НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПОЛУЛЯХ Євген Олександрович

УДК 515.1

Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання

01.01.04 — геометрія і топологія

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Наукові консультанти: доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент НАН України
Шарко Володимир Васильович,
Інститут математики НАН України;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Максименко Сергій Іванович**, Інститут математики НАН України, завідувач лабораторії топології у складі відділу алгебри і топології.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Болотов Дмитро Валерійович**, Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, старший науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та геометрії;

доктор фізико-математичних наук, професор **Михайлюк Володимир Васильович**, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, професор кафедри математичного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, професор **Пришляк Олександр Олегович**, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри геометрії, топології і динамічних систем.

Захист відбудеться “15” травня 2018 р. о 15.00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий “10” квітня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Максименко С. І.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Шарування з особливостями відіграють значну роль принаймні у двох різних розділах математики: в **диференціальній топології** та у **теорії динамічних систем**.

Гладкі **функції на многовидах** породжують шарування ковимірності 1. Дійсно, розглянемо гладку функцію f на многовиді M^n, яка ні в якій точці не є локально постійною. Нехай Σ — множина критичних точок f на M^n.

З теореми про ранг слідує, що для кожної регулярної точки f існує дифеоморфізм деякого околу U_x точки x на окіл початку координат в $\mathbb{R}^n$, який відображає компоненти перетинів множин рівня f з U_x у множини рівня координатної проекції $\mathrm{pr}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathrm{pr}_n : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n$. Отже розбиття Δ_0 множини $M^2 \setminus \Sigma$ на компоненти зв'язності множин рівня f є $(n-1)$-вимірним шаруванням на $M^2 \setminus \Sigma$. Тому розбиття Δ простору M^2 на компоненти зв'язності множин рівня f є шаруванням з особливостями на M^n з множиною особливостей Σ.

Маючи таке розбиття, можна побудувати фактор-простір $\Gamma_{K-R}(f) = M^n/\Delta$ (інша назва — *простір Кронрода-Ріба*).

Виявляється, що для гладких функцій з ізольованими особливостями на замкнених многовидах простір $\Gamma_{K-R}(f)$ має природну структуру одновимірного CW-комплексу (тобто топологічного графу). Цей об'єкт називається *графом Кронрода-Ріба* і є досить популярним інструментом дослідження функцій із вказаного класу.

В той же час про будову простору $\Gamma_{K-R}(f)$ функції f на некомпактному многовиді мало що відомо. Існують приклади гладких функцій на площині, що не мають особливостей, і простори Кронрода-Ріба, яких навіть не є Хаусдорфовими (див. розділи 3, 6 і 7).

Іншим природним джерелом шарувань з особливостями є гладкі **потоки** (динамічні системи з неперервним часом). Гладким потоком на многовиді M^n називається гладке відображення $\Phi : M^n \times \mathbb{R} \to M^n$, яке відповідає наступним умовам:

1. $\Phi(x, 0) = x$ для кожного $x \in M^n$;
2. $\Phi(\Phi(x,t), \tau) = \Phi(x, t+\tau)$ для всіх $x \in M^n$ і $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Орбітою точки $x \in M^n$ називається наступна множина $\mathrm{Orb}(x) = \{\Phi(x,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, всі орбіти потоку є лінійно зв'язними. *Нерухомою точкою* Φ називається точка, що збігається зі своєю орбітою. Позначимо множину всіх нерухомих точок через Σ.

Нехай Δ — розбиття M^n на орбіти потоку Φ. Згідно з теоремою про трубку току для кожної точки $x \in M^n$, яка не є нерухомою, існують її відкритий окіл U_x, відкрита підмножина $V_x \subset \mathbb{R}^{n-1}$ і гомеоморфізм $\phi_x : U_x \to (-1,1) \times V_x$, такі, що $\Phi(y,t) \in U_x$ для кожного $y \in \phi_x^{-1}(\{0\} \times V_x)$ і $t \in (-1,1)$, а також виконується співвідношення $\phi_x \circ \Phi(y,t) = (t, \phi_x(y))$. Внаслідок цього розбиття простору M^n на орбіти потоку Φ утворює одновимірне шарування з особливостями на M^n, множиною особливостей якого є Σ.

Шарування, що породжені функціями, і шарування, породжені потоками, тісно зв'язані між собою.

Маючи гладку функцію $f : M^n \to \mathbb{R}$, можемо побудувати її потік градієнта, який складається з інтегральних орбіт векторного поля $\operatorname{grad} f$. Для функцій Морса узагальненням потоку градієнта є так звані *градієнтно-подібні потоки* (такі потоки, що у кожній точці похідна функції f вздовж орбіти потоку додатна і кожна критична точка f має окіл, у якому потік спряжений з потоком градієнту функції виду $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2$ в околі початку координат).

При дослідженні стійкості потоку в околі ізольованої нерухомої точки розглядається у якомусь розумінні протилежна ситуація. Відомо, що достатньою умовою стійкості потоку в ізольованій нерухомій точці x_0 є існування функції Ляпунова f у деякому околі цієї точки (такої функції, що має в x_0 локальний мінімум і похідна якої вздовж орбіт потоку є від'ємною в проколотому околі точки x_0).

Неформально цю умову можна пояснити наступним чином.

- Для значень $g(x) = c$, що є близьким до $g(x_0)$, існують компоненти множин рівня $g^{-1}(c)$, що обмежують околи точки x_0, які стискаються до x_0, коли $c \to g(x_0)$.
- Для кожного x, що є досить близьким до x_0, додатня напіворбіта $\mathrm{Orb}_+(x)$ лежить у околі точки x_0, межею якого є відповідна компонента множини рівня $g^{-1}(g(x))$.

У роботі [16] було доведено, що для стійкості потоку Φ за Ляпуновим у точці x_0 досить, щоб знайшлась зліченна база околів x_0, обмежених гладкими гіперповерхнями (підмноговидами розмірності $n-1$) $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, для яких виконується наступна умова: *для всіх $x \in H_i$, $i \in \mathbb{N}$, скалярний добуток зовнішньої нормалі до поверхні H_i у точці x і вектору швидкості руху вздовж орбіти потоку Φ у точці x є недодатним числом.*

З питанням існування такого набору гіперповерхонь тісно пов'язана наступна задача. *Нехай* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— гладка функція і* x_0 *— її критична точка (не обов'язково ізольована). При яких умовах на* g *існує зліченна база околів точки* x_0*, обмежених гладкими гіперповерхнями* $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$*, які є компонентами зв'язності множин рівня* g*?* Цю задачу розв'язано у розділі 12.

Дуже цікавою є розмірність $n = 2$, коли і функції, і потоки породжують одновимірні шарування з особливостями. У цій ситуації можна уявити собі пару функцій, таку, що потік градієнта однієї функції породжує всюди, крім множини нерухомих точок, шарування, яке збігається з шаруванням на компоненти зв'язності множин рівня іншої функції на множині її регулярних точок. Приклади таких функцій відомі. Зокрема цю властивість мають пари спряжених гармонічних функцій.

Топологічним аналогом гармонічних функцій на двовимірних многовидах є *псевдогармонічні функції* (функції, що у кожній точці локально топологічно еквівалентні гармонічним функціям). Дві псевдогармонічні функції називаються *спряженими*, якщо у кожній точці ця пара функцій локально топологічно еквівалентна парі спряжених гармонічних функцій.

Важливість псевдогармонічних функцій підкреслюють наступні міркування.

• Згідно з теоремою про ранг у околі кожної регулярної точки функція класу гладкості C^p, $p \geq 1$, гладко еквівалентна до $\operatorname{Re} z$ (те ж саме, що й координатна проекція).

• Відома така теорема (П. Чорч і Дж. Тимуріан; О. Пришляк). *Для кожної ізольованої критичної точки* x_0 *(окрім локальних екстремумів) функції* $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ *існує окіл, у якому функція топологічно еквівалентна до* $\operatorname{Re} z^k$ *для деякого* $k \in \mathbb{N}$.

Отже, кожна функція $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$, всі критичні точки якої ізольовані, є псевдогармонічною у кожній точці, крім локальних екстремумів. Внаслідок цього, вивчаючи властивості псевдогармонічних функцій, ми фактично вивчаємо топологічні властивості гладких функцій з ізольованими особливостями на двовимірних многовидах.

У свій час псевдогармонічні функції активно досліджували В. Карлан, М. Морс, Дж. Дженкінс та інші.

В. Бутбі та М. Морс і Дж. Дженкінс незалежно довели, що на площині кожна псевдогармонічна функція має спряжену псевдогармонічну функцію.

Приблизно у цей-же час Й. Токі сформулював і довів критерій того, що функція на поверхні є псевдогармонічною в термінах властивостей розбиття поверхні на її множини рівня.

У тій же роботі Й. Токі невдало намагався довести теорему про існування спряженої псевдогармонічної функції для довільної псевдогармонічної функції на поверхні. Перешкода для цього розглянута у розділі 11.

Питання про існування спряженої псевдогармонічної функції важливе з наступних причин. Нехай $u, v : M^2 \to \mathbb{R}$ — пара спряжених псевдогармонічних функцій. Тоді відображення $\Psi = u + iv : M^2 \to \mathbb{C}$ — *внутрішнє* і за теоремою Стоїлова на M^2 існує комплексна структура, відносно якої відображення Ψ є голоморфним (а u та v — спряжені гармонічні функції).

У свій час В. Фокс розглянув узагальнення псевдогармонічних функцій (Peano-interior functions), послабивши топологічні умови на множини рівня, які належать Й. Токі. Ми називаємо клас функцій, які розглядав В. Фокс, F-функціями. Також він намагався розширити клас функцій, розглядаючи функції на поверхнях з краєм.

В. Фокс довів теорему про промені, яка показує подібність F-функцій до гармонічних функцій і стверджує наступне. *Кожна множина рівня такої функції f локально складається з парної кількості променів, які перетинаються у єдиній точці x і ділять маленький диск, що є її околом, на сектори. Кожен промінь межує з двома секторами, на одному з яких функція приймає значення, більші за $f(x)$, на іншому — менші за $f(x)$.*

Наслідком з цієї теореми є наступне твердження. *Неперервне відображення $f : M^2 \to \mathbb{R}$ на двовимірному многовиді без краю є F-функцією тоді й лише тоді, коли кожна компонента кожної множини рівня f є локально-скінченним топологічним графом.* Це дозволяє говорити про порядок $\mathrm{ord}_f\, x$ функції f у точці x (порядок дорівнює кількості променів у точці x, поділеній навпіл).

Але на відміну від псевдогармонічних функцій F-функція f не обов'язково породжує шарування з дискретною множиною особливостей на M^2.

Якщо F-функція f не є псевдогармонічною, то існує $x \in M^2$ з

$\mathrm{ord}_f\, x = 1$, таке, що x не можна включити у листову карту відносно розбиття на множини рівня f. У типовому випадку множина таких точок є одновимірною.

