \theta < \infty$. *Так, співвставивши оцінку поперечника* $d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}; L_{q_1})$ [100] *з результатом теореми 3.2.4 при* $q_2 = \infty$, *можна стверджувати, що при* $2 \leq \theta < \infty$

$$\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{q_1,\infty} \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}; L_{q_1}).$$

Якщо ж $1 \leq \theta < 2$, *то*

$$\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{q_1,\infty} \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}; L_{q_1})(\log^{\nu-1} M)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}$$

при $r_1 > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$ *і*

$$\tau^*_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta})_{q_1,\infty} \asymp d_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\infty,\theta}; L_{q_1})(\log^{\nu-1} M)^{-r_1}$$

при $0 < r_1 \leq \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}$.

Наступне твердження містить точні за порядком значення найкращих білінійних наближень функцій з двома змінними з класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_1)$, $r_1 > 0$ у просторі $L_{q,q}(\pi_2)$, $1 \leq q \leq \infty$, який, очевидно, в такому випадку тотожній простору $L_q(\pi_2)$.

Теорема 3.2.5. *Нехай* $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta} \subset L_p(\pi_2)$. *Тоді при* $1 \leq \theta < \infty$ *справджуються співвідношення*

$$\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} M^{-2r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 \leq p \leq q \leq 2, \quad r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \\ M^{-2r_1}, & 2 \leq p \leq q \leq \infty, \quad r_1 > \frac{1}{2}, \\ M^{-2r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 \leq p < 2 < q \leq \infty, \quad r_1 > \frac{1}{p}. \end{cases} \tag{3.66}$$

Доведення теореми 3.2.5. Оцінки зверху випливають із відповідних оцінок білінійних наближень класів $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$, які встановлені в [135, теорема 4.2, с. 101].

Оцінки знизу в (3.66) в силу вкладення $B^{\boldsymbol{r}}_{p,1} \subset B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, $1 < \theta < \infty$, достатньо встановити для класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,1}$. Отже, спочатку, нехай $1 \le p \le q \le 2$. Для натурального числа M підберемо таке число $n \in \mathbb{N}$, що $2^{n-1} \le M < 2^n$ і розглянемо функцію з двома змінними вигляду

$$f_1(x,y) = C_5 2^{-(2r_1+1-\frac{1}{p})n} V_{2^{n+2}}(x-y), \quad C_5 > 0.$$

Насамперед, зазначимо, що при належному підборі додатної сталої C_5 ця функція належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,1}$. Справді, такий висновок є наслідком співвідношень

$$\|f_1\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,1}} \asymp 2^{-(2r_1+1-\frac{1}{p})n} \sum_{s_1,s_2>0} 2^{(s_1+s_2)r_1} \left\| A_{(s_1,s_2)}\Big(V_{2^{n+2}}(x-y)\Big) \right\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-(2r_1+1-\frac{1}{p})n} \sum_{s_1=1}^{n+3} \sum_{s_2=1}^{n+3} 2^{(s_1+s_2)r_1} \left\| A_{(s_1,s_2)}\Big(V_{2^{n+2}}(x-y)\Big) \right\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-(2r_1+1-\frac{1}{p})n} \sum_{s_1=1}^{n+3} \sum_{s_2=1}^{n+3} 2^{(s_1+s_2)r_1} \left\| A_{(s_1,s_2)}(x,y) \right\|_1 \left\| V_{2^{n+2}}(x-y) \right\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-(2r_1+1-\frac{1}{p})n} \cdot 2^{(2n+6)r_1} \cdot 2^{(n+2)(1-\frac{1}{p})} \le C(r_1,p).$$

Тепер, використавши співвідношення

$$\tau_M(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q,1} \gg 2^{-n(\frac{1}{q}-1)},$$

яке було встановлене в доведенні теореми 3.2.3 (див.(3.60)), можна записати

$$\tau_M(f)_{q,1} \asymp 2^{-(2r_1+1-\frac{1}{p})n} \tau_M(V_{2^{n+2}}(x-y))_{q,1} \gg$$

$$\gg 2^{-(2r_1+1-\frac{1}{p})n} \cdot 2^{-n(\frac{1}{q}-1)} = 2^{-(2r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} \asymp M^{-2r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \qquad (3.67)$$

Звідси випливає оцінка знизу величини $\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q$ у випадку $1 \le p \le q \le 2$.

При $1 \le p < 2 < q \le \infty$ оцінка знизу в (3.66) випливає із (3.67) при $q = 2$, якщо взяти до уваги нерівність $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_q$, $q \ge 2$.

Таким чином, на завершення доведення теореми 3.2.5 залишається отримати в (3.66) оцінку знизу величини $\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,1})_q$ у випадку, коли $2 \le p \le q \le \infty$ і $r_1 > \frac{1}{2}$.

Нехай числа M та n пов'язані нерівностями $2^{n-2} < M \le 2^{n-1}$ і

$$R_n(t) := \sum_{k=2^n-1}^{2^n-1} \varepsilon_k e^{ikt}, \ \varepsilon_k = \pm 1,$$

поліноми Рудіна–Шапіро, для яких $\|R_n\|_\infty \ll 2^{\frac{n}{2}}$.

Розглянемо функцію з двома змінними вигляду

$$f_2(x,y) = C_6 2^{-(2r_1+\frac{1}{2})n} R_n(x-y), \quad C_6 > 0,$$

і покажемо спочатку, що при деякому значенні сталої C_6 вона належить класу $\mathbb{B}^r_{p,1}$. Маємо

$$\|R_n(x-y)\|_{B^r_{p,1}} \asymp \sum_{s_1=1}^{\infty}\sum_{s_2=1}^{\infty} 2^{(s_1+s_2)r_1} \Big\| A_{(s_1,s_2)}(R_n(x-y)) \Big\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{s_1=1}^{n+2}\sum_{s_2=1}^{n+2} 2^{(s_1+s_2)r_1} \Big\| A_{(s_1,s_2)}(x,y) * R_n(x-y) \Big\|_\infty \ll$$

$$\ll \sum_{s_1=1}^{n+2}\sum_{s_2=1}^{n+2} 2^{(s_1+s_2)r_1} \|A_{(s_1,s_2)}(x;y)\|_1 \cdot \|R_n(x-y)\|_\infty \ll$$

$$\ll 2^{2nr_1} \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 2^{(2r_1+\frac{1}{2})n}.$$

Звідси випливає, що функція f_2 справді належить класу $\mathbb{B}^r_{p,1}$.

Тепер, беручи до уваги те, що функція $R_n(x-y)$ задовольняє умови леми Г3, згідно з якою $\tau_M(R_n(x-y))_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}$, маємо

$$\tau_M(f_2(x-y))_{2,1} \gg 2^{-(2r_1+\frac{1}{2})n} \tau_M(R_n(x-y))_{2,1} \gg$$

$$\gg 2^{-(2r_1+\frac{1}{2})n} M^{\frac{1}{2}} \asymp M^{-2r_1-\frac{1}{2}} \cdot M^{\frac{1}{2}} = M^{-2r_1},$$

а отже $\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,1})_q \asymp M^{-2r_1}$ при $2 \le p \le q \le \infty$, $r_1 > \frac{1}{2}$.

Оцінки знизу, а разом з ними і теорема 3.2.5 доведені. ■

На завершення цього підрозділу наведемо точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень функцій з двома змінними, що належать анізотропним класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ (означення див. у підрозділі 3.5). Тут $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$, а θ — числовий параметр.

За умов $1 \le p_1 \le q_1 \le \infty$, $1 \le p_2, q_2 \le \infty$ визначимо число

$$\beta(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) := \begin{cases} \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, & 1 \le p_1 \le q_1 \le 2, \\ 0, & 2 \le p_1 \le q_1 \le \infty, \\ \frac{1}{p_1} - \frac{1}{2}, & 1 \le p_1 < 2 < q_1 \le \infty \end{cases}$$

і двовимірний вектор

$$\boldsymbol{r(p,q)} := \begin{cases} \left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}, \left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)_+\right), & 1 \le p_1 \le q_1 \le 2, \\ \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}\right), & 2 \le p_1 \le q_1 \le \infty,\ q_1 > 2, \\ \left(\frac{1}{p_1}, \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{p_2}\right\}\right), & 1 \le p_1 < 2 < q_1 \le \infty. \end{cases}$$

Наголосимо, що в наведеній нижче теоремі векторні нерівності слід розуміти як нерівності між відповідними їх координатами.

Теорема 3.2.6. *Нехай* $1 \le \theta < \infty$, $1 \le p_1 \le q_1 \le \infty$, $1 \le p_2, q_2 \le \infty$. *Тоді при* $\boldsymbol{r} > \boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ *справедлива оцінка*

$$\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta})_q \asymp M^{-r_1-r_2+\beta(p,q)}. \tag{3.68}$$

Доведення теореми 3.2.6. Оцінка зверху в (3.68) випливає із відповідної оцінки зверху величин $\tau_M(\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p}})_q$, яка встановлена в [143]. Доведення оцінок знизу для величин $\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta})_q$ аналогічне доведенню оцінок знизу в попередній теоремі. ■

3.3 Білінійні наближення на класах Нікольського–Бєсова

Спочатку сформулюємо відоме твердження, яке використовується в доведенні основного результату даного підрозділу. Воно стосується оцінок колмогоровських поперечників одного класу тригонометричних поліномів в просторі $L_\infty(\pi_m)$.

Для $1 \le q \le \infty$ покладемо

$$T(C^d(N))_q := \{f \in T(C^d(N)) : \ \ \|f\|_q \le 1\},$$

де, нагадаємо,

$$C^d(N) := \left\{\boldsymbol{k} = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : \ \ |k_j| \le N, \ j = \overline{1,d}\right\}, \quad N = 1, 2, \ldots,$$
$$T(C^d(N)) := \left\{f : \ f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in C^d(N)} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \ c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}, \ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)\right\}$$

Лема Д$_3$ [140]. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$d_M(T(C^d(2^n))_2, L_\infty(\pi_d)) \ll M^{-\frac{1}{2}} 2^{\frac{nd}{2}} \left(\log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тепер сформулюємо і доведемо основний результат даного підрозділу.

Теорема 3.3.1. *Нехай* $1 \le \theta \le \infty$. *Мають місце співвідношення*

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \asymp \begin{cases} M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 \le p \le q \le 2, \quad r > 2d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}), \\ M^{-\frac{r}{d}}, & 2 \le p \le q \le \infty, \quad r > d, \\ M^{-\frac{r}{d}}, & 2 \le q \le p \le \infty, \quad r > 0, \\ M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 \le p < 2 < q \le \infty, \quad r > \frac{2d}{p}. \end{cases}$$

Доведення теореми 3.3.1. Доведемо спочатку оцінки зверху. Зауважимо, що достатньо, очевидно, встановити потрібні оцінки зверху у випадку $\theta = \infty$, тобто для величин $\tau_M(\mathbb{H}^r_p)_q$.

Отже, нехай задана функція $f(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \dots, t_{2d}) \in \mathbb{R}^{2d}$ і $f \in \mathbb{H}^r_p$. Означимо поліноми

$$A_n(f; \boldsymbol{z}) := f(\boldsymbol{t}) * (V_{2^n}(\boldsymbol{t}) - V_{2^{n-1}}(\boldsymbol{t})), \ n = 1, 2, \dots,$$

$$A_0(f; \boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{t}) * V_1(\boldsymbol{t}).$$

Тут $\boldsymbol{z} = (z_1, \dots, z_{2d}) \in \mathbb{R}^{2d}$ і $*$ — операція згортки. В силу збіжності при $n \to \infty$ середніх Валле–Пуссена до функції f в просторі $L_p(\pi_{2d})$, функцію $f \in H^r_p$ можна подати у вигляді

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f; \boldsymbol{z}), \quad \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{2d} \tag{3.69}$$

в сенсі збіжності ряду в $L_p(\pi_{2d})$. Відомо також, що для $f \in \mathbb{H}^r_p$, $1 \le p \le \infty$ буде

$$\|A_n(f; \cdot)\|_p \ll 2^{-rn}. \tag{3.70}$$

Розглянемо випадки: $1 \le p = q \le 2$, $r > 0$ та $2 \le q \le p$, $r > 0$. Нехай $m \in \mathbb{N}$. В ролі функції, за допомогою якої здійснюється наближення функції f, розглянемо функцію

$$g_1(\boldsymbol{z}) = f(\cdot) * V_{2^{m-1}}(\cdot) = \sum_{n=0}^{m-1} A_n(f; \boldsymbol{z}). \tag{3.71}$$

Тоді згідно з означенням ядра $V_{2^{m-1}}(\boldsymbol{t})$ можна записати

$$g_1(\boldsymbol{z}) = g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k \in C^d(2^m - 1)} c_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{y}) e^{i(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{x})} = \sum_{j=0}^{M_1} u_j(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}), \tag{3.72}$$

де $\boldsymbol{x} = (z_1, \dots, z_d)$, $\boldsymbol{y} = (z_{d+1}, \dots, z_{2d})$, $M_1 = (2^{m+1} - 1)^d \asymp 2^{md}$ і $c_{\boldsymbol{k}}$, u_j, $v_j \in L_q(\pi_d)$.

Відштовхуючись від представлення (3.72), беручи до уваги (3.69)–(3.71), маємо

$$\tau_{M_1}(f)_q \le \|f - g_1\|_q = \left\| \sum_{n=m}^{\infty} A_n(f; \cdot) \right\|_q \le$$

$$\le \sum_{n=m}^{\infty} \left\| A_n(f; \cdot) \right\|_q \ll \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-rn} \ll 2^{-rm} \asymp M_1^{-\frac{r}{d}}.$$

Звідси очевидним чином випливає оцінка $\tau_M(f)_q \ll M^{-\frac{r}{d}}$ при $M \in \mathbb{N}$, яка тягне за собою оцінку зверху величини $\tau_M(B^r_{p,\theta})_q$ при $r > 0$ у випадках $1 \le p = q \le 2$ та $2 \le q \le p \le \infty$.

При встановленні оцінок зверху при інших співвідношеннях між параметрами p та q, що охоплені теоремою 3.3.1, за вихідні беремо співвідношення (3.69) і (3.71), з яких випливає представлення довільної функції $f \in L_q(\pi_{2d})$, $1 \le q \le \infty$, у вигляді

$$f(\boldsymbol{z}) = g_1(\boldsymbol{z}) + \sum_{n=m}^{\infty} A_n(f; \boldsymbol{z}) \tag{3.73}$$

при $m = 2, 3, \ldots$.

Тоді, якщо $M \in \mathbb{N}$ задане число ($M > 2^{(m+1)d}$) і послідовність $\{M_n\}_{n=2}^{\infty}$ натуральних чисел така, що $M_1 + \sum\limits_{n=m}^{\infty} M_n \le M$, то

$$\tau_M(f)_q \le \sum_{n=m}^{\infty} \tau_{M_n}(A_n(f; \cdot))_q. \tag{3.74}$$

Беручи до уваги співвідношення (3.74), за заданою послідовністю $\{M_n\}_{n=2}^{\infty}$ побудуємо спочатку функції

$$g_n(\boldsymbol{z}) = g_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{M_n} u_j^{(n)}(\boldsymbol{x}) v_j^{(n)}(\boldsymbol{y}), \quad n = 2, 3, \ldots \tag{3.75}$$

з $u_j^{(n)}$, $v_j^{(n)} \in L_q(\pi_d)$, $j = 1, \ldots, M_n$, за допомогою яких відбувається належне наближення в $L_q(\pi_{2d})$ функції $A_n(f; \cdot)$ з $f \in L_p(\pi_{2d})$ при $1 \le p \le q \le \infty$.

Для $n \ge 2$ подамо поліном $A_n(f; \boldsymbol{z})$ у вигляді

$$A_n(f; \boldsymbol{z}) = 2^{-2d(n+3)} \sum_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}} A_n(f; \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\nu}}) V_{2^{n+1}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\mu}}, \, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\nu}}),$$

де

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_d), \quad \boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_d),$$
$$x_j^{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\mu_j \pi}{2^{n+2}}, \quad \mu_j = 0, 1, \ldots, 2^{n+3} - 1, \quad j = \overline{1, d},$$
$$y_j^{\boldsymbol{\nu}} = \frac{\nu_j \pi}{2^{n+2}}, \quad \nu_j = 0, 1, \ldots, 2^{n+3} - 1, \quad j = \overline{1, d}.$$

Нехай B_n позначає множину, яка складається із M_n точок $(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\nu}})$ з найбільшими числами $|A_n(f; \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\nu}})|$. Покладемо

$$g_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := 2^{-2d(n+3)} \sum_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \colon (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\nu}}) \in B_n} A_n(f; \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\nu}}) V_{2^{n+1}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\nu}}) \tag{3.76}$$

Очевидно, функції, які визначені рівністю (3.76), можна зобразити (так як і функції $g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$) у вигляді (3.75) і згідно з оцінкою, отриманою в [141], можна для будь-якої функції $f \in L_p(\pi_{2d})$ при $1 \le p, q \le \infty$ і $n \ge 2$ записати

$$\|A_n(f; \cdot) - g_n(\cdot)\|_q \ll \min\{M_n^{-\beta}; 1\} 2^{2nd\beta} \|A_n(f; \cdot)\|_p, \quad \beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}. \tag{3.77}$$

Тут вважаємо, що $M_n^{-\beta} = K > 1$, якщо $M_n = 0$. Доведемо допоміжне твердження на якому базуються проміжні оцінки величин $\tau_M(H_p^r)$.

Лема 3.3.1. *Нехай* $f \in T(C^{2d}(2^n))$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\tau_M(f)_\infty \ll M^{-1} 2^{nd} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M}\right) \|f\|_2. \tag{3.78}$$

Доведення леми 3.3.1. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $2 \le M \le \dim T(C^d(2^n)) = (2^{n+1}+1)^d$, і $\overline{M} := [\frac{M}{2}]$, де $[c]$ — ціла частина числа $c \in \mathbb{R}$. Оскільки функція $f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} = (z_1, \ldots, z_d)$, $\boldsymbol{y} = (z_{d+1}, \ldots, z_{2d})$, при будь-якому фіксованому $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ належить множині $T(C^d(2^n))$, то при довільних заданих $v_j \in L_\infty(\pi_d)$ знайдуться такі функції $u_j \in L_\infty(\pi_d)$, $j = \overline{1, \overline{M}}$, що при кожному $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ справджується нерівність

$$\|f(\cdot, \boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{\overline{M}} u_j(\cdot) v_j(\boldsymbol{y})\|_\infty \ll d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2; L_\infty(\pi_d)) \|f(\cdot, \boldsymbol{y})\|_2. \tag{3.79}$$

Покладемо

$$\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{\overline{M}} u_j(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}).$$

Тоді із (3.79) маємо

$$\Big\| \|\psi(\cdot, \boldsymbol{y})\|_\infty \Big\|_2 \ll d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2, L_\infty(\pi_d)) \|f\|_2. \tag{3.80}$$

Нехай $\overline{\psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ позначає ортогональну проекцію функції $\psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, як функції зі змінною $\boldsymbol{y}$, на $T(C^d(2^n))$.
Тоді

$$\overline{\psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{\overline{M}} u_j(\boldsymbol{x}) \overline{v}_j(\boldsymbol{y}), \tag{3.81}$$

де $\overline{v}_j$ — ортогональна проекція функції $v_j \in L_\infty(\pi_d)$ на $T(C^d(2^n))$.
Зрозуміло, що

$$\|\overline{\psi}(\boldsymbol{x}, \cdot)\|_2 \le \|\psi(\boldsymbol{x}, \cdot)\|_2. \tag{3.82}$$

Оскільки при будь-якому фіксованому $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ функція $\overline{\psi}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ належить множині $T(C^d(2^n))$, то для довільних $u_j \in L_\infty(\pi_d)$, $j = \overline{M}+1, \ldots, M$, знайдуться такі функції v_j, $j = \overline{M}+1, \ldots, M$, ($v_j \in L_\infty(\pi_d)$), що при кожному $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\|\overline{\psi}(\boldsymbol{x}, \cdot) - \sum_{j=\overline{M}+1}^{M} u_j(\boldsymbol{x}) v_j(\cdot)\|_\infty \ll d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2; L_\infty(\pi_d)) \|\overline{\psi}(\boldsymbol{x}, \cdot)\|_2. \tag{3.83}$$

Відштовхуючись від означення величин $\tau_M(f)_\infty$, беручи до уваги (3.81)–(3.83), маємо

$$\tau_M(f)_\infty \le \left\| \| f(\boldsymbol{x},\cdot) - \sum_{j=1}^{\overline{M}} u_j(\boldsymbol{x})\overline{v}_j(\cdot) - \sum_{j=\overline{M}+1}^{M} u_j(\boldsymbol{x}) v_j(\cdot)\|_\infty \right\|_\infty \le$$

$$\le d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2; L_\infty(\pi_d)) \Big\| \|\psi(\boldsymbol{x},\cdot)\|_2 \Big\|_\infty \le$$

$$\le d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2; L_\infty(\pi_d)) \Big\| \|\psi(\cdot,\boldsymbol{y})\|_\infty \Big\|_2 .$$

Далі, скориставшись оцінкою (3.80) для другого множника, і застосувавши лему Д$_3$, отримаємо

$$\tau_M(f)_\infty \ll \left(d_{\overline{M}}(T(C^d(2^n))_2; L_\infty(\pi_d)) \right)^2 \|f\|_2 \ll M^{-1} 2^{nd} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M}\right) \|f\|_2 .$$

Лема доведена. ♦

Перейдемо до встановлення оцінок зверху в теоремі 3.3.1 для величин $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q$ у випадку $2 \le p \le q \le \infty$, $r > d$. Очевидно, що шукану оцінку достатньо встановити для $p = 2$ і, згідно з раніше зазначеним, для значення $\theta = \infty$, тобто для класів $\mathbb{H}^r_2$.

Отже, нехай $f \in \mathbb{H}^r_2$ і $m \in \mathbb{N}$. Відштовхуючись від співвідношення (3.74), покладемо в ньому

$$M_1 = (2^{m+1} - 1)^d,$$

$$M_n = [M_1 2^{-\alpha(n-m)}], \quad n \ge m,$$

де $\alpha > 0$ — до поки що довільне число. Нехай $M = C(\alpha) 2^{md}$, де $C(\alpha) > 0$ — достатньо велике. Тоді $M_0 := M_1 + \sum\limits_{n=m}^{\infty} M_n < M$ і $M_0 \asymp 2^{md}$. Очевидно, існує $n_0 = n_0(\alpha) = [\lambda m] + 1$, $\lambda > 1$, таке, що $M_n \ge 1$ при $m \le n \le n_0$ і $M_n = 0$ при $n > n_0$. Далі, згідно з лемою 3.3.1

$$\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty \ll M_n^{-1}\, 2^{nd} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) \|A_n(f;\cdot)\|_2, \quad n \le n_0,$$

звідки, з урахуванням нерівності (3.70) і теореми Н$_3$, отримаємо

$$\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty \ll M_n^{-1}\, 2^{-n(r-d)} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right)$$

і

$$\tau_M(f)_q \le \tau_M(f)_\infty \le \sum_{n=m}^{\infty} \tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty \ll$$

$$\ll M_1^{-1} 2^{-\alpha m} \sum_{n=m}^{n_0} 2^{-n(r-d-\alpha)} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n(r-d)}. \tag{3.84}$$

Підберемо додатне число α так, що б виконувалась нерівність $r - d - \alpha > 0$ (це можливо, бо $r > d$). Тоді із (3.84) знаходимо

$$\tau_M(f)_q \ll M_1^{-1} 2^{-\alpha m} 2^{-m(r-d-\alpha)} + 2^{-n_0(r-d)} \asymp 2^{-mr} \asymp M^{-\frac{r}{d}},$$

звідки маємо

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \ll M^{-\frac{r}{d}}$$

при $2 \le p \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $r > d$.

У випадку $1 \le p < q \le 2$, $r > 2d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ із співвідношення (3.74), враховуючи (3.77), для $f \in \mathbb{H}^r_p$ при визначених вище n, n_0, m і $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ отримаємо

$$\tau_M(f)_q \le \sum_{n=m}^{n_0} \|A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot)\|_q + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|A_n(f;\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{n=m}^{n_0} M_n^{-\beta} 2^{2nd\beta} \|A_n(f;\cdot)\|_q + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|A_n(f;\cdot)\|_q \ll$$

$$\ll \sum_{n=m}^{n_0} M_n^{-\beta} 2^{2nd\beta} \cdot 2^{-rn} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{2nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} 2^{-rn} \ll$$

$$\ll M_1^{-\beta} 2^{-\alpha\beta m} \sum_{n=m}^{n_0} 2^{-n(r-\beta(2d+\alpha))} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n\left(r-2d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\right)}.$$

Підібравши таке додатне число α так, що $r - \beta(2d+\alpha) > 0$, із попереднього співвідношення знаходимо

$$\tau_M(f)_q \ll M_1^{-\beta} 2^{-\alpha\beta m} 2^{-m(r-\beta(2d+\alpha))} + 2^{-rm} \asymp 2^{-mr+md\beta} \asymp M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Звідси маємо

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \ll M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Завершальним пунктом доведення оцінок зверху в теоремі 3.3.1 є випадок $1 \le p < 2 < q \le \infty$, $r > \frac{2d}{p}$. Як і в попередньому випадку, достатньо обмежитись розглядом лише окремих значень параметрів θ та q, а саме, $\theta = \infty$ і $q = \infty$.

Для оцінки зверху величин $\tau_M(\mathbb{H}^r_p)_\infty$ при $1 \le p < 2$, $r > \frac{2d}{p}$ вихідним знову є співвідношення (3.74) зі значеннями m, M, $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, розглянутими в попередніх випадках. Нехай $f \in \mathbb{H}_p^r$ і $g_n(\boldsymbol{z}) = g_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ — функції, визначені формулою (3.76). Згідно з лемою 3.3.1

$$\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot))_\infty \ll M_n^{-1} 2^{nd} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) \|A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot)\|_2, \tag{3.85}$$

а в силу нерівності (3.77), з урахуванням (3.70),

$$\|A_n(f;\cdot) - g_n(\cdot)\|_2 \ll M_n^{-\gamma}\ 2^{2nd\gamma}\ \|A_n(f;\cdot)\|_p \ll M_n^{-\gamma} 2^{2nd\gamma - nr}, \tag{3.86}$$

де $\gamma = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$.
Поєднавши (3.85) та (3.86), маємо

$$\tau_{2M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty \ll M_n^{-1-\gamma} 2^{-n(r-2d\gamma-d)} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right). \tag{3.87}$$

Так ж оцінка, очевидно, правильна і для $\tau_{M_n}(A_n(f;\cdot))_\infty$. Беручи до уваги такий факт, підставивши в (3.74) замість $\tau_M(A_n(f;\cdot))_\infty$ праву частину (3.87), а потім, застосувавши теорему H_3, отримаємо

$$\tau_M(f)_\infty \ll \sum_{n=m}^{n_0} M^{1-\gamma} 2^{-n(r-2d\gamma-d)} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{2nd\cdot\frac{1}{p}} 2^{-nr} \ll$$

$$\ll M_1^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} 2^{-\alpha m(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} \sum_{n=m}^{n_0} 2^{\alpha n(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}) + nd + 2nd(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) - nr} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) + 2^{-n_0(r-\frac{2d}{p})} \asymp$$

$$\asymp M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} 2^{-\alpha m(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} \sum_{n=m}^{n_0} 2^{-n(r-\frac{2d}{p}-\alpha(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}))} \log\left(1 + \frac{2^{nd}}{M_n}\right) + 2^{-n_0(r-\frac{2d}{p})}. \tag{3.88}$$

Підібравши таке додатне число α, щоб $r - \frac{2d}{p} - \alpha(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}) > 0$ (нагадаємо, за умовою теореми $r > \frac{2d}{p}$) із (3.88), виводимо

$$\tau_M(f)_\infty \ll M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} 2^{-\alpha m(\frac{1}{2}+\frac{1}{p})} 2^{-m(r-\frac{2d}{p}-\alpha(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}))} + 2^{-mr} \asymp$$

$$\asymp M^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} 2^{-m(r-\frac{2d}{p})} + M^{-\frac{r}{d}} \asymp M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.89}$$

Співвідношення (3.89) тягне оцінку

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \ll M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

при $1 \le p < 2 < q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ і $r > \frac{2d}{p}$.
Оцінки зверху в теоремі 3.3.1 встановлені.

Для доведення відповідних оцінок знизу пред'явимо екстремальні функції, які належать класам $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$, і порядкові оцінки знизу білінійних наближень яких збігаються з оцінками вказаними в теоремі 3.3.1. В пошуку таких функцій обмежимося множиною функцій $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ з $2d$ змінними вигляду $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, де f як функція з d змінними належить класу $B^r_{p,\theta}$ при $\theta = 1$ (і така, що $\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ як функція з $2d$ змінними належить $\mathbb{B}^r_{p,1}$).

Сформулюємо допоміжне твердження.

Лема Ж$_3$ [141]. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$ *і* $M = 2^{nd}$. *Тоді для функції*

$$g(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in C^d(2^{n+1})} \widehat{g}(k) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})}, \quad \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d$$

такої, що $|\widehat{g}(\boldsymbol{k})| \le 1$ *і* $|\widehat{g}(\boldsymbol{k})| = 1$ *при* $\boldsymbol{k}\in C^d(2^n)$, *виконується співвідношення*

$$\tau_M(g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $1 \le q_1 \le 2$. Встановимо спочатку оцінки знизу для величин $\tau_M(V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1}$ при $M = 2^{nd}$, де $V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) =: \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_d)$, $\boldsymbol{y} = (y_1,\dots,y_d)$, а $V_m(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t} = (t_1,\dots,t_d)$, — кратне ядро Валлє–Пуссена. Нехай системи функцій $\{u_j(\boldsymbol{x})\}_{j=1}^M$ та $\{v_j(\boldsymbol{y})\}_{j=1}^M$ такі, що

$$\|V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^M u_j(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})\|_{q_1,1} \le 2\tau_M(V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,1}. \tag{3.90}$$

Оскільки для функції V_m

$$V_{2^{n+1}} * V_{2^n} = V_{2^n} \tag{3.91}$$

і для $f\in L_{q_1}(\pi_d)$

$$\|\mathbf{V}_{2^{n+1}} f\|_{q_1} \le 3^d \|f\|_{q_1}, \quad 1\le q_1\le\infty, \tag{3.92}$$

то, діючи на функцію під знаком норми $\|\cdot\|_{q_1,1}$ в лівій частині (3.90) оператором згортки $\boldsymbol{V}_{2^{n+1}}$ (послідовно як на функцію по кожній із змінних $\boldsymbol{x}$ та $\boldsymbol{y}$), можна з урахуванням (3.91) і (3.92) вважати гарантованим виконання наступних умов (припущень). По-перше, функції $u_j(\boldsymbol{x})$ та $v_j(\boldsymbol{y})$ є тригонометричними поліномами з "номерами" гармонік, що належать множині $C^d(2^{n+2})$, а, по-друге, згідно з (3.90)–(3.92) справджується нерівність

$$\left\|V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^M u_j(\boldsymbol{x})v_j(\boldsymbol{y})\right\|_{q_1,1} \ll \tau_M(V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,1}. \tag{3.93}$$

Таким чином, використавши спочатку теорему Б$_3$, а потім нерівність (3.93), можна записати

$$\left\| V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}) \right\|_{2,1} \ll$$

$$\ll 2^{nd(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} \left\| V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}) \right\|_{q_1,1} \ll 2^{nd(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} \tau_M(V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,1}. \quad (3.94)$$

Далі, враховуючи, що функція V_{2^n} задовольняє умови леми Ж$_3$, із (3.94), застосувавши лему Ж$_3$, знаходимо

$$\tau_M(V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1} \geq \tau_M(V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1,1} \gg$$

$$\gg 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} \left\| V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \sum_{j=1}^{M} u_j(\boldsymbol{x}) v_j(\boldsymbol{y}) \right\|_{2,1} \gg$$

$$\gg 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{2})} M^{\frac{1}{2}} \asymp 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-1)}. \quad (3.95)$$

Тепер розглянемо функцію

$$f_1(\boldsymbol{t}) = C_1 2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})} V_{2^n}(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d, \ \ C_1 > 0.$$

За належного вибору сталої C_1 ця функція належить класу $\mathbb{B}^r_{p,1}$. Справді, оскільки $\|V_{2^n}\|_p \asymp 2^{nd(1-\frac{1}{p})}$, $1 \leq p \leq \infty$, то згідно з (3.4) щодо $\|\cdot\|_{B^r_{p,\theta}}$, можна записати

$$\|V_{2^n}\|_{B^r_{p,1}} \asymp \sum_{s} 2^{sr} \|A_s(V_{2^n}, \cdot)\|_p =$$

$$= \sum_{s=0}^{n+1} 2^{sr} \|A_s(V_{2^n}, \cdot)\|_p \ll 2^{(n+1)r} 2^{d(n+1)(1-\frac{1}{p})} \asymp 2^{nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})},$$

а отже існує така додатна стала C_1, що $f_1 \in \mathbb{B}^r_{p,1}$.

Враховуючи (3.95), в підсумку маємо

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,1})_{q_1} \geq \tau_M(f_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1} \gg 2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})} \tau_M(V_{2^n}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{q_1} \gg$$

$$\gg 2^{-nd(\frac{r}{d}+1-\frac{1}{p})} 2^{-nd(\frac{1}{q_1}-1)} = 2^{-nd(\frac{r}{d}-\frac{1}{p}+\frac{1}{q_1})} \asymp M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1}} \quad (3.96)$$

при $1 \leq p \leq \infty$ і $1 \leq q_1 \leq 2$.

Із співвідношення (3.96) випливає оцінка

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \gg M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$$

при $1 \le \theta \le \infty$, $1 \le p \le q \le 2$ і $r > 0$.
При $q_1 = 2$, $1 \le p < 2$ із (3.96) отримаємо $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,1})_2 \gg M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ і поза як, очевидно, $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,1})_q \ge \tau_M(\mathbb{B}^r_{p,1})_2$, $2 < q < \infty$, то оцінка

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,1})_q \gg M^{-\frac{r}{d}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$$

справедлива при $1 \le p < 2 < q \le \infty$.

У ще не розглянутих випадках $r > \frac{d}{2}$, $2 \le p \le q \le \infty$ та $r > 0$, $2 \le q \le p \le \infty$, достатньо встановити шукані оцінки знизу для величин $\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q$ при $q = 2$.

Нехай $M \in \mathbb{N}$ задано ($M > 2^d$). Підберемо натуральне число n, для якого $2^{nd} < M \le 2^{(n+1)d}$ і розглянемо функцію

$$f_2(\boldsymbol{t}) = C_2 2^{-nd(\frac{r}{d}+\frac{1}{2})} R_n(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d), \quad C_2 > 0,$$

де

$$R_n(\boldsymbol{t}) = \prod_{j=1}^{d} \sum_{l=2^n}^{2^{n+1}-1} \varepsilon_l e^{ilt_j}, \quad \varepsilon_l \in \{-1, 1\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

поліноми Рудіна–Шапіро. Відомо (див., наприклад, [38, с. 155]), що $\|R_n\|_\infty \ll 2^{\frac{nd}{2}}$. Оскільки

$$\|R_n\|_{B^r_{p,1}} \asymp \sum_s 2^{sr} \|A_s(R_n; \cdot)\|_p \asymp 2^{(n+1)r} \|R_n\|_p \ll$$
$$\ll 2^{(n+1)r} \|R_n\|_\infty \ll 2^{nr} 2^{\frac{nd}{2}} = 2^{nd(\frac{r}{d}+\frac{1}{2})},$$

то при належному виборі додатної сталої C_2, функція $f_2 \in \mathbb{B}^r_{p,1}$.
Далі, згідно з лемою Ж3 виконується нерівність $\tau_M(R_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{2,1} \gg M^{\frac{1}{2}}$, з якої випливає

$$\tau_M(f_2)_2 \gg 2^{-nd(\frac{r}{d}+\frac{1}{2})} \tau_M(R_n(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))_{2,1} \gg 2^{-nd(\frac{r}{d}+\frac{1}{2})} M^{\frac{1}{2}} \asymp M^{-\frac{r}{d}-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} = M^{-\frac{r}{d}}.$$

З урахуванням приведених вище зауважень наслідком останнього співвідношення є нерівність

$$\tau_M(\mathbb{B}^r_{p,\theta})_q \gg M^{-\frac{r}{d}}$$

при $r > 0$, $1 \le \theta \le \infty$ і $2 \le p \le q \le \infty$ та $2 \le q \le p \le \infty$.

Теорема 3.3.1 доведена. $\blacksquare$

3.4 Найкращі білінійні наближення класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$

3.4.1 Допоміжні твердження

У цьому пункті сформульовано результати, встановлені В. М. Темляковим, які істотно використовуються у доведеннях теорем даного підрозділу. Вони стосуються оцінок величин $\tau_M(f)_{q_1,q_2}$ для функцій f поліноміального виду. В доведеннях задіяні також класичні результати — теорема Літтлвуда–Пелі про еквівалентне представлення норми функцій в просторах $L_p(\pi_m)$ і нерівність С. М. Нікольського про співвідношення норм поліномів в просторах $L_p(\pi_m)$ та $L_q(\pi_m)$, $p \neq q$ (див. пункт 3.1.1, теорему Н$_3$).

Введемо додаткові позначення та означення до тих, які запроваджені у пункті 3.1.1.

Нехай G, G_1, G_2 — деякі скінченні множини в $\mathbb{Z}^d$. Через $T(G,d)$ позначимо множину тригонометричних поліномів t вигляду

$$t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in G} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,$$

а через $T(G_1, G_2, 2d)$ — множину тригонометричних поліномів t вигляду

$$t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{k}^1\in G_1\\ \boldsymbol{k}^2\in G_2}} c_{\boldsymbol{k}^1,\boldsymbol{k}^2} e^{i((\boldsymbol{k}^1,\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{k}^2,\boldsymbol{y}))}, \quad \boldsymbol{k}^j = (k^j_1, \ldots, k^j_d),\ j = 1, 2, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d.$$

У випадку, коли $G = C^d(n) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d : |k_j| \le n, \ \ j = \overline{1,d}\}$ замість $T(G,d)$ пишемо $T(C^d(n))$, а коли

$$G = P^d(\boldsymbol{N}) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d :\ |k_j| \le N_j,\ j = \overline{1,d}\},$$

де $\boldsymbol{N} = (N_1, \ldots, N_d)$, $N_j \in \mathbb{Z}_+$, то — $T(P^d(\boldsymbol{N}))$.

Наступні твердження сформульовано в прийнятих позначеннях.

Теорема Г$_3$ (Літтлвуда–Пелі, [57, с. 59-65]). *Нехай* $p \in (1, \infty)$. *Існують додатні сталі* c_1 *та* c_2 *такі, що для будь-якої функції* $f \in L^0_p(\pi_m)$ *справедливі нерівності*

$$c_1 \|f\|_p \le \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^d} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \cdot)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \le c_2 \|f\|_p\,.$$

Нижче вважаємо, що $M^{-1} = K > 1$, якщо $M = 0$.

Лема З$_3$ [140]. *Нехай* $1 \le p \le q < \infty$ *і* $f \in T(P^{2d}(\boldsymbol{N}))$. *Тоді для всіх цілих* M *таких, що* $0 \le M \le V(\boldsymbol{N}) := \prod_{j=1}^{2d} N_j$ *справедлива нерівність*

$$\tau_M(f)_q \ll V(\boldsymbol{N})^{\beta} \min\{1, M^{-\beta}\} \|f\|_p \, ,$$

де $\beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

Лема К$_3$ [140]. *Нехай* e_1 *і* e_2 *— деякі множини* d*-вимірних векторів координати яких є натуральними числами і* $E_j = \bigcup\limits_{\boldsymbol{s} \in e_j} \rho(\boldsymbol{s})$. *Тоді при* $q \in (1, \infty)$ *для будь-якої функції* $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in T(E_1, E_2, 2d)$ *і довільного* $n \in \mathbb{N}$ *знайдуться функції* $u \in T(E_1, d)$, $v \in T(E_2, d)$ *такі, що*

$$\|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{n} u_i(\boldsymbol{x}) v_i(\boldsymbol{y})\|_q \ll \tau_n(f)_q \, .$$

Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо $Q_n = \bigcup\limits_{|\boldsymbol{s}|_1 \le n} \rho^+(\boldsymbol{s})$, де $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$, а $\rho^+(\boldsymbol{s}) = \rho(\boldsymbol{s}) \cap \mathbb{N}^d$. Зауважимо, що $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$.

Лема Л$_3$ [140].*Нехай* $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $f \in T(Q_\mu, Q_\nu, 2d)$ *і* $M \in \mathbb{Z}_+$. *Тоді*

$$\tau_M(f)_q \ll \min\{1, M^{-1}\} |Q_\mu|^{\frac{1}{2}} \, |Q_\nu|^{\frac{1}{2}} \, \|f\|_2, \quad 2 \le q < \infty, \tag{3.97}$$

$$\tau_M(f)_\infty \ll \min\{1, M^{-1}\} |Q_\mu|^{\frac{1}{2}} \, |Q_\nu|^{\frac{1}{2}} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} \times$$

$$\times \left(\log\left(1 + \frac{|Q_\mu|}{M+1}\right) \log\left(1 + \frac{|Q_\nu|}{M+1}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2 \, . \tag{3.98}$$

Лема М$_3$ [140]. *Нехай* $g \in T(Q_\mu, Q_\nu, 2d)$, $\mu, \nu, d \in \mathbb{N}$. *Тоді для* $M \in \mathbb{Z}_+$ *при* $1 < p < 2 < q < \infty$

$$\tau_M(g)_q \ll \begin{cases} \min\{1, M^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}\} 2^{\frac{1}{p}(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{p}} \|g\|_p \, , \\ \min\{1, M^{-\frac{2}{p}}\} 2^{(\frac{3}{2p} - \frac{1}{4})(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{p}} \|g\|_p \, . \end{cases} \tag{3.99}$$

При $1 < p < 2$, $q = \infty$

$$\tau_M(f)_\infty \ll$$

$$\ll \begin{cases} \min\{1, M^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}\} 2^{\frac{1}{p}(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right)} \left(\log\left(1 + \frac{|Q_\mu|}{M+1}\right) \log\left(1 + \frac{|Q_\nu|}{M+1}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_p \, , \\ \min\{1, M^{-\frac{2}{p}}\} 2^{\left(\frac{3}{2p} - \frac{1}{4}\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{(d-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right)} \left(\log\left(1 + \frac{|Q_\mu|}{M+1}\right) \log\left(1 + \frac{|Q_\nu|}{M+1}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_p \, . \end{cases} \tag{3.100}$$

3.4.2 Основні результати

У викладених нижче результатах містяться оцінки зверху величин $\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_{q_1,q_2}$ для класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ функцій $2d$ змінних у випадках, коли $q_1 = q_2 = q$, а всі координати вектора $\boldsymbol{r}$ рівні, тобто $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_1) \in \mathbb{R}^{2d}_+$, $r_1 > 0$.

Теорема 3.4.1. *Нехай* $1 \le \theta < \infty$. *Тоді при* $r_1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *справедливі оцінки*

$$\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q \ll \begin{cases} M^{-2r_1}\left(\log^{d-1} M\right)^{2\left(r_1+\frac{1}{\theta'}\right)}, & p = q = \infty \text{ або } p = q = 1, \\ M^{-2r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\log^{d-1} M\right)^{2\left(r_1+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)}, & 1 \le p \le q \le 2, \end{cases}$$

а при $r_1 > 1$

$$\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_q \ll \begin{cases} M^{-2r_1+\frac{1}{2}}\left(\log^{d-1} M\right)^{2\left(r_1+1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+\right)}, & q = \infty, \\ M^{-2r_1+\frac{1}{2}}\left(\log^{d-1} M\right)^{2r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+}, & 2 \le q < \infty, \end{cases}$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$ *і* $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$.

Доведення теореми 3.4.1. Нехай $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, $s_j,\, t_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1, d}$. Покладемо

$$A_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := 2^{2d} \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{s_j}}(x_j) - V_{2^{s_j-1}}(x_j)) \times \prod_{j=1}^{d} (V_{2^{t_j}}(y_j) - V_{2^{t_j-1}}(y_j)) = A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) A_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{y})$$

і для $f \in L_q(\pi_{2d})$

$$\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (f * A_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ $(n \ge d)$ визначимо функції

$$f_1^n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{t} \in \mathbb{Z}^d_+} \sum_{|\boldsymbol{s}|_1 \le n} \mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

$$f_2^n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{|\boldsymbol{t}|_1 \le n} \sum_{|\boldsymbol{s}|_1 > n} \mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{3.101}$$

$$f_3^n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{|\boldsymbol{t}|_1 > n} \sum_{|\boldsymbol{s}|_1 > n} \mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Рівності (3.101) слід розуміти в сенсі збіжності рядів до функцій f_j^n в $L_q(\pi_{2d})$, а частинні суми цих рядів визначаються множинами індексів $\boldsymbol{s}$ і $\boldsymbol{t}$ такими, що

$\max\{s_j,\ t_j,\ j=\overline{1,d}\} \le k,\ \ k=n,n+1,\ldots$. У такому випадку, очевидно,

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{j=1}^{3} f_j^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{3.102}$$

причому функції f_1^n і f_2^n, в свою свою чергу, можуть бути подані у вигляді

$$f_j^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{2^d|Q_n|} u_i^j(\boldsymbol{x})v_i^j(\boldsymbol{y}) \tag{3.103}$$

з деякими функціями $u_i^j,\, v_i^j \in L_q(\pi_d),\ \ j=1,2$.

Для заданого $m\in\mathbb{N}$ $(m\ge d)$ нехай $M\in\mathbb{N}$ таке, що

$$2^{d+1}|Q_m| \le M < C|Q_m|, \tag{3.104}$$

де C — довільна фіксована стала, $C>2^{d+1}$. Тоді з урахуванням (3.102) і (3.103) для $f\in L_q(\pi_{2d})$, $1\le q\le\infty$ можна записати

$$\tau_{2M}(f)_q \le \tau_M(f_3^m)_q. \tag{3.105}$$

Отже, згідно з (3.105) оцінка зверху величини $\tau_M(f)_q$ зводиться до оцінки $\tau_M(f_3^m)_q$ з m і M, що пов'язані співвідношенням (3.104).

Для $f\in\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$ розглянемо спочатку випадки $p=q=1$ та $p=q=\infty$. Через $\Pi(m)$ позначимо множину таких пар $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$ векторів $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_d)$ і $\boldsymbol{t}=(t_1,\ldots,t_d)$, $s_j,\,t_j\in\mathbb{Z}_+$, $j=\overline{1,d}$, що $|\boldsymbol{s}|_1>m$ і $|\boldsymbol{t}|_1>m$. Тоді, виходячи із (3.105), в силу нерівності Мінковського (3.3) маємо

$$\tau_{2M}(f)_q \le \tau_M(f_3^m)_q \le \Bigg\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} \mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f \Bigg\|_q \le \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} \|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f\|_q =$$

$$= \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{r_1(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\,\|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f\|_q 2^{-r_1(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} =: J_1. \tag{3.106}$$

Оцінку величини J_1 проведемо для двох випадків: $\theta\in(1,\infty)$ і $\theta=1$.

Отже, якщо $\theta\in(1,\infty)$, то на підставі нерівності Гельдера (3.2), враховуючи (3.42), можна записати

$$J_1 \ll \Bigg(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{r_1\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f\|_q^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \Bigg(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{-r_1\theta'(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\Bigg)^{\frac{1}{\theta'}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}} \Bigg(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{-r_1\theta'(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} \Bigg)^{\frac{1}{\theta'}}. \tag{3.107}$$

Оскільки для $\boldsymbol{l}=(l_1,\ldots,l_d)\in\mathbb{N}^d$ і $\alpha>0$

$$\sum_{|\boldsymbol{l}|_1>m} 2^{-\alpha|\boldsymbol{l}|_1} \asymp \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-\alpha j} j^{d-1} \asymp 2^{-\alpha m} m^{d-1}, \tag{3.108}$$

то із (3.107), враховуючи (3.104), маємо

$$J_1 \ll 2^{-2r_1 m} m^{\frac{2(d-1)}{\theta'}} \asymp M^{-2r_1} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\frac{1}{\theta'}\right)}. \tag{3.109}$$

Поєднавши (3.109) та (3.106), отримаємо

$$\tau_M(f)_q \ll M^{-2r_1} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\frac{1}{\theta'}\right)}.$$

У випадку $\theta=1$ маємо

$$J_1 \le 2^{-2r_1 m} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{r_1\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} \|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} f\|_q \ll$$

$$\ll 2^{-2r_1 m} \|f\|_{B^{r}_{p,1}} \ll 2^{-2r_1 m} \asymp M^{-2r_1} (\log^{d-1} M)^{2r_1}$$

і, як наслідок (3.106),

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-2r_1} (\log^{d-1} M)^{2r_1}.$$

Очевидно, така ж за порядком оцінка справедлива і для $\tau_M(f)_q$.

При встановленні оцінки зверху величин $\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q$ у випадку $1\le p\le q\le 2$, $q\ne 1$ вихідним знову є співвідношення (3.105).

Отже, нехай $f\in\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$, числа M і m, як і раніше, пов'язані нерівностями (3.104), а $\boldsymbol{s}$ і $\boldsymbol{t}$ — $d-$вимірні вектори з цілими невід'ємними координатами.

Визначимо числа

$$M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} = [C 2^{m+\alpha(2m-|\boldsymbol{s}|_1-|\boldsymbol{t}|_1)} m^{1-d}],$$

де $[a]$ — ціла частина числа $a\in\mathbb{R}$, а α і C додатні сталі, значення яких уточнюються згодом. Тоді, згідно з (3.108) маємо

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \le C \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{m+\alpha(2m-|\boldsymbol{s}|_1-|\boldsymbol{t}|_1)} m^{1-d} =$$

$$= C 2^{m+2\alpha m} m^{1-d} \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{-\alpha(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} \asymp 2^m m^{d-1} \asymp M,$$

а при певному значенні сталої C

$$\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} \le M. \tag{3.110}$$

Тому, скориставшись одним простим наслідком теореми Літтлвуда–Пелі, а саме, нерівністю

$$\|g\|_q \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^d} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(g,\cdot)\|_q^{q^*}\right)^{\frac{1}{q^*}}, \tag{3.111}$$

$g \in L_q^0(\pi_m)$, $\;q^* := \min\{q,2\}$, з урахуванням зауваження у [207, с. 100], застосувавши лему K_3, можна записати

$$\tau_M^q(f_3^m)_q \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} \tau_{M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}}^q(\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f)_q\,. \tag{3.112}$$

Але, оскільки в силу леми $\mathrm{З}_3$

$$\tau_{M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}}(\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f)_q \ll M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}^{-\beta} 2^{\beta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f\|_p\,,$$

(тут і в подальшому $\beta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$), то з (3.112) випливає нерівність

$$\tau_M^q(f_3^m)_q \ll \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}^{-\beta q} 2^{\beta q(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f\|_p^q := J_2^q. \tag{3.113}$$

Оцінку величини J_2 проведемо для двох випадків: $\theta\in[1,q]$ і $\theta\in(q,\infty)$. Якщо $\theta\in[1,q]$, то враховуючи нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^{\nu_2}\right)^{\frac{1}{\nu_2}} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^{\nu_1}\right)^{\frac{1}{\nu_1}}, \quad 1\le\nu_1<\nu_2<\infty, \tag{3.114}$$

яка справджується для довільної послідовності $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ [57, с. 43], маємо

$$J_2 \le \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}^{-\beta\theta} 2^{\beta\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f\|_p^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{r_1\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f\|_p^\theta 2^{-(r_1-\beta)\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}^{-\beta\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$\ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{r_1\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f\|_p^\theta 2^{-m\beta\theta-\alpha\beta\theta(2m-|\boldsymbol{s}|_1-|\boldsymbol{t}|_1)} m^{(d-1)\theta\beta}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$= 2^{-m\beta-2\alpha m\beta} m^{(d-1)\beta} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{r_1\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} \|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} f\|_p^\theta 2^{-(r_1+\beta-\alpha\beta)(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} := J_3. \tag{3.115}$$

Далі, враховуючи, що за умов теореми у випадку, що розглядається, маємо $r_1 > \beta$, то підібравши додатне число α у визначенні чисел $M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}$ так, щоб виконувалася нерівність $r_1 - \beta - \alpha\beta > 0$, можна записати

$$J_3 \leq 2^{-m\beta-2\alpha m\beta} m^{(d-1)\beta} 2^{-(r_1-\beta-\alpha\beta)2m} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{r_1\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} \|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} f\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-2mr_1+\beta m} m^{(d-1)\beta} \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \ll 2^{-m(2r_1-\beta)} m^{(d-1)\beta} \asymp$$

$$\asymp M^{-2r_1+\beta} (\log^{d-1} M)^{2r_1}. \tag{3.116}$$

Поєднавши співвідношення (3.105) із (3.113), (3.115) та (3.116), отримаємо

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-2r_1+\beta} (\log^{d-1} M)^{2r_1} \tag{3.117}$$

і така ж оцінка справедлива для $\tau_M(f)_q$.

Нехай тепер $\theta \in (q, \infty)$. Тоді, використавши нерівність Гельдера (3.2) з показником $\gamma = \frac{\theta}{q}$, маємо

$$J_2 \leq \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{r_1\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} \|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} f\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} \left(2^{-r_1 q(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} M_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}^{-\beta q} 2^{\beta q(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} \right)^{\frac{\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll \|f\|_{B^r_{p,\theta}} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} \left(2^{-r_1 q(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} 2^{-\beta m q} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times 2^{-\alpha\beta q(2m-|\boldsymbol{s}|_1-|\boldsymbol{t}|_1)} 2^{\beta q(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)} m^{(d-1)\beta q} \right)^{\frac{\theta}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-\beta m-2m\alpha\beta} m^{(d-1)\beta} \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{-(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)(r_1-\alpha\beta-\beta)\frac{\theta q}{\theta-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-\beta m-2m\alpha\beta} m^{(d-1)\beta} 2^{-2m(r_1-\alpha\beta-\beta)} m^{2(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} =$$

$$= 2^{-2mr_1+m\beta} m^{(d-1)\left(\beta+\frac{2}{q}-\frac{2}{\theta}\right)} \asymp M^{-2r_1+\beta} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{3.118}$$

Поєднавши (3.105) з (3.113), (3.115) та (3.118), отримаємо

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-2r_1+\beta} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \tag{3.119}$$

і така ж оцінка, очевидно, справедлива для $\tau_M(f)_q$.
Із співвідношень (3.117) та (3.119), з урахуванням зроблених опісля них висновків, випливає

$$\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta})_q \ll M^{-2r_1+\beta} (\log^{d-1} M)^{2\left(r_1+\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+\right)} \tag{3.120}$$

у випадку $1 \le p \le q \le 2$, $q \ne 1$, $1 \le \theta < \infty$.

Перейдемо до встановлення оцінок величин $\tau_M(\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{1,\theta})_q$ при $2 \le q \le \infty$ і зазначимо, загальна схема міркувань в доведенні схожа на ту, що застосована в попередніх випадках.

Нехай спочатку $q \in [\,2, \infty\,)$. Для $m \in \mathbb{N}$ подамо функцію f_3^m в розкладі (3.102) функції $f \in \mathbb{B}^r_{1,\theta}$ у вигляді

$$f_3^m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{(\mu,\nu)\in G(m)} f_{\mu,\nu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{3.121}$$

де для натуральних чисел μ та ν $G(m) := \{(\mu, \nu) :\ \mu > m,\ \nu > m\}$,

$$f_{\mu,\nu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{s}\in\theta_\mu, \boldsymbol{t}\in\theta_\nu} \mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{3.122}$$

а $\theta_k := \{\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{Z}^d :\ |\boldsymbol{s}|_1 = k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Далі, для числа M, що задовольняє нерівність (3.104), покладемо

$$M_{(\mu,\nu)} = [M 2^{-\alpha(2m-\mu-\nu)-1}] \tag{3.123}$$

(значення додатного числа α визначається згодом) і зауважимо, що

$$\sum_{(\mu,\nu)\in G(m)} M_{(\mu,\nu)} \le 1 + M \sum_{\substack{\mu\ge m\\ \nu\ge m}} 2^{\alpha(2m-\mu-\nu)-1} \le M. \tag{3.124}$$

Тоді із (3.105), врахувавши (3.124), маємо

$$\tau_{2M}(f)_q \le \sum_{(\mu,\nu)\in G(m)} \tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q \tag{3.125}$$

і вихідна задача зводиться до належної оцінки величин $\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q$, до якої, в свою чергу, залучається (в якості проміжної) оцінка величин $\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_2$, тобто та, що стосується випадку $q=2$.

Спочатку стверджуємо, що

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_2 \ll \tau_{M_{(\mu,\nu)}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{\rho}}_{1,\theta})_2 2^{-\rho_1(\mu+\nu)}, \tag{3.126}$$

де $\boldsymbol{\rho}=(\rho_1,\dots,\rho_d)$, $\rho_i=\frac{r_i}{2}$, $i=\overline{1,d}$. Справді, (3.126) є наслідком ланцюжка співвідношень

$$\|f_{\mu,\nu}\|_{B^{\boldsymbol{\rho}}_{1,\theta}} \asymp \left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\theta_\mu,\boldsymbol{t}\in\theta_\nu} 2^{\rho_1\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f_{\mu,\nu}\|_1^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$=\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\theta_\mu,\boldsymbol{t}\in\theta_\nu} 2^{r_1\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f_{\mu,\nu}\|_1^\theta 2^{(\rho_1-r_1)\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\right)^{\frac{1}{\theta}} =$$

$$=2^{(\rho_1-r_1)(\mu+\nu)}\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\theta_\mu,\boldsymbol{t}\in\theta_\nu} 2^{r_1\theta(|\boldsymbol{s}|_1+|\boldsymbol{t}|_1)}\|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}f_{\mu,\nu}\|_1^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{(\rho_1-r_1)(\mu+\nu)}\|f_{\mu,\nu}\|_{B^{r}_{1,\theta}} = 2^{-\frac{r_1}{2}(\mu+\nu)}\|f_{\mu,\nu}\|_{B^{r}_{1,\theta}},$$

а також найпростіших властивостей величин $\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(\cdot)_2$.

З іншого боку, узгоджено з розглянутим вище випадком $1<q\le 2$, можна записати

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(\mathbb{B}^{\boldsymbol{\rho}}_{1,\theta})_2 \ll M_{(\mu,\nu)}^{-\rho_1+\frac{1}{2}}(\log^{d-1}M)^{2\rho_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+}.$$

Поєднавши це співвідношення з (3.126), враховуючи також, що $\rho_1=\frac{r_1}{2}$, виводимо нерівність

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_2 \ll 2^{-\frac{r_1}{2}(\mu+\nu)}M_{(\mu,\nu)}^{-r_1+\frac{1}{2}}(\log^{d-1}M_{\mu,\nu})^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+}. \tag{3.127}$$

Тепер, для оцінки величин $\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q$ при $2<q<\infty$, скористаємося спочатку співвідношенням (3.46) із леми M$_3$, потім $\|f_{\mu,\nu}\|_2$ оцінюємо зверху у відповідності з лемою K$_3$ і, нарешті, застосовуємо оцінку (3.127). Діючи за такою схемою, маємо

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q \ll M_{(\mu,\nu)}^{-1}2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)}(\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}}\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_2 \ll$$

$$\ll M_{(\mu,\nu)}^{-r_1-\frac{1}{2}}2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{r_1}{2}\right)(\mu+\nu)}(\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}}(\log^{d-1}M_{\mu,\nu})^{\left(r_1-\frac{2}{\theta}\right)_+}. \tag{3.128}$$

Поєднавши (3.128) та (3.125), з урахуванням значень чисел $M_{(\mu,\nu)}$ отримаємо

$$\tau_{2M}(f)_q \leq \sum_{(\mu,\nu)\in G(m)} M_{(\mu,\nu)}^{-r_1-\frac{1}{2}} 2^{\left(\frac{1}{2}-\frac{r_1}{2}\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} (\log^{d-1} M_{(\mu,\nu)})^{\left(r_1-\frac{2}{\theta}\right)_+} \ll$$

$$\ll M^{-r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+} \sum_{(\mu,\nu)\in G(m)} 2^{-\left(r_1+\frac{1}{2}\right)\alpha(2m-\mu-\nu)} 2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)(1-r_1)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}} =$$

$$= M^{-r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+} 2^{-(2r_1+1)\alpha m} \sum_{(\mu,\nu)\in G(m)} 2^{\left(r_1\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}-\frac{r_1}{2}\right)(\mu+\nu)} (\mu\nu)^{\frac{d-1}{2}}. \tag{3.129}$$

Тепер, підібравши α так, щоб виконувалась нерівність $r_1\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} - \frac{r_1}{2} > 0$, тобто $\alpha > \frac{r_1-1}{2r_1+2}$, із (3.129) знаходимо

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+} 2^{m(1-r_1)} m^{d-1} \asymp$$

$$\asymp M^{-r_1-\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+} M^{1-r_1} (\log^{d-1} M)^{r_1-1} \log^{d-1} M =$$

$$= M^{-2r_1+\frac{1}{2}} (\log^{d-1} M)^{2r_1+\left(1-\frac{2}{\theta}\right)_+} \tag{3.130}$$

і така ж оцінка справедлива (беручи до уваги (3.127)) при $2 \leq q < \infty$ також і для $\tau_M(f)_q$. Для доведення (3.130) у випадку $q = \infty$ достатньо поновити попередні викладки, використавши тільки в якості проміжної оцінки співвідношення (3.98) замість (3.97).

