

Національна Академія Наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ПОЛУЛЯХ Євген Олександрович

УДК 515.1

ДИСЕРТАЦІЯ

Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання

01.01.04 — геометрія і топологія

111 – Математика

Подається на здобуття наукового
ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне
джерело

Є. О. Полулях

Наукові консультанти

Шарко Володимир Васильович,
доктор фіз.-мат. наук, професор,
член-кореспондент НАН України;
Максименко Сергій Іванович,
доктор фіз.-мат. наук,
старший науковий співробітник

Київ – 2018

Анотація

Полулях Є. О. Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 “Геометрія і топологія”. — Інститут математики Національної Академії Наук України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена вивченню одновимірних шарувань з особливостями на поверхнях, а також об’єктів, які їх породжують — функцій, динамічних систем, тощо.

Основним методом досліджень є побудова комбінаторних інваріантів: просторів листів шарувань і пов’язаних з ними об’єктів; графів, що є об’єднанням сингулярних множин рівня функцій, тощо.

Текст дисертації складається зі вступу, 17 розділів, висновків, списку використаних джерел та 8 додатків.

Опишемо більш детально задачі, які вивчаються в роботі, а також основні результати.

Розглянемо одновимірні шарування на некомпактних двовимірних поверхнях, всі листи яких є некомпактними вкладеними многовидами. Для вивчення таких шарувань корисно отримати у якомусь сенсі їх “канонічне представлення”, з яким зручно працювати. Для певного підкласу шарувань з цього класу на роль “канонічних представників” підходять *смугасті поверхні*.

Нехай Z — некомпактний двовимірний многовид, який отримано з сім’ї смуг $\mathbb{R} \times (0, 1)$ з приєднаними до межі відкритими інтервалами за допомогою склейки цих смуг вздовж їх межових інтервалів. На кожній такій смузі означене шарування, яке має шарами паралельні прямі $\mathbb{R} \times t$, $t \in (0, 1)$, а також межові інтервали. Звідси ми отримуємо шарування Δ на всьому Z . Багато шарувань на поверхнях, всі шари яких гомеоморфні прямій, мають таку “смугасту” структуру. Цей факт виявив В. Каплан (1940-41) для шарувань на площині \mathbb{R}^2 на множини рівня псевдогармонічних функцій $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ що не мають особливостей.

В роботі вивчено гомотопічний тип груп $\mathcal{H}(\Delta)$ листових гомеоморфізмів Z (гомеоморфізмів, що відображають листи Δ на листи) і доведено, що за виключенням двох випадків компонента лінійної зв'язності одиниці $\mathcal{H}_0(\Delta)$ групи $\mathcal{H}(\Delta)$ є стягнутою (Розділ 6).

Нехай X — некомпактний двовимірний многовид, на якому задано одновимірне шарування Δ , кожен лист якого гомеоморфний \mathbb{R}^1 і має тривіально розшарований насичений окіл. Назвемо лист ω шарування Δ *спеціальним*, якщо простір листів X/Δ не є Хаусдорфовим у точці ω . Доведено, що X листово гомеоморфний до деякої смугастої поверхні при виконанні додаткової умови що сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ всіх спеціальних листів Δ локально скінченна (Розділ 7).

Розглянемо більш загальний випадок, коли задано одновимірне шарування Δ на X , кожен лист якого гомеоморфний \mathbb{R}^1 і є замкненою підмножиною X . У цій ситуації множини $\text{Spec}(\Delta)$ не досить, щоб виділити шарування Δ , для яких X листово гомеоморфний деякій смугастій поверхні. Назвемо лист ω шарування Δ *сингулярним*, якщо він відповідає точці простору X/Δ , для якої не існує відкритого околу V такого, що пара (\bar{V}, V) гомеоморфна (\bar{J}, J) для деякої відкритої підмножини J простору $[0, 1)$. Отримано наступну характеристику смугастих поверхонь: X листово гомеоморфний деякій смугастій поверхні тоді й лише тоді, коли сім'я $\text{Sing}(\Delta)$, що складається зі всіх *сингулярних* листів, є локально скінченною (Розділ 8).

Відомо, що для гладкої функції f з ізольованими особливостями на компактній поверхні простір Кронрода–Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$, точками якого є компоненти лінійної зв'язності множин рівня f , є топологічним графом (графом Кронрода–Ріба). На некомпактних поверхнях цей простір не має таких гарних властивостей (наприклад, може не бути Хаусдорфовим простором).

Розглянуто клас неперервних функцій на некомпактних поверхнях, множини рівня яких локально мають таку ж топологічну будову, як і гладкі функції з ізольованими особливостями. Знайдені достатні умови, при виконанні яких простір Кронрода–Ріба такої функції є топологічним *графом з черенками* (локально-скінченним топологічним графом, з якого вилучена деяка підмножина множини термінальних вершин). Доведено, що у випадку,

коли поверхня є площиною \mathbb{R}^2 , ці умови є також необхідними (Розділ 3).

Псевдогармонічною функцією на поверхні називається неперервна функція, яка в кожній точці локально топологічно еквівалентна до функції $\operatorname{Re} z^n$, де $n \in \mathbb{N}$ залежить від точки. Нами розглянуто псевдогармонічні функції загального положення на площині (кожна множина рівня таких функцій містить не більше однієї сингулярної точки), які мають скінченну кількість сингулярних точок (в цих точках функція топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$, $n > 1$) і задовольняють додатково деяким умовам \mathfrak{J} , які гарантують, що $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками. На основі простору Кронрода–Ріба побудовано повний топологічний інваріант, що розрізняє такі функції (Розділ 4).

Відомо, що компоненти лінійної зв'язності псевдогармонічної функції є локально скінченними топологічними графами. Такі графи є нетривіальними лише для компонент, що містять сингулярні точки. Якщо таких компонент відносно мало (вони утворюють скінченну або локально скінченну сім'ю), то їх об'єднання утворює топологічний інваріант псевдогармонічної функції. Якщо до такого графу додати інформацію про відносне розташування його компонент на поверхні, яка теж є топологічно інваріантною, то є шанс отримати повний топологічний інваріант, що розрізняє псевдогармонічні функції, які відповідають деяким додатковим вимогам. Отже, побудова й дослідження інваріантів такого типу важливі для вивчення псевдогармонічних функцій.

На площині компонента лінійної зв'язності множини рівня псевдогармонічної функції не може мати циклів, тобто буде деревом. Ми розглядаємо питання про те, які саме дерева можуть бути представлені як компоненти множин рівня псевдогармонічної функції, а також більш широке питання, які комбінації дерев можуть представляти множини рівня псевдогармонічної функції. Ми означаємо поняття *плоского відображення* локально скінченного дерева та скінченного ліса, який складається з таких дерев, у площину. Доведено, що довільний образ скінченного лісу на площині під дією плоского відображення є множиною рівня деякої псевдогармонічної функції (Розділ 2).

Ми розглядаємо клас неперервних функцій f означених на замкненому двовимірному диску D^2 , які є псевдогармонічними у $\operatorname{Int} D^2$ і для яких обмеження f на ∂D^2 має лише скінченне число екстремумів. Для таких функцій

відомий повний топологічний інваріант, який називається *комбінаторною діаграмою* $P(f)$ і є топологічним графом, що складається з межового кола ∂D і тих компонентів лінійної зв'язності множин рівня f , що не гомеоморфні відрізьку. Крім того, комбінаторна діаграма має певну додаткову структуру. Ми доводимо для таких графів теорему реалізації у якості комбінаторної діаграми деякої функції з вказаного класу (Розділ 5).

За означенням неперервна функція на двовимірному многовиді M^2 , яка має дискретну множину локальних екстремумів, а на доповненні до цієї множини є псевдогармонічною, породжує на M^2 одновимірне шарування з особливостями. Ми розглядаємо питання наскільки можна розширити клас функцій, щоб компоненти множин рівня функції породжували шарування з особливостями.

Нами запропоновано означення регулярної та сідлової точки неперервної функції на поверхні, які є слабкішими аналогами означень регулярної та сингулярної точки псевдогармонічної функції. Побудовано приклад неперервної функції на замкненому двовимірному диску, яка є постійною на його межі, має рівно два нестрогих локальних екстремуми всередині диску і не має сідлових точок (Розділ 9).

Одним з узагальнень псевдогармонічних функцій є F -функції, які вперше розглянув Дж. Фокс. Побудовано контр-приклад до гіпотези Дж. Фокса, яка стверджує, що F -функція f завжди постійна на компонентах зв'язності замикання множини своїх S -відділених точок (Розділ 10).

Спряженими псевдогармонічними функціями на поверхні є пара неперервних функцій таких, що у кожній точці поверхні існує локальна топологічна еквівалентність цієї пари до пари спряжених гармонічних функцій. Нами знайдено необхідні й достатні умови для того, щоб неперервна функція на поверхні була спряженою псевдогармонічною функцією до заданої псевдогармонічної функції (Розділ 11).

Нехай G — область в \mathbb{R}^n , $x_0 \in G$, $F \in C^n(G)$. Точка $y \in G$ є *квазі-ізолюваною* для функції F , якщо $\{y\}$ є компонентою зв'язності множини $F^{-1}(F(y))$. Доведено, що x_0 є квазі-ізолюваною точкою рівня $F^{-1}(F(x_0))$ тоді й лише тоді, коли існує вкладена послідовність гіперповерхонь, що обме-

жують x_0 , яка збігається до x_0 і складається з компонент лінійної зв'язності регулярних множин рівня F (Розділ 12).

Для того, щоб розбиття n -вимірного многовиду на k -вимірні підмножини породжувало k -вимірне шарування, очевидно необхідно, щоб кожен елемент розбиття був локально подібний до \mathbb{R}^k . У випадку одновимірного розбиття двовимірної поверхні на це питання відповідь дають теореми, зв'язані з теоремою, оберненою до теореми Жордана про криву. У випадку більших розмірностей спочатку треба з'ясувати, чи взагалі можна включити кожен елемент розбиття у k -вимірний диск, який міститься у цьому елементі розбиття.

Нами узагальнено теорему, обернену до теореми Жордана про криву (Розділ 13).

Для кожного $X \subset \mathbb{R}^n$ рівність $\dim X = n$ виконується тоді й лише тоді, коли X має непорожню внутрішність у \mathbb{R}^n , тобто містить n -вимірний диск. Для k -вимірних підмножин \mathbb{R}^n ($k < n$) аналогічне твердження не виконується. Л. С. Понтрягін побудував пару компактних підмножин \mathbb{R}^n , таку що розмірність їх Декартового добутку менша за суму їх розмірностей. З цього прикладу слідує існування k -вимірної компактної підмножини \mathbb{R}^n , яка не містить підмножини, гомеоморфної k -вимірному диску.

Запропоновано розбиття універсального простору Менгера M_k^n на дві неперетинні множини C_k^n і F_k^n . Доведено, що достатньою умовою для того, щоб k -вимірна компактна множина $X \subset \mathbb{R}^n$ містила k -вимірний диск є існування вкладення $f : X \rightarrow M_k^n$, для якого розмірність множини $f(X) \cap C_k^n$ дорівнює k (Розділ 14).

При дослідженні потоків на поверхнях приходиться пов'язувати з ними динамічні системи (д. с.) з дискретним часом (наприклад за допомогою відображення послідування на деякій локальній трансверсалі). Може виникнути ситуація, коли дві різні д. с. з дискретним часом породжують неперервні надбудови, які є орбітно еквівалентними одній і тій же підсистемі початкового потоку. У зв'язку з цим корисно знайти інваріанти д. с. з дискретним часом, які залежать лише від класу орбітної еквівалентності неперервної надбудови такої системи. Зокрема, корисно знайти інваріантні підмножини, які є ітера-

ційно стійкими (не змінюють своїх властивостей при переході від відображення, що породжує д. с. до його ітерації).

Нами доведено, що для гомеоморфізму $g : X \rightarrow X$ Хаусдорфового топологічного простору X і для кожного $n \geq 2$ центри Біркгофа динамічних систем (X, g) і (X, g^n) збігаються (Розділ 15).

Іншим інваріантом д. с. з дискретним часом, який залежить від класу орбітної еквівалентності її неперервної надбудови є співвідношення між періодами близьких періодичних орбіт. Нами знайдено умови на співвідношення періодів, при виконанні яких фазовий простір неперервної надбудови над д. с. з дискретним часом на множині Кантора не може бути вкладений у двовимірну поверхню (відповідно, у орієнтовну двовимірну поверхню) (Розділ 16).

Припустимо, що д. с. (X, f) з дискретним часом допускає нетривіальні проекції на одометри. Виникає питання, чи можна для неї означити аналог періодичної структури і дослідити за його допомогою на які одометри допускає проекції д. с. (X, f) , а також вказати, як пов'язані між собою різні проекції цієї д. с. на одометри.

Для обертової д. с. (X, f) з Хаусдорфовим компактним фазовим простором X нами означені і досліджені періодичні розбиття простору X , а також побудовано топологічний інваріант $\mathcal{P}(X, f) \subset \mathbb{N}$ — множину потужностей всіх періодичних розбиттів простору X . Вказано, як по $\mathcal{P}(X, f)$ знайти всі одометри, на які має проекції (X, f) . Розглянуто категорію, об'єктами якої є проекції (X, f) на одометри. Описано скелет цієї категорії у випадку, коли д. с. (X, f) нерозкладна, тобто X не може бути представлений, як незв'язна сума двох власних інваріантних замкнених підмножин д. с. (X, f) (Розділ 17).

Ключові слова:

Поверхня, шарування з особливостями, простір листів, модельна смуга, група гомеотопій, псевдогармонічна функція, граф Кронрода-Ріба, граф з черенками, топологічний інваріант, розмірність, динамічна система, центр Біркгофа, мінімальна множина, одометр.

Abstract

Polulyakh Ye. O. Topology of singular foliations on surfaces and related questions. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for a degree of doctor of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.04 “Geometry and topology”. — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

Dissertation is studying one-dimensional foliations with singularities on the surfaces as well as objects generating them such as functions, dynamical systems, etc.

The main technique of exploration is constructing of combinatorial invariants such as spaces of leaves of a foliation and related objects, graphs which are the union of singular level sets of a function, etc.

Text of dissertation is composed of the introduction, 17 chapters, the conclusions, the bibliography and 8 appendices.

Let us describe in more detail the problems we study and the main results.

Let us consider one-dimensional foliations on non-compact surfaces all leaves of which are non-compact embedded submanifolds. In order to investigate foliations of this type it is useful to get in a sense their “canonical form” convenient to work with. For the certain subclass of foliations from this class the role of “canonical representatives” is fit by the *striped surfaces*.

Consider a family of stripes $\mathbb{R} \times (0, 1)$ with opened intervals adjoined to their boundaries. Let Z be a non-compact two-dimensional manifold obtained by glueing of stripes along their boundary intervals. Each stripe has a foliation into parallel lines $\mathbb{R} \times t$, $t \in (0, 1)$, with boundary intervals also being leaves. So we have induced foliation Δ on Z . Many foliations on surfaces all leaves of which are homeomorphic to a real line have this “striped” structure. This was discovered by W. Kaplan (1940-41) for the class of foliations on the plane \mathbb{R}^2 onto level sets of pseudo-harmonic functions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ without singularities.

We study homotopic type of the group $\mathcal{H}(\Delta)$ of foliated homeomorphisms of Z (homeomorphisms which send leaves of Δ onto leaves) and prove that with the

exception of two cases the component of linear connectivity of the unit $\mathcal{H}_0(\Delta)$ of $\mathcal{H}(\Delta)$ is contractible (Chapter 6).

Let X be a non-compact connected 2-manifold endowed with a one-dimensional foliation Δ every leave of which is homeomorphic to \mathbb{R}^1 and has a trivially layered saturated neighbourhood. A leaf ω of Δ is called *special* if the space of leaves X/Δ is not Hausdorff in the point ω . We prove that X is foliated homeomorphic to a striped surface if additionally the family $\text{Spec}(\Delta)$ of all special leaves of Δ is locally finite (Chapter 7).

Consider more general case when every leaf of a one-dimensional foliation Δ on X is homeomorphic to \mathbb{R}^1 and is a closed subset of X . In this situation the set $\text{Spec}(\Delta)$ does not determine a class of foliations Δ such that X is foliated homeomorphic to a striped surface. A leaf ω of a partition Δ is called *singular* if it corresponds to a point of the space X/Δ with the following property: there does not exist an open neighbourhood V of this point such that the pair (\overline{V}, V) were homeomorphic to a pair (\overline{J}, J) for some open subset J of $[0, 1)$. The following characterization of striped surfaces is obtained: X is foliated homeomorphic to some striped surface if and only if the family $\text{Sing}(\Delta)$ of all *singular* leaves is locally finite (Chapter 8).

The Kronrod–Reeb space $\Gamma_{K-R}(f)$ of a continuous function f is a quotient space points of which are components of linear connectivity of level sets of f . It is known that the Kronrod–Reeb space of a smooth function f with isolated singularities on a compact surface is a topological graph (called a Kronrod–Reeb graph). In the case of non-compact surfaces this space does not have such good properties (for instance it can be non-Hausdorff).

We consider continuous functions on non-compact surfaces such that their level sets locally have the same topological structure as level sets of smooth functions with isolated singularities. We give the sufficient conditions under which the Kronrod–Reeb space of such function is a topological *graph with stalks* (i.e. locally-finite topological graph from which some subset of the set of terminal vertices is removed). We prove that in the case when the surface coincides with the plane \mathbb{R}^2 these conditions are also necessary (Chapter 3).

A *pseudo-harmonic function* on a surface is a continuous function such that

it is locally topologically equivalent to $\operatorname{Re} z^n$ at each point, where $n \in \mathbb{N}$ depends on the point.

We examine pseudo-harmonic functions in general position on the plane (each level set of a function from this class contains no more than one singular point) which have finitely many singular points (in these points a function is topologically equivalent to $\operatorname{Re} z^n$, $n > 1$) and additionally meet certain conditions \mathfrak{J} to ensure that $\Gamma_{K-R}(f)$ of such a function f is a graph with stalks. On the basis of the Kronrod–Reeb space we build the complete topological invariant distinguishing such functions. (Chapter 4).

It is known that all components of linear connectivity of level sets of a pseudo-harmonic function are locally-finite topological graphs. These graphs are non-trivial only for components that contain singular points. If the number of such components is relatively small (they form a finite or locally-finite family), then their union forms a topological invariant of a pseudo-harmonic function. If we add to such a graph information about the relative location of its components on a surface, which is also topologically invariant, then there is a chance to obtain a complete topological invariant that distinguishes pseudo-harmonic functions that meet some additional requirements. Therefore, constructing and exploring invariants of this type is significant for the study of pseudo-harmonic functions.

A component of linear connectivity of a pseudo-harmonic function on the plane could not have cycles, so it will be a tree. We consider the question of which particular trees can represent components of the pseudo-harmonic function level set, as well as the broader question of which tree combinations may represent level sets of pseudo-harmonic functions. We define notion of the *plain map* of a locally-finite tree into the plane. Also we define the plain map of a finite forest which consists of such trees into the plane. We prove that an arbitrary image of a finite forest under a plain map is a level set of a pseudo-harmonic function (Chapter 2).

We consider the class of continuous functions f on a closed 2-disk D^2 such that they are pseudo-harmonic in $\operatorname{Int} D^2$ and restriction of f on ∂D^2 has only finitely many extremums. For such functions, a complete topological invariant is known which is called the *combinatorial diagram* $P(f)$. It is a topological graph which

consists of the boundary circle ∂D and of those components of linear connectivity of level sets of f that are not homeomorphic to the interval. Moreover, the combinatorial diagram has a certain additional structure. We prove for such graphs the theorem of realization as a combinatorial diagram of some function from the class specified above (Chapter 5).

A continuous function on a two-dimensional manifold M^2 which has a discrete set of local extrema and is pseudo-harmonic on a complement to this set generates by definition one-dimensional foliation with singularities on M^2 . We consider the question of how to extend the class of functions so that the components of the level sets of a function yet induce one-dimensional foliation with singularities.

We propose the definitions of the regular and saddle points of a continuous function on a surface, which are weaker analogues of the determinations of a regular and singular point of a pseudo-harmonic function. We construct an example of a continuous function on the closed 2-disk such that it is constant on the boundary, has exactly two non-rigid local extrema inside the disk and do not have saddle points (Chapter 9).

F-functions first considered by J. Fox are one of the generalizations of pseudo-harmonic functions. We construct a counter-example to the hypothesis of J. Fox which states that an F-function f is always constant on the components of connectivity of the closure of the set of its S-separated points (Chapter 10).

A pair of continuous functions on a surface is called *conjugate pseudo-harmonic functions* if there exists a local topological equivalence at every point of the surface that matches them to a pair of conjugate harmonic functions. We present necessary and sufficient conditions for the continuous function on the surface to be conjugate to a given pseudo-harmonic function (Chapter 11).

Let G be a domain in \mathbb{R}^n , $x_0 \in G$, $F \in C^n(G)$. A point $y \in G$ is called a *quasi-isolated point* of F if $\{y\}$ is a component of the connectivity of the set $F^{-1}(F(y))$. We prove that the necessary and sufficient condition for x_0 to be a quasi-isolated point of F is the existence of a sequence of nested hypersurfaces bounding x_0 which converges to x_0 and consists of the components of linear connectivity of regular level sets of F (Chapter 12).

In order for a partition of n -dimensional manifold onto k -dimensional subsets

to induce a k -dimensional foliation it is obviously necessary that each element of the partition be locally similar to \mathbb{R}^k . In the case of 1-dimensional partition of 2-manifold the answer to this question is given by theorems related to the theorem converse to the Jordan's curve theorem. In the case of larger dimensions at first it is necessary to determine if, at all, it is possible to include each point of the partition element in the k -dimensional disk contained in this element of the partition.

We generalise the theorem converse to Jordan's curve theorem (Chapter 13).

For $X \subset \mathbb{R}^n$ the equality $\dim X = n$ holds if and only if X has a nonempty interior in \mathbb{R}^n , that is contains a n -dimensional disk. The analogue of this statement is not true for k -dimensional subsets of \mathbb{R}^n ($k < n$). L. S. Pontryagin constructed the pair of compact subsets of \mathbb{R}^n such that the dimension of their Cartesian product is less than the sum of their dimensions. This example implies the existence of a k -dimensional compact subset of \mathbb{R}^n such that it does not contain a subset homeomorphic to the k -disk.

We construct the partition of the universal Menger space M_k^n into two disjoint subsets C_k^n and F_k^n . It is proved that the sufficient condition for a k -dimensional compact set $X \subset \mathbb{R}^n$ to contain a k -dimensional disk is the existence of an embedding $f : X \rightarrow M_k^n$ such that the dimension of the set $F(X) \cap C_k^n$ is k (Chapter 14).

In the study of flows on surfaces, it is necessary to associate with them dynamical systems (d. s.) with discrete time (for example, by means of a first return map on a certain local transversal). There may be a situation where two different d. s. with discrete time generate continuous superstructures that are orbital equivalent to the same subsystem of the initial flow. In this connection, it is useful to find invariants of d. s. with discrete time, which depend only on the class of orbital equivalence of a continuous superstructure of such a system. In particular, it is useful to find invariant subsets that are iteratively stable (do not change their properties in the transition from the mapping that generates a d. s. to its iteration).

We prove that the Birkhoff centers of the d. s. (X, g) and (X, g^n) coincide for any homeomorphism $g : X \rightarrow X$ of a Hausdorff topological space X and $n \geq 2$

(Chapter 15).

Another invariant of d. s. with a discrete time that depends on the class of orbital equivalence of its continuous superstructure is the relation between periods of close periodic orbits. We have found conditions for the ratio of periods under which the phase space of a continuous superstructure over d. s. with discrete time on the Cantor set can not be embedded in a two-dimensional manifold (respectively, in a orientable two-dimensional manifold) (Chapter 16).

Assume that a d. s. (X, f) with discrete time admits non-trivial projections onto odometers. The question arises whether it is possible to define for it an analog of periodical structure and to investigate with its help onto which odometers can be projected d. s. (X, f) , as well as to indicate how the various projections of this d. s. on odometers are interconnected.

For invertible d. s. (X, f) with the Hausdorff compact phase space X we define and investigate periodic partitions of the space X . Also we build the topological invariant $\mathcal{P}(X, f) \subset \mathbb{N}$, the set of powers of all periodic partitions of the space X . We specify how to find all odometers on which this d. s. can be projected. We consider a category whose objects are projections of (X, f) on odometers. We give a description of the skeleton of this category in the case of indecomposable (X, f) , i. e. when the space X can not be presented as a disjoint union of two proper closed invariant subsets of (X, f) (Chapter 17).

Keywords:

Surface, foliation with singularities, space of leaves, model stripe, homeotopy group, pseudo-harmonic function, Kronrod-Reeb graph, graph with stalks, topological invariant, dimension, dynamical system, Birkhoff center, minimal set, odometer.

Список публікацій здобувача

- [1] И. Ю. Власенко, С. И. Максименко и Е. А. Полулях, *Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий*, сер. Труды Института математики НАН Украины. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006, т. 61, 363 с.
- [2] E. Polulyakh and I. Yurchuk, *On the Pseudo-harmonic Functions Defined On a Disk*, ser. Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos. Kyiv: Inst. Mat. NAN Ukr., 2009, vol. 80, 151 pp.
- [3] Е. А. Полулях, «О вложении тотальных пространств расслоений над окружностью со слоем множество Кантора в двумерные многообразия», *Матем. физ., анал., геом.*, т. 7, № 1, с. 66—90, 2000.
- [4] E. Polulyakh, “On the theorem converse to Jordan’s curve theorem”, *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 6, no. 4, pp. 56–69, 2000.
- [5] S. I. Maksimenko, M. A. Pankov, and E. A. Polulyakh, “Representations of compact subsets of \mathbb{R}^n ”, *Topology Appl.*, vol. 119, no. 1, pp. 33–39, 2002.
- [6] Е. А. Полулях, «О проекциях на одометры динамических систем с компактным фазовым пространством», *Збірник праць Інституту математики НАН України*, т. 3, № 3, с. 309—422, 2006, *Проблеми топології та суміжні питання*.
- [7] I. Y. Vlasenko та Е. А. Polulyakh, «On iteration stability of the Birkhoff center with respect to power 2», *Укр. мат. журн.*, т. 58, № 5, с. 705—707, 2006.
- [8] Є. О. Полулях, «Про сідлові точки неперервних функцій», *Мат. студії*, т. 31, № 2, с. 172—182, 2009.
- [9] Е. О. Polulyakh, «On conjugate pseudo-harmonic functions», *Збірник праць Інституту математики НАН України*, т. 6, № 2, с. 505—517, 2009, *Геометрія, топологія та їх застосування*.

- [10] Е. А. Полулях, «О поведении F-функций на замыкании множества своих S-отделенных точек», *Збірник праць Інституту математики НАН України*, т. 7, № 4, с. 153—168, 2010, *Геометрія та топологія функцій на многовидах*.
- [11] Є. О. Полулях, «Про множини рівня псевдогармонічної функції на площині», *Доповіді НАНУ*, № 1, с. 22—26, 2014.
- [12] —, «Дерева як множини рівня псевдогармонічних функцій на площині», *Укр. мат. журн.*, т. 65, № 7, с. 974—995, 2013.
- [13] —, «Дерева як множини рівня псевдогармонічних функцій на площині. II», *Укр. мат. журн.*, т. 68, № 2, с. 254—270, 2016.
- [14] Е. А. Полулях, «Графы Кронрода – Роба функций на некомпактных двумерных поверхностях. I», *Укр. мат. журн.*, т. 67, № 3, с. 375—396, 2015.
- [15] —, «Графы Кронрода – Роба функций на некомпактных двумерных поверхностях. II», *Укр. мат. журн.*, т. 67, № 10, с. 1398—1408, 2015.
- [16] E. Polulyakh, V. Sharko, and I. Vlasenko, “Discretization of second Lyapunov method”, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 157–180, 2016.
- [17] В. В. Шарко, Є. О. Полулях та Ю. Ю. Сорока, «Про топологічну еквівалентність псевдогармонічних функцій загального положення на площині», *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, т. 12, № 6, с. 7—47, 2015, *Топологія відображень маловимірних многовидів*.
- [18] S. Maksymenko and E. Polulyakh, “Foliations with non-compact leaves on surfaces”, *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 8, no. 3–4, pp. 17–30, 2015. eprint: [1512.07809](https://arxiv.org/abs/1512.07809).
- [19] —, “Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces”, *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 22, no. 3, pp. 266–282, 2016.

- [20] S. Maksymenko, E. Polulyakh, and Y. Soroka, “Homeotopy groups of one-dimensional foliations on surfaces”, *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 10, no. 1, pp. 22–46, 2017.
- [21] S. Maksymenko and E. Polulyakh, “Characterization of striped surfaces”, *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 10, no. 2, pp. 24–38, 2017.
- [22] Е. А. Полулях, «Об одном топологическом инварианте динамических систем на множестве Кантора», в *Тези доповідей 4-ої міжнародної конференції з геометрії і топології*, (м. Черкаси), 2001, с. 85.
- [23] Є. Полулях та І. Юрчук, «Псевдогармонічні функції в одиничному крузі», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія в Одесі – 2008”*, (м. Одеса), 2008, с. 57.
- [24] E. Polulyakh, «One note on level sets of pseudo-harmonic functions in the plane», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія в Одесі – 2013”*, (м. Одеса), 2013, с. 108.
- [25] —, «Kronrod–Reeb graphs of functions on non-compact 2-manifolds», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія в Одесі – 2015”*, (м. Одеса), 2015, с. 57.
- [26] Y. O. Polulyakh та Y. Y. Soroka, «Topological equivalence of pseudo-harmonic functions of general position in the plane», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія і топологія в Одесі – 2016”*, (м. Одеса), 2016, с. 28.
- [27] Y. Polulyakh, «Regular continuous functions on a closed 2-disk», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Infinite dimensional analysis and topology”*, (м. Івано-Франківськ), 2009, с. 119–120.
- [28] I. Yurchuck та Y. Polulyakh, «Topological equivalence of the pseudoharmonic functions defined on the D^2 », в *Тези доповідей міжнародної конференції “Analysis & Topology”*, (м. Львів), 2008, с. 72–75.

- [29] Е. Полулях, «О седловых точках непрерывных функций на замкнутом двумерном диске», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Боголюбівські читання” присвяченої 90-річчю з дня народження Ю. О. Митропольського*, (м. Київ), 2007, с. 87–88.
- [30] Е. Polulyakh, «One note on level sets of pseudo-harmonic functions in the plane», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Боголюбівські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка*, (м. Севастополь), 2013, с. 211.
- [31] Y. A. Polulyakh, «Regular continuous functions on a closed 2-disk», в *Тезисы докладов международной конференции “Геометрия «в целом», топология и их приложения”*, посвященной 90-летию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова, (г. Харьков), 2009, с. 67.
- [32] Е. Polulyakh, V. Sharko та I. Vlasenko, «Stability in the sense of Lyapunov», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Динамічні системи та їх застосування”*, (м. Київ), 2012, с. 32.
- [33] S. Maksymenko and E. Polulyakh, “Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces”, in *Book of abstracts of international conference “Modern Advances in Geometry and Topology” in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday*, (Kharkiv), 2016, pp. 31–32.