З потоком Φ на поверхні M^2 можна пов'язати динамічні системи з дискретним часом.

Наприклад, маючи *локальну трансверсаль* α, або набір неперетинних локальних трансверсалей $\alpha = \sqcup_{i\in A}\alpha_i$, можемо означити часткове *відображення послідування* $\phi : X_+ \to X_-$, $\phi(x) = \Phi(\tau, x)$, $\tau = \min\{t > 0 \mid \Phi(t, x) \in \alpha\}$. Тут X_+ і X_- — підмножини α, що складаються з точок, додатні (відповідно, від'ємні) напіворбіти яких перетинаються з α.

Якщо $X = \cap_{k\geq 0}\phi^k(X_+) \neq \varnothing$ (відповідно, $X = \cap_{k\leq 0}\phi^k(X_-) \cap \cap_{k\geq 0}\phi^k(X_+) \neq \varnothing$), то обмеження $f = \phi|_X : X \to X$ визначає деяку необертовну (відповідно, обертовну) динамічну систему з дискретним часом (X, f) (а також розбиття $\{X_i = X \cap \alpha_i\}_{i\in A}$ простору X у випадку, коли $\alpha = \sqcup_{i\in A}\alpha_i$).

Зрозуміло, що підмножина $\hat{N} \subset M^2$, яка є об'єднанням всіх орбіт Φ, що перетинають X, є інваріантною підмножиною Φ. Нехай $\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \hat{N} \to \hat{N}$ — обмеження потоку Φ на $\hat{N}$. Можна перевірити, що у випадку, коли відображення f обертовне, потік $\hat{\Phi}$ орбітно еквівалентний неперервній надбудові T над f (існує гомеоморфізм $\hat{N} \to N$, який відображає орбіти $\hat{\Phi}$ на орбіти T).

Може виникнути ситуація, коли дві різні д. с. з дискретним часом породжують неперервні надбудови, які є орбітно еквівалентними одній і тій же підсистемі початкового потоку. У зв'язку з цим корисно знайти інваріанти д. с. з дискретним часом, які залежать лише від класу орбітної еквівалентності неперервної надбудови такої системи.

Якщо $\dim X = 0$, то властивості динамічної системи (X, f) тісно пов'язані з топологічними властивостями фазового простору N неперервної надбудови T над f. Дійсно, у цьому випадку компонентами лінійної зв'язності простору N є орбіти потоку T, а потік T має ту ж саму динаміку, що й динамічна система (X, f).

Структура дисертаційної роботи. Дисертація складається зі вступу, 17 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить **122** найменування (на **12** сторінках), та восьми додатків (обсягом **118** сторінок). Повний обсяг роботи становить **469** сторінок.

Особистий внесок здобувача. Всі отримані у дисертації результати є новими.

З результатів, надрукованих у спільних зі співавторами статтях, в основну частину дисертації увійшли тільки такі, що отримані здобувачем самостійно, за винятком наступних, де вклад співавторів є рівноцінним.

Теорему 4.8.1 автор отримав разом з В. В. Шарком та Ю. Ю. Сорокою.

Теорема 5.6.3 і **теорема 5.7.1** отримані у співпраці з І. А. Юрчук.

Результати **розділів 6, 7** і **8** отримані разом з С. І. Максименком. Зокрема, у співавторстві з ним доведені **теореми 6.2.7**, **6.3.4**, **7.1.6** і **8.4.4**.

Теорема 14.2.1 отримана разом з М. А. Панковим і С. І. Максименком.

У співавторстві з І. Ю. Власенком отримано **теорему 15.2.1**.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися на:

- семінарах відділу топології Інституту математики НАН України; керівник семінару – член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. відділом топології В. В. Шарко;
- семінарах лабораторії топології при відділі алгебри і топології Інституту математики НАН України; керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, зав. лабораторією топології С. І. Максименко;
- семінарах кафедри геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, професор О. О. Пришляк;
- 4-ій Міжнародній конференції з геометрії і топології (Черкаси, 2001);
- Міжнародній конференції *"Геометрія в Одесі"* (Одеса, 2008, 2013, 2015 та 2016);
- Міжнародній конференції *"Боголюбівські читання"* (Київ, 2007; Севастополь, 2013);
- Міжнародній конференції *"Analysis and Topology"* (Львів, 2008);
- Міжнародній конференції *"Infinite-Dimensional Analysis and To-*

pology” (Яремче, 2009);

• Міжнародній конференції *“Geometry «in large», topology and applications”*, присвяченій 90-річчю з дня народження О. В. Погорєлова (Харків, 2009);

• Міжнародної конференції *“Динамічні системи та їх застосування”* (Київ, 2012);

• Міжнародній конференції *Modern Advances in Geometry and Topology*, присвяченій 70-річчю з дня народження О. А. Борисенка (Харків, 2016).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 21 роботі у фахових виданнях, 20 з яких належать до переліку, що затверджений ДАК МОН України, [1]—[21], та 12 тезах конференцій ([22]—[33]). З них 2 монографії: [1] у співавторстві з І. Ю. Власенком та С. І. Максименком і [2] у співавторстві з І. А. Юрчук; 15 статей у наукових журналах, 4 статті у збірниках наукових праць Інституту математики НАН України.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у лабораторії топології у складі відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України. Її тема пов'язана з тематикою наукових досліджень, які проводились у відділі. Результати роботи отримані у рамках цієї тематики, а саме у рамках програми НАН України *“Сучасні методи досліджень математичних моделей в проблемах природничих наук”* №0107U002333, а також НДР *“Топологія многовидів та їх застосування”* №00106U000658.

Основний зміст роботи

Дисертація присвячена вивченню одновимірних шарувань з особливостями на поверхнях, а також об'єктів, які їх породжують – функцій і динамічних систем.

Розділ 1 містить необхідні означення і результати, що не є загально відомими.

У **розділі 2** ми вивчаємо, якими можуть бути множини рівня псевдогармонічної функції на площині. Відомо, що кожна компонента множини рівня псевдогармонічної функції є локально-скінченним топологічним графом. На площині додатково такий граф не може мати циклів, тобто буде деревом.

Ми розглядаємо питання про те, які саме дерева можуть бути представлені як компоненти множин рівня псевдогармонічної функції, а також більш широке питання, які комбінації дерев можуть представляти множини рівня псевдогармонічної функції.

Нехай T — локально скінченне дерево, S^2 — двовимірна сфера. Зафіксуємо точку $s \in S^2$.

Означення 2.1.2. *Неперервне відображення $\Phi : T \to S^2$ називається* плоским, *якщо воно відповідає наступним властивостям:*
(i) $\Phi^{-1}(s) = V_{ter}$, де V_{ter} – множина термінальних вершин (у випадку $V_{ter} = \varnothing$ це означає, що $s \notin \Phi(T)$);
(ii) множина $\Phi(T) \cup \{s\}$ замкнена в S^2;
(iii) відображення $\Phi|_{T \setminus V_{ter}} : T \setminus V_{ter} \to S^2$ є гомеоморфізмом на свій образ.

Означення 2.1.3. *Неперервне відображення $\Psi : T \setminus V_{ter} \to \mathbb{R}^2$ називається* плоским, *якщо існують такі плоске відображення $\Phi : T \to S^2$ і гомеоморфізм $\psi : \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{s\}$, що $\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi|_{T \setminus V_{ter}}$.*

Розглянемо скінченний ліс $F = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$ (диз'юнктне об'єднання скінченної кількості дерев, самі дерева можуть бути і нескінченними).

Означення 2.1.5. *Неперервне відображення $\Psi : F \setminus V_{ter} \to \mathbb{R}^2$ називається* плоским, *якщо плоскими є всі відображення*

$$\Psi_i = \Psi|_{T_i \setminus V_{ter}} : T_i \setminus V_{ter} \to \mathbb{R}^2,$$

а також $\Psi(T_i \setminus V_{ter}) \cap \Psi(T_j \setminus V_{ter}) = \varnothing$ при $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Теорема 2.1.6. *Припустимо, що порядок кожної вершини скінченного лісу F або дорівнює 1, або є парним числом > 2.*
Нехай $\Psi : F \setminus V_{ter} \to \mathbb{R}^2$ — плоске відображення.
Тоді існує псевдогармонічна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якої $\Psi(F \setminus V_{ter}) = f^{-1}(0)$.

У **розділі 3** досліджуються простори Кронрода-Ріба функцій, що належать до наступного класу.

Нехай функція f є неперервною на двовимірній поверхні M^2 і відповідає наступним властивостям.

(f.a) Множина локальних екстремумів f є дискретною.

(f.б) На доповненні до множини локальних екстремумів f є псевдогармонічною функцією.

Назвемо *регулярними точками* f точки, в яких f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z$. Всі інші точки M^2 назвемо *сингулярними точками* f.

Нехай $\mathfrak{F}$ — розбиття поверхні на компоненти множин рівня f, $\Gamma_{K-R}(f) = M^2/\mathfrak{F}$ — відповідний простір Кронрода–Ріба.

Ми пропонуємо наступні умови, при виконанні яких простір $\Gamma_{K-R}(f)$ має просту будову.

(f.1) Кожна компонента множини рівня f може містити не більш, ніж скінченну кількість сингулярних точок.

(f.2) Нехай K є об'єднанням всіх компонент множин рівня f, що містять сингулярні точки. Для довільного компакта $C \subset M^2$ множина $f(C \cap K)$ скінченна.

(f.3) Нехай для $a \in f(M^2)$ точки $x_1, x_2 \in M^2$ належать до різних компонент множини рівня $f^{-1}(a)$. Тоді знайдуться відкриті околи $U_1 \ni x_1$ і $U_2 \ni x_2$, що не перетинаються і є насиченими відносно розбиття $\mathfrak{F}$.

Скажемо, що неперервна функція $f : M^2 \to \mathbb{R}$, яка відповідає умовам (f.a) та (f.б), є *K-R–простою*, якщо вона відповідає також умовам (f.1)–(f.3).

Граф з черенками — це локально-скінченний топологічний граф, з якого вилучена деяка підмножина множини термінальних вершин (вершин порядку 1).

Теорема 3.1.6. *Нехай неперервна функція f, яка відповідає умовам (f.a) та (f.б), є K-R-простою.*

Тоді простір $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками.

Множина вершин графа $\Gamma_{K-R}(f)$ співпадає з образом множини K сингулярних елементів розбиття $\mathfrak{F}$.

Замкнені ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ є образами замикань компонент доповнення $M^2 \setminus K$.

Черенки є образами замикань компонент доповнення $M^2 \setminus K$, що мають зв'язну межу.

Відносно того, чи будуть наведені умови необхідними, ми можемо сказати наступне.

Твердження 3.1.7. *Нехай функція $f : M^2 \to \mathbb{R}$ неперервна і відповідає умовам (f.a) і (f.б).*

Тоді умови (f.2) і (f.3) на функцію f є необхідними для того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом з черенками.