Теорема 3.4.1 доведена. ■

3.5 Найкращі білінійні наближення на класах $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ та сингулярні числа інтегральних операторів

3.5.1 Означення та позначення

Нехай $\mathbb{R}^m$ — $m-$вимірний евклідів простір і $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$ для $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ із $\mathbb{R}^m$; при $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ через $L_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$, $\pi_m = \prod\limits_{j=1}^{m} [\,0; 2\pi\,)$ позначимо множину функцій $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $2\pi-$періодичних за кожною із m змінних, зі скінченими нормами

$$\|f\|_{\boldsymbol{p}} := \left((2\pi)^{-1} \times \int\limits_0^{2\pi} \left(\cdots (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \left((2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} |f(\boldsymbol{z}_1)|^{p_1}\, dz_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dz_2 \cdots\right)^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} dz_m\right)^{\frac{1}{p_m}}$$

при $1 \le p_j < \infty$, $j = \overline{1,m}$ і

$$\|f\|_{\boldsymbol{\infty}} := \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^m} |f(\boldsymbol{z})|$$

при $p_j = \infty$, $j = \overline{1,m}$. Зауважимо, що у випадку $p_1 = p_2 = \ldots = p_m = p$ простір $L_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$ збігається з простором Лебега $L_p(\pi_m)$ із стандартною нормою $\|\cdot\|_p$ і $\|f\|_{\boldsymbol{p}} \equiv \|f\|_p$.

Наступні позначення та означення, аналогічні до тих, які запроваджені при розгляді функцій з просторів $L_p(\pi_m)$, а деякі з попередніх підрозділів, що не пов'язані з простором $L_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$, для зручності дублюються і в цьому підрозділі.

Отже, в подальшому розглядаються функції $f \in L_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$, що підпорядковані умові

$$\int_0^{2\pi} f(\boldsymbol{z}) dz_j = 0, \quad j = \overline{1,m},$$

Множину таких функцій позначимо через $L^0_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$.

Нехай $V_l(u)$, $u \in \mathbb{R}$ — ядро Валлє–Пуссена порядку $2l$ вигляду

$$V_l(u) = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos ku + 2\sum_{k=l+1}^{2l-1} (1 - \frac{k-l}{l}) \cos ku$$

(при $l = 1$ другу суму покладаємо рівною нулю).
Вектору $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_m)$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,m}$, поставимо у відповідність поліном

$$A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{z}) = \prod_{j=1}^{m} (V_{2^{s_j}}(z_j) - V_{2^{s_j-1}}(z_j))$$

і для $f \in L^0_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$, $\boldsymbol{1} \le \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{\infty}$, покладемо

$$\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{z}) = (f * A_{\boldsymbol{s}})(\boldsymbol{z}),$$

де, нагадаємо, $*$ — операція згортки. Тут, і до кінця цього розділу, для векторів $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ та $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ нерівності типу $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$ слід розуміти як відповідні нерівності між їх координатами, тобто $a_i \le b_i$, $i = \overline{1,m}$.

Кажемо, що функція $f \in L^0_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$, $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $1 \le p_j \le \infty$, $j = \overline{1,m}$ *належить класу* $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ *з* $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, $r_j > 0$ *і* $1 \le \theta < \infty$, *якщо виконується нерівність*

$$\left(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}^m} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \, \|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{z})\|^{\theta}_{\boldsymbol{p}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le 1.$$

У випадку $\boldsymbol{1} < \boldsymbol{p} < \boldsymbol{\infty}$ можна дати еквівалентне означення класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$, замінивши "блоки" $\mathbb{A}_{\boldsymbol{s}}(f,\cdot)$ на інші. З цією метою, для векторів $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m)$ та $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_m)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $s_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,m}$, покладемо

$$\rho(\boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_m) :\ 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1,m}\}$$

і для $f \in L^0_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$ позначимо

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{z}) := \sum_{\boldsymbol{k} \in \rho(\boldsymbol{s})} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{z})},$$

де $\widehat{f}(\boldsymbol{k}) = (2\pi)^{-m} \int\limits_{\pi_m} f(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t}$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

Тоді, належність функції $f \in L^0_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$, $\boldsymbol{1} < \boldsymbol{p} < \boldsymbol{\infty}$ класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$, рівносильна виконанню нерівності

$$\left(\sum_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}^m} 2^{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{r})\theta} \|\delta_{\boldsymbol{s}}(f, \boldsymbol{z})\|^{\theta}_{\boldsymbol{p}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \le C,$$

з деякою абсолютною сталою C.

Більш детальну інформацію щодо класів $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$, а також історію досліджень, пов'язаних з ними, можна знайти в монографіях [1, 8, 57, 104].

Визначимо величини, до дослідження яких ми вдаємося в цьому підрозділі, і дамо коротку історичну довідку щодо них.

Нехай $d \ge 1$ — натуральне число, $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_{2d})$, $1 \le q_j \le \infty$, $j = \overline{1,2d}$ і $\boldsymbol{q(1)} = (q_1, \ldots, q_d)$, $\boldsymbol{q(2)} = (q_{d+1}, \ldots, q_{2d})$.

Для функції $f \in \boldsymbol{L}^0_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ *з* $2d$ *змінними* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ *та* $M \in \mathbb{N}$ *величина*

$$\tau_M(f)_{\boldsymbol{q}} = \inf_{u_i, v_i} \|f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \sum_{i=1}^{M} u_i(\boldsymbol{x}) v_i(\boldsymbol{y})\|_{\boldsymbol{q}}, \tag{3.131}$$

де $u_i \in L_{\boldsymbol{q(1)}}(\pi_d)$, $v_i \in L_{\boldsymbol{q(2)}}(\pi_d)$, $i = \overline{1,M}$, *називається найкращим білінійним наближенням порядку* M *функції* f *в просторі* $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$.

При $M = 0$ покладаємо $\tau_M(f)_{\boldsymbol{q}} = \|f\|_{\boldsymbol{q}}$.

Для множини функцій $F \subset L^0_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ величину $\tau_M(F)_{\boldsymbol{q}}$ визначимо формулою

$$\tau_M(F)_{\boldsymbol{q}} := \sup_{f \in F} \tau_M(f)_{\boldsymbol{q}}, \tag{3.132}$$

У випадку $q_j = q$, $j = \overline{1,2d}$ пишемо $\tau_M(\cdot)_q$ замість $\tau_M(\cdot)_{\boldsymbol{q}}$.

Як вже зазначалося на початку даного розділу, ймовірно перший результат, що стосується найкращих білінійних наближень був отриманий Е. Шмідтом [197], ще в 1907 році. Було з'ясовано, що наближення функцій $f(x,y)$ з двома змінними, визначених на квадраті $[0;1]^2 = [0;1] \times [0;1]$, білінійними формами в просторі $L_2([0;1]^2)$ тісно пов'язано з властивостями інтегральних операторів

$$(J_f\, g)(y) = \int\limits_0^1 f(x,y) g(x) dx \tag{3.133}$$

з ядром $f(x,y)$.

Зокрема, Е. Шмідтом була встановлена рівність (3.51), яка свідчить про зв'язок між величинами $\tau_M(f)_2$ для функції f і сингулярними числами $s_j(J_f)$ оператора J_f. На основі такого зв'язку в [197] одержані оцінки сингулярних чисел певних інтегральних операторів. Схожі дослідження знайшли продовження в роботах [14, 15, 59, 165, 200].

3.5.2 Допоміжні твердження

Сформулюємо декілька відомих тверджень, що використовуються в доведенні результатів даного підрозділу.

Насамперед сформулюємо згаданий вище результат Е. Шмідта в дещо модифікованому вигляді, і адаптованому до ситуації, яку ми маємо.

Теорема Д$_3$ [135, с. 10]) *Нехай функція* $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in L_{\boldsymbol{2}}(\pi_{2d})$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ *і* J_f *відповідний їй інтегральний оператор вигляду (3.133) з інтегруванням по* π_d. *Тоді*

$$\tau_M(f)_2 = \left(\sum_{m=M+1}^{\infty} s_m^2(J_f) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Важливу роль в подальшому викладі відіграє узагальнена (на випадок "векторних" норм) теорема Літтлвуда–Пелі.

Теорема Ж$_3$ [8, с. 238] *Нехай задано* $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\boldsymbol{1} < \boldsymbol{p} < \boldsymbol{\infty}$. *Існують такі додатні сталі* $C_1(\boldsymbol{p})$ *та* $C_2(\boldsymbol{p})$, *що для кожної функції* $f \in L^0_{\boldsymbol{p}}(\pi_m)$ *справедливі нерівності*

$$C_1(\boldsymbol{p}) \|f\|_{\boldsymbol{p}} \le \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{s}} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\boldsymbol{p}} \le C_2(\boldsymbol{p}) \|f\|_{\boldsymbol{p}}.$$

Для множин $E_1 \subset \mathbb{R}^d$ і $E_2 \subset \mathbb{R}^d$ через $T(E_1, E_2, 2d)$ позначимо множину тригонометричних поліномів t вигляду

$$t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in E_1 \\ \boldsymbol{l}\in E_2}} \widehat{t}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}) e^{i((\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{l},\boldsymbol{y}))}.$$

Нехай $n \in \mathbb{N}$ і

$$Q_n = \bigcup_{\|\boldsymbol{s}\|_1 = n} \rho^+(\boldsymbol{s}),$$

де $\rho^+(\boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) : 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1,d}\}$ для $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ і $\|\boldsymbol{s}\|_1 := \|\boldsymbol{s}\|_{l_1^d} = s_1 + \ldots + s_d$. Зауважимо, що $|Q_n| \asymp 2^n n^{d-1}$, де, нагадаємо, через $|\Lambda|$ позначається число точок скінченної множини $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$.

В таких позначеннях має місце твердження.

Лема H$_3$ [140]. *Нехай $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, $f \in T(Q_\mu, Q_\nu, 2d)$ і $M \in \mathbb{Z}_+$. Тоді при $2 \le q < \infty$ справедлива оцінка*

$$\tau_M(f)_q \le C(d) \min\{1,\ M^{-1}\}\, |Q_\mu|^{\frac{1}{2}}\, |Q_\nu|^{\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

Тут вважаємо, що $M^{-1} = K > 1$, якщо $M = 0$.

3.5.3 Найкращі білінійні наближення

В цьому пункті встановлені порядкові по параметру M значення величин $\tau_M(F)_{\boldsymbol{q}}$ для класу $F = \mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ при певних значеннях параметра θ і деяких співвідношеннях між векторами $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_{2d})$, $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_{2d})$ і $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_{2d})$. При цьому вихідною умовою щодо вектора $\boldsymbol{r}$ є умова, що його компоненти приймають значення $r_j = \rho_1$, $r_{d+j} = \rho_2$, $j = \overline{1,d}$ і в такому випадку клас $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ позначаємо $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Справедливе твердження.

Теорема 3.5.1. *Нехай $\boldsymbol{2} \le \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{\infty}$, $\boldsymbol{2} \le \boldsymbol{q} < \boldsymbol{\infty}$ і $2 \le \theta < \infty$. Тоді при $\rho_i > \frac{1}{2}$ ($\rho_i > 0$ при $\boldsymbol{p} \ge \boldsymbol{q}$), $i = 1, 2$ для класу $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$ функцій з $2d$ змінними має місце співвідношення*

$$\tau_M(\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta})_{\boldsymbol{q}} \asymp M^{-\rho_1-\rho_2} (\log^{d-1} M)^{(\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta})}. \qquad (3.134)$$

Доведення теореми 3.5.1. Отримаємо оцінку зверху величини $\tau_M(\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta})_{\boldsymbol{q}}$ при $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{q}$, яку достатньо, очевидно, встановити для $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{2}$ і $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_{2d})$ з $q_j = q > 2$, $j = \overline{1,d}$. При цьому візьмемо до уваги також той факт, що множина $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta} \subset L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ належить замиканню в $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ множини всіх тригонометричних поліномів.

Отже, для заданого достатньо великого M виберемо $m \in \mathbb{N}$ із співвідношення

$$2^{d+1}|Q_m| \le M < C|Q_m|, \tag{3.135}$$

де C — довільна фіксована стала, $C > 2^{d+1}$. Для $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ покладемо

$$M_{(\mu,\nu)} = [\, C_1(\alpha) M \, 2^{\alpha(2m-\mu-\nu)}\,], \tag{3.136}$$

$C_1(\alpha) = (1-2^{-\alpha})^2$, а додатне число α буде уточнене нижче; через $[a]$ позначено цілу частину числа $a \in \mathbb{R}$. Запроваджуючи позначення $G(m) := \{(\mu,\nu):\ \mu > m,\ \nu > m\}$, зауважимо, що для чисел $M_{(\mu,\nu)}$ і M має місце співвідношення

$$\sum_{(\mu,\nu)\in G(m)} M_{(\mu,\nu)} \le C_1(\alpha) M \sum_{(\mu,\nu)\in G(m)} 2^{\alpha(2m-\mu-\nu)} \le C_1(\alpha) M \sum_{k=1}^{\infty} k 2^{-\alpha(k-1)} \le M. \tag{3.137}$$

Зазначимо також про такий факт. Відштовхуючись від означення чисел $M_{(\mu,\nu)}$, можна стверджувати існування такого $\lambda = \lambda(\alpha) > 1$, що поклавши $m_0 = [2\lambda m]$ і

$$G^+ = G(m) \cap \{(\mu,\nu):\ \mu+\nu \le m_0\}, \qquad G^0 = G(m) \cap \{(\mu,\nu):\ \mu+\nu > m_0\},$$

буде

$$M_{(\mu,\nu)} \ge 1, \ \text{ якщо } \ (\mu,\nu) \in G^+ \tag{3.138}$$

і

$$M_{(\mu,\nu)} = 0, \ \text{ якщо } \ (\mu,\nu) \in G^0. \tag{3.139}$$

Далі, для векторів $\boldsymbol{s} = (s_1,\ldots,s_d)$, $\boldsymbol{t} = (t_1,\ldots,t_d)$, $s_j,\ t_j \in \mathbb{Z}_+$, $j = \overline{1,d}$ та функції $f \in L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ покладемо

$$\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})\\ \boldsymbol{l}\in\rho(\boldsymbol{t})}} \widehat{f}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) e^{i((\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{l},\boldsymbol{y}))}$$

і для натуральних чисел n визначимо такі трійки функцій

$$f_1^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\boldsymbol{t}\in\mathbb{Z}_+^d} \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 \le n} \delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

$$f_2^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\|\boldsymbol{t}\|_1 \le n} \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} \delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

$$f_3^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\|\boldsymbol{t}\|_1 > n} \sum_{\|\boldsymbol{s}\|_1 > n} \delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

Цілком зрозуміло, що функції $f_j^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $j=1,2$ можна подати у вигляді

$$f_j^n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{2^d|Q_n|} u_i^j(\boldsymbol{x}) v_i^j(\boldsymbol{y}). \tag{3.140}$$

з деякими $u_i^j,\, v_i^j \in L_{\boldsymbol{q}}(\pi_d)$, $j=\overline{1,2}$. І таким чином, взявши до уваги (3.135) та (3.140), можна записати

$$\tau_{2M}(f)_q \le \tau_M(f_3^m)_q. \tag{3.141}$$

Співвідношення (3.141) є відправним на шляху встановлення оцінок зверху для величин $\tau_M(\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta})_{\boldsymbol{q}}$.

З метою компактності записів позначимо через $\Pi(\mu,\nu)$ множину таких пар $(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})$ векторів $\boldsymbol{s}=(s_1,\dots,s_d)$ та $\boldsymbol{t}=(t_1,\dots,t_d)$, $s_j,\, t_j\in\mathbb{Z}_+$, $j=\overline{1,d}$, що $\|\boldsymbol{s}\|_1=\mu$ і $\|\boldsymbol{t}\|_1=\nu$. Покладемо

$$f_{\mu,\nu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(\mu,\nu)} \delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

Тоді із (3.141), враховуючи співвідношення (3.135), (3.137) та (3.140), маємо

$$\tau_{2M}(f)_q \le \sum_{(\mu,\nu)\in G(m)} \tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q. \tag{3.142}$$

Для продовження оцінки правої частини (3.142) потрібна оцінка величини $\|f_{\mu,\nu}\|_2$, яку спочатку подамо у вигляді

$$\|f_{\mu,\nu}\|_2 = \left\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(\mu,\nu)} \delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\|_2 = \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(\mu,\nu)} \|\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_2^2 \right)^{\frac12} =$$

$$= \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(\mu,\nu)} 2^{2(\rho_1\|\boldsymbol{s}\|_1+\rho_2\|\boldsymbol{t}\|_1)} \, \|\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_2^2 \, 2^{-2(\rho_1\|\boldsymbol{s}\|_1+\rho_2\|\boldsymbol{t}\|_1)} \right)^{\frac12}.$$

Застосувавши нерівність Гельдера (3.2) з показником $\frac{\theta}{2}$, та взявши до уваги співвідношення

$$\sum_{\|\boldsymbol{l}\|_1=n} 2^{-\beta\|\boldsymbol{l}\|_1} \asymp 2^{-\beta n}\, n^{d-1}, \quad \beta>0,$$

де $\boldsymbol{l}=(l_1,\dots,l_d)$, можна записати

$$\|f_{\mu,\nu}\|_2 \ll \left(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(\mu,\nu)} 2^{(\rho_1\|\boldsymbol{s}\|_1+\rho_2\|\boldsymbol{t}\|_1)\theta} \, \|\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|_2^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times\Bigg(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(\mu,\nu)} 2^{-(\rho_1\|\boldsymbol{s}\|_1+\rho_2\|\boldsymbol{t}\|_1)\frac{2\theta}{\theta-2}}\Bigg)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll \|f\|_{B^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{2},\theta}}\, 2^{-\rho_1\mu-\rho_2\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \ll$$

$$\ll 2^{-\rho_1\mu-\rho_2\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Тепер, застосувавши лему H_3 до оцінки величини $\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q$, маємо

$$\tau_{M_{(\mu,\nu)}}(f_{\mu,\nu})_q \ll \min\{1,\, M^{-1}_{(\mu,\nu)}\}\, 2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)}\,(\mu\,\nu)^{\frac{d-1}{2}}\,\|f_{\mu,\nu}\|_2 \ll$$

$$\ll \min\{1,\, M^{-1}_{(\mu,\nu)}\}\, 2^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)}\,(\mu\,\nu)^{\frac{d-1}{2}}\, 2^{-\rho_1\mu-\rho_2\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} =$$

$$= \min\{1,\, M^{-1}_{(\mu,\nu)}\}\, 2^{-(\rho_1-\frac{1}{2})\mu}\, 2^{-(\rho_2-\frac{1}{2})\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}. \tag{3.143}$$

Далі, із (3.142), скориставшись оцінкою (3.143), враховуючи при цьому співвідношення (3.138) та (3.139), що стосуються чисел $M_{(\mu,\nu)}$, отримаємо

$$\tau_{2M}(f)_q \ll \sum_{(\mu,\nu)\in G^+} M^{-1}_{(\mu,\nu)}\, 2^{-(\rho_1-\frac{1}{2})\mu}\, 2^{-(\rho_2-\frac{1}{2})\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} +$$

$$+ \sum_{(\mu,\nu)\in G^0} 2^{-(\rho_1-\frac{1}{2})\mu}\, 2^{-(\rho_2-\frac{1}{2})\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \ll$$

$$\ll M^{-1}\, 2^{-2\alpha m} \sum_{(\mu,\nu)\in G^+} 2^{-(\rho_1-\frac{1}{2}-\alpha)\mu}\, 2^{-(\rho_2-\frac{1}{2}-\alpha)\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} +$$

$$+ \sum_{(\mu,\nu)\in G^0} 2^{-(\rho_1-\frac{1}{2})\mu}\, 2^{-(\rho_2-\frac{1}{2})\nu}\,(\mu\,\nu)^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} =: S_1 + S_2. \tag{3.144}$$

Доповнимо співвідношення (3.144) оцінками доданків S_1 та S_2. Вибравши додатне число α так, щоб виконувались нерівності $\rho_1 - \frac{1}{2} - \alpha > 0$ та $\rho_2 - \frac{1}{2} - \alpha > 0$ (це можливо, бо згідно з умовою теореми $\rho_1 > \frac{1}{2}$ і $\rho_2 > \frac{1}{2}$), маємо

$$S_1 \ll M^{-1}\, 2^{-(\rho_1-\frac{1}{2})m}\, 2^{-(\rho_2-\frac{1}{2})m}\, m^{2(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp 2^{-(\rho_1+\rho_2)m}\, m^{2(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp M^{-\rho_1-\rho_2}(\log^{d-1} M)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}.$$

Далі, вважаючи з метою однозначного трактування міркувань, що $\rho_1 < \rho_2$, а також враховуючи, що $\lambda > 1$, знаходимо оцінку доданку S_2:

$$S_2 \ll 2^{-(\rho_1-\frac{1}{2})(2\lambda-1)m}\, 2^{-(\rho_2-\frac{1}{2})m}\, m^{2(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \ll$$

$$\ll 2^{(\lambda-2(\lambda-1)\rho_1)m} 2^{-(\rho_1+\rho_2)m} m^{2(d-1)(1-\frac{1}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp M^{-\rho_1-\rho_2+\lambda-2(\lambda-1)\rho_1}(\log^{d-1} M)^{(2\lambda-1)\rho_1+\rho_2+\lambda+2-\frac{2}{\theta}} \ll$$

$$\ll M^{-\rho_1-\rho_2}(\log^{d-1} M)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}.$$

Таким чином,

$$\tau_{2M}(f)_q \ll M^{-\rho_1-\rho_2}(\log^{d-1} M)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}.$$

З цього співвідношення випливає шукана оцінка величини $\tau_M(\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta})_{\boldsymbol{q}}$ у випадку $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{q}$.

На завершення доведення в (3.134) оцінки зверху залишилось розглянути випадок $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{q}$. Зауважимо, що потрібну оцінку достатньо встановити при $\boldsymbol{2} \leq \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} < \boldsymbol{\infty}$, тобто для величини $\tau_M(\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta})_{\boldsymbol{p}}$.

Отже, нехай $f \in \mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$, $2 \leq \theta < \infty$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$. Тоді, відштовхуючись від (3.141), на підставі теореми Ж$_3$ можна записати

$$\tau_{2M}(f)_{\boldsymbol{p}} \leq \tau_M(f_3^m)_{\boldsymbol{p}} \leq \Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} \delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Big\|_{\boldsymbol{p}} \ll$$

$$\ll \Big\| \Big(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} |\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{\boldsymbol{p}} = \Big\| \sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} |\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 \Big\|^{\frac{1}{2}}_{\frac{\boldsymbol{p}}{2}} \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} \|\, |\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2 \,\|_{\frac{\boldsymbol{p}}{2}} \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} \|\, \delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2_{\boldsymbol{p}} \Big)^{\frac{1}{2}} =: J. \qquad (3.145)$$

Далі, при $2 < \theta < \infty$, аналогічно попередньому випадку, застосувавши до останньої суми в (3.145) нерівність Гельдера (3.2) з показником $\frac{\theta}{2}$, маємо

$$J \ll \Big(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{(\rho_1\,\|\boldsymbol{s}\|_1+\rho_2\,\|\boldsymbol{t}\|_1)\theta} \;\|\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^\theta_{\boldsymbol{p}} \Big)^{\frac{1}{\theta}} \times$$

$$\times \Big(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{-(\rho_1\,\|\boldsymbol{s}\|_1+\rho_2\,\|\boldsymbol{t}\|_1)\frac{2\theta}{\theta-2}} \Big)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}} \ll$$

$$\ll 2^{-\rho_1 m-\rho_2 m}\, m^{2(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})} \asymp M^{-\rho_1-\rho_2}\,(\log^{d-1} M)^{\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta}}.$$

У випадку $\theta = 2$ із (3.143) отримаємо

$$J \leq 2^{-\rho_1 m-\rho_2 m} \Big(\sum_{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t})\in\Pi(m)} 2^{2(\rho_1\,\|\boldsymbol{s}\|_1+\rho_2\,\|\boldsymbol{t}\|_1)} \,\|\delta_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|^2_{\boldsymbol{p}} \Big)^{\frac{1}{2}} \ll$$

$$\ll 2^{-\rho_1 m-\rho_2 m}\,\|f\|_{B^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},2}} \leq 2^{-\rho_1 m-\rho_2 m} \asymp M^{-\rho_1-\rho_2}(\log^{d-1} M)^{\rho_1+\rho_2}.$$

Оцінки зверху в теоремі 3.5.1 встановлені.

Доведення оцінок знизу в (3.134) почнемо із запровадження додаткових позначень. Нехай, як зазвичай, $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ і $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$, $s_j,\ t_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = \overline{1, d}$. Розглянемо поліном з $2d$ змінними вигляду

$$A_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = A_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) A_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{y})$$

і для $f \in L^0_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ покладемо

$$\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f,\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := (f * A_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Для парних чисел n визначимо множини:

$$\Omega_n = \{\boldsymbol{s} :\ \|\boldsymbol{s}\|_1 = n,\ s_j - \text{парні натуральні числа},\ j = \overline{1, d}\};$$

$$Q_n^* = \bigcup_{s \in \Omega_n} \rho^+(\boldsymbol{s}),$$

де

$$\rho^+(\boldsymbol{s}) = \{\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_d) :\ \ 2^{s_j - 1} \le m_j < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d}\}.$$

Із означеної раніше множини $T(Q_n^*,\, Q_n^*,\, 2d)$ виділимо підмножину таких тригонометричних поліномів $t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, що для $\boldsymbol{s},\, \boldsymbol{t} \in \Omega_n$

$$\Bigg\| \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \in \rho^+(\boldsymbol{s}) \\ \boldsymbol{l} \in \rho^+(\boldsymbol{t})}} \widehat{t}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l})\, e^{i((\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{l},\boldsymbol{y}))} \Bigg\|_\infty \le 1. \tag{3.146}$$

Позначимо цю підмножину через $T\,H(Q_n^* \times Q_n^*)$.

Для фіксованих додатних сталих $C_1, C_2,$ за заданим достатньо великим M підберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалось співвідношення $C_1 |Q_n^*| \le M \le C_2 |Q_n^*|$. Тоді, як показано в [138], для деякої функції $f \in T\,H(Q_n^* \times Q_n^*)$ справедлива оцінка

$$\tau_M(f)_{\boldsymbol{2}} \ge C_1(d) |\Omega_n|. \tag{3.147}$$

Покладемо

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := C_2(d) 2^{-n(\rho_1 + \rho_2)}\, n^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\, f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{3.148}$$

Неважко переконатися, що при належному підборі додатної сталої $C_2(d)$ функція $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ належить класу $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{\infty},\theta}$. Справді, достатньо зауважити, що за умови (3.146)

$$\left(\sum_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t} \in \Omega_n} 2^{((\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\rho_1 + (\boldsymbol{t},\boldsymbol{1})\rho_2)\theta}\, \|\mathbb{A}_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}}(f, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\|^\theta_{\boldsymbol{\infty}} \right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \left(\sum_{\boldsymbol{s},\boldsymbol{t} \in \Omega_n} 2^{((\boldsymbol{s},\boldsymbol{1})\rho_1 + (\boldsymbol{t},\boldsymbol{1})\rho_2)\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp 2^{n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{\frac{2(d-1)}{\theta}}$$

і взяти до уваги означення (3.148).

Таким чином, для функції $g \in \mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{\infty},\theta}$, враховуючи співвідношення $|\Omega_n| \asymp n^{d-1}$ та $M \asymp 2^n n^{d-1}$, маємо

$$\tau_M(g)_{\mathbf{2}} \asymp 2^{-n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\, \tau_M(f)_{\mathbf{2}} \gg$$

$$\gg 2^{-n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\, |\Omega_n| \asymp 2^{-n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{(d-1)(1-\frac{2}{\theta})} \asymp$$

$$\asymp M^{-\rho_1-\rho_2}\, (\log^{d-1} M)^{(\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta})}.$$

Оцінка знизу і разом з нею теорема 3.5.1 доведені. ■

3.5.4 Сингулярні числа інтегральних операторів

Тут, використовуючи теорему 3.5.1, встановлено точні за порядком оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Справедливе твердження.

Теорема 3.5.2. *Нехай* $\mathbf{2} \le \boldsymbol{p} \le \boldsymbol{\infty}$, $2 \le \theta < \infty$ *і* $\rho_i > 0$, $i = 1, 2$. *Тоді для класу* $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$ *функцій з* $2d$ *змінними має місце порядкове співвідношення*

$$\sup_{f \in \mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}} s_M(J_f) \asymp M^{-\rho_1-\rho_2-\frac{1}{2}}\, (\log^{d-1} M)^{(\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta})}. \tag{3.149}$$

Доведення теореми 3.5.2. Встановимо оцінку зверху. Нехай $f \in \mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}$. Тоді на підставі теореми Д$_3$ можна записати

$$\tau_M(f)_{\mathbf{2}} \ge \left(\sum_{m=M+1}^{2M} s_m^2(J_f)\right)^{\frac{1}{2}} \ge M^{\frac{1}{2}} s_{2M}(J_f).$$

Звідси маємо $s_{2M}(J_f) \le M^{-\frac{1}{2}} \tau_M(f)_{\mathbf{2}}$, а отже, використавши результат теореми 3.5.1 при $\boldsymbol{q} = \mathbf{2}$, отримаємо

$$s_{2M}(J_f) \ll M^{-\rho_1-\rho_2-\frac{1}{2}}\, (\log^{d-1} M)^{(\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta})}$$

і, очевидно, така ж за порядком оцінка справедлива для $s_M(J_f)$.

У доведенні оцінки знизу використаємо задіяну в доведенні теореми 3.5.1 функцію $f \in T\,H(Q_n^*, Q_n^*, 2d)$ з n, що задовольняє нерівності $C_1|Q_n^*| \le M \le C_2|Q_n^*|$ з деякими фіксованими додатними числами C_1 та C_2 .

Із теореми Д$_3$ випливає співвідношення $\tau_M(f)_{\mathbf{2}} \le s_{M+1}(J_f)|Q_n^*|^{\frac{1}{2}}$, поєднання якого з (3.147), тягне нерівність

$$s_{M+1}(J_f) \gg |Q_n^*|^{-\frac{1}{2}}\, |\Omega_n|. \tag{3.150}$$

Тепер, враховуючи, що визначена опосередковано через функцію $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ співвідношенням (3.148) функція $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ належить класу $\mathbb{B}^{\rho_1,\rho_2}_{\boldsymbol{\infty},\theta}$, а $|\Omega_n| \asymp n^{d-1}$ і $|Q_n^*| \asymp 2^n n^{d-1}$, із (3.150) отримаємо

$$\sup_{\varphi\in\mathbb{B}^{\rho_1,\,\rho_2}_{\boldsymbol{p},\theta}} s_M(J_\varphi) \gg s_M(J_g) \gg 2^{-n(\rho_1+\rho_2)}\, n^{-\frac{2(d-1)}{\theta}}\, M^{-\frac{1}{2}}\, n^{d-1} \asymp$$

$$\asymp M^{-\rho_1-\rho_2-\frac{1}{2}}\,(\log^{d-1} M)^{(\rho_1+\rho_2+1-\frac{2}{\theta})}.$$

Теорема 3.5.2 доведена. ■

3.6 Висновки до розділу 3

Досліджено деякі класичні характеристики лінійної та нелінійної апроксимації (в сенсі встановлення їх точних за порядком оцінок) на різного типу класах Нікольського та Бєсова — періодичних функцій з декількома змінними — в просторах Лебега $L_q(\pi_d)$: тригонометричні та ортопроекційні поперечники, величини найкращих $M-$членних тригонометричних наближень.

Знайдені також порядкові значення величин найкращих білінійних наближень класів функцій $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ з $2d$ змінними $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$ вигляду $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})=g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$, де g функція з d змінними, що належить класу $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{p,\theta}$.

У підрозділі 3.3 знайдені точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на ізотропних класах Нікольського–Бєсова в функціональних просторах $L_q(\pi_{2d})$.

Результати підрозділів 3.1–3.4 є істотним доповненням до відомих оцінок розглянутих тут величин стосовно інших класів періодичних функцій з декількома змінними у просторах $L_q(\pi_d)$, наприклад, класів Соболєва $\mathbb{W}^{\boldsymbol{r}}_{p,\alpha}$ чи Нікольського $\mathbb{H}^{\boldsymbol{r}}_p$. З іншого боку, основними твердженнями цих підрозділів охоплені не досліджені раніше випадки співвідношень між параметрами, що фігурують в означенні класів функцій та просторів.

В заключному підрозділі 3.5 вперше встановлено точні за порядком оцінки величин найкращих білінійних наближень на класах Нікольського–Бєсова $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$ у функціональних просторах $L_{\boldsymbol{q}}(\pi_{2d})$ із мішаною ("векторною") нормою $\|\cdot\|_{\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{q}=(q_1,\ldots,q_m)$. На основі відомої теореми, що пов'язує величину білінійного наближення функцій $f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$ з сингулярними числами інтегральних операторів — ядро яких тотожне функції f — розв'язано задачу про оцінки сингулярних чисел інтегральних операторів з ядрами, що належать класам $\mathbb{B}^{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{p},\theta}$.

Всі результати, що увійшли до розділу 3 опубліковані у вигляді статей у співавторстві з А.С. Романюком в роботах [107–111, 192]. Вклад обох авторів в них є рівноцінним.

Розділ 4

АПРОКСИМАЦІЯ У ПРОСТОРАХ ФУНКЦІЙ, АНАЛІТИЧНИХ В ЖОРДАНОВИХ ОБЛАСТЯХ

У розділі з'ясовано певні апроксимаційні властивості деяких класів функцій, які є аналітичними в однозв'язній області $\Omega \subset \mathbb{C}$*, що обмежена замкнутою спрямлювальною жордановою кривою* Γ*. Дослідження полягають у встановленні оцінок наближення таких класів функцій в певних функціональних банахових просторах за допомогою скінченновимірних підпросторів .*

4.1 Класи функцій

Нехай Ω — однозв'язна область в комплексній площині $\mathbb{C}$, границя якої є замкнутою спрямлювальною жордановою кривою (з. с. ж. к.) Γ (іноді пишемо $\Gamma = \partial\Omega$), $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ — замикання області Ω , а $\Omega^- = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ — зовнішність кривої Γ, тобто доповнення області Ω до розширеної комплексної площини $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Нехай далі Φ і Ψ — функції, що здійснюють конформний гомеоморфізм між зовнішністю області $\overline{\Omega}$ і зовнішністю круга $\overline{D} = \{w : |w| \le 1\}$, причому функція Φ задовольняє умови

$$\lim_{z\to\infty} \Phi(z)/z = \alpha > 0 \quad \text{і} \quad \Phi(\infty) = \infty.$$

Відомо, що відображення Φ і Ψ неперевно продовжуються до відповідних границь і є абсолютно неперервними на них. Це дозволяє, зокрема, при інтегруванні по граничних кривих користуватись формулами заміни змінних.

Для кожної області Ω однозначно визначається система $\{F_k(z)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $z \in \mathbb{C}$ так званих *многочленів Фабера* порядку k (див., наприклад, [30, с. 350]). При $k \in \mathbb{Z}_+$ многочлен $F_k(\cdot)$ — це поліноміальна частина лорановського розкладу функції $\Phi^k(z)$

в околі точки $z = \infty$.

Для многочленів Фабера справедливе таке інтегрального представлення в області Ω (див., наприклад, [30, с. 358]):

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad z \in \Omega. \tag{4.1}$$

Зазначимо, що при $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+$ і $z \in \Omega$ інтеграл у правій частині (4.1) дорівнює нулю.

В [113] означені класи $L^\psi_\beta \mathfrak{N}(\Gamma)$ функцій, сумовних на з. с. ж. к. Γ — границі області $\Omega \subset \mathbb{C}$, а також їх аналітичні аналоги — класи $L^\psi_\beta \mathfrak{N}(\Omega)$ — множини функцій, що зображуються в області Ω інтегралами типу Коші вздовж Γ зі щільностями із $L^\psi_\beta \mathfrak{N}(\Gamma)$.

Вихідним пунктом в цих означеннях стала класифікація $2\pi-$періодичних сумовних на періоді функцій, що проведена О. І. Степанцем (див., наприклад, [114]) і базується на запровадженому ним понятті $(\psi;\beta)-$похідної.

Конструктивна побудова класів $L^\psi_\beta \mathfrak{N}(\Gamma)$ полягає у встановленні взаємно однозначної відповідності між деякими множинами $2\pi-$періодичних на $\mathbb{R}$ і сумовних на періоді функцій (а точніше, між природною реалізацією цих множин, як такою, що складається із функцій, заданих на колі $T = \{w : |w| = 1\}$) і підмножинами функцій сумовних на Γ. Цим заздалегідь передбачається, що класифікована множина функцій f, визначених на Γ, задовольняє умови

$$\int\limits_\Gamma |f(\zeta)||d\zeta| = \int\limits_{|w|=1} |f(\Psi(w)||\Psi'(w)||dw| < \infty. \tag{4.2}$$

$$\int\limits_\Gamma |f(\zeta)||\Phi'(z)||d\zeta| = \int\limits_{|w|=1} |f(\Psi(w)||dw| < \infty. \tag{4.3}$$

де Ψ' та Φ' — похідні функцій Ψ та Φ, продовжених неперервним чином відповідно на T та на Γ.

В подальшому множину функцій, які задовольняють умови (4.2) і (4.3) будемо позначати через $\widetilde{L}(\Gamma)$, а тих, що задовольняють лише умову (4.2) — через $L(\Gamma)$.

Якщо $f \in \widetilde{L}(\Gamma)$, то функцію $F(t) = f(\Psi(e^{it}))$ можна розвинути в ряд Фур'є

$$F(t) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(F) e^{ikt}, \; t \in \mathbb{R},$$

де $c_k(F) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F(t)e^{-ikt}dt$ — її коефіцієнти Фур'є.

Припустимо, що для деякої фіксованої послідовності $\{\psi(k),\, k\in\mathbb{N}\}$ додатних дійсних чисел і числа $\beta\in\mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z},\, k\neq 0} e^{(i\beta\pi/2)\cdot\operatorname{sgn} k}\ \frac{c_k(F)}{\psi(|k|)}e^{ikt}, \quad t\in\mathbb{R}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної $2\pi-$періодичної функції, яку позначимо $F^\psi_\beta(t)$. Функція F^ψ_β називається $(\psi;\beta)-$похідною функції F (див. [114]). Функцію $\mu(\zeta)$, що визначена на Γ (яка не обов'язково належить до $L(\Gamma)$) таку, що $\mu(\Psi(e^{it})) = F^\psi_\beta(t)$ майже для всіх $t\in\mathbb{R}$, назвемо контурною $(\psi;\beta)-$похідною функції $f(\zeta)$ і позначимо $f^\psi_\beta(\zeta)$.

Через $L^\psi_\beta\mathfrak{N}(\Gamma)$ позначимо підмножину функцій $f\in\widetilde{L}(\Gamma)$ таких, що $f^\psi_\beta\in\mathfrak{N}(\Gamma)$, де $\mathfrak{N}(\Gamma)$ —деяка підмножина функцій визначених на Γ, які задовольняють умову (4.3). Відштовхуючись від такого розбиття на класи множини $\widetilde{L}(\Gamma)$, можна класифікувати і множини аналітичних в області Ω функцій, які тим чи іншим чином пов'язані з функціями із $\widetilde{L}(\Gamma)$. В даному випадку така класифікація здійснюється для множини функцій, що задаються інтегралами типу Коші вздовж кривої Γ.

Отже, якщо

$$\mathcal{K}g(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad z\in\Omega,$$

— інтеграл типу Коші функції $g\in L(\Gamma)$, то визначимо

$$L^\psi_\beta\mathfrak{N}(\Omega) := \left\{\mathcal{K}f: \quad f\in L^\psi_\beta\mathfrak{N}(\Gamma)\right\}.$$

Далі, позначимо через $\widetilde{L}_q(\Gamma)$, $1<q<\infty$, — простір функцій φ, визначених і вимірних на Γ, для яких

$$\|\varphi\|_{\Gamma,q} := \left(\int_\Gamma |\varphi(z)|^q|\Phi'(z)||dz|\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{|w|=1} |f(\Psi(w)|^q|dw|\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

Нехай $\widetilde{B}_q(\Gamma)$ — одинична куля у просторі $\widetilde{L}_q(\Gamma)$. Покладемо $L^\psi_{\beta,p}(\Gamma) := L^\psi_\beta\mathfrak{N}(\Gamma)$ у випадку, коли $\mathfrak{N}(\Gamma) = \widetilde{B}_p(\Gamma)$ і відповідно

$$L^\psi_{\beta,p}(\Omega) := \left\{\mathcal{K}f: \quad \mathcal{K}f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \quad f\in L^\psi_{\beta,p}(\Gamma), \quad z\in\Omega\right\}.$$

Кожна функція, що належить класам $L^\psi_\beta\mathfrak{N}(\Omega)$ має майже всюди на Γ скічненні кутові граничні значення [158, 166], які в залежності від структури множини $\mathfrak{N}(\Gamma)$ і обмежень на послідовність $\{\psi(k),\, k\in\mathbb{N}\}$ як функції володіють певними структурними властивостями такими, наприклад, як неперервність, сумовність зі степенем p за Лебегом, тощо. Це дозволяє ставити задачі щодо наближення функцій із класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ в замкнутій області $\overline{\Omega}$ в метриці, що визначається їх властивостями на границі Γ.

4.2 Рівномірне наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у фаберових областях

В роботі [113]), у випадку коли область Ω фаберова, а функції із класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ неперервні в $\overline{\Omega}$, знайдені рівномірні в $\overline{\Omega}$ оцінки їх відхилень від часткових сум рядів Фабера. Ці оцінки подані в термінах апроксимативних величин $(\psi;\beta)$ – похідних функцій, що наближаються, а також — послідовності $\{\psi(k),\, k\in\mathbb{N}\}$.

Дослідження, проведені в ([113]) стосовно класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$, показали, що методи наближення 2π – періодичних функцій дійсної змінної з класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ добре узгоджуються з відомими фактами теорії граничних властивостей інтегралів типу Коші і теорії конформних відображень. Це стало поштовхом до постановки і розв'язання на класах $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ інших класичних задач теорії наближення аналітичних функцій. До таких задач відноситься, зокрема, задача про оцінку величин найкращого рівномірного в $\overline{\Omega}$ наближення функцій заданого класу алгебраїчними поліномами фіксованого степеня, а також про оцінку точної верхньої грані таких величин по всьому класу функцій. Але, основною поміж них є задача про оцінки поперечників класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ у певних просторах аналітичних в Ω і неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій.

4.2.1 Позначення та базові означення

Позначимо через $M(\Gamma)=\widetilde{L}_{\infty}(\Gamma)$ простір вимірних істотно обмежених на Γ функцій f з нормою

$$\|f\|_{M(\Gamma)}=\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in\Gamma}|f(\zeta)|,$$

а через $C(\Gamma)$ — простір неперервних на Γ функцій f з нормою

$$\|f\|_{C(\Gamma)}=\max_{\zeta\in\Gamma}|f(\zeta)|.$$

Для $\varphi\in L(0,2\pi)$ через $\widetilde{\varphi}$ позначимо тригонометрично спряжену функцію, а через $\widehat{\varphi}$ — функцію, що визначається формулою $\widehat{\varphi}(t)=\frac{1}{2}c_0(\varphi)+\frac{1}{2}(\varphi(t)+i\widetilde{\varphi}(t))$, де $c_0(\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt$. Функція $\widehat{\varphi}$ визначається однозначно всюди на $\mathbb{R}$, за винятком, можливо, множини точок лебегової міри нуль, на якій цю функцію можна довизначити довільним способом. Множину таких функцій $f\in M(\Gamma)$, що функція $f\circ\Psi$ неперервна на T ($f\circ\Psi\in\widetilde{L}_{\infty}(|w|=1)$) позначимо через $\widetilde{C}(\Gamma)$ $(\widetilde{M}(\Gamma))$.

Простір $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ — це простір, що складається із аналітичних в Ω і неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій f, з нормою

$$\|f\|_{\mathcal{A}(\overline{\Omega})} = \max_{z\in\overline{\Omega}} |f(\zeta)|.$$

Область Ω, обмежену з.с.ж.к. Γ, називають *фаберовою*, якщо для будь-якої функції $g \in \mathcal{A}(\overline{D})$ справджується нерівність

$$\sup_{z\in\Omega} \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta \right| \le C \sup_{w\in D} |g(w)|, \tag{4.4}$$

де C — величина, яка може залежати лише від області Ω.

Множину фаберових областей для яких виконується (4.4) з деякою фіксованою сталою C, позначимо $\mathcal{F}_C$. Також, покладемо $\mathcal{F} = \bigcup_{C>0} \mathcal{F}_C$.

Зазначимо, що вперше означення фаберових областей у поданому вигляді зустрічається у Є. М. Динькіна [27], Проте, дещо раніше, Г. І. Тумаркіним розглядався так званий клас K жорданових областей. Ним же у роботі [145] вказано на факт співпадіння останнього з класом $\mathcal{F}$.

Розглянемо лінійні оператори $\mathcal{F}^{\Omega}$, які визначені відповідно на $\mathcal{A}(\overline{D})$ та $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ і діють згідно з формулами

$$\mathcal{F}_{\Omega}[g](z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{g(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta, \quad g \in \mathcal{A}(\overline{D}),\ z \in \Omega,$$

$$\mathcal{F}^{\Omega}[f](w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=1} \frac{f(\Psi(\tau))}{\tau - w} d\tau, \quad f \in \mathcal{A}(\overline{\Omega}),\ w \in D,$$

Оператор $\mathcal{F}_{\Omega}$ називають *перетворенням Фабера функцій* $g \in \mathcal{A}(\overline{D})$, а $\mathcal{F}^{\Omega}$ — *оберненим перетворенням Фабера функцій* $f \in \mathcal{A}(\overline{\Omega})$ (див., наприклад, [123, с. 160–162]).

Позначимо $\mathcal{P}_n := \left\{ p : \quad p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k z^k,\ c_k \in \mathbb{C} \right\}$ — простір алгебраїчних поліномів степеня $n-1$. В [20, с. 58–59] показано, що оператор $\mathcal{F}_{\Omega}$ на множині $\mathcal{P}_n$ здійснює взаємно–однозначне відображення і визначений на $\mathcal{P}_n$ обернений до нього тотожній оператору $\mathcal{F}^{\Omega}$. Причому, якщо

$$t_n(w) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^k, \quad w \in D, \tag{4.5}$$

і

$$p_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}a_kF_k(z),\quad z\in\Omega, \tag{4.6}$$

то $\mathcal{F}_\Omega[t_n](z)=p_n(z)$ і

$$t_n(w)=\mathcal{F}^\Omega[p_n](w). \tag{4.7}$$

Якщо $\Omega\in\mathcal{F}$, тобто область Ω — фаберова, то звісно ж

$$\|\mathcal{F}_\Omega[p_n]\|_{C(\Gamma)}\ll\|p_n\|_{C(|w|=1)}, \tag{4.8}$$

і згідно з теоремою Банаха про обернений оператор [42, с. 225] можна записати

$$\|\mathcal{F}^\Omega[p_n]\|_{C(|w|=1)}\ll\|p_n\|_{C(\Gamma)}. \tag{4.9}$$

Апроксимаційні величини. Для функції $\varphi\in\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ через $E_n(\varphi)_{\mathcal{A}(\overline{\Omega})}$ позначається величина найкращого наближення функції φ за допомогою алгебраїчних поліномів степеня не вище $n-1$ в просторі $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$:

$$E_n(\varphi)_{\mathcal{A}(\overline{\Omega})}:=\inf_{p\in\mathcal{P}_n}\|\varphi(\cdot)-p(\cdot)\|_{\mathcal{A}(\overline{\Omega})}.$$

Для множини $V\subset\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ покладемо

$$E_n(V)_{\mathcal{A}(\overline{\Omega})}:=\sup_{\varphi\in V}E_n(\varphi)_{\mathcal{A}(\overline{\Omega})}.$$

Далі, для функцій $\varphi\in\mathcal{X}\subset L_1(0,2\pi)$ через $E_n(\varphi)_{\mathcal{X}}$ позначимо величину найкращого наближення функції φ за допомогою тригонометричних поліномів T_n порядку не вище $2n-1$ за нормою простору $\mathcal{X}$:

$$E_n(\varphi)_{\mathcal{X}}:=\inf_{T_n\in\mathcal{T}_n}\|\varphi(\cdot)-T_n(\cdot)\|_{\mathcal{X}},$$

Для множини $V\subset\mathcal{X}$ покладемо

$$E_n(V)_{\mathcal{X}}:=\sup_{\varphi\in V}E_n(\varphi)_{\mathcal{X}}.$$

Послідовності $\{\psi(k),\,k\in\mathbb{N}\}$, які є основним параметром як в означенні поняття $(\psi;\beta)-$похідної функції так і в самій класифікації множини $\widetilde{L}(\Gamma)$ (точніше, в означенні класів $L^\psi_\beta\mathfrak{N}(\Gamma)$ та їх аналітичних аналогів $L^\psi_\beta\mathfrak{N}(\Omega)$) є, взагалі кажучи, довільними. Будемо вважати, що послідовності $\{\psi(k),\,k\in\mathbb{N}\}$ є слідами на множині $\mathbb{N}$ опуклих донизу функцій ψ таких, що $\lim\limits_{v\to\infty}\psi(v)=0$. Множину таких функцій позначимо $\mathfrak{M}$.

Структурні (тобто диференціальні чи узагальнено–диференціальні), а як наслідок, і апроксимаційні властивості функцій із класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$) найбільш істотно залежні від поведінки функцій ψ. Це обумовлює доцільність розбиття множини $\mathfrak{M}$ на підмножини за швидкістю спадання функцій ψ. До характеризації цієї швидкості залучаються певні функції — так звані *модулі півроспаду* μ (див. [114]).

Покладемо

$$\mathfrak{M}_c := \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad K_1 \leq \mu(\psi; t) \leq K_2, \quad K_1, K_2 > 0\}\,;$$

$$\mathfrak{M}_0 := \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad 0 \leq \mu(\psi; t) \leq K, \quad K > 0\}\,;$$

$$\mathfrak{M}_\infty := \{\psi \in \mathfrak{M} : \quad \mu(\psi; t) \uparrow \infty,\, t \to \infty\}\,,$$

де $\mu(t) = \mu(\psi; t) = t/(\eta(t) - t)$, $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, а ψ^{-1} — функція обернена до ψ;

$$\mathfrak{M}_{c,\infty} := \mathfrak{M}_c \cup \mathfrak{M}_\infty;$$

В цих означеннях K_1, K_2 та K — додатні величини, які, взагалі кажучи, залежать від функції ψ. Виходячи за межі точних означень, опишемо запроваджені множини таким чином :

- $\mathfrak{M}_0$ — множина функцій $\psi(t)$, що спадають не швидше ніж $\ln^{-1}(t+1)$;
- $\mathfrak{M}_c$ — множина функцій $\psi(t)$, що спадають швидше ніж $\ln^{-1}(t+1)$, але повільніше ніж $\exp(-t^r), r > 0$;
- $\mathfrak{M}_\infty$ — множина функцій $\psi(t)$, що спадають не повільніше ніж $\exp(-t^r)$, $r > 0$ (множина $\mathfrak{M}_\infty$, в свою чергу, є об'єднанням двох неперетинних множин $\mathfrak{M}'_\infty$ і $\mathfrak{M}''_\infty$ типовими представниками яких є відповідно функції $\exp(-t^r)$, $r \geq 1$ і $\exp(-t^r)$, $0 < r < 1$).

Отже, якщо

а) $\psi \in \mathfrak{M}_0$, або $\psi \in \mathfrak{M}_C$, то класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ є множинами аналітичних в області Ω функцій природною границею яких є крива Γ. При цьому граничні властивості цих функцій визначаються виключно структурою кривої Γ і множиною $\mathfrak{N}(\Gamma)$ до якої належить контурна $(\psi; \beta)-$похідна функції;

б) $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, то класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ є множинами функцій, які аналітично продовжуються через границю Γ області Ω (наприклад, при $\psi(t) = R^{-t}$, $R > 1$), або множинами цілих в $\mathbb{C}$ функцій (наприклад, при $\psi(t) = R^{-t^r}$, $R, r > 1$;

в) $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, то з точки зору апроксимаційних властивостей класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ займають проміжне положення між класами в яких диференціальні властивості функцій описуються на $\overline{\Omega}$ в термінах звичайної цілої r–ої похідної і класами функцій, що аналітично продовжуються із Ω через криву Γ.

4.2.2 Оцінки величин найкращого наближення

Має місце таке твердження.

Теорема 4.2.1. *Нехай* $\Omega \in \mathcal{F}_C$ *і* $f \in L^{\psi}_{\beta}\widetilde{M}(\Gamma)$, $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$, *або* $f \in L^{\psi}_{\beta}\widetilde{M}(\Gamma)$, $\psi \in \mathfrak{M}_0$. *Тоді*

$$E_n(\mathcal{K}f)_{\mathcal{A}(\overline{\Omega})} \ll \psi(n) E_n(\widehat{F}^{\psi}_{\beta})_{L_\infty(0,2\pi)}. \tag{4.10}$$

Базовими в доведенні теореми 4.2.1 є деякі твердження з [63], де вони приведені з повними доведеннями. Перед їх формулюванням тут, нагадаємо такі факти. Якщо функція $f \in \widetilde{L}(\Gamma)$, то суперпозиція функцій f, Ψ і $\exp(it)$ позначається літерою F. Тоді функція $F \in L_1(0, 2\pi)$. Позначимо через $c_k(F)$, $k \in \mathbb{Z}$ її коефіцієнти Фур'є по системі $\{e^{i(k,t)}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

Лема 4.2.1. *Нехай область* Ω *обмежена з.с.ж.к.* Γ; $\Psi'(e^{it}) \in L_p(0, 2\pi)$, $f \in \widetilde{L}_s(\Gamma)$, $1 \le p, s \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1$ *і* $c_k(F) = 0$ *при* $k \in \mathbb{Z}_+$. *Тоді для будь-якого* $z \in \Omega$

$$\mathcal{K}f(z) = 0. \tag{4.11}$$

Позначимо через $\widetilde{L}^0_s(\Gamma)$, $1 \le s \le \infty$ підмножину таких функцій f із $\widetilde{L}_s(\Gamma)$, що $\widetilde{F} \in L_s(0, 2\pi)$, де, нагадаємо, $\widetilde{F}$ — функція, тригонометрично спряжена до функції $F(t) = f(\Psi(e^{it}))$. Звісно, при $1 < s < \infty$ маємо $\widetilde{L}^0_s(\Gamma) = \widetilde{L}_s(\Gamma)$.

Лема 4.2.2. *Нехай область* Ω *обмежена з.с.ж.к.* Γ; $\Psi'(e^{it}) \in L_p(0, 2\pi)$, $f \in \widetilde{L}^0_s(\Gamma)$, $1 \le p, s \le \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{s} = 1$. *Тоді для будь-якого* $z \in \Omega$

$$\mathcal{K}f(z) = \mathcal{F}_\Omega[\mathcal{K}f_0](z), \tag{4.12}$$

де $f_0(w) = f(\Psi(w))$.

Лема 4.2.3. *Нехай* Γ *— з.с.ж.к. Тоді*

1) $L^{\psi}_{\beta}\widetilde{M}(\Gamma) \subset \widetilde{C}(\Gamma)$, *якщо* $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$;

2) $L^{\psi}_{0}\widetilde{M}(\Gamma) \subset \widetilde{C}(\Gamma)$, *якщо* $\psi \in \mathfrak{M}_0$.

Доведення теореми 4.2.1. Згідно з лемою 4.2.3 $f \in \widetilde{C}(\Gamma) \subset \widetilde{L}^0_\infty(\Gamma)$ і оскільки $\Psi'(e^{it}) \in L_1(0, 2\pi)$ за умови, що Γ спрямлювальна крива, то згідно з лемою 4.2.2 $\mathcal{K}f(z) = \mathcal{F}_\Omega[\mathcal{K}f_0](z)$, $z \in \Omega$. Тут $f_0(w) = f(\Psi(w))$. Зрозуміло, що $f_0 \in L^{\psi}_{\beta}\widetilde{M}(|w| = 1)$.

У випадку, коли $\Omega = D$ теорема 4.2.1 доведена в [63]. А отже, відштовхуючись від властивостей оператора $\mathcal{F}_\Omega$ за умов на область Ω, можна стверджувати, що $\mathcal{K}f \in \mathcal{A}(\overline{\Omega})$ і

$$E_n(\mathcal{K}f)_{\mathcal{A}(\overline{\Omega})} \ll E_n(\mathcal{K}f_0)_{\mathcal{A}(\overline{D})} \ll \psi(n) E_n(\widehat{F}^{\psi}_{\beta})_{L_\infty(0,2\pi)}.$$

Теорема доведена. ■

Позначимо $\widetilde{B}(\Gamma) := \{f \in \widetilde{M}(\Gamma) : \ \|\widehat{F}\|_{L_\infty(0,2\pi)} \le 1\}$.

Наслідок 4.2.1. *Нехай* $\Omega \in \mathcal{F}$ *і* $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$, *або* $\psi \in \mathfrak{M}_0$, $\beta = 0$. *Тоді*

$$E_n(L^\psi_\beta \widetilde{B}(\Omega))_{\mathcal{A}(\overline{\Omega})} \ll \psi(n) \tag{4.13}$$

4.2.3 Колмогоровські поперечники

Позначимо через S множину функцій ψ, визначених на $[0,\infty)$, не зростаючих на $[1,\infty)$, і таких, що функції ψ є опуклими доверху чи донизу на $[1,\infty)$.

Справедливий такий аналог нерівності Бернштейна для поліномів із $\mathcal{P}_m$.

Лема 4.2.4. *Нехай* $\Omega \in \mathcal{F}$, $\Gamma = \partial\Omega$, $\psi \in S$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для* $P_n \in \mathcal{P}_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ *справедлива нерівність*

$$\|[P_n]^\psi_\beta\|_{C(\Gamma)} \le \frac{K}{\psi(n)} \|P_n\|_{C(\Gamma)}, \tag{4.14}$$

де K *— величина, що залежить лише від області* Ω.