Зміст

Перелік умовних позначень	27
Вступ	29
Актуальність теми	29
Структура дисертаційної роботи та опис результатів	34
Особистий внесок здобувача	56
Апробація результатів дисертації	56
Публікації	57
Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами	58
Подяки	58
Розділ 1. Попередні відомості	59
1.1 Псевдогармонічні функції	59
1.2 Фундаментальні покриття і неперервність	60
1.3 Локальна зв'язність областей у точках межі	61
1.4 Означення й елементарні властивості розмірності	61
1.4.6 Множина Менгера	62
1.5 Фактор-простори і фактор-відображення.	63
1.6 Графи	67
1.7 Шарування з особливостями	70
1.8 Динамічні системи.	71
1.8.1 Множина неблукаючих точок	71
1.8.11 Центр Біркгофа динамічної системи.	73
1.8.16 Категорія динамічних систем з дискретним часом	76

1.8.24	Неперервні надбудови	78
Розділ 2. Древа як множини рівня псевдо-гармонічних функцій на площині		
		80
2.1	Означення і формулювання результатів.	80
2.2	Властивості плоских відображень дерев.	82
2.2.1	Образ дерева під дією плоского відображення.	82
2.2.4	Компоненти доповнення площини до образу дерева при плоскому відображенні.	84
2.2.9	Відношення сусідства на множині компонент зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_{ter})$. Відображення Sign.	85
2.3	Властивості плоских відображень скінченного лісу	88
2.3.1	Дводольні графи, які є деревами	88
2.3.5	Властивості компонент доповнення до образу скінченного лісу при плоскому відображенні	89
2.3.9	Граф $G(\Psi)$	91
2.3.14	Відображення Sign для скінченного лісу	92
2.4	Доведення Теорема 2.1.6	93
2.4.3	Деякі технічні результати	94
2.4.7	Побудова функції f	96
Розділ 3. Графи Кронрода–Ріба функцій на некомпактних двовимірних поверхнях		
		100
3.1	Означення і формулювання результатів	100
3.1.9	Гладкі функції з ізольованими критичними точками.	105
3.2	Властивості К-Р-простих функцій	106
3.2.1	Межові множини неперервних кривих	106
3.2.4	Властивості регулярних шарів \mathfrak{F}_0 і регулярних елементів розбиття \mathfrak{F}	108
3.2.9	Насичені околиці елементів розбиття \mathfrak{F}	108
3.2.13	Компоненти доповнення $M^2 \setminus K$ та їх проекції під дією π_f	110
3.2.18	Замикання компонент доповнення $M^2 \setminus K$ і їх проекції під дією π_f	111

3.2.23	Доведення Теорема 3.1.6	114
3.3	Необхідні умови щоб простір Кронрода-Ріба був графом з черенками.	117
3.3.1	Доведення Твердження 3.1.7.	117
3.3.2	Функції на площині \mathbb{R}^2	118
Розділ 4. Про топологічну еквівалентність псевдогармонічних функцій загального положення на площині		126
4.1	Умови \mathfrak{I} і функції загального положення	126
4.2	Простір Кронрода-Ріба функції f	127
4.3	Орієнтація ребер графа Кронрода-Ріба і відношення порядку на його вершинах, індуковані f	128
4.4	Означення циклу	129
4.5	Спін	130
4.6	Властивості спіна.	131
4.7	Навантажені графи Кронрода-Ріба	133
4.8	Основна теорема.	136
Розділ 5. Псевдогармонічні функції на замкненому диску		137
5.1	Означення регулярних і сингулярних точок	137
5.2	Властивості дерев, вкладених у двовимірний диск	139
5.3	Топологічний інваріант для псевдогармонічної функції на диску	140
5.4	Умови на топологічну еквівалентність	146
5.5	Критерій \mathcal{D} -планарності дерева	146
5.6	Умови на граф	149
5.7	Теорема реалізації	152
Розділ 6. Смугасті поверхні		154
6.1	Означення смугастої поверхні	154
6.2	Канонічне шарування на смугастій поверхні	157
6.3	Група гомеоморфізмів, які зберігають шарування Δ_Z	161

Розділ 7. Шарування на некомпактних поверхнях, всі листи яких некомпактні.	164
7.1 Вступ	164
7.2 Спеціальні точки просторів, що не є Хаусдорфовими	171
7.3 Розбиття і фактор-простори	173
7.4 Доведення твердження (1) Теорема 7.1.5	179
7.5 Трапеції	179
7.6 Доведення твердження (2) Теорема 7.1.5	182
Розділ 8. Характеризація смугастих поверхонь	187
8.1 Вступ	187
8.2 Попередні відомості	189
8.3 Розрізання поверхні з шаруванням вздовж ізольованих листів	197
8.4 Основні результати	200
8.5 Доведення Теорема 8.4.2	203
Розділ 9. Про сідлові точки неперервних функцій на замкнутому двовимірному диску	206
9.1 Вступ.	206
9.2 Побудова функції без сідлових точок	208
9.2.1 Функція g з двома локальними максимумами і однією сідловою точкою.	209
9.2.4 Відображення $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$	214
9.2.5 Функція $\hat{f} = g \circ \hat{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ не має сідлових точок.	221
9.2.6 Функція f на крузі з двома локальними екстремумами і без сідлових точок.	223
9.3 Прикінцеві зауваження.	224
Розділ 10. Про поведінку F-функцій на замиканні множини своїх S-відділених точок	226
10.1 Вступ	226
10.2 Означення й позначення	227
10.3 Побудова F-функції, що відповідає Теоремі 10.1.3	228

Розділ 11. Про спряжені псевдогармонічні функції	239
Розділ 12. Квазі-ізольовані точки гладких функцій в \mathbb{R}^n	243
12.1 Послідовності вкладених гіперповерхонь	243
12.2 Існування послідовностей вкладених гіперповерхонь	245
12.3 Доведення Теорема 12.2.1.	247
12.3.1 Замкнені гіперповерхні у \mathbb{R}^n	247
12.3.8 Доведення Теорема 12.2.1	254
Розділ 13. Про теорему, обернену до теореми Жордана про криву	259
13.1 Перерізи компонент зв'язності доповнення до простих підмножин площини.	259
13.2 d -множини і теорема, обернена до теореми Жордана про криву.	269
13.3 Досяжність точок простої підмножини площини з компоненти зв'язності доповнення до неї.	275
13.4 Прикінцеві зауваження	277
Розділ 14. Представлення компактних підмножин \mathbb{R}^n	280
14.1 Структура множини M_k^n	280
14.2 k -вимірні компактні підмножини \mathbb{R}^n , які містять множину, гомеоморфну I^k , та їх представлення	284
Розділ 15. Ітераційна стійкість центра Біркгофа динамічної системи	286
15.1 Неблукуючі множини і ітерації гомеоморфізмів	286
15.2 Ітераційна стійкість центра Біркгофа	291
Розділ 16. Про вкладення фазових просторів динамічних систем Понтрягіна у двовимірні поверхні	295
16.1 Деякі властивості розшарувань Понтрягіна	295
16.2 Основний результат	301

Розділ 17. Про проєкції на одометри динамічних систем з компактним фазовим простором	308
17.1 Періодичні розбиття.	308
17.1.1 Означення періодичного розбиття.	308
17.1.6 Основні властивості періодичних розбиттів.	309
17.1.22 Правильні послідовності періодичних розбиттів.	312
17.1.28 Періодичні розбиття і рекурентні точки динамічної системи.	314
17.2 Супернатуральні числа і підмножини множини натуральних чисел.	315
17.2.1 Супернатуральні числа.	315
17.2.6 Допустимі підмножини множини натуральних чисел.	317
17.3 Розширення одометрів і періодичні розбиття.	319
17.3.1 Означення одометра.	319
17.3.6 Правильні послідовності періодичних розбиттів і асоційовані з ними розбиття фазового простору динамічної системи.	321
17.3.13 Основні властивості одометрів	325
17.3.24 Одна категорна конструкція.	327
17.3.29 Основні властивості одометрів (продовження).	328
17.3.38 Розширення одометрів. Загальний випадок.	330
17.3.50 Розширення одометрів. Нерозкладні динамічні системи.	334
Висновки	337
Список цитованої літератури	340
Додаток А. Доведення окремих тверджень Розділу 2	352
А.1 Доведення Лемми 2.2.3	352
А.2 Доведення Твердження 2.2.6	357
А.3 Доведення Лемми 2.2.7	360
А.4 Доведення Твердження 2.2.12	364
А.5 Доведення Твердження 2.3.4	368

A.6	Доведення Твердження 2.3.6	370
A.7	Доведення Леми 2.3.10	373
A.8	Доведення Леми 2.4.4	376
A.9	Доведення Твердження 2.4.5	379
A.10	Доведення Твердження 2.4.8	381
Додаток Б. Доведення окремих тверджень Розділу 3		383
B.1	Доведення Леми 3.2.5	383
B.2	Доведення Твердження 3.2.8	384
B.3	Доведення Твердження 3.2.11	386
B.4	Доведення Твердження 3.2.15	388
B.5	Доведення Леми 3.2.16	390
B.6	Доведення Леми 3.2.19	394
B.7	Доведення Теорема 3.2.21	398
Додаток В. Приклад до Розділу 3		401
Додаток Г. Доведення окремих тверджень Розділу 4.		407
G.1	Доведення Твердження 4.6.1	407
G.2	Доведення Твердження 4.6.3	409
G.3	Доведення Наслідку 4.6.5	411
G.4	Доведення Теорема 4.8.1	412
Додаток Д. Приклади до розділу 4		432
Додаток Е. Доведення окремих тверджень Розділу 6		437
E.1	Доведення Леми 6.1.8	437
E.2	Доведення Теорема 6.2.7	443
E.3	Доведення Леми 6.3.3	446
E.4	Доведення Теорема 6.3.4	448
Додаток Ж. Доведення окремих тверджень Розділу 7		450
J.1	Доведення Наслідку 7.1.6	450
J.2	Доведення Леми 7.2.4	454

Ж.3 Доведення Леми 7.3.1	455
Ж.4 Доведення Твердження 7.5.2	457
Ж.5 Доведення Леми 7.6.1	460
Додаток И. Доведення Леми 11.1.5	462

Перелік умовних позначень

\mathbb{N}	множина натуральних чисел
\mathbb{Z}	множина цілих чисел
\mathbb{R}	множина дійсних чисел
\mathbb{C}	множина комплексних чисел
Re, Im	дійсна і уявна частини комплексного числа
\bar{A}	замикання множини A
Fr A	межа множини A
Int A	внутрішність множини A
\emptyset	порожня множина
$ A $	потужність множини A
Id	тотожне відображення
Orb	орбіта точки динамічної системи
Fix	множина нерухомих точок динамічної системи
Per	множина періодичних точок динамічної системи
PS	множина точок динамічної системи, стійких за Пуассоном
Lim	множина граничних точок динамічної системи

Ω	множина неблукаючих точок динамічної системи
BC	центр Біркгофа динамічної системи
нск	найменше спільне кратне
нсд	найбільший спільний дільник
$\overleftarrow{\lim}$	проективна границя
$\text{Ob } \mathcal{K}$	об'єкти категорії \mathcal{K}
$\text{Mor } \mathcal{K}$	морфізми категорії \mathcal{K}

Вступ

Актуальність теми

Шарування з особливостями відіграють значну роль принаймні у двох різних розділах математики: в **диференціальній топології** та в **теорії динамічних систем**.

Гладкі функції на многовидах породжують шарування ковимірності 1. Дійсно, розглянемо гладку функцію f на многовиді M^n , яка ні в якій точці не є локально постійною. Нехай Σ — множина критичних точок f на M^n .

З Теореми про ранг (див. [1]) слідує, що для кожної регулярної точки f існує дифеоморфізм деякого околу U_x точки x на окіл початку координат в \mathbb{R}^n , який відображає компоненти перетинів множин рівня f з U_x у множини рівня координатної проєкції $\text{pr}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{pr}_n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_n$. Отже розбиття Δ_0 множини $M^2 \setminus \Sigma$ на компоненти зв'язності множин рівня f є $(n - 1)$ -вимірним шаруванням на $M^2 \setminus \Sigma$. Тому розбиття простору M^2 на компоненти зв'язності множин рівня f є шаруванням з особливостями на M^n з множиною особливостей Σ .

Маючи таке шарування, можна побудувати простір його шарів $\Gamma_{K-R}(f)$ (інша назва — *простір Кронрода-Ріба*), тобто фактор-простір M^n/Δ з індукованою топологією.

Виявляється, що для гладких функцій з ізольованими особливостями на замкнених многовидах простір $\Gamma_{K-R}(f)$ має природну структуру одновимірного CW -комплексу (тобто топологічного графу). Цей об'єкт називається *графом Кронрода-Ріба* і є досить популярним інструментом дослідження фун-

кцій із вказаного класу.

В той-же час про будову простору $\Gamma_{K-R}(f)$ функції f на некомпактному многовиді мало що відомо. Існують приклади гладких функцій на площині, що не мають особливостей, і простори Кронрода-Ріба яких навіть не є Хаусдорфовими (див [2], а також розділи 3, 6 і 7).

Іншим природним джерелом шарувань з особливостями є гладкі **потоки** (динамічні системи з неперервним часом). Гладким потоком на многовиді M^n називається гладке відображення $\Phi : M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M^n$, яке відповідає наступним умовам:

1. $\Phi(x, 0) = x$ для кожного $x \in M^n$;
2. $\Phi(\Phi(x, t), \tau) = \Phi(x, t + \tau)$ для всіх $x \in M^n$ і $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Орбітою точки $x \in M^n$ називається множина $\text{Orb}(x) = \{\Phi(x, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, всі орбіти потоку є лінійно зв'язними множинами. *Нерухомою точкою* Φ називається точка, що збігається зі своєю орбітою. Позначимо множину всіх нерухомих точок через Σ .

Нехай Δ — розбиття M^n на орбіти потоку Φ . Згідно з Теоремою про трубку току (див. [3]) для кожної точки $x \in M^n$, яка не є нерухомою, існують її відкритий окіл U_x , відкрита підмножина $V_x \subset \mathbb{R}^{n-1}$ і гомеоморфізм $\phi_x : U_x \rightarrow (-1, 1) \times V_x$, такі що $\Phi(y, t) \in U_x$ для кожного $y \in \phi_x^{-1}(\{0\} \times V_x)$ і $t \in (-1, 1)$, а також виконується співвідношення $\phi_x \circ \Phi(y, t) = (t, \phi_x(y))$. Внаслідок цього розбиття простору M^n на орбіти потоку Φ утворює одновимірне шарування з особливостями на M^n , множиною особливостей якого є Σ .

Шарування, що породжені функціями і шарування, породжені потоками, тісно зв'язані між собою.

Маючи гладку функцію $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, можемо побудувати її потік градієнта, який складається з інтегральних орбіт векторного поля $\text{grad } f$. Для функцій Морса узагальненням потоку градієнта є так звані *градієнтно-подібні потоки* (такі потоки, що у кожній точці похідна функції f вздовж орбіти потоку додатна і кожна критична точка f має окіл, у якому потік спряжений з потоком градієнту функції виду $\sum_{i=1}^k x_i^2 - \sum_{i=k+1}^n x_i^2$ в околі початку координат), див. [4]–[6].

При дослідженні стійкості потоку в околі ізольованої нерухомої точки розглядається у якомусь розумінні протилежна ситуація. Відомо, що достатньою умовою стійкості потоку в ізольованій нерухомій точці x_0 є існування функції Ляпунова f в деякому околі цієї точки (такої функції, що має в x_0 локальний мінімум і похідна якої вздовж орбіт потоку є від'ємною в проколотому околі точки x_0).

Неформально цю умову можна пояснити наступним чином.

- Для значень $g(x) = c$, що є близькими до $g(x_0)$, існують компоненти множин рівня $g^{-1}(c)$, що обмежують околи точки x_0 , які стискаються до x_0 , коли $c \rightarrow g(x_0)$.
- Для кожної точки x , що є досить близькою до x_0 , додатня напіворбіта $\text{Orb}_+(x)$ лежить у околі точки x_0 , межею якого є відповідна компонента множини рівня $g^{-1}(g(x))$.

У роботі [7] було доведено, що для стійкості потоку Φ за Ляпуновим у точці x_0 досить, щоб знайшлась зліченна база околів x_0 , обмежених гладкими гіперповерхнями (підмноговидами розмірності $n - 1$) $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, для яких виконується наступна умова: для всіх $x \in H_i$, $i \in \mathbb{N}$, скалярний добуток зовнішньої нормалі до поверхні H_i у точці x і вектору швидкості руху вздовж орбіти потоку Φ у точці x є недодатним числом.

З питанням існування такого набору гіперповерхонь тісно пов'язана наступна задача. Нехай $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція і x_0 — її критична точка (не обов'язково ізольована). При яких умовах на g існує зліченна база околів точки x_0 , обмежених гладкими гіперповерхнями $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, які є компонентами зв'язності множин рівня g ? Цю задачу розв'язано у розділі 12.

Дуже цікавою є розмірність $n = 2$, коли і функції і потоки породжують одновимірні шарування з особливостями. У цій ситуації можна уявити собі пару функцій, таку що потік градієнта однієї функції породжує всюди крім множини нерухомих точок шарування, яке збігається з шаруванням на компоненти зв'язності множин рівня іншої функції на множині її регулярних точок. Приклади таких функцій відомі. Зокрема цю властивість мають пари спряжених гармонічних функцій.

Топологічним аналогом гармонічних функцій на двовимірних многовидах є *псевдогармонічні функції* (функції, що в кожній точці локально топологічно еквівалентні гармонічним функціям). Дві псевдогармонічні функції називаються *спряженими*, якщо в кожній точці ця пара функцій локально топологічно еквівалентна парі спряжених гармонічних функцій.

Важливість псевдогармонічних функцій підкреслюють наступні міркування.

- Згідно *Теоремі про ранг* у околі кожної регулярної точки функція класу гладкості C^p , $p \geq 1$, гладко еквівалентна до $\operatorname{Re} z$ (те-ж саме, що й координатна проекція).

- Відомо (див. **Теорему 3.1.10**), що для кожної ізольованої критичної точки x_0 (окрім локальних екстремумів) функції $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ існує окіл, у якому функція топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$.

Отже, кожна функція $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$, всі критичні точки якої ізольовані, є псевдогармонічною у кожній точці крім локальних екстремумів. Внаслідок цього, вивчаючи властивості псевдогармонічних функцій, ми фактично вивчаємо топологічні властивості гладких функцій з ізольованими особливостями на двовимірних многовидах.

У свій час псевдогармонічні функції активно досліджували W. Kaplan, M. Mors, J. Jenkins та інші, див. [8]–[20].

W. Boothby, [13], та M. Mors і J. Jenkins, [21], незалежно довели, що на площині кожна псевдогармонічна функція має спряжену псевдогармонічну функцію.

Приблизно в цей-же час Y. Tôki, [14], сформулював і довів критерій того, що функція на поверхні є псевдогармонічною в термінах властивостей розбиття поверхні на її множини рівня.

У тій-же роботі Y. Tôki невдало намагався довести теорему про існування спряженої псевдогармонічної функції для довільної псевдогармонічної функції на поверхні. Перешкода для цього розглянута у розділі 11.

Питання про існування спряженої псевдогармонічної функції важливе з наступних причин. Нехай $u, v : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — пара спряжених псевдогармонічних функцій. Тоді відображення $\Psi = u + iv : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$ — *внутрішнє* і за

Теоремою Стоїлова (див. [22]) на M^2 існує комплексна структура, відносно якої відображення Ψ є голоморфним (а u та v — спряжені гармонічні функції).

У свій час W. Fox розглянув узагальнення псевдогармонічних функцій (Peano-interior functions), послабивши топологічні умови на множини рівня, які належать Y. Токі, див. [23], [24]. Ми називаємо клас функцій, які розглядав W. Fox, F-функціями. Також він намагався розширити клас функцій, розглядаючи функції на поверхнях з краєм.

W. Fox довів теорему про промені, яка показує подібність F-функцій до гармонічних функцій і стверджує наступне. *Кожна множина рівня такої функції f локально складається з парної кількості променів, які перетинаються у єдиній точці x і ділять маленький диск, що є її оточенням, на сектори. Кожен промінь межуює з двома секторами, на одному з яких функція приймає значення, більші за $f(x)$, на іншому — менші за $f(x)$.*

Наслідком з цієї теореми є наступне твердження. *Неперервне відображення $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ на двовимірному многовиді без краю є F-функцією тоді й лише тоді, коли кожна компонента кожної множини рівня f є локально-скінченним топологічним графом.* Це дозволяє говорити про порядок $\text{ord}_f x$ функції f у точці x (порядок дорівнює кількості променів у точці x , поділених навпіл).

Але на відміну від псевдогармонічних функцій F-функція f не обов'язково породжує шарування з дискретною множиною особливостей на M^2 .

Справа у тому, що якщо у деякому оточенні точки x можна задати листову карту відносно розбиття на компоненти зв'язності множин рівня f , то f відповідає умовам Y. Токі у цій точці, а також $\text{ord}_f x = 1$. Якщо в оточенні кожної точки x з $\text{ord}_f x = 1$ можна задати листову карту, то з умов Y. Токі слідує, що f — псевдогармонічна.

Отже, якщо F-функція f не є псевдогармонічною, то існує $x \in M^2$ з $\text{ord}_f x = 1$, таке що x не можна включити в листову карту відносно розбиття на множини рівня f . В типовому випадку множина таких точок є одновимірною.

З потоком Φ на поверхні M^2 можна пов'язати динамічні системи з дискретним часом.

Наприклад, маючи *локальну трансверсаль* α , або набір диз'юнктних локальних трансверсалей $\alpha = \sqcup_{i \in A} \alpha_i$, можемо означити часткове *відображення послідування* $\phi : X_+ \rightarrow X_-$, $\phi(x) = \Phi(\tau, x)$, $\tau = \min\{t > 0 \mid \Phi(t, x) \in \alpha\}$. Тут X_+ і X_- — підмножини α , що складаються з точок, додатні (відповідно, від'ємні) напіворбіти яких перетинаються з α .

Якщо $X = \bigcap_{k \geq 0} \phi^k(X_+) \neq \emptyset$ (відповідно, $X = \bigcap_{k \leq 0} \phi^k(X_-) \cap \bigcap_{k \geq 0} \phi^k(X_+) \neq \emptyset$), то обмеження $f = \phi|_X : X \rightarrow X$ визначає деяку необертовну (відповідно, обертовну) динамічну систему з дискретним часом (X, f) (а також розбиття $\{X_i = X \cap \alpha_i\}_{i \in A}$ простору X у випадку, коли $\alpha = \sqcup_{i \in A} \alpha_i$).

Зрозуміло, що підмножина $\hat{N} \subset M^2$, яка є об'єднанням всіх орбіт Φ , що перетинають X , є інваріантною підмножиною Φ . Нехай $\hat{\Phi} : \mathbb{R} \times \hat{N} \rightarrow \hat{N}$ — обмеження потоку Φ на \hat{N} . Можна перевірити, що у випадку, коли відображення f обертовне, потік $\hat{\Phi}$ орбітно еквівалентний неперервній надбудові T над f (існує гомеоморфізм $\hat{N} \rightarrow N$, який відображає орбіти $\hat{\Phi}$ на орбіти T).

Якщо $\dim X = 0$, то властивості динамічної системи (X, f) тісно пов'язані з топологічними властивостями фазового простору N неперервної надбудови T над f . Дійсно, у цьому випадку компонентами лінійної зв'язності простору N є орбіти потоку T , а потік T має ту ж саму динаміку, що й динамічна система (X, f) .

Структура дисертаційної роботи та опис результатів

Дисертація складається зі вступу, 17 розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить **122** найменування (на **12** сторінках), та восьми додатків. Повний обсяг роботи становить **469** сторінок.

Розділ 1

У цьому розділі наводяться попередні відомості, які використовуються у наступних розділах.

Розділ 2

У цьому розділі ми вивчаємо якими можуть бути множини рівня псевдогармонічної функції на площині. Відомо, що кожна компонента множини рівня псевдогармонічної функції є локально-скінченим топологічним графом. На площині додатково такий граф не може мати циклів, тобто буде деревом. (Цикл на площині обмежує область з компактним замиканням, в якій неперервна функція мусить мати локальні екстремуми, внаслідок чого функція з такою компонентою множини рівня не буде псевдогармонічною.)

Ми розглядаємо питання про те, які саме дерева можуть бути представлені як компоненти множин рівня псевдогармонічної функції, а також більш широке питання, які комбінації дерев можуть представляти множини рівня псевдогармонічної функції.

Нехай T — локально скінченне дерево, S^2 — двовимірна сфера. Зафіксуємо точку $s \in S^2$.

Назвемо (див. **Означення 2.1.2**) неперервне відображення $\Phi : T \rightarrow S^2$ *плоским*, якщо $\Phi(T) \cup \{s\}$ є замкненою підмножиною сфери, прообразом точки s є множина V_{ter} термінальних точок T , а на доповненні до цієї множини Φ є гомеоморфізмом.

Неперервне відображення $\Psi : T \setminus V_{ter} \rightarrow \mathbb{R}^2$ називається *плоским* (див. **Означення 2.1.3**), якщо існують такі плоске відображення $\Phi : T \rightarrow S^2$ і гомеоморфізм $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{s\}$, що $\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi|_{T \setminus V_{ter}}$.

Розглянемо скінченний ліс $F = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$ (диз'юнктне об'єднання скінченної кількості дерев, самі дерева можуть бути і нескінченими).

Неперервне відображення $\Psi : F \setminus V_{ter} \rightarrow \mathbb{R}^2$ називається *плоским* (див. **Означення 2.1.5**), якщо плоскими є всі обмеження Ψ на дерева, з яких складається F , і образи цих обмежень не перетинаються.

Основним результатом даного розділу є **Теорема 2.1.6**, яка стверджує

наступне. Припустимо, що порядок кожної вершини скінченного лісу F або дорівнює 1, або є парним числом більшим 2. Тоді для кожного плоского відображення $\Psi : F \setminus V_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ існує псевдогармонічна функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, така що $\Psi(F \setminus V_0) = f^{-1}(0)$.

Розділ 3

Нехай функція f є неперервною на двовимірній поверхні M^2 і відповідає наступним властивостям.

(f.a) Множина локальних екстремумів f є дискретною.

(f.б) На доповненні до множини локальних екстремумів f є псевдогармонічною функцією.

Назвемо *регулярними точками* f точки в яких f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z$. Всі інші точки M^2 назвемо *сингулярними точками* f .

Нехай \mathfrak{F} — розбиття поверхні на компоненти множин рівня f , $\Gamma_{K-R}(f)$ — відповідний простір Кронрода–Ріба (фактор-простір M^2/\mathfrak{F}).

Ми пропонуємо наступні умови, при виконанні яких простір $\Gamma_{K-R}(f)$ має просту будову.

(f.1) Кожна компонента множини рівня f може містити не більш ніж скінченну кількість сингулярних точок.

(f.2) Нехай K є об'єднанням всіх компонент множин рівня f , що містять сингулярні точки. Для довільного компакта $C \subset M^2$ множина $f(C \cap K)$ скінченна.

(f.3) Нехай для $a \in f(M^2)$ точки $x_1, x_2 \in M^2$ належать до різних компонент множини рівня $f^{-1}(a)$. Тоді знайдуться відкриті околиці $U_1 \ni x_1$ і $U_2 \ni x_2$, що не перетинаються і є насиченими відносно розбиття \mathfrak{F} .

Скажемо, що неперервна функція $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає умовам (f.a) та (f.б), є *K-R-простою*, якщо вона відповідає також умовам (f.1)–(f.3).

Граф з черенками, це локально-скінченний топологічний граф, з якого вилучена деяка підмножина множини термінальних вершин (див. **Означення 1.6.6**).

Достатні умови для того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом з черенками

надає наступна **Теорема 3.1.6**. *Нехай неперервна функція f , яка відповідає умовам (f.a) та (f.б), є K - R -простою. Тоді простір $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками.*

Відносно того, чи будуть наведені умови необхідними, ми можемо сказати наступне.

Твердження 3.1.7. *Нехай функція $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна і відповідає умовам (f.a) і (f.б). Тоді умови (f.2) і (f.3) на функцію f є необхідними для того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом с черенками.*

Умова (f.1) не є необхідною для того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом с черенками. У **Додатку В** ми наводимо відповідний приклад.

Якщо функція f задана на площині, то за рахунок теореми Жордана про криву функція буде K - R -простою тоді і лише тоді, коли $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом с черенками. Це твердження слідує з Теореми 3.1.6, Твердження 3.1.7 і такої **Теореми 3.1.8** *Нехай неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ відповідає умовам (f.a) і (f.б). Якщо Γ_{K-R} є графом с черенками, то f відповідає умові (f.1).*

Розділ 4

У цьому розділі досліджується питання розрізнення неперервних функцій на площині з точністю до орієнтованої топологічної еквівалентності.

У такій загальній постановці ця задача дуже складна, тому ми обмежуємось класом функцій, множини рівня яких локально мають просту будову — псевдо-гармонічними функціями.

Ми розглядаємо псевдо-гармонічні функції загального положення (різні сингулярні точки знаходяться на різних множинах рівня), які до того ж мають скінченну кількість сингулярних точок.

У якості основи для побудови інваріанту, який розрізняє такі функції ми беремо так званий граф Кронрода-Ріба функції $\Gamma_{K-R}(f)$ і наділяємо його додатковою комбінаторною структурою.

Відомо, що на компактних поверхнях графи Кронрода-Ріба функцій з простою локальною будовою (наприклад, функцій Морса, або більш загально — гладких функцій з ізольованими особливостями) є топологічними графами.

Ситуація кардинально міняється при переході до некомпактних поверхонь — відомі приклади гладких функцій без особливостей на площині, для яких топологічний простір $\Gamma_{K-R}(f)$ навіть не є Хаусдорфовим (див. [25]).

У зв'язку з цим нам приходится ще більше обмежувати клас функцій, який ми розглядаємо і вводити додаткову технічну умову \mathfrak{J} , яка гарантує, що $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками.

Скажемо декілька слів про структуру розділу і основний результат, який у ньому отримано.

У підрозділах **4.1** і **4.2** ми визначаємо клас функцій, який ми вивчаємо, і означаємо поняття графа Кронрода-Ріба.

Додаткова структура на графі Кронрода-Ріба включає орієнтацію його ребер і частковий порядок на множині вершин, які породжені напрямком зростання функції f . Цим поняттям присвячений підрозділ **4.3**.

Іншою складовою додаткової структури на $\Gamma_{K-R}(f)$ є *спін* у вершинах цього графа. Спіном у вершині називається вибраний певним чином *цикл* ребер, які їй інцидентні. Означенню цих понять і дослідженню властивостей спіна присвячені підрозділи **4.4–4.6**.

У підрозділі **4.7** означені поняття *навантаженого* і *слабо навантаженого* графів Кронрода-Ріба, а також поняття їх *еквівалентності*. Крім того ми означаємо поняття *орієнтованої пошарової еквівалентності* функцій f і g , більш слабке ніж їх *орієнтована топологічна еквівалентність*.

Нарешті, підрозділ **4.8** присвячений доведенню такої **Теорема 4.8.1** (Є. О. Полулях, Ю. Ю. Сорока, В. В. Шарко).

Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функції загального положення, що задовольняють умовам \mathfrak{J} .

Функції f і g є орієнтовано пошарово еквівалентними тоді і лише тоді, коли слабо навантажений граф Кронрода-Ріба функції f еквівалентний слабо навантаженому графу однієї з функцій g або $-g$.

Функції f і g є орієнтовано топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх навантажені графи Кронрода-Ріба є еквівалентними.

Розділ 5

У цьому розділі ми розглядаємо клас неперервних функцій f означених на замкненому одиничному диску D^2 площини \mathbb{C} , які є псевдогармонічними у $\text{Int } D^2$, і для яких обмеження $f|_{\partial D^2}$ має лише скінченне число екстремумів.

Кожній функції f з цього класу можна поставити у відповідність її *комбінаторну діаграму* $P(f)$, яка будується наступним чином.

Візьмемо об'єднання межі ∂D^2 і тих компонент лінійної зв'язності множин рівня f , що не гомеоморфні замкненому інтервалу. Виявляється, що на цій множині можна означити структуру скінченного топологічного графу. Його вершинами є сингулярні точки f в $\text{Int } D^2$, локальні екстремуми обмеження f на ∂D^2 , а також точки перетину компонент зв'язності множин рівня f , які містяться в $P(f)$, з межовим колом ∂D^2 .

На графі $P(f)$ задається додаткова структура. По-перше, на множині вершин $P(f)$ можна задати строгий частковий порядок за допомогою співвідношення $(x < y) \iff (f(x) < f(y))$. Крім того, $P(f)$ містить виділений цикл $q(f)$, утворений ребрами, об'єднання яких дає межу диску ∂D^2 . Цей цикл можна орієнтувати у відповідності з додатною орієнтацією кола ∂D^2 .

І. А. Юрчук довела таку **Теорему 5.4.1**.

Дві псевдогармонічні функції f і g топологічно еквівалентні тоді й лише тоді, коли існує ізоморфізм комбінаторних діаграм $\varphi : P(f) \rightarrow P(g)$, який зберігає строгий частковий порядок і орієнтацію на них.

Ми досліджуємо питання: при яких умовах граф є комбінаторною діаграмою деякої псевдогармонічної функції.

Виявляється, що якщо вилучити з $P(f)$ всі ребра, що належать $q(f)$, залишиться скінченний ліс (скінченне об'єднання дерев), всі термінальні вершини якого належать циклу $q(f)$.

Ми даємо відповідь на питання, коли скінченний ліс можна вкласти у замкнений диск "належним чином".

Нехай T є деревом з множиною вершин V і множиною ребер E . Припустимо, що T не вироджене (має принаймні одне ребро). Позначимо через V_{ter} множину всіх вершин T порядку 1 (*термінальні вершини* T). Припусти-

мо, що зафіксовано підмножину $V^* \subseteq V$, таку що $V_{ter} \subseteq V^*$. Нехай також $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ є вкладенням, для якого виконується наступна умова (5.2.2)

$$\varphi(T) \subseteq D^2, \quad \varphi(T) \cap \partial D^2 = \varphi(V^*).$$

Припустимо, що з усіх елементів підмножини V^* вершин дерева T утворено деякий *простий абстрактний цикл* $C = (v_1, \dots, v_k)$ (див. Підрозділ 4.4).

Припустимо, що вкладення $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^2$, відповідає (5.2.2). Тоді з елементів множини $\varphi(V^*) = \varphi(T) \cap \partial D^2$ можна утворити два різних абстрактних цикли.

З одного боку, відображення $\varphi|_{V^*} : V^* \rightarrow \varphi(V^*)$ бієктивне, тому співвідношення

$$\varphi(C) = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k))$$

коректно означає деякий простий абстрактний цикл.

З іншого боку, обходячи коло S^1 у додатному напрямку ми можемо означити абстрактний цикл

$$S = (\varphi(v_{\sigma(1)}), \dots, \varphi(v_{\sigma(k)}))$$

природним чином: точки $\varphi(v_{\sigma(1)}), \dots, \varphi(v_{\sigma(k)})$ обходяться у вказаному порядку при обході кола.

Дерево T називається *\mathcal{D} -планарним* (див. **Означення 5.5.6**), якщо існує вкладення $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^2$, яке відповідає (5.2.2), і таке що абстрактний цикл $\varphi(C)$ збігається з абстрактним циклом S .

Теорема 5.5.8 *\mathcal{D} -планарність дерева T еквівалентна наступній умові: для довільного ребра e існує рівно два шляхи, кожний з яких проходить через e і з'єднує деяку пару вершин з множини V^* , що є сусідніми елементами простого абстрактного циклу C .*

Згідно з **Означенням 5.6.2** скінченний граф $G \subset \mathbb{R}^3$ називається *\mathcal{D} -планарним*, якщо існують його підграф γ і вкладення $\varphi : G \rightarrow D^2$, для яких справедливо наступне:

- γ є простим циклом;
- $\overline{G \setminus \gamma} = \bigcup_{i=1}^k T_i = F$ є скінченним об'єднанням дерев;

- γ містить всі термінальні вершини F ;
- $\varphi(\gamma) = \partial D^2$, $\varphi(G \setminus \gamma) \subseteq \text{Int } D^2$.

Теорема 5.6.3 (Є. О. Полулях, І. А. Юрчук) *Нехай G є графом, $\gamma \subseteq G$ є простим циклом, таким що $\overline{G \setminus \gamma} = \bigsqcup_i T_i$, де кожне T_i є деревом.*

Тоді G є \mathcal{D} -планарним тоді й лише тоді, коли виконуються наступні умови:

- кожне дерево T_i з підмножиною вершин V_i^* , на якій цикл γ індукує простий абстрактний цикл C_i , є \mathcal{D} -планарним;
- для кожної пари індексів $m \neq n$ підмножина вершин V_n^* дерева T_n належить єдиній компоненті зв'язності множини $\gamma \setminus V_m^*$.

За означенням всі комбінаторні діаграми є \mathcal{D} -планарними графами. Щоб \mathcal{D} -планарний граф, на множині вершин якого задано строгий частковий порядок, був комбінаторною діаграмою деякої псевдогармонічної функції, він має відповідати деяким додатковим умовам, див. **Означення 5.6.6** і **5.6.9**. Графи, що їм відповідають ми називаємо Δ -графами.

Теорема 5.7.1 (Є. О. Полулях, І. А. Юрчук) *Якщо граф G є комбінаторною діаграмою деякої псевдогармонічної функції f , то G є Δ -графом.*

Якщо граф G є Δ -графом, то частковий порядок на $V(G)$ може бути продовжений так, що граф G з новим частковим порядком на множині вершин буде ізоморфний комбінаторній діаграмі деякої псевдогармонічної функції f .

Не кожний строгий частковий порядок на вершинах Δ -графа породжується якоюсь функцією. Справді, якщо для деякої функції f маємо $(x < y) \iff (f(x) < f(y))$, то x і y є непорівняними тоді й лише тоді, коли $f(x) = f(y)$.

Ця умова фігурує у нас як умова A4 і її можна виразити інакше: відношення “бути непорівняними” на множині зі строгим частковим порядком є транзитивним.

Теорема 5.7.2 *Нехай G є Δ -графом. G задовольняє умову A4 тоді й тільки тоді, коли строгий частковий порядок на графі G збігається зі строгим частковим порядком на діаграмі $P(f)$ деякої псевдогармонічної функції f , що відповідає графу G .*

Розділ 6

Якісна теорія функцій однієї комплексної змінної стосується топологічної класифікації аналітичних функцій а також їх дійсних складових — гармонічних функцій і псевдогармонічних функцій, які є топологічним узагальненням гармонічних функцій. Ця задача тісно пов'язана з дослідженням шарувань на множини рівня таких функцій.

Проблеми з цього класу розглядали С. Стоїлов [22] і Г. Т. Уайберн [26], які означили поняття внутрішнього і, відповідно, легкого відкритого відображення. Означені ними класи відображень мають певні суттєві топологічні властивості аналітичних функцій.

Одночасно В. Каплан [8] досліджував шарування на компоненти зв'язності множин рівня гармонічних функцій на площині. Результати Каплана пізніше були узагальнені на шарування з особливостями у роботах В. Бутбі [12], [13], М. Морса і Дж. Дженкінса [21], М. Морса [15].

Скажемо, що неперервна функція $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ узгоджена з одновимірним шаруванням Δ на поверхні Z , якщо

- кожен лист шарування Δ є зв'язною компонентою деякої множини рівня $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$;
- для кожного $z \in Z$ існують локальні координати (u, v) такі що $z = (0, 0)$ і $f(u, v) = u + \text{const}$.

Нехай Δ є одновимірним шаруванням на просторі \mathbb{R}^2 , всі листи якого некомпактні. Узагальнюючи старий результат Е. Камке [27], В. Каплан [8], [9] довів, що існує неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, узгоджена з Δ . Більш того, існує не більш ніж зліченне покриття $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ площини \mathbb{R}^2 , таке що

- (1) кожна множина S_α складається з листів шарування Δ ;
- (2) шарування на S_α еквівалентне шаруванню площини \mathbb{R}^2 , або півплощини, на паралельні прямі.

Іншими словами, \mathbb{R}^2 склеєна зі зліченної кількості (горизонтальних) смуг вздовж відкритих інтервалів на їх межах, див Рис. 0.0.1.

У роботі [11] В. Каплан також довів існування гомеоморфізму $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такого що функція $f \circ h$ є гармонічною. Цей результат був узагальнений на ша-

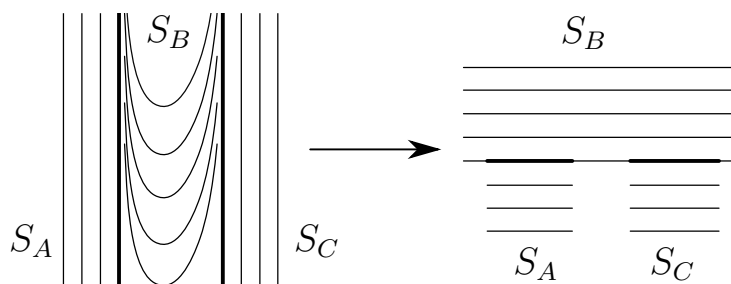


Рис. 0.0.1:

рування з особливостями у роботах В. Бутбі [12], [13], М. Морса і Дж. Дженкінса [21], М. Морса [15]. Див. також [21], [17], [18], [19], [20], [28].

У зв'язку з прогресом у теорії Гамільтонових динамічних систем з малою кількістю ступенів свободи за останні двадцять років виник інтерес до топологічної класифікації функцій на поверхнях, див. А. Фоменко і А. Болсінов [29], А. Ошемков [30], В. Шарко [31], [32], Є. Полулях і І. Юрчук [33], Є. Полулях [25].