Умова (f.1) не є необхідною для того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом з черенками. У **додатку B** ми наводимо відповідний приклад.

Якщо функція f задана *на площині*, то за рахунок теореми Жордана про криву *функція буде K-R-простою тоді і лише тоді, коли $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками.* Це твердження слідує з теореми 3.1.6, твердження 3.1.7 і наступної теореми.

Теорема 3.1.8. *Нехай неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ відповідає умовам (f.a) і (f.б).*

Якщо Γ_{K-R} є графом з черенками, то f відповідає умові (f.1).

Розділ 4 присвячено вивченню питання розрізнення неперервних функцій на площині з точністю до орієнтованої топологічної еквівалентності.

У такій загальній постановці ця задача дуже складна, тому ми обмежуємось класом функцій, які відповідають таким умовам $\mathfrak{I}$.

а) Для кожного $x \in \mathbb{R}^2$ в околі точки x функція f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$, $n \in \mathbb{N}$, в околі початку координат, тобто f є псевдогармонічною (якщо $n = 1$, тоді точку x називатимемо *регулярною* точкою; якщо $n > 1$, тоді x називатимемо *сингулярною* точкою).

б) Число сингулярних точок функції f є скінченним.

в) Нехай для $a \in \mathbb{R}$ точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ належать різним компонентам множини рівня $f^{-1}(a)$. Тоді знайдуться відкриті околи $U_1 \ni x_1$ і $U_2 \ni x_2$, такі, що для кожного $b \in \mathbb{R}$ і компоненти F_b множини рівня $f^{-1}(b)$ виконується співвідношення $(F_b \cap U_1 = \varnothing) \vee (F_b \cap U_2 = \varnothing)$.

Ми розглядаємо *функції загального положення* (різні сингулярні точки знаходяться на різних множинах рівня).

У якості основи для побудови інваріанту, який розрізняє такі функції, ми беремо так званий граф Кронрода-Ріба функції $\Gamma_{K-R}(f)$ і наділяємо його додатковою комбінаторною структурою.

Умови $\mathfrak{I}$ гарантують, що $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками (див. теорему 3.1.6).

Додаткова структура на графі Кронрода-Ріба включає орієнтацію його ребер і частковий порядок на множині вершин, які породжені напрямком зростання функції f. Цим поняттям присвячений **підрозділ 4.3**.

Іншою складовою додаткової структури на $\Gamma_{K-R}(f)$ є *спін* у вершинах цього графа. Спіном у вершині називається вибраний певним чином *цикл* ребер, які їй інцидентні. Означенню цих понять і дослідженню властивостей спіна присвячені **підрозділи 4.4–4.6**.

У **підрозділі 4.7** означені поняття *навантаженого* і *слабо навантаженого* графів Кронрода-Ріба, а також поняття їх *еквівалентності.*

Означення 4.7.2. *Нехай неперервні функції f і g відповідають умовам $\mathfrak{I}$. Скажемо, що f і g* пошарово еквівалентні *(відповідно,* орієнтовно пошарово еквівалентні*), якщо існує гомеоморфізм (відповідно, орієнтований гомеоморфізм) площини на себе, який відображає компоненти множин рівнів f на компоненти множин рівнів g.*

Теорема 4.8.1. *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — функції загального положення, що задовольняють умови $\mathfrak{I}$.*

f і g є орієнтовано пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли слабо навантажений граф Кронрода-Ріба функції f еквівалентний слабо навантаженому графу однієї з функцій g або $-g$.

f і g є орієнтовано топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх навантажені графи Кронрода-Ріба є еквівалентними.

У **розділі 5** ми розглядаємо клас неперервних функцій f, означених на замкненому одиничному диску D^2 площини $\mathbb{C}$, які є псевдогармонічними у $\operatorname{Int} D^2$, і для яких обмеження $f|_{\partial D^2}$ має лише скінченне число екстремумів.

Кожній функції f з цього класу можна поставити у відповідність її *комбінаторну діаграму $P(f)$*, яка будується наступним чином.

Візьмемо об'єднання межі ∂D^2 і тих компонент лінійної зв'язності множин рівня f, що не гомеоморфні замкненому інтервалу. Виявляється, що на цій множині можна означити структуру скінченного топологічного графу. Його вершинами є сингулярні точки f в $\operatorname{Int} D^2$, локальні екстремуми обмеження f на ∂D^2, а також точки перетину компонент зв'язності множин рівня f, які містяться у $P(f)$, з межовим колом ∂D^2.

На графі $P(f)$ задається додаткова структура. По-перше, на множині вершин $P(f)$ можна задати строгий частковий порядок за допомогою співвідношення $(x < y) \iff (f(x) < f(y))$. Крім того, $P(f)$ містить виділений цикл $q(f)$, утворений ребрами, об'єднання яких дає межу диску ∂D^2. Цей цикл можна орієнтувати у відповідності з додатною орієнтацією кола ∂D^2.

І. А. Юрчук довела таку теорему.

Дві псевдогармонічні функції f і g топологічно еквівалентні тоді й лише тоді, коли існує ізоморфізм комбінаторних діаграм $\varphi : P(f) \to P(g)$, який зберігає строгий частковий порядок і орієнтацію на них.

Ми досліджуємо питання: при яких умовах граф є комбінаторною діаграмою деякої псевдогармонічної функції?

Виявляється, що якщо вилучити з $P(f)$ всі ребра, що належать $q(f)$, залишиться скінченний ліс (скінченне об'єднання дерев), всі термінальні вершини якого належать циклу $q(f)$.

Ми даємо відповідь на питання, коли скінченний ліс можна вкласти у замкнений диск "належним чином".

Нехай T є деревом з множиною вершин V і множиною ребер E. Припустимо, що T невироджене (має принаймні одне ребро). Позначимо через V_{ter} множину всіх вершин T порядку 1 (*термінальні* вершини T). Припустимо, що зафіксовано підмножину $V^* \subseteq V$, таку, що $V_{ter} \subseteq V^*$. Нехай також $\varphi : T \to \mathbb{R}^2$ є вкладенням, для якого виконується наступна умова:

$$\varphi(T) \subseteq D^2\,, \quad \varphi(T) \cap \partial D^2 = \varphi(V^*)\,. \tag{5.2.2}$$

Припустимо, що з усіх елементів підмножини V^* вершин дерева T утворено деякий *простий абстрактний цикл* $C = (v_1, \ldots, v_k)$, див. **підрозділ 5.5**.

Припустимо, що вкладення $\varphi : T \to \mathbb{R}^2$, відповідає умові (5.2.2). Тоді з елементів множини $\varphi(V^*) = \varphi(T) \cap \partial D^2$ можна утворити два різних абстрактних цикли.

З одного боку, відображення $\varphi|_{V^*} : V^* \to \varphi(V^*)$ бієктивне, тому співвідношення

$$\varphi(C) = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k))$$

коректно означає деякий простий абстрактний цикл.

З іншого боку, обходячи коло S^1 у додатному напрямку, ми можемо означити абстрактний цикл

$$S = (\varphi(v_{\sigma(1)}), \dots, \varphi(v_{\sigma(k)}))$$

природним чином: точки $\varphi(v_{\sigma(1)}), \dots, \varphi(v_{\sigma(k)})$ обходяться у вказаному порядку при обході кола.

Означення 5.5.6. *Дерево T називається $\mathcal{D}$-*планарним*, якщо існує вкладення $\varphi : T \to \mathbb{R}^2$, яке відповідає умові (5.2.2) і таке, що абстрактний цикл $\varphi(C)$ збігається з абстрактним циклом S.*

Теорема 5.5.8. *$\mathcal{D}$-планарність дерева T еквівалентна наступній умові: для довільного ребра e існує рівно два шляхи, кожний з яких проходить через e і з'єднує деяку пару вершин з множини V^*, що є сусідніми елементами простого абстрактного циклу C.*

Означення 5.6.2. *Скінченний граф $G \subset \mathbb{R}^3$ називається $\mathcal{D}$-планарним, якщо існують його підграф γ і вкладення $\varphi : G \to D^2$, для яких справедливе наступне:*

- *γ є простим циклом;*
- *$\overline{G \setminus \gamma} = \bigcup_{i=1}^{k} T_i = F$ є скінченним об'єднанням дерев;*
- *γ містить всі термінальні вершини F;*
- *$\varphi(\gamma) = \partial D^2$, $\varphi(G \setminus \gamma) \subseteq \operatorname{Int} D^2$.*

Теорема 5.6.3. *Нехай G є графом, $\gamma \subseteq G$ є простим циклом, таким, що $\overline{G \setminus \gamma} = \bigsqcup_i T_i$, де кожне T_i є деревом.*

Тоді G є $\mathcal{D}$-планарним тоді й лише тоді, коли виконуються наступні умови:

- *кожне дерево T_i з підмножиною вершин V_i^*, на якій цикл γ індукує простий абстрактний цикл C_i, є $\mathcal{D}$-планарним;*
- *для кожної пари індексів $m \neq n$ підмножина вершин V_n^* дерева T_n належить єдиній компоненті зв'язності множини $\gamma \setminus V_m^*$.*

За означенням всі комбінаторні діаграми є $\mathcal{D}$-планарними графами. Щоб $\mathcal{D}$-планарний граф, на множині вершин якого задано строгий частковий порядок, був комбінаторною діаграмою деякої псевдогармонічної функції, він має відповідати деяким додатковим умовам. Графи, що їм відповідають, ми називаємо Δ–*графами*.

Теорема 5.7.1. *Якщо граф G є комбінаторною діаграмою деякої псевдогармонічної функції f, то G є Δ–графом.*

Якщо граф G є Δ–графом, то частковий порядок на $V(G)$ може бути продовжений так, що граф G з новим частковим порядком на множині вершин буде ізоморфний комбінаторній діаграмі деякої псевдогармонічної функції f.

Не кожний строгий частковий порядок на вершинах Δ–графа породжується якоюсь функцією. Справді, якщо для деякої функції f маємо $(x < y) \Longleftrightarrow (f(x) < f(y))$, то x і y є непорівняними тоді й лише тоді, коли $f(x) = f(y)$.

Ця умова фігурує у нас як умова A4, і її можна виразити інакше: *відношення "бути непорівняними" на множині зі строгим частковим порядком є транзитивним.*

Теорема 5.7.2. *Нехай G є Δ–графом.*

G задовольняє умову A4 *тоді й тільки тоді, коли строгий частковий порядок на графі G збігається зі строгим частковим порядком на діаграмі $P(f)$ деякої псевдогармонічної функції f, що відповідає графу G.*

У **розділі 6** ми вивчаємо гомотопічні властивості шарувань на довільних відкритих двовимірних поверхнях Z, які отримані з сім'ї смуг $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$, склеєних вздовж деяких інтервалів, розташованих на межі цих смуг. Будемо називати такі поверхні *смугастими.*

Означення 6.1.1. *Підмножину $S \subset \mathbb{R}\times[-1,1]$ будемо називати* модельною смугою *якщо*

(1) $\mathbb{R}\times(-1,1) \ \subset \ S$,

(2) *перетин $S\cap(\mathbb{R}\times\{-1,1\})$ є (можливо, порожнім) об'єднанням відкритих обмежених інтервалів, замикання яких попарно не перетинаються.*

Для модельної смуги S будемо вживати наступні позначення:

$$\partial_- S := S \ \cap \ \mathbb{R}\times\{-1\}, \quad \partial_+ S := S \ \cap \ \mathbb{R}\times\{1\}, \quad \partial S := \partial_- S \ \cup \ \partial_+ S.$$

Назвемо множини $\partial_- S$ і $\partial_+ S$ *берегами* модельної смуги S. Компоненти зв'язності множини $\partial_- S$ (відповідно, $\partial_+ S$) назвемо *нижніми* (відповідно, *верхніми*) межовими інтервалами.