Доведення леми 4.2.4. Нехай $T_n(\theta) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ik\theta}$ — довільний тригонометричний поліном порядку $2n+1$. У [48, нерівність (5.3)] показано, що за умови $\psi \in S$ справедливе співвідношення

$$\|[T_n]^\psi_\beta\|_{C(0,2\pi)} \le \frac{C}{\psi(n)} \|T_n\|_{C(0,2\pi)}. \tag{4.15}$$

Тому у випадку, коли Γ — одиничне коло $|z| = 1$, нерівність (4.14) очевидним чином випливає з (4.15).

Якщо $\Gamma = \partial\Omega$ і $\Omega \in \mathcal{F}$, то діємо наступним чином. Нехай $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ довільний алгебраїчний поліном степеня n.

Розкладемо $P_n(z)$ по многочленах Фабера, які визначаються областю Ω :

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k F_k(z), \tag{4.16}$$

де d_k — коефіцієнти Фабера функції $P_n(z)$, $z \in \Omega$. Тоді для $w \in D$

$$\varphi(w) := t_n(w) = \mathcal{F}^\Omega[P_n](w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_T \frac{P_n(\Psi(\tau))}{\tau - w} d\tau = \sum_{k=0}^{n} d_k w^k. \tag{4.17}$$

З одного боку, беручи до уваги (4.9), маємо

$$\|\varphi_\beta^\psi\|_{C(|w|=1)} \leq \frac{C}{\psi(n)}\|\varphi\|_{C(|w|=1)} \leq \frac{C_0}{\psi(n)}\|P_n\|_{C(\Gamma)}. \tag{4.18}$$

А з іншого, — відштовхуючись від означення контурної (ψ, β)−похідної функції визначеної на кривій Γ, зважаючи на (4.17) можна записати

$$[P_n]_\beta^\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\beta\pi/2}\psi(k)d_k F_k(z)$$

А оскільки, $F_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi^k(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \ \ z \in \Omega,$ то

$$[P_n]_\beta^\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi_\beta^\psi(\Phi(\zeta))}{\zeta - z}d\zeta =: \mathcal{F}_\Omega[\varphi_\beta^\psi](z).$$

і згідно з нерівністю (4.8)

$$\|[P_n]_\beta^\psi\|_{C(\Gamma)} \leq C_1\|\varphi_\beta^\psi(\Phi(\cdot))\|_{C(\Gamma)} = C_1\|\varphi_\beta^\psi\|_{C(|w|=1)}. \tag{4.19}$$

Поєднавши співвідношення (4.18) та (4.19), отримаємо нерівність (4.14).

Лема 4.2.4 доведена. ♦

Теорема 4.2.2. *Нехай* $\Omega \in \mathcal{F}$ *і* $\psi \in \mathfrak{M}_{c,\infty} \cap S$, $\beta \in \mathbb{R}$, *або* $\psi \in \mathfrak{M}_0 \cap S$ $\beta = 0$. *Тоді*

$$d_n(L_\beta^\psi \widetilde{B}(\Omega); \mathcal{A}(\overline{\Omega})) \asymp \psi(n) \tag{4.20}$$

Доведення теореми 4.2.2. *Оцінка зверху* випливає із наслідку 4.2.1.

Оцінку знизу встановимо за допомогою добре відомого методу оцінки поперечників функціональних множин, розробленого В. М. Тіхоміровим (див., наприклад, [132]). У його основі лежить твердження про те, що n−вимірний поперечник за Колмогоровим $n+1$−вимірної одиничної кулі в лінійному нормованому просторі $\mathcal{X}$ дорівнює одиниці. Для заданого $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$C\psi(n)U_{n+1} := \{P \in \mathcal{P}_{n+1} : \|P\|_{C(\Gamma)} \leq C\psi(n)\}.$$

— $n+1$−вимірна куля радіусом $C\psi(n)$ у просторі $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$; C — деяка додатна стала.

Якщо $\Omega \in \mathcal{F}$ і $\psi \in S$, то зважаючи на лему 4.2.4, можна підібрати таку сталу C, що буде

$$C\psi(n)U_{n+1} \ \subset \ L_\beta^\psi \widetilde{B}(\Omega).$$

Тоді на підставі твердження 10.2.4 із книги [45]

$$d_n(L_\beta^\psi \widetilde{B}(\Omega); \mathcal{A}(\overline{\Omega})) \geq d_n(L_\beta^\psi \widetilde{B}(\Omega); \mathcal{A}(\overline{\Omega})) = C\psi(n)$$

Теорема 4.2.2 доведена. ■

4.3 Наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ у випадку, коли $\psi \in P_{0,C}$

У просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ досліджуються апроксимаційні властивості (у термінах величин найкращого поліноміального наближення та колмогоровських поперечників) класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ за таких обмежень на послідовність $\{\psi(k), k \in \mathbb{N}\}$, коли природною межею аналітичності функцій із $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ є крива Γ — границя області Ω.

4.3.1 Означення просторів функцій та апроксимаційних величин

Простір $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$, $1 < q < \infty$, складається із аналітичних в Ω функцій φ, що мають майже всюди на Γ кутові граничні значення $\overline{\varphi} \in \widetilde{L}_q(\Gamma)$. Норму елемента φ ототожнимо з нормою $\overline{\varphi}$, тобто покладемо

$$\|\varphi\|_{\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})} := \|\overline{\varphi}\|_{\widetilde{L}_q(\Gamma)},$$

Регулярними називаються [166] жорданові криві Γ, для кожної із яких існує своя, така додатна стала C, що для будь-якого $\zeta \in \Gamma$ і $r > 0$ довжина її частини, яка знаходиться в крузі $D_r(\zeta) := \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < r\}$, не перевищує числа Cr.

Регулярні криві введені у 1935 році Л. Альфорсом. Іноді їх ще називають *карлесоновими.*

Нехай ω майже всюди скінченна, додатна, вимірна на Γ функція — *вага на* Γ і $\theta_z(r) := \{\zeta \in \Gamma : \ |\zeta - z| \le r\}$, а $\mu(A)$ — міра Лебега множини A на Γ. Позначимо через $A_q(\Gamma; c)$, $1 < q < \infty$, множину вагових функцій ω на Γ, для яких

$$\sup_{z\in\Gamma}\sup_{r>0}\left(\frac{1}{\mu(\theta_z(r))}\int\limits_{\theta_z(r)} |\omega(\zeta)||d\zeta|\right)\left(\frac{1}{\mu(\theta_z(r))}\int\limits_{\theta_z(r)} |\omega(\zeta)|^{-\frac{1}{q-1}}|d\zeta|\right)^{q-1} \le c,$$

Це є *аналог відомої умови Маккенхаупта [184]* для ваг, визначених на спрямлювальній кривій Γ (див. [28]). Покладемо $A_q(\Gamma) = \bigcup_{c>0} A_q(\Gamma; c)$.

Кажемо, що з.с.ж.к. Γ, яка обмежує область Ω і повністю визначається функцією Φ (або Ψ), належить множині RA_q, якщо вона задовольняє наступні умови:

i) Γ — регулярна крива, тобто $\sup\limits_{z\in\Gamma}\sup\limits_{r>0}\mu(\theta_z(r))/r < \infty$;

ii) $|\Phi'| \in A_q(\Gamma)$ при $1 < q < \infty$.

Апроксимаційні величини. Для функції $\varphi \in \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ через $\rho_n(\varphi; \cdot)$ і $E_n(\varphi)_{\Gamma,q}$ позначаються відповідно точкове в області Ω відхилення від функції φ частинної суми порядку n її ряду Фабера та величина найкращого наближення функції φ за допомогою алгебраїчних поліномів степеня не вище n в просторі $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$. Тобто

$$\rho_n(\varphi; z) := \left|\varphi(z) - S_{n-1}^F(\varphi, z)\right|, \quad z \in \Omega,$$

де $S_{n-1}^F(\varphi, z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(\varphi) F_k(z)$ — частинна сума порядку n ряду Фабера функції φ, $a_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_T \varphi(\Psi(w)) w^{-k-1} dw, \quad k \in \mathbb{Z}_+$, а F_k — *многочлен Фабера* порядку k для області Ω (див. пункт 4.1);

$$E_n(\varphi)_{\Gamma,q} := \inf_{p \in \mathcal{P}_n} \|\varphi(z) - p(z)\|_{\Gamma,q},$$

де, нагадаємо, $\mathcal{P}_n$ — простір алгебраїчних поліномів степеня $n-1$.
Відповідно означимо для множини $V \subset \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$

$$\mathcal{E}_n(V)_{\Gamma,q} := \sup_{\varphi \in V} \|\rho_n(\varphi; \cdot)\|_{\Gamma,q} \quad \text{та} \quad E_n(V)_{\Gamma,q} := \sup_{\varphi \in V} E_n(\varphi)_{\Gamma,q}.$$

4.3.2 Найкращі поліноміальні наближення та колмогоровські поперечники (результати)

Кажемо, що для фіксованого $\alpha \geq 0$ послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$ належить множині P_α [114, с. 207], якщо величини

$$\nu_\alpha(\psi) = \sup_k |\psi(k)| k^\alpha,$$

$$\sigma_\alpha(\psi) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi(k+1)(k+1)^\alpha - \psi(k) k^\alpha|$$

скінченні.

Наприклад, це так, якщо $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$ — послідовність додатних чисел така, що $\{\psi(k) k^\alpha,\, k \in \mathbb{N}\}$ не зростає. Надалі множину таких послідовностей будемо позначати через I_α.

При кожному фіксованому $\alpha \geq 0$ через $P_\alpha^{(n)}$ позначимо підмножину послідовностей $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$ з P_α, для яких виконуються співвідношення

$$\sigma_\alpha(\psi_n) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_n(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_n(k) k^\alpha| \leq \mathcal{K} \nu(n) n^\alpha,$$

де

$$\psi_n(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \psi(k), & k \geq n, \end{cases}$$

$$\nu(n) = \upsilon(\psi; n) = \sup_{k \geq n} |\psi(k)|.$$

Зрозуміло, що при $n \in \mathbb{N}$ і $\alpha \geq 0$ маємо $I_\alpha \subset P_\alpha^{(n)}$ (у такому випадку $\nu(n) = \psi(n)$).

Теорема 4.3.1. *Нехай* $\Gamma \in RA_q$, $1 < p, q < \infty$, $\alpha = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$ *і* $\psi \in P_\alpha^{(n)}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді для* $f \in L_\beta^\psi \widetilde{L}_p(\Gamma)$ *маємо*

$$E_n(\mathcal{K}f)_{\Gamma,q} \asymp \|\rho_n(\mathcal{K}f; \cdot)\|_{\Gamma,q} \ll \nu(n) n^\alpha E_n(F_\beta^\psi)_p. \tag{4.21}$$

Теорема 4.3.2. *Нехай* $\Gamma \in RA_q$, $1 < p, q < \infty$, $\alpha = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$ *і* $\psi \in P_\alpha^{(n)}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$E_n(L_{\beta,p}^\psi(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi(\Omega))_{\Gamma,q} \ll \nu(n) n^\alpha. \tag{4.22}$$

У випадку $1 < q \leq p < \infty$ оцінка (4.22) є точною за порядком, тобто має місце наступне твердження.

Теорема 4.3.3. *Нехай* $\Gamma \in RA_q$, $1 < q \leq p < \infty$ *і* $\psi \in P_0^{(n)}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$E_n(L_{\beta,p}^\psi(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \nu(n). \tag{4.23}$$

Далі, позначимо через $P_{0,C}$ множину додатних числових послідовностей $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ таких, що при $n \in \mathbb{N}$ існує така стала K, яка не залежить від n, що

$$\max_{n \leq k \leq 2n} \frac{\nu(n)}{\psi(k)} \leq K$$

і

$$\sup_{r \geq 0} \sum_{k=2^r}^{2^{r+1}} |h(k+1) - h(k)| \leq K,$$

де

$$h(k) = h(k; n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k \leq n-1,\ k > 2n; \\ \frac{\nu(n)}{\psi(k)}, & n \leq k \leq 2n. \end{cases}$$

Теорема 4.3.4. *Нехай* $\Gamma \in RA_q$, $1 < p < q < \infty$, $\alpha = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$ *і* $\psi \in P_\alpha^{(n)} \cap P_{0,C}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$E_n(L_{\beta,p}^\psi(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^\psi(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \nu(n) n^\alpha. \tag{4.24}$$

Теореми 4.3.1–4.3.4 є аналогами відповідних результатів, встановлених О. І. Степанцем [114, розділ V], що стосуються найкращих наближень 2π – періодичних функцій з класів $L_\beta^\psi L_p$ у просторі $L_q(0, 2\pi)$ за допомогою тригонометричних поліномів.

У випадку, коли Γ — одиничне коло, ці теореми істотно доповнюють деякі твердження із [131] та [150].

Через W^0_α, $\alpha > 0$, позначимо множину таких послідовностей $\psi \in P_{0,C}$, що послідовність $\{\psi(k)k^\alpha,\, k \in \mathbb{N}\}$ не зростає, тобто $W^0_\alpha := P_{0,C} \cap I_\alpha$.

Теорема 4.3.5. *Нехай* $\Gamma \in RA_q$ *і* ε *— довільне як завгодно мале додатне число. Тоді*

$$d_n(L^\psi_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \asymp \begin{cases} \psi(n)n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 < p \le q \le 2,\, \psi \in W^0_{1/p-1/q} \\ \psi(n)n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2 \le q < \infty,\, \psi \in W^0_{1/p+\varepsilon} \\ \psi(n), & 2 \le p \le q < \infty,\, \psi \in W^0_0 \\ \psi(n), & 1 < q \le p < \infty,\, \psi \in W0_{1/2+\varepsilon}. \end{cases}$$

Ця теорема доповнює і узагальнює один результат С. Б. Вакарчука [16] щодо оцінок величин $d_n(W^r E_p(\Omega); E_q(\Omega))$, де $E_q(\Omega)$ — простір Смірнова аналітичних в Ω функцій, а $W^r E_p(\Omega) = \{f \in E_p(\Omega) : \|f^{(r)}\|_{E_p} \le 1\}$; Ω — область, обмежена кривою γ , що належить класу Ляпунова $\Lambda(1)$.

4.3.3 Доведення теорем 4.3.1–4.3.4

Допоміжні факти і твердження. Позначимо через $\widetilde{L}_q(\Gamma;\omega)$, $1 \le q < \infty$, простір таких визначених і вимірних на Γ функцій f, що функції $\omega(\zeta)|f(\zeta)|^p$, $\zeta \in \Gamma$, — сумовні на Γ. Норму в цьому просторі визначимо формулою

$$\|f\|_{L_p(\Gamma;\omega)} := \left(\int\limits_\Gamma |f(\zeta)|^p \omega(\zeta)|dz| \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далі, для функції $f \in L(\Gamma)$ через $\mathcal{K}^+ f$ позначимо кутові граничні значення зсередини області Ω інтегралу типу Коші $\mathcal{K}f$ і визначимо особливий інтеграл Коші

$$\mathcal{S}f(z) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma \setminus \Gamma_{\varepsilon,z}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

де $z \in \Gamma$, а $\Gamma_{\varepsilon,z}$ —частина кривої Γ довжиною 2ε, яка містить точку z і ділиться нею навпіл (за довжиною).

Відомо [158], якщо Γ спрямлювальна крива, то $\mathcal{K}^+ f(z)$ і $\mathcal{S}f(z)$ існують майже для всіх $z \in \Gamma$ для будь-якої функції $f \in L(\Gamma)$.

Через $\mathcal{S}$ позначимо оператор, що ставить у відповідність функції $f \in L(\Gamma)$ функцію $\mathcal{S}f$. Справедливе наступне твердження, що входить до одного, більш загального твердження, яке встановлене Г. Давідом [166]:
оператор $\mathcal{S}$*, що діє із* $L_p(\Gamma)$ *в* $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$*, обмежений тоді і тільки тоді, коли* Γ *— регулярна крива.*

Узагальнення цього твердження на випадок просторів $\widetilde{L}_q(\Gamma;\omega)$ отримано в [28]: *якщо* Γ *— регулярна крива,* $1 < p < \infty$ *і* ω *— вага на* Γ*, то нерівність*

$$\|\mathcal{S}(f)\|_{L_p(\Gamma;\omega)} \le K(p)\|f\|_{L_p(\Gamma;\omega)}. \tag{4.25}$$

справедлива тоді і тільки тоді, коли $\omega \in A_p(\Gamma)$.

Розглядаючи в якості вагової функції ω функцію $|\Phi'|$ і використовуючи теорему І. І. Прівалова про граничні значення інтегралу типу Коші (див., наприклад, [60, с. 190]), переконуємося: якщо $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$, то для будь-якої функції $f \in \widetilde{L}_p(\Gamma)$ справджується нерівність

$$\|\mathcal{K}^+ f\|_{\Gamma,p} \le K_1(p)\|f\|_{\Gamma,p}. \tag{4.26}$$

Далі зауважимо, якщо Γ — з.с.ж.к., то за умов теорем 4.3.1 та 4.3.2 має місце вкладення $L^{\psi}_{\beta}\widetilde{L}_p(\Gamma) \subset \widetilde{L}_p(\Gamma)$ [114, с. 208]. Це, з урахуванням співвідношення (4.26), дозволяє стверджувати про змістовність апроксимаційних величин, які розглядаються в теоремах 4.3.1–4.3.4.

Оцінки зверху в теоремах 4.3.1 – 4.3.4 автоматично випливають із оцінок зверху відповідних величин для $2\pi-$періодичних функцій, які належать до множин $L^{\psi}_{\beta,p}$ (див. [114, розділ V]), якщо врахувати наступне.

Скориставшись інтегральним представленням многочленів Фабера (4.1), — з наступним застосуванням співвідношення (4.26) і теореми про обмеженість оператора Фур'є, який діє в $L_q(0,2\pi)$, — легко показати, що за умови $\Gamma \in RA_q$, $1 < q < \infty$, для будь-якої функції $f \in \widetilde{L}_q(\Gamma)$ справджується нерівність

$$\|S^F_n(\mathcal{K}f;\cdot)\|_{\Gamma,q} \le K_2(q)\|f\|_{\Gamma,q}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.27}$$

Аналогічними міркуваннями доходимо висновку про справедливість нерівності

$$\|\rho_n(\mathcal{K}f;\cdot)\|_{\Gamma,q} \le K_3(q)\|\rho_n(F;\cdot)\|_q, \tag{4.28}$$

де $\rho_n(F;t) = F(t) - S_{n-1}(F;t)$, $t \in \mathbb{R}$, а $S_{n-1}(F;t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k(F)e^{ikt}$, $a_k(F)$ — коефіцієнти Фур'є функції $F(t) = f(\Psi(e^{it}))$. Причому, зазначимо, якщо $f \in L^{\psi}_{\beta}\widetilde{L}_q(\Gamma)$, то $F \in L^{\psi}_{\beta}\widetilde{L}_q(0,2\pi)$.

У додачу до (4.28) стверджуємо: якщо $\Gamma \in RA_q$, $1 < q < \infty$, то для $f \in L_q(\Gamma)$ при $n \in \mathbb{N}$

$$E_n(\mathcal{K}f)_{\Gamma,q} \asymp \|\rho_n(\mathcal{K}f;\cdot)\|_{\Gamma,q}. \tag{4.29}$$

Справді, нерівність $E_n(\mathcal{K}f)_{\Gamma,q} \ll \|\rho_n(\mathcal{K}f;\cdot)\|_{\Gamma,q}$ очевидна. Далі, для довільного полінома p_{n-1} степеня $n-1$ справедливе співвідношення $S^F_{n-1}(p_{n-1};\cdot) = p_{n-1}(\cdot)$, яке є наслідком леми 3 в [20, с. 54]. А отже, якщо p^*_{n-1} — поліном найкращого наближення степеня $n-1$ функції $\mathcal{K}f$ в просторі $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$, то

$$\|\rho_n(\mathcal{K}f;\cdot)\|_{\Gamma,q} = \|\mathcal{K}f(\cdot) - p^*_{n-1}(\cdot) - S^F_{n-1}(\mathcal{K}f - p^*_{n-1};\cdot)\|_{\Gamma,q} \le$$

$$\le \|\mathcal{K}f(\cdot) - p^*_{n-1}(\cdot)\|_{\Gamma,q} + \|S^F_{n-1}(\mathcal{K}f - p^*_{n-1};\cdot)\|_{\Gamma,q} \ll E_n(\mathcal{K}f)_{\Gamma,q}.$$

Оцінки знизу в теоремі 4.3.3. Нехай для послідовності $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ і $n \in \mathbb{N}$ знайдеться таке число $k_n \in \mathbb{N}$, що

$$\nu(n) = \sup_{k \ge n} |\psi(k)| = |\psi(k_n)|. \tag{4.30}$$

Розглянемо функцію

$$f_n(\zeta) = a^{-1}_{k_n}\psi(k_n)\Phi^{k_n}(\zeta),\ \zeta \in \Gamma;\quad a_{k_n} := (2\pi)^{(q-p)/pq}\|\Phi^{k_n}\|_{\Gamma,q}. \tag{4.31}$$

Оскільки $[f_n]^\psi_\beta(\zeta) = e^{i\beta\pi/2}a^{-1}_{k_n}\Phi^{k_n}(\zeta)$, то

$$\|[f_n]^\psi_\beta\|_{\Gamma,p} = a^{-1}_{k_n}\|\Phi^{k_n}\|_{\Gamma,p} \le 1,$$

а отже $f_n \in L^\psi_{\beta,p}(\Gamma) \subset \widetilde{L}_q(\Gamma)$.

Далі, враховуючи, що $\mathcal{K}f_n(z) = a^{-1}_{k_n}\psi(k_n)F_{k_n}(z)$, $z \in \Omega$, і $\|F_{k_n}\|_{\Gamma,q} \ge C$ (див. нижче нерівність (4.38)), з огляду на співвідношення (4.30) маємо

$$\|\rho_n(\mathcal{K}f_n;\cdot)\|_{\Gamma,q} = \|f_n\|_{\Gamma,q} = a^{-1}_{k_n}|\psi(k_n)|\|F_{k_n}\|_{\Gamma,q} \gg \nu(n).$$

Звідси випливає оцінка знизу в (4.23).

Якщо ж для послідовності $\{\psi(k),\ k \in \mathbb{N}\}$ і $n \in \mathbb{N}$ немає такого $k_n \in \mathbb{N}$ при якому виконується (4.30), то внаслідок обмеженості множини $\{|\psi(k)|\}$ можна стверджувати, що

$$\nu(n) = \sup_{k \ge n} |\psi(k)| = \sup_{k \ge n}\{|\psi(k)|\} =: g_n.$$

В такому випадку існує послідовність k_{n_j}, $j \in \mathbb{N}$, така, що $k_{n_j} \ge n$ і числа $|\psi(k_{n_j})|$, не спадаючи, прямують до g_n при $j \to \infty$.

Покладемо

$$f_{n_j}(\zeta)=a_{k_{n_j}}^{-1}\psi(k_{n_j})\Phi_{k_{n_j}}(\zeta),\quad \zeta\in\Gamma;\quad a_{k_{n_j}}=(2\pi)^{(q-p)/pq}\|\Phi^{k_{n_j}}\|_{\Gamma,q}$$

і розглянемо множину $\Phi_n=\cup_j f_{n_j}$. Таким же способом як і для функції f, неважко показати, що для $j\in\mathbb{N}$ $f_{n_j}\in L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma)$. Отже, $\Phi_n\subset L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma)$, і оскільки $\|\rho_n(\mathcal{K}f_{n_j};\cdot)\|_{\Gamma,p}\gg|\psi(k_{n_j})|$, то

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma))_{\Gamma,q}\geq\sup_{f\in\Phi_n}\|\rho_n(\mathcal{K}f;\cdot)\|_{\Gamma,q}\gg\sup_{j\in\mathbb{N}}|\psi(k_{n_j})|\gg\nu(n),$$

тобто і в цьому випадку оцінка знизу в (4.23) справджується.

Оцінки знизу в теоремі 4.3.4. Достатньо для кожного $n\in\mathbb{N}$ знайти таку функцію $f_n^*\in L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma)$, що

$$E_n(\mathcal{K}f_n^*)_{\Gamma,q}\gg\nu(n)n^{\alpha},\ \alpha=(1/p-1/q)_+. \tag{4.32}$$

За такої мети, покладемо

$$g_n(\zeta)=\nu(n)t_{2n}(\zeta),\quad t_{2n}(\zeta)=\frac{1}{2}\sum_{n\leq|k|\leq 2n}\Phi^k(\zeta),\ \zeta\in\Gamma.$$

Тоді, очевидно,

$$[g]^{\psi}_{\beta}(\zeta)=\nu(n)\sum_{n\leq|k|\leq 2n}e^{i\beta\pi\,\mathrm{sgn}\,k/2}\frac{1}{\psi(|k|)}\Phi^k(\zeta). \tag{4.33}$$

Покладаючи $\zeta=\Psi(e^{it})$, маємо

$$T_{2n}(t)=t_{2n}(\Psi(e^{it})):=\sum_{k=n}^{2n}\cos\,kt,$$

і якщо $G_n(t):=g_n(\Psi(e^{it}))$, то згідно з означенням контурної $(\psi,\beta)-$похідної функції g_n можна записати $[g_n]^{\psi}_{\beta}(\Psi(e^{it}))=[G_n]^{\psi}_{\beta}(t)$. Далі зауважимо, що функції $G_n(t)$, $T_{2n}(t)$ і $[G_n]^{\psi}_{\beta}(t)$ тотожні відповідно функціям $f_n(t)$, $d_{2n}(t)$ і $[f_n]^{\psi}_{\beta}(t)$, визначеними в [118] співвідношеннями (42) і (43). Тому, з огляду на нерівності (45) з [118] маємо

$$\|[g_n]^{\psi}_{\beta}\|_{\Gamma,p}=\|[G_n]^{\psi}_{\beta}\|_p\leq C(p)\|T_{2n}\|_p=C(p)\|d_{2n}\|_p. \tag{4.34}$$

Проте, згідно з лемою 3 із [118], для кожного s, $1<s<\infty$, виконується порядкова рівність

$$\|d_{2n}\|_s\asymp n^{(s-1)/s}. \tag{4.35}$$

Отже, із (4.34) та (4.35) отримаємо

$$\|[g_n]^{\psi}_{\beta}\|_{\Gamma,p}\leq C_1(p)n^{(p-1)/p},$$

що вказує на те, що функція $f_n^*(\zeta) = C_1^{-1}(p)n^{(1-p)/p}g_n(\zeta)$, $\zeta \in \Gamma$ належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma) \subset \widetilde{L}_q(\Gamma)$.

Далі, з урахуванням (4.29) маємо

$$E_n(\mathcal{K}f_n^*)_{\Gamma,q} \geq C(q)\|\rho_n(\mathcal{K}f^*;\cdot)\|_{\Gamma,q} = C(q)\|Q_{2n}\|_{\Gamma,q}, \tag{4.36}$$

де

$$Q_{2n}(z) = \frac{1}{2}C_1^{-1}(p)\nu(n)n^{(1-p)/p}\sum_{k=n}^{2n}F_k(z). \tag{4.37}$$

Покладемо

$$q_n(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\frac{\sum_{k=n}^{2n}F_k(\Psi(\tau))}{\tau - w}d\tau, \quad w \in D.$$

Тоді $q_n(w) = \sum_{k=n}^{2n} w^k$, $w \in D$ (див., наприклад, [20, с. 59]) і з огляду на нерівність (4.26) маємо

$$\|q_n(w)\|_{T,q} \leq C_1(q)\left\|\sum_{k=n}^{2n}F_k(\Psi(\tau))\right\|_{T,q} = C_1(q)\left\|\sum_{k=n}^{2n}F_k(\zeta)\right\|_{\Gamma,q}. \tag{4.38}$$

З іншого боку, позначивши через $\widetilde{d}_{2n}$ функцію тригонометрично спряжену до d_{2n}, можна записати

$$\|q_n(e^{i\theta})\|_q = \left\|\sum_{k=n}^{2n}e^{ik\theta}\right\|_q =$$

$$= \|d_{2n}(\theta) + i\widetilde{d}_{2n}(\theta)\|_q = \left(\int\limits_0^{2\pi}|d_{2n}(\theta) + i\widetilde{d}_{2n}(\theta)|^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_0^{2\pi}|d_{2n}(\theta)|^q d\theta\right)^{\frac{1}{q}} = \|d_{2n}\|_q \geq C_2(q)n^{(q-1)/q} \tag{4.39}$$

(тут використано співвідношення $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \max\{|a|, |b|\}$, $a, b \in \mathbb{R}$). Поєднавши (4.38) та (4.39), отримаємо

$$\left\|\sum_{k=n}^{2n}F_k(\zeta)\right\|_{\Gamma,q} \geq C_2(q)n^{(q-1)/q}.$$

Нарешті, із (4.36), беручи до уваги (4.37), випливає

$$E_n(\mathcal{K}f_n^*)_{\Gamma,q} \geq C(p,q)\nu(n)n^{\alpha},$$

тобто маємо потрібну оцінку знизу в теоремі 4.3.4. ■

4.3.4 Доведення теореми 4.3.5

Допоміжні твердження. Позначимо через $\widetilde{P}$ множину таких послідовностей $\{\psi(k),\, k\in\mathbb{N}\}$, які при $n\in\mathbb{N}$ задовольняють умови

$$\sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\widetilde{\psi}_n^{-1}(k+1)-\widetilde{\psi}_n^{-1}(k)|\le\mathcal{K}\lambda^{-1}(n),$$

де

$$\widetilde{\psi}_n(k)=\begin{cases}\psi(k), & 1\le k\le n;\\ \psi(n), & k>n,\end{cases}$$

$$\lambda(n)=\lambda(\psi;n)=\inf_{k\le n}|\psi(k)|.$$

Зауважимо, що $\widetilde{P}\supset I_0$. Справді, якщо $\psi\in I_0$, то $\lambda(n)=\inf\limits_{k\le n}|\psi(k)|=\psi(n)$ і

$$\sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\widetilde{\psi}_n^{-1}(k+1)-\widetilde{\psi}_n^{-1}(k)|=\sup_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}:2^m\le n}\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\psi^{-1}(k+1)-\psi^{-1}(k)|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{n-1}|\psi^{-1}(k+1)-\psi^{-1}(k)|<\psi^{-1}(n)-\psi^{-1}(1)<\psi^{-1}(n)=\lambda^{-1}(n).$$

Має місце такий аналог нерівності Бернштейна для алгебраїчних поліномів степеня не вище $m-1$ із $\mathcal{P}_m$ у просторі $\widetilde{L}_p(\Gamma)$.

Лема 4.3.1. *Нехай* $\Gamma\in RA_p$, $1<p<\infty$ *і* $\psi\in\widetilde{P}$, $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді для* $P_n\in\mathcal{P}_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$ *справедлива нерівність*

$$\|[P_n]_\beta^\psi\|_{\Gamma,p}\le C(p)\lambda^{-1}(n)\|P_n\|_{\Gamma,p}. \tag{4.40}$$

Доведення леми 4.3.1. Нехай $T_n(\theta)=\sum_{k=-n}^n a_k e^{ik\theta}$ — довільний тригонометричний поліном порядку $2n+1$. У [117, с. 21] показано, що за умови $\psi\in\widetilde{P}$ справедлива нерівність

$$\|[T_n]_\beta^\psi\|_p\le C(p)\lambda^{-1}(n)\|T_n\|_p. \tag{4.41}$$

Тому у випадку, коли Γ — одиничне коло $|z|=1$, нерівність (4.40) очевидним чином випливає з (4.41).

Якщо Γ — довільна з.с.ж.к., яка належить множині RA_p, то діємо наступним чином. Розкладемо $P_n(z)$ по многочленах Фабера, які визначаються областю Ω:

$$P_n(z)=\sum_{k=0}^n d_kF_k(z), \tag{4.42}$$

де d_k — коефіцієнти Фабера функції $P_n(z)$, $z \in \overline{\Omega}$. Тоді для $w \in D$

$$\varphi(w) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_T \frac{P_n(\Psi(\tau))}{\tau - w} d\tau = \sum_{k=0}^{n} d_k w^k. \tag{4.43}$$

Покладемо $\|P_n\|_{\Gamma,p} =: V$. Це рівносильно тому, що

$$\|P_n(\Psi(\tau))\|_{T,p} = \|P_n(\Psi(e^{i\theta}))\|_p = V. \tag{4.44}$$

Із співвідношень (4.43) та (4.44) з огляду на нерівність (4.26) отримаємо $\|\varphi\|_{T,p} \leq C_1 V$, і оскільки для кола лема справджується, то

$$\|\varphi_\beta^\psi\|_{T,p} \leq C_2 \lambda^{-1}(n) V = C_2 \lambda^{-1}(n) \|P_n\|_{\Gamma,p}. \tag{4.45}$$

З іншого боку,

$$[P_n]_\beta^\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\beta\pi/2} \psi(k) d_k F_k(z),$$

а тому, беручи до уваги (4.1), можна записати

$$[P_n]_\beta^\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi_\beta^\psi(\Phi(\zeta))}{\zeta - z} d\zeta.$$

Далі, згідно з нерівністю (4.26)

$$\|[P_n]_\beta^\psi\|_{\Gamma,p} \leq C_3 \|\varphi_\beta^\psi(\Phi(\cdot))\|_{\Gamma,p} = C_3 \|\varphi_\beta^\psi\|_{T,p}. \tag{4.46}$$

Поєднавши співвідношення (4.45) та (4.46), отримаємо нерівність (4.40).

Лема 4.3.1 доведена. ♦

В подальшому також використовуються наступні важливі твердження.

Теорема про проектор [133, с. 207]. *Нехай X — нормований простір, L — підпростір, $W \subset L$ і $P : X \to L$ — неперервний лінійний проектор. Тоді*

$$d_n(W; X) \leq d_n(W; L) \leq \|P\| d_n(W; X),$$

де $\|P\|$ — норма оператора P.

Теорема M$_4$ [32, с. 49]. *Нехай $p_m \in \mathcal{P}_{m+1}$ і $1 < s < \infty$. Тоді*

$$\|p_m\|_{H_s} \asymp \left\{ \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^{m} \left| p_m \left[\exp\left(i \frac{2\pi j}{m+1} \right) \right] \right|^s \right\}^{\frac{1}{s}}. \tag{4.47}$$

Тут H_s, $1 < s < \infty$, — простір Харді аналітичних в D функцій (див. [31, с. 431], або [25, с. 388]).

Розглянемо лінійні оператори $\mathcal{F}_\Omega$ і $\mathcal{F}^\Omega$, які діють згідно з формулами

$$\mathcal{F}_\Omega[f](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\overline{f}(\Phi(\zeta))}{\zeta - z}d\zeta,\ f\in H_p,\ z\in\Omega,$$

$$\mathcal{F}^\Omega[g](w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{\overline{g}(\Psi(\tau))}{\tau - w}d\tau,\ g\in \widetilde{A}_p(\overline{\Omega}),\ w\in D,$$

де через $\overline{f}$ і $\overline{g}$ в підінтегральних виразах позначені граничні значення функцій $f\in H_p$ і $g\in \widetilde{A}_p(\overline{\Omega})$ відповідно.

Оператори $\mathcal{F}_\Omega$ і $\mathcal{F}^\Omega$ називають відповідно *перетворенням Фабера функцій із* H_p *і оберненим перетворенням Фабера функцій із* $\widetilde{A}_p(\overline{\Omega})$.

Твердження 4.3.1. *Нехай* Ω *— область обмежена кривою* $\Gamma\in RA_p$, $1<p<\infty$. *Тоді оператори* $\mathcal{F}_\Omega$ *і* $\mathcal{F}^\Omega$ *здійснюють ізоморфізм між підпросторами* $H_p\cap\mathcal{P}_m$ *і* $\widetilde{A}_p(\overline{\Omega})\cap\mathcal{P}_m$.

Доведення твердження 4.3.1. Спочатку зауважимо, що

$$\mathcal{F}_\Omega[w^k](z) = F_k(z),\quad k\in\mathbb{Z}_+. \tag{4.48}$$

Співвідношення (4.48) є простим наслідком інтегрального представлення (4.1) многочленів Фабера F_k. З іншого боку, з огляду на лему 3 в [20, с. 54]

$$\mathcal{F}^\Omega[F_k](w) = w^k,\ \ k\in\mathbb{Z}_+. \tag{4.49}$$

Із співвідношень (4.48) і (4.49), враховуючи, що відображення $\mathcal{F}_\Omega:\mathcal{P}_m\to\mathcal{P}_m$ бієктивне [20, с. 61], випливає, що оператори $\mathcal{F}_\Omega$ і $\mathcal{F}^\Omega$, визначені на лінійному просторі $\mathcal{P}_m$, є взаємно оберненими. Таке вже зазначалося у підрозділі 4.2.
Їх неперервність на вказаних у формулюванні твердження нормованих просторах є наслідком обмеженості при $1<q<\infty$ оператора Коші $\mathcal{K}:\widetilde{L}_q(\Gamma)\to\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ за умови, що $\Gamma\in RA_q$ (див., наприклад, [28], або нерівність (4.26)). Більше того, стосовно оператора $\mathcal{F}_\Omega$ можна стверджувати, що $\|\mathcal{F}_\Omega\|_{H_p\to\widetilde{A}_p(\overline{\Omega})} = K<\infty$ при $1<p<\infty$ для довільної спрямлювальної кривої $\Gamma=\partial\Omega$. ♦

Оцінка знизу у теоремі 4.3.5. Нехай $\psi\in I_{(1/p-1/q)_+}\cap P_{0,C}$. Очевидно, при $m\ge n$

$$d_n(L^\psi_{\beta,p}(\Omega);\widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))\ge d_n(L^\psi_{\beta,p}(\Omega)\cap\mathcal{P}_{m+1};\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})). \tag{4.50}$$

Візьмемо в якості підпростору L в теоремі про проектор простір $\mathcal{P}_{m+1}$, а в якості P оператор S_m^F. З огляду на нерівність (4.27) і лему 3 в [20, с. 54], оператор S_m^F є лінійним неперервним проектором з $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ в $\mathcal{P}_{m+1}$. Тому

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)\cap\mathcal{P}_{m+1};\widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))\geq\|S_m^F\|^{-1}d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)\cap\mathcal{P}_{m+1};\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})\cap\mathcal{P}_{m+1}). \qquad (4.51)$$

Поєднавши (4.50) та (4.51), отримаємо

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))\gg d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)\cap\mathcal{P}_{m+1};\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})\cap\mathcal{P}_{m+1}). \qquad (4.52)$$

Тепер, покладемо

$$(\mathcal{P}_{m+1})^{\psi}_{\beta,p}:=\Big\{p_m\in\mathcal{P}_{m+1}:\ \|[p_m]^{\psi}_{\beta}\|_{\Gamma,p}\leq 1\Big\}.$$

Тоді, згідно з нерівністю (4.26)

$$L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)\cap\mathcal{P}_{m+1}\supset K(q)(\mathcal{P}_{m+1})^{\psi}_{\beta,p},$$

де $K(q)$ — додатна стала, яка залежить від q, $1<q<\infty$ (вкладення слід розуміти в сенсі відповідного співвідношення між нормами елементів обох множин в просторі $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$). В свою чергу, внаслідок леми 4.3.1 справедливе вкладення

$$(\mathcal{P}_{m+1})^{\psi}_{\beta,p}\supset C_p^{-1}\psi(m)\widetilde{B}_p^{m+1}(\Gamma),$$

де $\widetilde{B}_p^{m+1}(\Gamma)=\{p\in\mathcal{P}_{m+1}:\ \|p\|_{\Gamma,p}\leq 1\}$ — одинична куля у просторі $\widetilde{A}_p(\overline{\Omega})\cap\mathcal{P}_{m+1}$. Таким чином,

$$L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)\cap\mathcal{P}_{m+1}\supset C_{p,q}\psi(m)\widetilde{B}_p^{m+1}(\Gamma),$$

а отже наслідком (4.52) є співвідношення

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))\gg\psi(m)d_n(\widetilde{B}_p^{m+1}(\Gamma);\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})\cap\mathcal{P}_{m+1}). \qquad (4.53)$$

Далі, за початкових умов на Γ оператори $\mathcal{F}_G$ і $\mathcal{F}^G$, визначені відповідно на лінійних просторах $\widetilde{A}_q(\overline{D})\cap\mathcal{P}_{m+1}$ і $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})\cap\mathcal{P}_m$, є взаємно оберненими і неперервними (див. твердження 4.3.1), причому, якщо

$$f(w)=\sum_{k=0}^{m}a_kw^k,$$

то

$$\mathcal{F}_G[f](z)=\sum_{k=0}^{m}a_kF_k(z).$$

А тому, використовуючи базові властивості колмогоровського поперечника [188], отримаємо

$$d_n(\widetilde{B}_p^{m+1}(\Gamma); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{P}_{m+1}) \gg \|\mathcal{F}_G\|^{-1} d_n(\widetilde{B}_p^{m+1}(T); \widetilde{A}_q(\overline{D}) \cap \mathcal{P}_{m+1}). \qquad (4.54)$$

Очевидно, простір $\widetilde{A}_q(\overline{D})$ збігається з простором Харді H_q, а тому з урахуванням (4.54) співвідношення (4.53) набуває вигляду

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg \psi(m) d_n(BH_p \cap \mathcal{P}_{m+1}; H_q \cap \mathcal{P}_{m+1}), \qquad (4.55)$$

де $BH_p = \Big\{f \in H_p : \|f\|_{H_p} \leq 1\Big\}$.

Розглянемо оператор

$$A : \mathcal{P}_{m+1} \ni p_m \quad \longrightarrow \quad Ap_m = \overline{p}_m := (p_m(\tau_1) \dots p_m(\tau_{m+1})) \in \mathbb{R}^{m+1},$$

де $\tau_j = i\frac{2\pi j}{m+1}$, $j = 1, 2, \dots, m+1$. Зрозуміло, що оператор A здійснює взаємно однозначне відображення між лінійними просторами $\mathcal{P}_{m+1}$ та $\mathbb{R}^{m+1}$ і, згідно з теоремою M_4 є гомеоморфізмом між банаховими просторами $H_q \cap \mathcal{P}_{m+1}$ та l_q^{m+1}. Образом компакту $BH_p \cap \mathcal{P}_m$ при відображенні A є компакт

$$K_p^m = \{\sigma \in l_p^{m+1} : \|\sigma\|_{l_p^{m+1}} \asymp (m+1)^{\frac{1}{p}}\}.$$

Тому, беручи до уваги, що для $p_m \in \mathcal{P}_{m+1}$

$$\|p_m\|_{H_q} \asymp (m+1)^{-\frac{1}{q}} \|\overline{p}_m\|_{l_q^{m+1}}, \qquad (4.56)$$

з урахуванням базових властивостей колмогоровського поперечника [188], можна стверджувати, що наслідком нерівності (4.55) є нерівність

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg \psi(m)(m+1)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} d_n(B_p^{m+1}; l_q^{m+1}),$$

де $B_p^s = \{\sigma \in l_p^s : \|\sigma\|_{l_p^s} \leq 1\}$.

Звідси, на основі результатів щодо оцінок поперечників $d_n(B_p^s; l_q^{m+1})$, $n < s$, $1 < p, q < \infty$ (див., наприклад, [133, с. 210] і посилання в ній на оригінальні роботи), покладаючи $m = 2n - 1$ і враховуючи, що $\psi \in P_{0,C}$, отримуємо оцінку знизу в теоремі 4.3.5.

Оцінка зверху в теоремі 4.3.5. У випадках $1 < p \leq q \leq 2$ і $1 < q \leq p < \infty$ оцінки поперечників $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))$ випливають із теорем 4.3.3 і 4.3.4 відповідно.

Нехай тепер $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ і $\psi \in I_{1/p+\varepsilon}$, де ε — як завгодно мале додатне число. Для довільної функції $f \in L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma)$ і $z \in \Omega$ покладемо

$$\varphi_0(z) = S_0^F(\mathcal{K}f; z),$$

$$\varphi_k(z) = S^F_{2^k-1}(\mathcal{K}f;z) - S^F_{2^{k-1}-1}(\mathcal{K}f;z),\ k \in \mathbb{N},$$

де, нагадаємо, $S^F_n(\mathcal{K}f;z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(\mathcal{K}f)F_k(z),\ n \in \mathbb{Z}_+,$ — частинна сума ряду Фабера функції $\mathcal{K}f$. Тоді при кожному $k \in \mathbb{N}$ справедливе співвідношення

$$\|\varphi_k\|_{\Gamma,p} \ll \psi(2^k). \tag{4.57}$$

Справді, враховуючи, що $I_{1/p+\varepsilon} \subset P^{(n)}_\alpha$ при довільному $\varepsilon > 0$, згідно з теоремою 4.3.4, маємо

$$\|\varphi_k\|_{\Gamma,p} \le \|S^F_{2^k-1}(\mathcal{K}f;\cdot) - \mathcal{K}f(\cdot)\|_{\Gamma,p} + \|S^F_{2^{k-1}-1}(\mathcal{K}f;\cdot) - \mathcal{K}f(\cdot)\|_{\Gamma,p} \ll$$
$$\ll \psi(2^k) + \psi(2^{k-1}) \ll \psi(2^k).$$

Остання нерівність випливає з умови належності послідовності $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$ множині $P_{0,C}$, елементи якої задовольняють співвідношення $\psi(n) \ll \psi(2n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Далі, оскільки згідно з теоремою 4.3.4

$$\lim_{l\to\infty} \left\| \mathcal{K}f(z) - \sum_{k=0}^{l} \varphi_k(z) \right\|_{\Gamma,p} = \lim_{l\to\infty} \left\| \mathcal{K}f(z) - S^F_{2^l-1}(\mathcal{K}f;z) \right\|_{\Gamma,p} = 0,$$

то

$$\mathcal{K}f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z),\ z \in G \tag{4.58}$$

(збіжність ряду слід розуміти в сенсі збіжності за нормою простору $\widetilde{A}_p(\overline{\Omega})$).

Таким чином, з (4.57) та (4.58) доходимо висновку про справедливість вкладення

$$L^\psi_{\beta,p}(\Omega) \subset \Big(C \bigcup_{k=0}^{\infty} Q^p_k\Big) \cup \{\text{const}\}, \tag{4.59}$$

де $Q^p_k = \{f \in \mathcal{P}_{2^k} : \|f\|_{\Gamma,p} \le \psi(2^k)\}$, а C — стала, яка можливо залежить від p і Γ.

Далі, нехай $(m_k)_{k=0}^{\infty}$ — послідовність цілих невід'ємних чисел така, що $m_0 = 1$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k \le m-1$, а $m \in \mathbb{N}$ — фіксоване. Тоді на основі однієї леми Майорова [52] і вкладення (4.59) маємо

$$d_m(L^\psi_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \sum_{j=0}^{\infty} d_{m_j}(Q^p_j; \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \le \sum_{j=0}^{\infty} \psi(2^j) d_{m_j}(\widetilde{B}^{2^j}_p(\Gamma); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})). \tag{4.60}$$

Як і для випадку оцінок знизу, зважаючи на взаємну оберненість і неперервність операторів $\mathcal{F}^G$ і $\mathcal{F}_G$, які визначені відповідно на банахових просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{P}_s$ і $\widetilde{A}_q(\overline{D}) \cap \mathcal{P}_s$, з врахуванням ізометрії просторів $\widetilde{A}_q(\overline{D})$ та H_q можна записати

$$d_{m_j}(\widetilde{B}^{2^j}_p(\Gamma); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \le d_{m_j}(\widetilde{B}^{2^j}_p(\Gamma); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{P}_{2^j}) \le$$

$$\leq \|\mathcal{F}^G\|^{-1} d_{m_j}(BH_p \cap \mathcal{P}_{2^j}); H_q \cap \mathcal{P}_{2^j})) = \|\mathcal{F}^G\|^{-1} d_{m_j}(\widetilde{B}_p^{2^j}(T); H_q \cap \mathcal{P}_{2^j}).$$

Далі, скориставшись "нерівністю різних метрик" С. М. Нікольського [57, с. 169]

$$\|t_s\|_{H_r} \ll s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \|t_s\|_{H_p}, \quad 1 \leq p \leq r \leq \infty,\ t_s \in \mathcal{P}_s,$$

згідно з якою

$$\widetilde{B}_p^{2^j}(T) \subset C 2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \widetilde{B}_2^{2^j}(T),$$

отримаємо

$$d_{m_j}(\widetilde{B}_p^{2^j}(T); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll 2^{j(1/p-1/2)} d_{m_j}(\widetilde{B}_2^{2^j}(T); H_q \cap \mathcal{P}_{2^j}). \tag{4.61}$$

Співставивши співвідношення (4.60) та (4.61), маємо

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(2^j) 2^{j(1/p-1/2)} d_{m_j}(\widetilde{B}_2^{2^j}(T); H_q \cap \mathcal{P}_{2^j}),$$

звідки, беручи до уваги (4.56), отримаємо нерівність

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(2^j) 2^{j(1/p-1/2)} d_{m_j}(B_2^{2^j}; l_q^{2^j}). \tag{4.62}$$

Далі, покладемо для довільного $n \geq 2$

$$m_j = \begin{cases} 2^j, & 0 \leq j < [\log_2 n]; \\ [2^{-j\delta} n^{1+\delta}], & [\log_2 n] \leq j \leq [(1+\delta^{-1}) \log_2 n]; \\ 0, & j > [(1+\delta^{-1}) \log_2 n]. \end{cases}$$

Тут $[x]$ — ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$, а δ — деяке додатне число (значення якого уточнюється пізніше), яке залежить від p, q і ε.

Покажемо, що $\sum\limits_{j=0}^{\infty} m_j \leq C_\delta n$. Отже,

$$\sum_{j=0}^{\infty} m_j = \sum_{j=0}^{[\log_2 n]-1} 2^j + \sum_{j=[\log_2 n]}^{[(1+\delta^{-1}) \log_2 n]} [2^{-j\delta} n^{1+\delta}] \leq$$

$$\leq (2^{\log_2 n} - 1) + n^{1+\delta} \sum_{j=[\log_2 n]}^{\infty} 2^{-j\delta} = (n-1) + n^{1+\delta} \frac{2^{-(\log_2 n - 1)\delta}}{1 - 2^{-\delta}} <$$

$$< n + n^{1+\delta} n^{-\delta} \frac{2^{\delta}}{1 - 2^{-\delta}} = C_\delta n.$$

Тепер, покладаючи $m = [C_\delta + 1] n$ при $n \geq 2$, отримаємо $\sum\limits_{j=0}^{\infty} m_j \leq m$.

Далі, відомо (див., наприклад, [133, с. 210]): якщо $2 \le p \le q < \infty$, $n < m$ і $\alpha = (1/p - 1/q)/(1 - 2/q)$, то

$$d_n(B_p^m; l_q^m) \asymp \min\{1; m^{2\alpha/q} n^{-\alpha}\},$$

а отже

$$d_n(B_2^m; l_q^m) \asymp m^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким чином, можна записати

$$d_{m_j}(B_2^{2^j}; l_q^{2^j}) = 0, \quad \text{якщо } 0 \le j < [\log_2 n],$$

і

$$d_{m_j}(B_2^{2^j}; l_q^{2^j}) \asymp \begin{cases} (m_j)^{-1/2} 2^{j/q}, & [\log_2 n] \le j \le [(1+\delta^{-1}) \log_2 n]; \\ 1, & j > [(1+\delta^{-1}) \log_2 n]. \end{cases}$$

В результаті, повертаючись до нерівності (4.62), маємо

$$d_m(L_{\beta,p}^{\psi}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \sum_{j=[\log_2 n]}^{[(1+\delta^{-1}) \log_2 n]} \psi(2^j) 2^{j/p} (m_j)^{-1/2} +$$

$$+ \sum_{j=[(1+\delta^{-1}) \log_2 n]}^{\infty} \psi(2^j) 2^{j(1/p - 1/q)} \le \sum_{j=[\log_2 n]}^{[(1+\delta^{-1}) \log_2 n]} \psi(2^j) 2^{j(1/p + \delta/2)} n^{-(1+\delta)/2} +$$

$$+ \sum_{j=[(1+\delta^{-1}) \log_2 n]}^{\infty} \psi(2^j) 2^{j(1/p - 1/q)} = S_1 + S_2 \tag{4.63}$$

Оцінимо кожний із доданків S_1 та S_2 в (4.63). Нехай задано $\varepsilon > 0$. Оскільки за умовою послідовність $\{\psi(n) n^{1/p+\varepsilon}, n \in \mathbb{N}\}$ не зростає, то при $j \in \mathbb{Z}_+$ і $k \in \mathbb{N}$ справджується співвідношення

$$\frac{\psi(2^{j+k}) 2^{(j+k)(1/p+\varepsilon)}}{\psi(2^j) 2^{j(1/p+\varepsilon)}} \le 1,$$

з якого випливає

$$\psi(2^{j+k}) \le \psi(2^j) 2^{-k(1/p+\varepsilon)},$$

а отже

$$\psi(2^{j+k}) 2^{(j+k)(1/p+\delta/2)} \le \psi(2^j) 2^{j(1/p+\delta/2)} 2^{k(1/p+\delta/2)} 2^{-k(1/p+\varepsilon)} =$$

$$= \psi(2^j) 2^{j(1/p+\delta/2)} 2^{-k(-\delta/2+\varepsilon)}.$$

Значить, якщо $\delta < 2\varepsilon$, то

$$S_1 = \sum_{j=[\log_2 n]}^{[(1+\delta^{-1})\log_2 n]} \psi(2^j) 2^{j(1/p+\delta/2)} n^{-(1+\delta)/2} \ll$$

$$\ll n^{-(1+\delta)/2} \psi(n/2) n^{1/p+\delta/2} \sum_{m=0}^{[\delta^{-1}\log_2 n]+1} 2^{-m(-\delta/2+\varepsilon)} \ll \psi(n) n^{1/p-1/2}. \qquad (4.64)$$

(в останній нерівності враховано, що для $\psi \in P_{0,C}: \quad \psi(n) \le C\psi(2n), \ n \in \mathbb{N}$).

Оцінимо доданок S_2. Аналогічно попередньому, спочатку встановлюємо, що

$$\psi(2^{j+k}) 2^{(j+k)(1/p-1/q)} \le \psi(2^j) 2^{j(1/p-1/q)} 2^{-k(1/q+\varepsilon)}.$$

Як наслідок, вважаючи, що послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$ продовжена неперервним чином на $\mathbb{R}$ до функції $\psi(v)$, $v \ge 1$, наприклад, шляхом послідовного з'єднання точок $(k, \psi(k))$ відрізками прямої, маємо

$$S_2 = \sum_{j=[(1+\delta^{-1})\log_2 n]}^{\infty} \psi(2^j) 2^{j(1/p-1/q)} \ll$$

$$\ll \psi(2^{[(1+\delta^{-1})\log_2 n]+1}) 2^{([(1+\delta^{-1})\log_2 n]+1)(1/p-1/q)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(1/q+\varepsilon)} \ll$$

$$\ll \psi(n^{1+\delta^{-1}}) n^{(1+\delta^{-1})(1/p-1/q)} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k(1/q+\varepsilon)} \ll$$

$$\ll \psi(n^{1+\delta^{-1}}) n^{(1+\delta^{-1})(1/p+\varepsilon)} n^{-(1+\delta^{-1})(1/q+\varepsilon)} \ll$$

$$\ll \psi(n) n^{1/p+\varepsilon} n^{-(1+\delta^{-1})(1/q+\varepsilon)} = \psi(n) n^{1/p-1/2} n^{-(1+\delta^{-1})(1/q+\varepsilon)} n^{1/2+\varepsilon}$$

Тепер, вибравши таке додатне число δ, що $(1+\delta^{-1})(1/q+\varepsilon) > 1/2+\varepsilon$, тобто $\delta < (1/q+\varepsilon)(1/2-1/q)$, отримаємо

$$S_2 \ll \psi(n) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}. \qquad (4.65)$$

Таким чином, якщо ε, p і q такі, що $0 < \delta < \min\{2\varepsilon; (1/q+\varepsilon)/(1/2-1/q)\}$, то мають місце співвідношення (4.64) та (4.65), з яких із урахуванням (4.63) випливає

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(n) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Враховуючи, що $m = [C^*_\delta]n$ і $C^*_\delta > 1$, при $\psi \in P_{0,C}$ маємо

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi([C^*_\delta]^{-1} n) n^{1/p-1/2} \ll \psi(n) n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Оцінки зверху в теоремі 4.3.5 у випадку $1 < p \le 2 \le q < \infty$ встановлені.

Оцінка зверху величин $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))$ у випадку $2 \le p \le q < \infty$ випливає із такої для випадку $1 < p \le 2 \le q < \infty$. Справді, достатньо зауважити, що $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega) \subset L^{\psi}_{\beta,2}(\Omega)$ при $2 \le p < \infty$ і тоді

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \le d_n(L^{\psi}_{\beta,2}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(n).$$

Теорема 4.3.5 доведена. ■

Зауваження 4.3.1. *У випадку* $1 < p = q < \infty$ *точні за порядком оцінки поперечників* $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))$ *можна отримати за допомогою методу, який базується на застосуванні теореми В. М. Тіхомірова про поперечник кулі і леми 4.3.1 (для оцінки знизу) з використанням теореми 4.3.2 (для оцінки зверху) для* $\psi \in P_0^{(n)}$*, а зокрема, і для* $\psi \in I_0$.

Зауваження 4.3.2. *Оцінки знизу в теоремі 4.3.5 справедливі і у припущені* $\psi \in P_{\alpha}^{(n)} \cap P_{0,C}$*, де* $\alpha = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$*,* $1 < p, q < \infty$.

4.4 Наближення класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$

У просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ *досліджуються апроксимаційні властивості класів* $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ *за таких обмежень на послідовність* $\{\psi(k), k \in \mathbb{N}\}$, *коли функції з* $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ *аналітично продовжуються поза* Γ *в деяку обмежену область* $\Omega' \supset \Omega$.

4.4.1 Основний результат

Покладемо

$$\mathfrak{M}'_{\infty} = \{\psi \in I_0 : \ (\exists\, K > 0\, \forall t \ge 1 : \eta(t) - t \le K)\},$$

де I_0 — множина додатних спадних до нуля на $[1, \infty)$ функцій; $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, ψ^{-1} — функція обернена до ψ. Нехай

$$\mathfrak{N}_R := \left\{\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty} : \ \lim_{k\to\infty} \ln|\psi(k)|^{-1/k} = R > 1\right\}$$

і

$$\mathfrak{N}_{\infty} := \left\{\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty} : \ \lim_{k\to\infty} \ln|\psi(k)|^{-1/k} = \infty\right\}.$$

За припущення $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$, виходячи із властивостей перетворення Фабера $\mathcal{F}_{\Omega}$ для аналітичних в Ω функцій (див. твердження 4.3.1) і умов збіжності рядів по многочленах Фабера F_k, які визначаються областю Ω (див., наприклад, [123, розділи VI, VII]), можна показати, що:

i) $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ — множина функцій, аналітичних в області $\Omega_R \supset \Omega$, які обмежені кривою $\Gamma_R = \{z : |\Phi(z)| = R\}$, якщо $\Psi \in \mathfrak{N}_R$, наприклад, $\psi(t) = R^{-t}$, $R > 1$;

ii) $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ — множина цілих функцій, якщо $\psi \in \mathfrak{N}_\infty$, наприклад, $\psi(t) = R^{-t^r}$, R, $r > 1$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 4.4.1. *Нехай* Ω *— область обмежена кривою* $\Gamma \in RA_q$, $q > 1$. *Тоді, якщо* $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, *то при* $1 < p < \infty$

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \asymp \psi(n) \tag{4.66}$$

4.4.2 Допоміжні твердження

Одне співвідношення для функцій з множини $\mathfrak{M}'_\infty$.