Ми вивчаємо гомотопічні властивості шарувань на довільних відкритих двовимірних поверхнях Z , які відповідають властивостям (1) і (2), наведеним вище. Отже така поверхня отримана з сім'ї смуг $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$, склеєних вздовж деяких інтервалів, розташованих на межі цих смуг. Будемо називати такі поверхні *смугастими*. Ми показуємо, що не обмежуючи загальності міркувань можна вважати, що кожна смуга є *модельною*, тобто вкладена у площину так, що замикання її межових інтервалів обмежені і попарно не перетинаються.

Кожна смуга має природне шарування на паралельні горизонтальні лінії, що приводить до шарування Δ_Z на Z , всі шари якого є некомпактними. Будемо називати це шарування *канонічним*.

Нехай $\mathcal{H}(\Delta_Z)$ є групою всіх гомеоморфізмів Z , що відображають листи шарування Δ_Z на листи Δ_Z , а $\mathcal{H}_0(\Delta_Z)$ є компонентою лінійної зв'язності одиниці групи $\mathcal{H}(\Delta_Z)$ відносно компактно-відкритої топології. Доведено (див. Теорему 6.3.4 (С. І. Максименко, Є. О. Полулях)), що за виключенням двох випадків $\mathcal{H}_0(\Delta_Z)$ є стягнутою. Отже, обчислення гомотопічного типу $\mathcal{H}(\Delta_Z)$ зводиться до підрахунку групи гомеотопій $\pi_0 \mathcal{H}(\Delta_Z) = \mathcal{H}(\Delta_Z) / \mathcal{H}_0(\Delta_Z)$ шарування Δ_Z . В якості прикладу ми характеризуємо смуг-

гасті поверхні, що складаються з однієї смуги (Теорема 6.2.7 (С. І. Максименко, Є. О. Полулях)).

Розділ 7

Нехай X є зв'язним некомпактним двовимірним многовидом, можливо з межею. Нехай на X задано шарування Δ , таке що кожен лист $\omega \in \Delta$ гомеоморфний \mathbb{R} і має тривіально розшарований окіл, насичений відносно Δ . Скажемо, що таке шарування належить до класу \mathcal{F} .

Шарування такого типу на площині були досліджені В. Капланом [8] і вони виявляються шаруваннями на компоненти зв'язності множин рівня псевдогармонічних функцій на \mathbb{R}^2 , див. В. Каплан [8, Теорема 42], В. Бутбі [12], [13], М. Морс і Дж. Дженкінс [21], М. Морс [15].

Каплан довів, що площина розпадається на відкриті смуги, що розшаровані на паралельні лінії і склеєні вздовж відкритих інтервалів, які лежать на межі цих смуг. Однак, конструкція В. Каплана залежить від вибору інтервалів, уздовж яких проводиться склейка, і не є однозначно визначеною.

Ми пропонуємо канонічний спосіб розрізання на відкриті смуги, що дає однозначну конструкцію, і узагальнюємо її на шарування на довільних поверхнях. Ми також характеризуємо топологічні типи замикань смуг при додаткових обмеженнях на Δ .

Топологічна структура шарувань з особливостями на поверхнях, зокрема шарувань на орбіти потоків, досліджувалась у наступних роботах: А. Андронов та Л. Понтрягін [34], М. Пейксото [35], [36], С. Арансон і В. Грінес [37], [38], І. Бронштейн та І. Ніколаєв [39], С. Арансон, Є. Жужома і В. Медведєв [40], Л. Плахта [4], [5], [6], А. Ошемков і В. Шарко [41], С. Арансон, В. Грінес і В. Кайманович [42], М. Фарбер [43], Н. Будницька і О. Пришляк [44], Н. Будницька і Т. Рибалкіна [45] і багатьох інших.

Отримані результати можна застосувати до шарувань з особливостями, які не мають компактних регулярних шарів, що задані на поверхнях, вилучаючи сингулярності.

Припустимо, що Δ є шаруванням з класу \mathcal{F} на поверхні X . Нехай $Y =$

X/Δ є простором листів, а відображення $p : X \rightarrow Y$ є проєкцією. Наділимо Y фактор-топологією. Оскільки кожен лист шарування Δ є замкненою підмножиною X , то $Y \in T_1$ -простором. Але взагалі кажучи простір Y не є Хаусдорфовим.

Нехай ω є листом шарування Δ і $y = p(\omega) \in Y$. Скажемо, що ω є спеціальним листом і y є спеціальною точкою простору Y , якщо простір Y не є Хаусдорфовим у точці y , тобто $y \neq \bigcap_{y \in V} \bar{V}$, де V пробігає всі відкриті околиці точки y .

При додатковому припущенні, що сім'я всіх спеціальних листів є локально скінченною (кожна точка простору X має окіл, який перетинає лише скінченну кількість спеціальних листів) ми узагальнюємо результати Каплана на шарування Δ з класу \mathcal{F} на довільних поверхнях X і описуємо топологічну структуру компонент зв'язності множини $X \setminus \text{Spec}(\Delta)$ і їх замикань в просторі X , де $\text{Spec}(\Delta)$ є об'єднанням всіх спеціальних листів шарування Δ .

Нагадаємо, що відображення просторів, на яких задані шарування, називається *листовим*, якщо воно відображає листи шарування у прообразі на листи шарування у образі.

Теорема 7.1.5 (С. І. Максименко, Є. О. Полулях) *Нехай X є зв'язним двовимірним многовидом і Δ є шаруванням на X , що належить до класу \mathcal{F} . Нехай сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ всіх спеціальних листів шарування Δ є локально скінченною, і нехай Q є компонентою зв'язності множини $X \setminus (\text{Spec}(\Delta) \cup \partial X)$. Тоді справедливі такі твердження.*

1. Q листово гомеоморфна або до стандартного циліндру C , або до стандартної стрічки Мебіуса M , або до відкритої модельної смуги $\mathbb{R} \times (-1, 1)$. Крім того, у перших двох випадках $Q = X$.

2. Нехай Q є листово гомеоморфною до відкритої модельної смуги. Зафіксуємо листовий гомеоморфізм $\phi : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow Q$ і позначимо

$$A = \phi(\mathbb{R} \times (-1, 0]), \quad B = \phi(\mathbb{R} \times [0, 1)).$$

Тоді замикання \bar{A} і \bar{B} листово гомеоморфні до модельних смуг.

З цієї теореми слідує, що топологічна структура шарування $\Delta \in \mathcal{F}$ одно-

значно визначається комбінаторикою склеювання модельних смуг.

Наслідок 7.1.6 *Нехай X є зв'язним двовимірним многовидом і Δ — шарування на X , що належить до класу \mathcal{F} . Нехай сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ всіх спеціальних листів шарування Δ є локально скінченною.*

Тоді X листово гомеоморфний до деякої смугастої поверхні, на якій задано канонічне шарування.

Розділ 8

Нехай знову Z — некомпактний двовимірний многовид.

Для шарувань з класу \mathcal{F} , які означені й досліджені у Розділі 7, відображення проєкції $\text{pr} : Z \rightarrow Z/\Delta$ на простір листів є локально тривіальним розшаруванням з шаром \mathbb{R} . Спеціальні листи відображаються в точки простору Z/Δ , в яких він не є Хаусдорфовим. Більш того, поверхня Z з одновимірним шаруванням Δ з класу \mathcal{F} допускає “смугасту структуру” тоді й лише тоді, коли сім'я спеціальних листів є локально скінченною, див. Теорему 8.4.1.

У Розділі 8 ми розглядаємо більш загальний випадок, коли Δ — одновимірне шарування на Z таке, що кожен лист $\omega \in \Delta$ гомеоморфний \mathbb{R} і є замкненою підмножиною Z .

Виявляється, що у цій ситуації множини $\text{Spec}(\Delta)$ не досить, щоб виділити шарування Δ , для яких Z листово гомеоморфна деякій смугастій поверхні (тобто існує гомеоморфізм, який відображає листи Δ на листи канонічного шарування у своєму образі).

Ми пропонуємо більш загальне поняття *сингулярних* листів, див. Означення 8.2.4, що відповідають точкам простору Z/Δ , для яких не існує відкритих околів V таких що пара (\bar{V}, V) гомеоморфна (\bar{J}, J) для деякої відкритої підмножини J простору $[0, 1)$.

Нашою метою є повна характеристизація смугастих поверхонь.

Теорема 8.4.4 (С. І. Максименко, Є. О. Полулях) *Наступні умови еквівалентні:*

- (1) (Z, Δ) допускає смугастий атлас;
- (2) сім'я $\text{Sing}(\Delta)$, що складається зі всіх сингулярних листів є локально

скінченною.

Розділ 9

Нехай M^2 — двовимірна поверхня з краєм. Назвемо F -функцією неперервну функцію $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка є постійною на компонентах зв'язності краю ∂M^2 , а у внутрішніх точках є відкритим відображенням і має ту властивість, що у кожній внутрішній точці $x \in M^2$ множина рівня $f^{-1}(f(x))$ є локально зв'язною.

В роботі [23] W. Fox розглянув такі функції як узагальнення псевдогармонічних функцій і довів для них *теорему про промені*, яка показує подібність F -функцій до гармонічних функцій (див. вище).

Внаслідок цієї теореми *неперервне відображення* $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ на двовимірній поверхні з краєм M^2 , яке є постійним на компонентах її краю, є F -функцією тоді й лише тоді, коли f відповідає *теоремі про промені* у кожній внутрішній точці M^2 .

В даному розділі ми намагаємось далі розширити клас функцій, послаблюючи вимоги до їх локальної поведінки, і досліджуємо як це вплине на їх глобальні властивості.

Отже, нехай $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ — замкнений диск на площині, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція.

Розглянемо, як можна було б розумним чином означити поняття “регулярні точки” неперервної функції. Ми пропонуємо два варіанти такого означення.

Означення 9.1.1a Точка $x \in \text{Int } D$ називається регулярною для функції f , якщо існує такий відкритий окіл $U_x \ni x$, що для кожного $y \in U_x$ зв'язна компонента γ_y множини $U_x \cap f^{-1}(f(y))$, яка містить точку y , гомеоморфна відкритому інтервалу $(0, 1)$.

Інший підхід відповідає “теоремі про промені” у випадку, коли променів усього два.

Означення 9.1.16 Точка $x \in \text{Int } D$ називається регулярною для функції f , якщо існує такий відкритий окіл $U_x \ni x$, що зв'язна компонента γ_x множини $U_x \cap f^{-1}(f(x))$, яка містить точку x , гомеоморфна відкритому

інтервалу $(0, 1)$, а множина $U_x \setminus \gamma_x$ має дві компоненти зв'язності, на одній з яких f більша за $f(x)$, а на іншій — менша.

Точки диска, які не є регулярними будемо називати *критичними*.

Маючи визначення регулярної точки неперервної функції f , визначимо поняття сідлової точки.

Означення 9.1.2 Точка $x \in \text{Int } D$ називається сідловою точкою функції f , якщо існує такий відкритий окіл $U_x \ni x$, в якому f відповідає теоремі про промені і кількість променів більше 2, а також кожна точка $y \in U_x \setminus \{x\}$ є регулярною точкою функції f .

Говорячи про локальний екстремум функції f , ми маємо на увазі нестрогий локальний екстремум.

Розглянемо тепер неперервну функцію $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає двом додатковим вимогам

- (i) $f(\partial D) = 0$, $f(x) > 0$ для всіх $x \in \text{Int } D$ (тут ∂D позначає межове коло диска D);
- (ii) функція f має в $\text{Int } D$ рівно два локальних екстремума.

По аналогії з гладким випадком виникає природне питання: чи вірно, що неперервна функція f , яка відповідає вимогам (i) і (ii), має в $\text{Int } D$ хоча б одну сідлову точку?

Основною ціллю даного розділу є побудова неперервної функції $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає вимогам (i) і (ii) і не має в $\text{Int } D$ жодної сідлової точки незалежно від того, за допомогою якого з означень 9.1.1a або 9.1.1b визначаються її регулярні точки (див. Теорему 9.2.7).

Розділ 10

Нехай M^2 є двовимірним орієнтовним многовидом з краєм ∂M^2 .

F-функції були введені У. Фоксом у роботі [23] під назвою *Peano-interior functions* як узагальнення псевдогармонічних функцій.

У статті [24] Фокс розширює клас функцій, розглядаючи функції, які є F-функціями у внутрішніх точках поверхні, і відповідають певним технічним умовам у точках її краю. Він доводить теорему, про те що кожна таку

функцію можна продовжити до F-функції, яка задана на більшій поверхні $C(M^2) \supset \text{Int } M^2$, і є локально постійною на межі $\partial C(M^2)$.

Він дає таке **Означення 10.1.2**. *Функція $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ називається відділеною зверху від $\text{Int } M^2$ у точці $x \in \partial M^2$, або S-відділеною у точці x , якщо існує окіл U точки x в M^2 , такий що $f(y) < f(x)$ для всіх $y \in U \cap \text{Int } M^2$.*

Аналогічним чином означаються й точки, у яких функція відділена знизу від $\text{Int } M^2$.

Нехай J є компонентою межі поверхні M^2 . Позначимо через $D(S, J)$ множину всіх S-відділених точок, що належать J . Оскільки функція f неперервна, то вона постійна на кожній компоненті зв'язності множини $D(S, J)$.

Взагалі кажучи, множина $D(S, J)$ не є ні відкритою, ані замкненою підмножиною J . Щоб зменшити кількість компонент зв'язності поверхні $C(M^2)$, Фокс в [24] пропонує розглядати замість $D(S, J)$ замкнену множину $\overline{D(S, J)}$. Його метод побудови продовження F-функції є конструктивним і є зліченною процедурою приклеювання комірців до частини межі поверхні, продовження на них функції, і вирізань отворів у цих комірцях. Ця процедура є гарантовано скінченною лише тоді, коли ця функція постійна на кожній компоненті множини $\overline{D(S, J)}$.

В [24] Фокс формулює в якості нерозв'язаної проблеми таке питання: *чи завжди F-функція f постійна на компонентах зв'язності множини $\overline{D(S, J)}$?*

Ми будемо приклад F-функції, означеної на квадраті $M^2 = [0, 1] \times [0, 1]$, який дає негативну відповідь на це питання, а саме *на квадраті M^2 існує F-функція $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, така що множина $\overline{D(S, \partial M^2)}$ зв'язна і $f(\overline{D(S, J)}) = [0, 1]$ (див. **Теорему 10.1.3**).*

Розділ 11

Нехай U і V — деякі неперервні дійснозначні функції на поверхні M^2 . Скажемо, що V є відкритою на множинах рівня U , якщо для кожного $c \in U(M^2)$ відображення $V|_{U^{-1}(c)} : U^{-1}(c) \rightarrow \mathbb{R}$ є відкритим у просторі $U^{-1}(c)$ у топології, індукованій з M^2 .

Теорема 11.1.2 *Нехай U — псевдогармонічна функція на M^2 . Для того,*

щоб дійснозначна неперервна функція $V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ була спряженою псевдогармонічною функцією для U на M^2 необхідно і досить, щоб V була відкритою на множинах рівня U .

Наслідок 11.1.6 Нехай $U, V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — спряжені псевдогармонічні функції на M^2 . Тоді на M^2 існує комплексна структура, відносно якої U і V є спряженими гармонічними функціями на M^2 .

Розділ 12

Нехай $z = F(\mathbf{x})$ — неперервна функція, означена в області $G \subset \mathbb{R}^n$. Точка $\mathbf{y} \in G$ є квазі-ізолюваною для функції $z = F(\mathbf{x})$, якщо $\{\mathbf{y}\}$ є компонентою зв'язності множини $F^{-1}(F(\mathbf{y}))$.

Гіперповерхнею в \mathbb{R}^n будемо називати гладку поверхню без краю розмірності $n - 1$ в \mathbb{R}^n . Скажемо, що гіперповерхня \mathbf{H} обмежує точку $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, якщо вона обмежує область з компактним замиканням, яка містить точку \mathbf{x} .

Означення 12.1.7 (В. В. Шарко) Нехай $z = F(\mathbf{x})$ є C^r -гладкою функцією у області $G \subset \mathbb{R}^n$ і $\mathbf{y} \in G$. Нехай $F(\mathbf{y}) = a$. Функція $z = F(\mathbf{x})$ називається **L-функцією** у точці \mathbf{y} , якщо існує послідовність (a_i) регулярних значень $z = F(\mathbf{x})$, що відповідає наступним властивостям:

- i. $a_i \rightarrow a$ при $i \rightarrow \infty$;
- ii. для кожного i існує компонента зв'язності \mathbf{H}_i^{n-1} множини $F^{-1}(a_i)$, така що \mathbf{H}_i^{n-1} є гладкою гіперповерхнею, що обмежує точку \mathbf{y} ;
- iii. діаметри \mathbf{H}_i^{n-1} прямують до 0, при $i \rightarrow \infty$.

Наступна **Теорема 12.2.1** вказує, як будувати послідовності вкладених гіперповерхонь, що збігаються до точки, за допомогою досить гладкої функції на відкритій області $G \subset \mathbb{R}^n$. Нехай G — область в \mathbb{R}^n . Припустимо, що $F \in C^n(G)$. Для того, щоб F була **L-функцією** у точці $x_0 \in G$ необхідно й достатньо, щоб x_0 була квазі-ізолюваною точкою F .

Розділ 13

Відома теорема Жордана про криву стверджує, що доповнення площини до простої замкненої кривої має дві компоненти зв'язності, причому межа

кожної з них збігається з цією кривою. Це твердження дає необхідні умови для того, щоб компактна підмножина площини була гомеоморфним образом кола. Але ці умови не є достатніми. Контрприкладом є так звана польська крива (невелика модифікація цього прикладу подається у даному розділі, див. Приклад 13.2.7).

Теорема Шенфліса (див. [46]) стверджує, що довільний гомеоморфізм простої замкненої кривої у площині на одиничне коло продовжується до гомеоморфізму площини на себе. Очевидно, кожна точка одиничного кола на площині досяжна з обох компонент зв'язності доповнення до цього кола. Отже, кожна точка простої замкненої кривої на площині досяжна з обох компонент зв'язності доповнення до цієї кривої. Виявляється, що умови на досяжність точок компактної множини у площині з компонент зв'язності доповнення до цієї множини є достатніми для того, щоб множина була простою замкненою кривою.

Цей результат відомий, як теорема, обернена до теореми Жордана про криву (див. [47], [46]). К. Куратовський у своїй книжці [47] дає дещо більш сильне твердження: якщо для компактної множини знайдуться дві компоненти зв'язності її доповнення до \mathbb{R}^2 , такі що кожна точка множини досяжна з обох цих компонент, то вказана множина є простою замкненою кривою.

Виявляється, що умови наведеної теореми можна дещо послабити у наступному сенсі. Нехай K є компактною підмножиною площини і доповнення площини до K має дві компоненти зв'язності W_1 і W_2 . Корисно розглядати окремо множини A_1 , A_2 точок K , що досяжні з W_1 і W_2 , відповідно. І якщо кожна з цих множин “гарно розташована” у K , то K є простою замкненою кривою, див. **Теорему 13.2.9**.

Зокрема, якщо множина K зв'язна і її підмножини $K \setminus A_1$ та $K \setminus A_2$ є нульвимірними, то множини A_1 і A_2 “гарно розташовані” у K і K є простою замкненою кривою, див. **Наслідок 13.2.10**.

Виявляється, що поняття “гарно розташованої” підмножини пов'язано з однією топологічною властивістю простору K . А саме, нехай (X, \mathcal{T}) — деякий топологічний простір. Позначимо через $\mathcal{L}\mathcal{C}(X)$ найслабшу топологію

на X , що відповідає такій властивості: для кожної відкритої підмножини W простору (X, \mathcal{T}) всі компоненти зв'язності W є відкритими в топології $\mathcal{LC}(X)$. У цих термінах множини A_1 і A_2 є “гарно розташованими” в K якщо A_1 і A_2 є щільними в K у топології $\mathcal{LC}(K)$, див. **Означення 13.4.1** і **Теорему 13.4.4**.

Розділ 14

Нагадаємо, що для кожного $X \subset \mathbb{R}^n$ рівність $\dim X = n$ виконується тоді й лише тоді, коли X має непорожню внутрішність у \mathbb{R}^n , тобто містить n -вимірний диск. Для k -вимірних підмножин \mathbb{R}^n ($k < n$) аналогічне твердження не виконується. Л. С. Понтрягін у роботі [48] побудував пару компактних підмножин \mathbb{R}^n , таку що розмірність їх Декартового добутку менша за суму їх розмірностей. З цього прикладу слідує існування k -вимірної компактної підмножини \mathbb{R}^n , яка не містить підмножини, гомеоморфної k -вимірному диску.

Відомо, що у випадку $n = 2k + 1$ множина Менгера M_k^n розмірності k у \mathbb{R}^n є універсальним k -вимірним простором, тобто кожен сепарабельний метричний простір, розмірність якого не перевищує k , може бути вкладений у M_k^n . Більш того М. А. Штанько довів, що кожна k -вимірна компактна підмножина \mathbb{R}^n може бути вкладена у M_k^n .

Ми розбиваємо M_k^n певним чином на дві неперетинні підмножини C_k^n і F_k^n . Для кожної k -вимірної підмножини $X \subset \mathbb{R}^n$ і її вкладення f у M_k^n розглянемо множини

$$X_1(f) = f(X) \cap C_k^n, \quad X_2(f) = f(X) \cap F_k^n.$$

Пара $(X_1(f), X_2(f))$ буде називатися *представленням множини X , асоційованим із вкладенням f* .

Виявляється, див. **Теорему 14.2.1** (С. І. Максименко, М. О. Панков, Є. О. Полулях), що достатньою умовою для того, щоб k -вимірна компактна множина $X \subset \mathbb{R}^n$ містила підмножину, яка гомеоморфна k -вимірному диску, є існування представлення X , для якого розмірність множини $X_1(f)$ дорівнює k .

Розділ 15

Відомо, що для повних метричних просторів центр Біркгофа BC динамічної системи з дискретним часом на такому просторі збігається з замиканням множини точок стійких за Пуасоном, отже зберігається при переході від гомеоморфізму до деякої його ітерації. У загальному випадку, для неповних метричних просторів центр Біркгофа може і не збігатися з замиканням множини точок стійких за Пуасоном (див. [49]).

Виявляється, що не дивлячись на ітераційну нестійкість неблукаючої множини, центр Біркгофа динамічної системи зберігається при переході від відображення, що її породжує, до його ітерації.

Теорема 15.2.1 (І. Ю. Власенко, Є. О. Полулях) *Нехай X — Хаусдорфів топологічний простір і $g : X \rightarrow X$ — гомеоморфізм. Тоді $BC(g^n) = BC(g)$.*

Розділ 16

Відомі приклади (приклад Данжуа, потоки Черрі на торі), коли поведінка потоку на двовимірній поверхні визначається його поведінкою на інваріантній підмножині N , що є простором деякого розшарування Понтрягіна (див. Підрозділ 1.8.24), причому обмеження потоку на N топологічно спряжено відповідній динамічній системі Понтрягіна (неперервній надбудові над дискретною динамічною системою на множині Кантора). Отже, виникають природні питання: *при яких умовах динамічна система Понтрягіна продовжується з простору розшарування Понтрягіна, вкладеного у двовимірну поверхню, до потоку на всій поверхні, а також коли простір розшарування Понтрягіна може бути вкладений у двовимірну поверхню.*

В **Теоремі 16.2.5** ми наводимо достатню умову того, що простір N розшарування Понтрягіна ξ не може бути вкладений ні в яку двовимірну поверхню, а також достатню умову, коли N не може бути вкладений у двовимірну орієнтовану поверхню. Зауважимо, що відомі приклади просторів N , що відповідають цій умові, але можуть бути вкладені у неорієнтовану поверхню, див [50].

Розділ 17

Важливу роль в дослідженні обертовних динамічних систем (д. с.) с дискретним часом (каскадів) грає така інформація:

- на які мінімальні динамічні системи існує проекція даної динамічної системи (X, f) ;
- як влаштовані ці проекції;
- як пов'язані між собою різні проекції д. с. (X, f) на мінімальні д. с.; зокрема, чи існує для двох проекцій $h_1 : (X, f) \rightarrow (Y_1, g_1)$ і $h_2 : (X, f) \rightarrow (Y_2, g_2)$ морфізм $\psi : (Y_1, g_1) \rightarrow (Y_2, g_2)$ динамічних систем, такий що $h_2 = \psi \circ h_1$.

Отримати відповіді на такі питання в загальному випадку важко. Щоб наблизитись до розв'язку цієї задачі, розглядають проекції даної д. с. не на всі мінімальні д. с., а на деякі “прості” класи таких д. с. (дистальні і рівностепенно-неперервні мінімальні д. с., мінімальні д. с., що допускають єдину інваріантну ергодичну міру, і т. ін.).

Нехай розглядається деяка сім'я \mathfrak{A} мінімальних динамічних систем і досліджуються властивості проекції д. с. (X, f) на елементи цієї сім'ї. В деяких випадках елементи класу всіх проекцій д. с. (X, f) на д. с. з \mathfrak{A} вдається впорядкувати в наступному сенсі.

Нехай $h_1 : (X, f) \rightarrow (Y_1, g_1)$ та $h_2 : (X, f) \rightarrow (Y_2, g_2)$ — проекції. Скажемо, що $h_1 \sim h_2$, якщо існує ізоморфізм динамічних систем $\psi : (Y_1, g_1) \rightarrow (Y_2, g_2)$, такий що $h_2 = \psi \circ h_1$. Позначимо через \mathfrak{B} фактор-сім'ю всіх проекції з (X, f) на елементи класу \mathfrak{A} по цьому відношенню еквівалентності. Введемо на \mathfrak{B} бінарне відношення \preceq . Нехай $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$. Скажемо, що $B_1 \preceq B_2$, якщо знайдуться представники $h_1 : (X, f) \rightarrow (Y_1, g_1)$ класу B_1 і $h_2 : (X, f) \rightarrow (Y_2, g_2)$ класу B_2 , а також морфізм $\psi : (Y_1, g_1) \rightarrow (Y_2, g_2)$, такі що $h_2 = \psi \circ h_1$. Легко бачити, що відношення \preceq означено коректно (тобто не залежить від вибору представників з B_1 і B_2).

Важливо знати, чи є відношення \preceq на класі \mathfrak{B} відношенням часткового порядку.¹ У випадку позитивної відповіді на це питання виникає задача

¹Легко бачити, що якщо відношення \preceq не є відношенням порядку на \mathfrak{B} , то для деякої д. с. (Y, g) з \mathfrak{A} існує морфізм $\alpha : (Y, g) \rightarrow (Y, g)$, такий що відображення $\alpha : Y \rightarrow Y$ не є ін'єктивним. Питання про існування таких мінімальних динамічних систем цікаве саме по

описати властивості класу \mathfrak{B} з частковим порядком \preceq , зокрема вказати класи всіх його максимальних й мінімальних елементів та знайти найбільший і найменший елементи (якщо вони існують).

В даному розділі вивчається клас \mathcal{A} всіх одометрів (групових обертань над адичними групами). Відомо, що цей клас збігається з класом всіх мінімальних дистальних динамічних систем, фазовий простір яких гомеоморфний множині Кантора або скінченний. Відомо також, що елементи класу \mathcal{A} класифікуються (з точністю до топологічної спряженості) за допомогою ґратки так званих супернатуральних чисел (Σ, \leq) .

Ми вивчаємо динамічні системи (X, f) з Хаусдорфовим компактним фазовим простором та їх проєкції на елементи класу \mathcal{A} (відмітимо, що завжди існує тривіальна проєкція $(X, f) \rightarrow (\{pt\}, Id)$ на динамічну систему, фазовий простір якої є одноелементною множиною).

Як виявляється, існування нетривіальних проєкцій д. с. (X, f) на елементи сім'ї \mathcal{A} пов'язано з існуванням так званих періодичних розбиттів д. с. (X, f) (скінченних замкнених розбиттів простору X , елементи яких циклічно переставляються під дією відображення $f : X \rightarrow X$).

Нехай $\mathcal{P}(X, f) \subseteq \mathbb{N}$ — множина потужностей всіх періодичних розбиттів д. с. (X, f) . Тоді $\mathcal{P}(X, f)$ — топологічний інваріант д. с. (X, f) і існування нетривіальних проєкцій д. с. (X, f) на елементи сім'ї \mathcal{A} еквівалентно нерівності $\mathcal{P}(X, f) \neq \{1\}$.

Позначимо через $\mathcal{A}(X, f)$ клас всіх елементів \mathcal{A} , на які існують проєкції динамічної системи (X, f) . Нехай $\Sigma(X, f)$ — підмножина множини супернатуральних чисел, що відповідає класу $\mathcal{A}(X, f)$. Нехай ще $\mathfrak{B}(X, f)$ — сім'я всіх проєкції д. с. (X, f) на елементи класу \mathcal{A} , $\mathfrak{B}'(X, f)$ — фактор-клас класу $\mathfrak{B}(X, f)$ по відношенню \sim (див. вище).

До основних результатів даного розділу можна віднести наступні твердження.

Нехай (X, f) — динамічна система з компактним Хаусдорфовим фазовим простором і $\mathcal{P}(X, f) \neq \{1\}$. Тоді

— бінарне відношення \preceq на класі $\mathfrak{B}'(X, f)$ є відношенням часткового порядку, див. **Твердження 17.3.45**;

— існує сюр'єктивне відображення $\Lambda_0 : (\mathfrak{B}'(X, f), \preceq) \rightarrow (\Sigma(X, f), \leq)$, яке зберігає відношення порядку і таке, що клас всіх максимальних елементів з $(\mathfrak{B}'(X, f), \preceq)$ збігається з повним прообразом найбільшого елементу множини $(\Sigma(X, f), \leq)$, див. **Лему 17.3.46** і **Наслідок 17.3.48**;

— впорядкований клас $(\mathfrak{B}'(X, f), \preceq)$ ізоморфний впорядкованій множині $(\Sigma(X, f), \leq)$ тоді й лише тоді, коли д. с. (X, f) нерозкладна (тобто простір X не можна представити у вигляді незв'язної суми двох власних замкнених інваріантних підмножин), див. **Теорему 17.3.59**.

Особистий внесок здобувача

Всі отримані в дисертації результати є новими.

З результатів, надрукованих у спільних зі співавторами статтях, в основну частину дисертації увійшли тільки такі, що отримані здобувачем самостійно, за винятком наступних, де вклад співавторів є рівноцінним.

Теорему 4.8.1, автор отримав разом з В. В. Шарко та Ю. Ю. Сорокою.

Теорема 5.6.3 і **Теорема 5.7.1**, отримані у співпраці з І. А. Юрчук.

Результати **Розділів 6, 7 і 8** отримані разом з С. І. Максименко. Зокрема, у співавторстві з ним доведені **Теореми 6.2.7, 6.3.4, 7.1.5, 8.3.2 і 8.4.4**.

Теорема 14.2.1 отримана разом з М. А. Панковим і С. І. Максименко.

У співавторстві з І. Ю. Власенко отримано **Теорему 15.2.1**.

Апробація результатів дисертації

Результати роботи доповідалися на

- семінарах відділу топології Інституту математики НАН України; керівник семінару – член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. відділом топології В. В. Шарко;

- семінарах лабораторії топології при відділі алгебри і топології Інституту

математики НАН України; керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, зав. лабораторією топології С. І. Максименко;

- семінарах кафедри геометрії Національного Університету України ім. Т. Г. Шевченко; керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, професор О. О. Пришляк;
- 4-ій міжнародній конференції з геометрії і топології, (м. Черкаси, 2001);
- Міжнародній конференції *Геометрія в Одесі*, (Одеса, 2008, 2013, 2015 та 2016);
- Міжнародній конференції *Боголюбівські читання*, (м. Київ, Україна, 2007);
- Міжнародній конференції *Боголюбівські читання*, (м. Севастополь, Україна, 2013);
- Міжнародній конференції *Analysis and Topology*, (м. Львів, Україна, 2008);
- Міжнародній конференції *Infinite-Dimensional Analysis and Topology*, (с. Яремче, Україна, 2009);
- Міжнародній конференції *Geometry “in large”, topology and applications*, присвяченій 90-річчю з дня народження О. В. Погорєлова, (м. Харків, 2009);
- Міжнародної конференції *“Динамічні системи та їх застосування”*, (м. Київ, 2012);
- Міжнародній конференції *Modern Advances in Geometry and Topology*, присвяченій 70-річчю з дня народження О. А. Борисенко, (м. Харків, 2016).

Публікації

Основні результати дисертації опубліковано в 21 роботі у фахових виданнях, 20 з яких належать до переліку, що затверджений ДАК МОН України [7], [25], [33], [50]–[67] та 12 тезах конференцій [68]–[79]. З них 2 монографії: [51] у співавторстві з І. Ю. Власенко та С. І. Максименко і [33] у співавторстві з І. А. Юрчук; 15 статей у наукових журналах, 4 статті у збірниках наукових праць Інституту математики НАН України.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконувалась у лабораторії топології у складі відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України. Її тема пов'язана з тематикою наукових досліджень, які проводились у відділі. Результати роботи отримані в рамках цієї тематики, а саме в рамках програми НАН України *“Сучасні методи досліджень математичних моделей в проблемах природничих наук”* №0107U002333, а також НДР *“Топологія многовидів та їх застосування”* №00106U000658.

Подяки

Перш за все хочу згадати з вдячністю мого вчителя і наукового керівника Володимира Васильовича Шарко. Саме під його впливом сформувались мої наукові інтереси і підходи до розв'язку математичних задач. На жаль він не дожив до моменту, коли дисертація була написана, але його поради відіграли значну роль у розвитку основних напрямків досліджень, які лягли в основу роботи.

Також хочу висловити щирю вдячність своєму науковому консультанту Сергію Івановичу Максименко. Коли не стало В. В. Шарко, він погодився взяти на себе цю нелегку роль і допоміг довести справу до кінця. Я не сумніваюся, що без його підтримки і допомоги ця дисертація не була б написана.

Хочу також окремо подякувати всіх людей окрім вже згаданих, з якими я співпрацював у різні часи розв'язуючи математичні задачі, частина з яких лягла в основу даної праці. А саме, я дякую М. О. Панкову, І. Ю. Власенко, І. А. Юрчук, Ю. Ю. Сороці.

Також хочу подякувати всім співробітникам відділу топології і іншим колегам, які неодноразово слухали мої доповіді на семінарах відділу і висловлювали слухні зауваження, зокрема це В. В. Сергейчук, В. В. Любашенко, А. О. Пришляк, Т. В. Рибалкіна, Ю. В. Шарко, В. В. Круглов, Б. Г. Фещенко.

Розділ 1

Попередні відомості

1.1 Псевдогармонічні функції

Нехай M^2 — поверхня, тобто двовимірний сепарабельний многовид, на якому задано дійснозначну функцію $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Позначимо через

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

відкритий одиничний диск на площині.

Означення 1.1.1 (див. [10], [14]) *Функція f називається псевдогармонічною в точці $p \in M^2$, якщо існують окіл N точки p у M^2 і гомеоморфізм $T : D \rightarrow N$, такі що $T(0, 0) = p$ і функція*

$$u = f \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

гармонічна і не є константою.

Окіл N називається простим околом точки p .

Ми можемо вибрати N і T з попереднього означення так, щоб вони відповідали співвідношенню

$$u(z) = f \circ T(z) = \operatorname{Re} z^n + f(p), \quad z = x + iy \in D,$$

для деякого $n = n(p) \in \mathbb{N}$ (див. [10]).

Означення 1.1.2 (див. [10], [14]) *Функція f називається псевдогармонічною на M^2 , якщо вона є псевдогармонічною в кожній точці $p \in M^2$.*

Нехай $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є псевдогармонічною функцією на M^2 і $g : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — деяка дійснозначна функція.

Означення 1.1.3 (див. [14]) *Функція g називається спряженою псевдогармонічною функцією для f у точці $p \in M^2$, якщо існують окіл N точки p у M^2 і гомеоморфізм $T : D \rightarrow N$, такі що $T(0,0) = p$ і*

$$u = f \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{і} \quad v = g \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

є спряженими гармонічними функціями.

Окіл N і відображення T з попереднього означення можна вибрати так, щоб

$$\begin{aligned} u(z) &= f \circ T(z) = \operatorname{Re} z^n + f(p), \\ v(z) &= g \circ T(z) = \operatorname{Im} z^n + g(p), \quad z = x + iy \in D, \end{aligned}$$

для деякого $n = n(p) \in \mathbb{N}$ (див. [10]).