Нехай зафіксовано деяку не більш, ніж зліченну, множину індексів $\mathbf{A}$ і набір модельних смуг $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{A}}$. Нехай $\{I_c\}_{c\in\mathbf{C}}$ — сім'я всіх межових інтервалів смуг з цього набору.

Припустимо, що для деякої множини індексів $\mathbf{B}$ зафіксовано два ін'єктивних відображення $\mathbf{i}, \mathbf{j} : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, таких, що $\mathbf{i}(\mathbf{B}) \cap \mathbf{j}(\mathbf{B}) = \varnothing$.

Позначимо $X_\beta = I_{\mathbf{i}(\beta)}$, $Y_\beta = I_{\mathbf{j}(\beta)}$, для кожного $\beta \in \mathbf{B}$.

Означення 6.1.2. Смугастою поверхнею *назвемо фактор-простір*

$$Z = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha \Big/ \{Y_\beta \overset{\phi_\beta}{\sim} X_\beta\}_{\beta \in \mathbf{B}} ,$$

де

(a) $\bigsqcup\limits_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha$ *є незв'язним об'єднанням модельних смуг;*

(b) $\phi_\beta : Y_\beta \to X_\beta$, $\beta \in \mathbf{B}$, *є гомеоморфізмом, що зберігає або обертає орієнтацію.*

Нехай $q : \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha \to Z$ — відображення проекції. Позначимо $\widehat{S}_\alpha = q(S_\alpha)$, $\partial \widehat{S}_\alpha = q(\partial S_\alpha)$, $\partial_\pm \widehat{S}_\alpha = q(\partial_\pm S_\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{A}$.

Кожна смуга має природне шарування на паралельні горизонтальні лінії, що приводить до шарування Δ_Z на Z, всі шари якого є некомпактними. Будемо називати це шарування *канонічним.*

Гомеоморфізм $h : Z \to Z'$ смугастих поверхонь будемо називати *листовим гомеоморфізмом*, якщо він відображає листи шарування Δ_Z на листи $\Delta_{Z'}$.

Означення 6.2.6. *Смугаста поверхня називається* зведеною, *якщо вона відповідає наступній властивості.*

Нехай $X_\beta \subset \partial_\varepsilon S_\gamma$ *і* $Y_\beta \subset \partial_{\varepsilon'} S_{\gamma'}$ *для деяких* $\gamma, \gamma' \in \mathbf{A}$, $\beta \in \mathbf{B}$ *і* $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm\}$.

Тоді $X_\beta \neq \partial_\varepsilon S_\gamma$ *або* $Y_\beta \neq \partial_{\varepsilon'} S_{\gamma'}$.

Теорема 6.2.7. *Кожна зв'язна смугаста поверхня Z зі зліченною базою листово гомеоморфна циліндру C, листу Мебіуса M, або зведеній поверхні.*

Нехай $\mathcal{H}(\Delta_Z)$ є групою всіх гомеоморфізмів Z, що відображають листи шарування Δ_Z на листи Δ_Z, а $\mathcal{H}_0(\Delta_Z)$ є компонентою лінійної зв'язності одиниці групи $\mathcal{H}(\Delta_Z)$ відносно компактно-відкритої топології.

Нехай також $\mathcal{H}_0(\Delta_Z)'$ є підгрупою групи $\mathcal{H}(\Delta_Z)$, яка складається з гомеоморфізмів h, таких, що $h(\omega) = \omega$ для кожного листа шарування Δ_Z і h зберігає орієнтацію на ω.

Лема 6.3.1. *Нехай* $S \subset \mathbb{R} \times [-1,1]$ *є модельною смугою і* $g \in \mathcal{H}\big(\Delta_S\big)$*. Тоді*

$$g(x,y) = \big(\lambda(x,y),\ \mu(y)\big), \tag{6.3.1}$$

де $\mu : [-1,1] \to [-1,1]$ *є гомеоморфізмом, і* $\lambda : S \to \mathbb{R}$ *є неперервною функцією, такою, що для кожного* $y \in (-1,1)$ *відповідність* $x \mapsto \lambda(x,y)$ *є гомеоморфізмом* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Лема 6.3.3. *Група* $\mathcal{H}_0\big(\Delta_Z\big)'$ *стягувана.*

Теорема 6.3.4. *Нехай* Z *є зв'язною зведеною смугастою поверхнею і* $h \in \mathcal{H}\big(\Delta_Z\big)$*. При цих умовах* $h \in \mathcal{H}_0\big(\Delta_Z\big)$ *тоді і лише тоді, коли виконуються три наступні умови:*
(a) $h(\widehat{S}_\alpha) = \widehat{S}_\alpha$ *для всіх* $\alpha \in \mathbf{A}$*;*
(b) *якщо* $g_\alpha : S_\alpha \to S_\alpha$*,* $g(x,y) = \big(\lambda(x,y),\ \mu(y)\big)$*,* $\alpha \in \mathbf{A}$*, є єдиним підняттям* $h|_{\widehat{S}_\alpha}$ *виду* (6.3.1)*, то* μ *зростає і* $\lambda(x,y)$ *також зростає для кожного фіксованого* $y \in (-1,1)$*;*
(c) h *лишає інваріантним кожен лист* $\omega \subset \Sigma(\Delta_Z)$ *і зберігає його орієнтацію.*

Більш того, $\mathcal{H}_0\big(\Delta_Z\big)'$ *є строгим деформаційним ретрактом* $\mathcal{H}_0\big(\Delta_Z\big)$*, зокрема,* $\mathcal{H}_0\big(\Delta_Z\big)$ *також є стягуваним.*

Розділи 7 і **8** присвячено характерізації смугастих поверхонь.

Нехай X є зв'язним некомпактним двовимірним многовидом, можливо з межею. Нехай на X задано шарування Δ таке, що кожен лист $\omega \in \Delta$ гомеоморфний $\mathbb{R}$ і має тривіально розшарований насичений окіл. Скажемо, що таке шарування належить класу $\mathcal{F}$.

Нехай $Y = X/\Delta$ є простором листів, а відображення $p : X \to Y$ є проекцією. Наділимо Y *фактор-топологією.* Оскільки кожен лист шарування Δ є замкненою підмножиною X, то Y є T_1-простором. Але, взагалі кажучи, простір Y не є Хаусдорфовим.

Нехай ω є листом шарування Δ і $y = p(\omega) \in Y$. Скажемо, що ω є *спеціальним* листом і y є *спеціальною* точкою простору Y, якщо простір Y не є Хаусдорфовим у точці y, тобто $y \neq \cap_{y \in V} \overline{V}$, де V пробігає всі відкриті околи точки y.

Нагадаємо, що відображення просторів, на яких задані шарування, називається *листовим*, якщо воно відображає листи шарування у прообразі на листи шарування у образі.

Теорема 7.1.6. *Нехай* X *є зв'язним двовимірним многовидом і* Δ *є шаруванням на* X*, що належить до класу* $\mathcal{F}$*. Нехай сім'я*

Spec(Δ) *всіх спеціальних листів шарування* Δ *є локально скінченною, і нехай* Q *є компонентою зв'язності множини* $X \setminus (\mathrm{Spec}(\Delta) \cup \partial X)$. *Тоді справедливі такі твердження.*

1. Q *листово гомеоморфна або до стандартного циліндру* C, *або до стандартної стрічки Мебіуса* M, *або до відкритої модельної смуги* $\mathbb{R} \times (-1, 1)$. *Крім того, у перших двох випадках* $Q = X$.

2. Нехай Q *є листово гомеоморфною до відкритої модельної смуги. Зафіксуємо листовий гомеоморфізм* $\phi : \mathbb{R} \times (-1, 1) \to Q$ *і позначимо*

$$A = \phi\big(\mathbb{R} \times (-1, 0]\big), \qquad\qquad B = \phi\big(\mathbb{R} \times [0, 1)\big).$$

Тоді замикання $\overline{A}$ *і* $\overline{B}$ *листово гомеоморфні до модельних смуг.*

З цієї теореми слідує, що топологічна структура шарування $\Delta \in \mathcal{F}$ однозначно визначається комбінаторикою склеювання модельних смуг.

Наслідок 7.1.7. *Нехай* X *є зв'язним двовимірним многовидом і* Δ *— шарування на* X, *що належить до класу* $\mathcal{F}$. *Нехай сім'я* Spec(Δ) *всіх спеціальних листів шарування* Δ *є локально скінченною.*

Тоді X *листово гомеоморфний до деякої смугастої поверхні, на якій задано канонічне шарування.*

Нехай знову Z — некомпактний двовимірний многовид.

Для шарувань з класу $\mathcal{F}$, які означені й досліджені у попередньому розділі, відображення проекції $\mathrm{pr} : Z \to Z/\Delta$ на простір листів є локально тривіальним розшаруванням з шаром $\mathbb{R}$. Спеціальні листи відображаються у точки простору Z/Δ, в яких він не є Хаусдорфовим. Більш того, поверхня Z з одновимірним шаруванням Δ з класу $\mathcal{F}$ допускає "смугасту структуру" тоді й лише тоді, коли сім'я спеціальних листів є локально скінченною.

У даному розділі ми розглядаємо більш загальний випадок, коли Δ — одновимірне шарування на Z таке, що кожен лист $\omega \in \Delta$ гомеоморфний $\mathbb{R}$ і є замкненою підмножиною Z.

Виявляється, що у цій ситуації множини Spec(Δ) не досить, щоб виділити шарування Δ, для яких Z листово гомеоморфна деякій смугастій поверхні.

Ми пропонуємо більш загальне поняття *сингулярних* листів.

Назвемо лист $\omega \subset \operatorname{Int} X$ *регулярним*, якщо існує його насичений окіл U, такий, що пара $(\overline{U}, U)$ листово гомеоморфна парі $\bigl(\mathbb{R}\times\overline{V}, \mathbb{R}\times V\bigr)$ для деякої відкритої підмножини V простору $[0,1)$ (відносно шарування на горизонтальні прямі на просторі $\mathbb{R}\times[0,1)$). Листи, що не є регулярними, будемо називати *сингулярними*.