Лема 4.4.1. *Якщо* $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, *то*

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\psi(l)} \ll \frac{1}{\psi(n)}. \tag{4.67}$$

Доведення леми 4.4.1. Для $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ згідно з означенням існує така додатна стала K, що $\eta(t) - t \le K$ при $t \ge 1$ (надалі вважаємо, що K — ціле). Нехай $n \ge K$ — довільне фіксоване число і $n_0 = [n/K] + 1$, де $[x]$ — ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$ (зрозуміло, у такому випадку $(n_0 - 1)K \le n < n_0 K$). Оскільки, очевидно, $\underbrace{\eta(\eta(\ldots\eta(t)))}_{m\,\text{разів}} \le mK$ для будь-якого $m \in \mathbb{N}$, то $2^{-m}\psi(t) \ge \psi(t + mK)$, зокрема,

$$\psi(rK) \ge 2^{s-r}\psi(sK), \quad s, r \in \mathbb{N},\ s \ge r.$$

Беручи до уваги цю нерівність, отримаємо

$$\psi(n)\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\psi(l)} < 2K + \psi((n_0-1)K)\sum_{l=K}^{(n_0-1)K}\frac{1}{\psi(l)} \le$$

$$\le 2K + \psi((n_0-1)K)\sum_{i=1}^{n_0-2}\sum_{l=iK}^{(i+1)K}\frac{1}{\psi(l)} < 2K + (K+1)\sum_{i=1}^{n_0-2}\frac{\psi((n_0-1)K)}{\psi((i+1)K)} <$$

$$< 2K + (K+1)\sum_{i=1}^{n_0-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_0-2-i} \le C,$$

звідки випливає співвідношення (4.67). ♦

Про властивості оператора Фур'є S_n^F. У наступному твердженні встановлюються деякі властивості оператора S_n^F, який функції $f \in \widetilde{A}_p(\overline{\Omega})$ ставить у відповідність частинну суму порядку n її ряду Фабера.

Твердження 4.4.1. *Нехай Ω — область, обмежена кривою $\Gamma \in RA_p$, $1 < p < \infty$. Тоді, якщо $m \le n+1$, то S_n^F — проектор $\widetilde{A}_p(\overline{\Omega})$ на $\widetilde{A}_p(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{P}_m$, тобто,*

i) для $p_m \in \mathcal{P}_m : S_n^F(p_m) = p_m$;

ii) $\left\|S_n^F\right\|_{\widetilde{A}_p(\overline{\Omega}) \to \widetilde{A}_p(\overline{\Omega})} < C$, де C — стала, яка не залежить від n.

Доведення твердження 4.4.1. Нехай $p_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k z^k$ — довільний поліном. Тоді

$$p_m(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(p_m) F_k(z),$$

де F_k, $k = 0, 1, \ldots$, — многочлени Фабера для області Ω, а $a_k(p_m)$ — коефіцієнти Фабера функції p_m. А отже, твердження i) є безпосереднім наслідком рівності [20, с. 54, лема 3]

$$a_k(F_l) = \begin{cases} 0, & k \ne l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Для доведення твердження ii) зауважимо, що для $f \in \widetilde{A}_p(\overline{\Omega})$ (див. (4.48) та (4.49))

$$S_n^F(f; z) = \mathcal{F}_\Omega[Q_n](z),$$

де $Q_n(w) = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) w^k$, а $a_k(f)$ — коефіцієнти Фабера функції f. Тому, згідно з твердженням 4.3.1

$$\left\|S_n^F(f; \cdot)\right\|_{\Gamma,p} \le C_1 \|Q_n\|_{T,p}. \tag{4.68}$$

Оскільки $Q_n(\cdot)$ — частинна сума ряду Фур'є функції $f \circ \Psi \in L_p(T)$, то з огляду на обмеженість оператора Фур'є $S_n : L_p(T) \to L_p(T)$, $1 < p < \infty$:

$$\|Q_n\|_{T,p} \le C_2 \|f \circ \Psi\|_{T,p} = C_2 \|f\|_{\Gamma,p}. \tag{4.69}$$

Із співвідношень (4.68) та (4.69) отримуємо ii). ♦

Аналог однієї нерівності С. М. Нікольського. С. М. Нікольський [56] встановив співвідношення, яке пов'язує норми довільного тригонометричного полінома $t_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}$ у просторах $L_r(0, 2\pi)$ і $L_s(0, 2\pi)$:

$$\|t_n\|_s \ll n^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \|t_n\|_r, \quad 1 \le r < s \le \infty.$$

Посиленим варіантом цього співвідношення є нерівність

$$\|t_{n_1,n_2}\|_s \le C(n_2-n_1)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}\|t_{n_1,n_2}\|_r, \quad 1\le r<s\le\infty. \tag{4.70}$$

де t_{n_1,n_2} — довільний поліном вигляду

$$t_{n_1,n_2}(x)=\sum_{|k|\in[n_1,\,n_2]} c_k e^{ikx}, \ \ 0\le n_1<n_2,$$

а C — деяка стала, яка не залежить від n_1 і n_2.

В подальшому використовується саме нерівність (4.70), хоча варто зазначити, що має місце аналог цієї нерівності також і для алгебраїчних поліномів вигляду

$$P_{n_1,n_2}(z)=\sum_{k=n_1}^{n_2} c_k z^k,\ 0\le n_1\le n_2,\ z\in\mathbb{C}.$$

Множину таких поліномів позначимо через $\mathcal{P}_{n_1,n_2}$.

Твердження 4.4.2. *Нехай* Ω *— область, обмежена кривою* $\Gamma\in RA_r$, $1<r<s<\infty$ *і* $P_{n_1,n_2}\in\mathcal{P}_{n_1,n_2}$. *Тоді*

$$\|P_{n_1,n_2}\|_{\Gamma,s}\le C(n_2-n_1)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}\|P_{n_1,n_2}\|_{\Gamma,r}. \tag{4.71}$$

Для доведення (4.71) достатньо зауважити, що довільний поліном P_{n_1,n_2} можна однозначно подати у вигляді скінченної суми з многочленами Фабера F_k для області Ω: $P_{n_1,n_2}(z)=\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k F_k(z)$ і, якщо $\widetilde{t}_{n_1,n_2}(w):=\sum_{k=n_1}^{n_2} a_k w^k$, то згідно з твердженням 4.3.1 (з врахуванням співвідношень (4.48) та (4.49)) маємо

$$C_1\left\|\widetilde{t}_{n_1,n_2}(w)\right\|_{T,\nu}\le\|P_{n_1,n_2}(z)\|_{\Gamma,\nu}\le C_2\left\|\widetilde{t}_{n_1,n_2}(w)\right\|_{T,\nu},\ 1<\nu<\infty, \tag{4.72}$$

де C_1 і C_2 — додатні сталі, які не залежать від n_1 і n_2.

Поєднавши співвідношення (4.70) та (4.72), приходимо до висновку про справедливість (4.71). ♦

4.4.3 Доведення теореми 4.4.1

Оцінки знизу. Послідовне застосування теореми про проектор (з врахуванням твердження 4.4.1) і твердження 4.3.1 дозволяє аналогічно, як при доведенні оцінок знизу в теоремі 4.3.5, отримати базове для оцінок знизу поперечника співвідношення

$$d_n(L^\psi_{\beta,p}(\Omega);\widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))\gg d_n(L^\psi_{\beta,p}(D)\cap\mathcal{P}_m;H_q\cap\mathcal{P}_m),$$

або

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))\gg d_n(L^{\psi}_{0,p}(T)\cap\mathcal{P}_m;L_q(T)\cap\mathcal{P}_m),\quad m\geq n. \tag{4.73}$$

Спочатку розглянемо випадок, коли $q=2$.

Нехай $\tau=\{\tau_s\}_{s=0}^n$ — довільна ортонорномована система в $L_2(T)\cap\mathcal{P}_m$. Позначивши через (f,τ_s) коефіцієнти Фур'є функції f по системі τ, тобто

$$(f,\tau_s):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} f(w)\overline{\tau_s(w)}dw.$$

З розкладів

$$w^k=\sum_{s=0}^{n}(w^k,\tau_s)\tau_s(w),\quad k=0,1,\ldots,n, \tag{4.74}$$

$$\tau_l(w)=\sum_{k=0}^{n}(\tau_l,w^k)w^k,\quad l=0,1,\ldots,n, \tag{4.75}$$

отримаємо

$$\sum_{k=0}^{n}|(w^k,\tau_s)|^2=\sum_{s=0}^{n}|(w^k,\tau_s)|^2=1. \tag{4.76}$$

Покладемо $S_k(f;\tau;w):=\sum\limits_{s=0}^{k}(f,\tau_s)\tau_s(w)$ та $a_s^k:=(w^k,\tau_s)$. Тоді, при $k=0,1,\ldots,n$

$$\left\|w^k-S_{n-1}(w^k;\tau;w)\right\|^2_{T,2}=\left\|w^k-\sum\nolimits_{s=0}^{n-1}a_s^k\tau_s(w)\right\|^2_{T,2}=|a_n^k|^2. \tag{4.77}$$

Розглянемо функцію

$$f_k(w)=\begin{cases}\psi(k)w^k, & k=1,2,\ldots,n;\\ \psi(1), & k=0.\end{cases}$$

Очевидно, $f_k\in L^{\psi}_{0,p}(T)$ для будь-якого $k=0,1,\ldots,n$ і

$$\sigma_k:=\|f_k-S_{n-1}(f_k;\tau;w)\|^2_{T,2}=\psi^2(k)|a_n^k|^2.$$

Покажемо, що існує k, $0\leq k\leq n$ і додатне число C такі, що

$$\sigma_k\geq C\psi^2(n) \tag{4.78}$$

(вважаємо, що $\psi(0)=\psi(1)$).

Припустимо, що це не так. Тоді

$$1 = \sum_{k=0}^{n} |a_n^k|^2 \le \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{\psi^2(k)} \le C\psi^2(n) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\psi^2(k)} \tag{4.79}$$

для будь-якої додатної сталої C. Але, згідно з лемою 4.4.1, для деякого додатного числа C_0: $\psi^2(n)\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{\psi^2(k)} < C_0$. Тому при $0 < C < 1/C_0$ співвідношення (4.79) суперечливе, що і доводить справедливість (4.78).

Із співвідношення (4.78) при будь-якому p, $1 < p < \infty$ випливає оцінка

$$d_n(L^{\psi}_{0,p}(T) \cap \mathcal{P}_m; L_2(T) \cap \mathcal{P}_m) \gg \psi(n),$$

поєднуючи яку з (4.73), отримаємо

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg \psi(n)$$

при $q = 2$, а з урахуванням вкладення $\widetilde{A}_2(\overline{\Omega}) \supset \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$, $2 \le q < \infty$ можна стверджувати, що така оцінка справедлива і у випадку $1 < p < \infty$, $2 \le q < \infty$.

До такого ж висновку приходимо у випадку $1 < p < \infty$, $1 < q < 2$. Справді, нехай, $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — довільна ортонормована система з простору $\mathcal{P}_{n+1}$. Тоді, поклавши $\varphi_n^*(w) = w^n$, $w \in D$, внаслідок обмеженості оператора Фур'є $S_n : L_q(T) \to L_q(T)$ (див. твердження 4.4.1 у випадку $\Gamma = T$) і застосування нерівності (4.70), маємо

$$\sup_{f \in L^{\psi}_{0,p}(T)\cap\mathcal{P}_{n+1}} \inf_{c_i} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i \right\|_{T,q} \gg$$

$$\gg \sup_{f \in L^{\psi}_{0,p}(T)\cap\mathcal{P}_{n+1}} \inf_{c_i} \left\| (S_n - S_{n-1})[f] - \sum_{i=1}^{n} c_i (S_n - S_{n-1})[\varphi_i] \right\|_{T,q} \gg$$

$$\gg \sup_{f \in L^{\psi}_{0,p}(T)\cap\mathcal{P}_{n+1}} \inf_{c} \| f - (c\varphi_n^* + (S_{n-1})[f]) \|_{T,2} \gg$$

$$\gg d_n(L^{\psi}_{0,p}(T) \cap \mathcal{P}_{n+1}; L_2(T) \cap \mathcal{P}_{n+1}) \gg \psi(n),$$

тобто

$$d_n(L^{\psi}_{0,p}(T) \cap \mathcal{P}_{n+1}; L_q(T) \cap \mathcal{P}_{n+1}) \gg \psi(n)$$

при $1 < p < \infty$, $1 < q < 2$. Поєднавши цю нерівність із співвідношенням (4.73), при таких обмеженнях на параметри p і q отримаємо

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg \psi(n).$$

Зауваження 4.4.1. *У випадку* $1 < p \le q < \infty$ *оцінку знизу в теоремі 4.4.1 можна отримати застосовуючи інші міркування. А саме, достатньо скористатися раніше встановленою автором в [61] оцінкою* $d_n(L^\psi_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_p(\overline{\Omega})) \asymp \psi(n)$ *при* $1 < p < \infty$ *і* $\psi \in I_0$.

Оцінки зверху в теоремі 4.4.1 випливають з оцінок зверху для точних верхніх граней найкращих наближень алгебраїчними поліномами степеня $n-1$ по множині $L^\psi_{\beta,p}(\Omega)$ у просторі $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$, адже має місце наступне твердження.

Теорема 4.4.2. *Нехай* Ω — *область обмежена кривою* $\Gamma \in RA_q$, $1 < p, q < \infty$ *і* $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$E_n(L^\psi_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \psi(n). \tag{4.80}$$

Доведення теореми 4.4.2. Оцінка зверху в (4.80) за умови $\Gamma \in RA_q$ є наслідком співвідношення

$$E_n(\mathcal{K}f)_{\Gamma,q} \asymp \|\rho_n(\mathcal{K}f;\cdot)\|_{\Gamma,q} \ll \|\rho_n(F;\cdot)\|_{T,q}, \tag{4.81}$$

де $f \in \widetilde{L}_q(\Gamma)$, а $F = f \circ \Psi$, і оцінок величин $\|\rho_n(F;\cdot)\|_{T,q}$ у випадку $F \in L^\psi_{\beta,p}(T)$, $\psi \in \mathfrak{M}'_\infty$ [114, розділ II, § 6].

Оцінка знизу в теоремі 4.4.2 випливає очевидним чином із встановленої оцінки знизу величини $d_n(L^\psi_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))$, проте її можна отримати і безпосередньо.

Теорема 4.4.2, а разом з нею і теорема 4.4.1 доведені. ■

Зауваження 4.4.2. *У випадку* $1 < p \le q < \infty$ *за дещо більш жорстких умов на послідовність* $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$ *теорема 4.4.1 доведена в* [62].

4.5 Наближення класів $L^\psi_{\beta,p}(\Omega)$ у просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ у випадку, коли $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$

Як і в попередньому підрозділі, основний результат даного підрозділу — оцінки колмогоровських поперечників класів $L^\psi_{\beta,p}(\Omega)$ *у просторі* $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$. *Відмінність у даному випадку полягає в обмеженнях на послідовність* $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$, *яка визначає клас* $L^\psi_{\beta,p}(\Omega)$. *У шкалі класів* $L^\psi_{\beta,p}(\Omega)$ *виділено множини, які в розумінні оцінок їх наближення на* $\overline{\Omega}$ n*-вимірними підпросторами займають проміжне положення між класами функцій, що аналітично продовжуються з області* Ω *через її границю (див. підрозділ 4.4) і класами функцій, які є аналітичними в* Ω *і мають визначену "середню" ступінь гладкості на границі області* Ω, *якщо гладкість виражати в термінах властивостей або звичайних похідних [16] або узагальненої* (ψ, β)*-похідної функції . У викладі матеріалу даного підрозділу збережені всі запроваджені до цього позначення і означення.*

4.5.1 Основний результат

Через I^a позначимо таку множину функцій s:

$$I^a := \{s: \ \ (\exists C > 0\, \forall t_1,\, t_2,\, 1 \le t_1 \le t_2 : \, s(t_1) \le Cs(t_2))\}$$

і покладемо

$$\mathfrak{M}''_\infty = \left\{\psi \in I_0: \ \ \eta(t) - t \in I^a,\, \frac{t}{\eta(t) - t} \uparrow \infty, t \to \infty\right\},$$

де, нагадаємо, $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$; ψ^{-1} — функція обернена до ψ. Зокрема, до множини $\mathfrak{M}''_\infty$ належить функція $\psi(t) = e^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$.

Теорема 4.5.1. *Нехай Ω — область, обмежена кривою $\Gamma \in RA_q$, $q > 1$. Тоді, якщо $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$ і $\beta \in \mathbb{R}$, то*

$$d_n(L^\psi_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \asymp \begin{cases} \psi(n)\, (\eta(n) - n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, & 1 < p \le q \le 2, \\ \psi(n), & 2 \le p \le q < \infty, \\ \psi(n), & 2 \le q \le p < \infty, \\ \psi(n)\, (\eta(n) - n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2 \le q < \infty. \end{cases} \tag{4.82}$$

Зауваження 4.5.1. *У частковому випадку М. З. Двєйрін [29] довів рівність*

$$d_n(FH^{\overline{K}_1}_{p,K_1}; H_p) = R^{-n^r}, \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ 1 \le p \le \infty, \ \ 1/2 \le r \le 1, \ \ R > 1,$$

де $FH^{\overline{K}_1}_{p,K_1}$ — клас аналітичних в $D = \{w: \, |w| < 1\}$ функцій, що означаються через згортку Адамара, і який тотожній класу $L^\psi_{0,p}(D)$ при $\psi(t) = R^{-t^r}$, $R > 1$. При $r = 1$ результат М. З. Двєйріна узгоджується з теоремою 4.4.1.

Зауваження 4.5.2. *Якщо $\psi(t) = R^{-t^r}$, $R > 1$, $0 < r < 1$, то $\eta(n) - n \asymp n^{1-r}$.*

4.5.2 Допоміжне твердження

Побудуємо послідовність $\{\mathcal{N}_j,\, j \in \mathbb{N}\}$ натуральних чисел за наступною рекурентною схемою: покладемо $\mathcal{N}_1 = 1$, а $\mathcal{N}_{k+1} = [\eta(\mathcal{N}_k)] + 1$, $k = 1, 2, \ldots$, де $[x]$ позначає цілу частину числа $x \in \mathbb{R}$.

Твердження 4.5.1. *Якщо $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, то*

$$\psi(\mathcal{N}_k) \asymp \psi(\mathcal{N}_{k+1}). \tag{4.83}$$

Доведення твердження 4.5.1. Співвідношення $\psi(\mathcal{N}_k) \gg \psi(\mathcal{N}_{k+1})$ — тривіальне: для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ маємо $\psi(\mathcal{N}_{k+1}) \leq \psi(\eta(\mathcal{N}_k)) = \psi(\mathcal{N}_k)/2$.

Доведення співвідношення $\psi(\mathcal{N}_k) \ll \psi(\mathcal{N}_{k+1})$ також не складне. Оскільки для кожного $k \in \mathbb{N}$

$$0 < \psi(\mathcal{N}_{k+1}) - \psi(\mathcal{N}_k) \leq 1 \tag{4.84}$$

і $\eta(t)-t \geq (\eta(1)-1)/C = C^*$ при $t \geq 1$, то покладаючи $r = [1/C^*]+1$ і $n_1 = \eta(\mathcal{N}_k)$, $n_j = \eta(n_{j-1})$, $j = 2, 3, \ldots$, отримаємо

$$n_{r+1} - n_1 = (n_{r+1} - n_r) + (n_r - n_{r-1}) + \ldots + (n_2 - n_1) \geq rC^* \geq 1. \tag{4.85}$$

Із (4.84) та (4.85) випливає $n_{r+1} > \mathcal{N}_{k+1}$ при будь-якому $k \in \mathbb{N}$ (r не залежить від k) і відповідно — $\psi(n_{r+1}) \leq \psi(\mathcal{N}_{k+1})$. Проте, очевидно, $\psi(n_{r+1}) = \psi(\mathcal{N}_k)/2^r$, а отже $\psi(\mathcal{N}_k) \ll \psi(\mathcal{N}_{k+1})$. ♦

4.5.3 Доведення теореми 4.5.1

Оцінки знизу. Спершу зауважимо, що співвідношення (4.82) достатньо довести тільки для n, які є членами послідовності $\{\mathcal{N}_j,\, j \in \mathbb{N}\}$, визначеної в доведенні твердження 4.5.1. Справді, нехай задано довільне $n \in \mathbb{N}$. Підберемо таке натуральне число k, що $\mathcal{N}_k \leq n < \mathcal{N}_{k+1}$. Тоді, з огляду на твердження 4.5.1 $\psi(\mathcal{N}_k) \leq C_1\psi(n)$ і $\psi(\mathcal{N}_{k+1}) \geq C_2\psi(n)$. Далі, на підставі нерівностей

$$\frac{1}{K} \leq \frac{\eta(l)-l}{\eta(m)-m} \leq K, \quad K > 1, \tag{4.86}$$

де $m \in \mathbb{N}$ — довільне, $l \in [m, \eta(m)]$ (див. [114, с. 186], співвідношення (5.6)), можна записати

$$\eta(\mathcal{N}_k) - \mathcal{N}_k \leq K(\eta(n) - n).$$

Безпосередньо в означенні множини $\mathfrak{M}''_\infty$ закладена нерівність

$$\eta(\mathcal{N}_{k+1}) - \mathcal{N}_{k+1} \geq C(\eta(n) - n),$$

де C — стала, яка не залежить від n.
Співставивши останні дві нерівності із співвідношенням

$$d_{\mathcal{N}_{k+1}}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \leq d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \leq d_{\mathcal{N}_k}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})),$$

доходимо висновку про справедливість співвідношення (4.82) для всіх $n \in \mathbb{N}$ у припущені, що воно виконується для $n = \mathcal{N}_j$, $j = 1, 2, \ldots$.

Враховуючи викладене, доведемо спочатку оцінку знизу в (4.82) для випадку $q = 2$. Згідно із співвідношенням (4.73) маємо

$$d_{\mathcal{N}_j}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_2(\overline{\Omega})) \gg d_{\mathcal{N}_j}(L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}; L_2(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}), \tag{4.87}$$

де, нагадаємо, $\mathcal{P}_m$ — простір алгебраїчних поліномів степеня $m-1$.
Подальша схема доведення схожа на ту, яка застосована для встановлення оцінок знизу величин $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))$ при $q = 2$ в доведенні теореми 4.4.1.

Нехай зафіксоване $j \in \mathbb{N}$ і $\tau = \{\tau_s\}_{s=0}^{\mathcal{N}_{j+1}}$ — довільна ортонормована система функцій в $L_2(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}$, а

$$S_k(f; \tau; w) := \sum_{s=0}^{k} (f, \tau_s)\tau_s(w),$$

де (f, τ_s) — коефіцієнти Фур'є функції f за системою τ.
Маємо

$$w^k = \sum_{s=0}^{\mathcal{N}_{j+1}} (w^k, \tau_s)\tau_s(w), \ k = 0, 1, 2, \ldots, \mathcal{N}_{j+1},$$

$$\tau_l(w) = \sum_{k=0}^{\mathcal{N}_{j+1}} (\tau_l, w^k)w^k, \ l = 0, 1, 2, \ldots, \mathcal{N}_{j+1},$$

і

$$\sum_{k=0}^{\mathcal{N}_{j+1}} |a_s^k|^2 = \sum_{s=0}^{\mathcal{N}_{j+1}} |a_s^k|^2 = 1,$$

де $a_s^k := (w^k, \tau_s)$. Відстань у просторі $L_2(T)$ між функцією w^k, $w \in T$ і її частинною сумою Фур'є порядку $\mathcal{N}_j - 1$ за системою τ легко обчислюється:

$$\left\| w^k - \sum_{s=0}^{\mathcal{N}_j - 1} a_s^k \tau_s(w) \right\|_{T,2}^2 = \left\| \sum_{s=\mathcal{N}_j}^{\mathcal{N}_{j+1}} a_s^k \tau_s(w) \right\|_{T,2}^2 = \sum_{s=\mathcal{N}_j}^{\mathcal{N}_{j+1}} |a_s^k|^2, \quad k = 0, 1, \ldots, \mathcal{N}_{j+1}. \tag{4.88}$$

Розглянемо функції

$$f_l^{(1)}(w) = \Delta_l^{-1/2} \sum_{k \in I_l} \psi(k) w^k, \quad l = 0, 1, \ldots, j,$$

для $2 \le p < \infty$ і

$$f_l^{(2)}(w) = \Delta_l^{1/p-1} \sum_{k \in I_l} \psi(k) w^k, \quad l = 0, 1, \ldots, j,$$

для $1 < p \leq 2$, де $I_l = (\mathcal{N}_l, \mathcal{N}_{l+1}]$, $l = 1, 2, \ldots, j$, $\Delta_l = \mathcal{N}_{l+1} - \mathcal{N}_l$, $I_0 = [0, 1]$, $\Delta_0 = 1$ (вважаємо, що $\psi(0) = 1$).

Зважаючи на нерівність (5.30) з [114, с. 214], можна дійти висновку, що для деякої додатної сталої C_0

$$C_0 f_l^{(1)} \in L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}} \text{ при } 2 \leq p < \infty$$

і

$$C_0 f_l^{(2)} \in L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}} \text{ при } 1 < p \leq 2.$$

Далі, не втрачаючи в загальності, вважаємо, що $C_0 = 1$. Покладемо

$$f_l^*(t) = \sum_{k \in I_l} \psi(k) e^{ikt}, \quad \chi_s(t) := \tau_s(e^{it}),\ s = 0, 1, 2, \ldots, \mathcal{N}_{j+1},$$

і нехай

$$R_l(\theta) := \left\| f_l^*(\cdot + \theta) - S_{\mathcal{N}_j - 1}(f_l^*(\cdot + \theta); \chi) \right\|_2^2, \quad \theta \in (0, 2\pi],$$

де $S_n(f_l^*; \chi)$ — частинна сума порядку $n+1$ ряду Фур'є функції $f_l^*(\cdot)$ по системі $\chi = \{\chi_s\}_{s=0}^{\mathcal{N}_{j+1}}$.

Тоді, з огляду на рівність (4.88), позначивши $\widetilde{I}_j := [\mathcal{N}_j, \mathcal{N}_{j+1}]$, $j \in \mathbb{N}$, маємо

$$R_l(\theta) = \left\| \sum_{k \in I_l} e^{ikt} \psi(k) \sum_{s \in \widetilde{I}_j} a_s^k \chi_s(\cdot) \right\|_2^2 = \sum_{s \in \widetilde{I}_j} \left| \sum_{k \in I_l} a_s^k e^{ik\theta} \psi(k) \right|^2. \tag{4.89}$$

А це означає, що

$$\sigma_l := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R_l(\theta) d\theta = \sum_{s \in \widetilde{I}_j} \sum_{k \in I_l} \psi^2(k) |a_s^k|^2. \tag{4.90}$$

Покажемо, що існує така додатна стала C (яка, можливо, залежить від ψ, але не залежить від j), що для деякого l, $0 \leq l \leq j$

$$\sigma_l \geq C \Delta_j \psi^2(\mathcal{N}_j). \tag{4.91}$$

Припустимо протилежне. Тоді, оскільки для будь-якого l, $0 \leq l \leq j$

$$\psi^2(\mathcal{N}_{l+1}) \sum_{s \in \widetilde{I}_j} \sum_{k \in I_l} |a_s^k|^2 \leq \sigma_l \leq \psi^2(\mathcal{N}_l) \sum_{s \in \widetilde{I}_j} \sum_{k \in I_l} |a_s^k|^2,$$

то для кожного $j \in \mathbb{N}$ і для будь-якої додатної сталої C

$$\Delta_j + 1 = \sum_{l=0}^{j} \left(\sum_{s \in \widetilde{I}_j} \sum_{k \in I_l} |a_s^k|^2 \right) \leq \sum_{l=0}^{j} \frac{\sigma_l}{\psi^2(\mathcal{N}_{l+1})} \leq C \Delta_j \psi^2(\mathcal{N}_j) \sum_{l=0}^{j} \frac{1}{\psi^2(\mathcal{N}_{l+1})}. \tag{4.92}$$

Співвідношення (4.92) суперечливе, якщо показати, що існує така додатна стала C_0, яка не залежить від j, що

$$\alpha(j) := \psi(\mathcal{N}_j) \sum_{l=0}^{j} \frac{1}{\psi(\mathcal{N}_{l+1})} < C_0. \tag{4.93}$$

Подамо $\alpha(j)$ у вигляді $\alpha(j) = \alpha_1(j) + \alpha_2(j)$, де

$$\alpha_1(j) = \psi(\mathcal{N}_j) \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{\psi(\mathcal{N}_{l+1})}\ , \qquad \alpha_2(j) = \frac{\psi(\mathcal{N}_j)}{\psi(\mathcal{N}_{j+1})}.$$

Тоді оцінка для $\alpha_2(j)$ міститься у твердженні 4.5.1: $\alpha_2(j) < C_1$, де C_1 — стала, яка не залежить від j. Далі, достатньо зауважити, що для будь-якого $r \in \mathbb{N}$, $\psi(\mathcal{N}_r) \le \psi(\mathcal{N}_{r-1}/2)$, щоб записати $\alpha_1(j) < 2$ і тим самим впевнитися у справедливості нерівності (4.93), а отже і нерівності (4.91).

Таким чином, повертаючись до співвідношень (4.91) та (4.90), можна стверджувати, що для деякого l, $0 \le l \le j$, існує $\theta^* \in (0, 2\pi]$, для якого

$$R_l(\theta^*) \gg \Delta_j \psi^2(\mathcal{N}_j),$$

тобто

$$\left\| f_l^*(\cdot + \theta^*) - S_{\mathcal{N}_j - 1}(f_l^*(\cdot + \theta^*); \chi) \right\|_2 \gg \Delta_j^{1/2} \psi(\mathcal{N}_j).$$

А отже, поклавши

$$h_l(t) = \begin{cases} \Delta_l^{-1/2} f_l^*(t) & \text{при } 2 \le p < \infty, \\ \Delta_l^{1/p-1} f_l^*(t) & \text{при } 1 < p \le 2, \end{cases}$$

переконуємося, що $h_l \in L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}$ і

$$\left\| h_l(\cdot + \theta^*) - S_{\mathcal{N}_j - 1}(h_l(\cdot + \theta^*); \chi) \right\|_2 \gg \begin{cases} \Delta_l^{-1/2} \Delta_j^{1/2} \psi(\mathcal{N}_j), & 2 \le p < \infty, \\ \Delta_l^{1/p-1} \Delta_j^{1/2} \psi(\mathcal{N}_j), & 1 < p \le 2. \end{cases} \tag{4.94}$$

Проте, якщо $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, то існує така додатна стала C, що для будь-якого l, $0 \le l \le j$, маємо $\Delta_l \le C \Delta_j$. Тому, наслідком співвідношень (4.94) є наступні оцінки:

$$d_{\mathcal{N}_j}(L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}; L_2(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}}) \asymp \left\| h_l(\cdot + \theta^*) - S_{\mathcal{N}_j - 1}(h_l(\cdot + \theta^*); \chi) \right\|_2 \gg$$

$$\gg \begin{cases} \psi(\mathcal{N}_j), & 2 \le p < \infty, \\ \psi(\mathcal{N}_j) \left(\eta(\mathcal{N}_j) - \mathcal{N}_j \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2, \end{cases} \tag{4.95}$$

поєднавши які із співвідношенням (4.87), отримаємо необхідні оцінки знизу в (4.82) у випадку $q = 2$.

Співвідношення (4.95) є вихідним для отримання оцінок знизу в (4.82) при $q \neq 2$. Спочатку нехай $1 < p \leq q < 2$. Тоді для довільної лінійно незалежної системи функцій $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\mathcal{N}_j}$ з $\mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}$, позначивши через $S_n[g]$ частинну суму Фур'є порядку $n+1$ по системі w^k, $k = 0, 1, \ldots$ функції $g(w)$, $w \in T$, маємо

$$\sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}} \inf_{c_i} \left\| f - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_j} c_i \varphi_i \right\|_{T,q} \overset{(a)}{\gg}$$

$$\overset{(a)}{\gg} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}} \inf_{c_i} \left\| (S_{\mathcal{N}_{j+1}} - S_{\mathcal{N}_j})[f] - \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_j} c_i (S_{\mathcal{N}_{j+1}} - S_{\mathcal{N}_j})[\varphi_i] \right\|_{T,q} \overset{(b)}{\gg}$$

$$\overset{(b)}{\gg} \Delta_j^{1/2-1/q} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}} \inf_{c_i} \left\| f - \left[\sum_{i=1}^{\mathcal{N}_j} c_i (S_{\mathcal{N}_{j+1}} - S_{\mathcal{N}_j})[\varphi_i] + S_{\mathcal{N}_j}[f] \right] \right\|_{T,q} \overset{(c)}{\gg}$$

$$\overset{(c)}{\gg} \Delta_j^{1/2-1/q} d_{\mathcal{N}_j}(L^{\psi}_{\beta,p}(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}; L_2(T) \cap \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}) \overset{(d)}{\gg} \psi(\mathcal{N}_{j+1}) \Delta_j^{1/p-1/q} \tag{4.96}$$

У цьому ланцюжку нерівностей при переході (a) використано обмеженість оператора Фур'є $S_n : L_q(T) \to L_q(T)$, $1 < q < \infty$; нерівність (b) є наслідком нерівності (4.70) і того факту, що $S_{\mathcal{N}_{j+1}}[f] = f$, якщо $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}$; справедливість співвідношення (c) базується на такому: оскільки, починаючи з деякого $j \in \mathbb{N}$ буде $\mathcal{N}_{j+1} - \mathcal{N}_j \leq \mathcal{N}_j - 1$ (див. співвідношення $\frac{t}{\eta(t)-t} \uparrow \infty$, $t \to \infty$ в означенні множини $\mathfrak{M}''_{\infty}$), а $(S_{\mathcal{N}_{j+1}} - S_{\mathcal{N}_j})[\varphi_i] \in \mathcal{P}_{\mathcal{N}_j+1, \mathcal{N}_{j+1}}$ і $S_{\mathcal{N}_j}[f] \in \mathcal{P}_{\mathcal{N}_j+1}$, то у квадратних дужках при кожному фіксованому $f \in \mathcal{P}_{\mathcal{N}_{j+1}+1}$ і фіксованих c_i, $i = 1, 2, \ldots, \mathcal{N}_j$, знаходиться елемент лінійної оболонки $\mathcal{L}$, породженої системою, яка складається не більше ніж із $\mathcal{N}_j$ взаємно ортогональних функцій, тобто $\mathcal{L} = \operatorname{span}\left\{ S_{\mathcal{N}_j}[f],\ \{w^k\}_{k=\mathcal{N}_j+1}^{\mathcal{N}_{j+1}} \right\}$; нерівність (d) випливає із співвідношення (4.95).

Поєднавши співвідношення (4.96) та (4.73), з урахуванням зауважень, що зроблені на початку доведення теореми 4.5.1, отримаємо

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg \psi(n) \left(\eta(n) - n\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}, \quad 1 < p \leq q \leq 2.$$

У випадку $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ безпосередньо з останньої оцінки випливає

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_2(\overline{\Omega})) \gg \psi(n) \left(\eta(n) - n\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}.$$

У випадках, коли $2 \le p \le q < \infty$ чи $2 \le q \le p < \infty$, для отримання оцінки

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \gg \psi(n)$$

достатньо скористатися співвідношеннями (4.87) і (4.95), беручи до уваги, що $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega}) \subset \widetilde{A}_2(\overline{\Omega})$ при $q > 2$.

Оцінки зверху у випадках $1 < p \le q \le 2$ та $1 < q \le p < \infty$ випливають із наступного твердження.

Теорема 4.5.2. *Нехай* Ω *— область обмежена кривою* $\Gamma \in RA_q$, $1 < p, q < \infty$ *і* $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді*

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \psi(n)\,(\eta(n) - n)^{(1/p-1/q)_+}\,, \tag{4.97}$$

де $a_+ := \max\{0; a\}$.

Для доведення теореми 4.5.2 достатньо взяти до уваги співвідношення (4.81), а потім послатися на теорему 6.1 в [114, с. 219] (див. також нерівність (6.30′) в [114, с. 225]).

Продовжимо встановлення оцінок зверху в теоремі 4.5.1 у випадках, що залишилися не розглянутими. Отже, нехай $1 < p \le 2 \le q < \infty$. Як було зазначено, оцінку достатньо встановити для значень n, які пробігають послідовність $(\mathcal{N}_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Покладемо для будь-якої функції $f \in L^{\psi}_{\beta,p}(\Gamma)$ і $z \in \Omega$

$$\varphi_0(z) = S^F_{\mathcal{N}_0}(\mathcal{K}f; z), \quad \mathcal{N}_0 = 0,$$

$$\varphi_k(z) = S^F_{\mathcal{N}_{k+1}-1}(\mathcal{K}f; z) - S^F_{\mathcal{N}_k-1}(\mathcal{K}f; z), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді, за теоремою 4.5.2, враховуючи співвідношення $E_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q} \asymp \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega))_{\Gamma,q}$, $1 < q < \infty$, при $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned}\|\varphi_k\|_{\Gamma,p} &\le \left\|S^F_{\mathcal{N}_{k+1}-1}(\mathcal{K}f;\cdot) - \mathcal{K}f(\cdot)\right\|_{\Gamma,p} + \left\|S^F_{\mathcal{N}_k-1}(\mathcal{K}f;\cdot) - \mathcal{K}f(\cdot)\right\|_{\Gamma,p} \\ &\ll \psi(\mathcal{N}_{k+1}) + \psi(\mathcal{N}_k) \ll \psi(\mathcal{N}_k)\end{aligned}$$

(в останній нерівності використано твердження 4.5.1). А отже

$$\lim_{l\to\infty}\left\|\mathcal{K}f(\cdot) - \sum_{k=0}^{l}\varphi_k(\cdot)\right\|_{\Gamma,p} = \lim_{l\to\infty}\left\|\mathcal{K}f(\cdot) - S^F_{\mathcal{N}_{l+1}-1}(\mathcal{K}f;\cdot)\right\|_{\Gamma,p} = 0,$$

тобто

$$\mathcal{K}f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(z), \quad z \in \Omega,$$

(збіжність ряду за нормою простору $\widetilde{A}_p(\overline{\Omega})$). Таким чином, має місце вкладення

$$L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega) \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_p^{(k)}(\Omega), \tag{4.98}$$

де $Q_p^{(0)}(\Omega)$ — множина всеможливих сталих функцій на Ω, а при $k \in \mathbb{N}$

$$Q_p^{(k)}(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_k) : \quad \|f\|_{\Gamma,p} \ll \psi(\mathcal{N}_k) \right\};$$

$\mathcal{P}(\mathcal{N}_k)$ — простір алгебраїчних поліномів p вигляду $p(z) = \sum\limits_{m=\mathcal{N}_k}^{\mathcal{N}_{k+1}-1} c_m z^m, \ z \in \mathbb{C}$.

Далі, нехай $(m_k)_{k=0}^{\infty}$ — послідовність цілих невід'ємних чисел така, що $\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k \le n$. Тоді на підставі леми Майорова [52] і вкладення (4.98) маємо

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll d_{m_0}(Q_p^{(0)}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) + \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j) d_{m_j}(\widetilde{B}_p^{(j)}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})), \tag{4.99}$$

де $\widetilde{B}_p^{(j)}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{P}(\mathcal{N}_j) : \|f\|_{\Gamma,p} \le 1 \right\}$, $j \in \mathbb{N}$. Звідси, поклавши $m_0 = 1$ (а тоді $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k \le n-1$), отримаємо

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j) d_{m_j}(\widetilde{B}_p^{(j)}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})). \tag{4.100}$$

Далі, згідно з нерівністю (4.88)

$$\widetilde{B}_p^{(j)}(D) \subset C \Delta_j^{1/p-1/2} \widetilde{B}_2^{(j)}(D),$$

де C — стала, яка не залежить від j, а $\Delta_j = \mathcal{N}_{j+1} - \mathcal{N}_j$, $j \in \mathbb{N}$. А отже, на основі властивостей операторів $\mathcal{F}^{\Omega}$ і $\mathcal{F}_{\Omega}$ (див. твердження 4.3.1) та базових властивостей колмогоровського поперечника [188] можна записати

$$d_{m_j}(\widetilde{B}_p^{(j)}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll d_{m_j}(\widetilde{B}_p^{(j)}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N}_j)) \ll$$

$$\ll d_{m_j}(\widetilde{B}_p^{(j)}(D); H_q(T) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N}_j)) \ll \Delta_j^{1/p-1/2} d_{m_j}(\widetilde{B}_2^{(j)}(D); H_q(D) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N}_j)).$$

Поєднавши це співвідношення з (4.100), маємо

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j) \Delta_j^{1/p-1/2} d_{m_j}(\widetilde{B}_2^{(j)}(D); H_q(D) \cap \mathcal{P}(\mathcal{N}_j).$$

Далі, зрозуміло, що між просторами $H_q(D)\cap\mathcal{P}(\mathcal{N}_j)$ і $L_q(T)\cap\mathcal{P}_{\Delta_j}$ можна встановити ізометричне відображення:

$$L_q(T)\cap\mathcal{P}_{\Delta_j}\ni f(z)\ \stackrel{A}{\Longrightarrow}\ z^{\mathcal{N}_j}f(z)\in H_q(D)\cap\mathcal{P}(\mathcal{N}_j),$$

для якого прообразом кулі $\widetilde{B}_2^{(j)}(D)$ є куля $\widetilde{B}_2^{\Delta_j}(T)=\{f\in\mathcal{P}_{\Delta_j}:\ \ \|f\|_{T,2}\le 1\}$. Тому

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))\ll\sum_{j=1}^{\infty}\psi(\mathcal{N}_j)\Delta_j^{1/p-1/2}d_{m_j}(\widetilde{B}_2^{\Delta_j}(T);L_q(T)\cap\mathcal{P}_{\Delta_j}),$$

а отже, використовуючи твердження 4.4.2, згідно з базовими властивостями колмогоровського поперечника отримаємо співвідношення

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega);\widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))\ll\sum_{j=1}^{\infty}\psi(\mathcal{N}_j)\Delta_j^{1/p-1/q}d_{m_j}(B_2^{\Delta_j};l_q^{\Delta_j}).\qquad(4.101)$$

Нехай $n=\mathcal{N}_{s+1}$, де $s\ge 2$ — фіксоване. Покладемо

$$m_j=\begin{cases}\Delta_j, & 1\le j\le s-1,\\ \left[C(2^{j-s}\Delta_j)^{-\delta}\Delta_s^{1+\delta}\right], & j\ge s,\end{cases}$$

де $[x]$ — ціла частина числа $x\in\mathbb{R}$; C і δ — достатньо малі додатні сталі, значення яких будуть уточнені нижче. Тоді

$$\sum_{j=1}^{\infty}m_j\le\sum_{j=1}^{s-1}\Delta_j+\left(C\sum_{j=s}^{\infty}(2^{j-s}\Delta_j)^{-\delta}\Delta_s^{1+\delta}\right):=S_1+S_2.$$

Маємо: $S_1=\mathcal{N}_{s+1}-\Delta_s-\mathcal{N}_1$, а $S_2=C\Delta_s^{1+\delta}\sum\limits_{j=s}^{\infty}(2^{j-s}\Delta_j)^{-\delta}$. Згідно з означенням множини $\mathfrak{M}''_{\infty}$ при $j\ge i$ має місце нерівність $\Delta_j\ge K\Delta_i$, де K — деяка додатна стала, яка не залежить від j. А тому

$$S_2\le CK^{-\delta}\Delta_s^{1+\delta}\Delta_s^{-\delta}\sum_{j=s}^{\infty}(2^{-\delta})^{j-s}\le C^*_{\delta}\Delta_s.$$

Для будь-якого додатного числа δ підберемо таку додатну сталу C, щоб виконувалась нерівність $S_2\le\Delta_s$. Тоді $\sum_{j=1}^{\infty}m_j\le\mathcal{N}_{s+1}-1$.

Далі, відомо (див., наприклад, [133, с. 210]), що при $2\le r\le s<\infty$, $n<m$ і $\alpha=(1/r-1/s)/(1-2/s)$ буде $d_n(B_r^m;l_s^m)\asymp\min\{1;\,m^{2\alpha/s}n^{-\alpha}\}$. А оскільки, внаслідок оцінки для S_2 і згідно з означенням множини $\mathfrak{M}''_{\infty}$, при достатньо малому C у визначенні чисел m_j виконується нерівність $m_j<\Delta_j$ при $j\ge s$, то

$$d_{m_j}(B_2^{\Delta_j};l_q^{\Delta_j})\le Km_j^{-1/2}\Delta_j^{1/q},\quad j\ge s,$$

де K — деяка додатна стала, яка не залежить від j. Зрозуміло також, що

$$d_{m_j}(B_2^{\Delta_j}; l_q^{\Delta_j}) = 0, \quad \text{якщо } 1 \le j \le s-1.$$

Повернемося до нерівності (4.101). Враховуючи, що $\Delta_{j+1} \le C_0 \Delta_j$ (як наслідок із нерівності (4.86)), маємо

$$d_{\mathcal{N}_{s+1}}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j) \Delta_j^{1/p-1/q} m_j^{-1/2} \Delta_j^{1/q} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j) \Delta_j^{1/p} m_j^{-1/2} \ll \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j) \Delta_j^{1/p} \Delta_s^{-(1+\delta)/2} (2^{j-s}\Delta_j)^{\delta/2} \ll$$

$$\ll \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j) \Delta_j^{1/p} \Delta_s^{-(1+\delta)/2} \Delta_s^{\delta/2} ((2C_0)^{\delta/2})^{j-s} \ll$$

$$\ll \sum_{j=1}^{\infty} \psi(\mathcal{N}_j) \Delta_j^{1/p} \Delta_s^{-1/2} ((2C_0)^{\delta/2})^{j-s}. \tag{4.102}$$

Тепер зауважимо: якщо функція $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty}$ така, що існує додатна стала K, для якої $\eta(t) - t \le K$ при $t \ge 1$, то функція ψ належить також множині $\mathfrak{M}'_{\infty}$, а оцінки величин $d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega}))$ за умови $\psi \in \mathfrak{M}'_{\infty}$ вже знайдені (див. теорему 4.4.1) і вони збігаються у такому випадку із шуканими оцінками зверху в теоремі 4.5.1.

Отже, нехай $\psi \in \mathfrak{M}''_{\infty} \setminus \mathfrak{M}'_{\infty}$. Із означення множини $\mathfrak{M}''_{\infty}$, випливає, що існує таке $t_0 \ge 1$, що принаймі при $t \ge t_0$, $\eta(t) - t \ge K_0 > 1$. Далі, оскільки $\frac{t}{\eta(t)-t} \uparrow \infty$ при $t \to \infty$, то для будь-якого додатного числа C знайдеться $t_0^{(1)}$ (яке залежить від C) таке, що при $t \ge t_0^{(1)}$ буде $\frac{t}{\eta(t)-t} \ge C$, тобто $\eta(t) \le (1 + 1/C)t$. А отже, для достатньо великого C при $t \ge t_0^{(1)}$ виконується нерівність $[\eta(t)] + 1 \le K_1 t$, де $1 < K_1 < 2 - K_0^{-1}$. Зокрема, для деякого $j_0 \in \mathbb{N}$ при $j \ge j_0$ маємо $\mathcal{N}_{j+1} < K_1 \mathcal{N}_j$. З умови $\frac{t}{\eta(t)-t} \uparrow \infty$, $t \to \infty$, випливає також нерівність

$$\frac{\eta(\mathcal{N}_{j+1}) - \mathcal{N}_{j+1}}{\eta(\mathcal{N}_j) - \mathcal{N}_j} \le \frac{\mathcal{N}_{j+1}}{\mathcal{N}_j},$$

використавши яку можна записати: при $j \ge j_0$

$$\frac{\Delta_{j+1}}{\Delta_j} = \frac{[\eta(\mathcal{N}_{j+1})] - \mathcal{N}_{j+1} + 1}{[\eta(\mathcal{N}_j)] - \mathcal{N}_j + 1} \le \frac{\eta(\mathcal{N}_{j+1}) - \mathcal{N}_{j+1} + 1}{\eta(\mathcal{N}_j) - \mathcal{N}_j} \le$$

$$\le \frac{\mathcal{N}_{j+1}}{\mathcal{N}_j} + \frac{1}{K_0} \le K_1 + \frac{1}{K_0} =: \alpha < 2 \tag{4.103}$$

Таким чином, при $j \geq j_0$ маємо $\Delta_{j+1} \leq \alpha\Delta_j$, де $\alpha < 2$ і оскільки $\psi(\mathcal{N}_{j+1}) \leq \psi(\mathcal{N}_j)/2$, то

$$\psi(\mathcal{N}_{j+k})\Delta_{j+k}^{1/p} \leq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k \psi(\mathcal{N}_j)\Delta_j^{1/p} = \gamma^k \psi(\mathcal{N}_j)\Delta_j^{1/p}, \ k \in \mathbb{N}, \tag{4.104}$$

де $\gamma < 1$.

З нерівності (4.102), враховуючи співвідношення (4.104), випливає

$$d_{\mathcal{N}_s}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(\mathcal{N}_s)\Delta_s^{1/p-1/2} \sum_{j=s}^{\infty} ((2C_0)^{\delta/2}\gamma)^{j-s}.$$

А отже, підібравши додатне число δ так, що $(2C_0)^{\delta/2}\gamma < 1$ і взявши до уваги те, що $\Delta_s \asymp \Delta_{s+1} \asymp \eta(\mathcal{N}_{s+1}) - \mathcal{N}_{s+1}$ і $\psi(\mathcal{N}_s) \asymp \psi(\mathcal{N}_{s+1})$, отримаємо

$$d_{\mathcal{N}_{s+1}}(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(\mathcal{N}_{s+1}(\eta(\mathcal{N}_{s+1}) - \mathcal{N}_{s+1})^{1/p-1/2}).$$

Таким чином, якщо $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, то

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Нарешті, якщо $2 \leq p \leq q < \infty$, то

$$d_n(L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll d_n(L^{\psi}_{\beta,2}(\Omega); \widetilde{A}_q(\overline{\Omega})) \ll \psi(n).$$

Теорему 4.5.1 доведено. ■

4.6 Наближення інтегралів типу Коші у просторах Смірнова $E_q(\Omega)$

У даному підрозділі розв'язана задача про оцінки наближення класів $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$ за допомогою n – вимірних підпросторів в $E_q(\Omega)$ за певних обмежень на послідовність ψ і для певних співвідношень між параметрами p та q, тобто — задача щодо встановлення точних за порядком значень колмогоровських поперечників $d_n(\mathcal{K}^{\psi}_q B_p(\Omega); E_q(\Omega))$. Також доведені важливі твердження, що стосуються властивостей p – фаберових операторів та оператора Коші.

4.6.1 Позначення, означення та допоміжні твердження

Спочатку нагадаємо деякі із позначень з попередніх підрозділів, які задіяні і в цій, заключній, частині даного розділу.

Отже нехай Ω — однозв'язна область в комплексній площині $\mathbb{C}$, границя якої з. с. ж. к. $\Gamma = \partial\Omega$; $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ — замикання області Ω, а $\Omega^- = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ — зовнішність кривої Γ (доповнення області Ω до розширеної комплексної площини $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$). В подальшому, без втрати загальності, вважаємо, що $\{0\} \in \Omega$ і довжина кривої Γ дорівнює 2π.

Позначимо через $L_p(\Gamma)$, $1 \le p < \infty$, простір сумовних в p–ій степені функцій f на кривій Γ, з нормою

$$\|f\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^p |d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}}$$

і через $L_\infty(\Gamma)$ — простір істотно обмежених на Γ функцій f з нормою

$$\|f\|_{L_\infty(\Gamma)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in\Gamma} |f(\zeta)|.$$

Нехай далі $\Phi(\cdot)$ і $\Psi(\cdot)$ — функції, що здійснюють конформний гомеоморфізм між зовнішністю області $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ і зовнішністю круга $\overline{D} = \{w : |w| \le 1\}$, причому функція $\Phi(\cdot)$ задовольняє умови

$$\lim_{z\to\infty} \Phi(z)/z = \alpha > 0 \quad \text{і} \quad \Phi(\infty) = \infty.$$

Простір Смірнова $E_p(\Omega)$, $p > 0$, — це простір, що складається із аналітичних в Ω функцій f, для кожної із яких знайдеться послідовність $\{\Omega_j\}_{j\ge1}$ однозв'язних областей зі спрямлювальними границями $\partial\Omega_j$, що вичерпує зсередини область Ω і така, що

$$\sup_j \int_{\partial\Omega_j} |f(z)|^p |dz| < \infty. \tag{4.105}$$

Через $E_\infty(\Omega)$ позначимо *простір обмежених аналітичних в Ω функцій.*
Відомо, що при $1 \le p < \infty$ кожна функція $f \in E_p(\Omega)$ у випадку, коли границя $\Gamma = \partial\Omega$ спрямлювальна, має майже всюди на Γ граничні значення по недотичних до Γ шляхах в області Ω. Причому, ці граничні значення є значеннями функції (для якої збережемо позначення f), що належить простору $L_p(\Gamma)$.
Позначимо через $E_p(\Gamma)$ множину таких недотичних кутових граничних значень (функцій) для всіх функцій із $E_p(\Omega)$ і покладемо

$$\|f\|_{E_p(\Omega)} = \|f\|_{E_p(\Gamma)} := \|f\|_{L_p(\Gamma)}.$$

Зазначимо, згідно з теоремою 10.1 із [176] верхня грань у лівій частині (4.105) дорівнює $\|f\|^p_{L_p(\Gamma)}$.

Схожим чином означаються *простір Смірнова* $E_p(\Omega^-)$, $p > 0$, для нескінченної області Ω^- і простір $E_p(\Gamma^-)$ — множина кутових граничних значень на Γ всіх функцій із $E_p(\Omega^-)$.

У випадку, коли $\Omega = D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, простір $E_p(D)$ суть простір Харді, який позначається, нагадаємо, через H_p.

Нехай, далі

$$\mathcal{K}(g)(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \Gamma,$$

— *інтеграл типу Коші* функції $g \in L_1(\Gamma)$. Відомо, що $\mathcal{K}(g)(z)$ є аналітичною функцією за змінною z в області $\widehat{\mathbb{C}} \backslash \Gamma$. Далі будемо розглядати інтеграл типу Коші як оператор з областю визначення в $L_1(\Gamma)$ і значеннями у множині аналітичних в області Ω функцій.

Згідно з теоремою В. І. Смірнова (див., наприклад, [176, Теорема 10.4]) маємо

$$\mathcal{K}(E_p(\Gamma)) = E_p(\Omega), \tag{4.106}$$

тобто $f = \mathcal{K}(f)$ в Ω для будь-якої функції $f \in E_p(\Omega)$, а також

$$\mathcal{K}(L_p(\Gamma)) \supset E_p(\Omega). \tag{4.107}$$

Аналогічно, позначивши через $\mathcal{K}^-$ оператор $\mathcal{K}$, коли той діє на $L_p(\Gamma)$, а його образи містяться у множині аналітичних в Ω^- функцій, зауважимо, що

$$\mathcal{K}^-(E_p(\Gamma^-)) = E_p(\Omega^-) \subset \mathcal{K}(L_p(\Gamma)). \tag{4.108}$$

Для областей з регулярними границями справедливі також обернені до (4.107) та (4.108) вкладення.

Твердження 4.6.1. *Нехай Ω — скінченна однозв'язна область зі спрямлювальною жордановою границею $\partial\Omega = \Gamma$. Наступні твердження рівносильні*

1) Γ *— регулярна крива;*

2) $\mathcal{K}(L_p(\Gamma)) = E_p(\Omega) \quad \forall\, p \in (1, \infty)$*;*

3) $\mathcal{K}^-(L_p(\Gamma)) = E_p(\Omega^-) \quad \forall\, p \in (1, \infty)$.

Це твердження є наслідком теорем Давіда [166, теорема 3] і Смірнова–Дюрена [124, с. 98], [177, теорема 1], в яких виголошується відповідно наступне:

$$L_p(\Gamma) = \mathscr{H}_p(\Gamma) + \mathscr{H}_p^-(\Gamma) \Longleftrightarrow \Gamma \text{ — регулярна крива} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \Omega \text{ та } \Omega^- \text{ — області Смірнова;} \tag{4.109}$$

$$E_p(\Gamma) = \mathscr{H}_p(\Gamma) \Longleftrightarrow \Omega \text{ — область Смірнова,} \tag{4.110}$$

$$E_p(\Gamma^-) = \mathscr{H}_p^-(\Gamma) \Longleftrightarrow \Omega^- \text{ — область Смірнова,} \tag{4.111}$$

для довільних $p,\ 1 < p < \infty$.

Тут використані позначення

$$\mathscr{H}_p(\Gamma) := \left\{ f \in L_p(\Gamma) : \quad \int_\Gamma \zeta^k f(\zeta) d\zeta = 0, \ \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

$$\mathscr{H}_p^-(\Gamma) := \left\{ f \in L_p(\Gamma) : \quad \int_\Gamma \zeta^{-k} f(\zeta) d\zeta = 0, \ k \in \mathbb{N} \right\},$$

а також — поняття *області Смірнова*, яке не вдаючись до точних означень, можна трактувати так. Обмежена однозв'язна область Ω зі спрямлювальною жордановою границею є областю Смірнова, якщо похідна φ' конформного відображення φ круга D на область Ω є зовнішньою функцією (див., наприклад, [176, с. 173]). Аналогічним змістом наділяється поняття нескінченної області Смірнова Ω^-. Слід зауважити, з того що Ω є областю Смірнова, взагалі кажучи, не випливає, що такою ж є Ω^- [179].

Доведення твердження 4.6.1. 1) $\Rightarrow$ 2). Нехай Γ — регулярна крива. Тоді, згідно з (4.109) Ω — область Смірнова і внаслідок тверджень (4.106) та (4.110)

$$\mathcal{K}(\mathscr{H}_p(\Gamma)) = E_p(\Omega). \tag{4.112}$$

З іншого боку, для будь-якої функції $f \in \mathscr{H}_p^-(\Gamma)$ при $z \in \Omega$ маємо $\mathcal{K}(f)(z) = 0$, бо в околі точки $z_0 = 0$ інтеграл типу Коші $\mathcal{K}(f)$ може бути поданий у вигляді рівномірно збіжного степеневого ряду

$$\mathcal{K}(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \zeta^{-k-1} f(\zeta) d\zeta, \tag{4.113}$$

у якого всі коефіцієнти дорівнюють нулю.

Отже, $\mathcal{K}(\mathscr{H}_p^-(\Gamma)) = \{0\}$ і враховуючи (4.109) та (4.112), можна записати

$$\mathcal{K}(L_p(\Gamma)) = \mathcal{K}(\mathscr{H}_p(\Gamma)) + \mathcal{K}(\mathscr{H}_p^-(\Gamma)) = E_p(\Omega) + \{0\} = E_p(\Omega).$$

2) $\Rightarrow$ 1). Виходячи з умови, для будь-якої функції $g \in L_p(\Gamma)$ інтеграл типу Коші $\mathcal{K}(g) \in E_p(\Omega)$, тобто знайдеться така функція $f \in E_p(\Omega)$, що

$$f(z) = \mathcal{K}(g)(z), \quad z \in \Omega. \tag{4.114}$$

Але ж, згідно з теоремою Смірнова

$$f(z) = \mathcal{K}(f_+)(z), \quad z \in \Omega, \tag{4.115}$$

де f_+ — кутові граничні значення функції f на Γ, причому $f_+ \in E_p(\Gamma) \subset \mathscr{H}_p(\Gamma)$. Із (4.114) і (4.115) виводимо

$$\mathcal{K}(g - f_+)(z) = 0, \quad z \in \Omega.$$

Отже, з огляду на представлення (4.113) можна стверджувати, що $(g - f_+) \in \mathscr{H}_p^-(\Gamma)$. Таким чином, за умови 2) будь-яку функцію $g \in L_p(\Gamma)$ майже всюди на Γ можна подати у вигляді $g = g_1 + g_2$, де $g_1 \in \mathscr{H}_p(\Gamma)$, а $g_2 \in \mathscr{H}_p^-(\Gamma)$, тобто $L_p(\Gamma) = \mathscr{H}_p(\Gamma) + \mathscr{H}_p^-(\Gamma)$. Звідси, зважаючи на (4.109), випливає, що крива Γ регулярна.

За такою ж схемою доводиться рівносильність тверджень 1) і 3).