Означення 1.1.4 (див. [14]) *Функція g називається спряженою псевдогармонічною функцією для f на M^2 , якщо вона є спряженою псевдогармонічною функцією для f у кожній точці $p \in M^2$.*

1.2 Фундаментальні покриття і неперервність

Означення 1.2.1 (див. [80]) *Покриття Γ топологічного простору X називається фундаментальним, якщо довільна множина, перетин якої з кожною множиною $B \in \Gamma$ є відкритим в B , сама є відкритою в X .*

Відомо (див. [80]), що всі відкриті покриття, а також всі скінченні і локально скінченні замкнені покриття є фундаментальними.

1.3 Локальна зв'язність областей у точках межі

Нехай U — відкрита підмножина площини. Наступні означення (див. [46]) корисні при вивченні локальних властивостей множини $\text{Fr } U$.

Означення 1.3.1 Проста неперервна крива $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ називається надрізом U у точці $x \in \text{Fr } U$, якщо $\varphi(0) = x$ і $\varphi((0, 1]) \subset U$.

Означення 1.3.2 Назвемо точку $x \in \text{Fr } U$ досяжною з U , якщо існує надріз U у точці x .

Означення 1.3.3 Розрізом області U між точками $x_0, x_1 \in \text{Fr } U$ називається проста неперервна крива $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, така що $\psi(0) = x_0$, $\psi(1) = x_1$ і $\psi((0, 1)) \subset U$.

Означення 1.3.4 Нехай X — топологічний простір, $E \subset X$. Множина E називається локально зв'язною (локально лінійно зв'язною) в точці $x \in X$, якщо для кожного околу U точки x в X знайдеться окіл V цієї точки, такий що будь яку пару точок $y', y'' \in V \cap E$ можна з'єднати зв'язною (відповідно, лінійно зв'язною) підмножиною множини $U \cap E$.

Нагадаємо, що область на площині, межею якої є проста замкнена крива, називається *Жордановою областю*. Відоме наступне твердження (див. [46], приклад VI.16).

Лема 1.3.5 (Теорема Керек'ярто) Якщо на площині дві прості замкнені криві, J_1 і J_2 , мають більше однієї спільної точки, то всі компоненти зв'язності доповнення площини до $J_1 \cup J_2$ є Жордановими областями.

1.4 Означення й елементарні властивості розмірності

Кожному регулярному топологічному простору X можна поставити у відповідність *розмірність* X , яка позначається $\text{ind } X$. Означається вона за допомогою наступних умов:

1. $\text{ind } X \in \{-1\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ для кожного регулярного простору X ;
2. рівність $\text{ind } X = -1$ виконується тоді й лише тоді, коли $X = \emptyset$;
3. якщо існує база \mathcal{U} простору X , така що $\text{ind Fr } U \leq n - 1$ для кожного $U \in \mathcal{U}$, то $\text{ind } X \leq n$.

Існує інша функція розмірності dim , означена для кожного нормального простору (так звана *розмірність за покриттями*). Але ці дві функції розмірності збігаються для сепарабельних метричних просторів. Далі ми розглядаємо тільки підмножини \mathbb{R}^n , отже ми можемо використовувати dim для позначення функції розмірності.

Нам буде корисне наступне твердження.

Лема 1.4.1 (див. [81]) *Нехай Y — підмножина сепарабельного метричного простору X . Нерівність $\text{dim } Y \leq n$ виконується тоді й лише тоді, коли існує база $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ простору X , така що $\text{dim Fr } U_i \cap Y \leq n - 1$ для кожного $i \in \mathbb{N}$.*

Нагадаємо деякі основні властивості розмірності, див. наприклад [81].

Твердження 1.4.2 *Якщо простори X і Y гомеоморфні, то $\text{dim } X = \text{dim } Y$.*

Твердження 1.4.3 *Якщо $Y \subset X$, то $\text{dim } Y \leq \text{dim } X$.*

Теорема 1.4.4 *Якщо сепарабельний метричний простір X можна представити у вигляді зліченного об'єднання F_{σ} -підмножин розмірності не більше k , то $\text{dim } X \leq k$.*

Теорема 1.4.5 *Якщо $f : X \rightarrow Y$ — замкнене відображення сепарабельного метричного простору X у сепарабельний метричний простір Y і існує ціле $k \geq 0$, таке що $\text{dim } f^{-1}(y) \leq k$ для кожного $y \in Y$, то $\text{dim } X - \text{dim } Y \leq k$.*

1.4.6 Множина Менгера

Розіб'ємо одиничний куб $I^n = [0, 1]^n$ на 3^n кубів, вершини яких належать до множини $\{0, 1/3, 2/3, 1\}$, а ребра паралельні координатним осям і мають

довжину $1/3$. Розглянемо куби, що не перетинаються з k -вимірними гранями I^n і викинемо їх внутрішності у просторі I^n (в індукованій з \mathbb{R}^n топології). Те, що залишиться, позначимо $m_k^n(I^n)$. Отримана множина є скінченним об'єднанням кубів, внутрішності яких попарно неперетинні.

Подібна конструкція коректно означена для кожної скінченної сім'ї n -вимірних кубів, що мають попарно неперетинні внутрішності. Означимо $M_k^n(1) = m_k^n(I^n)$

$$M_k^n(i+1) = m_k^n(M_k^n(i)), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Нехай

$$M_k^n = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_k^n(i).$$

Кожна множина $M_k^n(i)$ компактна, тому M_k^n — також компакт.

Твердження 1.4.7 (див. [81]) $\dim M_k^n = k$.

Множина M_k^n називається k -вимірною підмножиною Менгера простору \mathbb{R}^n . Легко бачити, що $M_n^n = I^n$, а M_0^n є декартовим добутком n множин Кантора C .

1.5 Фактор-простори і фактор-відображення.

Нехай A — деяка множина.

Означення 1.5.1 Розбиттям множини A назвемо сім'ю $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ непорожніх підмножин множини A , що відповідає наступним умовам:

- 1) $A = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$;
- 2) $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ при $\alpha, \beta \in \Lambda, \alpha \neq \beta$.

Означення 1.5.2 Розбиття $\{\tilde{A}_\gamma\}_{\gamma \in \Sigma}$ множини A називається подрібненням розбиття $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, якщо для кожного $\gamma \in \Sigma$ знайдеться таке $\alpha \in \Lambda$, що $\tilde{A}_\gamma \subseteq A_\alpha$.

Зауваження 1.5.3 Нехай розбиття $\{\tilde{A}_\gamma\}_{\gamma \in \Sigma}$ є подрібненням розбиття $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ множини A . З властивості 2) означення 1.5.1 легко слідує, що для довільних $\alpha \in \Lambda$ і $\gamma \in \Sigma$ або $\tilde{A}_\gamma \subseteq A_\alpha$, або $\tilde{A}_\gamma \cap A_\alpha = \emptyset$.

Зауваження 1.5.4 Існує бієктивна відповідність між розбиттями множини A й відношеннями еквівалентності на A :

1) кожному розбиттю $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ можна поставити у відповідність відношення еквівалентності ρ за допомогою співвідношення

$$(a_1 \rho a_2) \iff (\exists \alpha \in \Lambda : a_1, a_2 \in A_\alpha) ;$$

2) у зворотньому напрямку, довільному відношенню еквівалентності σ на множині A відповідає розбиття на класи еквівалентності.

Нехай A — множина, $\mathfrak{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — її розбиття.

Означення 1.5.5 Множина A/\mathfrak{A} , елементами якої є елементи розбиття \mathfrak{A} , називається фактор-множиною множини A по розбиттю \mathfrak{A} .

Відображення $pr : A \rightarrow \mathfrak{A}$, що ставить у відповідність кожному елементу $a \in A$ елемент $A_\alpha \in A/\mathfrak{A}$, такий що $a \in A_\alpha$, називається відображенням проєкції.

Подібним чином можна означити фактор-множину A/ρ по відношенню еквівалентності ρ (див. Зауваження 1.5.4).

Нехай X — топологічний простір, $\mathfrak{H} = \{H_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ — його розбиття.

Задамо на множині X/\mathfrak{H} топологію за таким правилом: скажемо, що підмножина $B \subseteq X/\mathfrak{H}$ відкрита тоді й лише тоді, коли її повний прообраз $pr^{-1}(B)$ є відкритим у X . Ця топологія називається фактор-топологією і є самою слабкою топологією на просторі X , в якій відображення $pr : X \rightarrow X/\mathfrak{H}$ неперервне.

Нехай X і Y — топологічні простори, \mathfrak{H} — розбиття простору X , \mathfrak{T} — розбиття простору Y . Нехай $f : X \rightarrow Y$ — неперервне відображення, яке переводить елементи розбиття \mathfrak{H} в елементи розбиття \mathfrak{T} . Тоді означено неперервне

фактор-відображення $\text{fact } f : X/\mathfrak{H} \rightarrow Y/\mathfrak{T}$, для якого є коммутативною наступна діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ pr_X \downarrow & & \downarrow pr_Y \\ X/\mathfrak{H} & \xrightarrow{\text{fact } f} & Y/\mathfrak{T} \end{array}$$

Нехай знову $f : X \rightarrow Y$ — неперервне відображення топологічного простору X у простір Y . Позначимо через $\text{zer } f$ розбиття простору X , елементами якого є повні прообрази точок простору Y під дією відображення f . Нехай ще \mathfrak{T} — розбиття простору Y , кожен елемент якого є одноточковою множиною. Зрозуміло, що відображення $pr_Y = Id : Y \rightarrow Y/\mathfrak{T}$ є тотожнім.

Означення 1.5.6 Відображення $\text{fact } f : X/\text{zer } f \rightarrow Y$, для якого є коммутативною діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ pr_X \downarrow & & \parallel \\ X/\text{zer } f & \xrightarrow{\text{fact } f} & Y \end{array}$$

називається взаємно-однозначним фактором відображення f .

Ін'єктивність взаємно-однозначного фактора перевіряється безпосередньо.

Означення 1.5.7 Неперервне відображення $f : X \rightarrow Y$ називається факторним, якщо $f(X) = Y$ і взаємно-однозначний фактор $\text{fact } f : X/\text{zer } f \rightarrow Y$ є гомеоморфізмом.

Твердження 1.5.8 (див. [82]) Нехай для неперервного відображення $f : X \rightarrow Y$ виконуються наступні умови:

- (1) $f(X) = Y$;
- (2) відображення f відкрите (замкнене).

Тоді відображення f є факторним.

Далі нам буде корисне наступне твердження.

Лема 1.5.9 Нехай X, Y_1, Y_2 — топологічні простори, $\varphi_1 : X \rightarrow Y_1$ і $\varphi_2 : X \rightarrow Y_2$ — неперервні відображення.

Якщо відображення φ_1 факторне, то наступні умови еквівалентні:

- (1) розбиття $\text{zer } \varphi_1$ простору X є подрібненням розбиття $\text{zer } \varphi_2$;
- (2) існує неперервне відображення $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$, таке що $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Доведення. 1. Нехай розбиття $\text{zer } \varphi_1$ є подрібненням розбиття $\text{zer } \varphi_2$. Тоді відображення φ_2 переводить елементи розбиття $\text{zer } \varphi_1$ у точки простору Y_2 і коректно означене фактор-відображення $\pi = \text{fact } \varphi_2 : X/\text{zer } \varphi_1 \rightarrow Y_2$, для якого комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_2} & Y_2 \\ pr_1 \downarrow & & \parallel \\ X/\text{zer } \varphi_1 & \xrightarrow{\pi} & Y_2 \end{array}$$

Нехай $\chi = \text{fact } \varphi_1 : X/\text{zer } \varphi_1 \rightarrow Y_1$ — взаємно-однозначний фактор відображення φ_1 , тобто є комутативною діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi_1} & Y_1 \\ pr_1 \downarrow & & \parallel \\ X/\text{zer } \varphi_1 & \xrightarrow{\chi} & Y_1 \end{array}$$

Оскільки відображення φ_1 факторне, то χ — гомеоморфізм простору $X/\text{zer } \varphi_1$ на Y_1 .

Розглянемо неперервне відображення

$$\psi = \pi \circ \chi^{-1} : Y_1 \rightarrow Y_2 .$$

Маємо

$$\psi \circ \varphi_1 = \pi \circ \chi^{-1} \circ \varphi_1 = \pi \circ \chi^{-1} \circ \chi \circ pr_1 = \pi \circ pr_1 = \varphi_2 ,$$

що й потрібно було довести.

2. Нехай існує неперервне відображення $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$, таке що $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Фіксуємо елемент H_1 розбиття $\text{zer } \varphi_1$. За означенням, знайдеться $y_1 \in Y_1$, таке що $H_1 = \varphi_1^{-1}(y_1)$. Нехай $y_2 = \psi(y_1) \in Y_2$. Тоді $H_2 = \varphi_2^{-1}(y_2) = (\psi \circ \varphi_1)^{-1}(y_2) = \varphi_1^{-1}(\psi^{-1}(y_2)) \supseteq \varphi_1^{-1}(y_1) = H_1$. Знову за означенням, H_2 — елемент розбиття $\text{zer } \varphi_2$.

З довільності у виборі елементу H_1 розбиття $\text{zer } \varphi_1$ слідує, що розбиття $\text{zer } \varphi_1$ є подрібненням розбиття $\text{zer } \varphi_2$. \square

1.6 Графи

Розглянемо граф $G = (V, E)$ з множиною вершин V і множиною ребер E .

Скажемо що граф G *скінченний*, якщо множини його вершин і ребер є скінченними. Граф є *локально-скінченним*, якщо кожна його вершина інцидентна скінченному числу ребер. Для локально-скінченного графа кількість ребер, яким інцидентна вершина, називається *порядком вершини*.

Петлею називається ребро графа, кінці котрого співпадають. *Термінальними вершинами* називаються вершини порядку один. Позначимо множину всіх термінальних вершин через V_{ter} .

Шляхом, що з'єднує вершини $v', v'' \in V$, називається скінченна послідовність ребер $e_k = (v_{k-1}, v_k)$, $k = 1, \dots, n$, така що $v' = v_0$, $v'' = v_n$, і $e_k \neq e_l$ при $k \neq l$. Шлях називається *простим*, якщо $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Наведемо декілька відомих фактів з теорії графів (див. [83], [84]), які будуть нам корисні далі.

Твердження 1.6.1 *Нехай G — скінченний граф.*

Тоді кількість вершин G , які мають непарний порядок, є парним числом.

Наслідок 1.6.2 *Нехай G — скінченний граф, порядок кожної вершини якого або дорівнює 1, або є парним числом.*

Тоді множина V_{ter} термінальних вершин G має парне число елементів.

Нехай T — дерево (скінченне, або нескінченне).

Твердження 1.6.3 *Якщо скінченне дерево T невироджене ($E \neq \emptyset$), то множина V_0 вершин порядку 1 містить принаймні два елементи.*

Твердження 1.6.4 *Нехай v — вершина дерева T порядку n . Нехай T' — граф, отриманий з T вилученням вершини $v \in V$ і всіх ребер $e_1, \dots, e_n \in E$, що є суміжними для цієї вершини.*

Тоді T' є незв'язною сумою n дерев T_1, \dots, T_n , причому дерево T_i містить вершину дерева T , суміжну з ребром e_i , відмінну від v , $i = 1, \dots, n$.

Нехай G є локально-скінченним (але не обов'язково скінченним) графом без петель. Розглянемо G як одновимірний предсимпліціальний комплекс, нульвимірними симплексами якого є вершини, а одновимірними симплексами є ребра (див. [85]). Відмітимо, що граф є симпліціальним комплексом, якщо він не містить кратних ребер. Розглянемо абстрактний поліедр $|G|$, що відповідає цьому комплексу. Топологія на $|G|$ породжується покриттям, елементами якого є замкнені симплекси комплексу G (підмножина $A \subset |G|$ є замкненою тоді й тільки тоді, коли її перетин з кожним ребром G замкнений). Говорячи про топологію на графі G ми будемо мати на увазі топологічний простір $|G|$.

Граф G , на якому задана топологія описана вище, назвемо *топологічним графом*. Далі ми розглядатимемо тільки такі графи, тому слово “топологічний” будемо пропускати.

Замкненим ребром G назвемо відповідний замкнений одновимірний симплекс, *відкритим ребром* назвемо відкритий симплекс (ребро без вершин, які є його кінцями).

Відмітимо, що маючи тільки топологічний простір $|G|$ не можна відновити структуру графа G . Перешкодою є вершини порядку два.

Нагадаємо (див. [47]), що *порядком $\text{ord}_p X$ топологічного простору X в точці p* називається інфімум кардинальних чисел \mathfrak{n} , таких що існує як завжди малий відкритий окіл U точки p , для якого потужність множини $\text{Fr } U$ не перебільшує \mathfrak{n} .

Порядок довільної вершини v топологічного графу G збігається з $\text{ord}_v |G|$. Кожна точка $p \in |G|$, яка не є вершиною має порядок 2. Таким чином у топологічному просторі $|G|$ вершини графу G порядку 2 нічим не відрізняються від точок, які не є вершинами G .

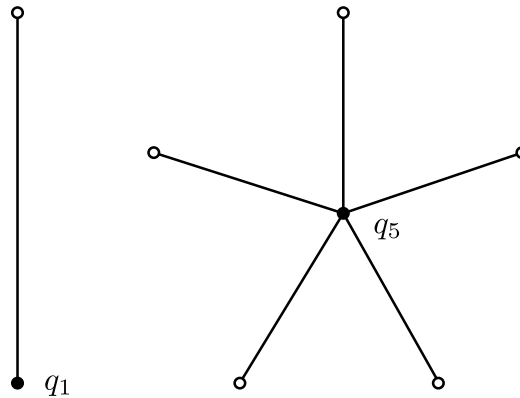


Рис. 1.6.1: Приклад: простори Q_1 і Q_5 .

Легко бачити, що для того, щоб відновити по топологічному простору $|G|$ граф G , досить знати додатково множину вершин V графу G .

“Стандартними околами” точок локально скінченного топологічного графу G , які не є вершинами, можна вважати відкриті ребра, які їх містять. Для вершин G в якості “стандартних околів” у G візьмемо їх відкриті зірки. Більш формально це виглядає наступним чином.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ фіксовано.

Позначимо $\tilde{Q}_n = \bigsqcup_{i=1}^n J_i$ — незв’язне об’єднання n одиничних напівінтервалів. Зафіксуємо гомеоморфізми $h_i : [0, 1) \rightarrow J_i$, $i = 1, \dots, n$. Нехай $R_n = \bigsqcup_{i=1}^n h_i(0)$.

Розглянемо розбиття \mathfrak{h} простору \tilde{Q}_n на одноточкові множини $\{x\}$, $x \notin R_n$, і множину R_n . Нехай $Q_n = \tilde{Q}_n / \mathfrak{h} = \tilde{Q}_n / R_n$ — фактор-простір \tilde{Q}_n по розбиттю \mathfrak{h} (див. Рис. 1.6.1). Позначимо через $pr_n : \tilde{Q}_n \rightarrow Q_n$ відображення проєкції. Позначимо також $q_n = pr_n(R_n)$.

Виконується наступне просте твердження, перевірку якого ми залишаємо читачеві.

Твердження 1.6.5 (див. [60]) *Для кожної вершини $v \in G$ порядку $n \in \mathbb{N}$ існують її відкритий окіл $U_v \subset G$, який лежить в об’єднанні її суміжних ребер, а також вкладення $i_v : Q_n \rightarrow G$, для якого $i_v(Q_n) = U_v$, $i_v(q_n) = v$.*

Для кожної точки $w \in G \setminus V$ існує її відкритий окіл $U_w \subset G$, який лежить на тому ж ребрі G , що й w і гомеоморфний відкритому інтервалу.

Нарешті, означимо одне узагальнення топологічного графу.

Означення 1.6.6 Нехай V_0 є підмножиною множини термінальних вершин V_{ter} графа G (випадок $V_0 = \emptyset$ не виключається).

Нехай замкнене ребро $e \subset G$ інцидентне деякій термінальній вершині з V_0 . Множина $e \setminus V_0$ називається черенком. Простір $G_0 = G \setminus V_0$ називається топологічним графом з черенками.

1.7 Шарування з особливостями

Позначимо $\mathbb{R}_+^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$.

Означення 1.7.1 Нехай X є n -вимірним топологічним многовидом, $n \geq 1$. Нехай $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Листовою картою на X вимірності k (ковимірності $n-k$) називається пара (U, φ) , де підмножина $U \subset X$ відкрита і $\varphi : U \rightarrow (0, 1)^k \times B^{n-k}$ є гомеоморфізмом. Тут B^{n-k} — деяка відкрита підмножина \mathbb{R}_+^{n-k} . Множини $P_y = \varphi^{-1}((0, 1)^k \times \{y\})$, $y \in B^{n-k}$, називаються пластинками цієї листової карти.

Означення 1.7.2 Нехай $\Delta = \{\omega_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — розбиття простору X на лінійно зв'язні підмножини ω_α . Припустимо, що X допускає атлас $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in \Lambda}$, який складається з листових карт вимірності k , такий що для кожної пари індексів $\alpha \in A$ та $i \in \Lambda$, кожна компонента лінійної зв'язності перетину $\omega_\alpha \cap U_i$ є пластинкою. Тоді Δ називається k -вимірним шаруванням на X (шаруванням ковимірності $n-k$) а $\{U_i, \varphi_i\}_{i \in \Lambda}$ називається листовим атласом, асоційованим з Δ . Кожна множина ω_α називається листом шарування, а пара (X, Δ) називається листовим многовидом.

Означення 1.7.3 Нехай $\Sigma \subset X$ — деяка замкнена підмножина, Δ — розбиття простору X , елементами якого є лінійно зв'язні множини розмірності $\leq k$. Нехай Δ_0 — розбиття простору $X \setminus \Sigma$ на компоненти зв'язності перетинів цього простору з елементами розбиття Δ . Якщо Δ_0 є k -вимірним шаруванням на $X \setminus \Sigma$, кажуть що на X задано k -вимірне шарування з особливостями Δ . Множину Σ називають множиною особливостей цього шарування.

Означення 1.7.4 Нехай на просторах X_1 і X_2 зафіксовано шарування Δ_1 і Δ_2 (шарування Δ_1 і Δ_2 з особливостями і Σ_1 та Σ_2 — відповідні множини особливостей). Гомеоморфізм $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ називається листовим, якщо він відображає листи першого шарування на листи другого (і множини особливостей першого шарування на множини особливостей другого). У цьому випадку простори X_1 і X_2 називають листово гомеоморфними.

1.8 Динамічні системи.

Нехай X — топологічний простір і $f : X \rightarrow X$ — гомеоморфізм. Пару (X, f) називають (дискретною) динамічною системою, а X — її фазовим простором.

Кажуть, що підмножина $A \subset X$ є інваріантною множиною (X, f) , якщо $f(A) = A$.

Позначимо через $\text{Orb}_f(x)$ орбіту точки x під дією f , тобто множину $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Нехай також

$$\text{Orb}_f^+(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \quad \text{і} \quad \text{Orb}_f^-(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}^-\}$$

позначають додатну і від'ємну напіворбіти точки x , відповідно.

1.8.1 Множина неблукаючих точок

Означення 1.8.2 Точка x називається нерухомою (фіксованою) точкою гомеоморфізму f , якщо $f(x) = x$. Множину всіх нерухомих точок f позначимо $\text{Fix}(f)$.

Означення 1.8.3 Назвемо точку x періодичною періоду n для гомеоморфізму f , якщо $f^n(x) = x$ і $f^k(x) \neq x$ для $k = 1, \dots, n-1$. Позначимо множину всіх періодичних точок f через $\text{Per}(f)$.

Означення 1.8.4 Точка x називається майже періодичною, якщо для ко-

жного околу U точки x знайдеться таке $n(U) \in \mathbb{N}$, що

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{kn(U)}(x) \subseteq U.$$

Означення 1.8.5 Точка x називається рекурентною, якщо для довільного околу U точки x знайдеться таке $n(U) \in \mathbb{N}$, що для кожного $k \in \mathbb{Z}$ виконується нерівність

$$U \cap \bigcup_{i=k}^{k+n(U)-1} f^i(x) \neq \emptyset.$$

Для кожного x означимо ω -граничну множину $\omega_f(x)$ і α -граничну множину $\alpha_f(x)$ за допомогою формул

$$\omega_f(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n=N}^{+\infty} f^n(x)} \quad \alpha_f(x) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{n=N}^{+\infty} f^{-n}(x)}.$$

Якщо зрозуміло про який гомеоморфізм іде мова, ми будемо пропускати індекс f і писатимемо $\alpha(x)$ і $\omega(x)$ замість $\alpha_f(x)$ і $\omega_f(x)$, відповідно.

Наступна лема очевидна.

Лема 1.8.6 (див. [86]) Множини $\alpha(x)$ і $\omega(x)$ замкнені і є інваріантними множинами динамічної системи. Також вони містяться в замиканні орбіти $\overline{\text{Orb}_f(x)}$ точки x .

Зокрема, якщо $y \in \omega(x)$, то $\alpha(y) \cup \omega(y) \subset \overline{\text{Orb}_f(y)} \subset \omega(x)$.

Означення 1.8.7 Точка x називається стійкою за Пуасоном (див. [86]) для динамічної системи (X, f) , якщо $x \in \alpha(x) \cap \omega(x)$.

Точка x називається стійкою за Пуасоном у додатному (від'ємному) напрямку, якщо $x \in \omega(x)$ (відповідно, $x \in \alpha(x)$).

Зауваження 1.8.8 З Лемми 1.8.6 легко слідує, що точка x стійка за Пуасоном у від'ємному (додатному) напрямку тоді й лише тоді, коли $\alpha(x) = \overline{\text{Orb}_f(x)}$ (відповідно, коли $\omega(x) = \overline{\text{Orb}_f(x)}$).

Нехай $PS_+(f)$ і $PS_-(f)$ — множини точок, стійких за Пуасоном у додатному і, відповідно, від'ємному напрямку. Позначимо $PS(f) = PS_+(f) \cup PS_-(f)$. Це множина всіх точок, стійких за Пуасоном.

Зауваження 1.8.9 *Існує й інша термінологія (див. [87], [88]), згідно якій точки стійкі за Пуасоном називаються рекурентними, а рекурентні точки називаються майже періодичними.*

Наступне означення було дано Біркгофом у [89].

Означення 1.8.10 *Точка $x \in M$ називається блукаючою точкою (X, f) , якщо існує такий її окіл U , що $f^m(U) \cap U = \emptyset$ для всіх $m > 0$.*

Всі інші точки називаються неблукаючими. Таким чином x є неблукаючою точкою f , якщо для її довільного околу V існує $m \in \mathbb{Z}$ таке, що $f^m(V) \cap V \neq \emptyset$.

Множину блукаючих точок f позначимо через $W(f)$. Оскільки кожна блукаюча точка лежить у $W(f)$ разом з деяким своїм оточенням, то $W(f)$ — відкрита підмножина X .

Множина неблукаючих точок f позначається $\Omega(f)$. Вона замкнена в X , тому що є доповненням до відкритої множини $W(f)$.

Очевидно, множина $\text{Per}(f)$ періодичних точок міститься в $\Omega(f)$.

Відмітимо, що неблукаюча множина залежить від того, на якому просторі діє динамічна система на відмінність від множини періодичних точок. Так, для інваріантного підпростору $A \subseteq X$ виконується нерівність $\Omega(f|_A) \subseteq \Omega(f)$, але множини $\Omega(f|_A)$ та $\Omega(f)$ взагалі кажучи можуть відрізнятися навіть якщо $\Omega(f) \subseteq A$.

1.8.11 Центр Біркгофа динамічної системи.

Нехай $f : X \rightarrow X$ є гомеоморфізмом. Наївне визначення центра Біркгофа f полягає в тому, щоб переходячи до динамічних систем з меншим фазовим простором, максимально проітерувати конструкцію неблукаючої множини.

Покладемо $\Omega_1(f) = \Omega(f)$ і за індукцією означимо

$$\Omega_{n+1}(f) = \Omega(f|_{\Omega_n(f)}).$$

Отримаємо послідовність вкладених замкнених підмножин простору X . Позначимо перетин цих множин через $\Omega_\omega(f)$. Нехай ν — найменший ординал потужності якого є більшою за $|X|$. За допомогою трансфінітної індукції зможемо визначити множини $\Omega_\lambda(f)$ для всіх порядкових чисел λ . Тоді згідно Лемі Цорна спадний ланцюжок множин $\{\Omega_\lambda(f)\}$ має зупинитись на деякому ординалі γ , що є меншим за ν :

$$\Omega_\gamma(f) = \Omega(f|_{\Omega_\gamma(f)}).$$

Отримана замкнена інваріантна множина називається *центром (Біркгофа)* і позначається $BC(f)$.

Опишемо побудову $BC(f)$ більш докладно.

База індукції. Покладемо $\Omega_1(f) = \Omega(f)$.

Крок індукції. Нехай λ — деяке порядкове число. Припустимо, що множини $\Omega_\alpha(f)$ вже означені для всіх ординалів $\alpha < \lambda$.

Для того, щоб означити множину $\Omega_\lambda(f)$, розглянемо два випадки:

(i) λ має попередній елемент $(\lambda - 1) < \lambda$ в класі Ξ всіх ординалів, тобто для кожного $\beta \in \Xi$ або $\beta \leq (\lambda - 1)$, або $\beta \geq \lambda$.

Тоді нехай

$$\Omega_\lambda(f) = \Omega(f|_{\Omega_{\lambda-1}(f)}) .$$

Зокрема, $\Omega_{n+1}(f) = \Omega(f|_{\Omega_n(f)})$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

(ii) λ є граничним ординалом (не має порядкового числа, що безпосередньо йому передує). Тоді нехай

$$\Omega_\lambda(f) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \Omega_\alpha(f) ,$$

зокрема, $\Omega_\omega(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n(f)$.

Таким чином ми отримали набір замкнених інваріантних підмножин $\{\Omega_\lambda(f)\}_{\lambda \in \Xi}$ простору X . При цьому, за побудовою, співвідношення

$$\Omega_\alpha(f) \supseteq \Omega_\beta(f) \quad \text{і} \quad \alpha \leq \beta$$

рівносильні. Тому порядок, індукований відношенням включення на сім'ї множин $\{\Omega_\lambda(f)\}$, є повним порядком.

Лема 1.8.12 (див. [51], [90]) *Існує порядкове число γ таке, що*

$$\Omega_{\gamma+1}(f) = \Omega_\gamma(f)$$

(отже і $\Omega_\alpha(f) = \Omega_\gamma(f)$ для всіх $\alpha > \gamma$).

Скористаємося цією лемою і дамо наступне означення.

Означення 1.8.13 *Нехай $\gamma \in \Xi$ — найменший ординал, що відповідає Лемі 1.8.12 (він існує, оскільки Ξ цілком впорядкована).*

Замкнена інваріантна підмножина

$$BC(f) = \Omega_\gamma(f)$$

динамічної системи (X, f) називається її центром Біркгофа, а порядкове число γ називається глибиною центру динамічної системи (X, f) .

Зауваження 1.8.14 *Відомо, що для компактного X множина $\Omega(f)$ непорожня. З цього слідує, що $BC(f) \neq \emptyset$ у випадку коли X — компакт (див. [90]). Якщо ж X не є компактом, множини $\Omega(f)$ і $BC(f)$ можуть бути порожніми.*

Зауваження 1.8.15 *Застосовуючи теорему Бера – Хаусдорфа (див. [91]) для топологічних просторів зі зліченною базою (зокрема, для сепарабельних метричних просторів) легко показати, що глибина центра довільної динамічної системи з таким фазовим простором є зліченим трансфінітним числом.*

Відмітимо, що множина точок стійких за Пуасоном завжди лежить у центрі Біркгофа. Внаслідок цього, якщо множина точок стійких за Пуасоном є всюди щільною підмножиною неблукаючої множини, то глибина центру не перевищує 1.

1.8.16 Категорія динамічних систем з дискретним часом

Розглянемо категорію \mathcal{K} , об'єктами якої є динамічні системи, а морфізмами динамічних систем (X, f) і (Y, g) є такі неперервні відображення $h : X \rightarrow Y$ їх фазових просторів, для яких комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \quad (1.8.1)$$

Далі ми будемо позначати морфізм h об'єкта (X, f) в (Y, g) наступним чином:

$$h : (X, f) \rightarrow (Y, g).$$

Означення 1.8.17 Морфізм $h : (X, f) \rightarrow (Y, g)$ називається вкладенням динамічної системи (X, f) до (Y, g) , якщо відображення h є ін'єктивним. У цьому випадку (X, f) називається підсистемою динамічної системи (Y, g) .

Означення 1.8.18 Морфізм $h : (X, f) \rightarrow (Y, g)$ називається проекцією, якщо $h(X) = Y$.

Динамічна система (Y, g) називається фактор-системою динамічної системи (X, f) .

Динамічна система (X, f) називається розширенням динамічної системи (Y, g) .

Означення 1.8.19 Динамічні системи (X, f) та (Y, g) називаються топологічно спряженими, якщо існує такий морфізм $h : (X, f) \rightarrow (Y, g)$, що відображення $h : X \rightarrow Y$ є гомеоморфізмом простору X на простір Y .

Позначимо через \mathcal{K}_0 повну підкатегорію категорії \mathcal{K} , об'єктами якої є динамічні системи з Хаусдорфовими компактними фазовими просторами.

Означення 1.8.20 Назвемо непорожню замкнену інваріантну множину $A \subseteq X$ мінімальною множиною динамічної системи (X, f) , якщо A не містить власних замкнених інваріантних підмножин цієї динамічної системи.

Легко бачити, що для об'єкта (X, f) категорії \mathcal{K}_0 мінімальна множина A характеризується тією властивістю, що $\overline{\text{Orb}_f(x)} = A$ для кожного $x \in A$.

Далі ми скористаємося наступною теоремою (див. [88], [89], [92])

Теорема 1.8.21 (Birkhoff) Кожен об'єкт (X, f) категорії \mathcal{K}_0 відповідає наступним властивостям:

- для кожного $x \in X$ множини $\alpha(x)$ і $\omega(x)$ містять деякі мінімальні підмножини динамічної системи (X, f) ;
- для кожної рекурентної точки $x \in X$ множина $\overline{\text{Orb}_f(x)}$ є мінімальною;
- кожна точка $x \in A$ довільної мінімальної множини A є рекурентною.

Означення 1.8.22 Динамічна система (X, f) називається мінімальною, якщо її фазовий простір X є мінімальною множиною.

Далі нам буде потрібна наступна лема.

Лема 1.8.23 Нехай $(X, f), (Y_1, g_1), (Y_2, g_2) \in \text{Ob } \mathcal{K}_0$, $\varphi_1 : (X, f) \rightarrow (Y_1, g_1)$ і $\varphi_2 : (X, f) \rightarrow (Y_2, g_2)$ – морфізми.

Нехай відображення $\varphi_1 : X \rightarrow Y_1$ сюр'єктивне. Тоді наступні умови еквівалентні:

- (1) розбиття $\text{zer } \varphi_1$ простору X є подрібненням розбиття $\text{zer } \varphi_2$;
- (2) існує морфізм $\psi : (Y_1, g_1) \rightarrow (Y_2, g_2)$, такий що $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Доведення. 1. Нехай розбиття $\text{zer } \varphi_1$ простору X є подрібненням розбиття $\text{zer } \varphi_2$.

Відомо, що неперервне відображення компакта в Хаусдорфів простір замкнене (див. [82]). Відомо також, що неперервне сюр'єктивне замкнене відображення є факторним (див. Твердження 1.5.8).

Отже, сюр'єктивне відображення компактів $\varphi_1 : X \rightarrow Y_1$ є факторним і ми знаходимося в умовах Лема 1.5.9.

Внаслідок цього існує неперервне відображення $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$, таке що $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Перевіримо комутативність діаграми

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \xrightarrow{g_1} & Y_1 \\ \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ Y_2 & \xrightarrow{g_2} & Y_2 \end{array}$$

Нехай $y_1 \in Y_1$. Оскільки відображення φ_1 сюр'єктивне за умовами Лема, то знайдеться $x \in \varphi_1^{-1}(y_1) \subseteq X$. Тоді $g_2 \circ \psi(y_1) = g_2 \circ \psi \circ \varphi_1(x) = g_2 \circ \varphi_2(x) = \varphi_2 \circ f(x) = \psi \circ \varphi_1 \circ f(x) = \psi \circ g_1 \circ \varphi_1(x) = \psi \circ g_1(y_1)$.