Скажемо, що пара (Z, Δ) допускає смугастий атлас, якщо існує листовий гомеоморфізм Z на деяку смугасту поверхню з канонічним шаруванням на ній.

Теорема 8.4.4. *Наступні умови еквівалентні:*
(1) (Z, Δ) *допускає смугастий атлас;*
(2) *сім'я* $\operatorname{Sing}(\Delta)$*, що складається зі всіх* сингулярних *листів, є локально скінченною.*

У **розділі 9** розглядаються різні способи означення регулярної точки неперервної функції на поверхні.

Нехай M^2 — двовимірна поверхня з краєм. Назвемо *F-функцією* неперервну функцію $f : M^2 \to \mathbb{R}$, яка є постійною на компонентах зв'язності краю ∂M^2, а у внутрішніх точках є відкритим відображенням і має ту властивість, що у кожній внутрішній точці $x \in M^2$ множина рівня $f^{-1}(f(x))$ є локально зв'язною.

Вперше такі функції розглянув В. Фокс як узагальнення псевдогармонічних функцій і довів для них *теорему про промені*, яка показує подібність F-функцій до гармонічних функцій (див. вище).

Внаслідок цієї теореми *неперервне відображення* $f : M^2 \to \mathbb{R}$ *на двовимірній поверхні з краєм* M^2*, яке є постійним на компонентах її краю, є F-функцією тоді й лише тоді, коли* f *відповідає теоремі про промені у кожній внутрішній точці* M^2.

У даному розділі ми намагаємось далі розширити клас функцій, послаблюючи вимоги до їх локальної поведінки, і досліджуємо, як це вплине на їх глобальні властивості.

Отже, нехай $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ — замкнений диск на площині, $f : D \to \mathbb{R}$ — непрерервна функція.

Розглянемо, як можна було б розумним чином означити поняття "регулярні точки" неперервної функції. Ми пропонуємо два варіанти такого означення.

Означення 9.1.1a *Точка* $x \in \operatorname{Int} D$ *називається* регулярною *для функції* f*, якщо існує такий відкритий окіл* $U_x \ni x$*, що для кожного* $y \in U_x$ *зв'язна компонента* γ_y *множини* $U_x \cap f^{-1}(f(y))$, *яка містить точку y, гомеоморфна відкритому інтервалу* $(0, 1)$.

Інший підхід відповідає "теоремі про промені" у випадку, коли променів усього два.

Означення 9.1.1б *Точка $x \in \operatorname{Int} D$ називається* регулярною *для функції f, якщо існує такий відкритий окіл $U_x \ni x$, що зв'язна компонента γ_x множини $U_x \cap f^{-1}(f(x))$, яка містить точку x, гомеоморфна відкритому інтервалу $(0, 1)$, а множина $U_x \setminus \gamma_x$ має дві компоненти зв'язності, на одній з яких f більша за $f(x)$, а на іншій — менша.*

Точки диска, які не є регулярними, будемо називати *критичними.*

Маючи визначення регулярної точки неперервної функції f, визначимо поняття сідлової точки.

Означення 9.1.2. *Точка $x \in \operatorname{Int} D$ називається* сідловою точкою *функції f, якщо існує такий відкритий окіл $U_x \ni x$, в якому f відповідає теоремі про промені і кількість променів більше 2, а також кожна точка $y \in U_x \setminus \{x\}$ є регулярною точкою функції f.*

Говорячи про *локальний екстремум* функції f, ми маємо на увазі *нестрогий локальний екстремум.*

Теорема 9.2.7. *Нехай D — стандартний замкнений диск на площині, ∂D — його межове коло.*

Існує неперервна функція $f : D \to \mathbb{R}$, яка відповідає вимогам:

(i) $f(\partial D) = 0$;
(ii) $f(z) > 0$ *для кожного* $z \in \operatorname{Int} D$;
(iii) f *має в* $\operatorname{Int} D$ *рівно два локальні екстремуми;*
(iv) f *не має сідлових точок в* $\operatorname{Int} D$.

Розділ 10 присвячено побудові контр-прикладу до гіпотези В. Фокса про будову множини S-відділених точок.

Нехай M^2 є двовимірним орієнтовним многовидом з краєм ∂M^2.

F-функції були введені В. Фоксом під назвою *"Peano-interior functions"* як узагальнення псевдогармонічних функцій.

Фокс розширює клас функцій, розглядаючи функції, які є F-функціями у внутрішніх точках поверхні і відповідають певним технічним умовам у точках її межі. Він доводить теорему про те, що кожну таку функцію можна продовжити до F-функції, яка задана на більшій поверхні $C(M^2) \supset \operatorname{Int} M^2$, і є локально постійною на межі $\partial C(M^2)$.

Фокс дає таке означення. *Функція* $f : M^2 \to \mathbb{R}$ *називаєтьcя* відділеною зверху від $\operatorname{Int} M^2$ *у точці* $x \in \partial M^2$, *або* S-відділеною *у точці* x, *якщо існує окіл* U *точки* x *в* M^2, *такий, що* $f(y) < f(x)$ *для всіх* $y \in U \cap \operatorname{Int} M^2$.

Аналогічним чином означаються й точки, у яких функція *відділена знизу від* $\operatorname{Int} M^2$.

Нехай J є компонентою межі поверхні M^2. Позначимо через $D(S, J)$ множину всіх S-відділених точок, що належать J. Оскільки функція f неперервна, то вона постійна на кожній компоненті зв'язності множини $D(S, J)$.

Взагалі кажучи, множина $D(S, J)$ не є ні відкритою, ані замкненою підмножиною J. Щоб зменшити кількість компонент зв'язності поверхні $C(M^2)$, Фокс пропонує розглядати замість $D(S, J)$ замкнену множину $\overline{D(S, J)}$.

Фокс формулює в якості нерозв'язаної проблеми таке питання: *чи завжди F-функція* f *постійна на компонентах зв'язності множини* $\overline{D(S, J)}$?

Ми будуємо приклад F-функції, означеної на квадраті $M = [0, 1] \times [0, 1]$, який дає негативну відповідь на це питання.

Теорема 10.1.3. *Нехай* $M = [0, 1] \times [0, 1]$. *Існує F-функція* $f : M \to \mathbb{R}$, *така що множина* $\overline{D(S, \partial M)}$ *зв'язна і* $f\big(\overline{D(S, J)}\big) = [0, 1]$.

У **розділі 11** дана характеризація спряжених псевдогармонічних функціях на поверхнях.

Нехай U і V — деякі неперервні дійснозначні функції на поверхні M^2. Скажемо, що V *є відкритою на множинах рівня* U, якщо для кожного $c \in U(M^2)$ відображення $V|_{U^{-1}(c)} : U^{-1}(c) \to \mathbb{R}$ є відкритим у просторі $U^{-1}(c)$ у топології, індукованій з M^2.

Теорема 11.1.2. *Нехай* U *— псевдогармонічна функція на* M^2. *Для того, щоб дійснозначна неперервна функція* $V : M^2 \to \mathbb{R}$ *була спряженою псевдогармонічною функцією для* U *на* M^2, *необхідно і досить, щоб* V *була відкритою на множинах рівня* U.

Наслідок 11.1.6. *Нехай* $U, V : M^2 \to \mathbb{R}$ *— спряжені псевдогармонічні функції на* M^2. *Тоді на* M^2 *існує комплексна структура,* *відносно якої U і V є спряженими гармонічними функціями на M^2.*

У **розділі 12** описано метод побудови сім'ї вкладених гладких замкнених гіперперповерхонь в $\mathbb{R}^n$, що обмежують задану точку і сходяться до неї. Ця задача пов'язана з дослідженням стійкості гладких потоків за допомогою дисктерних аналогів функції Ляпунова.

Нехай $z = F(\boldsymbol{x})$ — неперервна функція, означена в області $G \subset \mathbb{R}^n$. Точка $\boldsymbol{y} \in G$ є *квазі-ізольованою* для функції $z = F(\boldsymbol{x})$, якщо $\{\boldsymbol{y}\}$ є компонентою зв'язності множини $F^{-1}(F(\boldsymbol{y}))$.

Гіперповерхнею в $\mathbb{R}^n$ будемо називати гладку поверхню без краю розмірності $n-1$ в $\mathbb{R}^n$. Скажемо, що *гіперповерхня $\boldsymbol{H}$ обмежує точку $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$*, якщо вона обмежує область з компактним замиканням, яка містить точку $\boldsymbol{x}$.

Означення 12.1.7. *Нехай $z = F(\boldsymbol{x})$ є C^r-гладкою функцією у області $G \subset \mathbb{R}^n$ і $\boldsymbol{y} \in G$. Нехай $F(\boldsymbol{y}) = a$. Функція $z = F(\boldsymbol{x})$ називаєтьcя* **L**-функцією у точці $\boldsymbol{y}$, *якщо існує послідовність (a_i) регулярних значень $z = F(\boldsymbol{x})$, що відповідає наступним властивостям:*

i. $a_i \to a$ при $i \to \infty$;

ii. для кожного i існує компонента зв'язності $\boldsymbol{H}_i^{n-1}$ множини $F^{-1}(a_i)$, така, що $\boldsymbol{H}_i^{n-1}$ є гладкою гіперповерхнею, що обмежує точку $\boldsymbol{y}$;

iii. діаметри $\boldsymbol{H}_i^{n-1}$ прямують до 0, при $i \to \infty$.

Теорема 12.2.1. *Нехай G — область в $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що $F \in C^n(G)$.*

Для того, щоб F була **L**-*функцією у точці $x_0 \in G$, необхідно й достатньо, щоб x_0 була квазі-ізольованою точкою F.*

Наступний результат відомий як теорема, обернена до теореми Жордана про криву: *якщо для компактної множини знайдуться дві компоненти зв'язності її доповнення до $\mathbb{R}^2$, такі, що кожна точка множини досяжна з обох цих компонент, то вказана множина є простою замкненою кривою.*

У **розділі 13** ми узагальнюємо цю теорему.

Нехай K є компактною підмножиною площини, що розбиває її на дві компоненти зв'язності. Назвемо таку множину *двосторонньою.*

Далі будемо позначати компоненти зв'язності доповнення до двосторонньої множини K через W_1 і W_2. Також позначимо через A_i множину точок K, досяжних з W_i, $i = 1, 2$.

Підмножина R множини $F \subset \mathbb{R}^2$ називається *досить щільною в F*, якщо для довільної відкритої множини U кожна компонента зв'язності множини $F \cap U$ містить точку з R.