Твердження 4.6.1 доведено. ♦

Многочлени Фабера для області Ω. Обмеженій однозв'язній області Ω можна поставити у відповідність послідовність $\{F_{k,p}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $1 \le p \le \infty$, алгебраїчних многочленів степеня k, що називаються *p – фаберовими многочленами*, які можна визначити опосередковано через розклад (див., наприклад, [125])

$$\frac{(\Psi'(w))^{1-1/p}}{\Psi(w) - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_{k,p}(z)}{w^{k+1}}, \tag{4.116}$$

в якому ряд в правій частині збігається рівномірно по w в області D^- при кожному фіксованому $z \in \Omega$.

При $p = 1$ і $p = \infty$ многочлени $F_{k,p}$ мають також назву *многочленів Фабера другого роду* і *многочленів Фабера* відповідно.

Властивості p – фаберових операторів і обернених до них. Розглянемо лінійні оператори, визначені відповідно на H_p і $E_p(\Omega)$ формулами

$$T_p(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_T f(w)\frac{(\Psi'(w))^{1-1/p}}{\Psi(w) - z}dw, \quad f \in H_p, \ z \in \Omega, \tag{4.117}$$

$$Q_p(g)(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_T g_{T,p}(w)\frac{dw}{w - \tau}, \quad g \in E_p(\Omega), \ \tau \in D, \tag{4.118}$$

де $g_{T,p} := g \circ \Psi \cdot (\Psi')^{1/p}$.

Оператор T_p називається *p – фаберовим оператором*, визначеним на H_p, а Q_p — оберненим до нього.

Справедлива наступна теорема, яка доведена в [68].

Теорема 4.6.1. *Нехай Ω — скінченна однозв'язна область зі спрямлювальною жордановою границею $\partial\Omega = \Gamma$ і $1 < p < \infty$. Наступні твердження рівносильні:*

1) Γ *— регулярна крива;*

2) оператор $T_p : H_p \to E_p(\Omega)$ *— неперервний;*

3) оператор $T_p : H_p \to E_p(\Omega)$ *— бієктивний.*

Зауваження 4.6.1. *В процесі доведення в [68] імплікації* $1) \Rightarrow 2)$, *встановлено таке твердження: якщо крива* Γ *регулярна, то при* $1 < p < \infty$ *оператори* T_p *і* Q_p, *визначені відповідно на* H_p *і* $E_p(\Omega)$, *— взаємно обернені і неперервні.*

Важливими в доведенні теореми 4.6.1 є наступні факти.

Твердження 4.6.2. *Нехай* Ω *— скінченна однозв'язна область зі спрямлювальною жордановою границею* $\partial\Omega = \Gamma$ *і для* $1 < p < \infty$

$$L_p(\Gamma)_+ := \left\{ f \in L_p(\Gamma) : \quad f_{T,p} \in \mathscr{H}_p(T) \right\},$$

$$L_p(\Gamma)_- := \left\{ f \in L_p(\Gamma) : \quad f_{T,p} \in \mathscr{H}_p^-(T) \right\}.$$

Тоді

$$\mathcal{K}(L_p(\Gamma)_-) = \{0\} \quad \text{ і } \quad \mathcal{K}(L_p(\Gamma)) = \mathcal{K}(L_p(\Gamma)_+).$$

Доведення цього твердження є майже дослівним повторенням доведення твердження 2 із [120] з використанням теореми про єдиність рядів за многочленами $F_{k,p}$ із [154, наслідок 2].

Твердження 4.6.3. *Нехай* Ω *— скінченна однозв'язна область зі спрямлювальною жордановою границею* $\partial\Omega = \Gamma$ *і* $1 < p < \infty$. *Тоді оператор* $Q_p : \quad E_p(\Omega) \to H_p$ *неперервний і ін'єктивний. До того ж, якщо крива* Γ *регулярна, то оператор* Q_p *бієктивний.*

4.6.2 Колмогоровські поперечники у просторах Смірнова

В [120] (див., також, [116]) означені класи $\mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)$. Вони, як і класи $L_\beta^{\psi}\mathfrak{N}(\Omega)$, є множинами функцій, що зображуються інтегралами типу Коші в області $\Omega \subset \mathbb{C}$, яка обмежена з. с. ж. к. Γ і означаються за схожою схемою на основі вже згаданої класифікації $2\pi-$періодичних сумовних на періоді функцій, запровадженої О. І. Степанцем [115, 116].

Отже, нехай $\psi = (\psi(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ $(\psi(0) = 1)$ — довільна послідовність комплексних чисел і $\mathfrak{N}$ деяка підмножина у просторі $L_1(T)_+$ функцій степеневого типу із $L_1(T)$.

Клас $L^{\psi}\mathfrak{N}(T)_+$ (див. означення в [116, с. 261]) складається із функцій $f \in L_1(T)$ — сумовних на колі T — тригонометричний ряд Фур'є $S[f]$ яких має вигляд

$$S[f] := \sum_{k=0}^{\infty} \psi(k)\widehat{\varphi}(k)e^{ikt},$$

де $\widehat{\varphi}(k)$ — коефіцієнти Фур'є деякої функції $\varphi \in \mathfrak{N}$. Функцію f називають $\psi-$інтегралом функції φ і позначають $\mathcal{J}^{\psi}\varphi$.

Покладемо

$$L^{\psi}_{q,p}(T)_+ := L^{\psi}L_p(T)_+ \cap L_q(T),$$

а якщо $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина в $L_p(T)_+$, то

$$L^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(T)_+ := L^{\psi}\mathfrak{N}(T)_+ \cap L_q(T).$$

Залучивши визначений вище $q-$фаберовий оператор T_q, означимо класи $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$, аналітичних в області Ω функцій, у такий спосіб:

$$\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega) := T_q(L^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(T)_+) := \left\{ f = T_q(g) : \quad g \in L^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(T)_+ \right\},$$

тобто $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$ — це образ множини $L^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(T)_+$ при відображенні T_q.

За припущення, що у аналітичному виразі, яким означений оператор T_q, крива Γ — регулярна, враховуючи твердження 4.6.1, можна стверджувати, що

$$\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega) \subseteq E_q(\Omega), \quad 1 < q < \infty,$$

для будь-якої послідовності ψ. Таким чином, можна вважати, що запропонованою класифікацією здійснюється розбиття множини інтегралів типу Коші і, зокрема, розбиття на класи функцій простору Смирнова $E_q(\Omega)$.

Клас $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$ не порожній для будь-яких допустимих значень параметрів q, p та послідовності ψ, бо йому належить, принаймі, множина алгебраїчних поліномів. Зрозуміло, граничні властивості функцій із множин $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$, істотно залежать від поведінки послідовності $\psi = (\psi(k))_{k\in\mathbb{Z}}$, як основного параметра в означенні класів $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$. Певні умови щодо цієї послідовності забезпечують, зокрема, належність функцій із класів $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$ до просторів Смірнова $E_s(\Omega)$ при $q \le s$. Більш того, класи $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$ можуть складатися із функцій, що аналітично продовжуються через криву Γ в деяку область $\Omega' \supset \Omega$, і навіть — із цілих функцій.

Сформулюємо головні результати даного підрозділу.

Через W_α, $\alpha > 0$ позначимо множину таких послідовностей $\psi = (\psi(k))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ додатних дійсних чисел, що послідовність $(\psi(k)k^\alpha)_{k\in\mathbb{N}}$ не зростає і $\psi(n) \le C\psi(2n)$ при $n \in \mathbb{Z}_+$, де C — деяка стала, що не залежить від n.

Покладемо $B_p(T) := \{f \in L_p(T) : \|f\|_{L_p(T)} \le 1\}$ і означимо

$$L_q^\psi B_p(T)_+ := L_{q,p}^\psi B_p(T)_+, \qquad \mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega) := \mathcal{K}_{q,p}^\psi B_p(\Omega).$$

Теорема 4.6.2. *Нехай Ω — скінченна однозв'язна область, границя якої $\partial\Omega = \Gamma$ — регулярна крива, ε — як завгодно мале додатне число. Тоді*

$$d_n(\mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega); E_q(\Omega)) \asymp \begin{cases} \psi(n)n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 < p \le q \le 2, \quad \psi \in W_{1/p-1/q}, \\ \psi(n)n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2 \le q < \infty, \quad \psi \in W_{1/p+\varepsilon}, \\ \psi(n), & 2 \le p \le q < \infty, \quad \psi \in W_0, \\ \psi(n), & 1 < q \le p < \infty, \quad \psi \in W_{1/2+\varepsilon}. \end{cases}$$

Співставимо цей результат з відомими твердженнями, що стосуються оцінок (точних значень) колмогоровських поперечників деяких класів функцій, аналітичних в крузі D і в жорданових областях.

Спочатку нехай $\Omega = D$. Для довільної послідовності $\psi = (\psi(k))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ відмінних від нуля комплексних чисел і числа $r \in \mathbb{R}_+$ покладемо

$$H_{p,r}^\psi := \left\{ f \text{ аналітична в } D : \left\| f_r^\psi \right\|_{H_p} \le 1 \right\},$$

де

$$f_r^\psi(z) := \sum_{k=[r]}^\infty \frac{1}{\psi(k)} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^{k-[r]},$$

$[r]$ — ціла частина числа r.

При $\psi(k) = \Gamma(k-r+1)/\Gamma(k+1)$ чи $\psi(k) = k^{-r}$ класи $H_{p,r}^\psi$ і $H_{p,1}^\psi$ тотожні відповідно класам

$$H_p^r := \left\{ f \text{ аналітична в } D : \ \|f^{(r)}\|_{H_p} \le 1 \right\},$$

і

$$H_{p,\theta}^r := \left\{ f \text{ аналітична в } D : \ \|f_\theta^{(r)}\|_{H_p} \le 1 \right\},$$

де

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=[r]}^\infty \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+1)} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^{k-[r]},$$

— r - а дробова похідна в сенсі Рімана—Ліувілля (Γ — гамма функція Ейлера), а

$$f_\theta^{(r)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^r \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

— r - а дробова похідна в сенсі Вейля по аргументу $\theta = \arg z$.

Класи $H_{p,r}^\psi$ у випадку довільної послідовності ψ, ймовірно, вперше розглянуті в [196], а потім у [12] та[131].

Тепер зауважимо, якщо $\psi(k) \neq 0$ для $k \in \mathbb{Z}_+$, то неважко показати, що при $1 \le q \le \infty$, $1 < p < \infty$, $r \ge 0$

$$\mathcal{K}_q^{\psi_r} B_p(D) \subseteq \mathcal{K}_1^{\psi_r} B_p(D), \tag{4.119}$$

і

$$H_{p,r}^\psi \subset z^{[r]} \mathcal{K}_1^{\psi_r} B_p(D) + \mathcal{P}_{[r]} \subset C(p) H_{p,r}^\psi, \tag{4.120}$$

де

$$\psi_r = (\psi_r(k))_{k \in \mathbb{Z}_+}, \quad \psi_r(k) := \psi(k + [r]), \tag{4.121}$$

$\mathcal{P}_{[r]}$ — множина алгебраїчних поліномів степеня $[r] - 1$ ($P_0 = \{0\}$) і $C(p)$ — деяка стала, залежна лише від p.

Друге вкладення в (4.120) слід розуміти так: для кожної аналітичної в D функції f вигляду

$$f(z) = z^{[r]} \mathcal{K}(g)(z) + P_{[r]}(z),$$

де $g \in L_1^{\psi_r} B_p(T)$ і $P_{[r]-1} \in \mathcal{P}_{[r]}$ справедлива нерівність

$$\left\| f_r^\psi \right\|_{H_p} \le C(p). \tag{4.122}$$

Отже, у випадку, коли $\Omega = D$ із теореми 4.6.2, з урахуванням наведених вище вкладень, випливає такий наслідок.

Наслідок 4.6.1. *Нехай* $r \ge 0$, $\psi(k) = \Gamma(k+1)/\Gamma(k+r+1)$, *або* $\psi(k) = k^{-r}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тоді при* $n > [r]$

$$d_{n-[r]}(\mathcal{K}_q^\psi B_p(D); H_q) \asymp d_n(\mathcal{K}_q^\psi B_p(D); H_q) \asymp$$

$$\asymp d_n(H_p^r; H_q) \asymp d_n(H_{p,\theta}^r; H_q) \asymp \begin{cases} n^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 < p \le q \le 2, \quad \psi \in W_{1/p-1/q} \\ n^{-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2 \le q < \infty, \quad \psi \in W_{1/p+\varepsilon} \\ n^{-r}, & 2 \le p \le q < \infty, \quad \psi \in W_0 \\ n^{-r}, & 1 < q \le p < \infty, \quad \psi \in W_{1/2+\varepsilon}. \end{cases}$$

Л. В. Тайков [131] довів, що при $1 \le p \le \infty$ і $r \in \mathbb{N}$

$$d_n(H_p^r; H_p) = \frac{(n-r)!}{n!}, \quad n \ge r$$

і

$$d_n(H_{p,\theta}^r; H_p) = n^{-r}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Згідно з результатом М. З. Двєйріна [29], якщо ψ — опукла, спадна до нуля послідовність додатних чисел, то

$$d_n(H_{p,0}^{\psi}; H_p) = \psi(n).$$

Наслідок 4.6.1 для класів H_p^r у випадку, коли $1 \le p \le q \le \infty$, $r \in \mathbb{N}$ також відомий — цей результат належить Ю. Ф. Фаркову [150].
З результатом теореми 4.6.2 тісно пов'язаний вже згаданий результат С. Б. Вакарчука [16] щодо оцінки поперечника $d_n(E_p^r(\Omega), E_q(\Omega))$ класів $E_p^r(\Omega)$ аналітичних функцій в областях Ω з гладкою границею класу Ляпунова $\Lambda(1)$, яка завідомо є регулярною.

З метою формулювання наступних тверджень введемо додаткові позначення. Позначимо через I_0 множину додатних, спадних до нуля на $[1,\infty)$ функцій, а через I^a — множину таких додатних функцій s, визначених на $[1,\infty)$, що знайдеться додатна стала c, для якої при $1 \le t_1 \le t_2 < \infty$ виконується нерівність $s(t_1) \le cs(t_2)$. Очевидно, $I_0 \subset I^a$.

Визначимо множини

$$\mathfrak{M}_\infty^a := \left\{ \psi \in I_0 : \quad \eta(t) - t \in I^a, \ t \ge 1, \ \sup_{t\ge 1} \frac{t}{\eta(t)-t} = \infty \right\}$$

та

$$\mathfrak{M}_\infty^c := \{\psi \in I_0 : \quad (\exists \beta > 0 \ \forall \ t \ge 1 : \eta(t) - t \le \beta)\},$$

де $\eta(t) := \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, а ψ^{-1} — функція, обернена до ψ.

Зазначимо, що до множин $\mathfrak{M}_\infty^a$ і $\mathfrak{M}_\infty^c$ належать, наприклад, функції $\psi(t) = \exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$ при $0 < r < 1$ і $r \ge 1$ відповідно.

Надалі, послідовність $\psi = (\psi(k))_{k \in \mathbb{Z}_+}$ (дійснозначну) на основі якої означається клас $\mathcal{K}_q^{\psi} B_p(\Omega)$, розглядаємо як функцію $\psi \in I^a$ з натуральними значеннями аргументу.

Теорема 4.6.3. *Нехай* Ω *— скінчена однозв'язна область, границя якої* $\partial\Omega = \Gamma$ *— регулярна крива. Тоді, якщо* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^a$, *то*

$$d_n(\mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega); E_q(\Omega)) \asymp \begin{cases} \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & 1 < p \le q \le 2, \\ \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, & 1 < p \le 2 \le q < \infty, \\ \psi(n), & 2 \le p \le q < \infty, \\ \psi(n), & 1 < q \le p < \infty, . \end{cases}$$

Зауваження 4.6.2. *Якщо* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^a$, *то за природну границю аналітичності функцій із класів* $\mathcal{K}_q B_p(\Omega)$ *слугує границя* $\Gamma = \partial\Omega$ *області* Ω.

Теорема 4.6.4. *Нехай* Ω *— скінчена однозв'язна область, границя якої* $\partial\Omega = \Gamma$ *— регулярна крива. Тоді, якщо* $\psi \in \mathfrak{M}_\infty^c$, *то при* $1 < p,\ q < \infty$

$$d_n(\mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega); E_q(\Omega)) \asymp \psi(n).$$

Зауваження 4.6.3. *Нехай* $\psi(t) = \lambda(t)\exp(-\alpha t^r)$, $\alpha > 0$, *де* λ *— така додатна функція, визначена на* $[1,\infty)$, *що* $\ln\lambda(t) = o(t)$, $t \to \infty$. *Тоді:*

1) при $r = 1$ *клас* $\mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega)$ *складається з функцій, що аналітично продовжуються в область* $\Omega_R := \Omega \cup \{z \in \Omega^- : \ 1 \le |\Phi(z)| < R\}$, *де* $R = e^\alpha$;

2) при $r > 1$ *клас* $\mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega)$ *складається з цілих функцій.*

Запишемо наслідок з теореми 4.6.4 у випадку, коли $\Omega = D$ і $\psi(k) = R^{-k^r}$, $0 < r < 1$, $R > 1$. Використаємо при цьому позначення $A_p^{R,r}$ для класу $\mathcal{K}_q^\psi B_p(D)$.

Наслідок 4.6.2. *При* $R > 1$ *і* $0 < r < 1$

$$d_n(A_p^{R,r}, H_q) \asymp \begin{cases} R^{-n^r} n^{(1-r)(1/p-1/q)}, & 1 < p \le q \le 2, \\ R^{-n^r}, & 2 \le q \le p < \infty. \end{cases}$$

Зауважимо, у вищезгаданій роботі М. З. Двєйріна [29] доведено, що

$$d_n(A_p^{R,r}, H_p) = R^{-n^r}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Доведення теорем 4.6.2–4.6.4. Нехай $\mathfrak{A}$ —деякий компакт в H_p. За умов теорем 4.6.2–4.6.4

$$\frac{1}{\|Q_q\|} d_n(\mathfrak{A}; H_q) \le d_n(T_q(\mathfrak{A}); E_q(\Omega)) \le \|T_q\| d_n(\mathfrak{A}; H_q). \tag{4.123}$$

Це співвідношення є безпосереднім наслідком базових властивостей колмогоровського поперечника і того факту, що для будь-якого $n-$вимірного підпростору L_n в

H_q в силу твердження 3) із теореми 4.6.1 образ $T_q(L_n)$ є $n-$вимірним підпростором в $E_q(\Omega)$.

Відштовхуючись від співвідношення (4.123) бачимо, що для отримання порядкових оцінок величин $d_n(\mathcal{K}_q^\psi B_p(\Omega); E_q(\Omega))$ достатньо (згідно з означенням класів $\mathcal{K}_{q,p}^\psi$ за допомогою оператора T_q) встановити такі оцінки для величин $d_n(\mathcal{K}_q^\psi B_p(D); H_q)$.

Але, за умов, яким підпорядкована послідовність $(\psi(k))_{k\in\mathbb{Z}_+}$, оцінки величин $d_n(\mathcal{K}_q^\psi B_p(D); H_q)$ є наслідками (частковими випадками) відповідних результатів із попередніх підрозділів даного розділу і ці оцінки тотожні тим, що приведені у теоремах 4.6.2–4.6.4. ■

4.7 Висновки до розділу 4

Основу розділу 4 складають результати у яких відображені апроксимаційні властивості деяких класів функцій, які є аналітичними в однозв'язній області $\Omega \subset \mathbb{C}$, що обмежена замкнутою спрямлювальною жордановою кривою Γ. Об'єктами дослідження є класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ — множини функцій, що зображуються в області Ω інтегралами типу Коші вздовж Γ зі щільностями із підмножин $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$ сумовних на Γ функцій. Встановлені оцінки наближення таких класів функцій в певних функціональних банахових просторах за допомогою скінченно-вимірних підпросторів.

Закладена в означенні класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ відповідність між класифікацією сумовних на Γ функцій і класифікацією $2\pi-$періодичних на $\mathbb{R}$ і сумовних на періоді функцій дозволила за відповідного обгрунтування граничних властивостей функцій із класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$, розв'язати поставлені задачі, головним чином, методами теорії функцій дійсної змінної.

У підрозділі 4.2 у випадку коли область Ω фаберова, а функції із класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ неперервні в $\overline{\Omega}$, у розвиток результатів із [113], знайдено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ у просторі аналітичних в Ω і неперервних в $\overline{\Omega}$ функцій.

У наступних трьох підрозділах у термінах оцінок величин найкращого поліноміального наближення та колмогоровських поперечників досліджено апроксимаційні властивості класів $L^{\psi}_{\beta,p}(\Omega)$ у просторах $\widetilde{A}_q(\overline{\Omega})$ сумовних на Γ функцій за різноманітних обмежень на послідовність $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$, за допомогою якої означається клас $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Gamma)$. А саме, у підрозділах 4.3 та 4.5 у випадку, коли природною межею аналітичності функцій із $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ є крива Γ — границя області Ω, а у підрозділі 4.4 — коли функції з $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}(\Omega)$ аналітично продовжуються поза Γ в деяку обмежену область $\Omega' \supset \Omega$. У підрозділі 4.6 розв'язана задача щодо встановлення точних за порядком значень колмогоровських поперечників класів $\mathcal{K}^{\psi}_{q,p}\mathfrak{N}(\Omega)$ у просторах Смірнова $E_q(\Omega)$ за певних обмежень на послідовність ψ і для певних співвідношень між параметрами p та q. Також доведені важливі твердження, що стосуються властивостей $p-$фаберових операторів та оператора Коші.

Результати підрозділів 4.2–4.5 опубліковані у роботах [62–66].

Вміст підрозділу 4.6 складають лише ті результати статті [72], опублікованої у співавторстві з В. В. Савчуком, які належать автору даної дисертаційної роботи.

Розділ 5

АПРОКСИМАЦІЯ У ПРОСТОРАХ ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ НА МНОЖИНАХ РІЗНОЇ СТРУКТУРИ В $\mathbb{R}^d$

Досліджуються деякі характеристики лінійної та нелінійної апроксимації у просторах Лебега класів гладких функцій з однією і кількома дійсними змінними, визначених на торі $\mathbb{T}^d$, $d \in \mathbb{N}$ *і на одиничній сфері* $\mathbb{S}^{d-1}$ *простору* $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

5.1 Колмогоровські поперечники та ентропійні числа в просторах Орліча з нормою Люксембурга

Встановлені точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел одиничних куль з двійкових просторів Бесова $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ *компактно вкладених в експоненціальні простори Орліча* $\exp L^{\nu}$, *що наділені нормою Люксембурга.*

5.1.1 Вступ

Ми розглядаємо функції, визначені на торі $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ідентифікуючи їх $1-$періодичними функціями на $\mathbb{R}$. Через $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$, позначимо простір Лебега вимірних на $\mathbb{T}$ функцій зі скінченною нормою

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})} := \left(\int\limits_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty} = \|f\|_{L_{\infty}(\mathbb{T})} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}} |f(x)|.$$

Позначення $\exp L^{\nu}(\mathbb{T})$, $\nu > 0$ (або, скорочено, $\exp L^{\nu}$), зарезервовано для простору Орліча таких вимірних на $\mathbb{T}$ функцій $u : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, що для $\Phi_{\nu}(t) = t^2 \exp t^{\nu}$, $t \geq 0$, $\nu > 0$ скінчений інтеграл $\int\limits_{\mathbb{T}} \Phi_{\nu}(|u(x)|)dx$. Такий простір наділимо нормою Люксембурга

$$\|u\|_{\exp L^{\nu}(\mathbb{T})} := \inf \left\{ \lambda > 0 : \quad \int_{\mathbb{T}} \Phi_{\nu} \left(\frac{|u(x)|}{\lambda} \right) dx \leq 1 \right\}. \tag{5.1}$$

Більше інформації щодо нормованих просторів Орліча, які означаються схожим чином можна знайти, наприклад, в монографіях [31] та [34].
Відомо, що

$$\|u\|_{\exp L^{\nu}(\mathbb{T})} \sim \|u\|^{(1)}_{\exp L^{\nu}(\mathbb{T})} := \sup_{1 \leq p < \infty} p^{-1/\nu} \|u\|_{L_p(\mathbb{T})}. \tag{5.2}$$

Нехай $\Phi = \phi_0$ — парна нескінченно-диференційовна на дійсній осі функція (пишемо $\Phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$) така, що $\operatorname{supp} \Phi = [-2, 2]$ і $\Phi(s) = 1$ при $|s| \leq 1$. Покладемо

$$\phi_k(s) = \Phi(2^{-k}s) - \Phi(2^{-k+1}s), \quad k \in \mathbb{N},$$

і для $f \in L_1(\mathbb{T})$

$$L_k f(x) = \phi_k(D) f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_k(n) \widehat{f}_n e^{2\pi i n x}, \quad x \in \mathbb{R}, \ k \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.3}$$

де $\widehat{f}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є функції f по системі $\{e^{2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ на торі $\mathbb{T}$: $\widehat{f}_n = \int\limits_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i n x} dx$. Надалі для довільної функції $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ через $\psi(\alpha D)$, $\alpha > 0$ позначаємо оператор, що діє схоже до оператора $\phi_k(D)$ за формулою (5.3) з заміною $\phi_k(n)$ на $\psi(\alpha n)$.

Для $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ і $\gamma \geq 0$ означимо простори типу Бєсова задаючи норму виразом, що характеризує ступінь спадання величин $\|L_k f\|_q$:

$$B^{0,\gamma}_{q,\theta} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) : \quad \|f\|_{B^{0,\gamma}_{q,\theta}} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\theta\gamma} \|L_k f\|_q^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \text{— скінченна} \right\} \tag{5.4}$$

Відомо, що простори $B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ за такого означення не залежать від вибору функції Φ у виразі для $L_k f$ і, очевидно, $B^{0,\gamma}_{q_1,\theta_1} \subset B^{0,\gamma}_{q_2,\theta_2}$, якщо $1 \leq q_2 \leq q_1 \leq \infty$ і $\theta_1 \leq \theta_2$. Простір $B^{0,0}_{\infty,\theta}$ (тобто при $\gamma = 0$ і $q = \infty$) складається із локально інтегровних функцій тоді і тільки тоді, коли $1 \leq \theta \leq 2$ [182, с. 112]. Більш того, як випливає із означення (5.4), розповсюдженого на всі додатні значення θ, простір $B^{0,0}_{\infty,\theta}$ вкладається в $L_{\infty}(\mathbb{T})$, якщо $0 < \theta \leq 1$, а при $1 < \theta \leq 2$ справедливе вкладення $B^{0,0}_{\infty,\theta} \hookrightarrow \exp L^{\theta'}$, $\theta' = \frac{\theta}{\theta - 1}$ [199, теорема 1.1].

Запровадимо до розгляду так звані двійкові простори типу Бєсова, замінюючи оператори L_k в означенні просторів $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ операторами $\mathbb{D}_k$ іншого вигляду (див. [199]). Отже, нехай $k \in \mathbb{Z}_+$. Для функції f, заданої на відрізку $[0,1]$, покладемо

$$\mathbb{E}_k f(x) = 2^k \int\limits_{(m-1)2^{-k}}^{m2^{-k}} f(t)dt, \quad (m-1)2^{-k} \le x < m2^{-k}, \ m = 1, \dots, 2^k, \tag{5.5}$$

і визначимо

$$\mathbb{D}_0 f(x) = \mathbb{E}_0 f(x) \ \text{ та } \ \mathbb{D}_k f(x) = \mathbb{E}_k f(x) - \mathbb{E}_{k-1} f(x), \ k \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Зауважимо, що функції $\mathbb{D}_k f$ є кусково-сталими з розривами в точках $m2^{-k}$, $m = 0, \dots, 2^k - 1$. Далі будемо розглядати $1-$періодичні продовження функцій $\mathbb{E}_k f$ та $\mathbb{D}_k f$ з інтервалу $[0,1)$ на $\mathbb{R}$ як функції, що задані на $\mathbb{T}$, і відповідно — оператори $\mathbb{E}_k$ та $\mathbb{D}_k$, визначені на $L_1(\mathbb{T})$, зі значеннями в $L_\infty(\mathbb{T})$. Зазначимо, що для будь-якої функції $f \in L_1(\mathbb{T})$ майже для всіх $x \in \mathbb{T}$ справедлива рівність $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathbb{D}_k f(x)$.

Тепер для $1 \le q \le \infty$, $1 \le \theta < \infty$ і $\gamma \ge 0$ означимо двійкові простори Бєсова

$$\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}) : \ \ \|f\|_{\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}} := \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{\theta\gamma} \|\mathbb{D}_k f\|_q^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} < \infty \right\}. \tag{5.7}$$

Наведемо відомості, що стосуються зв'язку між просторами $B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ і $\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ з іншими відомими просторами.

У роботі [36] Б. С. Кашин і В. М. Темляков ввели нормовані простори LG^γ, $\gamma > 0$, функцій f із $L_1(\mathbb{T})$, для яких $\|L_k f\|_\infty = O((k+1)^{-\gamma})$ при $k \to +\infty$, покладаючи

$$LG^\gamma(\mathbb{T}) := \{ f \in L_1(\mathbb{T}) : \ \ \|f\|_{LG^\gamma(\mathbb{T})} := \sup_{k \ge 0} (k+1)^\gamma \|L_k f\|_\infty \text{— скінченна}\}. \tag{5.8}$$

Очевидно, при $\gamma > \frac{1}{2}$ простір $LG^\gamma(\mathbb{T})$ вкладається в $B^{0,\gamma}_{\infty,2}$. Більш того, при $\gamma > 1$ $LG^\gamma(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T})$, а при $1/2 < \gamma \le 1$ $LG^\gamma(\mathbb{T}) \subset \exp L^\nu(\mathbb{T})$ для $\nu < \frac{1}{1-\gamma}$ ([199, теорема 1.1]). Зазначимо також, що при $\gamma > \frac{1}{2}$, $\nu < 2$ чи $\nu \ge 2$, $\gamma > \frac{1}{1-\nu}$ останнє вкладення компактне ([199, теорема 1.3]).

З певної точки зору простори $LG^\gamma(\mathbb{T})$ можна розглядати як граничні в шкалі просторів $B^{0,\gamma}_{\infty,\theta}$, відповідними "граничному значенню" ∞ показника θ. В такому ж сенсі, в якості граничних в шкалі просторів $\operatorname{dyad} B^{0,\gamma}_{\infty,\theta}$ слугують простори LG^γ_{dyad}, введені в [199]:

$$LG^\gamma_{\text{dyad}} = \{ f \in L_1(\mathbb{T}) : \ \ \|f\|_{LG^\gamma_{\text{dyad}}} := \sup_{k \ge 0} (k+1)^\gamma \|\mathbb{D}_k f\|_\infty \text{— скінченна}\}. \tag{5.9}$$

Звернемо увагу на деякі відмінності в структурі функцій із просторів LG^{γ} та $LG^{\gamma}_{\mathrm{dyad}}$. Так, при $\gamma > 1$ простори LG^{γ} складаються із неперервних функцій, а до просторів $LG^{\gamma}_{\mathrm{dyad}}$ в такому випадку належать і розривні функції. Більш того, при $\gamma > \frac{1}{2}$

$$LG^{\gamma} \hookrightarrow LG^{\gamma}_{\mathrm{dyad}} \tag{5.10}$$

(див. [199, лема 3.2]).

Доповнивши шкалу просторів $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ та $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ при $1 \le \theta < \infty$ відповідно просторами

$$B^{0,\gamma}_{p,\infty} = \{f \in L_1(\mathbb{T}) :\ \|f\|_{B^{0,\gamma}_{p,\infty}} := \sup_{k \ge 0}(k+1)^{\gamma}\|L_k f\|_p \text{— скінченна}\}$$

та

$$\mathrm{dyad}\ B^{0,\gamma}_{p,\infty} = \{f \in L_1(\mathbb{T}) :\ \|f\|_{\mathrm{dyad}\ B^{0,\gamma}_{p,\infty}} := \sup_{k \ge 0}(k+1)^{\gamma}\|\mathbb{D}_k f\|_p \text{— скінченна}\},$$

а також зауваживши, що в таких позначеннях $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \equiv LG^{\gamma}$ і $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \equiv LG^{\gamma}_{\mathrm{dyad}}$, доведемо в підрозділі 5.1.4, що схоже з (5.10) вкладення зберігається і між просторами $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ та $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ при $1 \le \theta \le \infty$.

Вкажемо також на зв'язок між просторами $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$, $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ та $\exp L^{\theta}(\mathbb{T})$ у випадку $\gamma = 0 :$ в [199, твердження 2.2] показано, що при $p = \infty$ і $1 \le \theta \le 2$

$$B^{0,0}_{p,\theta} \hookrightarrow \mathrm{dyad}\, B^{0,0}_{p,\theta}; \tag{5.11}$$

там же ([199, твердження 2.5]) доведено, що при $1 \le \theta \le 2$

$$\mathrm{dyad}\, B^{0,0}_{\infty,\theta} \hookrightarrow \exp L^{\theta'}(\mathbb{T}). \tag{5.12}$$

На завершення цього підрозділу звернемо увагу на одну властивість операторів $\mathbb{D}_k$ та одну особливість операторів $\mathbb{E}_k$.

Лема $\mathbf{ST}_5$ [199]. *Існує така стала C, що при $1 \le s \le 2$, $s' = \frac{s}{s-1}$, $2 \le p \le \infty$ для довільної системи $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ функцій із $L_p(\mathbb{T})$ справедлива нерівність*

$$\Big\| \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{D}_k f_k \Big\|_p \le C p^{1/s'} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_p^s \right)^{\frac{1}{s}}. \tag{5.13}$$

Стосовно оператора $\mathbb{E}_k$, визначеного формулою (5.5), обмежимося лише констатацією того факту, що при кожному $k \in \mathbb{Z}_+$ він тотожній оператору $P_k :\ L_1(\mathbb{T}) \to V_n$ ортогонального проектування простору $L_1(\mathbb{T})$ на простір

$$V_n := \mathrm{span}\{h_k\}_{k=0}^{2^n-1} = \left\{ u :\ u(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k h_k(x), \quad c_k \in \mathbb{R} \right\},$$

що породжений першими 2^n функціями базисної системи Хаара $\mathrm{H} = \{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ (див., наприклад, [38, с. 78–80]). Такий факт засвідчує певні властивості оператора $\mathbb{D}_k$ (і оператора $\mathbb{E}_k$), тотожні відомим властивостям оператора P_k, які встановлені при вивченні базису H, а також — кратного базису H^{d}, $d \geq 2$ [75]. Проте використання цих властивостей в даному розділі не передбачено.

5.1.2 Про класи $\mathbb{B}_{p,\theta}^{0,\gamma}$ та $\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}_{p,\theta}^{0,\gamma}$ в просторах L_q і $\exp L^{\nu}$. Формулювання основного результату

Основними величинами, що досліджуються у підрозділі 5.1 є поперечники за Колмогоровим деяких із означених вище функціональних множин у просторах $L_p(\mathbb{T})$ та $\exp L^{\nu}(\mathbb{T})$, а також $m-$ті ентропійні числа простору $\mathrm{dyad}\,B_{q,\theta}^{0,\gamma}$ відносно простору $\exp L^{\nu}(\mathbb{T})$.

Нехай X — лінійний нормований простір з нормою $\|\cdot\|_X$, а Y — підпростір в X, що наділений нормою $\|\cdot\|_Y$.

Означення 5.1.1. *m – им ентропійним числом простору Y відносно простору X називаеться величина*

$$\epsilon_m(Y, X) = \inf\{\varepsilon > 0 : \ \exists \ \{u_j\}_{j=1}^{2^m-1}, \ B_Y \subset \bigcup_{j=1}^{2^m-1} \{u_j + \varepsilon B_X\}\},$$

де B_X (B_Y) — одинична куля в X (Y).

Зазначимо, що для класичних просторів Нікольського і Бєсова $B_{p,\theta}^r$ (періодичних функцій декількох змінних), схожих за означенням з просторами $B_{p,\theta}^{0,\gamma}$ після заміни множника $(k+1)^{\theta\gamma}$ на $2^{kr\theta}$, характеристики ϵ_n та d_n в просторах $L_q(\mathbb{T}^d)$ досить повно досліджені — з точки зору знаходження порядкових (за параметром n) значень — в [101, 102] (див. також приведену там бібліографію).

Зробимо короткий огляд і аналіз відомих результатів, що стосуються величин ϵ_n та d_n в межах просторів $B_{p,\theta}^{0,\gamma}$, $\mathrm{dyad}\,B_{p,\theta}^{0,\gamma}$, LG^{γ} і $\mathrm{dyad}\,LG^{\gamma}$. Одиничні кулі в цих просторах позначимо відповідно через $\mathbb{B}_{p,\theta}^{0,\gamma}$, $\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}_{p,\theta}^{0,\gamma}$, $\mathbb{LG}^{\gamma}$ і $\mathrm{dyad}\,\mathbb{LG}^{\gamma}$.

В роботі [36, теорема 3.1], Б. С. Кашин та В. М. Темляков встановили таке твердження.

Теорема KT$_5$. *При $\gamma > 1$ справедливі співвідношення*

$$\epsilon_n(LG^{\gamma}, L_p) \asymp d_n(\mathbb{LG}^{\gamma}, L_p) \asymp \begin{cases} (\log_2 n)^{-\gamma+1}, & \text{якщо } \ p = \infty, \\ (\log_2 n)^{-\gamma+1/2}, & \text{якщо } \ 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

Ключовий момент на завершальному етапі доведення теореми KT_5 (висновок про рівність за порядком величин ϵ_n та d_n) полягав у застосуванні наступної леми, що випливає із однієї нерівності Карла (див. [189]).

Лема $\mathbf{A}_5$. *Нехай* X — *сепарабельний банахів простір,* Y — *компактно вкладений в* X *і* B_Y — *одинична куля в* Y. *Припустимо, що для пари* (r,b), *де або* $r>0$, $b\in\mathbb{R}$, *або* $r=0$, $b<0$ *виконуються співвідношення*

$$d_m(B_Y,X)\ll m^{-r}(\log_2 m)^b,$$

$$\epsilon_m(Y,X)\gg m^{-r}(\log_2 m)^b.$$

Тоді

$$\epsilon_m(Y,X)\asymp d_m(B_Y,X)\asymp m^{-r}(\log_2 m)^b.$$

В статті [199] А. Зігер і В. Требелс (A. Seeger і W. Trebels), досліджуючи у попередньому твердженні причину стрибковості у зміні порядкових значень ентропійних чисел при переході від метрики в $L_p(\mathbb{T})$, $1\le p<\infty$, до метрики в $L_\infty(\mathbb{T})$, з метою "стирання" цього ефекту, залучили простори $\exp L^\nu$ і встановили порядкові значення величин $\epsilon_m(LG^\gamma,\exp L^\nu)$ у вигляді наступного твердження.

Теорема $\mathbf{ST}_5$. *Вкладення* $LG^\gamma(\mathbb{T})\subset\exp L^\nu(\mathbb{T})$ *компактне, якщо або* $\gamma>1/2$, $\nu<2$, *або* $\nu\ge 2$, $\gamma>1-\frac{1}{\nu}$.

Мають місце оцінки:

1) для $\gamma>1/2$ *і* $\nu<2$

$$\epsilon_m(LG^\gamma,\exp L^\nu)\asymp(\log_2 m)^{\frac{1}{2}-\gamma};$$

2) для $\nu\ge 2$ *і* $\gamma>1-\frac{1}{\nu}$

$$\epsilon_m(LG^\gamma,\exp L^\nu)\asymp(\log_2 m)^{1-\frac{1}{\nu}-\gamma}.$$

Зауважимо, головна ідея методу встановлення оцінок зверху для ентропійних чисел в теоремі ST_5 полягала у вкладенні простору LG^γ в ширший простір $LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$.

В іншому напрямі результати Б. С. Кашина та В. М. Темлякова (теорема KT_5) були розповсюджені С. А. Стасюком [127] на простори $B^{0,\gamma}_{p,\theta}$. А саме, доведені такі теореми.

Теорема C1$_5$. *Нехай* $1 \le \theta < \infty$, $r > 1 - \frac{1}{\theta}$. *Тоді*

$$\epsilon_m(B^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp d_m(\mathbb{B}^{0,r}_{\infty,\theta}, L_\infty) \asymp (\log_2 m)^{-r+1-\frac{1}{\theta}}.$$

Теорема C2$_5$. *Нехай* $1 \le q < \infty$, $q \le p$, $r > \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}$. *Тоді при* $2 \le p \le \infty$, $2 \le \theta < \infty$, *або* $2 \le p < \infty$, $\theta = \infty$ *мають місце порядкові рівності*

$$\epsilon_m(B^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp d_m(\mathbb{B}^{0,r}_{p,\theta}, L_q) \asymp (\log_2 m)^{-r+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

У розвиток результатів із [199] та [127] нашою метою є встановлення точних за порядком оцінок величин $\epsilon_m(B^{0,\gamma}_{p,\theta}, \exp L^\nu)$ та $d_m(\mathbb{B}^{0,\gamma}_{p,\theta}, \exp L^\nu)$ для різних співвідношень між параметрами p, θ, γ і ν, в тому числі тих, що охоплені теоремами ST$_5$, C1$_5$ і C2$_5$. Для формулювання основного результату введемо додаткові позначення.

На площині $\mathbb{R}^2$ виділимо множину

$$\Omega := \Big\{(\gamma,\nu) : \quad 0 < \gamma < \infty \text{ і } 0 < \nu < \infty\Big\}$$

та визначимо такі її підмножини

$$D_1 := \Big\{(\gamma,\nu) \in \Omega : \quad \frac{1}{2} < \gamma < 1,\ \nu < \frac{1}{1-\gamma}\Big\},$$

$$D_2 := \Big\{(\gamma,\nu) \in \Omega : \quad \gamma \ge 1,\ 0 < \nu < \infty\Big\},$$

$$G_1 := \Big\{(\gamma,\nu) \in \Omega : \quad \nu \le 2,\ \gamma > \frac{1}{2}\Big\},$$

$$G_2 := \Big\{(\gamma,\nu) \in \Omega : \quad \nu \ge 2,\ \gamma > 1 - \frac{1}{\nu}\Big\}.$$

Зазначимо, що $D_1 \cup D_2 = G_1 \cup G_2$.

Теорема 5.1.1. *Нехай* $(\gamma,\nu) \in D_1 \cup D_2$ *і* $\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu)$ *позначає будь-яку із величин* $\epsilon_n(\text{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$ *чи* $d_n(\text{dyad}\, \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$. *Тоді*

a) якщо $(\gamma,\nu) \in G_1$ *і* $2 \le q \le \infty$, $\theta = \infty$, *то*

$$\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu) \asymp (\ln n)^{\frac{1}{2}-\gamma}; \tag{5.14}$$

b) якщо $(\gamma,\nu) \in G_2$ *і* $2 \le q \le \infty$, $\theta = \infty$, *то*

$$\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu) \asymp (\ln n)^{1-\frac{1}{\nu}-\gamma}; \tag{5.15}$$

c) якщо $(\gamma,\nu) \in \Omega$ *і* $q = \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\gamma > 1 - \frac{1}{\theta}$, *то*

$$\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu) \asymp (\ln n)^{1-\frac{1}{\theta}-\gamma}; \tag{5.16}$$

d) якщо $(\gamma,\nu)\in\Omega$ *і* $2\le q<\infty$, $2\le\theta<\infty$, $\gamma>\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}$, *то*

$$\Lambda_n(q,\theta,\gamma,\nu)\asymp(\ln n)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}-\gamma}; \tag{5.17}$$

Доведення теореми 5.1.1 складається з трьох етапів:

I. Оцінка зверху величин $\sup\limits_{f\in\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}}\|f-E_Mf\|_{\exp L^\nu}$, яка буде слугувати оцінкою зверху для $d_n(\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta},\exp L^\nu)$;

II. Оцінка знизу для $\epsilon_n(\mathrm{dyad}\,B^{0,\gamma}_{q,\theta},\exp L^\nu)$;

III. Фактичне застосування леми A_5 і висновок щодо точних за порядком оцінках в теоремі 5.1.1.

Другий етап включає доведення декількох допоміжних тверджень, які оформлені у вигляді лем і зібрані до окремого пункту.

5.1.3 Допоміжні твердження

Лема 5.1.1. *Нехай* $\lambda\ge1$ *і* $k\ge0$, $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$ *— парна функція з носієм на* $(-2,-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},2)$ *і* $\mathcal{L}_\lambda:=\psi(\lambda^{-1}D)$. *Тоді при* $1\le q\le\infty$

$$\|\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda\|_{L_q\to L_q}\le C\min\{\lambda^{-1}2^k,1\},\quad k\ge0, \tag{5.18}$$

$$\|\mathbb{D}_k\mathcal{L}_\lambda\|_{L_q\to L_q}\le C\min\{\lambda^{-1}2^k,\lambda2^{-k}\},\quad k\ge1, \tag{5.19}$$

де C *— деяка додатна стала.*

Доведення. У випадку $q=\infty$ лема 5.1.1 доведена в [199]. У випадку $1\le q<\infty$ достатньо фактично поновити доведення для випадку $q=\infty$, внісши незначні правки. Отже, поряд з функцією $\psi_0(s):=\psi(s)$ розглянемо функції $\psi_{-1}(s)=s^{-1}\psi(s)$ та $\psi_1(s)=s\psi(s)$ і зазначимо, що всі вони є функціями із множини $C^\infty(\mathbb{R})$ з компактними носіями відділеними від початку координат. Згідно з означенням

$$\psi_j(\lambda^{-1}D)f(x):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_j(\lambda^{-1}n)\widehat{f}_ne^{2\pi inx},\quad f\in L_q(\mathbb{T}),\quad j=-1,0,1.$$

Позначимо через $\mathcal{F}g$ перетворення Фур'є функції $g\in L_1(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{F}g(u):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi itu}g(t)dt,$$

а через $\mathcal{F}^{-1}g$ — обернене перетворення Фур'є.

Тоді, використовуючи представлення [198]

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_j(\lambda^{-1}n)\widehat{f}_n e^{2\pi inx}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}^{-1}\psi_j(\lambda^{-1}y)f(x-y)dy,$$

з урахуванням властивостей операції згортки [57, с. 33], маємо: при $1\le q\le\infty$

$$\|\psi_j(\lambda^{-1}D)f\|_q\le\|\mathcal{F}^{-1}\psi_j(\lambda^{-1}\cdot)\|_1\|f\|_q\le C\|f\|_q,\quad j=-1,0,1. \tag{5.20}$$

Тепер, очевидно, при $k\ge 0$ та $\lambda\ge 1$ (зокрема, при $\lambda\le 2^k$)

$$\|\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda\|_{L_q\to L_q}\le C. \tag{5.21}$$

Далі, фіксуємо k і $\lambda>2^k$. Покладемо $x_{m,k}=m2^{-k}$. Тоді для $x\in[x_{m,k},x_{m+1,k})$,

$$\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f(x)=2^k\int_{x_{m,k}}^{x_{m+1,k}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\psi_0(\lambda^{-1}l)\int_0^1 e^{2\pi ily}f(y)dye^{2\pi ilx}\right)dx=$$

$$=2^k\sum\nolimits_{l\in\mathbb{Z}}\psi_0(\lambda^{-1}l)\lambda^{-1}\int_0^1\frac{e^{2\pi il(x_{m+1,k}-y)}-e^{2\pi il(x_{m,k}-y)}}{2\pi il\lambda^{-1}}f(y)dy=$$

$$=2^k\lambda^{-1}(\psi_{-1}(\lambda^{-1}D)f(x_{m+1,k})-\psi_{-1}(\lambda^{-1}D)f(x_{m,k})) \tag{5.22}$$

і

$$\left(\int_{x_{m,k}}^{x_{m+1,k}}|\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\le$$

$$\le 2^k\lambda^{-1}\left(\int_{x_{m,k}}^{x_{m+1,k}}|\psi_{-1}(D/\lambda)f(x_{m+1,k})-\psi_{-1}(D/\lambda)f(x_{m,k})|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5.23}$$

Права частина (5.23), зважаючи на нерівність $|a+b|^q\le 2^{q-1}(|a|^q+|b|^q)$, $a,b\in\mathbb{R}, q\ge 1$, не перевищує $C_q^{(1)}2^k\lambda^{-1}\omega^{(q)}(\psi_{-1}(D/\lambda)f,\frac{1}{2^k})$ з деякою сталою $C_q^{(1)}$, що залежить від q (тут $\omega^{(q)}(\varphi,\cdot)$ позначає $q-$інтегральний при $1\le q<\infty$ модуль неперервності функції φ на інтервалі $[x_{m,k},x_{m+1,k})$).

Останнє твердження в поєднанні з нерівністю (5.23) і з урахуванням відомих властивостей модуля неперервності $\omega^{(q)}(\varphi,\cdot)$ дозволяє записати співвідношення

$$\left(\int\limits_{x_{m,k}}^{x_{m+1,k}}|\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C_q^{(2)}2^k\lambda^{-1}\left(\int\limits_{x_{m,k}}^{x_{m+1,k}}|\psi_{-1}(D/\lambda)f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

наслідком якого є нерівність

$$\|\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f\|_q\le C2^k\lambda^{-1}\|\psi_{-1}(D/\lambda)f\|_q \tag{5.24}$$

при $\lambda > 2^k$. Поєднавши (5.20) та (5.24), отримаємо (5.18).

Нерівність (5.19) достатньо довести у випадку $k \geq 1$, $\lambda \leq 2^k$. Фіксуємо x. Тоді $\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f(x)$ є усередненням $\mathcal{L}_\lambda f$ по деякому інтервалу $[x_{m,k}, x_{m+1,k})$ довжиною 2^{-k}, якому належить x. За теоремою про середнє значення, що застосована до $\mathbb{E}_k\mathcal{L}_\lambda f(x)$ і $\mathbb{E}_{k-1}\mathcal{L}_\lambda f(x)$ для $k \geq 1$, можна записати

$$\mathbb{D}_k\mathcal{L}_\lambda f(x) = \mathcal{L}_\lambda f(x') - \mathcal{L}_\lambda f(x'') = (\mathcal{L}_\lambda f)'(\widetilde{x})(x' - x''),$$

де x', x'', $\widetilde{x}$ розміщені від x на відстанях, що не перевищують 2^{-k+1}. Далі, $(\mathcal{L}_\lambda f)' = \lambda\psi_1(D/\lambda)f$ і тоді при $1 \leq q \leq \infty$ з урахуванням (5.20), маємо

$$\|\mathbb{D}_k\mathcal{L}_\lambda f\|_q \leq 2^{-k+1}\|(\mathcal{L}_\lambda f)'\|_q \leq C\lambda 2^{-k}\|f\|_q.$$

Лема 5.1.1 доведена. ♦

Лема 5.1.2. *Нехай* $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ *і* $\gamma > \frac{1}{2}$. *Тоді*

$$B^{0,\gamma}_{q,\theta} \hookrightarrow \mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}. \tag{5.25}$$

Доведення. В [199, лема 3.2] доведено, що при $\gamma > \frac{1}{2}$ справедливе вкладення $LG^\gamma \hookrightarrow LG^\gamma_{\mathrm{dyad}}$. У запроваджених позначеннях це означає, що $B^{0,\gamma}_{q,\theta} \hookrightarrow \mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ при $q = \infty$ і $\theta = \infty$. У випадку $1 \leq q < \infty$ і $\theta = \infty$ схема доведення така ж, як і у випадку $q = \infty$ і $\theta = \infty$. При цьому використовується лема 5.1.1 для $1 \leq q < \infty$ (замість $q = \infty$).

Отже, дотримуючись схеми доведення леми 3.2 із [199], доведемо (5.25) у випадку $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Попередньо виведемо одну нерівність, що пов'язує послідовності норм $\|\mathbb{D}_k f\|_q$, $k \in \mathbb{Z}_+$ та $\|L_n f\|_q$, $n \in \mathbb{Z}_+$ при $1 \leq q < \infty$, аналогічну такій нерівності із [199, с. 151] для $q = \infty$.

З цією метою розглянемо послідовність функцій $(\Psi_n(s))_{n=0}^\infty$, $s \in \mathbb{R}$, визначену таким чином:

1) Ψ_0 — парна функція із $C^\infty(\mathbb{R})$ така, що $\mathrm{supp}\,\Psi_0 = (-4, 4)$ і $\Psi_0(s) = 1$ при $s \in (-2, 2)\&$.

2) $\Psi_n(s) := \Psi(2^{-n}s)$, $n \in \mathbb{N}$, де Ψ — парна функція із $C^\infty(\mathbb{R})$, що задовольняє умови $\mathrm{supp}\,\Psi = (-8, -\frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{8}, 8)$ та $\Psi(s) = 1$ при $|s| \in (\frac{1}{2}, 4)$.

Тоді, очевидно, $\Psi_n\phi_n = \phi_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і відповідно до цього $\Psi_n(D)L_n = L_n$. Тому, враховуючи, що $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} L_n f(x)$ майже для всіх $x \in \mathbb{R}$, можна записати: для $1 \leq q \leq \infty$

$$\|\mathbb{D}_k f\|_q = \|\mathbb{D}_k \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(D)L_n f\|_q \leq \|\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{D}_n\Psi_n(D)\|_{L_q\to L_q}\|L_n f\|_q. \tag{5.26}$$

Але, згідно з означенням, $\Psi_n(D)$ — це $\psi(\lambda^{-1}D)$ з $\lambda = 2^{n+2}$ і функцією $\psi(s) = \Psi(s^{1/3})$ (а отже, $\psi(s^3) = \Psi(s)$). Тому, в силу леми 5.1.1

$$\|\mathbb{D}_k\Psi_n(D)\|_{L_q\to L_q} \le C2^{-|k-n|},$$

і із (5.26) отримаємо

$$\|\mathbb{D}_k f\|_q \le C\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-|k-n|}\|L_n f\|_q. \tag{5.27}$$

Використовуючи нерівність (5.27), для $f \in B^{0,\gamma}_{q,\theta}$, $1 \le q \le \infty$ при $\theta = 1$ маємо:

$$\|f\|_{\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{\infty,\theta}} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\gamma}\|\mathbb{D}_k f\|_q \le C\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-|k-n|}\|L_n f\|_q \le$$

$$\le C_1\sum_{n=0}^{\infty}\|L_n f\|_q\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\gamma}2^{-|k-n|} \le C_2\sum_{n=0}^{\infty}\|L_n f\|_q(n+1)^{\gamma} = C_2\|f\|_{B^{0,\gamma}_{q,\theta}}.$$

У випадку $1 < \theta < \infty$ і $1 \le q \le \infty$

$$\|f\|_{\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\gamma\theta}\|\mathbb{D}_k f\|_q^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le C\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{\gamma\theta}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{-|k-n|}\|L_n f\|_q\right)^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le C_1\sum_{m=0}^{\infty}2^{-m}\left(\sum_{k=-m}^{\infty}(k+m+1)^{\gamma\theta}\|L_{k+m}\|_q^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \le C_2\|f\|_{B^{0,\gamma}_{q,\theta}}.$$

Лема 5.1.2 доведена. ♦

5.1.4 Доведення теореми 5.1.1

I. *Оцінка зверху величин* $\sup\limits_{f\in\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}}\|f - \mathbb{E}_M f\|_{\exp L^{\nu}}{}^{(*)}$.

Нехай $f \in \mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}$, $2 \le q \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$. Тоді із (5.6), враховуючи що послідовність операторів $(\mathbb{D}_n)_{n=0}^{\infty}$ володіє тою властивістю, що для $f \in L_q(\mathbb{T})$ маємо $\mathbb{D}_k\mathbb{D}_l f(x) = 0$ при $k \ne l$ і $\mathbb{D}_k\mathbb{D}_l f(x) = \mathbb{D}_l f(x)$ при $k = l$, можна записати

$$f(x) - \mathbb{E}_M f(x) = \sum_{k=M+1}^{\infty}\mathbb{D}_k\mathbb{D}_l f(x) \tag{5.28}$$

і ця рівність виконується майже всюди на $\mathbb{R}$.

Встановимо оцінку зверху позначених вище величин $^{(*)}$ і, як наслідок, оцінку зверху в теоремі 5.1.1 для $d_n(\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$, окремо в кожному із таких випадків:

(i) $2 \le q \le \infty$, $\theta = \infty$;

(ii) $q = \infty$, $1 \le \theta < \infty$, $\gamma > 1 - \frac{1}{\theta}$;

(iii) $2 \le q < \infty$, $2 \le \theta < \infty$, $\gamma > \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}$.

У випадку (i) при $2 \le q < \infty$, використовуючи (5.28), а також лему ST_5 при $2 \le p < \infty$ (покладаючи при цьому $p = q$) і $1 \le s \le 2$ (зауважимо, тоді $s\gamma > 1$), маємо

$$p^{-1/\nu}\|f - \mathbb{E}_M f\|_p \le C_1 p^{1/s' - 1/\nu}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty} \|\mathbb{D}_k f\|_p^s\right)^{\frac{1}{s}} =$$

$$= C_1 p^{1/s' - 1/\nu}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty} \|\mathbb{D}_k f\|_q^s\right)^{1/s} \le C_2 p^{1/s' - 1/\nu}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty} (k+1)^{-s\gamma}\right)^{\frac{1}{s}} \le$$

$$\le C(s,\gamma) p^{1 - 1/\nu - 1/s} M^{1/s - \gamma}. \tag{5.29}$$

В останній із нерівностей в (5.29) взято до уваги те, що при $\alpha > 1$

$$\sum_{k=M}^{\infty} k^{-\alpha} \le \int\limits_M^{\infty} t^{-\alpha} dt \le C(\alpha) M^{1-\alpha}. \tag{5.30}$$

Якщо $\nu \le 2$, то із (5.29) при $s = 2$, $\gamma > \frac{1}{2}$ (тоді $1 - \frac{1}{\nu} - \frac{1}{s} < 0$), маємо

$$\|f - \mathbb{E}_M f\|_{\exp L^\nu} \ll M^{\frac{1}{2} - \gamma}.$$

Якщо ж $\nu > 2$, то із (5.29) при $s = \frac{\nu}{\nu - 1}$ (тоді $s \in (1,2)$, $1 - \frac{1}{\nu} - \frac{1}{s} = 0$, а умова $s\gamma > 1$ тягне за собою $\gamma > 1 - \frac{1}{\nu}$), отримаємо

$$\|f - \mathbb{E}_M f\|_{\exp L^\nu} \ll M^{1 - \frac{1}{\nu} - \gamma}.$$

Для доведення оцінки зверху для величин $^{(*)}$ у випадку (i) при $q = \infty$ достатньо повторити її доведення при $2 \le q < \infty$ відштовхуючись від (5.29), лише замінивши в ній знак $=$ на знак $<$. Таким чином, у випадку (i) оцінка зверху в теоремі 5.1.1 доведена.

У випадку (ii) при $q = \infty$, $1 \le \theta < \infty$, використавши (5.28) і лему ST_5 при $s = 1$, а потім врахувавши умову $\gamma > 1 - \frac{1}{\theta}$, тобто $\gamma\theta' > 1$, при $1 \le p < \infty$ маємо

$$p^{-1/\nu}\|f - \mathbb{E}_M f\|_p \le C p^{-1/\nu} \sum_{k=M+1}^{\infty} \|\mathbb{D}_k f\|_p \le$$

$$\leq Cp^{-1/\nu}\sum_{k=M+1}^{\infty}\|\mathbb{D}_k f\|_\infty \leq Cp^{-1/\nu}\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{-\gamma}\|\mathbb{D}_k f\|_\infty (k+1)^{\gamma}\leq$$

$$\leq Cp^{-1/\nu}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{-\gamma\theta'}\right)^{\frac{1}{\theta'}}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma\theta}\|\mathbb{D}_k f\|_\infty^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\leq$$

$$\leq C(\gamma)M^{-\gamma+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{5.31}$$

Тут, в останній нерівності, знову використане співвідношення (5.30).