З довільності у виборі точки $y_1 \in Y_1$ робимо висновок, що $\psi \circ g_1 = g_2 \circ \psi$ і $\psi \in \text{Mor } \mathcal{K}_0$.

2. Нехай існує морфізм $\psi : (Y_1, g_1) \rightarrow (Y_2, g_2)$, такий що $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1$.

Тоді $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1 : X \rightarrow Y_2$ і подальші міркування повторюють другу частину доведення Лема 1.5.9. \square

1.8.24 Неперервні надбудови

Нехай $I = [0, 1]$ — відрізок, X — Хаусдорфів топологічний простір, $f : X \rightarrow X$ — гомеоморфізм. Задамо на прямому добутку $I \times X$ відношення еквівалентності \sim за правилом $(1, x) \sim (0, f(x))$, $x \in X$. Позначимо через N факторпростір $I \times X$ по цьому відношенню. Нехай також $S^1 = I/\{0, 1\}$ — коло. Задамо проекцію $p : N \rightarrow S^1$ за допомогою формули $p(t, x) = t$, $(t, x) \in N$. Проста безпосередня перевірка показує, що трійка $\xi = (N, p, S^1)$ є локально-тривіальним розшаруванням над S^1 з шаром X . У випадку, коли $X = \Gamma$ — множина Кантора, трійка (Γ, p, S^1) називається *розшаруванням Понтрягіна*, див. [93].

Позначимо через $\text{pr}_1 : I \times X \rightarrow I$, $H : I \times X \rightarrow N$ і $h : I \rightarrow S^1$ — проекції.

Легко бачити, що комутативна наступна діаграма.

$$\begin{array}{ccc}
 I \times X & \xrightarrow{\text{pr}_1} & I \\
 H \downarrow & & \downarrow h \\
 N & \xrightarrow[p]{} & S^1
 \end{array} \tag{1.8.2}$$

На просторі N природним чином можна задати потік $T : \mathbb{R} \times N \rightarrow N$ за допомогою співвідношення $T(t, (\tau, x)) = (\{t + \tau\}, f^{[t+\tau]}(x))$. Тут $[\cdot]$ і $\{\cdot\}$ — ціла і дробова частина числа, відповідно. Цей потік називається *надбудовою* над динамічною системою (X, f) або *спеціальним потоком*, побудованим по f (див. [92]). У випадку, коли $X = \Gamma$, потік T називається *динамічною системою Понтрягіна* (див. [93]).

Розділ 2

Дерева як множини рівня псевдо-гармонічних функцій на площині

2.1 Означення і формулювання результатів.

Нехай $\Gamma = (V, E)$ — граф (можливо, нескінченний) з множиною вершин V і множиною ребер E .

Означення 2.1.1 Множину $A \in \mathbb{Z}$ будемо називати допустимим діапазоном, якщо вона має один з наступних альтернативних видів:

- $A = \mathbb{Z}$;
- $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid t \leq k \leq M\}$ для деяких $t, M \in \mathbb{Z}, t \leq M$;
- $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq M\}$ для деякого $M \in \mathbb{Z}$;
- $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid t \leq k\}$ для деякого $t \in \mathbb{Z}$;

Ланцюжком називається послідовність ребер $\{e_k = (v_{k-1}, v_k)\}_{k \in A}$, яка відповідає наступним вимогам:

- множина індексів A є допустимим діапазоном;
- $e_k \neq e_l$ при $k \neq l, k, l \in A$.

Ланцюжок називається простим, якщо $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Ланцюжок називається максимальним, якщо одночасно виконуються співвідношення:

$$((k - 1 \notin A) \wedge (k \in A)) \Rightarrow (v_{k-1} \in V_{ter}),$$

$$((k \in A) \wedge (k + 1 \notin A)) \Rightarrow (v_k \in V_{ter}),$$

тобто “перша” і “остання” вершини ланцюжка (коли вони є) мають порядок 1.

Припустимо, що граф T є деревом (кожну пару різних вершин T можна з’єднати єдиним шляхом).

Нехай S^2 — двовимірна сфера. Зафіксуємо точку $s \in S^2$, наприклад її північний полюс.

Означення 2.1.2 Неперервне відображення $\Phi : T \rightarrow S^2$ називається плоским, якщо воно відповідає наступним властивостям:

- (i) $\Phi^{-1}(s) = V_{ter}$, де V_{ter} — множина термінальних вершин (у випадку $V_{ter} = \emptyset$ це означає, що $s \notin \Phi(T)$);
- (ii) множина $\Phi(T) \cup \{s\}$ замкнена в S^2 ;
- (iii) відображення $\Phi|_{T \setminus V_{ter}} : T \setminus V_{ter} \rightarrow S^2$ є гомеоморфізмом на свій образ.

Означення 2.1.3 Неперервне відображення $\Psi : T \setminus V_{ter} \rightarrow \mathbb{R}^2$ називається плоским, якщо існують такі плоске відображення $\Phi : T \rightarrow S^2$ і гомеоморфізм $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{s\}$, що

$$\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi|_{T \setminus V_{ter}}.$$

Зауваження 2.1.4 Якщо відображення $\Psi : T \setminus V_{ter} \rightarrow \mathbb{R}^2$ плоске, а $\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — гомеоморфізм, то і відображення $\Theta \circ \Psi$ — плоске, тому що $\Theta \circ \Psi = (\psi \circ \Theta^{-1})^{-1} \circ \Phi|_{T \setminus V_{ter}}$ і $\psi \circ \Theta^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{s\}$ — гомеоморфізм (тут Φ і ψ — відображення з Означення 2.1.3).

Розглянемо скінченний ліс $F = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$ (диз’юнктне об’єднання скінченної кількості дерев, самі дерева можуть бути і нескінченними).

Означення 2.1.5 Неперервне відображення $\Psi : F \setminus V_{ter} \rightarrow \mathbb{R}^2$ називається плоским, якщо плоскими є всі відображення

$$\Psi_i = \Psi|_{T_i \setminus V_{ter}} : T_i \setminus V_{ter} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

а також $\Psi(T_i \setminus V_{ter}) \cap \Psi(T_j \setminus V_{ter}) = \emptyset$ при $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Наступна теорема, яку буде доведено в Підрозділі 2.4, є основним результатом даного розділу.

Теорема 2.1.6 ([61], див. також [59]) Припустимо, що порядок кожної вершини скінченного лісу F або дорівнює 1, або є парним числом > 2 .

Нехай $\Psi : F \setminus V_{ter} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — плоске відображення.

Тоді існує псевдогармонічна функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $\Psi(F \setminus V_{ter}) = f^{-1}(0)$.

2.2 Властивості плоских відображень дерев.

2.2.1 Образ дерева під дією плоского відображення.

Нехай $\Psi : T \setminus V_{ter} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — плоске відображення дерева T , а $\Phi : T \rightarrow S^2$ і $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{s\}$ — відповідні відображення з Означення 2.1.3.

Твердження 2.2.2 Кожна компактна підмножина площини \mathbb{R}^2 перетинається лише з образом скінченного підграфа дерева T .

Доведення. Згідно з Означенням 2.1.2 маємо $\Phi(T \setminus V_{ter}) \subset S^2 \setminus \{s\}$. Тому визначено відображення

$$\Phi_0 : T \setminus V_{ter} \rightarrow S^2 \setminus \{s\},$$

$$\Phi_0 : w \mapsto \Phi(w), \quad w \in T \setminus V_{ter}.$$

Зрозуміло, що $\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi|_{T \setminus V_{ter}} = \psi^{-1} \circ \Phi_0$.

$S^2 \setminus \{s\}$ є відкритою підмножиною сфери S^2 , також за Означенням 2.1.2 відображення $\Phi|_{T \setminus V_{ter}}$ є гомеоморфізмом на свій образ. Тому відображення Φ_0 , а разом з ним і відображення Ψ є вкладеннями простору $T \setminus V_{ter}$ до просторів $S^2 \setminus \{s\}$ і \mathbb{R}^2 , відповідно.

За означенням множина $\Phi(T) \cup \{s\}$ замкнена в S^2 . Тому $\Phi_0(T \setminus V_{ter}) = \Phi(T \setminus V_{ter}) = \Phi(T) \cap S^2 \setminus \{s\}$ і $\Psi(T \setminus V_{ter})$ є замкненими підмножинами просторів $S^2 \setminus \{s\}$ і \mathbb{R}^2 , відповідно.

Нехай $A \subset \mathbb{R}^2$ — деяка компактна множина. Тоді $A_0 = A \cap \Psi(T \setminus V_{ter})$ — компактна підмножина площини. Легким наслідком Твердження 1.6.5 є Хаусдорфовість простору T , тому образ $A_T = \Psi^{-1}(A_0)$ цієї множини під дією неперервного відображення $\Psi^{-1} : \Psi(T \setminus V_{ter}) \rightarrow T$ є компактом.

Відкриті околиці U_w , $w \in T$, з Твердження 1.6.5 утворюють покриття простору T . Очевидно, кожна з множин U_w перетинається лише зі скінченним числом ребер графа T . Користуючись компактністю множини $A_T \subset T$, виберемо з цього покриття скінченне підпокриття цієї множини. Зрозуміло, що воно, а разом з ним і множина A_T , будуть перетинатись лише зі скінченним підграфом T .

Отже, множина A перетинається лише з образом скінченного підграфа T .
□

Лема 2.2.3 *Нехай $w \in T \setminus V_{ter}$. Знайдуться околиці U_w точки w , який відповідає Твердженню 1.6.5, а також гомеоморфізм $\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, які задовольняють наступним умовам:*

- 1а)** $\Theta \circ \Psi(U_w) = \{t(\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)) \mid t \geq 0, k = 0, \dots, n-1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, якщо $w \in V \setminus V_{ter}$ — вершина порядку $n > 1$;
- 1б)** $\Theta \circ \Psi(U_w) = (-1, 1) \times \{0\}$, якщо $w \in T \setminus V$;
- 2)** $\Theta \circ \Psi(T \setminus V_{ter}) \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} = \Theta \circ \Psi(U_w)$.

Доведення цієї леми наведене у Додатку А.1.

2.2.4 Компоненти доповнення площини до образу дерева при плоскому відображенні.

Твердження 2.2.5 *Нехай Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_{ter})$.*

Якщо під дією Ψ образ деякої точки w ребра e , відмінної від вершини, належить $\text{Fr } Q$, то образ його підмножини $e \setminus V_{ter}$ міститься в $\text{Fr } Q$.

Доведення. Нехай точка w належить ребру e дерева T . Позначимо $I = [0, 1]$, $\dot{I} = (0, 1)$. Розглянемо відображення $\varphi_e : I \rightarrow I_e$ та $\hat{\varphi}_e = pr \circ \varphi_e : I \rightarrow T$. За побудовою $\hat{\varphi}_e(I) \cap V = \{\hat{\varphi}_e(0), \hat{\varphi}_e(1)\}$. Тому з Твердження 1.6.5 слідує, що “відкрите” ребро $\hat{\varphi}_e(\dot{I})$ є зв'язним відкритим оточенням точки w в T .

Внаслідок Лемми 2.2.3 справедливе наступне спостереження: *якщо $\Psi(w') \in \text{Fr } Q$ для деякого $w' \in T \setminus V$, то існує оточення $V' \ni w'$ в T , для якого $\Psi(V') \subset \text{Fr } Q$; у випадку $\Psi(w'') \notin \text{Fr } Q$, $w'' \in T \setminus V$, знайдеться оточення $V'' \ni w''$ в T , такий що $\Psi(V'') \cap \text{Fr } Q = \emptyset$.*

Позначимо $A = \{w' \in \hat{\varphi}_e(\dot{I}) \mid \Psi(w') \in \text{Fr } Q\}$, $B = \{w'' \in \hat{\varphi}_e(\dot{I}) \mid \Psi(w'') \notin \text{Fr } Q\}$. З попереднього спостереження слідує, що ці множини відкриті в T . Очевидно також, що $A \cap B = \emptyset$ і $A \cup B = \hat{\varphi}_e(\dot{I})$. Множина $\hat{\varphi}_e(\dot{I})$ зв'язна (вона є образом зв'язної множини \dot{I} під дією неперервного відображення), тому одна з множин A або B порожня. За вибором точки w маємо $B = \emptyset$. Отже $\Psi \circ \hat{\varphi}_e(\dot{I}) \subset \text{Fr } Q$ і $\Psi(e \setminus V_{ter}) = \Psi(\hat{\varphi}_e(I) \setminus V_{ter}) \subset \overline{\Psi \circ \hat{\varphi}_e(\dot{I})} \subset \text{Fr } Q$. \square

Твердження 2.2.6 *Нехай Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_{ter})$, $v \in V \setminus V_{ter}$, $\Psi(v) \in \text{Fr } Q$.*

Припустимо, що оточення U_v точки v і гомеоморфізм $\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ відповідають Леммі 2.2.3.

Тоді рівно один з секторів, на які ділиться відкритий диск $\dot{D}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ множиною $\Theta \circ \Psi(U_v)$, лежить в $\Theta(Q)$

Доведення цього твердження див. у Додатку А.2.

Лема 2.2.7 ([60]) *Нехай Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_{ter})$.*

Існує простий максимальний ланцюжок $C = \{e_k\}_{k \in A}$, який має наступні властивості:

- межа $\text{Fr } Q$ області Q в \mathbb{R}^2 має вигляд $\Psi(C \setminus V_{ter})$;
- межа $\text{Fr } \psi(Q)$ в S^2 має вид $\Phi(C) \cup \{s\}$ і гомеоморфна колу.

Доведення цієї Лема наведено у Додатку **A.3**.

Наслідок 2.2.8 Нехай Q' і Q'' — дві різні компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_{ter})$.

Спільна частина їх межі $\text{Fr } Q' \cap \text{Fr } Q''$ є зв'язною множиною.

Доведення. Нехай $C' = \{e'_k\}_{k \in A'}$ і $C'' = \{e''_l\}_{l \in A''}$ прості максимальні ланцюжки з Лема 2.2.7, образи яких обмежують області Q' і Q'' , відповідно.

Припустимо, що множина $\text{Fr } Q' \cap \text{Fr } Q''$ незв'язна. Тоді знайдуться вершини $v', v'' \in C' \cap C''$, образи яких лежать в різних компонентах зв'язності $\text{Fr } Q' \cap \text{Fr } Q''$. Зрозуміло, що $v', v'' \notin V_{ter}$.

З означення ланцюжка слідує, що в C' існує шлях P' , який з'єднує вершини v' і v'' . Аналогічно, v' і v'' в C'' можна з'єднати шляхом P'' . За побудовою $P' \cap V_{ter} = P'' \cap V_{ter} = \emptyset$. Тому коректно визначені зв'язні множини $\Psi(P') \in \text{Fr } Q'$ і $\Psi(P'') \in \text{Fr } Q''$, які з'єднують точки $\Psi(v')$ і $\Psi(v'')$.

Відмітимо, що шляхи P' і P'' різні. Дійсно, якщо $P' = P''$, то $\Psi(P') = \Psi(P'') \subset \text{Fr } Q' \cap \text{Fr } Q''$ і точки v', v'' належали б до однієї компоненти зв'язності $\text{Fr } Q' \cap \text{Fr } Q''$.

З іншого боку, з означення дерева слідує, що дві його вершини не можна з'єднати двома різними шляхами. \square

2.2.9 Відношення сусідства на множині компонент зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_{ter})$. Відображення Sign .

Нехай $\mathcal{Q} = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — набір всіх компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_{ter})$.

Означення 2.2.10 Назвемо області $Q', Q'' \in \mathcal{Q}$ суміжними, якщо існує ребро e дерева T , таке що $\Psi(e \setminus V_{ter}) \subset \text{Fr } Q' \cap \text{Fr } Q''$.

Скажемо, що області $Q_0, Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{Q}$, $n \geq 1$, утворюють ланцюжок в \mathcal{Q} , якщо Q_{k-1} і Q_k суміжні для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$.

Твердження 2.2.11 Нехай $Q', Q'' \in \mathcal{Q}$.

Існує ланцюжок $Q' = Q_0, Q_1, \dots, Q_n = Q''$ елементів \mathcal{Q} , який їх з'єднує.

Доведення. Зрозуміло, що відношення на множині \mathcal{Q} “бути з'єднаними ланцюжком” транзитивне. Тому для доведення нам досить знайти скінченну послідовність елементів \mathcal{Q} , яка починається з Q' , закінчується Q'' , і кожні два сусідні елементи якої можна з'єднати ланцюжком елементів \mathcal{Q} .

Нехай $v \in V \setminus V_{ter}$ — деяка вершина T порядку $n > 1$. Знайдемо її окіл U_v в T , а також гомеоморфізм $\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, які відповідають Лемі 2.2.3. З Твердження 2.2.6 слідує, що існує рівно n елементів \mathcal{Q} , межа яких містить точку $\Psi(v)$. З урахуванням Твердження 2.2.5 приходимо до висновку, що елементи \mathcal{Q} , яким відповідають сусідні сектори множини $\overset{\circ}{D}_0 \setminus \Theta \circ \Psi(U_v)$, є суміжними в сенсі Означення 2.2.10. Внаслідок цього будь-які дві області з \mathcal{Q} , межа яких містить точку $\Psi(v)$, можуть бути з'єднані ланцюжком в \mathcal{Q} .

Нехай $C' = \{e'_k\}_{k \in A'}$ і $C'' = \{e''_l\}_{l \in A''}$ прості максимальні ланцюжки з Лемми 2.2.7, образи яких обмежують області Q' і Q'' , відповідно.

Нехай ланцюжок C' зводиться до єдиного ребра e . Тоді за означенням вершини v_1 і v_2 , інцидентні e в T , мають порядок 1. Внаслідок цього e — єдине ребро дерева T , $C' = C'' = \{e\}$ і $\text{Fr } Q' = \text{Fr } Q'' = \Psi(e \setminus \{v_1, v_2\})$. Отже, області Q' і Q'' суміжні.

Нехай тепер множина ребер графа T містить більше одного елементу. Тоді кожен із ланцюжків C' і C'' містить більше одного ребра і знайдуться вершини $v', v'' \in V \setminus V_{ter}$, такі що $\Psi(v') \in \text{Fr } Q'$ і $\Psi(v'') \in \text{Fr } Q''$. Дійсно, якщо $e'_{k-1}, e'_k \in C'$, то за означенням ланцюжка вони мають спільну вершину $v' = v'_k$, і її порядок більше 1. Тоді з Лемми 2.2.7 слідує, що $\Psi(v') \in \text{Fr } Q'$. Аналогічні міркування справедливі і для C'' .

З'єднаємо вершини v' і v'' в T шляхом

$$e_1 = (v', v_1) = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_l = (v_{l-1}, v_l) = (v_{l-1}, v'').$$

З Лема 2.2.3 і Твердження 2.2.5 слідує, що знайдуться $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_l \in \mathcal{Q}$, такі що $\Psi(e_k) \subset \text{Fr } \hat{Q}_k$, $k = 1, \dots, l$. Очевидно, $\Psi(v_{k-1}) \in \Psi(e_{k-1}) \cap \Psi(e_k) \subset \text{Fr } \hat{Q}_{k-1} \cap \text{Fr } \hat{Q}_k$. Зі сказаного вище робимо висновок, що області \hat{Q}_{k-1} і \hat{Q}_k можна з'єднати ланцюжком в \mathcal{Q} , $k = 2, \dots, l$. Аналогічні міркування доводять, що ланцюжком в \mathcal{Q} можна з'єднати області Q' і \hat{Q}_1 , а також \hat{Q}_l і Q'' .

Отже, існує ланцюжок в \mathcal{Q} , який з'єднує Q' і Q'' . \square

Твердження 2.2.12 *Припустимо, що порядок кожної вершини дерева T або дорівнює 1, або є парним числом більшим 2.*

Тоді для довільного замкненого ланцюжка $Q_0, Q_1, \dots, Q_n = Q_0$ елементів \mathcal{Q} число n парне.

Доведення цього твердження див. у Додатку А.4.

Лема 2.2.13 ([60]) *Припустимо, що порядок кожної вершини дерева T або дорівнює 1, або є парним числом більшим 2.*

Тоді існує відображення $\text{Sign} : \mathcal{Q} \rightarrow \{-1, 1\}$, для якого виконується наступна умова: якщо множина $\text{Fr } Q_{\lambda_1} \cap \text{Fr } Q_{\lambda_2}$ містить більше однієї точки, то $\text{Sign}(Q_{\lambda_1}) \neq \text{Sign}(Q_{\lambda_2})$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Доведення. Побудуємо функцію Sign .

Зафіксуємо компоненту Q множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_{ter})$ і зіставимо їй який-небудь знак, наприклад $\text{Sign } Q = 1$.

Нехай для іншої компоненти Q' існує ланцюжок $Q = Q_0, Q_1, \dots, Q_n = Q'$ елементів \mathcal{Q} . Тоді

$$\text{Sign } Q' = (-1)^n \text{Sign } Q = \begin{cases} \text{Sign } Q, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ -\text{Sign } Q, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Перевіримо коректність цього означення.

Припустимо, що існує два ланцюжки $Q = Q_0, Q_1, \dots, Q_n = Q'$ і $Q = Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_m = Q'$ елементів \mathcal{Q} , які з'єднують Q з Q' . Тоді, очевидно, послідовність

$$Q = Q_0, Q_1, \dots, Q_n = Q' = Q'_m, Q'_{m-1}, \dots, Q'_1, Q'_0 = Q'$$

є замкненим ланцюжком елементів \mathcal{Q} довжини $n + m$. З Твердження 2.2.12 слідує, що число $n + m$ парне. Отже, числа n і m мають однакову парність і $\text{Sign } Q'$ не залежить від вибору ланцюжка елементів \mathcal{Q} , який з'єднує Q з Q' .

Внаслідок Твердження 2.2.11 відображення Sign визначене на всьому \mathcal{Q} .

Якщо для деяких $Q_\lambda, Q_\mu \in \mathcal{Q}$ перетин $\text{Fr } Q_\lambda \cap \text{Fr } Q_\mu$ містить більше однієї точки, то Q_λ і Q_μ суміжні в \mathcal{Q} .

Дійсно, якщо $\text{Fr } Q_\lambda \cap \text{Fr } Q_\mu$ містить дві вершини v' і v'' , то з Лема 2.2.7 і її Наслідку 2.2.8 слідує, що $\text{Fr } Q_\lambda \cap \text{Fr } Q_\mu$ містить також образ єдиного шляху в T , який з'єднує v' і v'' (зокрема, і образ кожного ребра цього шляху). Якщо ж у $\text{Fr } Q_\lambda \cap \text{Fr } Q_\mu$ лежить образ точки $w \in T$, яка не є вершиною, то з Твердження 2.2.5 слідує, що $\Psi(e \setminus V_{\text{ter}}) \subset \text{Fr } Q_\lambda \cap \text{Fr } Q_\mu$, де e — ребро T , якому належить точка w .

Тоді $\text{Sign } Q_\lambda \neq \text{Sign } Q_\mu$, тому що послідовність $Q_\lambda = Q_0, Q_1 = Q_\mu$ є за означенням ланцюжком елементів \mathcal{Q} . \square

2.3 Властивості плоских відображень скінченного лісу

2.3.1 Дводольні графи, які є деревами

В цьому підрозділі ми будемо вважати, що порядок вершин графу може бути нескінченним.

Зауваження 2.3.2 *Якщо граф є деревом, кожне його ребро однозначно визначається своїми кінцями. Тому ми будемо записувати шлях, що з'єднує вершини дерева v' і v'' , як $P(v', v'') = (v_0, v_1, \dots, v_m)$, маючи на увазі, що $P(v', v'')$ є послідовністю ребер $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$.*

Означення 2.3.3 *Граф $G = (V, E)$ називається дводольним, якщо множина його вершин V є сумою двох підмножин V' і V'' , що не перетинаються, і кожне ребро $e \in E$ з'єднує деяку вершину з V' з якоюсь вершиною з V'' .*

Вершини $v_1, v_2 \in V$ будемо називати *сусідніми*, якщо вони з'єднані ребром, тобто $(v_1, v_2) \in E$.

Нехай $v \in V$. Позначимо через

$$N(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in E\} \quad (2.3.1)$$

множину всіх вершин G , що є сусідніми з v . Зрозуміло, що коли граф G дводольний, то $N(v') \subset V''$ для кожного $v' \in V'$, і навпаки, $N(v'') \subset V'$ для кожного $v'' \in V''$.

Зафіксуємо функції

$$f_v : N(v) \rightarrow \{-1, 1\}, \quad v \in V'. \quad (2.3.2)$$

Для кожного $\varepsilon : V' \rightarrow \{-1, 1\}$ розглянемо набір функцій

$$\varphi_v^\varepsilon = \varepsilon(v) \cdot f_v : N(v) \rightarrow \{-1, 1\}, \quad v \in V'. \quad (2.3.3)$$

Скажемо, що функції $\varphi_{v_1}^\varepsilon$ і $\varphi_{v_2}^\varepsilon$ *узгоджені*, якщо

- або $N(v_1) \cap N(v_2) = \emptyset$;
- або $\varphi_{v_1}^\varepsilon(w) = \varphi_{v_2}^\varepsilon(w)$ для кожної вершини $w \in N(v_1) \cap N(v_2)$.

Твердження 2.3.4 *Якщо дводольний граф G є деревом, то для довільного набору функцій (2.3.2) знайдеться відображення $\varepsilon : V' \rightarrow \{-1, 1\}$, таке що для кожної пари вершин $v_1, v_2 \in V'$ функції $\varphi_{v_1}^\varepsilon$ і $\varphi_{v_2}^\varepsilon$ узгоджені.*

Доведення цього твердження див. у Додатку **A.5**.

2.3.5 Властивості компонент доповнення до образу скінченного лісу при плоскому відображенні

Нехай граф $F = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$ є скінченим лісом, а відображення $\Psi : F \setminus V_{ter} \rightarrow \mathbb{R}^2$ є плоским.

Введемо наступні позначення. Нехай

$$\mathcal{Q} = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

є множиною всіх компонент зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(F \setminus V_{ter})$, індексованих за допомогою елементів деякої множини Λ . Для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ нехай

$$\mathcal{Q}_i = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_i}, \quad \Lambda_i = \{\lambda \in \Lambda \mid \overline{Q_\lambda} \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter}) \neq \emptyset\}$$

є множиною тих компонент $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(F \setminus V_{ter})$, які межують з образом дерева T_i .

Нехай $\mathcal{Q}^{(i)}$ — множина компонент доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T_i \setminus V_{ter})$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Зрозуміло, що для будь-якого $i \in \{1, \dots, n\}$ кожна множина, яка є елементом \mathcal{Q} , міститься в якійсь множині, що є елементом $\mathcal{Q}^{(i)}$. З іншого боку, справедливе наступне.

Твердження 2.3.6 *Нехай $i \in \{1, \dots, n\}$. Кожна множина, яка є елементом $\mathcal{Q}^{(i)}$, містить рівно одну підмножину, що є елементом \mathcal{Q}_i .*

Доведення цього твердження див. в Додатку [A.6](#).

Наслідок 2.3.7 *Для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ існує бієктивна відповідність між множинами \mathcal{Q}_i та $\mathcal{Q}^{(i)}$.*

Отже, ми можемо індексувати елементи $\mathcal{Q}^{(i)}$ за допомогою Λ_i . Введемо такі позначення.

$$\mathcal{Q}^{(i)} = \{Q_\lambda^{(i)}\}_{\lambda \in \Lambda_i}, \quad Q_\lambda^{(i)} \supset Q_\lambda, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Наслідок 2.3.8 *Для кожної пари індексів $i \in \{1, \dots, n\}$ та $\lambda \in \Lambda_i$ виконується рівність*

$$\overline{Q_\lambda} \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter}) = \overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter}).$$

Більш того, кожна точка $z \in \Psi(T_i \setminus V_{ter}) \cap \text{Fr } Q_\lambda$ досяжна з області Q_λ за допомогою простої неперервної кривої.

Доведення. Очевидно, виконується нерівність $\overline{Q_\lambda} \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter}) \subseteq \overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter})$.

Нехай $z \in (\overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter}))$ для деяких $i \in \{1, \dots, n\}$ та $\lambda \in \Lambda_i$. Лема 2.2.7 гарантує нам, що точка z досяжна з області $Q_\lambda^{(i)}$. Тому існує надріз $\alpha : I \rightarrow \overline{Q_\lambda^{(i)}}$ області $Q_\lambda^{(i)}$ в точці z її межі.

З іншого боку, за означенням плоского відображення точка z відділена від замкненої множини $R_i = (\Psi(F \setminus V_{ter}) \setminus \Psi(T_i \setminus V_{ter}))$. Тому існує $\varepsilon > 0$, таке що $U_\varepsilon(z) \cap \Psi(F \setminus V_{ter}) = U_\varepsilon(z) \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter})$.

Не обмежуючи загальність міркувань, можемо вважати, що $\alpha(I) \subset U_\varepsilon(z)$. Тоді знайдеться $\mu \in \Lambda_i$, для якого $\alpha(I) \subset \overline{Q_\mu}$. Причому $\alpha(t) \in Q_\lambda^{(i)} \cap Q_\mu$ для кожного $0 < t \leq 1$. Внаслідок цього $Q_\mu \subset Q_\lambda^{(i)}$ і з Твердження 2.3.6 слідує рівність $\mu = \lambda$. \square

2.3.9 Граф $G(\Psi)$

Зіставимо плоскому відображенню Ψ наступний граф $G(\Psi)$.

Вершинами графа $G(\Psi)$ нехай будуть такі об'єкти.

1. Дерева T_1, \dots, T_n .
2. Елементи Q_λ множини \mathcal{Q} .

Вершини Q_λ і T_i з'єднаємо *ребром*, якщо $\lambda \in \Lambda_i$ (тобто $\Psi(T_i \setminus V_{ter}) \cap \overline{Q_\lambda} \neq \emptyset$).

Граф $G(\Psi) = (V, E)$ є *дводольним* (можина його вершин розпадається в суму двох підмножин, що не перетинаються, $V = \{T_i\} \sqcup \{Q_\lambda\}$, а кінці кожного ребра належать до різних підмножин з цієї суми).

Зауважимо, що вершини графа $G(\Psi)$ можуть мати нескінченну порядок.

Лема 2.3.10 ([61]) *Граф $G(\Psi)$ є деревом.*

Доведення цієї леми наведено у Додатку А.7.

Наслідок 2.3.11 *Нехай $\overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu} \neq \emptyset$ для деяких $Q_\lambda, Q_\mu \in \mathcal{Q}$. Тоді існує єдиний індекс $i \in \{1, \dots, n\}$, такий що $Q_\lambda, Q_\mu \in \mathcal{Q}_i$.*

Доведення. За означенням $\text{Fr } Q_\lambda \cup \text{Fr } Q_\mu \subset \Psi(F \setminus V_{\text{ter}})$. Якщо $Q_\lambda \in \mathcal{Q}_i$ для деякого $i \in \{1, \dots, n\}$, то $\text{Fr } Q_\lambda \cap \Psi(T_i \setminus V_{\text{ter}}) \neq \emptyset$ і в графі $G(\Psi)$ вершини Q_λ та T_i з'єднані ребром. З урахуванням цього твердження наслідка слідує з Лема 2.3.10. \square

Означення 2.3.12 Назвемо множини $Q_\lambda, Q_\mu \in \mathcal{Q}$, $\lambda \neq \mu$, суміжними, якщо множина $\text{Fr } Q_\lambda \cap \text{Fr } Q_\mu$ містить більше однієї точки.

Наслідок 2.3.13 Нехай $\overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu} \neq \emptyset$ для деяких $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Тоді справедливе наступне.

Перетин $\text{Fr } Q_\lambda \cap \text{Fr } Q_\mu = \text{Fr } Q_\lambda^{(i)} \cap \text{Fr } Q_\mu^{(i)}$ є зв'язною множиною (індекс i відповідає Наслідку 2.3.11).

Якщо Q_λ і Q_μ суміжні, то області $Q_\lambda^{(i)}, Q_\mu^{(i)} \in \mathcal{Q}^{(i)}$ суміжні в сенсі Означення 2.2.10.

Доведення. Перше твердження слідує з Наслідків 2.3.8, 2.3.11 і Наслідку 2.2.8.

Друге твердження слідує з першого і з Твердження 2.2.5. \square

2.3.14 Відображення Sign для скінченного лісу

Лема 2.3.15 ([61]) Нехай порядок кожної вершини ліса $F = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$ або дорівнює одиниці, або є парним числом більше 2.

Тоді існує відображення $\text{Sign} : \mathcal{Q} \rightarrow \{-1, 1\}$, таке що для кожної пари суміжних областей $Q_\lambda, Q_\mu \in \mathcal{Q}$ виконується нерівність $\text{Sign}(Q_\lambda) \neq \text{Sign}(Q_\mu)$.

Доведення. Розіб'ємо множину вершин графа $G(\Psi)$ на дві частини $V_1 = \{T_1, \dots, T_n\}$ та $V_2 = \{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, що не перетинаються.

За побудовою

$$N(T_k) = \{Q_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_k\} = \mathcal{Q}_k$$

для кожної вершини $T_k \in V_1$ (див. (2.3.1)).

Згідно Лемі **2.2.13** для кожного $k \in \{1, \dots, n\}$ існує відображення $\text{Sign}^{(k)} : \mathcal{Q}^{(k)} \rightarrow \{-1, 1\}$, для якого виконується наступна умова: якщо $Q_\lambda^{(k)}$ і $Q_\mu^{(k)}$ суміжні, то $\text{Sign}^{(k)}(Q_\lambda^{(k)}) \neq \text{Sign}^{(k)}(Q_\mu^{(k)})$.

Визначимо набір відображень $\text{Sign}_k : \mathcal{Q}_k \rightarrow \{-1, 1\}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, за допомогою наступного співвідношення $\text{Sign}_k(Q_\lambda) = \text{Sign}^{(k)}(Q_\lambda^{(k)})$, $\lambda \in \Lambda_k$. Внаслідок Твердження **2.3.4** існує така функція $\varepsilon : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{-1, 1\}$, що $\varepsilon(r) \text{Sign}_r(Q_\lambda) = \varepsilon(s) \text{Sign}_s(Q_\lambda)$, якщо $\lambda \in \Lambda_r \cap \Lambda_s$, $r, s \in \{1, \dots, n\}$. Отже, коректно визначена функція

$$\text{Sign} : \mathcal{Q} \rightarrow \{-1, 1\},$$

$$\text{Sign}(Q_\lambda) = \varepsilon(k) \text{Sign}_k(Q_\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_k, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Нехай множини Q_λ і Q_μ суміжні для деяких $\lambda, \mu \in \Lambda$. Згідно Наслідку **2.3.11** існує $k \in \{1, \dots, n\}$, таке що $\lambda, \mu \in \Lambda_k$. Наслідок **2.3.13** гарантує, що множини $Q_\lambda^{(k)}$ та $Q_\mu^{(k)}$ суміжні, отже з властивостей відображення $\text{Sign}^{(k)}$ випливають наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \text{Sign}(Q_\lambda) &= \varepsilon(k) \text{Sign}_k(Q_\lambda) = \varepsilon(k) \text{Sign}^{(k)}(Q_\lambda^{(k)}) \neq \\ &\neq \varepsilon(k) \text{Sign}^{(k)}(Q_\mu^{(k)}) = \varepsilon(k) \text{Sign}_k(Q_\mu) = \text{Sign}(Q_\mu). \end{aligned}$$

Лемі доведено. \square

2.4 Доведення Теорема **2.1.6**

В цьому підрозділі ми побудуємо псевдогармонічну функцію, множиною рівня якої є заданий образ скінченного лісу при плоскому відображенні.

Ми скористаємось наступним топологічним критерієм того, що функція є псевдогармонічною (див. [14]).

Нехай X — топологічний простір, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — функція. Позначимо через $L_c = \{z \in X \mid f(z) = c\}$, $c \in f(X)$, множину рівня функції f .

Означення 2.4.1 (див. [14]) Сім'я $\{L_c\}_{c \in f(X)}$ множин рівня функції f називається *одностайно локально зв'язною* в точці $z \in X$, якщо для кожного околу W точки z знайдеться інший її окіл $W' \subset W$, такий що для будь-якого $c \in f(X)$ кожному парі точок з $L_c \cap W'$ можна з'єднати в W зв'язною підмножиною множини L_c .

Якщо сім'я $\{L_c\}_{c \in f(X)}$ одностайно локально зв'язна в кожній точці $z \in X$, кажуть, що $\{L_c\}$ одностайно локально зв'язна на X .