Означення 13.2.3. *Назвемо двосторонню множину K d-*множиною*, якщо обидві підмножини A_1 і A_2 є досить щільними у K.*

Теорема 13.2.9. *Кожна d-множина на площині є простою замкненою кривою.*

Наслідок 13.2.10. *Нехай K — зв'язна двостороння підмножина площини. Якщо множини $K \setminus A_1$ і $K \setminus A_2$ є нульвимірними, то K є простою замкненою кривою.*

Теорему 13.2.9 можна сформулювати в інших термінах. А саме, нехай $(X, \mathcal{T})$ — деякий топологічний простір. Позначимо через $\mathcal{LC}(X)$ найслабшу топологію на X, що відповідає такій властивості: *для кожної відкритої підмножини W простору $(X, \mathcal{T})$ всі компоненти зв'язності W є відкритими у топології $\mathcal{LC}(X)$.*

Теорема 13.4.4. *Нехай K — двостороння підмножина площини. Якщо множини A_1 і A_2 є щільними у K у топології $\mathcal{LC}(K)$, то K є простою замкненою кривою.*

У **розділі 14** вивчаються властивості k-вимірних компактних підмножин $\mathbb{R}^n$.

Відомо, що для кожного $X \subset \mathbb{R}^n$ рівність $\dim X = n$ виконується тоді й лише тоді, коли X має непорожню внутрішність у $\mathbb{R}^n$, тобто містить n-вимірний диск. Для k-вимірних підмножин $\mathbb{R}^n$ $(k < n)$ аналогічне твердження не виконується. Л. С. Понтрягін побудував пару компактних підмножин $\mathbb{R}^n$, таку, що розмірність їх декартового добутку менша за суму їх розмірностей. З цього прикладу слідує існування k-вимірної компактної підмножини $\mathbb{R}^n$, яка не містить підмножини, гомеоморфної k-вимірному диску.

Відомо, що у випадку $n = 2k + 1$ множина Менгера M_k^n розмірності k у $\mathbb{R}^n$ є універсальним k-вимірним простором, тобто кожен сепарабельний метричний простір, розмірність якого не перевищує k, може бути вкладений у M_k^n. Більш того, М. А. Штанько довів, що кожна k-вимірна компактна підмножина $\mathbb{R}^n$ може бути вкладена у M_k^n.

Для $k = 0, \ldots, n-1$ ми розбиваємо M_k^n певним чином на дві неперетинні підмножини C_k^n і F_k^n. Для кожної k-вимірної підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ і її вкладення f у M_k^n розглянемо множини

$$X_1(f) = f(X) \cap C_k^n, \quad X_2(f) = f(X) \cap F_k^n.$$

Пара $(X_1(f), X_2(f))$ буде називатися *представленням множини* X*, асоційованим із вкладенням* f.

Теорема 14.2.1. *Нехай* X *є* k*-вимірною компактною підмножиною* $\mathbb{R}^n$ *і існує представлення множини* X*, для якого* $\dim X_1(f) = k$.

Тоді X *містить підмножину, що гомеоморфна* I^k.

Розділ 15 присвячено дослідженню властивостей динамічних систем з дискретним часом, які зберігаються при переході від самої динамічної системи до деякої її ітерації.

Відомо, що для повних метричних просторів центр Біркгофа BC динамічної системи з дискретним часом на такому просторі збігається з замиканням множини точок, стійких за Пуасоном, отже зберігається при переході від гомеоморфізму до деякої його ітерації. У загальному випадку для неповних метричних просторів центр Біркгофа може і не збігатися з замиканням множини точок, стійких за Пуасоном.

Виявляється, що, не дивлячись на ітераційну нестійкість неблукаючої множини, центр Біркгофа динамічної системи зберігається при переході від відображення, що її породжує, до його ітерації.

Теорема 15.2.1. *Для кожного гомеоморфізму* $g : X \to X$ *Хаусдорфового топологічного простору* X *виконується рівність* $BC(g^n) = BC(g)$.

У **розділі 16** вивчаються перешкоди для того, щоб фазовий простір неперервної надбудови над динамічною системою на множині Кантора можна було вкласти у двовимірну поверхню.

Нехай $I = [0, 1]$ — відрізок, Γ — множина Кантора, $f : \Gamma \to \Gamma$ — гомеоморфізм. Задамо на прямому добутку $I \times \Gamma$ відношення еквівалентності $\sim$ за правилом $(1, x) \sim (0, f(x))$, $x \in \Gamma$. Позначимо через N фактор-простір $I \times \Gamma$ по цьому відношенню. Нехай також

$S^1 = I/\{0,1\}$ — коло. Задамо проекцію $p : N \to S^1$ за допомогою формули $p(t,x) = t$, $(t,x) \in N$. Трійка $\xi = (N, p, S^1)$ є локально-тривіальним розшаруванням над S^1 з шаром Γ і називається *розшаруванням Понтрягіна.*

На просторі N природним чином можна задати потік $T : \mathbb{R} \times N \to N$ за допомогою співвідношення $T(t,(\tau,x)) = (\{t+\tau\}, f^{[t+\tau]}(x))$. Тут $[\cdot]$ і $\{\cdot\}$ — ціла і дробова частина числа, відповідно. Цей потік називається *динамічною системою Понтрягіна.*

Відомі приклади (приклад Данжуа, потоки Черрі на торі), коли поведінка потоку на двовимірній поверхні визначається його поведінкою на інваріантній підмножині N, що є простором деякого розшарування Понтрягіна, причому обмеження потоку на N топологічно спряжене відповідній динамічній системі Понтрягіна. Отже, виникає природне питання: *при яких умовах динамічна система Понтрягіна продовжується з простору розшарування Понтрягіна, вкладеного у двовимірну поверхню, до потоку на всій поверхні.* Щоб на нього відповісти, необхідно знати, *коли простір розшарування Понтрягіна може бути вкладений у двовимірну поверхню.*

Твердження 16.1.2. *Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ і $T_t : N \to N$ — відповідно розшарування Понтрягіна і спеціальний потік, побудовані по гомеоморфізму $f : \Gamma \to \Gamma$.*

Для довільної простої замкненої кривої $\gamma : S^1 \to N$ множина $\gamma(S^1)$ збігається з однією з періодичних орбіт потоку T_t.

Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ — розшарування Понтрягіна, $\gamma : S^1 \to N$ — проста замкнена крива, $z = \gamma(0)$. Нехай $F_z : \mathbb{R} \to N$ — орбіта точки z потоку T_t. Нехай $n > 0$ – мінімальний період точки z. Позначимо через $\pi(p \circ \gamma) = \varepsilon n$. Тут $\varepsilon = 1$, якщо орієнтації кривої γ і періодичної орбіти F_z збігаються, і $\varepsilon = -1$ у протилежному випадку.

Означення 16.2.3. *Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ — розшарування Понтрягіна. Назвемо U-*кривою *просту замкнену криву $\gamma : S^1 \to N$, для якої існує послідовність простих замкнених кривих $\beta_i : S^1 \to N$, $i \in \mathbb{N}$, що відповідає умовам:*

(i) для довільного відкритого околу U множини $\gamma(S^1) \subset N$ існує $k \in \mathbb{N}$, таке, що $\beta_i(S^1) \subset U$ при всіх $i > k$;

(ii) $|\pi(p \circ \gamma)| \neq |\pi(p \circ \beta_i)|$, $i \in \mathbb{N}$.

*Назвемо U-криву γ RU-*кривою*, якщо існує послідовність простих замкнених кривих $\beta_i : S^1 \to N$, $i \in \mathbb{N}$, що відповідає умовам (i), (ii) і* *(iii)* $|\pi(p \circ \gamma)| \neq 2|\pi(p \circ \beta_i)|$, $i \in \mathbb{N}$.

Означення 16.2.4. *Топологічний простір N називається U-*простором *(відповідно, RU-*простором*), якщо у ньому існує U-крива (RU-крива).*

Теорема 16.2.5. *Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ — розшарування Понтрягіна.*

Якщо N є U-простором (RU-простором), то він не може бути вкладений ні в який двовимірний орієнтовний многовид M^2 (відповідно, ні в який двовимірний многовид M^2, не обов'язково орієнтовний).

Зауважимо, що відомі приклади просторів N, які є U-просторами, але можуть бути вкладені у неорієнтовану поверхню, див. [3].

У **розділі 17** розглянуто клас $\mathcal{A}$ всіх одометрів (групових обертань над адичними групами). Відомо, що цей клас збігається з класом всіх мінімальних дистальних динамічних систем, фазовий простір яких гомеоморфний множині Кантора або скінченний. Відомо також, що елементи класу $\mathcal{A}$ класифікуються (з точністю до топологічної спряженості) за допомогою гратки так званих супернатуральних чисел $(\Sigma, \leq)$.

Ми вивчаємо динамічні системи (X, f) з Хаусдорфовим компактним фазовим простором та їх проекції на елементи класу $\mathcal{A}$.

Як виявляється, існування нетривіальних проекцій д. с. (X, f) на елементи сім'ї $\mathcal{A}$ пов'язане з існуванням так званих *періодичних розбиттів* д. с. (X, f) (скінченних замкнених розбиттів простору X, елементи яких циклічно переставляються під дією відображення $f : X \to X$).

Нехай $\mathcal{P}(X, f) \subseteq \mathbb{N}$ — множина потужностей всіх періодичних розбиттів д. с. (X, f). Тоді $\mathcal{P}(X, f)$ — топологічний інваріант д. с. (X, f) і існування нетривіальних проекцій д. с. (X, f) на елементи сім'ї $\mathcal{A}$ еквівалентне нерівності $\mathcal{P}(X, f) \neq \{1\}$.

Позначимо через $\mathcal{A}(X, f)$ клас всіх елементів $\mathcal{A}$, на які існують проекції динамічної системи (X, f). Нехай $\Sigma(X, f)$ — підмножина множини супернатуральних чисел, що відповідає класу $\mathcal{A}(X, f)$. Нехай ще $\mathfrak{B}(X, f)$ — сім'я всіх проекцій д. с. (X, f) на елементи класу $\mathcal{A}$.

Нехай $h_1 : (X, f) \to (Y_1, g_1)$ та $h_2 : (X, f) \to (Y_2, g_2)$ — проекції. Скажемо, що $h_1 \sim h_2$, якщо існує ізоморфізм динамічних систем

$\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$, такий, що $h_2 = \psi \circ h_1$. Позначимо через $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ фактор-сім'ю всіх проекцій з (X, f) на елементи класу $\mathcal{A}$ по цьому відношенню еквівалентності. Введемо на $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ бінарне відношення $\preceq$. Нехай B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}'_0(X, f)$. Скажемо, що $B_1 \preceq B_2$, якщо знайдуться представники $h_1 : (X, f) \to (Y_1, g_1)$ класу B_1 і $h_2 : (X, f) \to (Y_2, g_2)$ класу B_2, а також морфізм $\psi : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$, такі, що $h_2 = \psi \circ h_1$.

До основних результатів даного розділу можна віднести наступні твердження.

Нехай (X, f) — динамічна система з компактним Хаусдорфовим фазовим простором і $\mathcal{P}(X, f) \neq \{1\}$.