З огляду на (5.31) приходимо до висновку, що для $f\in\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}$, $q=\infty$, $1\leq\theta<\infty$ і $\gamma>1-\frac{1}{\theta}$ буде

$$\|f-\mathbb{E}_M f\|_{\exp L^\nu}\ll M^{-\gamma+1-\frac{1}{\theta}}. \tag{5.32}$$

У випадку (iii) при $2<\theta<\infty$ і $\gamma>\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}$ міркування аналогічні застосованим у випадках (i) та (ii). А саме, використавши лему ST_5 при $2\leq p<\infty$ і $s=2$, поклавши при цьому $p=q$, для $f\in\operatorname{dyad}B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ маємо

$$p^{-1/\nu}\|f-\mathbb{E}_M f\|_p\leq Cp^{-1/\nu}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}\|\mathbb{D}_k f\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq Cp^{-1/\nu}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{-2\gamma}[(k+1)^{2\gamma}\|\mathbb{D}_k f\|_p^2]\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq Cp^{-1/\nu}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{-\frac{2\gamma\theta}{\theta-2}}\right)^{\frac{1}{2}(1-\frac{2}{\theta})}\left(\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma\theta}\|\mathbb{D}_k f\|_q^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\leq$$

$$\leq C_0(\gamma)M^{-\gamma+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}\|f\|_{\operatorname{dyad}B^{0,\gamma}_{q,\theta}}. \tag{5.33}$$

Для встановлення третьої нерівності у співвідношенні (5.33) застосовано нерівність Гельдера $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k b_k\leq\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}}\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k^{\mu'}\right)^{\frac{1}{\mu'}}$, $\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu'}=1$, з $\mu=\frac{\theta}{2}$ (тоді $\mu'=\frac{\theta}{\theta-2}$), покладаючи $a_k=(k+1)^{-2\gamma}$, $b_k=(k+1)^{2\gamma}\|\mathbb{D}_k f\|_p^2$ при $k=M+1,M+2,\ldots$ і $a_k=b_k=0$ при $k=1,\ldots,M$. Остання ж нерівність в (5.33) — наслідок співвідношення (5.30).

Тепер із (5.33), враховуючи умову $\gamma>\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}$, для $f\in\operatorname{dyad}\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}$ при $\nu>0$ отримаємо

$$\|f-\mathbb{E}_M f\|_{\exp L^\nu}\ll M^{-\gamma+\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}}.$$

У випадку (iii) при $\theta = 2$ і $\gamma > 0$ аналогічним чином приходимо до співвідношення

$$p^{-1/\nu}\|f - \mathbb{E}_M f\|_p \le C_1 p^{-1/\nu} M^{-\gamma}\Bigg(\sum_{k=M+1}^{\infty}(k+1)^{\gamma\theta}\|\mathbb{D}_k f\|_q^{\theta}\Bigg)^{\frac{1}{\theta}} \le$$

$$\le C_1 p^{-1/\nu} M^{-\gamma}\|f\|_{\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}}\ ,$$

звідки для $f \in \mathrm{dyad}\,\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}$ маємо

$$\|f - \mathbb{E}_M f\|_{\exp L^\nu} \ll M^{-\gamma}.$$

Тепер, врахувавши, що для будь-якої функції $f \in \mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ має місце вкладення $\mathbb{E}_M f \subset X_m$, де X_m — простір породжений характеристичними функціями g_j, $j = 0, 1, \ldots, 2^M - 1$ інтервалів $[j2^{-M}, (j+1)2^{-M}]$ і $\mathrm{dim} X_m = 2^M$, поклавши $n = 2^M + j$, $j = 0, 1, \ldots, 2^M - 1$, як наслідок встановлених оцінок зверху величин $^{(*)}$ отримаємо шукані оцінки зверху для величин $d_n(\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$ в теоремі 5.1.1.

II. *Оцінка знизу для* $\epsilon_n(\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$.

У випадку $q = \infty$, $\theta = \infty$ оцінка знизу — з урахуванням ототожнення $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty}$ і LG^γ, а також вкладення $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \hookrightarrow \mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{\infty,\infty}$ при $\gamma > \frac{1}{2}$ — відома (див. теорему ST_5)

$$\epsilon_n(\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{\infty,\infty}, \exp L^\nu) \gg \begin{cases} (\log_2 n)^{-\gamma+\frac{1}{2}}, & \gamma > \frac{1}{2},\ \ \nu < 2, \\ (\log_2 n)^{-\gamma+1-\frac{1}{\nu}}, & \gamma > 1 - \nu^{-1},\ \ \nu \ge 2. \end{cases}$$

У випадку $2 \le q < \infty$, $\theta = \infty$ (навіть при $1 \le q \le \infty$) — з урахуванням того, що $B^{0,\gamma}_{\infty,\infty} \hookrightarrow B^{0,\gamma}_{q,\infty} \hookrightarrow \mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\infty}$ — оцінка знизу для $\epsilon_n(\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\infty}, \exp L^\nu)$ випливає автоматично із оцінки знизу для $\epsilon_n(B^{0,\gamma}_{\infty,\infty}, \exp L^\nu)$, встановленої в [199].

Оцінку знизу у випадках $q = \infty$, $1 \le \theta < \infty$ і $2 \le q \le \infty$, $2 \le \theta < \infty$ знову ж таки отримаємо як наслідок оцінок знизу для $\epsilon_n(B^{0,\gamma}_{q,\infty}, L_p)$, $1 \le p \le \infty$ в теоремах $\mathrm{C1}_5$ та $\mathrm{C2}_5$, з урахуванням вкладення $B^{0,\gamma}_{q,\theta} \hookrightarrow \mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}$ (див. лему 5.1.2) і нерівності

$$\epsilon_n(\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu) \ge \epsilon_n(\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}, L_p) \ge C\epsilon_n(B^{0,\gamma}_{q,\theta}, L_p).$$

III. *Висновок.*

Застосувавши лему A_5 у ситуації встановлених в пункті I оцінок зверху для величин $d_n(\mathrm{dyad}\,\mathbb{B}^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$ і в пункті II оцінок знизу для величин $\epsilon_n(\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{q,\theta}, \exp L^\nu)$, отримаємо твердження теореми 5.1.1. ∎

5.2 Наближення класів кратних інтегралів Пуассона

Знайдені точні за порядком оцінки наближення класів згорток сумовних функцій з багатовимірним ядром Пуассона за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у многогранних областях.

5.2.1 Позначення, означення та формулювання основних результатів

Нехай $\mathbb{R}^d$ — $d-$вимірний евклідів простір, $\mathbb{Z}^d$ — цілочислова гратка в $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}_+^d = \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \ : \ k_j \geq 0, \ j = \overline{1, d}\}$, $\mathbb{Z}_0^d = \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \ : \ \prod\limits_{j=1}^{d} k_j \neq 0\}$, $\mathbb{N}^d = \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \ : \ k_j = 1, 2, \ldots, \ j = \overline{1, d}\}$ (при $d = 1$ пишемо відповідно $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_0$ і $\mathbb{N}$); якщо $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$, то $|\Lambda|$ позначає число точок скінченної множини Λ; $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d \big/ (2\pi\mathbb{Z})^d$ — $d-$вимірний тор;

$L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$ — простір вимірних $2\pi-$періодичних за кожним аргументом функцій $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_p = \left((2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{при } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d} |f(\boldsymbol{x})| \quad \text{при } p = \infty.$$

Визначимо оператор $I_K\colon \ L_1(\mathbb{T}^d) \to L_1(\mathbb{T}^d)$ за допомогою рівності

$$I_K \varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi * K = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(\boldsymbol{y}) K(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y},$$

тобто I_K — оператор згортки з ядром $K \in L_1(\mathbb{T}^d)$, визначений на множині $L_1(\mathbb{T}^d)$. Нехай

$$W(K) := \{f : \ \ f(\boldsymbol{x}) = I_K \varphi(\boldsymbol{x}), \ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d, \ \|\varphi\|_p \leq 1\}. \tag{5.34}$$

Покладемо

(i) $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\beta} =: W(K)$, якщо

$$K(\boldsymbol{t}) =: B_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}; \boldsymbol{\beta}) = 2^d \sum_{k \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} k_j^{-r_j} \cos(k_j t_j - \frac{\beta_j \pi}{2})$$

— багатовимірний аналог ядра Бернуллі;

(ii) $A^{r,\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}} =: W(K)$, якщо

$$K(\boldsymbol{t}) =: P^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{t}) = 2^d \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} e^{-\alpha_j k_j^{r_j}} \cos(k_j t_j - \frac{\beta_j \pi}{2}),$$

$\alpha_j > 0$, $r_j > 0$, $\beta_j \in \mathbb{R}$.

У випадку, коли $r_j = 1$ при всіх $j = \overline{1,d}$ і $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_d =: \alpha > 0$, покладаючи $e^{-\alpha} = \varrho$ $(0 < \varrho < 1)$, клас $A^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ позначимо через $A^{\varrho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ і, якщо ще $\beta_j = 0$, $j = \overline{1,d}$, — то через A^{ϱ}_{p}. Саме класи A^{ϱ}_{p} фігурують в твердженнях цього підрозділу, хоча, як можна відслідкувати по доведеннях цих тверджень, одержані результати залишаються справедливими і для класів $A^{\varrho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ при будь-яких значеннях $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$.

Відповідне класам A^{ϱ}_{p} ядро K у визначенні (5.34), тобто ядро

$$P(\varrho;\boldsymbol{t}) := 2^d \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} \varrho^{k_j} \cos k_j t_j, \tag{5.35}$$

називається *багатовимірним (або кратним) ядром Пуассона.*

Зазначимо, що для будь-якого p, $1 \le p \le \infty$, функції що належать множині A^{ϱ}_{p} є неперервними на $\mathbb{T}^d$, а також задовольняють умову $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\boldsymbol{x}) dx_j = 0$, $j = \overline{1,d}$.

Для довільної обмеженої множини $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ через $T(\Lambda)$ позначимо простір тригонометричних поліномів вигляду

$$t(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Lambda} c_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d,\ c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C},$$

де $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) := k_1x_1 + \ldots + k_dx_d$, і покладемо

$$E_\Lambda(F)_q := \sup_{f\in F} \inf_{t\in T(\Lambda)} \|f - t\|_q, \quad F \subset L_q(\mathbb{T}^d).$$

Величину $E_\Lambda(F)_q$ назвемо найкращим наближенням класу F в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$ за допомогою тригонометричних поліномів із $T(\Lambda)$, або відхиленням класу F від простору $T(\Lambda)$.

Для функції $h \in L_1(\mathbb{T}^d)$ через $S[h]$ позначимо її ряд Фур'є за тригонометричною системою $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$:

$$S[h](\boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \widehat{h}_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad \widehat{h}_{\boldsymbol{k}} = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} h(\boldsymbol{t}) e^{-i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} d\boldsymbol{t},$$

і нехай

$$S_\Lambda(h;\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Lambda} \widehat{h}_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}$$

— частинна сума Фур'є функції h, породжена гармоніками $\{e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}\}_{\boldsymbol{k}\in\Lambda}$. Таку суму назвемо Λ – *сумою Фур'є функції* h .

Зокрема, якщо $\Lambda = \triangle(l, d)$, де

$$\triangle(l,d) = \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d \ : \ |\boldsymbol{k}|_1 := \sum_{j=1}^{d} |k_j| \le l\},$$

то для будь-якого $N \in \mathbb{N}$

$$S_{\triangle(N,d)}(h;\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\triangle(N,d)} \widehat{h}_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} = \sum_{l=1}^{N} \sum_{\boldsymbol{k}\in\Theta(l,d)} \widehat{h}_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})} =: \sum_{l=1}^{N} Y_l(h;\boldsymbol{x}), \tag{5.36}$$

де $\Theta(l,d) = \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d \ : \ |\boldsymbol{k}|_1 = l\}$.

Покладемо

$$\mathscr{E}_\Lambda(F)_q := \sup_{f\in F} \|f(\boldsymbol{x}) - S_\Lambda(f;\boldsymbol{x})\|_q, \quad F \subset L_q(\mathbb{T}^d).$$

Величина $\mathscr{E}_\Lambda(F)_q$ *— це точна верхня грань на множині* F *відхилень в просторі* $L_q(\mathbb{T}^d)$ *елементів із* F *від* Λ*-сум Фур'є.*

У даному підрозділі знайдені точні за порядком по параметру n оцінки величин $\mathscr{E}_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q$ та $E_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q$, $1 \le p,q \le \infty$ (теорема 5.2.1), де $\square(n,d)$ — множина цілочислових точок d−вимірного куба в $\mathbb{R}^d$, тобто

$$\square(n,d) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_0^d \ : \ \max_{1\le j\le d} |k_j| \le n\}.$$

Встановлено також (теорема 5.2.2), що для деяких співвідношень між параметрами p та q (а саме, при $1 < q \le p < \infty$) оцінки наближення класу A_p^ϱ в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$ поліномами із $T(\triangle(n,d))$ не гірші у порівнянні з оцінками наближення поліномами із $T(\square(n,d))$, незважаючи на те, що поза як $\dim T(\triangle(n,d)) = |\triangle(n,d)| = 2^d C_n^d$, а $\dim T(\square(n,d)) = |\square(n,d)| = 2^d(n+1)^d$, то $\dim T(\triangle(n,d)) < \dim T(\square(n,d))$ при $d \ge 2$.

Отже, справедливі наступні твердження.

Теорема 5.2.1. *Для будь-яких* $d \in \mathbb{N}$, *при* $1 \le p,q \le \infty$

$$E_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \mathscr{E}_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \varrho^n.$$

Теорема 5.2.2. *Для будь-яких* $d \in \mathbb{N}$, *при* $1 < q \le p < \infty$

$$E_{\triangle(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \mathscr{E}_{\triangle(n,d)}(A_p^\varrho)_q \asymp \varrho^n.$$

Зауваження 5.2.1. *(1) У випадку $d=1$, очевидно, $\square(n,d)=\triangle(n,d)=[-n,n]\cap\mathbb{Z}_0$ і результат теореми 5.2.1 в цьому випадку відомий (див., наприклад, [132, с. 185–190]) і [114, с. 217–227, 247–251]. Більш того, для класів $C^{r,\alpha}_{\boldsymbol{\beta},p}$ неперервних 2π – періодичних функцій з однією змінною, що зображуються у вигляді $f=c+\varphi*\Psi^{r,\alpha}_{\beta}$, де $c\in\mathbb{R}$, $\|\varphi\|_p\le 1$ і $\Psi^{r,\alpha}_{\beta}(t)=1+2\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\frac{\beta\pi}{2})$, $\alpha>0$, $r>0$ (зауважимо, що клас $C^{r,\alpha}_{\beta,p}$ відрізняється від $A^{r,\alpha}_{\beta,p}$ при $d=1$ лише тим, що для функцій $f\in C^{r,\alpha}_{\beta,p}$ не обов'язково $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$) встановлена сильна асимптотика величин $\mathscr{E}_n(C^{r,\alpha}_{\beta,p})_q$, $p=q=1$ чи $p=q=\infty$ — в [55] при $r=1$ і в [114, с. 130–132, 154–157] при $r>1$. Також знайдені точні значення величин $E_n(C^{r,\alpha}_{\beta,p})_q$ — в [55] при $p=q=1$, $r=1$ і в [47, 186] при $p=q=\infty$, $r=1$ (і асимптотично точні значення при $p=q=1$ чи $p=q=\infty$, $r\ge 1$, $\beta\in\mathbb{R}$ в [114, с. 260]).*

(2) Простір поліномів $T(\triangle(n,d))$, $d\ge 2$, на відміну від простору $T(\square(n,d))$, для ряду випадків (співвідношень між параметрами p та q в означенні класу A^{ϱ}_p і простору $L_q(\mathbb{T}^d)$) є оптимальним також і в тому розумінні, що забезпечує найкращі за порядком оцінки для колмогоровських поперечників $d_M(A^{\varrho}_p,L_q(\mathbb{T}^d))$ заданої розмірності M, тобто за математичною термінологією такий простір є екстремальним в задачі про значення колмогоровських поперечників певних класів функцій. Цей факт, хоча явно і не відзначений, можна відслідкувати у роботах [132, с. 239–240], [149, 171].

Зазначимо, що з цієї точки зору, найкращим підпростором для наближення функцій із класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$ є множина тригонометричних поліномів $T(\Lambda)$ зі спектром в гіперболічних хрестах (див., наприклад, [135])

$$\Lambda=\Gamma(N,\boldsymbol{\gamma}):=\{\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{Z}^d:\quad 0<\prod_{j=1}^{d}|k_j|^{\gamma_j}\le N\},$$

де для $\boldsymbol{r}=(r_1,\ldots,r_d)$, $r_j>0$ покладено $\gamma_j=\frac{r_j}{r_1}$, $j=\overline{1,d}$.

5.2.2 Доведення теореми 5.2.1

Оцінка зверху. Якщо $f\in A^{\varrho}_p$, то згідно з (5.34) та (5.35)

$$f(\boldsymbol{x})=(2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(\boldsymbol{t})P(\varrho,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t},\quad \|\varphi\|_p\le 1. \tag{5.37}$$

З іншого боку, зрозуміло, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$S_{\square(n,d)}(f;\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) P_n(\varrho, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{5.38}$$

де

$$P_n(\varrho;\boldsymbol{t}) = 2^d \sum_{\boldsymbol{k}\in\square^+(n,d)} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \cos k_j t_j, \quad \square^+(n,d) := \square(n,d) \cap \mathbb{N}^d.$$

Тому, для функції $f \in A_p^\varrho$ при $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$

$$f(\boldsymbol{x}) - S_{\square(n,d)}(f;\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(\boldsymbol{t}) Q(\varrho, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{t}) d\boldsymbol{t},$$

де

$$Q(\varrho;\boldsymbol{t}) = 2^d \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d\setminus\square^+(n,d)} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \cos k_j t_j.$$

Далі, згідно з нерівністю Юнга (див., наприклад, [32, с. 67–68]) якщо p, q і s такі, що $1 \le p \le q \le \infty$, $1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$, то

$$\|f(\cdot) - S_{\square(n,d)}(f;\cdot)\|_q \le C\|\varphi\|_p \cdot \|Q\|_s. \tag{5.39}$$

Але ж

$$\|Q\|_s \le \|Q\|_\infty \le 2^d \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d\setminus\square^+(n,d)} \prod_{j=1}^d \varrho^{k_j} \ll \varrho^n \tag{5.40}$$

(остання нерівність записана на підставі леми Б$_5$ з пункту 5.2.4). А отже, поєднавши (5.39) і (5.40), приходимо до висновку, що при $1 \le p \le q \le \infty$

$$\mathscr{E}_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q \ll \varrho^n,$$

і така ж оцінка справедлива при $1 \le q < p \le \infty$, бо в цьому випадку

$$\mathscr{E}_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q \le \mathscr{E}_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_p \ll \varrho^n.$$

Оцінка знизу. Отримаємо оцінки знизу для $E_{\square(n,d)}(A_\infty^\varrho)_1$, які, зрозуміло, тягнуть за собою відповідні оцінки знизу для $E_{\square(n,d)}(A_p^\varrho)_q$ при будь-яких p та q, $1 \le p, q \le \infty$.

Розглянемо функцію $\varphi(\boldsymbol{x}) = e^{i(\boldsymbol{k}^0;\boldsymbol{x})}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, де $\boldsymbol{k}^0 = (k_1, \ldots, k_d) = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{d-1}, n+1)$.

Тоді, очевидно, $\boldsymbol{k} \notin \square(n,d)$. Нехай

$$f(\boldsymbol{t}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(\boldsymbol{x}) P(\varrho; \boldsymbol{t}-\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d),$$

де, нагадаємо, $P(\varrho;\boldsymbol{x}) = 2^d \sum\limits_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d} \prod\limits_{j=1}^{d} \varrho^{k_j}\cos k_j x_j$. Зрозуміло, тоді $f(\boldsymbol{t}) = \varrho^{n+d} e^{i(\boldsymbol{k}^0,\boldsymbol{t})}$, і оскільки $\|\varphi\|_\infty \le 1$, то $f \in A^{\varrho}_{\infty}$. Далі, для довільного полінома $t \in T(\square(n,d))$ маємо

$$\sigma := (f-t; e^{i(\boldsymbol{k}^0;\boldsymbol{x})}) := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} (f(\boldsymbol{x}) - t(\boldsymbol{x})) e^{-i(\boldsymbol{k}^0;\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x} = \varrho^{n+d}.$$

З другого боку, $\sigma \le \|f-t\|_1$, звідки випливає $E_{\square(n,d)}(A^{\varrho}_{\infty})_1 \gg \varrho^n$.

Теорема 5.2.1 доведена. ■

5.2.3 Доведення теореми 5.2.2

Оцінка знизу є наслідком теореми 5.2.1, оскільки при $n \in \mathbb{N}$ і $d \ge 2$ має місце вкладення $\square(n,d) \supset \triangle(n,d)$.

Встановимо ***оцінку зверху*** для $\mathscr{E}_{\triangle(n,d)}(A^{\varrho}_{p})_q$. Спочатку розглянемо випадок $1 < p = q < \infty$. Для будь-якої функції $f \in L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, можна записати

$$f(\boldsymbol{x}) - S_{\triangle(n,d)}(f;\boldsymbol{x}) = [f(\boldsymbol{x}) - S_{\triangle(2n,d)}(f;\boldsymbol{x})] +$$

$$+ [S_{\triangle(2n,d)}(f;\boldsymbol{x}) - S_{\triangle(n,d)}(f;\boldsymbol{x})] =: Q_-(f;\boldsymbol{x}) + Q_+(f;\boldsymbol{x}),$$

і згідно з нерівністю Мінковського

$$\|f(\cdot) - S_{\triangle(n,d)}(f;\cdot)\|_p \le \|Q_-(f;\cdot)\|_p + \|Q_+(f;\cdot)\|_p. \tag{5.41}$$

У той же спосіб, що і при оцінюванні зверху величин $\mathscr{E}_{\square(n,d)}(A^{\varrho}_{p})_p$, $1 < p < \infty$, отримаємо

$$\|Q_-(f;\cdot)\|_p \le \Big\| \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d\setminus\triangle^+(2n,d)} \prod_{j=1}^{d} \varrho^{k_j}\cos k_j t_j \Big\|_1 \le \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d\setminus\triangle^+(2n,d)} \prod_{j=1}^{d} \varrho^{k_j} \ll \varrho^n \tag{5.42}$$

(тут $\triangle^+(n,d) := \triangle(n,d) \cap \mathbb{N}^d$). Остання нерівність в (5.42) записана на підставі леми Б$_5$ з пункту 5.2.4 з урахуванням того, що $\triangle(2n,d) \supset \square(n,d)$.

Оцінимо тепер $\|Q_+(f;\cdot)\|_p$. Зауважимо, якщо $f \in A^{\varrho}_{p}$, то згідно з означенням має місце представлення (5.37) і, очевидно,

$$Q_+(f;\boldsymbol{x}) = \sum_{l=n+1}^{2n} \varrho^l Y_l(\varphi;\boldsymbol{x})$$

(див. співвідношення (5.36)). Тоді, використавши лему Б$_5$ з пункту 5.2.4, поклавши в ній $M = n+1$, $N = 2n$ і $\lambda_m = \varrho^m$, отримаємо

$$\|Q_+(f;\cdot)\|_p \le \varrho^{n+1} \sup_{n+1\le s\le 2n} \|\sum_{k=n+1}^{s} Y_k(\varphi;\cdot)\|_p \le$$

$$\le \varrho^{n+1} \sup_{n+1\le s\le 2n} \|\sum_{k=1}^{s} Y_k(\varphi;\cdot) - \sum_{k=1}^{n} Y_k(\varphi;\cdot)\|_p \le$$

$$\le 2\varrho^{n+1} \sup_{n+1\le s\le 2n} \|\sum_{k=1}^{s} Y_k(\varphi;\cdot)\|_p = 2\varrho^{n+1} \sup_{n+1\le s\le 2n} \|S_{\triangle(s,d)}(\varphi;\cdot)\|_p. \tag{5.43}$$

Врахувавши, що послідовність $(S_{\triangle(n,d)})_{n=0}^{\infty}$ операторів $S_{\triangle(n,d)}$: $L_p(\mathbb{T}^d) \to L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 < p < \infty$, як випливає із роботи [126], — рівномірно обмежена по n, тобто

$$\|S_{\triangle(n,d)}(\varphi;\cdot)\|_p \le C_p \|\varphi\|_p,$$

як наслідок з нерівності (5.43) маємо нерівність

$$\|Q_+(f;\cdot)\|_p \ll \varrho^n. \tag{5.44}$$

Поєднавши (5.42) та (5.44) з (5.41), отримаємо: для $f \in A_p^{\varrho}$ при $1 < p < \infty$

$$\|f(\cdot) - S_{\triangle(n,d)}(f;\cdot)\|_p \ll \varrho^n,$$

а отже $\mathscr{E}_{\triangle(n,d)}(A_p^{\varrho})_p \ll \varrho^n$.

Оцінка зверху для $\mathscr{E}_{\triangle(n,d)}(A_p^{\varrho})_q$ при $1 < q < p < \infty$ є наслідком з оцінки зверху для $\mathscr{E}_{\triangle(n,d)}(A_p^{\varrho})_p$, бо $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_p$.

Теорема 5.2.2 доведена. ■

5.2.4 Допоміжні твердження

Лема Б$_5$. *Має місце оцінка*

$$\delta(N) := \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d\setminus\square^+(N,d)} \prod_{j=1}^{d} \varrho^{k_j} \asymp \varrho^N, \quad 0 < \varrho < 1.$$

Доведення. Оцінка знизу тривіальна. Доведемо для $\delta(N)$ оцінку зверху. Покладемо

$$\square^{(j)}(N,d) := \{\boldsymbol{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{N}^d \ : \ k_j > N\}.$$

Тоді, очевидно, $\mathbb{N}^d \setminus \square^+(N,d) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{d} \square^{(j)}(N,d)$. Якщо

$$\boldsymbol{k}(j) := (k_1, \dots, k_{j-1}, k_{j+1}, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^{d-1}, \quad j = \overline{1,d},$$

$$\Theta(l) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{N}^d \ : \ \sum_{j=1}^{d} k_j = l\},$$

то зауваживши, що $|\Theta(l)| = C_{l-1}^{d-1} \asymp l^{d-1}$, маємо

$$\delta(N) \le \sum_{j=1}^{d} \sum_{\boldsymbol{k} \in \square^{(j)}(N,d)} \prod_{j=1}^{d} \varrho^{k_j} \ll$$

$$\ll \sum_{j=1}^{d} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\boldsymbol{k}(j) \in \Theta(m,d-1) \\ k_j > N}} \varrho^{k_1 + \ldots + k_d} \ll \sum_{j=1}^{d} \sum_{m=1}^{\infty} m^{d-2} \varrho^m \sum_{k_j = N+1}^{\infty} \varrho^{k_j} \ll \varrho^N,$$

бо $\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{d-2} \varrho^m \le C$.

Лема доведена. ♦

Для $M, N \in \mathbb{Z}_+, \quad N \ge M$, розглянемо поліном

$$t_{M,N}(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=M}^{N} Y_m(\boldsymbol{x}), \quad \text{де} \quad Y_m(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \Theta(m,d)} c_k e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad c_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}.$$

Нехай $\Lambda = \{\lambda_m\}_{m=M}^{N}$ — довільний набір дійсних чисел і

$$t_{M,N}(\boldsymbol{x}; \Lambda) = \sum_{n=M}^{N} \lambda_m Y_m(\boldsymbol{x}).$$

Наступне твердження сформульоване у вигляді леми, хоча слід зазначити, воно є простим наслідком теореми 2.2 із [32, с. 15].

Лема B$_5$. *Якщо* $\lambda_{m+1} \le \lambda_m$, $m \in \mathbb{Z} \cap [M, N-1]$, *то при* $1 \le p \le \infty$

$$\|t_{M,N}(\cdot; \Lambda)\|_p \le \lambda_M \sup_{M \le s \le N} \|t_{M,s}(\cdot)\|_p. \tag{5.45}$$

Справді, застосувавши до $t_{M,N}(\boldsymbol{x}; \Lambda)$ при фіксованому $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ перетворення Абеля, маємо

$$\sum_{m=M}^{N} \lambda_m Y_m(\boldsymbol{x}) = \sum_{m=M}^{N-1} (\lambda_m - \lambda_{m+1}) \sum_{j=M}^{m} Y_j(\boldsymbol{x}) + \lambda_n \sum_{j=M}^{N} Y_j(\boldsymbol{x})$$

і

$$|\sum_{m=M}^{N}\lambda_m Y_m(\boldsymbol{x})| \le \lambda_M \sup_{M\le s\le N} |\sum_{j=M}^{s} Y_j(\boldsymbol{x})|,$$

звідки випливає (5.45).

5.3 Колмогоровські поперечники класів кратних інтегралів Пуассона

Знайдені точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів функцій декількох змінних, періодичних по кожній із них, і таких, що зображуються у вигляді згортки елементів одиничної кулі простору $L_p(\mathbb{T}^d)$ з кратним ядром Пуассона.

5.3.1 Формулювання основного результату

Тут встановлена слабка асимптотика M – поперечників за Колмогоровим класів $A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1\le q\le\infty$.

Нагадаємо, M – *вимірним поперечником за Колмогоровим (колмогоровським M – поперечником)* центрально–симетричної множини F в банаховому просторі X з нормою $\|\cdot\|_X$ називається величина

$$d_M(F;X) = \inf_{\{L_M\}\subset X} \sup_{f\in F} \inf_{u\in L_M} \|f-u\|_X,$$

де зовнішній інфімум взято по всеможливих лінійних підпросторах L_M в X, $\dim L_M = M$.

Отже, в якості простору X виступає $L_q(\mathbb{T}^d)$, а в ролі апроксимуючої множини F — множина функцій

$$A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}} = \{f:\ f(\boldsymbol{x}){=}(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d}\varphi(\boldsymbol{y})P(\rho;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y},\ \ \varphi{\in}L_p(\mathbb{T}^d),\ \|\varphi\|_p{\le}1\},$$

де

$$P(\rho;\boldsymbol{\beta};\boldsymbol{t}) := 2^d \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d}\prod_{j=1}^{d}\rho^{k_j}\cos(k_j t_j - \frac{\beta_j\pi}{2}),$$

$0<\rho<1$, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_d)\in\mathbb{R}^d$.

Посилаючись на означення із попереднього підрозділу, ще раз наголосимо, що класи $A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ можна розглядати як елементи спектру множин

$$A^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}} = \{f:\ f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d}\varphi(\boldsymbol{y})P^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y},\ \ \varphi\in L_p(\mathbb{T}^d),\ \|\varphi\|_p\le 1\},$$

де

$$P_{p,\boldsymbol{\beta}}^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{t}) := 2^d \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^d} \prod_{j=1}^{d} e^{-\alpha_j k_j^{r_j}} \cos(k_j t_j - \frac{\beta_j \pi}{2}), \quad \alpha_j>0,\ r_j>0,\ \beta_j \in \mathbb{R}.$$

Справедливе таке твердження.

Теорема 5.3.1. *Нехай* $d \in \mathbb{N}$ *і* $2 \le q \le p < \infty$. *Тоді*

$$d_M(A_{p,\boldsymbol{\beta}}^{\rho}; L_q(\mathbb{T}^d)) \asymp \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}}, \quad d! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot d.$$

Зауваження 5.3.1. *У випадку* $d = 1$ *в [48] знайдені точні за порядком значення поперечників* $d_M(A_{p,\beta}^{r,\alpha}; L_q(\mathbb{T}^d))$ *при* $1 \le p, q \le \infty$ *і* $r \ge 1$. *Оцінки колмогоровських поперечників множин* $A_{p,\beta}^{r,\alpha}$, $0 < r < 1$ *(це є клас нескінченно диференційовних функцій) у випадку* $d = 1$ *отримані для деяких, проте не для всіх допустимих співвідношень між параметрами* p *та* q, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ *(див. [136,137], а також [49] — оцінки знизу і [48,117] — оцінки зверху).*

5.3.2 Характеристики підмножин в $\mathbb{R}^d$ і деякі співвідношення для них

Нехай функція $\gamma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d \ge 2$ така, що $\gamma(\boldsymbol{t}) = \sum\limits_{i=1}^{d} |t_i|$ для $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_d)$;

$$\Delta(m) := \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_0^d : \ \gamma(\boldsymbol{k}) \le m, \ \ m \in \mathbb{N}\}, \qquad \theta(m) := \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_0^d : \ \gamma(\boldsymbol{k}) = m, \ \ m \in \mathbb{N}\}.$$

Зрозуміло, що $\theta(m) = \varnothing$ при $m < d$ і $\Delta(m) = \bigcup\limits_{l=d}^{m} \theta(l)$.

Лема 5.3.1. *Справедливі рівності*

(i) $$|\theta(m)| = 2^d C_{m-1}^{d-1},$$

(ii) $$M_m := |\Delta(m)| = 2^d C_m^d, \quad m \ge d,$$

де через C_m^k *позначені біноміальні коефіцієнти:* $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$.

Доведення . Рівність (i) є наслідком розв'язання комбінаторної задачі щодо кількості цілочислових невід'ємних розв'язків рівняння $k_1 + \ldots + k_d = m$, $m \ge d$ (див., наприклад, [121, с. 158]). Рівність (ii) — тривіальний наслідок співвідношень $|\Delta(m)| = \sum\limits_{l=d}^{m} |\theta(l)|$ та $C_{n+i}^{n} = C_{n+i+1}^{n+1} - C_{n+i}^{n+1}$, поєднаних з рівністю (i). ⧫

5.3.3 Доведення теореми 5.3.1.

Оцінки зверху для величин $d_M(A^{\rho}_{p,\beta}; L_q(\mathbb{T}^d))$ встановимо відштовхуючись від отриманих у попередньому підрозділі порядкових оцінок

$$\mathscr{E}_{\triangle(n)}(A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}})_q \asymp \rho^n, \quad 1 < q \le p < \infty,$$

де, нагадаємо,

$$\mathscr{E}_{\triangle(n)}(A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}})_q := \sup_{f\in A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}} \|f(\cdot) - S_{\triangle(n)}(f;\cdot)\|_q = \sup_{f\in A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}} \|f(\cdot) - \sum_{\boldsymbol{k}\in\triangle(n)} c_{\boldsymbol{k}}(f) e^{i(\boldsymbol{k},\cdot)}\|_q$$

— точна верхня грань на множині функцій $A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ величин їх наближень в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$ $\triangle(n)$ – сумами Фур'є.

Справді, нехай $M \ge 2^d =: M_d$ задано. Виберемо таке $n \ge d$, що $M_n \le M < M_{n+1}$. Остання умова рівносильна нерівностям

$$2^d \frac{n!}{d!(n-d)!} \le M < 2^d \frac{(n+1)!}{d!(n+1-d)!}, \quad \text{або} \quad \frac{n!}{(n-d)!} \le \frac{d!M}{2^d} < \frac{(n+1)!}{(n+1-d)!}$$

Звідси випливає $(n-d+1)^d \le \frac{d!M}{2^d} < (n+1)^d$, а отже,

$$\frac{(d!M)^{1/d}}{2} - 1 < n \le \frac{(d!M)^{1/d}}{2} + d - 1. \tag{5.46}$$

Таким чином, при $1 < q \le p < \infty$

$$d_M(A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}; L_q(\mathbb{T}^d)) \le \mathscr{E}_{\triangle(n)}(A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}})_q \ll \rho^n \ll \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}}. \tag{5.47}$$

Оцінка знизу. Зауважимо, оскільки $\|\cdot\|_q \gg \|\cdot\|_2$ при $2 \le q \le \infty$, а оцінка знизу в теоремі не залежить від параметра q, то достатньо встановити її у випадку $q = 2$ (при $1 \le p \le \infty$). Першим кроком на цьому шляху є застосування наступного результату.

Лема T$_5$ ([135, с. 70]) *Нехай $B \subset H$ — скінченно-вимірний підпростір у гільбертовому просторі H і $F \subset B$. Тоді*

$$d_n(F; B) = d_n(F; H).$$

Згідно з цим твердженням

$$d_M(A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}; L_2(\mathbb{T}^d)) \ge d_M(A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}} \cap T(\triangle(n+2)); L_2(\mathbb{T}^d) \cap T(\triangle(n+2))), \tag{5.48}$$

де числа M та n пов'язані співвідношенням (5.46), а

$$T(\Lambda) := \{t : t(\boldsymbol{x}) = t(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\Lambda} a_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x})}, \quad a_{\boldsymbol{k}} \in \mathbb{C}\}$$

для $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$.

Подальша оцінка знизу правої частини (5.48) полягає у знаходженні екстремальної сім'ї функцій із $A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}} \cap T(\triangle(n+2))$, тобто такої множини $W \subset A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}} \cap T(\triangle(n+2))$, що

$$d_M(W; L_2(\mathbb{T}^d) \cap T(\triangle(n+2))) \gg \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}}.$$

Нехай $\tau = \{\tau_s\}_{s=1}^{M_{n+2}}$ — довільна ортонормована система в $L_2(\mathbb{T}^d) \cap T(\triangle(n+2))$; $(f;\tau_s)$ — коефіцієнти Фур'є функції f за системою τ: $(f;\tau_s) := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(\boldsymbol{t})\overline{\tau_s(\boldsymbol{t})}d\boldsymbol{t}$. Тоді

$$e_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t}) := e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})} = \sum_{s=1}^{M_{n+2}} (e_{\boldsymbol{k}};\tau_s)\tau_s(t), \quad \boldsymbol{k} \in \triangle(n+2),$$

$$\tau_s(\boldsymbol{t}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\triangle(n+2)} (\tau_s; e_{\boldsymbol{k}})e_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{t}), \quad s = \overline{1, M_{n+2}},$$

і

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\triangle(n+2)} |a_s^{\boldsymbol{k}}|^2 = \sum_{s=1}^{M_{n+2}} |a_s^{\boldsymbol{k}}|^2 = 1, \quad a_s^{\boldsymbol{k}} := (e_{\boldsymbol{k}};\tau_s). \tag{5.49}$$

Позначивши через $S_M(\varphi(\cdot);\tau)$ частинну суму Фур'є порядку M за системою τ, можна записати (за умови, що $\boldsymbol{k} \in \triangle(n+2)$)

$$\|e_{\boldsymbol{k}}(\cdot) - S_M(e_{\boldsymbol{k}}(\cdot);\tau)\|_2^2 = \|\sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} a_s^{\boldsymbol{k}}\tau_s(\cdot)\|_2^2 = \sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} |a_s^{\boldsymbol{k}}|^2. \tag{5.50}$$

Далі, для довільного фіксованого вектора $\boldsymbol{k}^0 = (k_1^0, \ldots, k_d^0) \in \theta(m)$ покладемо

$$\triangle^0(m) := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \triangle(m): \quad k_i = k_i^0,\ i = \overline{1, d-1}, \quad 1 \le k_d \le k_d^0\},$$

$$f_{k^0(d)} := \sum_{\boldsymbol{k}\in\triangle^0(n+2)} \rho^n e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{t})}.$$

Неважко показати, що для деякої додатної сталої C функція $Cf_{k^0(d)} \in A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}$, $1 \le p \le \infty$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^d$ при будь-якому $k^0 \in \theta(n+2)$ (надалі, з метою уникнення уточнень вважаємо, що $C = 1$).

Тоді, взявши до уваги (5.50), можна записати

$$\sigma_{k^0(d)} := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \|f_{k^0(d)}(\cdot + \boldsymbol{\omega}) - S_M(f_{k^0(d)}(\cdot + \boldsymbol{\omega});\tau)\|_2^2 d\boldsymbol{\omega} =$$

$$= (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \|\sum_{\boldsymbol{k}\in\triangle^0(n+2)} \rho^n e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega})} \sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} a_s^{\boldsymbol{k}}\tau_s(\cdot)\|_2^2 d\boldsymbol{\omega} =$$

$$= (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} \Big| \sum_{\boldsymbol{k} \in \triangle^0(n+2)} \rho^n a_s^{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega})} \Big|^2 d\boldsymbol{\omega} =$$

$$= \rho^{2n} \sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} \sum_{\boldsymbol{k} \in \triangle^0(n+2)} |a_s^{\boldsymbol{k}}|^2. \tag{5.51}$$

Покажемо, що існує така додатна стала C, що для деякого $\boldsymbol{k}^0 \in \theta(n+2)$

$$\sigma_{k^0(d)} \geq C \rho^{(d!M)^{1/d}}. \tag{5.52}$$

Справді, припускаючи протилежне, з одного боку (беручи до уваги (5.49)), маємо

$$\sum_{\boldsymbol{k}^0 \in \theta(n+2)} \left(\sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} \sum_{\boldsymbol{k} \in \triangle^0(n+2)} |a_s^{\boldsymbol{k}}|^2 \right) = \sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} \sum_{\boldsymbol{k} \in \triangle(n+2)} |a_s^{\boldsymbol{k}}|^2 =$$

$$= M_{n+2} - M \gg n^{d-1},$$

а з другого, —

$$\sum_{\boldsymbol{k}^0 \in \theta(n+2)} \left(\sum_{s=M+1}^{M_{n+2}} \sum_{\boldsymbol{k} \in \triangle^0(n+2)} |a_s^{\boldsymbol{k}}|^2 \right) = \sum_{\boldsymbol{k}^0 \in \theta(n+2)} \sigma_{k^0(d)} \rho^{-2n} \overset{(a)}{\leq}$$

$$\leq C \sum_{\boldsymbol{k}^0 \in \theta(n+2)} \rho^{(d!M)^{1/d}} \rho^{-2n} \ll C|\theta(n+2)| \ll C n^{d-1}$$

(нерівність (a) записана на підставі припущення протилежного до (5.52)). Видно, що ці співвідношення суперечливі при виборі достатньо малої додатної сталої C.

Із співвідношень (5.51) та (5.52) за теоремою про середнє значення для інтегралів випливає, що існує таке $\boldsymbol{\omega}^* \in \mathbb{T}^d$ (при певному $\boldsymbol{k}^0 \in \theta(n+2)$), що

$$\|f_{k^0(d)}(\cdot + \boldsymbol{\omega}^*) - S_M(f_{k^0(d)}(\cdot + \boldsymbol{\omega}^*); \tau)\|_2 \gg \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}},$$

а це в підсумку тягне за собою оцінку

$$d_M(A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}; L_2(\mathbb{T}^d)) \gg \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

а отже і оцінку

$$d_M(A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}; L_q(\mathbb{T}^d)) \gg \rho^{\frac{1}{2}(d!M)^{1/d}} \tag{5.53}$$

при $2 \leq q < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$.

Залишається зауважити, оцінки зверху (5.47) і знизу (5.53) для поперечників $d_M(A^{\rho}_{p,\boldsymbol{\beta}}; L_q(\mathbb{T}^d))$ рівні за порядком по параметру M при $2 \leq q \leq p \leq \infty$.

Теорема 5.3.1 доведена. ■

5.4 Нелінійні поперечники класів гладких функцій, визначених на одиничній сфері в $\mathbb{R}^d$

Розв'язана задача, що стосується слабкої асимптотики одного типу нелінійних поперечників (R. A. De Vore, R. Howard, C. Micchelli) класів функцій $W_p^r(\mathbb{S}^{d-1})$, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$, які є, так званими, r –ми інтегралами функцій сумовних на $\mathbb{S}^{d-1}$.

5.4.1 Попередні означення та позначення

Нехай $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, — евклідів простір точок $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$; $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d$ — скалярний добуток векторів $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$; $\mathbb{S}^{d-1} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d : x_1^2 + \cdots + x_d^2 = 1\}$ — одинична сфера в $\mathbb{R}^d$ з центром у початку координат.

$L_p = L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, $1 \leq p \leq \infty$, — простір функцій, визначених на $\mathbb{S}^{d-1}$, зі скінченою нормою

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\boldsymbol{x})|^p d\sigma(\boldsymbol{x}) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

де $d\sigma$ — елемент площі на $\mathbb{S}^{d-1}$ (поверхнева міра Лебега), Ω — площа поверхні сфери $\mathbb{S}^{d-1}$; L_∞ ототожнюється з простором $C = C(\mathbb{S}^{d-1})$ неперервних на $\mathbb{S}^{d-1}$ функцій з нормою

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}} |f(\boldsymbol{x})|.$$

Нехай далі $\mathcal{P}_k$ позначає простір алгебраїчних поліномів з d змінними, степінь яких не перевищує k; $\Pi_k^d \subset \mathcal{P}_k$ — підпростір однорідних поліномів степеня точно k, тобто

$$\Pi_k^d = \left\{ P : \quad P(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} c_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}}, \ c_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathbb{C}, \ \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \right\},$$

де $|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}} := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$;
H_k^d — простір однорідних гармонічних поліномів з d змінними степеня k, тобто

$$H_k^d := \{P \in \Pi_k^d : \quad \Delta P \equiv 0\},$$

де Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$: $\Delta = \sum_{k=1}^d \partial^2 / \partial x_k^2$. Звуження елементів простору H_k^d на сферу $\mathbb{S}^{d-1}$ (сферичні гармоніки) утворюють простір, який позначається $\mathcal{H}_k^d$. Покладемо $\mathcal{H}(N) := \oplus \sum\limits_{k=0}^{N} \mathcal{H}_k^d$.

У полярних координатах $\boldsymbol{x} = \varrho \boldsymbol{x}', \varrho = \|\boldsymbol{x}\|, \ \boldsymbol{x}' \in \mathbb{S}^{d-1}$ оператор Δ можна подати у вигляді

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{d-1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\Delta_0,$$

де Δ_0 — оператор Лапласа–Бельтрамі на сфері (див., наприклад, [46], с. 240).
У результаті дії оператора Δ на $Y \in \mathcal{H}_k^d$, маємо ([122], с. 86)

$$\Delta_0 Y(\boldsymbol{x}) = -k(k+d-2)Y(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1},$$

а отже, оператор Δ_0 має в якості власних значень на сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ числа $\lambda_k = -k(k+d-2), \ \ k \in \mathbb{Z}_+$. Кожне із чисел λ_k є власним значенням скінченної кратності і йому відповідає підпростір $\mathcal{H}_k^d$ розмірності n_k

$$\begin{aligned} n_k \ &:= \ \dim \mathcal{H}_k^d = \dim \Pi_k^d - \dim \Pi_{k-2}^d = \\ &= \ \binom{k+d-1}{k} - \binom{k+d-3}{k-2} = (2k+d-2)\frac{(k+d-3)!}{k!(d-2)!}, \ k \geq 2, \end{aligned}$$

$$n_1 := \dim \mathcal{H}_1^d = d, \quad n_0 := \dim \mathcal{H}_0^d = 1.$$

Елементи простору $\mathcal{H}_k^d$ позначаються через $Y_k(\boldsymbol{x})$. Зафіксувавши ортонормований базис $\{Y_k^l\}_{l=1}^{n_k}$ в $\mathcal{H}_k^d$, можна записати $\mathcal{H}_k^d = \mathrm{span}\{Y_k^l(\boldsymbol{x})\}_{l=1}^{n_k}, \ k \in \mathbb{Z}_+$.

Множина $\bigcup_{k=0}^{\infty}\{Y_k^l\}_{l=1}^{n_k}$ утворює ортонормований базис в $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ ([121], с. 161) і простір $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ можна подати як пряму суму

$$L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \oplus \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k^d,$$

тобто будь-яку функцію $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ можна представити єдиним способом у вигляді

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(f;\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n_k} a_{k,l} Y_k^l(\boldsymbol{x})\right),$$

де

$$a_{k,l} = (f, Y_k^l) = \frac{1}{\Omega}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\boldsymbol{x})\overline{Y_k^l(\boldsymbol{x})} d\sigma(\boldsymbol{x}),$$

а збіжність ряду слід розуміти в сенсі збіжності за нормою простору $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.
Результат $Y_k(f;\boldsymbol{x})$ дії оператора ортогонального проектування $Y_k : L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to \mathcal{H}_k^d$ представляється опосередковано через операцію згортки функції $f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ з так званою зональною сферичною гармонікою $Z_{\boldsymbol{x}}^{(k)}(\cdot)$. А саме

$$Y_k(f;\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\Omega}\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\mathbf{y}) Z_{\boldsymbol{x}}^{(k)}(\boldsymbol{y}) d\sigma(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{5.54}$$

Для функції $Z_{\boldsymbol{x}}^{(k)}$ характерною є така властивість: вона інваріантна при поворотах, що залишають непорушною точку $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Відомо ([156, с. 206], або [121, с. 163]), що

$$Z_{\boldsymbol{x}}^{(k)}(\boldsymbol{y}) = \frac{k+\lambda}{\lambda} P_k^{\lambda}(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle), \quad \lambda = \frac{d-2}{2},$$

де $P_k^{\lambda}(t)$, $-1 \le t \le 1$ — многочлени Гегенбауера (див., наприклад, [13], с. 177), або ультрасферичні многочлени, які визначаються через твірну функцію :

$$(1 - 2\varrho t + t^2)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\lambda}(t)\varrho^k, \quad |\varrho| < 1, \ |t| < 1, \ \lambda > 0,$$

чи

$$\frac{1-\varrho^2}{(1-2\varrho t + t^2)^{\lambda+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+\lambda}{\lambda} P_k^{\lambda}(t)\varrho^k.$$

Многочлени Гегенбауера відіграють важливу роль в теорії ортогональних рядів і їх застосуваннях, однак ми залишаємо поза увагою численні властивості цих многочленів (див., наприклад, [112]), і лише зазначимо, що $P_k^{\lambda}(t)$ є алгебраїчними поліномами степеня k (індексу $\lambda > 0$) і множина $\{P_k^{\lambda}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ утворює повну ортогональну систему в просторі $L_2([-1,1], w_\lambda)$ квадратично–сумовних з вагою $w_\lambda(t) = (1-t^2)^{\lambda - 1/2}$ на відрізку $[-1,1]$ функцій ($\{P_k^{\lambda}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ — результат ортогоналізації системи $\{1, t, t^2, \ldots\}$) у просторі $L_2([-1,1], w_\lambda)$.

Таким чином, співвідношення(5.54) можна переписати так

$$Y_k(f; \boldsymbol{x}) = \frac{(k+\lambda)\Gamma(\lambda)}{2\pi^{\lambda+1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\boldsymbol{x}) P_k^{\lambda}(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle) d\sigma(\boldsymbol{y}) =: [f * P_k^{\lambda}](\boldsymbol{x}), \quad \lambda = \frac{d-2}{2}. \quad (5.55)$$

Зрозуміло, що оператор $Y_k : L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \longrightarrow \mathcal{H}_k^d$, зважаючи на співвідношення (5.55), може бути продовжений до оператора, що визначений на всьому просторі $L_1(\mathbb{S}^{d-1})$ і тоді для $f \in L_1(\mathbb{S}^{d-1})$ формальний ряд

$$S[f](\boldsymbol{x}) := \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(f; \boldsymbol{x})$$

називається рядом Фур'є–Лапласа.

Формально операція згортки (5.55) може бути розповсюджена на функції $f \in L_1(\mathbb{S}^{d-1})$ і $g \in L_p([-1,1], w_\lambda)$, де $L_p([-1,1], w_\lambda)$ — простір функцій h, визначених на $[-1,1]$, зі скінченою нормою

$$\|h\|_{p,w_\lambda} := \left(\frac{1}{c(\lambda)} \int_{-1}^{1} |h(t)|^p w_\lambda(t) dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|h\|_{\infty,w_\lambda} := \|h\|_{C,w_\lambda} = \max_{t\in[-1,1]} |h(t)|,$$

де

$$c(\lambda) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\lambda-1/2} dt = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(\lambda+1)}.$$

Отже, для функцій $f \in L_1(\mathbb{S}^{d-1})$ та $g \in L_p([-1,1], w_\lambda)$:

$$[f * g](\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\Omega} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\boldsymbol{y}) g(\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle) d\sigma(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Для визначеної у такий спосіб операції згортки справджується нерівність Юнга: *якщо* $f \in L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, $g \in L_s([-1,1]; w_\lambda)$ *і* $p,\ q,\ s \geq 1$ *такі, що* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{s} - 1$, *то*

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_p \|g\|_{s,w_\lambda}.$$

За допомогою операції згортки можна означити основні об'єкти, що задіяні у даному підрозділі, — класи функцій, визначених на $\mathbb{S}^{d-1}$. Кожній функції $g \in L_p([-1,1], w_\lambda)$ можна поставити у відповідність її розклад за многочленами Гегенбауера [112]

$$g(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{k+\lambda}{\lambda} P_k^\lambda(t), \quad b_k := \frac{1}{c(\lambda) P_k^\lambda(1)} \int_{-1}^{1} g(t) P_k^\lambda(t) w_\lambda(t) dt,$$

зауваживши, що $\|P_k^\lambda\|_{2,w_\lambda}^2 = P_k^\lambda(1) \cdot \frac{\lambda}{k+\lambda}$.

Якщо $r > 0$, то існує функція g_r неперервна на $[-1,1)$ і $g_r \in L_1([-1,1]; w_\lambda)$ [155] така, що

$$g_r(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} [k(k+d-2)]^{-r/2} \frac{k+\lambda}{\lambda} P_k^\lambda(t), \quad \lambda = \frac{d-2}{2}.$$

До того ж (див. [155]), $g_r \in L_{p'}([-1,1], w_\lambda)$, якщо $r > \frac{d-1}{p}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, а також g_r — неперервна на $[-1,1]$, якщо $r > d-1$.

Означимо при $1 \leq p \leq \infty$ і $r > 0$ класи функцій визначених на $\mathbb{S}^{d-1}$:

$$W_p^r(\mathbb{S}^{d-1}) := \{f :\ f(\boldsymbol{x}) = [\varphi * g_r](\boldsymbol{x}), \ \ \|\varphi\|_p \leq 1,\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}\}. \tag{5.56}$$

Функція $f(\cdot) = [\varphi * g_r](\cdot)$ називається $r-$інтегралом функції φ і позначається $I_r\varphi(\cdot)$. Із нерівності Юнга випливає, що $W_p^r(\mathbb{S}^{d-1}) \subset L_q(\mathbb{S}^{d-1})$ при $1 \leq p, q \leq \infty$ і $r > (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})_+$.

Далі зауважимо, якщо $f \in W_p^r(\mathbb{S}^{d-1})$, то (див. [208], твердження 2.9)

$$S[f](\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k+d-2)]^{-r/2} \mathrm{Y}_k(f; \boldsymbol{x}),$$

що вказує на те, що множина $W_p^r(\mathbb{S}^{d-1})$ складається із функцій $f \in L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, для яких існує така функція $\varphi \in L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, $\|\varphi\|_p \le 1$, що при $k \in \mathbb{N}$ буде

$$[k(k+d-2)]^{r/2} Y_k(f;\boldsymbol{x}) = Y_k(\varphi;\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Використовуючи таку характеристику, можна дати опис множини $W_p^r(\mathbb{S}^{d-1})$ опосередковано через операцію "узагальненого" (дробового) диференціювання функцій $g \in L_1(\mathbb{S}^{d-1})$, залучивши до цього оператор оператор Лапласа–Бельтрамі Δ_0. А саме, для $s \in \mathbb{N}$ природно оператор $(-\Delta_0)^s$ визначити індуктивно формулою $(-\Delta_0)^s = -\Delta_0(-\Delta_0)^{s-1}$. При цьому для будь-якої функції $g \in L_1(\mathbb{S}^{d-1})$

$$S[(-\Delta_0)^s g](\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k+d-2)]^s Y_k(g;\boldsymbol{x}).$$

Якщо $r > 0$, то покладемо $(-\Delta_0)^{r/2} := \Psi$

$$\Psi(g;\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} [k(k+d-2)]^{r/2} Y_k(g;\boldsymbol{x})$$

Функція Ψ називається $r-$похідною функції g. Тепер зрозуміло, якщо функція $f \in W_p^r$, то у її зображенні у вигляді згортки (5.56) $\varphi = (-\Delta_0)^{r/2} g$ (в сенсі збіжності ряду за нормою простору $L_p(\mathbb{S}^{d-1})$).

Таким чином

$$W_p^r(\mathbb{S}^{d-1}) = \{f \in L_p^0(\mathbb{S}^{d-1}) : \ \|(-\Delta_0)^{r/2} f\|_p \le 1\},$$

де $L_p^0(\mathbb{S}^{d-1}) := L_p(\mathbb{S}^{d-1}) \cap \{f : \ \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\boldsymbol{x}) d\sigma(\boldsymbol{x}) = 0\}$.

В подальшому замість $W_p^r(\mathbb{S}^{d-1})$ іноді пишемо W_p^r.

5.4.2 Деякі поперечники та співвідношення між ними

У цьому підрозділі дамо спочатку означення нелінійного поперечника, введеного в роботі [167], а потім нагадаємо означення інших задіяних поперечників і апроксимаційних величин, а також зазначимо деякі співвідношення, що їх пов'язують.

Нехай X — банахів простір з нормою $\|\cdot\|_X$ і $F \subset X$.

Нелінійним $n-$поперечником множини F в просторі X, означеним в [167], називається величина

$$\overline{d}_n(F;X) = \inf_{a,\mathcal{M}_n} \sup_{f \in F} \|f - M_n(a(f))\|_X,$$

де $a : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — довільне неперервне відображення, що діє із F в $\mathbb{R}^n$; $\mathcal{M}_n$ — сукупність всіх неперервних відображень $M_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$.

В [172, 173] викладена загальна схема означення цього та інших типових нелінійних поперечників, встановлені оцінки таких поперечників для класів гладких функцій, визначених на $d-$вимірному кубі простору $\mathbb{R}^d$.

Необхідну в подальшому інформацію щодо нижче визначених (а також інших) поперечниках можна знайти, наприклад, у книгах [132] та [188].

n – поперечником за Александровим множини F в просторі X називається величина

$$a_n(F;X) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_n(F;X)} \sup_{x \in F} \|x - \varphi(x)\|_X,$$

де $\mathcal{A}_n(F;X)$ — множина всіх неперервних відображень $\varphi : F \to X$, для яких існує такий симпліціальний комплекс $K_\varphi \subset X$, що $\operatorname{Im} \varphi \subset K_\varphi$ і $\dim K_\varphi = n$.

n – поперечником за Бернштейном множини F в просторі X називається величина

$$b_n(F;X) = \sup_{L \in \mathcal{L}_{n+1}(X)} \sup\{\varrho : \varrho U(L) \subset F\},$$

де $\mathcal{L}_{n+1}(X)$ — сукупність всіх лінійних підпросторів L в X, $\dim L = n+1$; $\varrho U(L) = \{u \in L : \|u\|_X \le \varrho\}$.

n – поперечником за Гельфандом множини F в просторі X називається величина

$$d^n(F;X) = \inf_{L^n \in \mathcal{L}^n(X)} \sup_{x \in F \cap L^n} \|x\|_X,$$

де $\mathcal{L}^n(X)$ — множина всіх лінійних (замкнутих) підпросторів L^n в X, корозмірность яких не перевищує n, $\operatorname{codim} L^n \le n$.

Надалі використовується також величина (див., наприклад, [132]):

$$a^n(F;X) := \inf_{\varphi \in \mathcal{A}^n(F;X)} \sup_{y \in \operatorname{Im} \varphi} \operatorname{diam}(\varphi^{-1}(y))_X,$$

де $\mathcal{A}^n(F;X)$ — сукупність всіх неперервних відображень $\varphi : F \to K_\varphi$, K_φ — метричний компакт вимірності n, а $\operatorname{diam}(E)_X$ — діаметр множини E за метрикою простору X.

Для поперечника $\overline{d}_n(F;X)$ відомі такі співвідношення з іншими поперечниками

$$\overline{d}_{2n+1}(F;X) \le a_n(F;X) \le \overline{d}_n(F;X), \tag{5.57}$$

$$\overline{d}_n(F;X) \ge b_n(F;X). \tag{5.58}$$

Нерівності (5.57) доведені в [175], а нерівність (5.58) в [167]. Також відомо [132], що для компактної множини K в просторі X

$$\frac{1}{4}a_n(K;X) \le a^n(K;X) \le 2a_n(K;X). \tag{5.59}$$

5.4.3 Основний та допоміжні результати

Головний результат підрозділу 5.4 міститься в наступному твердженні.