Теорема 2.4.2 (Тôкі) Нехай X — двовимірна поверхня. Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ є псевдогармонічною на X тоді й лише тоді, коли виконуються наступні умови:

- (1) функція f неперервна;
- (2) відображення f відкрите;
- (3) сім'я $\{L_c\}_{c \in f(X)}$ множин рівня функції f одностайно локально зв'язна на X , можливо за виключенням деякого дисконтинуума $E \subset X$.

2.4.3 Деякі технічні результати

Лема 2.4.4 Розглянемо деяку сім'ю $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ зв'язних відкритих підмножин площини, а також неперервну функцію $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Припустимо, що виконуються наступні умови.

1. $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$.
2. $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{U_i} = \mathbb{R}^2$.
3. Для всіх $i \in \mathbb{N}$ та $x \in \text{Fr } U_i$ точка x досяжна з U_i .
4. Для кожного $i \in \mathbb{N}$ функція $f|_{U_i} : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ є відкритим відображенням.
5. $f^{-1}(0) = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$. Внаслідок зв'язності кожного U_i та неперервності функції f з цього слідує, що для кожного $i \in \mathbb{N}$ функція f приймає на U_i значення одного знаку.
6. Для кожного $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ знайдуться дві множини U_j та U_k , такі що $x \in \text{Fr } U_j \cap \text{Fr } U_k$ і f приймає значення різних знаків на U_j і U_k .

7. Сім'я $\{L_c^i\}_{c \in f(\overline{U_i})}$ множин рівня функції $f|_{\overline{U_i}} : \overline{U_i} \rightarrow \mathbb{R}$ одностайно локально зв'язна на $\overline{U_i}$, $i \in \mathbb{N}$.

Тоді функція f відповідає таким вимогам.

a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є відкритим відображенням.

b) Нехай для деякого $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ існують відкритий окіл V та індекси $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$, такі що $V \subset \overline{U_j} \cup \overline{U_k}$. Тоді сім'я $\{L_c\}_{c \in f(\mathbb{R}^2)}$ множин рівня f одностайно локально зв'язна в точці x .

Доведення цієї леми див. у Додатку A.8.

Нехай $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ — замкнений диск радіусу 1 з центром в т. $(0, 1)$. Позначимо також $D' = D \setminus \{0\} = \{(x, y) \in D \mid x > 0\}$, $D_0 = \text{Int } D$, $\text{Fr } D = D \setminus D_0$.

Твердження 2.4.5 Існує неперервна функція $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає наступним властивостям.

(i) $g(D') = [0, 1)$, $g(\text{Int } D) = (0, 1)$, $\text{Fr } D \setminus \{0\} = g^{-1}(0)$.

(ii) Відображення $g|_{\text{Int } D} : \text{Int } D \rightarrow \mathbb{R}$ відкрите.

(iii) Сім'я $\{L_c\}_{c \in [0, 1)}$ множин рівня функції g одностайно локально зв'язна на D' .

Доведення цього твердження наведене у Додатку A.9.

Наслідок 2.4.6 Нехай A є власною відкритою підмножиною межі $\text{Fr } D$, $\hat{D} = \text{Int } D \cup A$.

Тоді існує неперервна функція $\hat{g} : \hat{D} \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає таким властивостям.

(i) $\hat{g}(\hat{D}) = [0, 1)$, $\hat{g}(\text{Int } D) = (0, 1)$, $A = \hat{g}^{-1}(0)$.

(ii) Відображення $\hat{g}|_{\text{Int } D} : \text{Int } D \rightarrow \mathbb{R}$ відкрите.

(iii) Сім'я $\{\hat{L}_c\}_{c \in [0, 1)}$ множин рівня функції \hat{g} одностайно локально зв'язна на \hat{D} .

Доведення. За умовою наслідку $A \neq \text{Fr } D$. Не обмежуючи загальності міркувань можемо вважати, що $0 \notin A$. Тоді $\hat{D} \subset D'$.

Розглянемо функцію $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає Твердженню 2.4.5. Нехай $\hat{g} = g|_{\hat{D}} : \hat{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

Очевидно, \hat{g} задовольняє вимоги (i) та (ii) Наслідка.

Для перевірки умови (iii) помітимо, що внаслідок відкритості A в $\text{Fr } D$ для кожного $z \in A$ існує окіл W_z^0 в \mathbb{R}^2 , такий що $W_z = W_z^0 \cap \hat{D} = W_z^0 \cap D'$. Тоді для кожного околу W точки z в D' окіл $W \cap W_z$ цієї точки в D' буде підмножиною \hat{D} . Для завершення доведення нам лишається зауважити, що $\hat{L}_c = L_c \cap \hat{D}$ для кожного $c \in [0, 1)$ і скористатись Означенням 2.4.1. \square

2.4.7 Побудова функції f

Твердження 2.4.8 *Набір множин $\{\overline{Q_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ утворює локально скінченне замкнене покриття площини.*

Для кожного $z \in \Psi(F \setminus V_{\text{ter}})$ існує принаймні дві компоненти $Q_\lambda, Q_\mu \in \mathcal{Q}$, які є суміжними і такі що $z \in \overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu}$.

Якщо $z \in \Psi(F \setminus V)$, то $z \in \text{Int}(\overline{Q_\lambda} \cup \overline{Q_\mu})$.

Доведення цього твердження наведене у Додатку A.10.

Введемо наступні поняття (див. [8]).

Відкритою кривою A назвемо гомеоморфний образ інтервалу $(0, 1)$ в \mathbb{R}^2 . Нехай множина A є образом вкладення $\alpha : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Нехай A прямує до нескінченності в обох напрямках, тобто $|\alpha(t)| \rightarrow \infty$ як при $t \rightarrow 0$, так і при $t \rightarrow 1$. Тоді по теоремі Жордана про криву (див. [46]) доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus A$ має дві компоненти зв'язності. Будемо їх позначати $\mathcal{D}(A)$ і $\mathcal{D}^(A)$.*

Теорема 2.4.9 (див. [8]) *Нехай $A_i, i = 1, \dots, n$, є відкритими кривими, що не перетинаються і прямують до нескінченності в обох напрямках. Нехай $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j) = \emptyset$ для всіх $i \neq j$ при належному виборі $\mathcal{D}(A_i)$ і $\mathcal{D}^*(A_i)$.*

Тоді множину

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}(A_i)} = \left(\bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}(A_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)$$

можна гомеоморфно відобразити зі збереженням орієнтації на об'єднання внутрішності одиничного диску в \mathbb{R}^2 і n відкритих дуг A'_1, \dots, A'_n , що лежать на його межі і не перетинаються. Причому дуга A'_i буде образом відкритої кривої A_i .

Нехай $Q_\lambda \in \mathcal{Q}$ — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(F \setminus V_{ter})$.

Нехай $\lambda \in \Lambda_i$. Тоді $A_i = \overline{Q_\lambda} \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter}) \neq \emptyset$. Згідно з Наслідком 2.3.8 $A_i = \overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter}) \neq \emptyset$. З Лема 2.2.7 слідує, що A_i є відкритою кривою і прямує до нескінченності в обох напрямках. Отже A_i ділить \mathbb{R}^2 на дві компоненти зв'язності. Позначимо через $\mathcal{D}(A_i)$ ту з них, яка містить Q_λ , а через $\mathcal{D}^*(A_i)$ — іншу.

Позначимо $J(\lambda) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda \in \Lambda_i\}$. Зрозуміло, що $J(\lambda) \neq \emptyset$.

Перевіримо, що $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j) = \emptyset$ для кожної пари індексів $i, j \in J(\lambda)$, $i \neq j$.

Множини A_i та A_j зв'язні і не перетинаються. Тому $(A_j \subset \mathcal{D}(A_i)) \vee (A_j \subset \mathcal{D}^*(A_i))$. Якщо $A_j \subset \mathcal{D}^*(A_i)$, то $\mathcal{D}^*(A_i) \cap Q_\lambda \neq \emptyset$, тому що множина $\mathcal{D}^*(A_i)$ відкрита і $A_j = \text{Fr } Q_\lambda$. А це неможливо, тому що $\emptyset \neq Q_\lambda \subset \mathcal{D}(A_i) \cap \mathcal{D}(A_j)$.

Отже $A_j \subset \mathcal{D}(A_i)$. Внаслідок цього $\mathcal{D}^*(A_j) \cap \mathcal{D}(A_i) \neq \emptyset$, тому що множина $\mathcal{D}(A_i)$ відкрита і за побудовою $A_j = \text{Fr } \mathcal{D}^*(A_j)$.

Аналогічно, $A_i \subset \mathcal{D}(A_j)$ і $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}(A_j) \neq \emptyset$.

Очевидно, $\mathcal{D}^*(A_i) = (\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j)) \cup (\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}(A_j)) \cup (\mathcal{D}^*(A_i) \cap A_j)$. Якщо ми припустимо, що $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j) \neq \emptyset$, то також має виконуватись нерівність $\mathcal{D}^*(A_i) \cap A_j \neq \emptyset$. Дійсно, в цьому випадку маємо непорожні відкриті множини $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j)$ і $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}(A_j)$, що не перетинаються. Їх об'єднання не може співпадати зі зв'язною множиною $\mathcal{D}^*(A_i)$.

Отже, $\mathcal{D}^*(A_i) \cap \mathcal{D}^*(A_j) = \emptyset$ для кожної пари індексів $i, j \in J(\lambda)$, $i \neq j$.

Внаслідок сказаного множини A_i , $i \in J(\lambda)$, відповідають вимогам Теорема 2.4.9.

З Наслідку 2.3.8 слідує, що

$$\overline{\bigcap_{i \in J(\lambda)} \mathcal{D}(A_i)} = \left(\bigcap_{i \in J(\lambda)} \mathcal{D}(A_i) \right) \cup \bigcup_{i \in J(\lambda)} A_i = Q_\lambda \cup \bigcup_{i \in J(\lambda)} A_i = \overline{Q_\lambda}.$$

Отже, існує гомеоморфізм h_λ множини $\overline{Q_\lambda}$ на об'єднання внутрішності одиничного диску в \mathbb{R}^2 і відкритих дуг A'_i , $i \in J(\lambda)$, що лежать на його межі і не перетинаються. Причому $A'_i = h_\lambda(A_i)$, $i \in J(\lambda)$.

Очевидно, ми можемо замість стандартного одиничного диску взяти $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ і вважати, що $\hat{D} = h_\lambda(\overline{Q_\lambda}) \subset D'$, $h_\lambda(Q_\lambda) = \text{Int } D$, $h_\lambda(\overline{Q_\lambda}) \cap \text{Fr } D = \bigcup_{i \in J(\lambda)} h_\lambda(A_i) = \bigcup_{i \in J(\lambda)} A'_i$.

Скористаємося Наслідком 2.4.6 і зафіксуємо неперервну функцію $g_\lambda : \hat{D} \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає умовам (i)–(iii).

Нехай $f_\lambda : \overline{Q_\lambda} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\lambda(z) = \text{Sign}(\lambda) \cdot g_\lambda \circ h_\lambda(z)$, $z \in \overline{Q_\lambda}$.

З умов (i)–(iii) Наслідку 2.4.6 слідує, що f_λ має такі властивості.

- $\text{Fr } Q_\lambda = f_\lambda^{-1}(0)$.
- Відображення $f_\lambda|_{Q_\lambda} : Q_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ відкрите.
- Сім'я $\{L_c^\lambda\}_{c \in f_\lambda(\overline{Q_\lambda})}$ множин рівня функції f_λ одностайно локально зв'язна на $\overline{Q_\lambda}$.

Побудуємо функцію $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ за допомогою співвідношення

$$f(z) = f_\lambda(z), \quad \text{якщо } z \in \overline{Q_\lambda}.$$

За означенням відкриті множини Q_λ і Q_μ не перетинаються при $\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu \in \Lambda$. Внаслідок цього $\overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu} = \text{Fr } Q_\lambda \cap \text{Fr } Q_\mu$. Отже, якщо $z \in \overline{Q_\lambda} \cap \overline{Q_\mu}$, $\lambda \neq \mu$, то $z \in \text{Fr } Q_\lambda \cap \text{Fr } Q_\mu$ і $f_\lambda(z) = f_\mu(z) = 0$. Тобто функція f означена коректно.

З Твердження 2.4.8 слідує, що сім'я $\{\overline{Q_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ утворює замкнене локально скінченне покриття площини. За означенням функція $f|_{\overline{Q_\lambda}} = f_\lambda : \overline{Q_\lambda} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна для кожного $\lambda \in \Lambda$, тому функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна (див. [80]).

Твердження 2.4.10 Сім'я $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ відкритих зв'язних підмножин площини і функція f задовольняють умови Лемми 2.4.4.

Доведення. Множина Λ зліченна, тому що простір \mathbb{R}^2 має зліченну базу топології і $Q_\lambda \cap Q_\mu = \emptyset$ при $\lambda \neq \mu$ за означенням.

Очевидно, сім'я $\{Q_\lambda\}$ відповідає умові 1).

Умова 2) є наслідком Твердження 2.4.8.

Умова 3) слідує з Наслідку 2.3.8.

Умови 4), 5) і 7) справедливі за побудовою функції f .

Умова 6) є наслідком Твердження 2.4.8 і Лема 2.3.15. \square

Твердження 2.4.11 *Якщо $z \in \Psi(F \setminus V)$, то сім'я $\{L_c\}_{c \in f(\mathbb{R}^2)}$ множин рівня функції f одностайно локально зв'язна в точці z .*

Доведення. Це прямий наслідок Лема 2.4.4 і Твердження 2.4.8. \square

Твердження 2.4.12 *Функція f псевдогармонічна.*

Доведення. З Означення 2.1.5 і Твердження 2.2.2 слідує, що образи вершин графу F під дією відображення Ψ утворюють дискретну підмножину E площини.

Тому функція f відповідає умовам (1)–(3) Теорема 2.4.2 внаслідок Тверджень 2.4.10 і 2.4.11. \square

Розділ 3

Графи Кронрода–Ріба функцій на некомпактних двовимірних поверхнях

3.1 Означення і формулювання результатів

Нехай функція f є неперервною на двовимірній поверхні M^2 і відповідає наступним властивостям.

(f.a) Множина локальних екстремумів f є дискретною.

(f.б) Якщо точка $x \in M^2$ не є локальним екстремумом f , то існує окіл U_x цієї точки, в якому f топологічно еквівалентна до функції $\operatorname{Re} z^n$ у околі нуля при деякому $n \in \mathbb{N}$.

Нагадаємо, що неперервні функції $g_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ та $g_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ називаються *топологічно еквівалентними*, якщо для деяких гомеоморфізмів $h : V_1 \rightarrow V_2$ та $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ виконується рівність $h' \circ g_1 = g_2 \circ h$.

Означення 3.1.1 Назвемо точки, в околі яких f еквівалентна до $\operatorname{Re} z$, регулярними точками f . Точки, такі що f у деякому їх околі еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$, $n > 1$, назвемо сідловими точками. Точки площини, які не є регулярними, будемо називати сингулярними точками f .

Зрозуміло, що всі сингулярні точки f ізольовані.

Таким чином, функція f породжує на поверхні одновимірне шарування з особливостями. Множина його особливостей співпадає з множиною сингулярних точок f . Регулярні шари являють собою максимальні зв'язні підмножини множин рівня функції f , що складаються з регулярних точок. Позначимо це шарування \mathfrak{F}_0 .

Твердження 3.1.2 *Регулярні шари \mathfrak{F}_0 є вкладеними у M^2 одновимірними многовидами без межі (колами або відкритими інтервалами).*

Доведення. Нехай $x \in F_0$ для деякого $F_0 \in \mathfrak{F}_0$. Тоді у деякому околі U_x регулярної точки x функція f топологічно еквівалентна до $g(z) = \operatorname{Re} z$ в околі нуля. Нехай для гомеоморфізмів $h : U_x \rightarrow V(0)$ та $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ виконуються рівності $h(x) = 0$ і $h' \circ f = g \circ h$. Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати множину $V(0)$ опуклою. Тоді множина $V(0) \cap \{0\} \times \mathbb{R}$, а разом з нею і $h^{-1}(V(0) \cap \{0\} \times \mathbb{R})$, є зв'язними. Також зрозуміло, що всі точки множини $h^{-1}(V(0) \cap \{0\} \times \mathbb{R})$ є регулярними точками f . фундаментальним виконується такий ланцюжок рівностей

$$h^{-1}(V(0) \cap \{0\} \times \mathbb{R}) = (g \circ h)^{-1}(0) = (h' \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(f(x)) \cap U_x = F_0 \cap U_x.$$

Отже, для кожної регулярної точки x в M^2 існує карта $h : U_x \rightarrow V(0)$, яка відображає окіл $U_x \cap F_0$ точки x в підпросторі F_0 простору M^2 з індукованою топологією на відкритий інтервал $V(0) \cap \{0\} \times \mathbb{R}$. \square

Розглянемо ще розбиття \mathfrak{F} поверхні на компоненти множин рівня f . Зрозуміло, що шари \mathfrak{F}_0 є підмножинами елементів розбиття \mathfrak{F} .

Елементи розбиття \mathfrak{F} , що не містять сингулярних точок f , будемо називати *регулярними*. Елементи \mathfrak{F} , що не є регулярними, назвемо *сингулярними*.

Фактор-простір поверхні по розбиттю \mathfrak{F} позначимо як $\Gamma_{K-R}(f)$. Нехай $\pi_f : M^2 \rightarrow \Gamma_{K-R}(f)$ є відображенням проєкції.

Оскільки f відображає елементи розбиття \mathfrak{F} у точки простору \mathbb{R} , то існує (див. [80]) неперервне фактор-відображення $\hat{f} : \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, таке що $f = \hat{f} \circ \pi_f$.

Зауваження 3.1.3 Відомо, що для довільної неперервної функції (яка не обов'язково відповідає умовам (f.a) і (f.б)), визначеної на квадраті I^2 або на сфері S^2 , фактор-простір $\Gamma_{K-R}(f)$ є дендритом (див. [94]).

З іншого боку для гладкої функції f з ізольованими особливостями, заданої на двовимірній компактній поверхні, на просторі $\Gamma_{K-R}(f)$ природним чином можна означити структуру топологічного графу (див. [95]), який називається графом Кронрода-Ріба функції f .

Вершини графа Кронрода-Ріба відповідають компонентам множин рівня функції, які містять сингулярні точки. Як демонструє наступний приклад, образи таких компонент у просторі $\Gamma_{K-R}(f)$ можуть мати порядок два.

Розглянемо на площині функцію $\hat{f}(x, y) = \sin \pi(x - y) \cdot \sin \pi(x + y)$. Можна показати, що це функція Морса. Вона має мінімуми в точках з координатами $(k, m + 1/2)$, максимуми в точках $(k + 1/2, m)$, сідла в точках (k, m) , $(k + 1/2, m + 1/2)$, $k, m \in \mathbb{Z}$. Всі інші точки площини є її регулярними точками. Єдина сингулярна множина рівня $\hat{f}^{-1}(0)$ є зв'язною.

Легко бачити, що ця функція 1-періодична по кожній координаті. Отже коректно означена функція $f : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, така що $\hat{f} = f \circ \text{pr}$. Ми позначимо через $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong T^2$ двовимірний тор, який є фактор-простором площини по цілочисельній ґратці, відображення $\text{pr} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ є проекцією.

Пряма перевірка показує, що кожна множина рівня функції f зв'язна. Також f має на торі один максимум $\text{pr}(1/2, 0)$, один мінімум $\text{pr}(0, 1/2)$ та дві сідлові точки, $\text{pr}(0, 0)$ і $\text{pr}(1/2, 1/2)$, котрі належать множині рівня $f^{-1}(0)$. Множини рівня функції \hat{f} і фундаментальна область тора $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ зображені на Рис. 3.1.

Простір $\Gamma_{K-R}(f)$ гомеоморфний відрізку, а $\pi_f(f^{-1}(0))$ є його внутрішньою точкою. Якщо вважати вершинами образи $\pi_f(f^{-1}(-1))$, $\pi_f(f^{-1}(0))$, $\pi_f(f^{-1}(1))$ сингулярних компонент множин рівня f , то граф Кронрода-Ріба функції f є деревом, що складається з двох ребер.

Наведені аргументи мотивують наступне означення.

Означення 3.1.4 Нехай K є об'єднанням всіх компонент множин рівня f , що містять сингулярні точки, $V = \pi_f(K)$. Пара $(\Gamma_{K-R}(f), V)$ називається

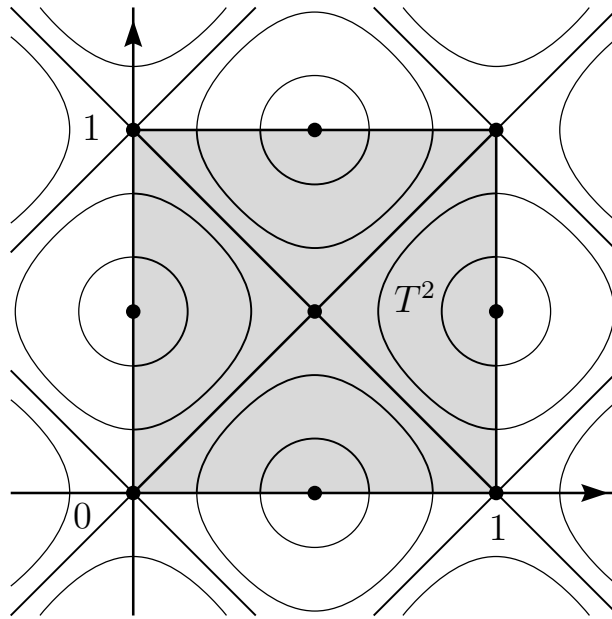


Рис. 3.1.1: Множини рівня функції $\hat{f}(x, y) = \sin \pi(x - y) \cdot \sin \pi(x + y)$.

графом Кронрода-Ріба функції f .

Далі ми будемо називати графом Кронрода-Ріба простір $\Gamma_{K-R}(f)$, вважаючи при цьому, що вказана множина його вершин V .

Для функції f на некомпактній поверхні M^2 простір $\Gamma_{K-R}(f)$ може бути влаштований набагато складніше, ніж у компактному випадку. Зокрема, він як правило не компактний і може бути не Хаусдорфовим. Наприклад для функції $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y$, образи $\pi_f((-\infty, 0) \times \{0\})$ та $\pi_f((0, \infty) \times \{0\})$ компонент множини рівня $f^{-1}(0)$ не є відокремлюваними у просторі $\Gamma_{K-R}(f)$.

Ми пропонуємо розглянути наступні умови, при виконанні яких простір $\Gamma_{K-R}(f)$ має просту будову.

(f.1) Кожна компонента множини рівня f може містити не більш ніж скінченну кількість сингулярних точок.

(f.2) Нехай K є об'єднанням всіх компонент множин рівня f , що містять сингулярні точки. Для довільного компакта $C \subset M^2$ множина $f(C \cap K)$ скінченна.

(f.3) Нехай для $a \in f(M^2)$ точки $x_1, x_2 \in M^2$ належать до різних компонент множини рівня $f^{-1}(a)$. Тоді знайдуться відкриті околи $U_1 \ni x_1$ і $U_2 \ni x_2$, такі

що для кожного $b \in f(M^2)$ і компоненти F_b множини рівня $f^{-1}(b)$ виконується співвідношення $(F_b \cap U_1 = \emptyset) \vee (F_b \cap U_2 = \emptyset)$.

Означення 3.1.5 Скажемо, що неперервна функція $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає умовам (f.a) та (f.б), є K - R -простою, якщо вона відповідає також умовам (f.1)–(f.3).

Сформулюємо основні результати даного розділу.

Наступна теорема, яку ми доведемо в Підрозділі 3.2.23, надає достатні умови для того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом з черенками.

Теорема 3.1.6 ([25]) Нехай неперервна функція f , яка відповідає умовам (f.a) та (f.б), є K - R -простою.

Тоді простір $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками.

Множина вершин графа $\Gamma_{K-R}(f)$ співпадає з образом множини K сингулярних елементів розбиття \mathfrak{F} .

Замкнені ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ є образами замикань компонент доповнення $M^2 \setminus K$.

Черенки є образами замикань компонент доповнення $M^2 \setminus K$, що мають зв'язну межу.

В Підрозділі 3.3.1 буде доведене таке твердження.

Твердження 3.1.7 ([62]) Нехай функція $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна і відповідає умовам (f.a) і (f.б).

Тоді умови (f.2) і (f.3) на функцію f є необхідними для того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом з черенками.

Умова (f.1) не є необхідною для того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом з черенками. У Додатку В ми наводимо відповідний приклад.

Якщо функція f задана на площині, то за рахунок теореми Жордана про криву функція буде K - R -простою тоді і лише тоді, коли $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками. Це твердження слідує з Теореми 3.1.6, Твердження 3.1.7 і наступної теореми, яку ми доведемо в Підрозділі 3.3.2.

Теорема 3.1.8 ([62]) *Нехай неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ відповідає умовам (f.a) і (f.б).*

Якщо Γ_{K-R} є графом с черенками, то f відповідає умові (f.1).

3.1.9 Гладкі функції з ізольованими критичними точками.

Нехай f є гладкою функцією з ізольованими критичними точками на M^2 .

Якщо $x \in M^2$ — регулярна точка функції f , то по теоремі про ранг, яка є наслідком з теореми про неявну функцію (див. [1]), існує дифеоморфізм деякого околу U_x точки x на окіл початку координат в \mathbb{R}^2 , який відображає компоненти перетину множин рівня f з U_x у множини рівня координатної проєкції $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1$.

Відома така теорема.

Теорема 3.1.10 ([96], [97]) *Для кожної ізольованої критичної точки x_0 за винятком локальних екстремумів функції $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ існує окіл, в якому функція топологічно еквівалентна функції $\operatorname{Re} z^k$ для деякого $k \in \mathbb{N}$.*

Внаслідок цієї теореми та теореми про ранг f відповідає умовам (f.a) і (f.б). Таким чином для функцій $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ справедливі аналоги Теорема 3.1.6, Твердження 3.1.7 і Теорема 3.1.8.

Зауваження 3.1.11 *Розглянемо функцію $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1x_2^2 = x_1(x_1^2 + x_2^2)$. У початку координат вона має ізольовану критичну точку, але при цьому точка 0 не є ні локальним екстремумом, ані сідловою точкою. Тож згідно Теоремі 3.1.10 у критичній точці 0 маємо для даної функції $k = 1$.*

Отже існують ізольовані критичні точки гладких функцій, що не є сингулярними в сенсі Означення 3.1.1. Внаслідок Теорема 3.1.6, якщо компонента множини рівня такої точки не містить інших сингулярних точок, то її образ у графі Кронрода-Ріба, див. Означення 3.1.4, не є вершиною.

Зауваження 3.1.12 Якщо ізольована критична точка гладкої функції не є сингулярною в сенсі Означення 3.1.1, то топологічно структура множин рівня функції в околі цієї точки нічим не відрізняється від аналогічної структури в околі регулярної точки. Але з точки зору гладкої структури така критична точка не є регулярною.

Можливо в залежності від цілей дослідження, для гладкої функції більш правильно вважати вершинами графа Кронрода-Ріба f всі її критичні точки (точки, в яких $\text{grad } f = 0$).

3.2 Властивості К- \mathbb{R} -простих функцій

3.2.1 Межові множини неперервних кривих

Нехай неперервна функція $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є К- \mathbb{R} -простою, \mathfrak{F}_0 і \mathfrak{F} — розбиття площини на підмножини ліній рівня f , означені вище.

Нехай $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M^2$ є простою неперервною кривою. Позначимо

$$L' = \bigcap_{b' > 0} \overline{\alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t < -b'\})},$$

$$L'' = \bigcap_{b'' > 0} \overline{\alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t > b''\})}.$$

Назвемо перетин

$$L = \bigcap_{a > 0} \overline{\alpha(\mathbb{R} \setminus [-a, a])} = L' \cup L''$$

межовою множиною кривої α . Інакше можна сказати, що межова множина складена з граничних точок послідовностей виду $\{\alpha(\tau_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, таких що $|\tau_i| \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$.

Зауваження 3.2.2 Кожна множина $\alpha([-a, a])$, $a > 0$, є компактом як образ компакта $[-a, a]$ під дією неперервного відображення α у Хаусдорфів

простір M^2 . Тому

$$L \cup \alpha(\mathbb{R}) = \bigcap_{a>0} \left(\overline{\alpha(\mathbb{R} \setminus [-a, a])} \cup \alpha([-a, a]) \right) = \overline{\alpha(\mathbb{R})}.$$

Твердження 3.2.3 *Нехай кожна точка множини L має як завгодно малий окіл, такий що $\alpha(\mathbb{R})$ перетинається з його межею не більше ніж у скінченній кількості точок.*

Тоді кожна з множин L' і L'' містить не більше однієї точки.

Доведення. Нехай $L' \neq \emptyset$. Тоді знайдеться $x \in L'$. Скористаємось тим, що простір M^2 є регулярним і відповідає першій аксиомі зліченності, і виберемо послідовність $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ околів точки x , які задовольняють наступні умови:

1. $\alpha(\mathbb{R})$ перетинається з межею U_k не більше ніж у скінченній кількості точок для кожного $k \in \mathbb{N}$;
2. $\overline{U_{k+1}} \subset U_k$, $k \in \mathbb{N}$;
3. $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k = \{x\}$.

З умов (2) і (3) слідує, що $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{U_k} = \{x\}$.

Припустимо, що $\text{Fr } U_k \cap \alpha(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Нехай $\text{Fr } U_k \cap \alpha(\mathbb{R}) = \{\tau_1^k, \dots, \tau_{n(k)}^k\}$. Позначимо $t_k = \min(\tau_1^k, \dots, \tau_{n(k)}^k)$ і $A_k = \alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t < t_k\})$.

Якщо $\text{Fr } U_k \cap \alpha(\mathbb{R}) = \emptyset$, нехай $A_k = \alpha(\mathbb{R})$.

За побудовою множина A_k не порожня і $A_k \cap \text{Fr } U_k = \emptyset$. Також A_k зв'язна як образ зв'язної множини під дією неперервного відображення α . Тому або $A_k \subset U_k$, або $A_k \cap U_k = \emptyset$.

Зрозуміло, що $L' \subset \overline{A_k}$, відповідно $x \in \overline{A_k}$ і $A_k \cap U_k \neq \emptyset$. Таким чином, $A_k \subset U_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Отже,

$$L' \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{A_k} \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{U_k} = \{x\}.$$

Для множини L'' застосуємо подібні міркування. \square

Легко бачити, що означення межевої множини не залежить від вибору параметризації простої неперервної кривої. Таким чином, можна говорити про межеву множину для множини $\alpha(\mathbb{R})$.

3.2.4 Властивості регулярних шарів \mathfrak{F}_0 і регулярних елементів розбиття \mathfrak{F}

Лема 3.2.5 *Якщо шар \mathfrak{F}_0 гомеоморфний інтервалу, то кожна з підмножин L' і L'' його межової множини або порожня, або є сідловою точкою.*

Доведення цієї леми наведено в Додатку **Б.1**.

Наслідок 3.2.6 *Регулярні елементи розбиття \mathfrak{F} є або вкладеними в M^2 колами, або інтервалами.*

Якщо регулярний елемент розбиття гомеоморфний інтервалу, то його межа множини порожня.

Наслідок 3.2.7 *Нехай F є регулярним елементом розбиття \mathfrak{F}_0 . Припустимо, що або множина F гомеоморфна колу, або F гомеоморфна інтервалу і її межа множини порожня.*

Тоді множина F є регулярним елементом розбиття \mathfrak{F} .

Твердження 3.2.8 *Нехай підмножина R регулярного елемента F розбиття \mathfrak{F}_0 гомеоморфна відрітку.*

Існують відкритий окіл N множини R і гомеоморфізми $h : \bar{N} \rightarrow [-1, 1]^2$, $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такі що

1. $0 \in h(R) \subset \{0\} \times (-1, 1)$;

2. $h' \circ f = \text{pr}_1 \circ h$. Тут $\text{pr}_1 : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{pr}_1(x_1, x_2) = x_1$, — координатна проєкція.

Доведення цього твердження див. у Додатку **Б.2**.

3.2.9 Насичені околи елементів розбиття \mathfrak{F}

Твердження 3.2.10 *Для довільного відкритого $U \subset M^2$ множина*

$$W(U) = \{F \in \mathfrak{F}_0 \mid F \cap U \neq \emptyset\}$$

відкрита в M^2 .

Доведення. Нехай $x \in W(U) \cap F$, $F \in \mathfrak{F}_0$. Тоді $F \cap U \neq \emptyset$.

Якщо F є сингулярним елементом \mathfrak{F}_0 , то $F = \{x\}$ і $x \in U \subset \text{Int } W(U)$.

Нехай F є регулярним елемент \mathfrak{F}_0 . Якщо $x \in U$, то x є внутрішньою точкою множини $W(U)$.

Припустимо, що $x \notin U$. Фіксуємо $x' \in U \cap F$. Згідно Твердженню 3.1.2, F є вкладеним у M^2 інтервалом або колом. В будь-якому випадку існує підмножина $R \subset F$, яка гомеоморфна відрізку та містить точки x і x' .

Нехай відкритий окіл N множини R та гомеоморфізми h і h' задовольняють Твердження 3.2.8. Легко бачити, що кожна множина $h^{-1}(\{c\} \times (-1, 1))$, $c \in (-1, 1)$, є зв'язною, належить деякій множині рівня f і складається з регулярних точок (зокрема $R \subset h^{-1}(\{0\} \times (-1, 1)) \subset F$). Тому з включення $h^{-1}(w) \in N \cap U$ слідує $N \cap h^{-1}(\text{pr}_1^{-1}(\text{pr}_1(w))) \subset W(U)$.

Координатна проекція pr_1 є відкритим відображенням, тому множина

$$N \cap (\text{pr}_1 \circ h)^{-1}(\text{pr}_1 \circ h(N \cap U))$$

відкрита в M^2 , містить R (а разом з ним і x) і є підмножиною $W(U)$. \square

Твердження 3.2.11 *Простір Γ_{K-R} Хаусдорфів.*

Доведення цього твердження наведено у Додатку Б.3.

Нагадаємо (див. [80]), що множина $A \subset M^2$ називається *насиченою множиною* відносно розбиття \mathfrak{F} , якщо для довільного $F \in \mathfrak{F}$ з нерівності $F \cap A \neq \emptyset$ слідує включення $F \subset A$. Іншими словами, множина A є насиченою відносно розбиття \mathfrak{F} , якщо $A = \pi_f^{-1}(\pi_f(A))$.

При доведенні Твердження 3.2.11 ми побудували специфічний окіл компоненти множини рівня f , див. (Б.3.3). Фактично ми довели наступне.

Твердження 3.2.12 *Для кожної компоненти F множини рівня $f^{-1}(c)$ існує насичений відносно розбиття \mathfrak{F} окіл W , такий що $W \cap f^{-1}(c) = F$.*

3.2.13 Компоненти доповнення $M^2 \setminus K$ та їх проекції під дією π_f .

Нагадаємо, що K є об'єднанням усіх сингулярних елементів розбиття \mathfrak{F} . Нехай Q є компонентою множини $M^2 \setminus K$.

Твердження 3.2.14 Множина Q відкрита в M^2 .

Доведення. Доведемо спочатку, що множина K замкнена.

Нагадаємо (див. [98]), що топологічний простір X називається *компактно породженим*, якщо підмножина $A \subset X$ замкнена в X коли для кожного компактного підпростору $C \subset X$ замкнений перетин $A \cap C$. Відомо ([98]), що локально компактний простір є компактно породженим. Таким чином простір M^2 компактно породжений.

Нехай $C \subset M^2$ компактна множина. Відповідно умові (f.2) множина $f(K \cap C)$ скінченна. Нехай $f(K \cap C) = \{c_1, \dots, c_m\}$.

Згідно Твердженню 3.2.12 кожна компонента довільної множини рівня f є його відкрито-замкненою підмножиною. Множини рівня неперервної функції f замкнені, тому для кожної множини рівня об'єднання довільної сім'ї її компонент є замкненою множиною. Таким чином усі множини $f^{-1}(c_i) \cap K$, $i = 1, \dots, m$, замкнені. Тоді й множина

$$K \cap C = K \cap C \cap \bigcup_{i=1}^m f^{-1}(c_i)$$

замкнена.

З довільності у виборі компакта $C \subset M^2$ слідує, що множина K замкнена в M^2 .