Твердження 17.3.45. *Відношення $\preceq$ є відношенням часткового порядку, і виконуються наступні твердження:*

(i) кожен елемент $(h, (A, g)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$ мажорується деяким елементом $(h', (A', g')) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$, таким, що $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$;

(ii) елемент $(h, (A, g)) \in \operatorname{Ob} \mathfrak{B}'_0(X, f)$ є максимальним відносно порядку $\preceq$ тоді й лише тоді, коли виконується рівність $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Назвемо динамічну систему (X, f) *нерозкладною*, якщо простір X не може бути представлений як незв'язна сума двох власних інваріантних замкнених підмножин д. с. (X, f).

Розглянемо підмножину $\Sigma(X, f) = \{N \in \Sigma \mid N \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))\}$ множини $(\Sigma, \leq)$ і побудуємо по цій частково впорядкованій множині категорію $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$.

Теорема 17.3.59. *Нехай $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$, $\mathfrak{B}_0(X, f)$ — скелет категорії $\mathfrak{B}(X, f)$.*

Наступні твердження еквівалентні:

(i) динамічна система (X, f) нерозкладна;

(ii) категорії $\mathfrak{B}_0(X, f)$ і $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ ізоморфні.

Висновки

У даній роботі вивчались одновимірні шарування з особливостями на поверхнях, а також об'єкти, які їх породжують — функції та динамічні системи. Було отримано такі основні результати.

- Означено поняття плоского відображення локально скінченного дерева та скінченного лісу, який складається з таких дерев, у площину. Доведено, що довільний образ скінченного лісу на площині під дією плоского відображення є множиною рівня деякої псевдогармонічної функції (**розділ 2**).
- Розглянуто клас неперервних функцій на некомпактних поверхнях, множини рівня яких локально мають таку ж топологічну будову, як і гладкі функції з ізольованими особливостями. Знайдені достатні умови, при виконанні яких простір Кронрода–Ріба такої функції є топологічним графом з черенками. Доведено, що у випадку, коли поверхня є площиною $\mathbb{R}^2$, ці умови є також необхідними (**розділ 3**).
- Розглянуто псевдогармонічні функції загального положення на площині, які мають скінченну кількість сингулярних точок і задовольняють додатково деякі умови $\mathfrak{I}$, які гарантують, що $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками. На основі простору Кронрода–Ріба побудовано повний топологічний інваріант, що розрізняє такі функції (**розділ 4**).
- Для певного класу графів доведено теорему реалізації у якості комбінаторної діаграми деякої функції f, означеної на замкненому двовимірному диску D^2, яка є псевдогармонічною у $\operatorname{Int} D^2$ і для якої обмеження f на ∂D^2 має лише скінченне число екстремумів (**розділ 5**).
- Означено клас смугастих поверхонь: двовимірних поверхонь, які можуть бути склеєні з горизонтальних смуг і на яких певним чином задається одновимірне канонічне шарування. Для поверхонь з цього класу вивчено гомотопічний тип груп $\mathcal{H}(\Delta)$ листових гомеоморфізмів Z (гомеоморфізмів, що відображають листи Δ на листи) і доведено, що за виключенням двох випадків компонента лінійної зв'язності одиниці $\mathcal{H}_0(\Delta)$ групи $\mathcal{H}(\Delta)$ є стягуваною (**розділ 6**).
- Для двовимірного многовиду X, на якому задане одновимірне шарування Δ, що належить до класу $\mathcal{F}$ (X має структуру локально тривіального розшарування, шарами якого є листи шарування Δ), доведено, що X листово гомеоморфний до деякої смугастої поверхні при виконанні додаткової умови, що сім'я $\operatorname{Spec}(\Delta)$ всіх спеціальних листів Δ локально скінченна (**розділ 7**).

- Отримано наступну характеризацію смугастих поверхонь: двовимірний многовид X, на якому задано одновимірне шарування Δ, кожен лист якого гомеоморфний $\mathbb{R}^1$ і є замкненою підмножиною X, листово гомеоморфний деякій смугастій поверхні тоді й лише тоді, коли сім'я $\mathrm{Sing}(\Delta)$, що складається зі всіх *сингулярних* листів, є локально скінченною (**розділ 8**).
- Запропоновано означення регулярної та сідлової точки неперервної функції на поверхні, які є слабкішими аналогами означень регулярної та сингулярної точки псевдогармонічної функції. Побудовано приклад неперервної функції на замкненому двовимірному диску, яка є постійною на його межі, має рівно два нестрогих локальних екстремуми всередині диску і не має сідлових точок (**розділ 9**).
- Побудовано контр-приклад до гіпотези Дж. Фокса, яка стверджує, що F-функція f завжди постійна на компонентах зв'язності замикання множини своїх S-відділених точок (**розділ 10**).
- Знайдено необхідні й достатні умови для того, щоб неперервна функція на поверхні була спряженою псевдогармонічною функцією до заданої псевдогармонічної функції (**розділ 11**).
- Нехай G — область в $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in G$, $F \in C^n(G)$. Доведено, що точка x_0 є квазі-ізольованою точкою рівня $F^{-1}(F(x_0))$ тоді й лише тоді, коли існує вкладена послідовність гіперповерхонь, що обмежують x_0, яка збігається до x_0 і складається з компонент лінійної зв'язності регулярних множин рівня F (**розділ 12**).
- Узагальнено теорему, обернену до теореми Жордана про криву. (**розділ 13**)
- Запропоновано розбиття універсального простору Менгера M_k^n на дві неперетинні множини C_k^n і F_k^n. Доведено, що достатньою умовою для того, щоб k-вимірна компактна множина $X \subset \mathbb{R}^n$ містила k-вимірний диск, є існування вкладення $f : X \to M_k^n$, для якого розмірність множини $f(X) \cap C_k^n$ дорівнює k (**розділ 14**).
- Доведено, що для гомеоморфізму $g : X \to X$ Хаусдорфового топологічного простору X і для кожного $n \geq 2$ центри Біркгофа динамічних систем (X, g) і (X, g^n) збігаються (**розділ 15**).
- Знайдено умови на співвідношення між періодами близьких періодичних орбіт д. с. з дискретним часом на множині Кантора, при виконанні яких фазовий простір неперервної надбудови над

д. с. не може бути вкладений у двовимірну поверхню (відповідно, у орієнтовну двовимірну поверхню) (**розділ 16**).

- Для обертовної д. с. (X, f) з Хаусдорфовим компактним фазовим простором X нами означені і досліджені періодичні розбиття простору X, а також побудовано топологічний інваріант $\mathcal{P}(X, f) \subset \mathbb{N}$ — множину потужностей всіх періодичних розбиттів простору X. Вказано, як по $\mathcal{P}(X, f)$ знайти всі одометри, на які має проекції (X, f). Розглянуто категорію, об'єктами якої є проекції (X, f) на одометри. Описано скелет цієї категорії у випадку, коли д. с. (X, f) нерозкладна (**розділ 17**).

Список опублікованих праць за темою дисертації

[1] И. Ю. Власенко, С. И. Максименко и Е. А. Полулях, *Топологические методы в изучении групп пребразований многообразий*, сер. Труды Института математики НАН Украины. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006, т. 61, 363 с.

[2] E. Polulyakh and I. Yurchuk, *On the Pseudo-harmonic Functions Defined On a Disk*, ser. Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos. Kyiv: Inst. Mat. NAN Ukr., 2009, vol. 80, 151 pp.

[3] Е. А. Полулях, «О вложении тотальных пространств расслоений над окружностью со слоем множество Кантора в двумерные многообразия», *Матем. физ., анал., геом.*, т. 7, № 1, с. 66—90, 2000.

[4] E. Polulyakh, "On the theorem converse to Jordan's curve theorem", *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 6, no. 4, pp. 56–69, 2000.

[5] S. I. Maksimenko, M. A. Pankov, and E. A. Polulyakh, "Representations of compact subsets of $\mathbb{R}^n$", *Topology Appl.*, vol. 119, no. 1, pp. 33–39, 2002.

[6] Е. А. Полулях, «О проекциях на одометры динамических систем с компактным фазовым пространством», *Збірник праць Інституту математики НАН України*, т. 3, № 3, с. 309—422, 2006, *Проблеми топології та суміжні питання.*

[7] I. Y. Vlasenko та E. A. Polulyakh, «On iteration stability of the Birkhoff center with respect to power 2», *Укр. мат. журн.*, т. 58, № 5, с. 705—707, 2006.

[8] Є. О. Полулях, «Про сідлові точки неперервних функцій», *Мат. студії*, т. 31, № 2, с. 172—182, 2009.

[9] E. O. Polulyakh, «On conjugate pseudo-harmonic functions», *Збірник праць Інституту математики НАН України*, т. 6, № 2, с. 505—517, 2009, *Геометрія, топологія та їх застосування.*

[10] Е. А. Полулях, «О поведении F-функций на замыкании множества своих S-отделенных точек», *Збірник праць Інституту математики НАН України*, т. 7, № 4, с. 153—168, 2010, *Геометрія та топологія функцій на многовидах.*

[11] Є. О. Полулях, «Про множини рівня псевдогармонічної функції на площині», *Доповіді НАНУ*, № 1, с. 22—26, 2014.

[12] ——, «Дерева як множини рівня псевдогармонічних функцій на площині», *Укр. мат. журн.*, т. 65, № 7, с. 974—995, 2013.

[13] ——, «Дерева як множини рівня псевдогармонічних функцій на площині. II», *Укр. мат. журн.*, т. 68, № 2, с. 254—270, 2016.

[14] Е. А. Полулях, «Графы Кронрода – Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях. I», *Укр. мат. журн.*, т. 67, № 3, с. 375—396, 2015.

[15] ——, «Графы Кронрода – Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях. II», *Укр. мат. журн.*, т. 67, № 10, с. 1398—1408, 2015.

[16] E. Polulyakh, V. Sharko, and I. Vlasenko, "Discretization of second Lyapunov method", *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 157–180, 2016.

[17] В. В. Шарко, Є. О. Полулях та Ю. Ю. Сорока, «Про топологічну еквівалентність псевдогармонічних функцій загального положення на площині», *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, т. 12, № 6, с. 7—47, 2015, *Топологія відображень маловимірних многовидів.*

[18] S. Maksymenko and E. Polulyakh, "Foliations with non-compact leaves on surfaces", *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 8, no. 3–4, pp. 17–30, 2015. eprint: `1512.07809`.

[19] ——, "Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces", *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 22, no. 3, pp. 266–282, 2016.

[20] ——, "Characterization of striped surfaces", *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 10, no. 2, pp. 24–38, 2017.

[21] S. Maksymenko, E. Polulyakh, and Y. Soroka, "Homeotopy groups of one-dimensional foliations on surfaces", *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 10, no. 1, pp. 22–46, 2017.

[22] Е. А. Полулях, «Об одном топологическом инварианте динамических систем на множестве Кантора», в *Тези доповідей 4-ої міжнародної конференції з геометрії і топології, (м. Черкаси)*, 2001, с. 85.

[23] Є. Полулях та І. Юрчук, «Псевдогармонічні функції в одиничному крузі», в *Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі – 2008", (м. Одеса)*, 2008, с. 57.