Теорема 5.4.1. *Нехай* $r > 0$, $1 \le q \le p \le \infty$, *або* $r > (d-1)^2 + (d-1)/(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, $1 \le p < q \le \infty$. *Тоді*

$$\overline{d}_n(W^r_p; L_q) \asymp n^{-r/(d-1)}.$$

В основі доведення теореми 5.4.1 лежить так званий метод дискретизації, ймовірно, вперше застосований до розв'язання окремих задач теорії наближення в роботі [53]. Цей метод дозволяє, зокрема, в окремих випадках звести задачу оцінки поперечників функціональних класів до оцінки поперечників скінченно-вимірних множин в просторі $\mathbb{R}^m$.

Для $m \in \mathbb{N}$ і $1 \le p \le \infty$ через l^m_p, як зазвичай, позначимо простір векторів $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ з нормою

$$\|\boldsymbol{x}\|_{l^m_p} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \displaystyle\max_{i=1,\ldots,m} |x_i|, & p = \infty, \end{cases}$$

і для заданого $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ покладемо

$$B^m_p(\boldsymbol{\alpha}) := \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m : \left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\alpha}}\right\|_{l^m_p} \le 1\right\}, \quad \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\alpha}} := \left(\frac{x_1}{\alpha_1}, \ldots \frac{x_m}{\alpha_m}\right).$$

Якщо $\alpha_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то покладаємо $B^m_p(\mathbf{1}) =: B^m_p$.

Сформулюємо відомі результати, що стосуються значень деяких поперечників множин $B^m_p(\boldsymbol{\alpha})$ в просторах l_q, $1 \le p, q \le \infty$. З цією метою запровадимо наступні позначення ((([132], с. 232)). При $m, k \in \mathbb{N}$, $1 \le k < m$

$$\gamma_k(\boldsymbol{\alpha}; p; q) := \max_{\lambda_{k+1}} \left(\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_{i_j}^{pq/(p-q)}\right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}},$$

$$\beta_k(\boldsymbol{\alpha}; p; q) := \gamma^{-1}_{m-k-1}(1/\boldsymbol{\alpha}; p; q), \quad 1/\boldsymbol{\alpha} := (1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_m),$$

де $\lambda_{k+1} = \{i_1, \ldots, i_{k+1}\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$.

Мають місце співвідношення ([132], с. 232)

$$a_k(B_p^m(\boldsymbol{\alpha}); l_q^m) = \gamma_k(\boldsymbol{\alpha}; p; q) \quad \text{при } p < q, \tag{5.60}$$

$$d_k(B_p^m(\boldsymbol{\alpha}); l_q^m) = \beta_k(\boldsymbol{\alpha}; p; q) \quad \text{при } p > q. \tag{5.61}$$

В [152] доведено, що при $p > q$ виконуються також рівності

$$a_k(B_p^m(\boldsymbol{\alpha}); l_q^m) = \beta_k(\boldsymbol{\alpha}; p; q). \tag{5.62}$$

Якщо набір $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ упорядкований так, що $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_m > 0$, то на підставі (5.60) – (5.62) можна записати

$$a_k(B_p^m(\boldsymbol{\alpha}); l_q^m) = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j^{(p-q)/pq}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < q \leq \infty, \\ \left(\sum_{j=k+1}^{m} \alpha_j^{(p-q)/pq}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 1 \leq q < p \leq \infty. \end{cases} \tag{5.63}$$

Рівність $a_k(B_p^m(\boldsymbol{\alpha}); l_p^m) = d_k(B_p^m(\boldsymbol{\alpha}); l_p^m) = \alpha_{k+1}$ встановлена В. М. Тіхоміровим [132].

Наслідком рівностей (5.63) за умови $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k+1} = 1$ є співвідношення [152], [128]

$$a_k(B_p^m; l_q^m) = \begin{cases} (k+1)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < q \leq \infty, \\ 1, & p = q, \\ (m-k)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 1 \leq q < p \leq \infty. \end{cases} \tag{5.64}$$

На завершення цього пункту сформулюємо деякі результати, що стосуються наближення функцій в просторах $L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, які суттєво використовуються в доведенні теореми 5.4.1.

Нехай функція $\eta \in C^\infty([0;\infty))$ (тобто функція η нескінченно диференційовна на $(0,\infty)$) така, що $\operatorname{supp} \eta = [0,2]$, $\eta(x) = 1$ при $0 \leq x \leq 1$ і $\eta(x) = 0$ при $x \geq 2$. Задамо послідовність операторів $(V_n)_{n=1}^\infty$, визначених на множині $L_1(\mathbb{S}^{d-1})$, які діють згідно з формулою

$$[V_n(f)](\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta\left(\frac{k}{n}\right) Y_k(f; \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Властивості операторів V_n відображені у такому твердженні:

Лема $\boldsymbol{\Gamma}_5$ [208]. *Якщо* $f \in L_p(\mathbb{S}^{d-1})$, $1 \leq p \leq \infty$, *то*

(1) $V_n(f) \in \mathcal{H}(2n-1)$ *і* $V_n(P) = P$ *для будь-якого* $P \in \mathcal{H}(n)$;

(2) *для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$: $\|V_n(f)\|_p \leq C\|f\|_p$;

(3) для будь-якого $n \in \mathbb{N}$: $\|f - V_n(f)\|_p \le C E_n(f)_p$,

де $E_n(f)_p := \inf\{\|f-P\|_p : \ P \in \mathcal{H}(n)\}$ *— величина найкращого наближення функції* f *за допомогою поліномів за сферичними гармоніками (з* d *змінними), степінь яких не перевищує* n.

Зауважимо, що варіанти схожих за змістом тверджень можна знайти в [187], [58].

Далі, покладемо $E_n(W^r_p)_q := \sup_{f\in W^r_p} E_n(f)_q$.

Теорема K$_5$ [40]. *Нехай* $1 \le p, q \le \infty$ *і* $r > (d-1)(1/p-1/q)_+$. *Тоді*

$$E_n(W^r_p)_q \asymp n^{-r+(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}.$$

Поєднавши теорему K$_5$ з лемою Г$_5$, отримаємо таке твердження.

Наслідок A$_5$. *Нехай* $1 \le p, q \le \infty$, $r > (d-1)(1/p-1/q)_+$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in W^r_p$ *справедлива нерівність*

$$\|f - V_n(f)\|_p \ll n^{-r+(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}.$$

5.4.4 Доведення теореми 5.4.1

Оцінка зверху. Розглянемо випадок $1 \le p < q \le \infty$. Покладемо

$$\Phi_0(f) = V_1(f), \qquad \Phi_k(f) = V_{2^k}(f) - V_{2^{k-1}}(f), \ k = 1, 2, \dots .$$

Тоді згідно з лемою Г$_5$ будь-яку функцію $f \in L_q(\mathbb{S}^{d-1})$, $1 \le q \le \infty$ можна подати у вигляді збіжного за нормою $\|\cdot\|_q$ ряду:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(f), \tag{5.65}$$

причому, якщо $f \in L^0_q(\mathbb{S}^{d-1}$, то $\Phi_k(f) \in \mathcal{P}^q_{2^{k+1}-1} := \mathcal{P}_{2^{k+1}-1} \cap L^0_q(\mathbb{S}^{d-1})$, $k \in \mathbb{Z}_+$.
До того ж (див. наслідок A$_5$), якщо $f \in W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$, $r > (d-1)(1/p-1/q)_+$, то

$$\|\Phi_k(f)\|_q \ll (2^k)^{-r+(d-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{5.66}$$

В [41] доведено таке твердження.

Теорема KV$_5$. *Нехай* X *— банахів простір,* $W \subset X$ *і задана послідовність лінійних операторів* $\Phi_j : X \to X_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, *де* X_j *— замкнуті підпростори в* X. *Нехай далі для* $u \in W$: $u = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(u)$ *і збігається ряд* $\sum_{j=0}^{\infty} d^0(\Phi_j(W); X_j)$.

Тоді для $n \in \mathbb{N}$, $j_0 \in \mathbb{Z}_+$ *і* $\{n_j\}_{j=0}^{j_0}$ *таких, що* $\sum_{j=0}^{j_0} n_j \le n$, *справджується нерівність*

$$a^n(W;X) \le \sum_{j=0}^{j_0} a^{n_j}(\Phi_j(W);X_j) + 2\sum_{j=j_0+1}^{\infty} d^0(\Phi_j(W);X_j).$$

Застосувавши теорему KV_5 у випадку, коли $X = L_q(\mathbb{S}^{d-1})$, $W = W_p^r(\mathbb{S}^{d-1})$ і $X_j = \mathcal{P}^q_{2^{j+1}-1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, беручи до уваги співвідношення (5.59) для алєксандровських поперечників a_n, можна записати

$$a_n(W_p^r;L_q) \ll \sum_{j=0}^{j_0} a_{n_j}(\Phi_j(W_p^r);\mathcal{P}^q_{2^{j+1}-1}) + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} d^0(\Phi_j(W_p^r);\mathcal{P}^q_{2^{j+1}-1}), \tag{5.67}$$

причому $\sum_{j=0}^{j_0} n_j \le n$.

Для продовження оцінки правої частини (5.67) скористаємося ваговим аналогом теореми Марцінкевіча–Зігмунда (твердження такого типу зазвичай є ключовим у методі дискретизації).

Теорема $\mathbf{MZ}_5$ [157]. *Існують* $m_N = (4N+1)(2N)^{d-2}$ *таких точок* $\xi_{N,1}, \xi_{N,2}, \dots, \xi_{N,m_N}$ *на сфері* $\mathbb{S}^{d-1}$, *що для будь-якої функції* $f \in \mathcal{P}_{4N}$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \frac{1}{m_N}\sum_{k=1}^{m_N} w_{N,k} f(\xi_{N,k}),$$

де ваги $w(N) = \{w_{N,k}\}_{k=1}^{m_N}$ *задовольняють умови*

$$0 < w_{N,k} \le 1, \quad w_{N,k} \le C(d)N^{(d-2)^2},$$

$$\frac{1}{m_N}\sum_{k=1}^{m_N}(w_{N,k})^\gamma \le \begin{cases} C(d), & \textit{якщо} \quad \gamma > -1/(d-2), \\ C(d)\log N, & \textit{якщо} \quad \gamma = -1/(d-2), \\ C(d)N^{-(d-1)^2\gamma-1}, & \textit{якщо} \quad \gamma < -1/(d-2). \end{cases}$$

До того ж, якщо $f \in \mathcal{P}_N$ *і* $1 \le p \le \infty$, *то*

$$\left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} |f(\boldsymbol{x})|^p d\sigma(\boldsymbol{x})\right)^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\frac{1}{m_N}\sum_{k=1}^{m_N} w_{N,k}|f(\xi_{N,k})|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5.68}$$

У подальшому, при оцінці поперечників скінченно-вимірних множин в просторах l_q^m, потрібні деякі інші властивості набору ваг $w(N)$, окрім приведених в теоремі MZ_5 .

Лема 5.4.1. *Справедливі твердження:*

(1) якщо $L \in \mathbb{N}$ *— довільне фіксоване число,* $M_L^{(j)} := m_{L\cdot 2^j}$, $j = 1, 2 \ldots$ *і* $\widetilde{M}_L^{(j)} \asymp M_L^{(j)} \cdot 2^{-j(d-1)}$, *то для будь-якого набору* $\widetilde{\Lambda} = \{k_1, \ldots, k_{\widetilde{M}_L^{(j)}}\}$ *існує така додатна стала* $C(d)$, *що*

$$\sum_{k\in\widetilde{\Lambda}} w_{L\cdot 2^j,k} \geq C(d)L^{d-1} \cdot 2^{-j(d-2)^2}; \tag{5.69}$$

(2) якщо $\Lambda = \{k_1, \ldots, k_{\widetilde{M}_N}\}$ *і* $\widetilde{M}_N \asymp m_N$, *то*

$$\sum_{k\in\Lambda} w_{N,k} \asymp N^{d-1}. \tag{5.70}$$

Співвідношення (5.69) і (5.70) встановлюються безпосередньо, відштовхуючись від означення набору $\{w_{N,k}\}_{k=1}^{m_N}$ (див. для повноти доведення теореми 3° в [157], а також зауваження 5 та 6 в цій роботі).

Продовжимо перетворення правої частини в (5.67). Для кожного $j \in \mathbb{N}$ визначимо оператор

$$A_j : \mathcal{P}_{N_j} \to \mathbb{R}^{m_{N_j}}$$

формулою

$$A_j f = (f(\xi_{N_j,1}), \ldots, f(\xi_{N_j,m_{N_j}})), \quad f \in \mathcal{P}_{N_j},$$

де $N_j = 2^{j+1} - 1$, $j \in \mathbb{Z}_+$, а $\{\xi_{N_j,k}\}_{k=1}^{m_{N_j}}$ — набір точок із теореми MZ_5.

Згідно з теоремою MZ_5 при $1 \leq q \leq \infty$ і $f \in \mathcal{P}_{N_j}$ маємо

$$\|f\|_q \asymp m_{N_j}^{-1/q} \|A_j f\|_{l^{m_{N_j}}_{q,w(N_j)}}.$$

Тут для системи ваг $w = \{w_i\}_{i=1}^m$ через $l_{p,w}^m$ позначено простір точок (векторів) $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ з нормою

$$\|\boldsymbol{x}\|_{p,w} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p w_i\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\infty,w} = \max_{1\leq i\leq m} |x_i| w_i, \quad p = \infty.$$

Покладемо також $b_{p,w}^m := \{\boldsymbol{x} \in l_{p,w}^m : \ \|\boldsymbol{x}\|_{p,w} \leq 1\}$.

Тепер, ввівши позначення $B_p(\mathbb{S}^{d-1}) := \{f \in L_p(\mathbb{S}^{d-1}) : \ \|f\|_p \leq 1\}$ і $B_p^N(\mathbb{S}^{d-1}) := B_p(\mathbb{S}^{d-1}) \cap \mathcal{P}_N$, беручи до уваги нерівність (5.66) (при $p = q$), можна стверджувати, що множина $\Phi_j(W_p^r) \subset \mathcal{P}_{N_j}$, належить кулі $CN_j^{-r} B_p^{N_j}(\mathbb{S}^{d-1})$

радіуса C, образом якої при відображенні A_j згідно з теоремою MZ$_5$ (а, точніше, згідно із співвідношенням (5.68)) є куля $CN_j^{-r}m_{N_j}^{1/p}b_{p,w(N_j)}^{m_{N_j}}$. А отже, на підставі базових властивостей поперечників a_n та d^n (див. наприклад, [132], с. 217–218) і співвідношення (5.68), відштовхуючись від нерівності (5.67), маємо

$$a_n(W_p^r;L_q) \ll \sum_{j=0}^{j_0} N_j^{-r}m_{N_j}^{1/p-1/q}a_{n_j}(b_{p,w(N_j)}^{m_{N_j}};l_{q,w(N_j)}^{m_{N_j}}) + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} N_j^{-r}m_{N_j}^{1/p-1/q}, \tag{5.71}$$

де, нагадаємо, $\sum_{j=0}^{j_0} n_j \le n$ і при переході від нерівності(5.67) до (5.71) заздалегідь покладаємо n_0 рівним $m_{N_0} = 5 \cdot 2^{d-2}$; у такому випадку при $j = 0$ буде $a_{n_j}(\Phi_j(W_p^r);\mathcal{P}_{2^{j+1}-1}^q) = 0$.

Наступний крок полягає в оцінці поперечників $a_{n_j}(b_{p,w(N_j)}^{m_{N_j}};l_{q,w(N_j)}^{m_{N_j}})$ при певних значеннях параметрів n_j та N_j. Розглянемо відображення

$$A: \quad \boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_m) \longrightarrow \widetilde{\boldsymbol{x}} = (x_1w_1^{1/q},\dots,x_mw_m^{1/q}).$$

Очевидно, оператором A здійснюється ізометрія між банаховими просторами $l_{q,w}^m$ і l_q, причому, якщо $\boldsymbol{x} \in b_{p,w}^m$, то $\widetilde{\boldsymbol{x}} \in b_{p,W}^m$, де $W = \{W_i\}_{i=1}^m = \{w_i^{(1/p-1/q)p}\}_{i=1}^m$, бо

$$\left(\sum_{i=1}^m |\widetilde{x}_i|^p W_i\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p w_i^{p/q} \cdot w_i^{(1/p-1/q)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p w_i\right)^{\frac{1}{p}},$$

тобто $A(b_{p,w}^m) = b_{p,W}^m$.

Таким чином, на підставі базових властивостей поперечників a_k можна записати

$$a_k(b_{p,w}^m;l_{q,w}^m) = a_k(b_{p,W}^m;l_q^m) = a_k(B_p^m(\boldsymbol{\alpha});l_q^m), \tag{5.72}$$

де $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $\alpha_i := w_i^{1/q-1/p}$, або $w_i = \alpha_i^{pq/(p-q)}$, $i = 1,2,\dots,m$. А отже, у нашому випадку

$$a_{n_j}(b_{p,w(N_j)}^{m_{N_j}};l_{q,w(N_j)}^{m_{N_j}}) = a_{n_j}(B_p^{m_{N_j}}(\alpha(N_j));l_q^{m_{N_j}}), \tag{5.73}$$

де для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$ набори $w(N_j) = \{w_{N_j,k}\}_{k=1}^{m_{N_j}}$ та $\alpha(N_j) := \{\alpha_{N_j,k}\}_{k=1}^{m_{N_j}}$ пов'язані рівністю

$$w_{N_j,k} = \alpha_{N_j,k}^{pq/(p-q)}, \ k = 1,2,\dots,m_{N_j}. \tag{5.74}$$

Таким чином, наслідком співвідношення (5.71), з урахуванням (5.73) і (5.74), є нерівність

$$a_n(W_p^r;L_q) \ll \sum_{j=0}^{j_0} N_j^{-r}m_{N_j}^{1/p-1/q}a_{n_j}(B_p^{m_{N_j}}(\alpha(N_j));l_q^{m_{N_j}}) + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} N_j^{-r}m_{N_j}^{1/p-1/q}, \tag{5.75}$$

де, нагадаємо, натуральне число j_0 може бути довільним, але таким, що $\sum_{j=0}^{j_0} n_j \le n$ ($n_0 = m_{N_0} = 5 \cdot 2^{d-2}$).

Тепер за заданим (достатньо великим) числом $n \in \mathbb{N}$ знайдемо таке $s \in \mathbb{N}$, що $\sum_{j=0}^{s} m_{N_j} < n \le \sum_{j=0}^{s+1} m_{N_j}$ Нагадаємо, що $N_j = 2^{j+1} - 1$ і відповідно $m_{N_j} = (4N_j+1)(2N_j)^{d-2} \asymp 2^{j(d-1)}$. Покладемо у співвідношенні (5.75) $j_0 = 2s$ та

$$n_j = \begin{cases} m_{N_j}, & 0 \le j \le s \\ N_s^{d-1} \cdot 2^{(s-j)(d-1)}, & s < j \le 2s. \end{cases}$$

Тоді

$$\sum_{j=0}^{j_0} n_j \ll \sum_{j=0}^{s} 2^{j(d-1)} + \sum_{j=s+1}^{2s} 2^{(2s-j)(d-1)} \asymp 2^{s(d-1)} \asymp n.$$

Зрозуміло, що при $0 \le j \le s$

$$a_{n_j}(B_p^{m_{N_j}}(\alpha(N_j)); l_q^{m_{N_j}}) = 0,$$

а згідно з рівністю (5.60), з урахуванням леми 5.4.1, при $s < j \le 2s$

$$a_{n_j}(B_p^{m_{N_j}}(\alpha(N_j)); l_q^{m_{N_j}}) \ll \left(N_s^{d-1} \cdot 2^{(s-j)(d-1)^2}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Звідси

$$\sum_{j=0}^{j_0} N_j^{-r} m_{N_j}^{1/p-1/q} a_{n_j}(B_p^{m_{N_j}}(\alpha(N_j)); l_q^{m_{N_j}} \ll$$

$$\ll \sum_{j=s}^{2s} N_j^{-r} m_{N_j}^{1/p-1/q} \left(N_s^{d-1} \cdot 2^{(s-j)(d-1)^2}\right)^{1/q-1/p} \asymp$$

$$\asymp \sum_{j=s}^{2s} 2^{-jr} \cdot 2^{j(d-1)(1/p-1/q)} \left(2^{s(d-1)} \cdot 2^{(s-j)(d-1)^2}\right)^{1/q-1/p} \asymp 2^{-sr} \asymp n^{-r/(d-1)},$$

якщо $r > (d-1)^2 + (d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, $1 \le p < q \le \infty$.

Зауваживши, що

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} N_j^{-r} m_{N_j}^{1/p-1/q} \ll 2^{-sr} \asymp n^{-r/(d-1)}$$

при $r > (d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, приходимо до такого висновку. При $1 \le p < q \le \infty$ і $r > (d-1)^2 + (d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ маємо

$$a_n(W_p^r; L_q) \ll n^{-r/(d-1)}. \tag{5.76}$$

У випадку $1 \le p = q \le \infty$, $r > 0$ оцінка (5.76) є наслідком співвідношення для $E_k(W^r_p)_q$ в теоремі K_5 і нерівностей

$$a_n(W^r_p; L_q) \le d_n(W^r_p; L_q) \ll E_k(W^r_p)_q,$$

у яких $n = \dim \mathcal{H}(k) \asymp k^{d-1}$, тобто $k \asymp n^{1/(d-1)}$.

Оцінка (5.76) справджується для поперечника $a_n(W^r_p; L_q)$ також у випадку $1 \le q < p \le \infty$, бо $L_p \subset L_q$ і тоді $a_n(W^r_p; L_q) \le a_n(W^r_p; L_p)$.

Нарешті, наведені вище оцінки зверху для поперечника $a_n(W^r_p; L_q)$ залишаються правильними в силу співвідношення (5.56) і для поперечника $\overline{d}_n$.

Оцінка знизу. Почнемо з випадку $1 \le p \le q \le \infty$. Залучимо оператор $\mathcal{D}^r$, $r > 0$, "узагальненого" диференціювання на сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ (див. пункт 5.4.1): $\mathcal{D}^r = (-\Delta_0)^{r/2}$. Нагадаємо, його можна розглядати як мультиплікаторний оператор, що згідно з формулою

$$Y_k(\mathcal{D}^r f; \boldsymbol{x}) = [k(k+d-2)]^{r/2} Y_k(f; \boldsymbol{x}), \quad f \in L_1(\mathbb{S}^{d-1}),\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Зокрема, для полінома $F(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^N Y_k(\boldsymbol{x})$, $Y_k \in \mathcal{H}^d_k$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{d-1}$ маємо

$$\mathcal{D}^r F(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^N [k(k+d-2)]^{r/2} Y_k(\boldsymbol{x}).$$

В [39] доведено, що для похідних $\mathcal{D}^r F$ поліномів по сферичних гармоніках, степінь яких не перевищує N, має місце нерівність Бернштейна

$$\|\mathcal{D}^r F\|_p \ll N^r \|F\|_q, \quad 1 \le p \le q \le \infty.$$

Згідно з цією нерівністю $b_n(W^r_p; L_q) \gg n^{-r/(d-1)}$.

Встановимо оцінки знизу у випадку $1 \le q < p \le \infty$. Для заданого натурального числа n підберемо $k \in \mathbb{N}$, що задовольняє умову $\dim\mathcal{H}(N_{k-1}) \le n < \dim\mathcal{H}(N_k)$, $N_k = 2^{k+1} - 1$. Зазначимо, $\dim\mathcal{H}(N) \asymp N^{d-1}$. Тоді, застосувавши теорему про проектор для поперечника a_n (див., наприклад, [41]), можна записати

$$a_n(W^r_p; L_q) \gg a_n(W^r_p \cap \mathcal{H}(N_k); L_q \cap \mathcal{H}(N_k)), \tag{5.77}$$

(в якості проектора достатньо взяти оператор V_{2^k} із леми Γ_5).
Тепер, як і в доведенні оцінки зверху, використавши теорему MZ_5 переконуємося, що

$$a_n(W^r_p \cap \mathcal{H}(N_k); L_q \cap \mathcal{H}(N_k)) \asymp N_k^{-r} m_{N_k}^{1/p-1/q} a_n(B_p^{m_{N_k}}(\alpha(N_k)); l_q^{m_{N_k}}). \tag{5.78}$$

Зауваживши, що $n \asymp m_{N_k} \asymp N_k^{d-1}$, беручи до уваги лему 5.4.1, із співвідношення (5.62) при $1 \le q < p \le \infty$ маємо

$$a_n(B_p^{m_{N_k}}(\alpha(N_k)); L_q^{m_{N_k}}) \asymp N_k^{(d-1)(1/q-1/p)}. \tag{5.79}$$

Поєднавши співвідношення (5.77)–(5.79) та врахувавши нерівність (5.57), в підсумку отримаємо, що при $1 \le q < p \le \infty$ та $r > 0$

$$\overline{d}_n(W_p^r; L_q) \gg n^{-r/(d-1)}.$$

Теорема 5.4.1 доведена. ■

5.5 Наближення класів нескінченно диференційовних функцій

Знайдені двосторонні оцінки відхилень сум Фур'є в просторах $L_p(0,2\pi)$ при $p=\infty$ від класів нескінченно-диференційовних функцій. Ці оцінки доповнюють раніше відомі для інших значень параметра p, $1 \le p \le \infty$.

5.5.1 Позначення та базові означення

Нехай $L_p(0,2\pi)$, $1 \le p \le \infty$ — простір вимірних 2π−періодичних на дійсній осі функцій φ зі скінченною нормою

$$\|\varphi\|_p = \left((2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ при } 1 \le p < \infty,$$

$$\|\varphi\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| \text{ при } p=\infty.$$

Означимо такий функціональний клас (див. [114]):

$$L_{\beta,p}^{\psi} := \{f: \quad f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t) D_{\psi,\beta}(x-t)dt, \quad \varphi\in L_p(0,2\pi), \quad \|\varphi\|_p \le 1, \quad \varphi \perp 1\},$$

де $D_{\psi,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$, а $\{\psi(k),\, k \in \mathbb{N}\}$ — довільна фіксована послідовність додатних дійсних чисел, $\beta \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $\int\limits_0^{2\pi} f(t)dt = 0$, якщо $f \in L_{\beta,p}^{\psi}$.

Позначимо через I_0 множину додатних спадних до нуля на $[1,\infty)$ функцій і покладемо

$$\mathfrak{M}''_\infty := \big\{\psi \in I_0 : \ (\exists\, \alpha > 1 \ \exists\, t_0 \geq 1 \ \forall t \geq t_0 : \ \eta(t) - t \geq \alpha) \text{ і } t/(\eta(t)-t) \uparrow \infty\big\},$$

де $\eta(t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, ψ^{-1} — функція обернена до ψ. Зазначимо, якщо $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, то множина $L^\psi_{\beta,p}$ складається із функцій нескінченно-диференційовних всюди на $\mathbb{R}$, за винятком, можливо, множини точок міри нуль (див. [114, Розділ III, §5]).

Для функції $\varphi \in L_p(0,2\pi)$ і $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$\rho_n(\varphi;t) := \varphi(t) - S_{n-1}(\varphi,t), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $S_n(\varphi,t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} \widehat{\varphi}_k e^{ikt}$ — частинна сума порядку $2n+1$ ряду Фур'є функції φ, а φ_k — її коефіцієнти Фур'є.

Для множини $W \subset L_q(0,2\pi)$ покладемо

$$\mathcal{E}_n(W)_q := \sup_{\varphi\in W} \|\rho_n(\varphi;\cdot)\|_q.$$

5.5.2 Основний результат

Теорема 5.5.1. *Нехай* $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $1 \leq p \leq \infty$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_\infty \asymp \psi(n)(\eta(n)-n)^{\frac{1}{p}}$$

Зауваження 5.5.1. *Асимтотичні оцінки величин* $\mathcal{E}_n(L^\psi_{\beta,p})_q$ *для значень параметрів* p *та* q*, відмінних від відображених в теоремі 5.5.1, можна знайти в [114].*

Доведення теореми 5.5.1. ***Оцінка зверху.*** Побудуємо послідовність $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ за наступною рекурентною формулою: для довільного $n \in \mathbb{N}$ покладемо $N_1 = n$, а $N_{k+1} = [\eta(N_k)] + 1$, $k \in \mathbb{N}$, де $[x]$ позначає цілу частину числа $x \in \mathbb{R}$. Нехай для будь-якої функції $f \in L^\psi_{\beta,p}$ і $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_0(t) := S_{n-1}(f;t),$$

$$\varphi_k(t) := S_{N_{k+1}-1}(f;t) - S_{N_k-1}(f;t), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Внаслідок збіжності майже всюди на $\mathbb{R}$ частинних сум ряду Фур'є функції $f \in L^\psi_{\beta,p}$ при $\psi \in \mathfrak{M}''_\infty$, майже всюди на $\mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(t) - S_{n-1}(f;t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t).$$

Враховуючи цей факт, а також те, що згідно з теоремою 6.2 із [114, с. 226]

$$\|\varphi_k\|_p \le \|S_{N_{k+1}-1}(f) - f\|_p + \|S_{N_k-1}(f) - f\|_p \ll$$

$$\ll \psi(N_{k+1}) + \psi(N_k) \ll \psi(N_k),$$

в силу узагальненої нерівності С. М. Нікольського [56], що пов'язує значення норм довільного тригонометричного полінома

$$t_{n_1,n_2}(x) = \sum_{|k|\in[n_1,\, n_2]} c_k \mathrm{e}^{ikx}, \quad 0 \le n_1 < n_2$$

у просторах $L_r(0;2\pi)$ і $L_s(0;2\pi)$ і яка полягає в тому, що

$$\|t_{n_1,n_2}(x)\|_s \le C(n_2 - n_1)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \|t_{n_1,n_2}\|_r, \quad 1 \le r < s \le \infty.$$

де C — стала, яка не залежить від n_1 і n_2, маємо:

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_\infty \le \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_k\|_\infty \ll \sum_{k=1}^{\infty} (N_{k+1} - N_k)^{1/p} \|\varphi_k\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{k=1}^{\infty} (N_{k+1} - N_k)^{1/p} \psi(N_k). \tag{5.80}$$

Далі, відштовхуючись від означення множини $\mathfrak{M}''_\infty$, поклавши $\Delta_k := N_{k+1} - N_k$, $k \in \mathbb{N}$, неважко показати (див. [65]), що для деякого натурального k_0 при будь-якому $k \ge k_0$ справджується нерівність $\Delta_{k+1} \le K\Delta_k$, де K — стала, що не залежить від k (і, на що слід наголосити, $0 < K < 2$). А оскільки $\psi(N_{k+1}) \le \frac{1}{2}\psi(N_k)$, то при $k \ge k_0$

$$\psi(N_{k+1})\Delta_{k+1}^{1/p} \le \gamma \psi(N_k) \Delta_k^{1/p},$$

де $\gamma < 1$.

З урахуванням цього (зауваживши також, що $[\eta(n)] - n + 1 \asymp \eta(n) - n$), приходимо до висновку, що наслідком співвідношення (5.80) є нерівність

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_\infty \ll \psi(n)(\eta(n) - n)^{\frac{1}{p}}.$$

Оцінка знизу. Для заданого $n \in \mathbb{N}$ розглянемо функцію

$$f(t) = C(\eta(n) - n)^{1/p-1} \sum_{|k|\in I_n} \psi(|k|)\mathrm{e}^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $I_n = [n, [\eta(n)] + 1]$. Неважко показати, що для деякої додатної сталої C маємо $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$ при $1 < p < \infty$ і

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_{\infty} = \|f\|_{\infty} \geq f(0) = C(\eta(n) - n)^{1/p-1} \sum_{k \in I_n} \psi(k) \geq$$

$$\geq C(\eta(n) - n)^{1/p-1} \cdot 2(\eta(n) - n)\psi([\eta(n)] + 1) \gg (\eta(n) - n)^{1/p}\psi(n).$$

Із цього співвідношення випливає оцінка знизу в теоремі 5.5.1.

Теорема 5.5.1 доведена. ■

Сформулюємо наслідок з теореми 5.5.1 у випадку, коли $\psi(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t^r}$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$ (тоді $\eta(n) - n \asymp n^{1-r}$). Покладемо $L^{\alpha,r}_{\beta,p} := L^{\psi}_{\beta,p}$.

Наслідок 5.5.1. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\alpha > 0$, $0 < r < 1$. *Тоді*

$$\mathcal{E}_n(L^{\alpha,r}_{\beta,p})_{\infty} \asymp \mathrm{e}^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}}$$

5.6 Висновки до розділу 5

Дано відповіді на важливі питання щодо лінійної та нелінійної апроксимації певних функціональних множин у просторах функцій, з областю визначення різної структури в $\mathbb{R}^d$. Зокрема, – це питання, пов'язані з апроксимацією у просторах $L_q(\mathbb{T}^d)$, та у просторах Лебега $L_q(\mathbb{S}^{d-1})$, де $\mathbb{S}^{d-1}$ одинична сфера простору $\mathbb{R}^d$.

Мотивація досліджень підрозділу 5.1 навіяна статтею А. Зігера і В. Требелса [199]. В ній автори, аналізуючи ефект стрибковості у зміні порядкових значень ентропійних чисел $\epsilon_n(LG^\gamma, L_p(\mathbb{T}))$ (у теоремі Б. С. Кашина і В. М. Темлякова [36, теорема 3.1]) при переході від метрики в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, до метрики в $L_\infty(\mathbb{T})$, залучивши простори $\exp L^\nu$ і встановивши порядкові значення величин $\epsilon_m(LG^\gamma, \exp L^\nu)$ відслідкували процес "стирання" зазначеного ефекту. Простори $\exp L^\nu$ — це експоненціальні простори Орліча, що наділені нормою Люксембурга. У підрозділі 5.1 введено до розгляду нова шкала, так званих, двійкових просторів Бєсова $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ компактно вкладених у простори $\exp L^\nu$ і, в додаток до [199], встановлені точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників та ентропійних чисел одиничних куль з просторів $\mathrm{dyad}\, B^{0,\gamma}_{p,\theta}$ у просторах $\exp L^\nu$.

У підрозділах 5.2 та 5.3 досліджені деякі апроксимаційні величини на класах $A^\rho_{p,\boldsymbol{\beta}}$ функцій кількох змінних, періодичних по кожній із них, і таких, що зображуються у вигляді згортки елементів одиничної кулі простору $L_p(\mathbb{T}^d)$ з кратним ядром Пуассона. Відповідне наближення за допомогою $M-$вимірних підпросторів здійснюється в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$, $1 \le q \le \infty$. Зокрема, в підрозділі 5.2 знайдені точні за порядком оцінки наближення таких класів за допомогою тригонометричних поліномів зі спектром у многогранних областях, а в підрозділі 5.3 при $d \in \mathbb{N}$ встановлена слабка асимптотика $M-$поперечників за Колмогоровим класів $A^\rho_{p,\boldsymbol{\beta}}$ у просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$, $2 \le q \le p < \infty$.

Констатується той факт, що для деяких співвідношень між параметрами p та q саме простір поліномів $T(\triangle(n,d))$, $d \ge 2$, де $\triangle(n,d) = \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d_0 : |\boldsymbol{k}|_1 := \sum\limits_{j=1}^{d} |k_j| \le n\}$, є оптимальним в тому розумінні, що забезпечує найкращі за порядком оцінки для колмогоровських поперечників $d_M(A^\varrho_p; L_q(\mathbb{T}^d))$ заданої вимірності M. Зазначимо, що як відомо, з цієї точки зору найкращим підпростором для наближення функцій із класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ в просторі $L_q(\mathbb{T}^d)$ є множина тригонометричних поліномів $T(\Lambda)$ зі спектром у так званих гіперболічних хрестах. Саме в конструкції наближаючих агрегатів (поліномів) і, як наслідок, в методах одержання необхідних оцінок полягає принципова відмінність в наближенні класів $W^{\boldsymbol{r}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$ і $A^{\boldsymbol{r},\boldsymbol{\alpha}}_{p,\boldsymbol{\beta}}$.

У підрозділі 5.4 розв'язана задача, про слабку асимптотику одного типу нелінійних поперечників класів функцій $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$, визначених на одиничній сфері $\mathbb{S}^{d-1}$ простору $\mathbb{R}^d$, які є множинами, так званих, r–их інтегралів функцій сумовних на $\mathbb{S}^{d-1}$. Основний результат цього підрозділу є істотним доповненням до області досліджень, пов'язаних з лінійною апроксимацією функціональних класів функцій $W^r_p(\mathbb{S}^{d-1})$.

У підрозділі 5.5 знайдені двосторонні оцінки відхилень сум Фур'є в просторах $L_p(0,2\pi)$ при $p=\infty$ від класів нескінченно-диференційовних функцій. Ці оцінки доповнюють раніше відомі для інших значень параметра p, $1\le p\le\infty$.

Результати розділу 5 посекційно опубліковані у роботах [79, 69, 70, 71, 67].

Додаток A

НЕЛІНІЙНА АПРОКСИМАЦІЯ У ДИСКРЕТНИХ ПРОСТОРАХ

A.1 Апроксимація у просторах l_p^m

Знайдені значення величин n – членного проективного наближення у просторі l_q^m одиничної кулі $B_p^m \subset l_p^m$ за стандартним базисом простору $\mathbb{R}^m$.

Позначимо через l_p^m, $0 < p \le \infty$, простір векторів $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ дійсних чисел, наділений квазі-нормою

$$\|\boldsymbol{x}\|_{l_p^m} = \Big(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad 0 < p < \infty,$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_{l_\infty^m} = \max_{1 \le i \le m} |x_i|, \qquad p = \infty.$$

Для $r > 0$ визначимо $B_p^m(r) := \{\boldsymbol{x} \in l_p^m : \ \|\boldsymbol{x}\|_{l_p^m} \le r\}$ та $B_p^m \equiv B_p^m(1)$.

Якщо $n \le m$, $\lambda_n = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ і $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, то покладемо

$$\pi_{\lambda_n} \boldsymbol{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \in \mathbb{R}^m,$$

де $\tilde{x}_i = x_i$ при $i \in \lambda_n$ і $\tilde{x}_i = 0$ при $i \notin \lambda_n$. Для $B \subset l_p^m$ позначимо

$$e_n^{\perp}(B)_q := \sup_{\boldsymbol{x} \in B} e_n^{\perp}(x; p; q) = \sup_{\boldsymbol{x} \in B} \inf_{\lambda_n} \|\boldsymbol{x} - \pi_{\lambda_n} \boldsymbol{x}\|_{l_q^m}, \quad 0 < p, q \le \infty.$$

Задача полягає у знаходженні точних значень величин $e_n^{\perp}(B_p^m)_q$.

Зауваження A.1.1. *У подальшому вважаємо, що координати векторів $\boldsymbol{x}$ в означенні $e_n^{\perp}(B_p^m)_q$ невід'ємні, тобто $x_i \ge 0$, $i = \overline{1, m}$. Таке обмеження, очевидно, не звужує постановки задачі і не впливає на її кінцевий розв'язок.*

Теорема A.1.1. *Нехай* $0 < p \leq \infty$ *і* $n < m$. *Тоді*

$$e_n^{\perp}(B_p^m)_q = \begin{cases} \max\limits_{n+1\leq k\leq m} \dfrac{(k-n)^{\frac{1}{q}}}{k^{\frac{1}{p}}}, & 0 < q < \infty, \\ \\ \dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{p}}}, & q = \infty. \end{cases}$$

Зауваження A.1.2. *У випадках* $0 < q < p \leq \infty$ *і* $0 < q = p < \infty$ *максимум в теоремі A.1.1 досягається при* $k = m$ *(див. доведення теореми A.1.1). У випадку* $0 < p < q < \infty$ *максимум досягається:*

(1) *при одному із значень k:* $k_1 = \left[\frac{n}{q/p-1}\right]$, $k_2 = \left[\frac{n}{q/p-1}\right] + 1$, $k_3 = m$, *якщо* $n < \frac{n}{q/p-1} < m$;

(2) *при* $k = n+1$, *якщо* $0 < \frac{n}{q/p-1} \leqslant n$;

(3) *при* $k = m$, *якщо* $\frac{n}{q/p-1} \geq m$.

У кожному із випадків при $n \asymp m$ *справедливе співвідношення*

$$C_1(p,q) m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leq e_n^{\perp}(B_p^m)_q \leq C_2(p,q) m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Доведення теореми A.1.1. Зауважимо, позаяк при $0 < p$, $q < \infty$, очевидно,

$$e_n^{\perp}(B_p^m)_q = \left(e_n^{\perp}(B_{p/q}^m)_1\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{A.1}$$

то достатньо знайти значення $e_n^{\perp}(B_s^m)_1$ при $0 < s < \infty$, розглянувши окремо випадки: $p = \infty$, $0 < q < \infty$; $p = \infty$, $q = \infty$; $0 < p < \infty$, $q = \infty$.

Поклавши

$$\overline{B}_s^m := \{\boldsymbol{x} \in B_s^m : \ x_1 \geq \ldots \geq x_m \geq 0\},$$

легко бачити, що $e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = e_n^{\perp}(\overline{B}_s^m)_1$. Покажемо тепер, що для

$$B_s^{m,n} := \{\boldsymbol{x} \in B_s^m : \ x_1 = \ldots = x_{n+1} \geq x_{n+2} \geq \ldots \geq x_m \geq 0\}$$

має місце рівність

$$e_n^{\perp}(B_s^{m,n})_1 = e_n^{\perp}(\overline{B}_s^m)_1,$$

і в цьому випадку

$$e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = \sup_{\boldsymbol{x}\in B_s^{m,n}} \sum_{i=n+1}^{m} x_i.$$

Нерівність $e_n^{\perp}(B_s^{m,n})_1 \le e_n^{\perp}(\overline{B}{}_s^m)_1$ — тривіальна, бо $B_s^{m,n} \subset \overline{B}{}_s^m$. Необхідно довести протилежну нерівність

$$e_n^{\perp}(B_s^{m,n})_1 \ge e_n^{\perp}(\overline{B}{}_s^m)_1.$$

Для цього достатньо показати: якщо $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^m \in \overline{B}{}_s^m$, то знайдеться таке $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_i)_{i=1}^m \in B_s^{m,n}$, що $e_n^{\perp}(\boldsymbol{x}; s; 1) \le e_n^{\perp}(\tilde{\boldsymbol{x}}; s; 1)$.

Нехай задані $n < m$ і $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^m \in \overline{B}{}_s^m$. Розглянемо послідовність $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\tilde{x}_i)_{i=1}^m$, яка означається наступним чином:

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} \dfrac{r}{(n+1)^{1/s}}, & i = 1, \dots, n+1, \\ x_i, & i = n+2, \dots, m, \end{cases}$$

де $r = \left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^s \right)^{\frac{1}{s}}$. Тоді, очевидно, $\tilde{\boldsymbol{x}} \in B_s^{m,n}$, причому

$$e_n^{\perp}(\boldsymbol{x}; s; 1) = x_{n+1} + \sum_{i=n+2}^{m} x_i \le \frac{r}{(n+1)^{1/s}} + \sum_{i=n+2}^{m} x_i = e_n^{\perp}(\tilde{\boldsymbol{x}}; s; 1),$$

бо $\left(\frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^s \right)^{\frac{1}{s}} \ge x_{n+1}$.

Отже,

$$e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = \sup_{\boldsymbol{x} \in B_s^{m,n}} \sum_{i=n+1}^{m} x_i,$$

і враховуючи, що для $\boldsymbol{x} \in B_s^{m,n}$ має місце рівність $x_{n+1} = \left(\frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^s \right)^{\frac{1}{s}}$, поклавши $y_{n+1} = \left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^s \right)^{\frac{1}{s}}$, $y_k = x_k$, $k = n+2, \dots, m$ (зауважимо, що тоді $\sum\limits_{i=n+1}^{m} y_i^s = 1$), приходимо до висновку, що

$$e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = \sup_{\boldsymbol{y} \in \hat{B}_s^{m,n}} \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k y_k, \tag{A.2}$$

де $\hat{B}_s^{m,n} = \{\boldsymbol{y} = (y_i)_{i=n+1}^m \in B_s^{m-n} : \ \alpha_k y_k \le \alpha_{n+1} y_{n+1}, \ k = n+2, \dots, m\}$ і $\alpha_{n+1} = (n+1)^{-1/s}$, $\alpha_k \equiv 1$, $k = n+2, \dots, m$. Тепер значення величини $e_n^{\perp}(B_s^m)_1$ буде знайдено виходячи із розв'язку наступної, більш загальної, екстремальної задачі.

Задача 1. *Знайти максимум*

$$F(x_1, \dots, x_l) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_l x_l$$

на множині

$$\Omega = \left\{ \boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^l \in B_p^l(R): \ b_1 x_1 \geq b_2 x_2 \geq \ldots \geq b_l x_l, \, 0 < p < \infty, \ R > 0 \right\}$$

при кожному із наступних припущень:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_l > 0, \\ &\text{(ii)} \quad b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_l > 0, \, b_1 > 0 - \textit{довільне} \\ &\qquad\ \textit{і} \ \sum_{i=1}^k b_i^{-p} \geq k b_{k+1}^{-p} \ \textit{при} \ \ 1 \leq k \leq l-1. \end{aligned}$$

Зауваження А.1.3. *а) У припущенні* (ii), *зокрема, містяться (при* $k = 1$ *) умови* $0 < b_1 \leq b_2$ *і* $b_2 \geq \ldots \geq b_l > 0$.

b) Умова (ii) *справджується, очевидно, при* $l = m - n$, *якщо* $b_1 = \alpha_{n+1}$ *, а* $b_k = \alpha_{n+k}, \ k = 2, \ldots, l$.

Розв'язок *Задачі 1* за умови (i), коли $1 < p < \infty$, можна знайти, наприклад, в [132, Розділ 4, §4.3]):

$$\max F(x_1, \ldots, x_l) = F(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_l) = R \left(\sum_{i=1}^l b_i^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ і екстремальний набір $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i=1}^l$:

$$\hat{x}_i = R b_i^{p'-1} \left(\sum_{j=1}^l b_j^{p'} \right)^{-\frac{1}{p}} = R \left(b_i^{p'} / \sum_{j=1}^l b_j^{p'} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Зазначимо, що у такому випадку обмеження із Ω стають зайвими, бо виконуються автоматично.

Легко показати, що при $0 < p \leq 1$

$$\max F(x_1, \ldots, x_l) = F(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_l) = R b_1,$$

причому $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_i)_{i=1}^l: \quad \hat{x}_1 = R$, а $\hat{x}_i = 0, \ i = 2, \ldots, l$.

Покажемо тепер, що за припущення (ii) при $1 \leq p < \infty$ матимемо

$$\max F(x_1, \ldots, x_l) = F(x_1^*, \ldots, x_l^*),$$

де $(x_1^*, \ldots, x_l^*)$ — набір, що "врівноважує" вектор $(b_1, \ldots, b_l)$, тобто

$$x_i^* = \frac{R}{b_i (\sum\limits_{j=1}^l b_j^{-p})^{1/p}}, \qquad i = 1, \ldots, l,$$

$$F(x_1^*,\dots,x_l^*)=\frac{l}{(\sum\limits_{j=1}^{l} b_j^{-p})^{1/p}}R, \tag{A.3}$$

а при $0<p<1$

$$\max F(x_1,...,x_l)=\max_{1\le k\le l} F(x_1^{(k)},...,x_l^{(k)}) \quad \text{і} \quad x^{(k)}:=(x_1^{(k)},...,x_l^{(k)}),\ k=1,...,l,$$

де

$$x_i^{(k)}=\frac{R}{b_i(\sum\limits_{j=1}^{k} b_j^{-p})^{1/p}},\ i=1,\dots,k, \quad x_i^{(k)}=0,\ i=k+1,...,l, \tag{A.4}$$

$$F(x_1^{(k)},\dots,x_l^{(k)})=\frac{k}{(\sum\limits_{j=1}^{k} b_j^{-p})^{1/p}}R.$$

Доведення, однотипне для всіх p, $0<p<\infty$, проведемо індукцією по l. Якщо $l=1$, то твердження, очевидно, виконується. Припустимо, що твердження справджується при $l=r-1\ge 2$ і доведемо його при $l=r$.

Нехай $\boldsymbol{x}=(x_i)_{i=1}^r\in\Omega$ — довільне фіксоване і $\delta=\big(\sum\limits_{i=1}^{r-1} x_i^p\big)^{1/p}$. Далі, припустимо, що $\bar x_1,\dots,\bar x_{r-1}$ — екстремальний набір вигляду (A.3) чи (A.4) в *Задачі 1* при $l=r-1$ і $R=\delta$, тобто $\overline{x}_i=0$, $i=d,...,r$, $\overline{x}_i=\frac{\delta}{b_i(\sum\limits_{k=1}^{d-1} b_k^{-p})^{1/p}}$, $i=1,...,d-1$ для будь-якого d, $2\le d\le r$. Тоді $\big(\sum\limits_{i=1}^{r-1}\overline{x}_i^p\big)^{1/p}=\delta$ і

$$F(x_1,\dots,x_r)\le F(\bar x_1,\dots,\bar x_{r-1},x_r)=\sum_{i=1}^{r-1} b_i\bar x_i+b_rx_r=\sum_{i=1}^{r-1}\frac{(d-1)^{1/p}}{(\sum\limits_{k=1}^{d-1} b_k^{-p})^{1/p}}x_i^\circ+b_rx_r^\circ,$$

де $x_1^\circ=\ldots=x_{d-1}^\circ=\frac{\delta}{(d-1)^{1/p}}$, $x_i^\circ=0$, $i=d,...,r-1$, $x_r^\circ=x_r$. Очевидно, що

$$\sum_{i=1}^{r-1}(x_i^\circ)^p=\delta^p,\ \text{тобто}\ (x_i^\circ)_{i=1}^{r-1}\in B_p^{r-1}(\delta),\ \text{а}\ (x_i^\circ)_{i=1}^{r}\in B_p^{r}(R). \tag{A.5}$$

Покладемо

$$\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_{d-1}=\left((d-1)/\sum_{k=1}^{d-1} b_k^{-p}\right)^{1/p} \quad \text{і} \quad \beta_r=b_r. \tag{A.6}$$

Тоді співвідношення(A.5), (A.6) тягнуть за собою $\beta_1 x_1^\circ = \ldots = \beta_{d-1} x_{d-1}^\circ$ і $\beta_{d-1} x_{d-1}^\circ = b_{d-1}\overline{x}_{d-1} \geq b_r x_r = \beta_r x_r$ (нерівність виконується, бо $(\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_{r-1}, x_r) \in \Omega$).

Таким чином,

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\Omega} F(x_1,\ldots,x_r) \leq \max_{\boldsymbol{x}\in\Omega'} \sum_{i=1}^{d} \beta_i x_i =: \max_{\boldsymbol{x}\in\Omega'} G(x_1,\ldots,x_d), \tag{A.7}$$

де $\Omega' = \{\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^d : \ \boldsymbol{x} \in B_p^d(R), \ \ \beta_1 x_1 = \ldots = \beta_{d-1} x_{d-1} \geq \beta_r x_d\}$ при $0 < p < \infty$ і $R > 0$, а числа β_i, $i = 1,\ldots,d$ визначаються формулами (A.6). Отже розв'язуємо задачу про знаходження $\max\limits_{\boldsymbol{x}\in\Omega'} G(x_1,\ldots,x_d)$, яка тотожна наступній задачі.

Задача 2. *Знайти при* $1 \leq d \leq r$

$$\max_{x_d\in I} \tilde{G}(x_d) := \max_{x_d\in I} \frac{d-1}{(\sum\limits_{k=1}^{d-1} b_k^{-p})^{1/p}} (R^p - x_d^p)^{1/p} + \beta_r x_d = \max_{x_d\in I} (d-1) D^{1/p} (R^p - x_d^p)^{1/p} + \beta_r x_d$$

за умови (ii) *Задачі 1. Тут* $D = \left(\sum\limits_{k=1}^{d-1} b_k^{-p}\right)^{-1}$, $I = [0,\eta]$, *а число* η *визначається з умови*

$$\frac{1}{d-1}\sum_{i=1}^{d-1} \beta_i x_i \geq \beta_r x_d,$$

у кінці ланцюжка наслідкових до неї нерівностей

$$\frac{R^p - x_d^p}{\sum\limits_{i=1}^{d-1} b_i^{-p}} \geq (\beta_r x_d)^p, \quad D(R^p - x_d^p) \geq \beta_r^p x_d^p, \quad x_d \leq \left(\frac{D}{D+\beta_r^p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot R =: \eta.$$

Отже, для $x_d \in (0,R)$: $\widetilde{G}'(x_d) = -(d-1)D^{1/p}(R^p - x_d^p)^{1/p-1} x_d^{p-1} + \beta_r$ і $G'(x_d) = 0$ при

$$x_d = \eta_0 = \left(\frac{(d-1)^{\frac{p}{p-1}} D^{\frac{1}{1-p}}}{\beta_r^{\frac{p}{1-p}} + (d-1)^{\frac{p}{1-p}} D^{\frac{1}{1-p}}}\right)^{1/p} \cdot R.$$

Нехай тепер $1 < p < \infty$ (тоді $d = r$). Покажемо, що в такому випадку $\eta_0 \notin I$, а точніше, $\eta_0 \geq \eta$. Справді, остання нерівність рівносильна нерівності

$$\frac{(r-1)^{\frac{p}{1-p}} D^{\frac{1}{1-p}}}{\beta_r^{\frac{p}{1-p}} + (r-1)^{\frac{p}{1-p}} D^{\frac{1}{1-p}}} \geq \frac{D}{\beta_r^p + D}$$

або, після елементарних перетворень, — нерівності

$$(r-1)^{\frac{p}{1-p}} D^{\frac{1}{1-p}} D^{-1} \geq \beta_r^{\frac{p}{1-p}} \beta_r^{-p}.$$

Підносячи обидві частини останньої нерівності до від'ємного степеня $\frac{1-p}{p}$, маємо

$$(r-1)D \leq \beta_r^p, \quad \text{або} \quad \left((r-1)/\sum_{i=1}^{r-1} b_i^{-p}\right)^{\frac{1}{p}} \leq b_r,$$

а такий результат узгоджується з вихідною умовою (ii) *Задачі 1*.

Таким чином, функція $\tilde{G}'(x_r)$ зберігає знак на всьому інтервалі $(0,\eta)$, а це означає, що функція $\tilde{G}(x_r)$ монотонна на I і її максимум досягається на одному із кінців відрізка I.

Далі, $\tilde{G}(0) = \beta_r \cdot R$, а в точці $x_r = \eta$ виконуються рівності $\beta_1 x_1 = \ldots = \beta_r x_r$, причому $\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^p = R^p$. А отже,

$$\tilde{G}(\eta) = G(x_1,\ldots,x_r) = \frac{r}{(\sum\limits_{i=1}^{r} b_i^{-p})^{1/p}} \cdot R.$$

Але ж $\beta_r \leq r/(\sum\limits_{i=1}^{r} b_i^{-p})^{1/p}$, бо ця нерівність рівносильна наступній правильній нерівності: $\sum\limits_{i=1}^{r} b_i^{-p} \leq r b_r^{-p} \leq r^p b_r^{-p}$ при $1 < p < \infty$. А тому, приходимо до висновку, що

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\Omega'} G(x_1,\ldots,x_r) = \max_{x_r\in I} \tilde{G}(x_r) = \max\{\tilde{G}(0);\tilde{G}(\eta)\} = \tilde{G}(\eta) = (\sum_{i=1}^{r} b_i^{-p})^{1/p} \cdot R.$$

При цьому екстремальний набір має вигляд

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_i)_{i=1}^r : \qquad \hat{x}_i = \frac{R}{b_i(\sum\limits_{j=1}^{r} b_j^{-p})^{1/p}}, \quad i = 1,2,\ldots,r.$$

Оскільки $\hat{\boldsymbol{x}} \in \Omega$, то насправді у співвідношенні (A.7) строгої нерівності бути не може і, таким чином, згідно з принципом математичної індукції розв'язок *Задачі 1* при $1 < p < \infty$ у припущенні (ii) подається формулами (A.3).

У випадку $0 < p < 1$ критична точка η_0 функції $G(x_d)$ належить відрізку I (див. доведення нерівності $\eta_0 \geq \eta$ при $1 < p < \infty$) і, більше того, $\eta_0 \leq \frac{R}{2^{1/p}}$ (неважко показати, що ця нерівність є наслідком припущення (ii) в *Задачі 1*).

Точка $x_d = \eta_0$ — це єдина критична точка функції $\tilde{G}(x_d)$ на інтервалі $(0, R)$, і оскільки $\tilde{G}'(x_d)$ неперервна на $(0, R)$, а $\tilde{G}'(\frac{R}{2^{1/p}}) \geq 0$ (прості обчислення з урахуванням припущення (ii)), то $\tilde{G}'(x_d) \geq 0$ при $x_d \in (\eta_0, R)$. Тобто, функція $\tilde{G}(x_d)$ — неперервна на $[0, R)$ — не спадає, принаймі, на відрізку $[\eta_0, \eta]$. Отже,

$$\max_{x_d \in I} \tilde{G}(x_d) = \max\{\tilde{G}(0); \tilde{G}(\eta)\} = \max\{B(d-1,p),\, B(d,p)\},$$

де $B(k,p) = \frac{k}{(\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^{-p})^{1/p}} \cdot R.$

Звідси, аналогічно випадку $1 < p < \infty$ випливає

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \Omega'} G(x_1, \ldots, x_d) = \max\{B(d-1,p),\, B(d,p)\}.$$

і, як наслідок співвідношення (A.7), згідно з принципом математичної індукції маємо

$$\max F(x_1, \ldots, x_l) = \max_{1 \leq k \leq l} F(x_1^{(k)}, ..., x_l^{(k)}) = \max_{1 \leq k \leq l} \frac{k}{(\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^{-p})^{1/p}} \cdot R.$$

де

$$x_i^{(k)} = \frac{R}{b_i(\sum\limits_{i=1}^{k} b_i^{-p})^{1/p}}, \quad i = 1, 2, \ldots, k; \quad x_i^{(k)} = 0, \quad i = k+1, ..., l.$$

У випадку $p = 1$ (а тоді $d = r$) маємо

$$\tilde{G}(x_r) = (r-1)D(R - x_r) + \beta_r x_r = (\beta_r - (r-1)D)x_r + R(r-1)D,$$

а отже, легко дійти висновку, що при $x_r \in (0, R)$:

$$\tilde{G}'(x_r) = \beta_r - (r-1)D = \beta_r - (r-1)/\sum_{i=1}^{r-1} \beta_i^{-1} \geq 0$$

згідно з припущенням (ii) у *Задачі 1.* Тому функція $\tilde{G}(x_l)$ не спадає на відрізку $I = [0, \eta]$, де, нагадаємо, $\eta = \frac{D}{D + \beta_r} \cdot R$. А отже, $\max\limits_{x_r \in I} \tilde{G}(x_r) = \tilde{G}(\eta) = \frac{r}{\sum\limits_{i=1}^{r} b_i^{-1}} \cdot R.$

Звідси при $p = 1$ маємо

$$\max_{\boldsymbol{x} \in \Omega} F(x_1, \ldots, x_l) = F(x_1^*, \ldots, x_l^*) = R \frac{l}{\sum\limits_{j=1}^{l} b_j^{-1}},$$

де

$$x_i^* = \frac{R}{b_i(\sum\limits_{j=1}^{l} b_j^{-1})}, \quad i = 1, \ldots, l,$$

Таким чином, доведено, що розв'язок *Задачі 1* при $1 \le p < \infty$ подається формулами (A.3), а при $0 < p < 1$ формулами (A.4).