Простір M^2 локально зв'язний. Тому (див. [47]) компонента Q відкритої множини $M^2 \setminus K$ сама є відкритою множиною. \square

Твердження 3.2.15 Нехай неперервні криві $\alpha_1, \alpha_2 : [0, 1] \rightarrow \bar{Q}$ відповідають наступним властивостям.

1. $\alpha_1(0), \alpha_2(0) \in F_0$ для деякого регулярного елемента $F_0 \in \mathfrak{F}$.

2. $f \circ \alpha_1(1) = f \circ \alpha_2(1)$.
3. Функції $f \circ \alpha_1, f \circ \alpha_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є строго монотонними.
4. $\alpha_1(t), \alpha_2(t) \in Q$ для всіх $t \in [0, 1]$.

Тоді для довільних $\tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$ з рівності $f \circ \alpha_1(\tau_1) = f \circ \alpha_2(\tau_2)$ слідує, що точки $\alpha_1(\tau_1)$ і $\alpha_2(\tau_2)$ належать одній компоненті множини рівня f .

Доведення цього твердження наведено в Додатку **Б.4**.

Лема 3.2.16 *Нехай точки $x, y \in Q$ належать різним множинним рівня f . Тоді x і y можна з'єднати в Q простою неперервною кривою $\alpha_{x,y} : [0, 1] \rightarrow M^2$ так, що функція $f \circ \alpha_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотонна.*

Доведення цієї леми див. у Додатку **Б.5**

Наслідок 3.2.17 *Якщо перетин Q з деякою множиною рівня f не порожній, то він зв'язний.*

Доведення. Нехай $F_1 \cup F_2 \subset f^{-1}(c) \cap Q$ для деяких $c \in \mathbb{R}$, $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$. Фіксуємо $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$.

Оскільки F_1 є регулярною компонентою $f^{-1}(c)$, то існує окіл $U \subset Q$ точки x_1 , такий що $f|_U$ топологічно еквівалентна $\operatorname{Re} z$ у деякому околі нуля. Отже існує $y \in U$, для якого $f(y) \neq f(x_1)$.

Скористаємося Лемою **3.2.16** і з'єднаємо точку y з точками x_1 і x_2 в Q простими неперервними кривими α_1 і α_2 відповідно, такими що функції $f \circ \alpha_1$ і $f \circ \alpha_2$ строго монотонні.

За побудовою $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = y$. Оскільки $f(x_1) = f \circ \alpha_1(1) = f \circ \alpha_2(1) = f(x_2)$, то з Твердження **3.2.15** слідує, що $F_1 = F_2$. \square

3.2.18 Замикання компонент доповнення $M^2 \setminus K$ і їх проєкції під дією π_f .

Нехай як і раніше Q є компонентою множини $M^2 \setminus K$.

Лема 3.2.19 Нехай точки $x, y \in \overline{Q}$ належать різним множиним рівня f .

Тоді x і y можна з'єднати в \overline{Q} такою простою неперервною кривою $\alpha_{x,y} : [0, 1] \rightarrow M^2$, що $\alpha_{x,y}(t) \in Q$ для кожного $t \in (0, 1)$ і функція $f \circ \alpha_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є строго монотонною.

Доведення цієї леми див. у Додатку Б.6.

Наслідок 3.2.20 Нехай $\text{Fr } Q$ має непорожній перетин з множиною рівня $f^{-1}(c)$.

Тоді $\text{Fr } Q \cap f^{-1}(c)$ міститься в сингулярному елементі розбиття \mathfrak{F} і виконується співвідношення

$$(f(Q) \subset \{t \in \mathbb{R} \mid t < c\}) \vee (f(Q) \subset \{t \in \mathbb{R} \mid t > c\}). \quad (3.2.1)$$

Доведення. Справедливість співвідношення (3.2.1) було перевірено при доведенні Леми 3.2.19. З нього слідує, що $\text{Fr } Q \cap f^{-1}(c)$ міститься в об'єднанні сингулярних елементів \mathfrak{F} .

Нехай $\text{Fr } Q \cap F_1 \neq \emptyset$, $\text{Fr } Q \cap F_2 \neq \emptyset$ для деяких $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, $F_1, F_2 \subset f^{-1}(c)$. Фіксуємо $x_1 \in \text{Fr } Q \cap F_1$, $x_2 \in \text{Fr } Q \cap F_2$.

Оскільки множина Q не є порожньою, зі співвідношення (3.2.1) слідує, що знайдеться така точка $y \in Q$, що $f(y) \neq c$. Повторюючи міркування з Наслідку 3.2.17, отримаємо з Леми 3.2.19 і Твердження 3.2.15 рівність $F_1 = F_2$. \square

Позначимо $I = [0, 1]$, $\partial I = \{0, 1\}$.

Теорема 3.2.21 Для довільної компоненти $Q \subset M^2 \setminus K$ існують множина $J \in \{(0, 1), (0, 1], [0, 1), I\}$ та ін'єктивне неперервне відображення $\alpha_Q : J \rightarrow \overline{Q}$, такі що

1. функція $f \circ \alpha_Q : J \rightarrow \mathbb{R}$ строго зростає на J ;
2. $f \circ \alpha_Q(J \setminus \partial J) = f(Q)$, $f \circ \alpha_Q(\partial J) = f(\text{Fr } Q)$;
3. відображення $\hat{\alpha}_Q = \pi_f \circ \alpha_Q : J \rightarrow \Gamma_{K-R}(f)$ є гомеоморфізмом на свій образ $\overline{\pi_f(Q)} = \pi_f(\overline{Q})$.

Доведення цієї теореми наведено в Додатку **Б.7**

Позначимо через \mathcal{Q} розбиття множини $M^2 \setminus K$ на компоненти зв'язності.

Твердження 3.2.22 *Нехай $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset K$. Тоді існують насичений відносно розбиття \mathfrak{F} окіл W множини F і скінченний набір компонент $Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{Q}$, $m = m(F)$, які відповідають наступним властивостям:*

- $\overline{Q}_s \cap F \neq \emptyset$ при $s = 1, \dots, m$;
- $\overline{Q} \cap W = \emptyset$ для всіх $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_1, \dots, Q_m\}$.

Доведення. Якщо F містить локальний екстремум f , то згідно властивості (f.a) F є ізольованою точкою множини рівня f і Твердження виконується.

Нехай F не містить локальних екстремумів f . З властивості (f.1) функції f слідує, що всі точки F є регулярними окрім скінченної множини x_1, \dots, x_k сингулярних точок f .

Нехай U_i — відкритий окіл точки x_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, такий що обмеження f на U_i топологічно еквівалентне $\text{Re } z^r$ для деякого $r = r(i) > 1$ в околі початку координат. Скористаємось властивістю (f.2) функції f і оберемо U_i настільки малим, що $K \cap U_i \subset F$. Тоді існують $Q_{ij} \in \mathcal{Q}$, $j = 1, \dots, 2r(i)$, такі що $F \cap \overline{Q}_{ij} \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, 2r(i)$, і

$$U_i \subset F \cup \bigcup_{j=1}^{2r(i)} Q_{ij}.$$

Змінімо нумерацію множин Q_{ij} : нехай

$$\{Q_s\}_{s=1}^m = \{Q_{ij}\}_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, 2r(i)}}.$$

Тоді $Q \cap U_i = \emptyset$, $i = 1, \dots, k$, якщо $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_s\}_{s=1}^m$.

Розглянемо множину

$$W = \{\hat{F} \in \mathfrak{F} \mid \hat{F} \cap \bigcup_{i=1}^k U_i \neq \emptyset\}.$$

Так само, як і у Твердженні 3.2.11 доводиться, що ця множина відкрита.

W є насиченням множини $F \cup \bigcup_{i=1}^k U_i$, отже $W \subset F \cup \bigcup_{s=1}^m Q_s$ і $W \cap Q = \emptyset$ для довільного $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_s\}_{s=1}^m$. А оскільки W відкрита, то і $W \cap \overline{Q} = \emptyset$ при $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_s\}_{s=1}^m$. \square

3.2.23 Доведення Теорема 3.1.6

Побудуємо по функції f топологічний граф G .

Згідно Теорема 3.2.21 для кожної компоненти Q множини $M^2 \setminus K$ існують $J_Q \in \{(0, 1), [0, 1), (0, 1], I\}$ і вкладення $\hat{\alpha}_Q : J_Q \rightarrow \Gamma_{K-R}(f)$. Нехай $J_Q \subset I_Q = [0, 1]$.

Розглянемо множину $\tilde{V} = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \partial I_Q$ всіх кінців відрізків I_Q і введемо на ній наступне відношення. Нехай $w_1 \in \partial I_{Q_1}$, $w_2 \in \partial I_{Q_2}$. Скажемо, що $w_1 \sim w_2$ тоді й тільки тоді, коли $w_1 \in J_{Q_1}$, $w_2 \in J_{Q_2}$ і $\hat{\alpha}_{Q_1}(w_1) = \hat{\alpha}_{Q_2}(w_2)$.

Зрозуміло, що \sim є відношенням еквівалентності. Отже воно породжує розбиття \mathfrak{h} множини \tilde{V} , елементами якого є класи еквівалентності.

Очевидно, розбиття \mathfrak{h} є подрібненням розбиття

$$\tilde{V} = \left(\tilde{V} \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q \right) \sqcup \left(\tilde{V} \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q \right).$$

Відмітимо дві властивості розбиття \mathfrak{h} .

- Нехай $A \in \mathfrak{h}$ і $A \subset \tilde{V} \setminus \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$. Тоді $|A| = 1$.
- Якщо $A \in \mathfrak{h}$ і $A \subset \tilde{V} \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$, то $|A| < \infty$.

Перша властивість слідує з означення відношення \sim .

Перевіримо виконання другої властивості.

Припустимо, що $A \in \mathfrak{h}$ і $A \subset \tilde{V} \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$. Нехай $w_1 \in \partial I_{Q_1} \cap A$, $w_2 \in \partial I_{Q_2} \cap A$ і $w_1 \neq w_2$. Згідно Наслідку 3.2.20 і Теорема 3.2.21 це еквівалентно тому, що $Q_1 \neq Q_2$ і $\alpha_{Q_1}(w_1), \alpha_{Q_2}(w_2) \in F$ для деякого $F \in \mathfrak{F}$, такого що $F \subset K$, $F \cap \overline{Q_1} \neq \emptyset$ і $F \cap \overline{Q_2} \neq \emptyset$.

Таким чином, множині A можна зіставити сингулярний елемент F розбиття \mathfrak{F} , а кожному елементу $w \in A$ відповідає компонента $Q \in \mathcal{Q}$, така що $F \cap \overline{Q} \neq \emptyset$. Причому, якщо $w_1, w_2 \in A$, $w_1 \neq w_2$, то для відповідних компонент $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ виконується нерівність $Q_1 \neq Q_2$.

З Твердження 3.2.22 слідує, що існує скінченна сім'я $Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{Q}$ така, що $F \cap \overline{Q}_s \neq \emptyset$, $s = 1, \dots, m$, і $F \cap \overline{Q} = \emptyset$ для довільного $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_s\}_{s=1}^m$. Тому $|A| = m$ і виконується друга властивість розбиття \mathfrak{h} .

Отже, існує ін'єктивна відповідність між елементами розбиття \mathfrak{h} , які містяться в $\tilde{V} \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$, і сингулярними елементами розбиття \mathfrak{F} . Помітимо, що для довільного $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset K$, існує $Q \in \mathcal{Q}$, таке що $F \cap \overline{Q} \neq \emptyset$, тому $F \cap \alpha_Q(J_Q \cap \partial I_Q) \neq \emptyset$ внаслідок Теорема 3.2.21 і дана відповідність є бієктивною.

Розглянемо фактор-множину $V = \tilde{V}/\mathfrak{h}$, елементами якої є елементи розбиття \mathfrak{h} . Позначимо через $\text{pr} : \tilde{V} \rightarrow V$ відображення проєкції.

Розглянемо предсимпліціальний комплекс G , 0-вимірними симплексами якого є елементи V , а одновимірними симплексами є пари $\langle v_1, v_2 \rangle$, такі що $\partial I_Q \cap \text{pr}^{-1}(v_1) \neq \emptyset$ і $\partial I_Q \cap \text{pr}^{-1}(v_2) \neq \emptyset$ для деякого $Q \in \mathcal{Q}$, що залежить від $\langle v_1, v_2 \rangle$.

Очевидно, що для кожного $v \in V$ кількість одновимірних симплексів, що містять 0-грань v , збігається з потужністю множини $\text{pr}^{-1}(v)$. Ми знаємо, що $|\text{pr}^{-1}(v)| < \infty$, $v \in V$, тому комплекс G локально-скінченний. Тобто G є (абстрактним) графом.

Позначимо $V_0 = \{v \in V \mid \text{pr}^{-1}(v) \cap \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q = \emptyset\}$. Тоді $|\text{pr}^{-1}(v)| = 1$ для кожного $v \in V_0$ і $V_0 \subset V_{ter}$, де V_{ter} є множиною термінальних вершин G .

Розглянемо абстрактний поліедр $|G|$, що відповідає комплексу G . Можна вважати 1-симплексами $|G|$ відрізки I_Q , $Q \in \mathcal{Q}$. Нехай $\{w_1, w_2\} = \partial I_Q$. Тоді $I_Q = |\langle v_1, v_2 \rangle|$, якщо $w_1 \in \text{pr}^{-1}(v_1)$, $w_2 \in \text{pr}^{-1}(v_2)$. Будемо ототожнювати кінці відрізків з їх образами під дією відображення проєкції.

Згідно Теоремі 3.2.21 для кожного $Q \in \mathcal{Q}$ визначене вкладення $\hat{\alpha}_Q^{-1} : \overline{\pi_f(Q)} \rightarrow J_Q \subset I_Q$. Оскільки $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \overline{Q} = M^2$, то $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \overline{\pi_f(Q)} = \overline{\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \pi_f(Q)} = \Gamma_{K-R}(f)$. За означенням множини V для кожного $x \in \overline{\pi_f(Q_1)} \cap \overline{\pi_f(Q_2)}$ справедлива рівність $\hat{\alpha}_{Q_1}^{-1}(x) = \hat{\alpha}_{Q_2}^{-1}(x) \in |G|$, тому визначене відображення $\varphi : \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow |G|$,

$$\varphi(x) = \hat{\alpha}_Q^{-1}(x), \quad \text{якщо } x \in \overline{\pi_f(Q)} = \pi_f(\overline{Q}). \quad (3.2.2)$$

Помітимо, що за означенням всі множини $\pi_f(Q)$, $Q \in \mathcal{Q}$, відкриті і попарно не перетинаються. Тоді і $\pi_f(Q_1) \cap \overline{\pi_f(Q_2)} = \emptyset$, якщо $Q_1 \neq Q_2$, $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$.

Нехай $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset K$. Згідно Твердженню 3.2.22 існують скінченна сім'я $\{Q_1(F), \dots, Q_m(F)\} \subset \mathcal{Q}$ і насичений окіл W множини F , такі що $\overline{Q} \cap W = \emptyset$ при $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_1(F), \dots, Q_m(F)\}$. Тоді і $\pi_f(\overline{Q}) \cap \pi_f(W) = \emptyset$ при $Q \in \mathcal{Q} \setminus \{Q_1(F), \dots, Q_m(F)\}$.

Зі сказаного слідує, що покриття $\{\overline{\pi_f(Q)}\}_{Q \in \mathcal{Q}}$ простору $\Gamma_{K-R}(f)$ є локально-скінченним.

Відомо (див. [80]), що замкнене локально-скінченне покриття топологічного простору є фундаментальним. Відображення, обмеження якого на кожний елемент такого покриття неперервне, саме є неперервним.

Таким чином, відображення φ неперервне.

Зрозуміло, що $\varphi(\Gamma_{K-R}(f)) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$. Покриття $\{I_Q\}_{Q \in \mathcal{Q}}$ простору $|G|$ є фундаментальним за означенням топології на $|G|$. Внаслідок цього покриття $\{J_Q\}_{Q \in \mathcal{Q}}$ простору $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$ з індукованою з $|G|$ топологією також є фундаментальним.

Легко бачити, що гарно означене відображення $\psi : \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q \rightarrow \Gamma_{K-R}(f)$,

$$\psi(u) = \hat{\alpha}_Q(u), \quad \text{якщо } u \in J_Q. \quad (3.2.3)$$

Його обмеження на кожну з множин J_Q , $Q \in \mathcal{Q}$, неперервне, тому ψ є неперервним відображенням.

Легко перевірити, що $\psi = \varphi^{-1}$. Отже φ — гомеоморфізм простору $\Gamma_{K-R}(f)$ на свій образ $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q$.

За побудовою $G_0 = |G| \setminus V_0 = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} J_Q = \varphi(\Gamma_{K-R}(f))$. Тому G_0 є топологічним графом с черенками.

Інші твердження Теорема впливають безпосередньо з формул (3.2.2), (3.2.3) і з Теорема 3.2.21.

3.3 Необхідні умови щоб простір Кронрода-Ріба був графом з черенками.

Нехай неперервна функція $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ відповідає умовам (f.a) і (f.б).

У цьому підрозділі ми дослідимо умови, необхідні для того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом з черенками.

Спочатку ми доводимо, що умови (f.2) і (f.3) є необхідними.

У Додатку В побудовано приклад, який демонструє, що умова (f.1) не є необхідною.

Проте виявляється, що для функції f на площині умова (f.1) все ж є необхідною для того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом з черенками.

3.3.1 Доведення Твердження 3.1.7.

Відомо, що поліедр предсимпліціального комплексу є Хаусдорфовим простором (див. [80]). Внаслідок цього топологічні графи і графи з черенками є Хаусдорфовими просторами.

Нехай $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками.

Припустимо, що для деякого компакта $C \subset M^2$ множина $f(K \cap C)$ нескінченна. Тоді множина $\pi_f(K \cap C)$ також нескінченна. Дійсно, за означенням простору $\Gamma_{K-R}(f)$ для довільних $x_1, x_2 \in M^2$ з нерівності $f(x_1) \neq f(x_2)$ слідує $\pi_f(x_1) \neq \pi_f(x_2)$.

За означенням справедлива рівність $V = \pi_f(K)$, де V є множиною вершин графа з черенками $\Gamma_{K-R}(f)$. Тому $\pi_f(K \cap C) \subset V$.

З іншого боку, оскільки простір $\Gamma_{K-R}(f)$ Хаусдорфів, образ $\pi_f(C)$ компакта C сам є компактом. Внаслідок цього підмножина $\pi_f(K \cap C)$ множини вершин V має граничну точку. Але це неможливо, оскільки V є замкненою дискретною підмножиною $\Gamma_{K-R}(f)$.

З отриманої суперечності слідує, що f відповідає властивості (f.2).

Нехай $x_1, x_2 \in M^2$ і $\pi_f(x_1) \neq \pi_f(x_2)$. Припустимо, що для довільної пари околів $U_1 \ni x_1$, $U_2 \ni x_2$ існує $F \in \mathfrak{F}$, таке що $F \cap U_1 \neq \emptyset$ і $F \cap U_2 \neq \emptyset$. Тоді довільні околі $V_1 \ni \pi_f(x_1)$, $V_2 \ni \pi_f(x_2)$ мають непорожній перетин.

Дійсно, множини $\pi_f^{-1}(V_1)$ і $\pi_f^{-1}(V_2)$ є околами точок x_1 і x_2 , відповідно. Внаслідок цього існує $F \in \mathfrak{F}$, для якого $F \cap \pi_f^{-1}(V_1) \neq \emptyset$ і $F \cap \pi_f^{-1}(V_2) \neq \emptyset$. Нехай $u = \pi_f(F)$. Тоді $u \in V_1 \cap V_2$.

Внаслідок довільності у виборі околів V_1 і V_2 простір $\Gamma_{K-R}(f)$ не є Хаусдорфовим і не може бути графом з черенками.

Отримана суперечність доводить, що f відповідає властивості (f.3).

3.3.2 Функції на площині \mathbb{R}^2 .

Для доведення Теорема 3.1.8 нам знадобиться одне технічне твердження, котре ми зараз і розглянемо.

Припустимо, що неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ відповідає властивостям (f.a) і (f.б).

Нехай x_0 є сідловою точкою множини рівня f . Позначимо $c = f(x_0)$.

Нехай U є відкритим околом x_0 , $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $g = \operatorname{Re}(z^n) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $n > 1$. Нехай $h : \bar{U} \rightarrow D$ і $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — такі гомеоморфізми, що $h(x_0) = 0$, $h(\bar{U}) = D$ і $g \circ h = h' \circ f$.

З властивості (f.б) функції f і Означення 3.1.1 слідує, що для точки x_0 названі U , $n > 1$, h та h' завжди існують.

Множина

$$g^{-1}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \pi(2k + 1)/2n, k = 0, \dots, 2n - 1\}$$

розбиває D на $2n$ секторів

$$W_k = \{z \in D \setminus \{0\} \mid \arg z \in (\pi(2k - 1)/2n, \pi(2k + 1)/2n)\},$$

$$k = 0, \dots, 2n - 1.$$

На кожному з них функція g знакопостійна: $g > 0$ на W_k при парному k і $g < 0$ на W_k при непарному k .

Оскільки довільний гомеоморфізм $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є строго монотонною фун-

кцією, то існує $\epsilon \in \{-1, 1\}$, таке що

$$\text{Sign}(g \circ h(x_1) - g \circ h(x_2)) = \epsilon \text{Sign}(f(x_1) - f(x_2)), \quad x_1, x_2 \in \bar{U}.$$

Зокрема, $\text{Sign } g \circ h(x) = \text{Sign}(g \circ h(x) - g \circ h(x_0)) = \epsilon \text{Sign}(f(x) - f(x_0)) = \epsilon \text{Sign}(f(x) - c)$.

Таким чином, множина $f^{-1}(c)$ розбиває \bar{U} на $2n$ компонент зв'язності

$$E_k = h^{-1}(W_k), \quad k = 0, \dots, 2n - 1,$$

на кожній з яких різниця $f(x) - c$, $x \in E_k$ є знакопостійною і має один знак при парних k та протилежний знак при непарних k .

Позначимо $S = \text{Fr } U = \bar{U} \setminus U$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Оскільки множина ∂D гомеоморфна колу, то з теореми Жордана про криву (див. [47]) слідує, що $\partial D = h(S)$.

Твердження 3.3.3 *Нехай $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ — проста замкнена крива, що відповідає наступним вимогам:*

- $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$;
- або $f \circ \gamma(t) \geq c = f(x_0)$ для всіх $t \in I$, або $f \circ \gamma(t) \leq c$ для всіх $t \in I$;
- $\gamma(I) \cap S = \{x_1, x_2\}$, $x_1 \neq x_2$;
- $x_1 \in E_{k_1}$, $x_2 \in E_{k_2}$, $k_1 \neq k_2$.

Тоді існує $m \in \{0, \dots, 2n - 1\}$, таке що E_m міститься в диску O_γ , котрий обмежує крива γ , і $(f(x) - c)(f(x_1) - c) < 0$ для всіх $x \in E_m$.

Доведення. Не обмежуючи загалу будемо вважати, що $f \circ \gamma(t) \geq 0$ для всіх $t \in I$. Тоді $f \circ \gamma(x_i) > 0$, $i = 1, 2$.

Згідно теоремі Жордана про криву (см. [46]) проста замкнена крива γ обмежує множину O_γ , гомеоморфну відкритому диску.

Помітимо, що якщо $f(x) < 0$ для кожного $x \in E_s$ при деякому $s \in \{0, \dots, 2n - 1\}$, то $\gamma(I) \cap E_s = \emptyset$. А оскільки множина E_s зв'язна, то або $E_s \subset O_\gamma$, або $E_s \cap O_\gamma$.

Позначимо $A_k = E_k \cap \text{Fr } U = E_k \cap S$, $k = 0, \dots, 2n - 1$. За побудовою різниця

$f(x) - c$ знакопостійна на кожній A_k , притому має один знак при парних k і протилежний при непарних k .

Легко бачити, що в залежності від вибору напрямку при обході кола S множини A_k проходяться послідовно по зростанню або спаданню індексів. Числа $f(x_1)$ і $f(x_2)$ за умовами Твердження мають один знак, тому індекси k_1 і k_2 мають однакову парність. Внаслідок цього кожна з двох дуг, L_1 і L_2 , на які коло S розбивається множинами $\{x_1, x_2\}$, містить принаймні одне A_i , таке що $f(x) - c < 0$ для всіх $x \in A_i$. Нехай $A_r \subset L_1$, $A_s \subset L_2$, і $f(x) - c < 0$ для всіх $x \in A_r \cup A_s$. Відмітимо, що тоді також $f(x) - c < 0$ і $(f(x) - c)(f(x_1) - c) < 0$ для всіх $x \in E_r \cup E_s$.

Безпосередня перевірка показує, що множина $E_r \cup E_s \cup \{x_0\}$ розбиває \bar{U} на дві компоненти зв'язності і точки x_1 та x_2 знаходяться в різних компонентах. Точки x_1 і x_2 розбивають криву γ на дві дуги Γ_1 та Γ_2 . Нехай $x_0 \in \Gamma_1$. Оскільки за побудовою $\Gamma_2 \cap (E_r \cup E_s \cup \{x_0\}) = \emptyset$, то $\Gamma_2 \setminus \bar{U} \neq \emptyset$. Внаслідок цього, $O_\gamma \setminus \bar{U} \neq \emptyset$.

Помітимо, що хоча б одна з дуг L_1 і L_2 міститься в O_γ . Дійсно, в протилежному випадку $S \cap O_\gamma = \text{Fr } U \cap O_\gamma = \emptyset$. Тоді з $O_\gamma \setminus \bar{U} \neq \emptyset$ слідує, що $U \cap O_\gamma = \emptyset$. А це неможливо, оскільки U є околком точки $x_0 \in \gamma(I) = \text{Fr } O_\gamma$.

Нехай $L_1 \subset O_\gamma$. Тоді $A_r \subset O_\gamma$ і $E_r \subset O_\gamma$, оскільки множина E_r зв'язна, $E_r \cap O_\gamma \neq \emptyset$ і $E_r \cap \text{Fr } O_\gamma = \emptyset$.

Випадок $L_2 \subset O_\gamma$ розглядається аналогічно. \square

Доведення Теорема 3.1.8. Нехай існує $F \in \mathfrak{F}$, $F \subset K$, таке що F містить нескінченну кількість сингулярних точок f . Нехай $u = \pi_f(F) \in V \subset \Gamma_{K-R}(f)$.

Згідно умові (f.a) локальні екстремуми f є ізольованими точками множин рівня. Внаслідок цього всі сингулярні точки, що містяться в F , є сідловими точками. Позначимо

$$\mathcal{Q}_F = \{Q \in \mathcal{Q} \mid \bar{Q} \cap F \neq \emptyset\}.$$

Для доведення теореми досить показати, що \mathcal{Q}_F містить нескінченну кількість елементів. Дійсно, всі множини $Q \in \mathcal{Q}_F$ зв'язні і попарно не перетинаються. Тому всі $\pi_f(Q)$, $Q \in \mathcal{Q}_F$, також зв'язні і попарно не перетинаються.

Крім того, $\pi_f(Q) \cap V = \emptyset$, $Q \in \mathcal{Q}_F$, оскільки $V = \pi_f(K)$. Внаслідок цього кожна $\pi_f(Q)$ є зв'язною підмножиною деякого відкритого ребра. Оскільки $u \in \overline{\pi_f(Q)} \cap V$, $Q \in \mathcal{Q}_F$, то для довільних $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}_F$ при $Q_1 \neq Q_2$ множини $\pi_f(Q_1)$ і $\pi_f(Q_2)$ мають належати різним ребрам $\Gamma_{K-R}(f)$. Отже, вершина u буде інцидентна нескінченній кількості ребер і $\Gamma_{K-R}(f)$ не буде локально скінченим графом.

Нехай Σ_F є множиною всіх сингулярних точок f , що містяться в F .

Легко бачити, що оскільки f відповідає умовам (f.a) і (f.б) а F є сингулярною компонентою множини рівня, то $\overline{Q} \cap \Sigma_F \neq \emptyset$ для кожного $Q \in \mathcal{Q}_F$.

Позначимо через \mathcal{Q}_F^{fin} множину всіх $Q \in \mathcal{Q}_F$, для яких множина $\overline{Q} \cap \Sigma_F$ скінченна. Нехай \mathcal{Q}_F^{inf} — всі $Q \in \mathcal{Q}_F$, для яких множина $\overline{Q} \cap \Sigma_F$ є нескінченною.

Введемо ще наступні позначення

$$\begin{aligned}\Sigma_F^{fin} &= \{x \in \Sigma_F \mid \exists Q \in \mathcal{Q}_F^{fin} : x \in \overline{Q}\}, \\ \Sigma_F^{inf} &= \Sigma_F \setminus \Sigma_F^{fin} = \{x \in \Sigma_F \mid (x \in \overline{Q} \Rightarrow Q \in \mathcal{Q}_F^{inf}) \forall Q \in \mathcal{Q}_F\}.\end{aligned}$$

Помітимо, що внаслідок властивостей (f.б) і (f.2) функції f кожна сингулярна точка F межує зі скінченною кількістю множин з \mathcal{Q} . Отже, множина Σ_F^{fin} скінченна. Інакше множина $\mathcal{Q}_F^{inf} \subset \mathcal{Q}_F$ була б нескінченною і простір $\Gamma_{K-R}(f)$ не був би графом з черенками.

Таким чином, згідно припущенню про нескінченність множини Σ_F , множина Σ_F^{inf} також є нескінченною.

Оберемо $Q_0 \in \mathcal{Q}_F^{inf}$. Нехай $\Sigma_0 = \overline{Q_0} \cap \Sigma_F^{inf}$. Тоді множина Σ_0 нескінченна.

Як ми знаємо, означене неперервне фактор-відображення $\hat{f} : \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, таке що $f = \hat{f} \circ \pi_f$. З властивості (f.б) функції f легко слідує, що на ребрах і черенках графа $\Gamma_{K-R}(f)$ відображення \hat{f} строго монотонне.

Зв'язна множина $\pi_f(Q_0)$ міститься в деякому ребрі або черенку графа $\Gamma_{K-R}(f)$. Оскільки $u \in \overline{\pi_f(Q_0)} \setminus \pi_f(Q_0)$, то Q_0 міститься в одній з множин $H^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) > \hat{f}(u)\}$ або $H^- = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) < \hat{f}(u)\}$.

Не обмежуючи загалу будемо вважати, що $Q_0 \subset H^+$ (інакше функцію f можна замінити на $-f$).

Перевіримо, що для кожного $x_0 \in \Sigma_0$ існує таке $Q(x_0) \in \mathcal{Q}_F^{inf}$, що $x_0 \in \overline{Q(x_0)}$, $Q(x_0) \neq Q_0$ і $Q(x_0) \subset H^+$.

Скориставшись властивістю (f.6) функції f , знайдемо такі окіл U точки x_0 , $n > 1$, та гомеоморфізми $h : \overline{U} \rightarrow D$, $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що $h(x_0) = 0$, $h(\overline{U}) = D$ і $g \circ h = h' \circ f$. Тут $g = \operatorname{Re} z^n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Позначимо $S = \operatorname{Fr} U$.

З Твердження 3.1.7 слідує, що f відповідає властивості (f.2). Тому окіл U можна обрати настільки малим, що $\overline{U} \cap K \subset F$.

Як ми знаємо, множина F розбиває диск \overline{U} на $2n$ попарно неперетинних зв'язних множин E_k , $k = 0, \dots, 2n - 1$, таких що $x_0 \in \overline{E_k}$ для кожного k . На кожній з цих множин різниця $f(x) - f(x_0) = f(x) - \hat{f}(u)$ знакопостійна і має один знак на множинах з парними номерами і протилежний знак на множинах з непарними номерами.

За вибором околу U виконуються співвідношення $\bigcup_{k=0}^{2n-1} E_k \subset \mathbb{R}^2 \setminus K$. Внаслідок цього, для кожного $k \in \{0, \dots, 2n - 1\}$ існує $Q(k) \in \mathcal{Q}_F$, таке що $E_k \subset Q(k)$. Більш того, $Q(k) \in \mathcal{Q}_F^{inf}$, тому що $x_0 \in \Sigma_F^{inf}$.

Оскільки $x_0 \in \overline{Q_0}$, то знайдеться $s \in \{0, \dots, 2n - 1\}$, для якого $E_s \subset Q_0 \subset H^+$. Існує ще принаймні один індекс $r \neq s$, $r \in \{0, \dots, 2n - 1\}$, котрий має з s однакову парність. Тоді $E_r \subset H^+$. Виконується рівно одна з двох можливостей: або $E_r \subset Q_0$, або $E_r \cap Q_0 = \emptyset$.

Припустимо, що $E_r \subset Q_0$.

Очевидно, що точка x_0 досяжна за допомогою простої неперервної кривої як з E_s , так і з E_r (див. [46]). Крім того, Q_0 є відкритою зв'язною підмножиною \mathbb{R}^2 , отже вона лінійно зв'язна і будь-яку пару точок $x' \in E_r$, $x'' \in E_s$ можна з'єднати в Q_0 за допомогою простої неперервної кривої. Внаслідок цього знайдеться проста замкнена крива $\alpha : I \rightarrow Q_0 \cup \{x_0\}$, така що $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ і для деяких $0 < \tau_1 < \tau_2 < 1$ виконуються співвідношення $\alpha(t) \in E_s \forall t \in (0, \tau_1]$ і $\alpha(t) \in E_r \forall t \in [\tau_2, 1)$.

Нехай $t_1 = \max\{t \leq \tau_2 \mid \alpha(t) \in \overline{E_s}\}$. Оскільки $\overline{E_r} \cap \overline{E_s} = \{x_0\}$, то $0 < t_1 < \tau_2$. Нехай $t_2 = \min\{t \geq t_1 \mid \alpha(t) \in \overline{E_r}\}$. З аналогічних міркувань, $t_1 < t_2 < 1$. Зі співвідношень $\operatorname{Fr} E_s \subset F \cup \operatorname{Fr} U = F \cup S \subset (\mathbb{R}^2 \setminus Q_0) \cup S$ робимо висновок, що $\alpha(t_1) \in S$. Аналогічно, $\alpha(t_2) \in S$.

Розглянемо прості неперервні криві $\beta_i : I \rightarrow D$,

$$\beta_i(t) = t \cdot h \circ \alpha(t_i), \quad i = 1, 2.$$

Криві $\alpha_i = h^{-1} \circ \beta_i : I \rightarrow \bar{U}$, $i = 1, 2$, з'єднують x_0 з точками $\alpha(t_1)$ і $\alpha(t_2)$, відповідно. При цьому $\alpha_1(t) \in E_s \cap U$ і $\alpha_2(t) \in E_r \cap U$ для кожного $t \in (0, 1)$.

За побудовою $\alpha(t) \notin \bar{E}_r \cup \bar{E}_s$ при всіх $t \in (t_1, t_2)$, тому неперервна крива $\gamma : I \rightarrow Q_0 \cup \{x_0\}$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha_1(3t) & \text{якщо } t \leq 1/3, \\ \alpha((2-3t)t_1 + (3t-1)t_2) & \text{якщо } t \in (1/3, 2/3), \\ \alpha_2(3-3t) & \text{якщо } t \geq 2/3, \end{cases}$$

є простою.

Очевидно, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Оскільки $\gamma(t) \in Q_0$ при $t \in (0, 1)$, то $f \circ \gamma(t) > f(x_0)$ при $t \in (0, 1)$. Також за побудовою $\gamma(I) \cap S = \{\gamma(1/3), \gamma(2/3)\}$, причому $\gamma(1/3) \in E_s$, $\gamma(2/3) \in E_r$ і $r \neq s$.

Отже, ми знаходимося в умовах Твердження 3.3.3 і існує індекс $m \in \{0, \dots, 2n-1\}$, такий що E_m міститься в диску O_γ , що обмежений кривою γ , і виконується співвідношення $E_m \subset H^-$.

Існує $Q \in \mathcal{Q}_F^{inf}$, таке що $E_m \subset Q$. Тоді $Q \in H^-$. Оскільки за побудовою $\gamma(I) \cap H^- = \emptyset$, то $Q \subset O_\gamma$ і множина \bar{Q} компактна. Функція f відповідає властивості (f.6), тому з компактності \bar{Q} слідує, що $Q \in \mathcal{Q}_F^{fin}$. Проте $x_0 \in \Sigma_0 \subset \Sigma_F^{inf}$ і за означенням $\mathcal{Q}_F^{inf} \cap \mathcal{Q}_F^{fin} = \emptyset$.