[24] E. Polulyakh, «One note on level sets of pseudo-harmonic functions in the plane», в *Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі – 2013", (м. Одеса)*, 2013, с. 108.

[25] ——, «Kronrod–Reeb graphs of functions on non-compact 2-manifolds», в *Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі – 2015", (м. Одеса)*, 2015, с. 57.

[26] Y. O. Polulyakh та Y. Y. Soroka, «Topological equivalence of pseudo-harmonic functions of general position in the plane», в *Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія і топологія в Одесі – 2016", (м. Одеса)*, 2016, с. 28.

[27] Y. Polulyakh, «Regular continuous functions on a closed 2-disk», в *Тези доповідей міжнародної конференції "Infinite dimensional analysis and topology", (м. Івано-Франківськ)*, 2009, с. 119—120.

[28] I. Yurchuck та Y. Polulyakh, «Topological equivalence of the pseudoharmonic functions defined on the D^2», в *Тези доповідей міжнародної конференції "Analysis & Topology", (м. Львів)*, 2008, с. 72—75.

[29] Е. Полулях, «О седловых точках непрерывных функций на замкнутом двумерном диске», в *Тези доповідей міжнародної конференції "Боголюбівські читання" присвяченої 90-річчю з дня народження Ю. О. Митропольського, (м. Київ)*, 2007, с. 87—88.

[30] E. Polulyakh, «One note on level sets of pseudo-harmonic functions in the plane», в *Тези доповідей міжнародної конференції "Боголюбівські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" з нагоди 75-річчя з лня народження академіка А. М. Самойленка, (м. Севастополь)*, 2013, с. 211.

[31] Y. A. Polulyahk, «Regular continuous functions on a closed 2-disk», в *Тезисы докладов международной конференции "Геометрия «в целом», топология и их приложения", посвященной 90-летию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова, (г. Харьков)*, 2009, с. 67.

[32] E. Polulyakh, V. Sharko та I. Vlasenko, «Stability in the sense of Lyapunov», в *Тези доповідей міжнародної конференції "Динамічні системи та їх застосування", (м. Київ)*, 2012, с. 32.

[33] S. Maksymenko and E. Polulyakh, "Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces", in *Book of abstracts of international conference "Modern Advances in Geometry and Topology" in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday, (Kharkiv)*, 2016, pp. 31–32.

Анотація

Полулях Є. О. **Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 "Геометрія і топологія".

— Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена вивченню одновимірних шарувань з особливостями на поверхнях, а також об'єктів, які їх породжують — функцій і динамічних систем. Основним методом досліджень є побудова комбінаторних інваріантів.

Розглянуто клас неперервних функцій на двовимірних поверхнях, що є локально топологічно еквівалентними до гладких функцій з ізольованими особливостями. Знайдено умови, при яких простір Кронрода-Ріба такої функції має просту будову.

Досліджено одновимірні шарування на двовимірних поверхнях, всі листи яких гомеоморфні $\mathbb{R}$ і є замкненими підмножинами відповідної поверхні. Означено смугасті поверхні з канонічними шаруваннями на них, які є найбільш простими представниками цього класу. Знайдено необхідні й достатні умови, при виконанні яких поверхня листово гомеоморфна деякій смугастій поверхні.

Для різних класів псевдогармонічних функцій побудовано їх топологічні інваріанти, а також розглянуто питання реалізації певних класів графів з додатковою структурою в якості таких інваріантів.

Розглянуто узагальнення псевдогармонічних функцій на двовимірних поверхнях і вивчено локальну будову розбиття на компоненти зв'язності їх множин рівня.

Отримано низку інших результатів, які зв'язані з будовою шарувань з особливостями і розбиттями на компоненти зв'язності множин рівня неперервних і гладких функцій на многовидах.

Досліджено низку інваріантів обертовних динамічних систем з дискретним часом. Зокрема доведено, що для довільного гомеоморфізму $f : X \to X$ Хаусдорфового топологічного простору X центри Біркгофа динамічних систем (X, f) і (X, f^n) збігаються для кожного $n > 1$.

Розглянуто категорію всіх проекцій обертовної динамічної системи (X, f) на одометри. Описано скелет цієї категорії у випадку, коли динамічна система (X, f) нерозкладна.

Ключові слова: поверхня, шарування з особливостями, простір листів, модельна смуга, група гомеотопій, псевдогармонічна функція, граф з черенками, граф Кронрода-Ріба, топологічний інваріант, розмірність, динамічна система, центр Біркгофа, мінімальна

множина, одометр.

Аннотация

Полуляхъ Е. А. **Топология сингулярных слоений на поверхностях и смежные вопросы. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.**

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 "Геометрия и топология". — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена изучению одномерных слоений с особенностями на поверхностях, а также объектов, которые их порождают — функций и динамических систем. Основным методом исследований является построение комбинаторных инвариантов.

Рассмотрен класс непрерывных функций на двумерных поверхностях, которые локально топологически эквивалентны гладким функциям с изолированными особенностями. Найдены условия, при которых пространство Кронрода-Риба такой функции имеет простое строение.

Исследованы одномерные слоения на двумерных поверхностях, все листы которых гомеоморфны $\mathbb{R}$ и являются замкнутыми подмножествами соответствующей поверхности. Определены полосатые поверхности с каноническими слоениями на них, которые являются наиболее простыми представителями этого класса. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых поверхность послойно гомеоморфна некоторой полосатой поверхности.

Для разных классов псевдо-гармонических функций построены их топологические инварианты, а также рассмотрен вопрос реализации определенных классов графов с дополнительной структурой в качестве таких инвариантов.

Рассмотрены обобщения псевдо-гармонических функций на двумерных поверхностях и изучено локальное строение разбиения их множеств уровня на компоненты связности.

Получен ряд других результатов, связанных со строением слоений с особенностями и разбиениями множеств уровня непрерывных и гладких функций на многообразиях на компоненты связности.

Исследован ряд инвариантов обратимых динамических систем с дискретным временем. В частности, доказано, что для произвольного гомеоморфизма $f : X \to X$ Хаусдорфового топологического пространства X центры Биркгофа динамических систем (X, f) и (X, f^n) совпадают для каждого $n > 1$.

Рассмотрена категория всех проекций обратимой динамической системы (X, f) на одометры. Описан скелет этой категории для случая, когда динамическая система (X, f) неразложима.

Ключевые слова: поверхность, слоение с особенностями, пространство листов, модельная полоса, группа гомеотопий, псевдогармоническая функция, граф с черенками, граф Кронрода-Риба, топологический инвариант, размерность, динамическая система, центр Биркгофа, минимальное множество, одометр.

Abstract

Polulyakh Ye. O. **Topology of singular foliations on surfaces and related questions. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.**

Thesis for a degree of doctor of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.04 “Geometry and topology”. — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

Dissertation is studying one-dimensional foliations with singularities on the surfaces as well as objects generating them such as functions and dynamical systems.

The main technique of exploration is constructing of combinatorial invariants such as spaces of leaves of a foliation and related objects, graphs which are the union of singular level sets of a function, etc.

The work presents the folowing new results.

We propose notions of a plain map of a locally finite tree and of a finite forest into the plane. It is proved that an arbitrary image of a finite forest in the plane under such a map is a level set of some pseudo-harmonic function.

We consider a class of continuous functions on noncompact surfaces such that topological structure of their level sets is similar to that of

smooth functions with isolated singularities. The sufficient conditions are found under which Kronrod-Reeb space of such a function is a topological graph with stalks. We prove also that in the case of the plane these conditions are necessary as well.

Pseudoharmonic functions in general position on the plane are discussed such that they have a finite number of singular points and comply with some additional conditions which guarantee that their Kronrod-Reeb spaces are graphs with stalks. Based on the Kronrod–Reeb space we construct a topological invariant that distinguishes functions from this class.

For a certain class of graphs we prove the realization theorem as a combinatorial diagram of some function defined on a closed disk such that it is pseudo-harmonic in the interior points of the disk and its restriction to the boundary of the disk has a finite number of extremums.

A class of striped surfaces is defined. We study a homotopic type of groups of foliated homeomorphisms of surfaces from this class endowed with canonical foliations. It is proved that with the exception of two cases the component of linear connectivity containing unity is contractible.

Let X be a 2-manifold and Δ be a foliation of dimension 1 on X such that each leaf of Δ is homeomorphic to $\mathbb{R}$ and has a saturated neighbourhood trivially fibrated into leaves of Δ. We introduce the notion of a special leaf of Δ. It is proved that under the additional condition that the family $\mathrm{Spec}(\Delta)$ of all special leaves of Δ is locally finite it follows that X is foliated homeomorphic with a striped surface.

Let Z be a 2-manifold with a one dimesional foliation Δ on it such that each leaf $\omega \in \Delta$ is homeomorphic to $\mathbb{R}$ also being a closed subset of Z. The notion of singular leaf of Δ is introduced. We prove that Z admits a foliated homeomorphism onto a striped surface if and only if the family $\mathrm{Sing}(\Delta)$ of all singular leaves of Δ is locally finite.

We introduce the notions of a regular and a saddle points of a continuous function on a surface which are weaker analogues of the notions of a regular and a singular points of a pseudo-harmonic function. We construct an example of a continuous function on the closed disk of dimension two such that it is constant on its boundary, has exactly two non strict local extremums inside the disk and has no saddle points.

A counter-example is constructed to the hypothesis of J. Fox that any Peano-interior function is always constant on each component of connectivity of the closure of a set of its S-separated points.

Necessary and sufficient conditions are found for the continuous function on the surface to be conjugate to a given pseudo-harmonic function.

We give necessary and sufficient conditions to ensure that for a critical point z of a smooth function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ there exists a sequence of components of connectivity of its level sets elements of which bound z and such that it converges to z.

We generalize the theorem converse to Jordan's curve theorem.

We provide conditions sufficient for a k-dimensional compact set to contain a k-disk.

It is proved that Birkhoff centers of dynamical systems (X, g) and (X, g^n) coincide for any homeomorphism $g : X \to X$ of a Hausdorff topological space X and each $n \geq 2$.

We determine relations on periods for close enough periodic orbits of dynamical systems on the Cantor set ensuring that a phase space of a continuous suspension over such a dynamical system can not be embedded into a two dimensional surface (respectively, into an orientable two dimensional surface).

For an invertible dynamical system (X, f) on a Hausdorff compact space X the category of all projections of (X, f) onto odometers is considered. A skeleton of this category is described in the case when (X, f) is indecomposable.

Keywords: surface, foliation with singularities, space of leaves, model stripe, homeotopy group, pseudo-harmonic function, graph with stalks, Kronrod-Reeb graph, topological invariant, dimension, dynamical system, Birkhoff center, minimal set, odometer.

Підп. до др. 03.04.2018. Формат 84x108/16. Папір офс. Офс. друк.
Умов. друк. арк. 2,20. Фіз. друк. арк. 2,40. Тираж 100 пр. Зам. №29.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ–4, вул. Терещенківська, 3.