Тепер, поклавши у *Задачі 1* $p = s$, $R = 1$, $l = m - n$, $b_1 = \alpha_{n+1} = (\frac{1}{n+1})^{1/s}$ і $b_k = \alpha_{n+k} = 1$, $k = 2, \ldots, l$, та співставивши її з правою частиною співвідношення (A.2), відповідно до формул (A.3) та (A.4) приходимо до висновку, що при $1 \le s < \infty$

$$e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = (m-n)/\Big(\sum_{i=n+1}^{m} \alpha_i^{-s}\Big)^{\frac{1}{s}} = \frac{m-n}{m^{1/s}}, \tag{A.8}$$

а при $0 < s < 1$

$$e_n^{\perp}(B_s^m)_1 = \max_{n+1 \le k \le m} \frac{k-n}{k^{1/s}}. \tag{A.9}$$

Повернемося до вихідної задачі про обчислення $e_n^{\perp}(B_p^m)_q$. Нехай $0 < p, q < \infty$. Тоді, поклавши $s = \frac{p}{q}$, згідно з (A.1), (A.8) та (A.9) маємо

$$e_n^{\perp}(B_p^m)_q = \Big(e_n^{\perp}(B_{p/q}^m)_1\Big)^{1/q} = \Big(\frac{m-n}{m^{1/s}}\Big)^{1/q} = \frac{(m-n)^{1/q}}{m^{1/p}}, \quad 0 < q < p < \infty$$

і

$$e_n^{\perp}(B_p^m)_q = \max_{n+1 \le k \le m} \frac{(k-n)^{\frac{1}{q}}}{k^{1/p}}, \quad 0 < p < q < \infty.$$

При $p = \infty$, $0 < q < \infty$:

$$e_n^{\perp}(B_\infty^m)_q = \sup_{\boldsymbol{u} \in B_\infty^m} \inf_{\lambda_n} \Bigg(\sum_{i \in \{1,\ldots,m\} \setminus \lambda_n} u_i^q\Bigg)^{1/q},$$

а отже,

$$e_n^{\perp}(B_\infty^m)_q = (m-n)^{1/q}.$$

При $p = q = \infty$, очевидно, $e_n^{\perp}(B_\infty^m)_\infty = 1$.

При $0 < p < \infty$, $q = \infty$, у спосіб аналогічний доведенню рівності (A.2), встановлюємо рівність $e_n^{\perp}(B_p^m)_\infty = \sup\limits_{y \in \hat{B}_p^{m,n}} \alpha_i y_i$, де, нагадаємо,

$$\hat{B}_p^{m,n} = \Big\{\boldsymbol{y} = (y_i)_{i=n+1}^m \in B_p^{m,n} : \quad \alpha_k y_k \le \alpha_{n+1} y_{n+1},\, k = n+2, \ldots, m\Big\},$$

$\alpha_{n+1} = (n+1)^{-1/p}$, $\alpha_k = 1$, $k = n+2, \ldots, m$.

Тепер, очевидно, $e_n^{\perp}(B_p^m)_\infty = (n+1)^{-1/p}$ і рівність досягається для набору

$$\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^m : \quad x_1 = \ldots = x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^{1/p}}, \quad x_i = 0,\, i = n+2, \ldots, m.$$

Теорема A.1.1 доведена. ∎

A.2 Апроксимація у просторах кратних послідовностей

Знайдені точні за порядком оцінки величин найкращих наближень q – еліпсоїдів в просторах кратних послідовностей за допомогою їх ортогональних проекцій на евклідові підпростори $\mathbb{R}^m$ розмірності m.

A.2.1 Головний результат

Нехай $\mathbb{R}(\mathbb{Z}^d)$ позначає лінійний простір послідовностей $\boldsymbol{a} = (a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$ дійсних чисел, у відповідності з яким-небудь фіксованим упорядкуванням мультиіндексів $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_d)$. Простір $\mathbb{R}(\mathbb{Z}^d)$, наділений скінченими квазі-нормами

$$\|\boldsymbol{a}\|_{l_q(\mathbb{Z}^d)} := \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\boldsymbol{k}}|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < q < \infty,$$

$$\|\boldsymbol{a}\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^d)} := \sup_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |a_{\boldsymbol{k}}|,$$

позначимо через $l_q(\mathbb{Z}^d)$, $0 < q \le \infty$.

Далі, для довільної неспадної функції $\nu : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (пишемо: $\nu \in P_0$) означимо при $0 < q < \infty$

$$B_q(\nu) := \left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}^d) : \quad \|a\|_{l_q(\mathbb{Z}^d),\,\nu} := \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \big(|\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}|\nu(|\boldsymbol{k}|_\infty)\big)^q\right)^{1/q} \le 1\right\}$$

— q−еліпсоїд в $\mathbb{R}(\mathbb{Z}^d)$ і покладемо також

$$B_\infty(\nu) := \left\{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}^d) : \quad \|\boldsymbol{a}\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^d),\,\nu} := \sup_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} |\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}|\nu(|\boldsymbol{k}|_\infty) \le 1\right\}.$$

Тут $|\boldsymbol{k}|_\infty := \|\boldsymbol{k}\|_{l_\infty^d} = \max\limits_{1\le i\le d} |k_i|$.

Очевидно,

$$\|\boldsymbol{a}\|_{l_q(\mathbb{Z}^d),\,\nu} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \nu^q(n) \sum_{\boldsymbol{k}\in\Gamma_n} |a_{\boldsymbol{k}}|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

і

$$\|\boldsymbol{a}\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^d),\,\nu} = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\nu(n) \sup_{\boldsymbol{k}\in\Gamma_n} |a_{\boldsymbol{k}}|),$$

де $\Gamma_n = \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d : \ |\boldsymbol{k}|_\infty = n\}$.

Для фіксованих послідовності $\boldsymbol{a} \in l_q(\mathbb{Z}^d)$ та $m \in \mathbb{N}$ через $\Omega_m(\boldsymbol{a})$ позначимо множину (чи одну із множин) мультиіндексів $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ при максимальних за абсолютною величиною членах послідовності $\boldsymbol{a} = (a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$, причому $\sharp\Omega_m(a) = m$. Згідно з таким означенням множини $\Omega_m(\boldsymbol{a})$:

$$\min\{|a_{\boldsymbol{k}}|,\ \boldsymbol{k} \in \Omega_m(\boldsymbol{a})\} \ge \max\{|a_{\boldsymbol{k}}|, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus \Omega_m(\boldsymbol{a})\}.$$

Для $A \subset l_s(\mathbb{Z}^d)$ покладемо

$$g_m(A)_s := \sup_{\boldsymbol{a}\in A} \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(\boldsymbol{a})} |a_{\boldsymbol{k}}|^s \right)^{\frac{1}{s}},\ 0 < s < \infty,$$

$$g_m(A)_\infty := \sup_{\boldsymbol{a}\in A} \sup_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(\boldsymbol{a})} |a_{\boldsymbol{k}}|.$$

Зрозуміло, що значення величин $g_m(A)_s$, $0 < s \le \infty$ при кожному m збігається відповідно зі значеннями величин

$$e_m^\perp(A)_s := \sup_{\boldsymbol{a}\in A} \inf_{\substack{\Lambda_m\subset\mathbb{Z}^d \\ \sharp\Lambda_m = m}} \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda_m} |a_{\boldsymbol{k}}|^s \right)^{\frac{1}{s}},\ 0 < s < \infty,$$

$$e_m^\perp(A)_\infty := \sup_{\boldsymbol{a}\in A} \inf_{\substack{\Lambda_m\subset\mathbb{Z}^d \\ \sharp\Lambda_m = m}} \sup_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Lambda_m} |a_{\boldsymbol{k}}|.$$

Теорема A.2.1. *Нехай*

1) $0 < q < s \le \infty$, *а функція* $\nu \in P_0$ *така, що для деякого* C, $C \ge 1$ *виконується нерівність* $\nu(2t) \le C\nu(t)$, $t > 0$, *або*

2) $0 < s \le q \le \infty$, *а функція* $\nu \in P_0$ *така, що для деякого додатного* ε *виконується нерівність* $\nu(2^{\frac{1}{d}}t) > 2^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}+\varepsilon}\nu(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, $d \in \mathbb{N}$.

Тоді справедливе співвідношення

$$g_m(B_q(\nu))_s \asymp m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}). \tag{A.10}$$

Зауваження A.2.1. *В інших термінах за подібних обмежень щодо функції* ν *співвідношення (A.10) встановлено (методом, відмінним від використаного тут) в [153].*

Доведення теореми A.2.1. Спочатку розглянемо випадок $0 < q < s \le \infty$ і доведемо оцінку зверху в (A.10).

Нехай $\boldsymbol{a} = (a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \in \mathbb{R}(\mathbb{Z}^d)$, а $(k(l))_{l=1}^\infty$ така упорядкована послідовність множини мультиіндексів $\boldsymbol{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, що $|a_{k(1)}| \ge |a_{k(2)}| \ge \dots$. Іншими словами, за допомогою послідовності $(k(l))_{l=1}^{\infty}$ упорядковується (за не зростанням) система $(|a_{\boldsymbol{k}}|)_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$.

Тоді, для будь-якого $\boldsymbol{a}\in B_q(\nu)$ маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\Big(|a_{\boldsymbol{k}}|\nu(|\boldsymbol{k}|_\infty)\Big)^q \geq \sum_{\boldsymbol{k}\in\Omega_m(\boldsymbol{a})}\Big(|a_{\boldsymbol{k}}|\nu(|\boldsymbol{k}|_\infty)\Big)^q = \sum_{l=1}^{m}\big(|a_{k(l)}|\nu(|k(l)|_\infty)\big)^q \geq$$

$$\geq |a_{k(m)}|^q\sum_{l=1}^{m}\nu^q(|k(l)|_\infty) \geq |a_{k(m)}|^q\sum_{l=1}^{[m/2]}\nu^q\big(\frac{m^{\frac{1}{d}}}{4}\big) \geq C(d,p)|a_{k(m)}|^q\cdot m\cdot\nu^q(m^{\frac{1}{d}}).$$

Наслідком цього співвідношення є нерівність

$$|a_{k(m)}| \ll m^{-\frac{1}{q}}/\nu(m^{\frac{1}{d}}), \tag{A.11}$$

з якої безпосередньо випливає оцінка зверху в (A.10) при $s=\infty$.

Якщо ж $0<s<\infty$, то використовуючи (A.11), для будь-якого $a\in B_q(\nu)$ при $\gamma>0$ маємо

$$\Bigg(\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(\boldsymbol{a})\\ |\boldsymbol{k}|_\infty>\gamma m^{\frac{1}{d}}}}|a_{\boldsymbol{k}}|^s\Bigg)^{\frac{1}{s}} \leq \Bigg(|a_{k(m)}|^{s-q}\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(\boldsymbol{a})\\ |\boldsymbol{k}|_\infty>\gamma m^{\frac{1}{d}}}}|a_{\boldsymbol{k}}|^q\Bigg)^{\frac{1}{s}} \leq$$

$$\leq \Bigg(|a_{k(m)}|^{s-q}\nu^{-q}(\gamma m^{\frac{1}{d}})\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}|a_{\boldsymbol{k}}|^q\nu^q(|\boldsymbol{k}|_\infty)\Bigg)^{\frac{1}{s}} \ll$$

$$\ll m^{-\frac{1}{q}(s-q)\cdot\frac{1}{s}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}) \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}), \tag{A.12}$$

а також

$$\Bigg(\sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(\boldsymbol{a})\\ |\boldsymbol{k}|_\infty\leq\gamma m^{\frac{1}{d}}}}|a_{\boldsymbol{k}}|^s\Bigg)^{\frac{1}{s}} \leq C(d)m^{\frac{1}{s}}m^{-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}) \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}). \tag{A.13}$$

Із (A.12) та (A.13), беручи до уваги нерівність $(\alpha+\beta)^p\leq\alpha^p+\beta^p$, $\alpha,\ \beta>0$, $0<p\leq 1$, приходимо до висновку, що для будь-якого $\boldsymbol{a}\in B_q(\nu)$

$$\Bigg(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}|a_{\boldsymbol{k}}|^s\Bigg)^{\frac{1}{s}} \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}),$$

чим завершується доведення оцінки зверху в (A.10) при $0<q<s<\infty$.

Для доведення оцінки знизу в (A.10) у випадку $0 < q < s \le \infty$ розглянемо таку послідовність $\widetilde{\boldsymbol{a}} = (\widetilde{a}_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$, що

$$\tilde{a}_{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} 1, & |\boldsymbol{k}|_\infty \le [m^{\frac{1}{d}}], \\ 0, & |\boldsymbol{k}|_\infty > [m^{\frac{1}{d}}], \end{cases}$$

де $[c]$ — ціла частина числа $c \in \mathbb{R}$.

Тоді

$$\|\tilde{\boldsymbol{a}}\|_{l_q(\mathbb{Z}^d),\,\nu} = \left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \big(|\tilde{a}_{\boldsymbol{k}}|\nu(|\boldsymbol{k}|_\infty)\big)^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{\boldsymbol{k}:\ |\boldsymbol{k}|_\infty \le [m^{\frac{1}{d}}]} \nu^q(|\boldsymbol{k}|_\infty) \right)^{\frac{1}{q}} \ll \nu(m^{\frac{1}{d}}) m^{\frac{1}{q}} \tag{A.14}$$

і

$$\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(\tilde{\boldsymbol{a}})} |\tilde{a}_{\boldsymbol{k}}|^s \right)^{\frac{1}{s}} \ge \left(\sum_{l=1}^{2^d m - m} 1 \right)^{\frac{1}{s}} \gg m^{\frac{1}{s}},\ 0 < s < \infty. \tag{A.15}$$

Із (A.15), з урахуванням (A.14), при $0 < s < \infty$ отримаємо

$$g_m(B_q(\nu))_s \gg m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}} \nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}). \tag{A.16}$$

При $s = \infty$ нерівність (A.16) є безпосереднім наслідком співвідношення (A.14) і означення величин $g_m(B_q(\nu))_\infty$.

Твердження теореми A.2.1 у випадку $0 < q < s \le \infty$ доведене.

Тепер розглянемо випадок $0 < s \le q \le \infty$ і доведемо в (A.10) оцінку зверху.

Нехай задано натуральне число m, $m > 2$, а $j \in \mathbb{N}$ таке, що $2^j < m \le 2^{j+1}$. Тоді для $\boldsymbol{a} \in B_q(\nu)$, використовуючи нерівність (A.11), з урахуванням умов щодо функції ν при $0 < s < \infty$ маємо

$$\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(\boldsymbol{a})} |a_{\boldsymbol{k}}|^s = \sum_{n=m+1}^{\infty} |a_{k(n)}|^s \le \sum_{n=2^j+1}^{\infty} |a_{k(n)}|^s \le$$

$$\le \sum_{l=j}^{\infty} \left(2^{\frac{l}{s}} |a_{k(2^l)}| \right)^s \ll \sum_{l=j}^{\infty} \left(2^{\frac{l}{s}-\frac{l}{q}} \frac{1}{\nu(2^{\frac{l}{d}})} \right)^s \ll$$

$$\ll \left(2^{j(\frac{1}{s}-\frac{1}{q})} \frac{1}{\nu(2^{\frac{j}{d}})} \right)^s \asymp \left(\frac{m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}}{\nu(m^{\frac{1}{d}})} \right)^s, \tag{A.17}$$

а отже,

$$g_m(B_q(\nu))_s \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}} \nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}),\quad 0 < s \le q < \infty.$$

При $0 < s < \infty$ і $q = \infty$, враховуючи, що для $\boldsymbol{a} \in B_q(\nu)$ справедлива нерівність $a_{k(m)} \ll \nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}})$ (як граничний випадок нерівності (A.11)), аналогічно співвідношенню (A.17), можна записати

$$\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(\boldsymbol{a})} |a_{\boldsymbol{k}}|^s\right)^{\frac{1}{s}} \ll m^{\frac{1}{s}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}),$$

а отже,

$$g_m(B_\infty(\nu))_s \ll m^{\frac{1}{s}}\nu^{-1}(m^{\frac{1}{d}}).$$

Накінець, при $s = q = \infty$, оцінка зверху в (A.10) є безпосереднім наслідком лише означення величин $g_m(B_q(\nu))_s$.

Доведення оцінки знизу в (A.10) у випадку $0 < s \le q \le \infty$ фактично тотожне її доведенню у розглянутому випадку $0 < q < s \le \infty$, тільки при $q = \infty$ замість співвідношення (A.14) слід скористатися нерівністю $\|\tilde{\boldsymbol{a}}\|_{l_\infty(\mathbb{Z}^d),\,\nu} \le \nu(m^{\frac{1}{d}})$.

Теорема A.2.1 доведена. ■

Зауваження A.2.2. *У випадку, коли* $\nu(t) = t^r$, $r > 0$, *а* $0 < q < s \le \infty$ *оцінка зверху у співвідношенні (A.10) фактично встановлена в [204].*

A.2.2 Наслідки

Спершу наведемо один наслідок теореми A.2.1 для скінченно-вимірних підмножин із $B_q(\nu)$, що визначаються за допомогою функції $\nu(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}_+$.

Позначимо через E_n довільну підмножину в $\mathbb{Z}^d$, $\sharp E_n = n$, і покладемо

$$\mathcal{B}_q^{E_n} := \{\boldsymbol{a} = (a_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} \in B_q(1): \quad a_{\boldsymbol{k}} = 0 \text{ при } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus E_n\}$$

Таким чином, $\mathcal{B}_q^{E_n}$ —одинична куля у фіксованому $n-$вимірному підпросторі із $l_q(\mathbb{Z}^d)$.

Наслідок A.2.1. *. Для будь-яких* $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$ *справедливі співвідношення*

$$g_m(\mathcal{B}_q^{E_n})_s \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}, \quad 0 < q \le s \le \infty \tag{A.18}$$

і

$$g_m(\mathcal{B}_q^{E_{[\gamma m]+1}})_s \asymp m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}, \ 0 < s \le q \le \infty \tag{A.19}$$

при $\gamma > 1$.

Доведення. Співвідношення (A.18) при $0 < q < s \le \infty$ є наслідком оцінки зверху у співвідношенні (A.10), якщо врахувати, що $\mathcal{B}_q^{E_n} \subset B_q(1)$. При $0 < q = s \le \infty$ оцінка (A.18) тривіальна.

Якщо $0 < s \le q \le \infty$, то умова 2) теореми A.2.1 для функції $\nu(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, не виконується, проте доведення оцінки зверху у співвідношенні (A.10) з $\mathcal{B}_q^{E_{[\gamma m]+1}}$ замість $B_q(\nu)$ тільки спрощується. Справді, використавши нерівність

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|b_k|^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \ge \left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|b_k|^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu}},$$

де $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^N$ — довільна система дійсних чисел, $1 \le \mu < \lambda < \infty$, для $\boldsymbol{a} \in \mathcal{B}_q^{[\gamma m]+1}$ при $0 < s \le q < \infty$ можна відразу записати

$$\left(\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d\setminus\Omega_m(\boldsymbol{a})}|a_{\boldsymbol{k}}|^s\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{n=m+1}^{[\gamma m]+1}|a_{k(n)}|^s\right)^{\frac{1}{s}} \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}}.$$

Попереднє співвідношення, очевидно, має місце і у випадку $0 < s < \infty$, $q = \infty$, а при $s = q = \infty$ оцінка зверху в (A.19) тривіальна.

Доведення оцінки знизу в (A.19) проводиться за схемою доведення такої оцінки в теоремі A.2.1, відштовхуючись від побудови послідовності $\tilde{\boldsymbol{a}}$. У даному випадку слід розглянути таку послідовність $\tilde{\boldsymbol{a}} = (\tilde{a}_{\boldsymbol{k}})_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d}$, що

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{k} \in E^0, \\ 0, & \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d \setminus E^0, \end{cases}$$

де E^0 — довільна підмножина в $E_{[\gamma m]+1}$, $\sharp E^0 = [\gamma_1 m]$, $1 < \gamma_1 < \gamma$.

Зауваження A.2.3. *При $n = [\gamma m]+1$, $\gamma > 1$, оцінка (A.18) є точною за порядком. Доведення цього аналогічне випадку $0 < s \le q \le \infty$.*

Сформулюємо наслідок A.2.1 в іншому вигляді. Розглянемо скінченно-вимірні простори l_s^n, $0 < s \le \infty$, $n \in \mathbb{N}$ векторів $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, які означені на початку підрозділу A.1.

Для множин $B \subset l_s^n$ при $1 \le m < n$ визначимо величини:

$$(a) \qquad e_m^{\perp}(B;\ \varepsilon;\ l_s^n) := \sup_{\boldsymbol{x}\in B}\inf_{\gamma_m}\|\boldsymbol{x} - \pi_{\gamma_m}\boldsymbol{x}\|_{l_s^n},$$

де $\varepsilon = \{e_1, \dots, e_n\}$— канонічний (стандартний) базис в $\mathbb{R}^n$; $\pi_{\gamma_m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — оператор проектування такий, що для $\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$\pi_{\gamma_m}\boldsymbol{x} = \sum_{i\in\gamma_m} x_i e_i,$$

а γ_m — довільна підмножина множини $\{1,\ldots,n\}$, $\mathrm{card}\,\gamma_m = m$ (див. пункт А.1);

$$(b) \qquad g_m(B;\ \varepsilon;\ l_s^n) := \sup_{\boldsymbol{x}\in B} \|\boldsymbol{x} - G_m^{(\varepsilon)}\boldsymbol{x}\|_{l_s^n},$$

де $G_m^{(\varepsilon)} :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — оператор (нелінійний), що діє за правилом

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \quad \longrightarrow \quad G_m^{(\varepsilon)}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m} x_{k_j} e_{k_j},$$

$\{k_j\}_{j=1}^m$ — підсистема системи $\{1,\ldots,n\}$ така, що $|x_{k_1}| \geq |x_{k_2}| \geq \ldots \geq |x_{k_m}|$. Із означень видно, що для $B \subset l_s^n$: $e_m^{\perp}(B;\ \varepsilon;\ l_s^n) = g_m(B;\ \varepsilon;\ l_s^n)$. При $m = 0$ покладаємо $e_0^{\perp}(B;\ \varepsilon;\ l_s^n) = g_0(B;\ \varepsilon;\ l_s^n) := \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in B} \|\boldsymbol{x}\|_{l_s^n}$. Ототожнивши у природній спосіб множину $\mathcal{B}_q^{E_n}$ та одиничну кулю B_q^n в просторі l_q^n, і порівнявши означення величин $g_m(\mathcal{B}_q^{E_n})_s$ та $g_m(B_q^n;\ \varepsilon; l_s^n)$, від наслідку А.2.1, враховуючи зауваження А.1.2, приходимо до наступного твердження.

Наслідок А.2.2. *При* $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ *справедливі співвідношення*

$$g_m(B_q^n;\ \varepsilon;\ l_s^n) \ll m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}},\ 0 < q \leq s \leq \infty$$

і

$$g_m(B_q^{[\gamma m]+1};\ \varepsilon;\ l_s^{[\gamma m]+1}) \asymp m^{\frac{1}{s}-\frac{1}{q}},\ 0 < s,\, q \leq \infty \tag{A.20}$$

при $\gamma > 1$.

Зауваження А.2.4. *Співвідношення (А.20) є також наслідком знайдених у пункті А.1 точних значень величин* $e_m^{\perp}(B_p^n;\ \varepsilon;\ l_q^n)$ *при* $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ *і* $0 < p, q \leq \infty$ *(див. зауваження А.1.2).*

Список використаних джерел

1. **Аманов Т. И.** Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной / Т. И. Аманов //Алма-Ата: Наука, 1976. — 224 с.

2. **Аманов Т. И.** Теоремы представления и вложения для функциональных пространств $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ и $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ / Т. И. Аманов //Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1965. — **77**. — С. 5–34.

3. **Андрианов А. В., Темляков В. Н.** О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение / А. В. Андрианов, В. Н. Темляков //Тр. Мат. ин-та АН СССР. —1997. — **219**. — С. 32–43.

4. **Андриевский В. В., Белый В. И., Дзядык В. К.** Конформные инварианты в конструктивной теории функций комплексного переменного / В. В. Андриевский, В. И. Белый , В. К. Дзядык // Киев: Наук. думка, 2002. — 315 с.

5. **Белинский Э. С.** Приближение ”плавающей” системой экспонент на классах гладких периодических функций / Э. С. Белинский //Мат. сб. — 1987. — **132**, № 1. — С. 20–27.

6. **Белинский Э. С., Галеев Э. М.** О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник / Э. С. Белинский, Э. М. Галеев //Вестн.Моск.ун-та. Сер.1. Матем., мех. — 1991. — № 2. — С. 3–7.

7. **Бесов О. В.** Исследования одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения / О. В. Бесов //Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — **60**. — С. 42–61.

8. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский //М.: Наука, 1975. — 480 с.

9. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье : В 2 т. /Р. Эдвардс // М.: Мир, 1985. – Т. **2**. — 399 с.

10. **Бабаев М.-Б. А.** Приближение соболевских классов функций суммами произведений функций меньшего числа переменных / М.-Б. А. Бабаев //Мат. заметки. — 1990. — **48**,№ 6. — С. 10–21.

11. **Бабаев М.-Б. А.** О порядке приближения соболевского класса W_q^r билинейными формами / М.-Б. А. Бабаев //Мат. сб. — 1991. — **182**, № 1. — С. 122–129.

12. **Белый В. И., Двейрин М. З.** О наилучших линейных методах приближения на классах функций, определяемых союзными ядрами / В. И. Белый, М. З. Двейрин // Метрические вопросы теории функций и отображений. — Киев: Наук. думка, 1971. — **5**. — С. 37–54.

13. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра / Г. Бейтмен, А. Эрдейи //М.: Наука, 1965.

14. **Бирман М. Ш., Соломяк М. З.** Оценки сингулярных чисел интегральных операторов / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк //Успехи мат. наук. —1977. — **32**, № 1. — С. 17–84.

15. **Бирман М. Ш.,Соломяк М. З.** Об оценках сингулярных чисел интегральных операторов. II / М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк //Вестн. ЛГУ. — 1967. —**3**, № 13. — С. 21–28.

16. **Вакарчук С. Б.** О поперечниках некоторых классов аналитичеких функций. I / С. Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. — 1992. — **44**, № 3. — С. 324–333.

17. **Вакарчук С. Б., Щитов А. Н.** Некоторые вопросы приближения частными суммами рядов Фабера–Шаудера в метрике пространства $\varphi(L)$ / С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов //Изв. вузов. Сер. матем. —2004. — № 10. — С. 82–85.

18. **Вакарчук С. Б., Щитов А. Н.** Оценки погрешности приближения классов дифференцируемых частными суммами рядов Фабера–Шаудера / С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов // Мат. сб. — 2006. — **197**, № 3. — С. 3–14.

19. **Вакарчук С. Б., Щитов А. Н.** Оценки погрешностей приближения функций из классов L_p^1 полиномами и частными суммами рядов по системам Хаара и

Фабера–Шаудера / С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов //Изв. РАН Сер. матем. — 2015. — **79**, № 2. — С. 45–76.

20. **Гайер Д.** Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Д. Гайер // М.: Мир, 1986. — 216 с.

21. **Гарнетт Дж.** Ограниченные аналитические функции / Дж. Гарнетт // М.: Мир, 1984. — 469 с.

22. **Галеев Э. М.** Приближение классов периодических функций нескольких переменных ядерными операторами / Э. М. Галеев //Мат. заметки. —1990. — **47**, № 3. — С. 32–41

23. **Галеев Э. М.** Порядок ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных / Э. М. Галеев // Мат. заметки. —1988. — **43**, № 2. — С. 197–202.

24. **Голубов Б. И.** Наилучшие приближения функций в метрике L_q полиномами Хаара и Уолша / Б. И. Голубов //Мат. сб. — 1972. — **87**, № 2. — С. 254–274.

25. **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного / Г. М. Голузин // М.: Наука, 1966. — 628 с.

26. **Гринблюм М. М.** Некоторые теоремы о базисе в пространстве типа B / М. М. Гринблюм //Докл. АН СССР. — 1941. — **31**. — С. 428–432.

27. **Дынькин Е. М.** Равномерная полиномиальная аппроксимация в комплексной области / Е. М. Дынькин // Записки науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-та АН СССР. — 1974. — **47**. — С. 164–165.

28. **Дынькин Е. М., Осиленкер Б. П.** Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения / Е. М. Дынькин, Б. П. Осиленкер // Итоги науки и техники. Математический анализ. — 1983. — **21**. — С. 42–128.

29. **Двейрин М. З.** Поперечники и ϵ-энтропия классов функций, аналитических в единичном круге / М. З. Двейрин // Теория функций, функц. анализ и их прил. — 1975. — Вып.**3**. — С. 32–46.

30. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык // М.: Наука, 1977. — 512 с.

31. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: В 2-х т. / А. Зигмунд // М.: Мир, 1965. — Т.1. — 615 с.

32. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: В 2-х т. / А. Зигмунд // М.: Мир, 1965. — Т.2. — 537 с.

33. **Исмагилов Р. С.** Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами / Р. С. Исмагилов //Успехи мат. наук. —1974. — **29**, № 3. — С. 161–178.

34. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов // М.: Наука, 1977. — 744 с.

35. **Кашин Б. С.** Об аппроксимационных свойствах полных ортонормированных систем / Б. С. Кашин // Тр. Мат. ин-та АН СССР. —1985. — **172**. — С. 187–191.

36. **Кашин Б. С., Темляков В. Н.** Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных / Б. С. Кашин, В. Н. Темляков // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — **25**.— С. 58–79.

37. **Кашин Б. С., Темляков В. Н.** О наилучших m-членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 / Б. С. Кашин, В. Н. Темляков //Мат. заметки —1994. — **56**, № 5. — С. 57–86.

38. **Кашин Б. С., Саакян А. А.** Ортогональные ряды / Б. С. Кашин, А. А. Саакян // М.: Наука, 1984. — 496 с.

39. **Камзолов А. И.** Неравенство Бернштейна для дробных производных полиномов по сферическим гармоникам / А. И. Камзолов // Успехи мат. наук. — 1984. — **34**, № 2. — С. 159–160.

40. **Камзолов А. И.** О наилучшем приближении классов функций $W_p^\alpha(\mathbb{S}^n)$ полиномами по сферическим гармоникам / А. И. Камзолов // Мат. заметки. — 1982. — **32**, № 3. — С. 285–293.

41. **Кудрявцев С. Н.** Поперечники классов гладких функций / С. Н. Кудрявцев //Изв. РАН. Сер матем. — 1995. — **59**, № 4. — С. 81–104.

42. **Колмогоров А. Н., Фомин С. В.** Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин // М.: Наука, 1976. — 544 с.

43. **Коляда В. И.** Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений / В. И. Коляда //Мат. сб. — 1977. — **102**, № 2. — С. 195–215.

44. **Конюшков А. А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье / А. А. Конюшков //Мат. сб.— 1958.— **44**, № 1. — С. 53–84.

45. **Корнейчук Н. П.** Точные константы в теории приближения / Н. П. Корнейчук //М.: Наука, 1987. — 424 с.

46. **Кратцер А., Франц В.** Трансцендентные функции / А. Кратцер , В. Франц //М.: Изд-во ин. лит., 1963.

47. **Крейн М. Г.** К теории наилучшего приближения периодических функций / М. Г. Крейн // ДАН СССР. – 1975. — **138**. — С. 94–117.

48. **Кушпель А. К.** Поперечники классов гладких функций в пространстве L_q / А. К. Кушпель // Киев, 1987. — 54 с. — (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 87.44).

49. **Кушпель А. К.** Оценки бернштейновских поперечников и их аналогов / А. К. Кушпель // Укр. мат. журн.— 1993. — **45**, № 1. — С. 54–59.

50. **Лизоркин П. И., Никольский С. М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения / П. И. Лизоркин, С. М. Никольский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **187**. — С. 143–161.

51. **Лизоркин П. И.** Обобщенные гельдеровы пространства $B^{(r)}_{p,\theta}$ и их соотношение с пространствами Соболева $L^{(r)}_p$ / П. И. Лизоркин //Сиб. мат. журн. — 1968. — **9**, № 5. — С. 1127–1152.

52. **Майоров В. Е.** О наилучшем приближении классов $W^r_1(I^s)$ в пространстве $L_\infty(I^s)$ / В. Е. Майоров // Мат. заметки. — 1976. — **19**, № 5. — С. 699–706.

53. **Майоров В. Е.** Дискретизация задачи о поперечниках / В. Е. Майоров // Успехи мат. наук. — 1975. — **30**, № 6. — С. 179–180.

54. **Мирошин Н. В., Хромов В. В.** Об одной задаче наилучшей аппроксимации функций многих переменных / Н. В. Мирошин , В. В. Хромов //Мат. заметки. — 1982. — **32**, № 5. — С. 721–727.

55. **Никольский С. М.** Приближение функций тригонометрическими полиномами / С. М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — **10**, № 3.— С. 207–256.

56. **Никольский С. М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных / С. М. Никольский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1951. — **38**. — С. 244–278.

57. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский // М.: Наука, 1969. — 480 с.

58. **Никольский С. М., Лизоркин П. И.** Оценки для производных гармонических многочленов в L_p / С. М. Никольский, П. И. Лизоркин //Acta Sci Math. — 1985. — **48** — P. 401–416.

59. **Пич А.** Собственные числа интегральных операторов / А. Пич //Докл. АН СССР. — 1979. — **247**, № 6. — С. 1324–1327.

60. **Привалов И. И.** Граничные свойства аналитических функций / И. И. Привалов // М.: Гостехтеориздат, 1950. — 336 с.

61. **Романюк В. С.** О наилучшем приближении и поперечниках по Колмогорову классов аналитических функций / В. С. Романюк //Киев, 1992. — 40 с. — (Препринт/ АН Украины. Ин-т математики; 92.20).

62. **Романюк В. С.** Колмогоровские поперечники классов функций, аналитических в ограниченных областях комплексной плоскости / В. С. Романюк //Ряды Фурье: теория и приложения / Сб. трудов Ин-та математики АН Украины. Киев, 1992.– С. 119–126.

63. **Романюк В. С.** Приближение классов аналитических функций алгебраическими многочленами и колмогоровские поперечники / В. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 2. — С. 236–250.

64. **Романюк В. С.** Приближение в среднем с весом классом аналитических функций алгебраическими полиномами и конечномерными подпространствами / В. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, № 5. — С. 645–662.

65. **Романюк В. С.** Оценки колмогоровских поперечников классов аналитических функций, представимых интегралами типа Коши. I / В. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 2. — С. 229–237.

66. **Романюк В. С.** Оценки колмогоровских поперечников классов аналитических функций, представимых интегралами типа Коши. II / В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 3. — С. 346–355.

67. **Романюк В. С.** Дополнение к оценкам приближений суммами Фурье классов бесконечно-дифференцируемых функций / В. С. Романюк // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Праці Ін-ту математики НАН України. — 2003. — **46**. — С. 131–135.

68. **Романюк В. С., Савчук В. В.** О свойствах p-фаберовых операторов и их приложениях / В. С. Романюк, В. В. Савчук // Проблеми теорії функцій та суміжні питання: Зб.праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, № 2. — С. 186–212.

69. **Романюк В. С.** Приближение классов кратных интегралов Пуассона / В. С. Романюк // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — **4**, № 1. — С. 258–268.

70. **Романюк В. С.** Об асимптотических оценках колмогоровских поперечников классов кратных интегралов Пуассона / В. С. Романюк // Проблеми теорії функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 279–285.

71. **Романюк В. С.**Нелинейные поперечники классов гладких функций, определенных на единичной сфере в R^d / В. С. Романюк // Матем. заметки. — 2009. — **85**, № 1. — С. 147–152.

72. **Романюк В. С.** Нелинейная аппроксимация функций многих переменных из классов Бесова / В. С. Романюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 1. — С. 199 – 220.

73. **Романюк В. С.** Нелинейная аппроксимация в пространствах кратных последовательностей / В.С. Романюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 4. — С. 253–261.

74. **Романюк В. С.** Конструктивная характеристика классов Гельдера и $m-$ членные приближения по кратному базису Хаара / В.С. Романюк // Укр. мат.

журн. — 2014. — **67**, № 3. — С. 349–360.

75. **Романюк В. С.** Кратный базис Хаара и его свойства //Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 9.— С. 1253–1264.

76. **Романюк В. С.** Кратный базис Хаара в обратных теоремах приближения и теоремах вложения / В. С. Романюк //Anal. Math. — 2015. — **41**, № 4. — С. 241–255.

77. **Романюк В. С.** Кратный базис Хаара и m–членные приближения функций из классов Бесова. I / В.С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 4. — С. 551–562.

78. **Романюк В. С.** Кратный базис Хаара и m–членные приближения функций из классов Бесова. II / В.С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2016.— **68**, № 6.— С. 816–825.

79. **Романюк В. С.** Колмогоровские поперечники и энтропийные числа в пространствах Орлича с нормой Люксембурга / В.С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 5. — С. 682–694.

80. **Романюк В. С.** Базисная система Хаара функций многих переменных и ее аппроксимационные свойства на классах Бесова и их аналогах / В. С. Романюк // Киев, 2012. — 44 с. — (Препр./ НАН Украины. Ин-т математики; 2012.2)

81. **Романюк В. С.** Слабая асимптотика поперечников по Колмогорову классов сверток периодических функций / В. С. Романюк // Тези доп. Міжн. конф. ”Теорія апроксимацій та чисельні методи”. — Рівне, 19-21 червня 1996. — С. 66.

82. **Романюк В. С.** Ортопоперечники классов бесконечно дифференцируемых функций / В. С. Романюк // Ряди Фур’є теорія і застосування: математична школа, м. Кам’янець-Подільський, 1997. — С.107–108.

83. **Романюк В. С.** О приближении функций, представимых сверткой с кратным ядром Пуассона / В.С. Романюк // Український математичний конгрес – 2001. Секція 10 ”Теорія наближення та гармонічний аналіз”, Київ, 19–23 серпня: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. — С. 56.

84. **Романюк В. С.** Нелинейные поперечники классов гладких функций, определенных на единичной сфере в $\mathbf{R}^d$ / В. С. Романюк // Межд.конф. ”Функцио-

нальные пространства, теория приближений, нелинейный анализ" , посвященной столетию С. М. Никольского, Москва, 23–29 мая 2005 г., Тез.докл. — С. 187.

85. **Романюк В. С.** Нелинейная аппроксимация функций многих переменных из классов Бесова / В. С. Романюк // Міжнародна наукова конференція "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 18-23 вересня 2006 р.) : Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2006. — С. 90–91.

86. **Романюк В. С.** О приближениях классов сверток с многомерным ядром Пуассона / В. С. Романюк // Международная научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики". (Россия, Тула, 19-23 ноября 2007г.) — Тула.: ТулГУ. — 2007.— С. 76–77.

87. **Романюк В. С.** Нелінійне наближення функцій багатьох змінних зі швидко спадними коефіцієнтами Фур'є / В. С. Романюк // Міжн. наук. конф. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування, 16-21 червня 2008 г., Мелітополь, Україна. — Тези доп. — С. 95–96.

88. **Романюк А. С., Романюк В. С.** Білінійні наближення і поперечники класів періодичних функцій багатьох змінних / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Тез. допов. Конференції "Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів III", присвячена пам'яті В. К. Дзядика (1919-1998). — Київ: Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 76.

89. **Романюк В. С.** Адаптивное приближение функций , многих переменных / В. С. Романюк // Тез.докл. Конференции "Функциональные методы в теории приближений и теории операторов III", посвящ.памяти В. К. Дзядика (1919-1998).- Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2009. — С. 77–78.

90. **Романюк В. С.** N-членная аппроксимация в $L_q(I^d)$ классов функций многих переменных / В.С. Романюк // Тез. Международной конференции "Теория приближений", посвященной 90-летию С.Б.Стечкина, Москва, Россия, 23-26 августа 2010г.— М.: 2010. — С. 61.

91. **Романюк В. С.** Нелинейная аппроксимация классов функций многих переменных / В. С. Романюк // International Conference "Approximation Theory and Applications" in memory of N. P. Korneichuk (June 14-17, 2010, Dnepropetrovsk, Ukraine). — P. 77–78.

92. **Романюк В. С.** Нелинейные приближения функций многих переменных по базису Хаара / В. С. Романюк // International Conference in Modern Analysis: Abstracts June 20–23, 2011, Donetsk, Ukraine. — С. 95.

93. **Романюк В. С.** Базис Хаара в просторах функцій багатьох змінних та його апроксимативні властивості / В. С. Романюк // Міжнародна конференція "Теорія наближення функцій та її застосування" присвячена 70-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942-2007): Тези доповідей (Україна, Кам'янець-Подільський, 28 травня – 3 червня 2012 р.). — С. 91.

94. **Романюк В. С.** Аппроксиматывные свойства кратного базиса Хаара / В. С. Романюк // Міжнародна математична конференція "Боголюбовські читання DIF-2013, Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка, 23–30 червня 2013 р., Севастополь, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013. — С. 266.

95. **Романюк В. С.** Властивості кратного базису Хаара в задачах апроксимації функцій із просторів Гельдера / В. С. Романюк // Друк. IV міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана. 30 червня – 5 липня 2014 р., Чернівці, Україна: Тези доповідей. — Чернівецький національний університет. — 2014. — С. 173–175.

96. **Романюк В. С.** Колмогоровские поперечники и энтропийные числа классов Бесова в пространствах функций с нормой Люксембурга / В. С. Романюк // International Conference dedicated to 75th anniversary of professor Vitalii Pavlovych Motornui "Approximation Theory and its Applications", Dnepropetrovsk, 8–11 October, 2015: Abstracts. — Dnepropetrovsk, 2015. — P. 60.

97. **Романюк А. С.** Наилучшие M–членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных / А. С. Романюк //Изв. РАН Сер. матем. —2003. — **67**, № 2. — С. 61–100.

98. **Романюк А. С.** Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике / А. С. Романюк // Мат. заметки. — 2007. — **82**, № 2. — С. 247–261.

99. **Романюк А. С.** Приближение классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк //Мат. заметки —2002. — **71**, № 1. — С. 109–121.

100. **Романюк А. С.** Билинейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных / А. С. Романюк //Изв. РАН Сер. матем. —2006. — **70**, № 2. — С. 69–98.

101. **Романюк А. С.** Оценки энтропийных чисел и колмогоровских поперечников классов Никольского–Бесова периодических функций многих переменных / А. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 11 — С. 1540–1556.

102. **Романюк А. С.** Энтропийные числа и поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных / А. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 10 — С. 1403–1417.

103. **Романюк А. С.** Колмогоровские и тригонометрические поперечники классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных // Мат. сб. —2006. — **197**, № 1. — С. 71–96.

104. **Романюк А. С.** Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк //Праці Ін-ту математики НАН України. — 2012. — **93.** — 352 с.

105. **Романюк А. С.** Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк //Мат. сб. —2008. — **199**, № 2. — С. 93–114.

106. **Романюк А. С.** Аппроксимативные характеристики изотропных классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 4. — С. 513–523.

107. **Романюк А. С., Романюк В. С.** Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 2009. —**61**, № 10. — С. 1348–1366.

108. **Романюк А. С., Романюк В. С.** Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 2010. —**62**, № 4. — С. 536–551.

109. **Романюк А. С., Романюк В. С.** Наилучшие билинейные приближения функций из пространств Никольского–Бесова / А. С. Романюк, В. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 2012. —**64**, № 5. — С. 685–697.

110. **Романюк А. С., Романюк В. С.** Наилучшие билинейные приближения классов функций многих переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 2013. —**65**, № 12. — С. 1681–1699.

111. **Романюк А. С., Романюк В. С.** Оценки наилучших билинейных приближений классов $B^{\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\theta}$ и сингулярных чисел интегральных операторов / А. С. Романюк, В. С. Романюк //Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 9. — С. 1240–1250.

112. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены / Г. Сеге // М.: Физматгиз, 1962.

113. **Степанец А. И., Романюк В. С.** Классы $(\psi;\beta)$-дифференцируемых функций комплексного переменного и приближение линейными средними их рядов Фабера / А. И. Степанец, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 1992. — **44**, № 11. — С. 1556–1570.

114. **Степанец А. И.** Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец // Киев: Наук. думка, 1987. — 268 с.

115. **Степанец А. И.** Методы теории приближений / А. И. Степанец // К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с.

116. **Степанец А. И.** Методы теории приближений / А. И. Степанец // К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 2. — 468 с.

117. **Степанец А. И., Кушпель А. К.** Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций / А. И. Степанец, А. К. Кушпель // Киев, 1984. — 44 с. — (Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 84.15).

118. **Степанец А. И., Кушпель А. К.** Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_q / А. И. Степанец, А. К. Кушпель // Укр. мат. журн. – 1987. — **39**, № 4. — С. 483–492.

119. **Степанец А. И.** Приближения интегралов типа Коши жордановых областях / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1993. — **45**, № 6. — С. 809–833.

120. **Степанец А. И., Савчук В. В.** Приближения интегралов типа Коши / А. И. Степанец, В. В. Савчук // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 5. — С. 706–740.

121. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн, Г. Вейс // М.: Мир, 1974. — 336 с.

122. **Стейн И.** Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн // М.: Мир, 1973.

123. **Суетин П. К.** Ряды по многочленам Фабера / П. К. Суетин // М.: Наука, 1984. — 336 с.

124. **Смирнов В. И.** Избранные труды: Комплексный анализ. Математическая теория дифракции / В. И. Смирнов //Ленинград.: Из-во Ленинград. ун-та, 1988. — 280 с.

125. **Смирнов В. И., Лебедев Н. А.** Конструктивная теория функций комплексного переменного / В. И. Смирнов , Н. А. Лебедев // М.: Наука, 1964. — 440 с.

126. **Савчук В. В., Савчук М. В.** Норми мультиплікаторів і найкращі наближення голоморфних функцій багатьох змінних / В. В. Савчук, М. В. Савчук // Укр. мат. журн. — 2002.— **54**, № 12. — С. 1669–1679.

127. **Стасюк С. А.** Колмогоровские поперечники аналогов классов Никольского-Бесова с логарифмической гладкостью / С. А. Стасюк //Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 11 — С. 1640–1645.

128. **Стесин М. И.** Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций / М. И. Стесин // ДАН СССР. — 1975. — **200**, № 6. — С. 1278–1281.

129. **Стечкин С. Б.** Об абсолютной сходимости ортогональных рядов / С. Б. Стечкин //Докл. АН СССР. —1955. — **102**, № 2. — С. 37–40.

130. **Тамразов П. М.** Гладкости и полиномиальные приближения / П. М. Тамразов // Киев: Наук. думка, 1975. — 272 с.

131. **Тайков Л. В.** Поперечники некоторых классов аналитических функций / Л. В. Тайков // Матем. заметки — 1977. — **22**, № 2. — С. 285–295.

132. **Тихомиров В. М.** Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров // М. Изд-во Моск. ун-та, 1976. — 307 с.

133. **Тихомиров В. М.** Теория приближений / В. М. Тихомиров //Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1987. — **14**. — с. 103–260.

134. **Тиман А. Ф.** Теория приближения функций действительного переменного / А. Ф. Тиман //М.: Физматгиз, 1960. — 624 с.

135. **Темляков В. Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной / В. Н. Темляков //Тр. Мат. ин-та АН СССР. —1986. — **178**. — С. 1–112.

136. **Темляков В. Н.** К вопросу об оценках поперечников классов бесконечно дифференцируемых функций / В. Н. Темляков //Мат. заметки. — 1990. — **47**, № 5. — С. 155–157.

137. **Темляков В. Н.** Об оценках поперечников классов бесконечно дифференцируемых функций / В. Н. Темляков //Докл. расш. засед. семин. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа.— 1990. — **5**, № 2.— С. 111–114.

138. **Темляков В. Н.** Билинейная аппроксимация и приложения / В. Н. Темляков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. —1992. — **194**. — С. 229–248.

139. **Темляков В. Н.** Билинейная аппроксимация и приложения / В. Н. Темляков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. —1989. — **187**. — С. 191–215.

140. **Темляков В. Н.** Оценки наилучших билинейных приближений периодических функций / В. Н. Темляков //Тр. Мат. ин-та АН СССР. —1988. — **181**. — С. 250–267.

141. **Темляков В. Н.** Приближение периодических функций многих переменных комбинациями функций, зависящих от меньшего числа переменных / В. Н. Темляков //Тр. Мат. ин-та АН СССР. —1986. — **173**. — С. 243–252.

142. **Темляков В. Н.** Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью / В. Н. Темляков //Тр. Мат. ин-та АН СССР. —1989. — **189**. — С. 138–168.

143. **Темляков В. Н.** Оценки наилучших билинейных приближений функций двух переменных и некоторые их приложения / В. Н. Темляков // Мат. сб. —1987. — **176**, № 1. — С. 93–107.

144. **Темляков В. Н.**Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных / В. Н. Темляков //Докл. АН СССР. —1982. — **267**, № 2. — С. 314–317.

145. **Тумаркин Г. И.** О классах областей, связанных со свойствами интегралов типа Коши / Г. И. Тумаркин // Докл. расш. заседания семинара ин-та прикл. математики им. И.Н. Векуа. — 1985. — **1**, № 1. — С. 199–205.

146. **Ульянов П. Л.** О рядах по системе Хаара / П. Л. Ульянов //Мат. сб. — 1964. — **63**, № 3.— С. 357–391.

147. **Ульянов П. Л.** Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках / П. Л. Ульянов //Мат. сб. — 1970. — **81**, № 1. — С. 104–131.

148. **Ульянов П. Л.** Вложение некоторых классов функций / П. Л. Ульянов //Изв. АН СССР. Сер. матем. —1968. — **32**. — С. 649–686.

149. **Фарков Ю. А.** Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ / Ю. А. Фарков // Успехи мат. наук. — 1990. — **45**, № 5. — С. 197–198.

150. **Фарков Ю. А.** О поперечниках некоторых классов аналитических функций / Ю. А. Фарков // Успехи мат. наук. — 1984. — **39**, № 1. — С. 161–162.

151. **Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.** Неравенства / Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа //М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

152. **Ходулев А. Б.** Замечание об александровских поперечниках конечномерных множеств / А. Б. Ходулев //Функц. анализ и его прилож. — 1989. — **23**, № 2. — С. 94–95.

153. **Шидліч А. Л.** Порядкові оцінки найкращих n-членних ортогональних тригонометричних наближень класів функцій $\mathcal{F}^{\psi}_{q,\infty}$ в просторах $L_p(\mathbb{T}^d)$ / А. Л. Шидліч //Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2011. — **8**, № 1. — С. 216–235.

154. **Anderson J.-E.** On the degree of polynomial ,approximation in $E^p(D)$ / J. -E. Anderson // J. Approx. Theory — 1977. — **19**. — P. 61–68.

155. **Askey R., Wainger S.** On the behavior of special classes of ultraspherical expansions / R. Askey , S. Wainger //J. Analyse Math. — 1965. — **15** — P. 193–244.

156. **Berens H., Butzer P. L., Pawelke S.** Limitierungsverfahren von Reihen. mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten / H. Berens, P. L. Butzer , S. Pawelke //Publs. Res. Inst. Math. Sci. A 4. — 1968, № 2. — P. 201–268.

157. **Brown G., Feng D., Sheng S.-Y.** Kolmogorov width of classes of smooth functions on the sphere $\mathbb{S}^{d-1}$ / G. Brown, D. Feng, S.-Y. Sheng // J. Complexity. — 2002. — **18** — P. 1001–1023.

158. **Calderon A. P.** Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators / A. P. Calderon // Proc. Nat. Acad. USA. — 1977. — № 4. — P. 1324–1327.

159. **Chauder J.** Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalr*ä*umen / J. Chauder //Math. Z. — 1927. — **26**. — P. 47–65.

160. **Chauder J. S.** Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems / J. S. Chauder //Math. Z. — 1928. — **28**. — P. 317–320.

161. **Ciesielski B., Ciesielski Z.** Image compession with Schauder bases / B. Ciesielski, Z. Ciesielski // Appl. Math. — 2001. — **28**, №4. — P. 367–390.

162. **Ciesielski Z., Camont A.** Levy's fractional Browian random field and function spaces / Z. Ciesielski, A. Camont // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1995. — **60**. — P. 99-118.

163. **Ciesielski Z.** Constructive function theory and spline systems / Z. Ciesielski // Studia Math. — 1975. — **53**, № 3. — P. 277–302.

164. **Cheney E. M.** The best approximation of multivariate functions by combinations of univariate ones / E. M. Cheney // J. Appr. Theory. Ser. IV — 1983. — P. 1–26.

165. **Cochran J. A.** Summability of singular values of L^2 kernels. Analogies with Fourier series / J. A. Cochran //Enseigment Math. — 1976. —**22**, № 1-2. — P. 141–157.

166. **David G.** Opérateurs intégraux singuliers sur certaines courbes du plan complexe / G. David // Ann. Sci. École Norm. Sup. – 1984. — **17**, № 4. — P. 157–189.

167. **De Vore R. A., Howard R., Micchelli Ch.** Optimal nonlinear approximation / R. A. De Vore, R. Howard, Ch. Micchelli //Manuscripta math. — 1989. — **63** — P. 469–478.

168. **De Vore R.** Nonlinear approximation / R. De Vore // Acta Numer. — 1998. — **7**. — P. 51–150.

169. **De Vore R., Temlyakov V.** Nonlinear approximation by trigonometric sums / R. De Vore, V. Temlyakov // J. Fourier Anal. Appl. — 1995. — **2**, № 1. — P. 29–48.

170. **De Vore R. A., Lorentz G. G.** Constructive approximation /R. A. De Vore , G. G. Lorentz //Springer–Verlag, New York, 1994. — 449 p.

171. **Ding H., Gross K. I., Pichards D. St. P.** The N-widths of spaces of holomorphic function on bounded symmetric domains of tube type / H. Ding, K. I. Gross, D. St. P. Pichards // J. Approx. Theory. — 2000. — **104**, № 1. — P. 121–141.

172. **Dinh Dung**. Continuous algorithms in n-term approximation and non-linear widths / Dung Dinh // J. Appr. Theory. — 2000. — **102**. — P. 217–242.

173. **Dinh Dung**. Non-linear approximations using wavelet decompositions / Dung Dinh // Vietnam J.Math. — 2001. — **29**. — P. 197–224.

174. **Dinh Dung**. Asymptotic orders of optimal non-linear approximations/ Dung Dinh // East J. Appr. — 2001. —**7**. — P. 55–76.

175. **Dinh Dung, Vu Quoc Thanh** On nonlinear n-widths / Dung Dinh , Thanh Vu Quoc // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — **124**, № 9. — P. 2757–2765.

176. **Duren P.** Theory of H^p spaces / P. Duren // New York: Academic Press. — 1970. — 258 p.

177. **Duren P.** Smirnov domains and conjugate functions / P. Duren // J. Approx. Theory . — 1972. — **5**. — P. 393–400.

178. **Jackson D.** Certain problems of closest approximation / D. Jackson // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**, № 12. — P. 889–906.

179. **Jones P. W., Smirnov S. K.** On V. I. Smirnov domains / P. W. Jones, S. K. Smirnov // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 1999. — **24**. — P. 105–108.

180. **Haar A.** Zur Theorie der ortohogonalen Funktionensysteme / A. Haar //Math. Ann. — 1910. — **69**. — P. 331–371.

181. **Hille E., Szegö G., Tamarkin J. D.** On some generalizations of a theorem of A. Markoff / E. Hille, G. Szegö, J. D. Tamarkin // Duke math. J. — 1937. — **3**. — P. 729–739.

182. **Horoske D. D.** Enveloppes and sharp embedding of function spaces / D. D. Horoske // Chapman Hill, 2007.

183. **Kolmoqoroff A.** Über die beste Annaäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse / A. Kolmoqoroff // Ann. of Math. — 1936. — **37**, № 2. — P. 107–111.

184. **Muckenhoupt B.** Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions / B. Muckenhoupt // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — **165**, № 1. — P. 207–226.

185. **Micchelli C. A., Pinkus A.** Some problems in the approximation of functions of two variables and n–widths of integral operators / C. A. Micchelli, A. Pinkus // J. Appr. Theory. — 1978. —**24**. — P. 51–77.

186. **Nagy B.** Uber qeuisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrixchen Entwicklungen / B. Nagy // Ber. Acad. Dtsch. wiss. — 1938. — **90**. — P. 103–134.

187. **Pawelke S.** Über die Approximationsordnung bei Kugelfunktionen und algebraischen Polynomen / S. Pawelke //Tohoku Math. J. — 1972. — **24** — P. 473–486.

188. **Pinkus A.** n–widths in Approximation Theory / A. Pinkus // Ergeb. Math. Grenzqeb (3), **7**, Springer–Verlag, Berlin. —1985. —291 p.

189. **Pisier G.** The volume of convex bodies and Banach space geometry / G. Pisier //Gambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. — 251 p.

190. **Romanyuk V. S.** Nonlinear approximation of the Nikol'skii-Besov classes of the function defined on the unit cube in the Euclidean space / В.С. Романюк // Third conference. "Mathematics for Life Sciences". Rivne, September 15–19, 2015: Book of Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NASU, 2015. — C. 34.

191. **Romanyuk A. S., Romanyuk V. S.** Best bilinear approximations and Kolmogorov widths of classes of multivariate periodic functions / A. S. Romanyuk,

V. S. Romanyuk // Bulgarian-Turkish-Ukrainian Scientific Conference "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications", 15-20 September, 2010, Sunny Beach, Bulgaria: Abstracts. — P. 39–40.

192. **Romanyuk A. S., Romanyuk V. S.** Bilinear approximations of the classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic multivariate functions //Math. Analysis, Differential equations and applications / A.S. Romanyuk, V.S. Romanyuk //Sofia: Academic Publishing House "Prof. Harin Drinov", 2011. — P. 139–148.

193. **Romanyuk A. S., Romanyuk V. S.**Best bilinear approximations of functions from Nikol'skii–Besov classes / A. S. Romanyuk, V. S. Romanyuk //International Conference on "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications" September 04-09, 2012, Mersin - Turkey. Abstracts.

194. **Romanyuk V. S., Savchuk V. V.** Approximation in the mean of classes of analytic functions by algebraic polynomals and finite-dimensional subspaces / V. S. Romanyuk, V. V. Savchuk // International conference dedicated to M. A. Lavrentyev on the occasion of his birthday centenary, Kiev, October 31-November: Abstracts.-Kiev: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2000. — P. 49–50.

195. **Ryll J.** Schauder bases for the space of continuous functions on n-dimensional cube/ J. Ryll // Comment. Math. Prace Mat. — 1973. — **27**. — P. 201–213.

196. **Scheick J. T.** Polynomial approximation of functions analytic in a disk / J. T. Scheick // Proc. Amer. Math. Soc. — 1966. — **17**. — P. 1238–1243.

197. **Schmidt E.** Zur Theorie der linearen und nichlincaren Integralgleichungen. I / E. Schmidt //Math. Ann. —1907. — **63.** — S. 433–476.

198. **Schmeisser H.-J., Triebel H.** Topic in Fourier analysis and function spaces / H.-J. Schmeisser, H. Triebel //Wiley, Chichester, 1987.

199. **Seeger A., Trebels W.** Low regularity classes and entropy numbers / A. Seeger, W. Trebels // Arch. Math. — 2009. — **92**.— P. 147–157.

200. **Smithies F.** The eigen-values and singular values of integral equations / F. Smithies //Proc. London Math.Soc.(2). — 1937. —**43**. — P. 255–279.

201. **Stasyuk S. A.** Best m-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness / S. A. Stasyuk //J. Approx. Theory. — 2014. — **177**. — P. 1–16.

202. **Temlyakov V. N.** Greedy Algorithms with Regard to Multivariate Systems with Special Structure / V. N. Temlyakov // Constr. Approx. — 2000. — **16**. — P. 399–425.

203. **Temlyakov V. N.** Universal Bases and Greedy Algorithms for Anisotropic Function Classes / V. N. Temlyakov // Constr.Approx. — 2002. — **18**. — P. 529–550.

204. **Temlyakov V. N.** Greedy algorithm and m-term trigonometric approximation / V. N. Temlyakov //Constr. Approx. — 1998. — **14**, № 4. — P. 569–587.

205. **Temlyakov V. N.** Non-linear m-term approximation with regard to the multivariate Haar system / V. N. Temlyakov //East J. Appr. — 1998. — **4**, № 1. — P. 87–106.

206. **Temlyakov V. N.** The best m-term approximation and greedy algorithms / V. N. Temlyakov //Adv. Comput. Math. — 1998. — **8**, № 3. — P. 249–265.

207. **Temlyakov V. N.** Approximation of periodic functions / V. N. Temlyakov //New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 419 p.

208. **Yuan Xu.** Weighted approximation of functions on the unit sphere / Xu. Yuan //Constr.Approx. — 2005. — **21**, № 1. — P. 1–28.