Отримана суперечність доводить, що $E_r \cap Q_0 = \emptyset$.

Існує $Q(x_0) \in \mathcal{Q}_F^{inf}$, для якого $E_r \subset Q(x_0)$. Тоді $x_0 \in \overline{Q(x_0)}$, $Q(x_0) \neq Q_0$ і $Q(x_0) \subset H^+$.

Перевіримо, що $Q(x_0) \neq Q(x_1)$ при $x_0 \neq x_1$, $x_0, x_1 \in \Sigma_0$.

Припустимо, що це не так і для деяких $x_0, x_1 \in \Sigma_0$, $x_0 \neq x_1$ маємо $Q(x_0) = Q(x_1)$.

Як і раніше, скористаємось властивістю (f.6) функції f і знайдемо відкритий окіл U точки x_0 , $n > 1$, та гомеоморфізми $h : \bar{U} \rightarrow D$, $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такі що

$h(x_0) = 0$, $h(\bar{U}) = D$ і $g \circ h = h' \circ f$. Нехай $S = \text{Fr } U$.

Оберемо U настільки малим, що $\bar{U} \cap K \subset F$ і $x_1 \notin \bar{U}$.

Як і вище, множина F розбиває диск \bar{U} на $2n$ попарно неперетинних зв'язних множин E_k , $k = 0, \dots, 2n - 1$, таких що $x_0 \in \bar{E}_k$ для кожного k . На кожній з цих множин різниця $f(x) - f(x_0)$ знакопостійна і має один знак на множинах з парними номерами і протилежний знак на множинах з непарними номерами.

Також згідно вибору околу U виконуються співвідношення $\bigcup_{k=0}^{2n-1} E_k \subset \mathbb{R}^2 \setminus K$. Тому знайдуться індекси $r, s \in \{0, 2n - 1\}$, $r \neq s$, що мають однакову парність, і такі що $E_r \subset Q(x_0)$, $E_s \subset Q_0$. Очевидно, що $E_r \cup E_s \subset H^+$.

Множини Q_0 і $Q(x_0)$ лінійно зв'язні, а точки x_0 і x_1 досяжні з кожної з цих множин. Тому існують прості неперервні криві $\mu_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus H^-$ і $\mu_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus H^-$, що відповідають таким умовам:

- $\mu_0(0) = \mu_1(0) = x_0$, $\mu_0(1) = \mu_1(1) = x_1$;
- $\mu_0(t) \in Q_0$, $\mu_1(t) \in Q(x_0)$ при всіх $t \in (0, 1)$;
- існують $\tau_1, \tau_2 \in (0, 1)$, такі що $\mu_0(t) \in E_s$ при $t \in (0, \tau_1]$ і $\mu_1(t) \in E_r$ при $t \in (0, \tau_2]$.

Оскільки $Q_0 \cap Q(x_0) = \emptyset$, то відображення $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus H^-$,

$$\alpha(t) = \begin{cases} \mu_0(2t) & \text{якщо } t \leq 1/2, \\ \mu_1(2 - 2t) & \text{якщо } t > 1/2, \end{cases}$$

є простою замкненою кривою, причому $\alpha(t) \in E_s$ при $t \in (0, \tau_1/2]$ і $\alpha(t) \in E_r$ при $t \in [1 - \tau_2/2, 1)$.

Застосовуючи міркування, аналогічні до наведених вище (з очевидними змінами), знайдемо просту замкнену криву $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus H^-$, що задовольняє Твердження 3.3.3.

З Твердження 3.3.3, як і вище, слідує що знайдеться $Q \in \mathcal{Q}_F$, таке що $x_0 \in \bar{Q}$ і замикання \bar{Q} компактне. Тому $Q \in \mathcal{Q}_F^{inf}$, що суперечить вибору точки x_0 , оскільки $x_0 \in \Sigma_F^{inf}$.

Отже, для кожного $x_0 \in \Sigma_0$ існує $Q(x_0) \in \mathcal{Q}_F^{inf}$, причому $Q(x_0) \neq Q(x_1)$

при $x_0 \neq x_1, x_0, x_1 \in \Sigma_0$.

Внаслідок цього множина $Q_F^{inf} \subset Q_F$ містить нескінченну кількість елементів і $\Gamma_{K-R}(f)$ не є графом с черенками. \square

Розділ 4

Про топологічну еквівалентність псевдогармонічних функцій загального положення на площині

4.1 Умови \mathfrak{J} і функції загального положення

Нехай V_1, V_2 — області на площині. Нагадаємо, що неперервні функції $g_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ та $g_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ називаються *топологічно еквівалентними*, якщо для деяких гомеоморфізмів $h : V_1 \rightarrow V_2$ та $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ виконується рівність $h' \circ g_1 = g_2 \circ h$. Функції g_1 та g_2 *орієнтовано топологічно еквівалентні*, якщо додатково гомеоморфізми h та h' зберігають орієнтацію.

Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна функція, яка задовольняє наступним умовам, які позначимо \mathfrak{J} .

а) Для кожного $x \in \mathbb{R}^2$ в околі точки x функція f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$, $n \in \mathbb{N}$, в околі початку координат (якщо $n = 1$, тоді точку x називатимемо *регулярною* точкою; якщо $n > 1$, тоді x називатимемо *сингулярною* точкою).

б) Число сингулярних точок функції f є скінченним.

в) Нехай для $a \in \mathbb{R}$, точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ належать різним компонентам множини рівня $f^{-1}(a)$. Тоді знайдуться відкриті околи $U_1 \ni x_1$ і $U_2 \ni x_2$, такі

що для кожного $b \in \mathbb{R}$ і компоненти F_b множини рівня $f^{-1}(b)$ виконується співвідношення $(F_b \cap U_1 = \emptyset) \vee (F_b \cap U_2 = \emptyset)$.

Означення 4.1.1 Скажемо, що $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є функцією загального положення, якщо на кожній множині рівня міститься не більше однієї сингулярної точки.

4.2 Простір Кронрода-Ріба функції f

Розглянемо розбиття площини, елементами якого є компоненти множин рівня f . Елементи розбиття, які містять сингулярні точки, назвемо *сингулярними*. Всі інші компоненти множин рівня будемо називати *регулярними*.

Фактор-простір $\Gamma_{K-R}(f)$ площини по вказаному розбиттю називається *простором Кронрода-Ріба функції f* . Позначимо через $\pi_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Gamma_{K-R}(f)$ відображення проєкції.

Оскільки f відображає елементи розбиття на компоненти своїх множин рівня в точки \mathbb{R} , то існує (см. [80]) неперервне фактор-відображення $f_{K-R} : \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, таке що $f = f_{K-R} \circ \pi_f$.

Позначимо через Σ_f і K_f множину сингулярних точок і об'єднання сингулярних компонент множин рівня f . Число $a \in f(\mathbb{R}^2)$ називається *сингулярним значенням* функції f , якщо $f^{-1}(a) \cap \Sigma_f \neq \emptyset$.

Зауваження 4.2.1 Нехай $x \in \mathbb{R}^2$, F_x — компонента множини рівня f , яка містить x . Оскільки множина $\overline{F_x} \subset f^{-1}(f(x))$ зв'язна (див. [47]), то $\overline{F_x} = F_x$.

З умов \mathfrak{J} слідує, що множина K_f є незв'язним об'єднанням скінченної кількості замкнених сингулярних компонент множин рівня f . Тому множина $K_f \setminus F_x$ замкнена і x має оточення, який не перетинається з цією множиною.

З пунктів а)-в) умови \mathfrak{J} і з Теорема 3.1.6, слідує наступне твердження.

Теорема 4.2.2 Простір Кронрода-Ріба функції $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$, що задовольняє умові \mathfrak{J} є графом з черенками, множина вершин якого збігається з множиною $\pi_f(K_f)$.

Замкнені ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ є образами замикання компонент множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, черенки є образами замикання компонент $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, що мають зв'язну межу.

Зауваження 4.2.3 За означенням граф $\Gamma_{K-R}(f)$ локально-скінчений, тому з попереднього Зауваження і Теорема 4.2.2 слідує, що цей граф скінченний коли f відповідає умовам \mathfrak{J} .

4.3 Орієнтація ребер графа Кронрода-Ріба і відношення порядку на його вершинах, індуковані f

Нехай f є функцією загального положення. Помітимо, що на ребрах графу $\Gamma_{K-R}(f)$ функція f_{K-R} є строго монотонною.

Дійсно, у протилежному випадку на деякому відкритому ребрі e функція f_{K-R} мала б (нестрогий) локальний екстремум. Внаслідок цього обмеження $f|_{\pi^{-1}(e)}$ мало б у деякій точці x відкритої множини $\pi^{-1}(e)$ локальний екстремум. Отже, f теж мала б локальний екстремум у точці x . А це неможливо, оскільки за умовою \mathfrak{J} у деякому околі точки x функція f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$ в околі початку координат для певного $n \in \mathbb{N}$. А точка 0 очевидно не є локальним екстремумом $\operatorname{Re} z^n$ ні при якому $n \in \mathbb{N}$.

Отже, на кожному ребрі графу $\Gamma_{K-R}(f)$ визначений напрямок зростання f_{K-R} і функція f індукує орієнтацію ребер на $\Gamma_{K-R}(f)$.

На множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ можна ввести декілька різних відношень строгого часткового порядку, пов'язаних з f .

Означимо порядок $P_1(f)$, поклавши $v_1 < v_2$, якщо $f_{K-R}(v_1) < f_{K-R}(v_2)$, де v_1, v_2 – вершини на графі. З означення 4.1.1 слідує, що $f_{K-R}(v_1) \neq f_{K-R}(v_2)$

при $v_1 \neq v_2$. Тому для функцій загального положення порядок $P_1(f)$ є лінійним.

Зрозуміло, що порядок $P_1(f)$ узгоджений з орієнтацією на $\Gamma_{K-R}(f)$ у наступному сенсі. Якщо вершини v_1 та v_2 є відповідно початком і кінцем орієнтованого ребра e , то $v_1 < v_2$.

Частковий порядок $P_2(f)$ на множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ визначимо наступним чином. Скажемо, що вершина v_1 передує v_2 , якщо існує орієнтований шлях, для якого вершина v_1 є початком, а v_2 - кінцем.

Відмітимо, що порядок $P_2(f)$ є слабшим за $P_1(f)$, оскільки $\Gamma_{K-R}(f)$ може містити вершини, які не можна з'єднати за допомогою орієнтованого шляху.

Нехай f є функцією загального положення, $\Gamma_{K-R}(f)$ - її простір Кронрода-Ріба. З огляду на Теорему 4.2.2 ми будемо називати $\Gamma_{K-R}(f)$ *орієнтованим графом з черенками Кронрода-Ріба* функції f , або скорочено *графом Кронрода-Ріба* функції f .

4.4 Означення циклу

Для того, щоб означити додаткову структуру на графах Кронрода-Ріба, нам буде потрібне поняття циклу елементів множини.

Отже, нехай A - деяка множина, A^∞ - множина всіх скінченних послідовностей елементів A . Нехай \mathfrak{h} - розбиття множини A^∞ , породжене відношенням

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle \sim \langle a_2, \dots, a_r, a_1 \rangle, \quad \langle a_1, \dots, a_r \rangle \in A^\infty.$$

Елементи фактор-множини $\hat{A} = A/\mathfrak{h}$ будемо називати *циклами* на A .

Нехай $p : A^\infty \rightarrow \hat{A}$ - проекція. Позначимо $(a_1, \dots, a_r) = p(\langle a_1, \dots, a_r \rangle)$, $\langle a_1, \dots, a_r \rangle \in A^\infty$.

Якщо $p(\langle b_1, \dots, b_r \rangle) = (a_1, \dots, a_r)$, назвемо послідовність $\langle b_1, \dots, b_r \rangle$ *представником* циклу (a_1, \dots, a_r) .

Елементи $a_i, a_{i+1} \in A$ послідовності $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ будемо називати *сусідніми*, $i \in \{1, \dots, r-1\}$.

Назвемо *сусідніми* елементи $a_i, a_{i+1} \in A$ циклу (a_1, \dots, a_r) , $i \in \{1, \dots, r-$

1}, а також елементи a_r та a_1 .

4.5 Спін

Нехай $x \in \mathbb{R}^2$ є сингулярною точкою функції f загального положення. Нехай $F_x \ni x$ — відповідна компонента сингулярної множини рівня f . Зафіксуємо окіл $U \subset F_x \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K_f)$ точки x (див. Зауваження 4.2.1) та гомеоморфізми $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$, $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які зберігають орієнтацію і такі що виконуються рівності $h(x) = 0$ та $h' \circ f = \operatorname{Re} z^n \circ h$ для деякого $n \geq 2$. Нехай $V = h(U)$.

Позначимо

$$Z_n = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z^n = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{\pi}{2n}(1 + 2k), k \in \mathbb{Z}\}. \quad (4.5.1)$$

З означень слідує, що $h(f^{-1}(f(x))) = Z_n \cap h(U)$.

Існує $\varepsilon > 0$, для якого $U_\varepsilon(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\} \subset V$. Множина $U_\varepsilon(0) \setminus Z_n$ розпадається на $2n$ областей V_1, \dots, V_{2n} . Прообраз $\hat{V}_s = h^{-1}(V_s)$ кожної з них є зв'язною підмножиною доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ в силу вибору U і h . Тому згідно з Теоремою 4.2.2 для кожного $s = 1, \dots, 2n$ існує ребро e_s графа $\Gamma_{K-R}(f)$, таке що $\hat{V}_s \subset \pi^{-1}(e_s)$.

Отже, послідовності областей $\langle V_1, \dots, V_{2n} \rangle$ відповідає послідовність $\langle e_1, \dots, e_{2n} \rangle$ ребер графа Кронрода-Ріба, а тому і цикл ребер (e_1, \dots, e_{2n}) .

Означення 4.5.1 *Нехай індекси областей V_1, \dots, V_{2n} збільшуються від 1 до $2n$ при обході навколо початку координат у додатному напрямі, який визначається орієнтацією площини \mathbb{C} .*

Назвемо відповідний їм цикл спіном у вершині $v = \pi_f(x)$ графа Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ і позначимо його $\triangleleft v$.

Твердження 4.5.2 *Означення спіна коректне.*

Доведення зводиться до легкої безпосередньої перевірки.

Означення 4.5.3 (див. [10]) *Нехай у деякому околі сингулярної точки $x \in \mathbb{R}^2$ функція f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$, $n > 1$, в околі початку координат. Число $n - 1$ називається кратністю сингулярної точки x .*

4.6 Властивості спіна.

Твердження 4.6.1 *Нехай f є функцією загального положення, що задовольняє умови \mathfrak{J} . Тоді кожна сингулярна компонента множини рівня функції f є об'єднанням сингулярної точки f кратності $n - 1$, ($n > 1$ — деяке число, яке залежить від компоненти), і $2n$ променів які виходять з сингулярної точки і прямують до нескінченності.*

Доведення цього твердження див. у Додатку Г.1.

Наслідок 4.6.2 *Нехай x — сингулярна точка f , F_x — сингулярна компонента множини рівня f , яка містить x , Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$.*

Якщо $\overline{Q} \cap F_x \neq \emptyset$, то $x \in \overline{Q}$.

Нехай H — компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. Якщо $\overline{Q} \cap H \neq \emptyset$, то $H \subset \overline{Q}$.

Доведення. Нехай H — компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. З Твердження 4.6.1 слідує, що $x \in \overline{H}$. Отже, перше твердження Наслідку слідує з другого.

Нехай $x' \in \overline{Q} \cap H$. Візьмемо деяке $x'' \in H$.

Оскільки множина H гомеоморфна інтервалу внаслідок Твердження 4.6.1, то в ній існує підмножина R , яка гомеоморфна відрізку і містить x' та x'' . Користуючись компактністю множини R із Зауваження 4.2.1 легко вивести, що існує окіл U множини R , для якого виконується співвідношення $U \cap K_f \subset H$.

З Твердження 4.6.1 слідує, що H містить лише регулярні точки f , тому до R можна застосувати Твердження 3.2.8. Отже, існують такі окіл N множини R і гомеоморфізм $h : \overline{N} \rightarrow [-1, 1]^2$, що $h(\overline{N} \cap F_x) = \{0\} \times [-1, 1]$. Зменшуючи окіл N , можна вважати, що $\overline{N} \subset U$ і $h(\overline{N} \cap K_f) = \{0\} \times [-1, 1]$.

Розглянемо множини $W_1 = (-1, 0) \times (-1, 1)$ і $W_2 = (0, 1) \times (-1, 1)$, а також їх прообрази $V_i = h^{-1}(W_i)$, $i = 1, 2$. Зрозуміло, що множини V_1 і V_2 зв'язні. Також за побудовою $N \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K_f) = V_1 \cup V_2$.

$x' \in N \cap \overline{Q}$, тому $N \cap Q \neq \emptyset$. Оскільки $Q \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$, то $Q \cap (V_1 \cup V_2) \neq \emptyset$.

Нехай $Q \cap V_1 \neq \emptyset$. Множина $V_1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$ зв'язна, а Q є компонентою зв'язності $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ тому $V_1 \subset Q$. Зрозуміло, що $x'' \subset R \subset \overline{V_1} \subset \overline{Q}$.

Аналогічно, якщо $Q \cap V_2 \neq \emptyset$, то $x'' \subset \overline{V_2} \subset \overline{Q}$.

Остаточно, $H \subset \overline{Q}$ внаслідок довільності у виборі $x'' \in H$. \square

Твердження 4.6.3 *Нехай f є функцією загального положення, що задовольняє умови \mathfrak{J} . Нехай сингулярна компонента F її множини рівня містить сингулярну точку x_0 кратності $n - 1$ для деякого $n > 1$.*

Тоді множині F в $\Gamma_{K-R}(f)$ відповідає вершина, якій інцидентні рівно $2n$ ребер, $n > 1$. Причому для n з цих ребер вершина є початком, для інших n ребер – кінцем.

Доведення цього твердження наведено у Додатку Г.2.

Наслідок 4.6.4 *Нехай v – вершина $\Gamma_{K-R}(f)$, $\sphericalangle v = (e_1, \dots, e_{2n})$ – спір у вершині v . Тоді всі елементи циклу (e_1, \dots, e_{2n}) різні і у цьому циклі приймають участь усі ребра, інцидентні v у $\Gamma_{K-R}(f)$.*

У кожній парі сусідніх ребер циклу $\sphericalangle v$ ребра мають різні орієнтації відносно v (для одного ребра v є початком, для іншого – кінцем).

Доведення. Це твердження слідує з локального вигляду функції f у околі сингулярної точки (див. умови \mathfrak{J}) і з Твердження 4.6.3. \square

Наслідок 4.6.5 *Нехай x – сингулярна точка f , F_x – сингулярна компонента множини рівня f , $x \in F_x$.*

Нехай Q – компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з F_x . Тоді множина $\overline{Q} \cap F_x$ є об'єднанням сингулярної точки і двох променів, що виходять із цієї точки і прямують на нескінченність.

Нехай H – компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. Тоді є рівно дві компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, спільна межа яких містить H . Замикання будь якої іншої компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ не перетинається з H .

Припустимо, що H міститься у спільній межі компонент Q' і Q'' множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$. Нехай $e' = \pi_f(Q')$, $e'' = \pi_f(Q'')$ — відповідні їм ребра $\Gamma_{K-R}(f)$, $v = \pi_f(F_x)$ — вершина, що відповідає компоненті F_x множини рівня f , $\triangleleft v$ — спіл у вершині v . Тоді ребра e' і e'' є сусідніми елементами циклу $\triangleleft v$.

Якщо ребра e' і e'' є сусідніми елементами циклу $\triangleleft v$, то у спільній межі відповідних їм областей Q' і Q'' міститься компонента множини $F_x \setminus \{x\}$, причому така компонента єдина.

Доведення цього наслідку див. у Додатку [Г.3](#)

4.7 Навантажені графи Кронрода-Ріба

Можна побудувати приклади, які демонструють, що граф Кронрода-Ріба не є повним інваріантом функції загального положення, див. Приклад [Д.2](#) з наступного підрозділу. Тобто існують топологічно не еквівалентні функції, які мають ізоморфні графи Кронрода-Ріба.

Нехай f задовольняє умовам \mathfrak{J} і є функцією загального положення. Наша мета знайти додаткове навантаження на $\Gamma_{K-R}(f)$, яке б перетворювало його на повний інваріант f .

Означення 4.7.1 Слабо навантаженим графом Кронрода-Ріба називається орієнтований граф $\Gamma_{K-R}(f)$, для якого в кожній вершині визначений спіл.

Виявляється, що орієнтації ребер і спіна у вершинах $\Gamma_{K-R}(f)$ не досить, щоб розрізнити функції загального положення. Справа у тому, що частковий порядок $P_2(f)$, що породжений орієнтацією ребер $\Gamma_{K-R}(f)$, не є лінійним. Тобто, не кожна пара вершин порівняна по відношенню до цього порядку.

Легко будується приклад двох функцій загального положення, які мають ізоморфні слабо навантажені графи Кронрода-Ріба, але породжують різні лінійні порядки на множинах вершин цих графів.

Однак нижче ми доведемо, що слабо навантажені графи Кронрода-Ріба розрізняють функції відносно більш слабкої, ніж топологічна, еквівалентності, яку ми зараз і означимо.

Означення 4.7.2 Нехай неперервні функції f і g відповідають умовам \mathfrak{J} . Скажемо, що f і g пошарово еквівалентні (відповідно, орієнтовно пошарово еквівалентні), якщо існує гомеоморфізм (відповідно, орієнтований гомеоморфізм) площини на себе, який відображає компоненти множин рівнів f на компоненти множин рівнів g .

Лінійний порядок $P_1(f)$ є інваріантом відносно орієнтованої топологічної еквівалентності функцій, але слабо навантажений граф Кронрода-Ріба з лінійним порядком $P_1(f)$ на множині вершин все ще не є повним інваріантом, див. Приклад [Д.3](#). Потрібно додатково відстежувати поведінку f “на нескінченності”.

Граф з черенками не є справжнім графом у комбінаторному сенсі. Він отриманий зі “справжнього графа” шляхом вилучення деякої підмножини вершин порядку 1.

Зрозуміло, що маючи граф з черенками і його розбиття на вершини і ребра, можна однозначно відновити на ньому комбінаторну структуру графа, “додавши назад” вилучені вершини порядку 1. Будемо називати такі вершини *віртуальними*. Множину віртуальних вершин позначимо V_{virt} .

Згадаємо, що на $\Gamma_{K-R}(f)$ визначена функція f_{K-R} , така що $f_{K-R} \circ \pi_f = f$. Для кожного ребра e визначені дві величини $m(e) = \inf_{x \in e} f_{K-R}(x)$ і $M(e) = \sup_{x \in e} f_{K-R}(x)$. Кожна з цих величин може бути як скінченною, так і $\pm\infty$.

Нехай V — множина вершин $\Gamma_{K-R}(f)$. На множині $V \cup V_{virt}$ означимо функцію f_{lim} наступним чином. Якщо v є початком ребра e , нехай $f_{lim}(v) = m(e)$; якщо v є кінцем e , нехай $f_{lim}(v) = M(e)$.

Ми встановили вище, що f_{K-R} строго монотонна на ребрах. Внаслідок цього $f_{lim} = f_{K-R}$ на множині V “справжніх” вершин $\Gamma_{K-R}(f)$. Оскільки всі віртуальні вершини мають порядок 1, то f_{lim} коректно визначена також на V_{virt} .

Нас буде цікавити не вся множина V_{virt} , а лише ті віртуальні вершини, на яких f_{lim} набуває скінченні значення. Позначимо

$$V_{fin} = \{v \in V_{virt} \mid f_{lim}(v) \neq \pm\infty\}.$$

Множину $V_{ext} = V \cup V_{fin}$ назовемо *розширеною множиною вершин графа* $\Gamma_{K-R}(f)$.

Функція f_{lim} породжує на V_{ext} відношення часткового порядку $P_{ext}(f)$, яке визначається наступним чином. Нехай $v_1, v_2 \in V_{ext}$. Якщо $f_{lim}(v_1) < f_{lim}(v_2)$, то $v_1 < v_2$. Якщо $f_{lim}(v_1) = f_{lim}(v_2)$, то v_1 і v_2 непорівнянні. Назвемо це відношення *розширеним відношенням порядку на* V_{ext} .

Зрозуміло, що $P_{ext}(f)$ збігається з $P_1(f)$ на V . Також очевидно, що $P_{ext}(f)$ узгоджене з орієнтацією ребер $\Gamma_{K-R}(f)$ у тому сенсі, що кінець ребра завжди більше його початку.

Твердження 4.7.3 *Відношення “бути непорівнянними відносно $P_{ext}(f)$ ” є транзитивним на множині V_{ext} .*

Доведення. Нехай v_1 і v_2 , а також v_2 і v_3 непорівнянні відносно $P_{ext}(f)$. Тоді $f_{lim}(v_1) = f_{lim}(v_2)$ і $f_{lim}(v_2) = f_{lim}(v_3)$. Внаслідок цього v_1 і v_3 непорівнянні. \square

Означення 4.7.4 *Нехай на множині A задане відношення ρ часткового порядку. Якщо відношення “бути непорівнянними відносно ρ ” є транзитивним на A , то відношення ρ називається функцієподібним.*

Отже, відношення $P_{ext}(f)$ функцієподібне.

Означення 4.7.5 *Навантаженим графом Кронрода-Ріба називається слабо навантажений граф $\Gamma_{K-R}(f)$ разом із підмножиною V_{fin} множини віртуальних вершин і розширеним відношенням порядку $P_{ext}(f)$ на розширеній множині вершин $V_{ext} = V \cup V_{fin}$.*

Нехай $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ — орієнтовані графи з черенками. Розглянемо орієнтовані комбінаторні графи G_f і G_g , які їм відповідають. Множиною вершин G_f (G_g) є об'єднання звичайних і віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ ($\Gamma_{K-R}(g)$), елементами множини ребер G_f (G_g) є ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ ($\Gamma_{K-R}(g)$). Інцидентність вершин до ребер і орієнтація ребер переноситься з відповідного графа з черенками.

Означення 4.7.6 Комбінаторним ізоморфізмом орієнтованих графів з черенками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ називається ізоморфізм орієнтованих графів G_f і G_g , який відображає множини віртуальних вершин графа $\Gamma_{K-R}(f)$ на множини віртуальних вершин графа $\Gamma_{K-R}(g)$.

Означення 4.7.7 (Слабо) навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентні, якщо існує комбінаторний ізоморфізм ψ орієнтованих графів з черенками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$, який зберігає (слабке) навантаження.

Тобто ізоморфізм ψ кожному спіну на $\Gamma_{K-R}(f)$ ставить у відповідність спін на $\Gamma_{K-R}(g)$:

$$\langle v = (e_1, e_2, \dots, e_n) \mapsto \langle \psi(v) = (\psi(e_1), \psi(e_2), \dots, \psi(e_n)).$$

Також у випадку, коли розглядаються навантажені графи Кронрода-Ріба, ψ індукує ізоморфізм розширених порядків на розширених множинах вершин.

Приклади, що ілюструють наведені означення знаходяться у Додатку **Д**.

4.8 Основна теорема.

Основним результатом даного розділу є наступна теорема, див. [63].

Теорема 4.8.1 (Є. О. Полулях, Ю. Ю. Сорока, В. В. Шарко) *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — функції загального положення, що задовольняють умовам \mathfrak{J} .*

f і g є орієнтовано пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли слабо навантажений граф Кронрода-Ріба функції f еквівалентний слабо навантаженому графу однієї з функцій g або $-g$.

f і g є орієнтовано топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх навантажені графи Кронрода-Ріба є еквівалентними.

Доведення Теорема 4.8.1 знаходиться в Додатку **Г.4**.

Розділ 5

Псевдогармонічні функції на замкненому диску

На початку розділу відмітимо, що у зв'язку з обмеженням на обсяг роботи всі результати цього розділу наведені без доведень. Повні доведення можна знайти у спільній книжці [33] автора та І. А. Юрчук.

У цьому розділі ми розглядаємо клас неперервних функцій f означених на замкненому одиничному диску D^2 площини \mathbb{C} , які є псевдогармонічними у $\text{Int } D^2$, і для яких обмеження $f|_{\partial D^2}$ має лише скінченне число екстремумів.

5.1 Означення регулярних і сингулярних точок

Нехай $W \subset \mathbb{C}$ є область, обмежена скінченною кількістю простих замкнених кривих, функція $f : \overline{W} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і такою, що обмеження $f|_{\partial \overline{W}}$ має скінченну кількість локальних екстремумів.

Означення 5.1.1 Назвемо $z_0 \in W$ регулярною точкою функції f , якщо існують її відкритий отвір $U \subseteq W$ точки z_0 і гомеоморфізм $\varphi : U \rightarrow \text{Int } D^2$, такі що $\varphi(z_0) = 0$ і $f \circ \varphi^{-1}(z) = \text{Re } z + f(z_0)$ для всіх $z \in \text{Int } D^2$.

U називається простим отвором точки z_0 .

Позначимо $D_+^2 = \{z \mid |z| < 1 \text{ і } \text{Im } z \geq 0\}$.

Означення 5.1.2 Назвемо $z_0 \in \partial W$ регулярною межевою точкою функції f , якщо існують її відкритий окіл U в просторі \overline{W} і гомеоморфізм $\psi : U \rightarrow D_+^2$, такі що $\psi(z_0) = 0$, $\psi(U \cap f^{-1}(f(z_0))) = \{0\} \times [0, 1)$, $\psi(U \cap \text{Fr } W) = (-1, 1) \times \{0\}$ і функція $f \circ \psi^{-1}$ є строго монотонною на інтервалі $(-1, 1) \times \{0\}$.

Окіл U називається простим.

Зауваження 5.1.3 Легко бачити, що в Означеннях 5.1.1 і 5.1.2 прості околи можуть бути обрані як завгодно малі.

Якщо $z_0 \in \text{Int } D^2$ не є регулярною точкою функції f , будемо називати її *сингулярною*.

Припустимо додатково, що f є псевдогармонічною у W .

Тоді за означенням усі сингулярні точки f є сідловими. Тобто для кожної сингулярної точки $z_0 \in W$ функції f існують відкритий окіл $U \subseteq W$ точки z_0 і гомеоморфізм $\varphi : U \rightarrow \text{Int } D^2$ такі, що $\varphi(z_0) = 0$ і $f \circ \varphi^{-1}(z) = \text{Re}(z^n) + f(z_0)$, $n \geq 2$ для всіх $z \in \text{Int } D^2$ (див. [10], [12], [99]). Число $n - 1$ будемо називати *кратністю сідлової точки*.

Сім'я всіх одноточкових компонент зв'язності множин рівня f складається з локальних екстремумів f , які містяться у ∂W згідно з означенням псевдогармонічної функції.

Точка межі ∂W , яка не є ні регулярною межевою точкою ані ізольованою точкою множини рівня f , називається *сингулярною межевою точкою*.

Означення 5.1.4 Число c є сингулярним значенням f якщо множина рівня $f^{-1}(c)$ містить сингулярні точки.

Число c є регулярним значенням f якщо множина рівня $f^{-1}(c)$ не містить сингулярних точок і гомеоморфна незв'язному об'єднанню відрізків, що перетинають межу ∂W тільки у своїх кінцях.

Означення 5.1.5 Число c є напіврегулярним значенням f якщо воно не є ні регулярним ані сингулярним.

Зауваження 5.1.6 З означень слідує, що множина рівня, яка відповідає напіврегулярному значенню, містить лише сингулярні межові точки і локальні екстремуми f (вони містяться у ∂W і є ізольованими точками

множин рівня f). Множини рівня, що відповідають сингулярним значенням, містять сингулярні точки, і вони також можуть містити межові сингулярні точки і локальні екстремуми.

Відомо, що кожна множина рівня псевдогармонічної функції гомеоморфна незв'язному об'єднанню дерев [10], [12], [21].

З Теорема 4.1 [99], див. також [10], слідує, що для кожної межової сингулярної точки існують її оточення (якій називається простим) і гомеоморфізм цього оточення на одиничний пів-диск, що відображає цю точку у початок координат, а образ її множини рівня складається зі скінченного числа променів, які виходять з початку координат.

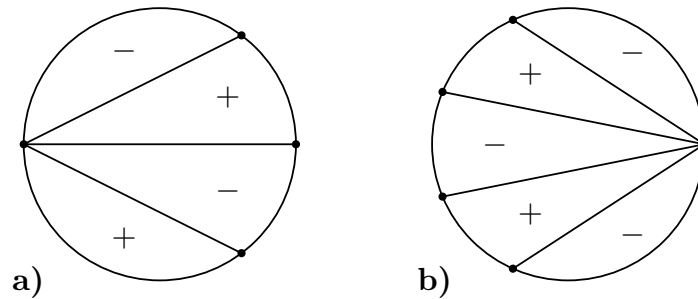


Рис. 5.1.1: У випадку a) сингулярна межа точка є регулярною точкою функції $f|_{\partial D^2}$, а у випадку b) сингулярна межа точка є локальним максимумом $f|_{\partial D^2}$.

5.2 Властивості дерев, вкладених у двовимірний диск

Нехай T є деревом з множиною вершин V і множиною ребер E . Припустимо, що T невироджене (має принаймні одне ребро). Позначимо через V_{ter} множину всіх вершин T порядку 1. Припустимо, що для підмножини $V^* \subseteq V$ виконується наступна умова:

$$V_{ter} \subseteq V^*. \quad (5.2.1)$$

Нехай також $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^2$ є вкладенням, для якого

$$\varphi(T) \subseteq D^2, \quad \varphi(T) \cap \partial D^2 = \varphi(V^*). \quad (5.2.2)$$

Лема 5.2.1 Множина $\mathbb{R}^2 \setminus (\varphi(T) \cup \partial D^2)$ має скінченну кількість компонент зв'язності

$$U_0 = \mathbb{R}^2 \setminus D^2, U_1, \dots, U_m,$$

також для кожного $i \in \{1, \dots, m\}$ множина U_i є відкритим диском і обмежена простою замкненою кривою

$$\partial U_i = L_i \cup \varphi(P(v_i, v'_i)), \quad L_i \cap \varphi(P(v_i, v'_i)) = \{\varphi(v_i), \varphi(v'_i)\}$$

де L_i є дугою ∂D^2 , що з'єднує $\varphi(v_i)$ і $\varphi(v'_i)$, а $\varphi(P(v_i, v'_i))$ є образом єдиного шляху $P(v_i, v'_i)$ в T , який з'єднує v_i і v'_i .

5.3 Топологічний інваріант для псевдогармонічної функції на диску

Побудова інваріанту для псевдогармонічної функції, який називається її комбінаторною діаграмою:

1) Побудуємо граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$ обмеження f на ∂D^2 . Він ізоморфний колу з парною кількістю вершин порядку 2 (вершини є локальними екстремумами обмеження f на ∂D^2) і зафіксуємо орієнтацію на $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$, що породжена орієнтацією на D^2 .

2) Нехай a_i є сингулярними значеннями f , а c_j є напіврегулярними значеннями. Додамо до $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$ ті компоненти зв'язності множин рівня

$$f^{-1}(a_1) \cup \dots \cup f^{-1}(a_k) \cup f^{-1}(c_1) \cup f^{-1}(c_2) \cup \dots \cup f^{-1}(c_l),$$

що містять сингулярні і сингулярні межові точки. Точки перетину цих компонент з $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$ або є вершинами цього графу, або ділять його ребра на

зв'язні частини. Додамо ці точки до числа вершин $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$. Покладемо

$$P(f) = \Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2}) \cup \bigcup_i \widehat{f}^{-1}(a_i) \cup \bigcup_j \widehat{f}^{-1}(c_j),$$

де $\widehat{f}^{-1}(a_i) \subset f^{-1}(a_i)$, $\widehat{f}^{-1}(c_j) \subset f^{-1}(c_j)$ є тими компонентами зв'язності множин рівня, що містять сингулярні та сингулярні межові точки.

3) Означимо на вершинах графа $P(f)$ частковий порядок порівнюючи значення функції $f: v_1 < v_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$, де $v_1, v_2 \in P(f)$, а x_1, x_2 — точки, що відповідають вершинам v_1, v_2 . Якщо значення функції збігаються, будемо вважати вершини непорівнянними.

Цей частковий порядок є строгим, оскільки він антирефлексивний, антисиметричний і транзитивний. Будемо називати $P(f)$ комбінаторною діаграмою псевдогармонічної функції f .

За побудовою $P(f)$ є скінченним графом на множині вершин якого означене відношення строгого часткового порядку.

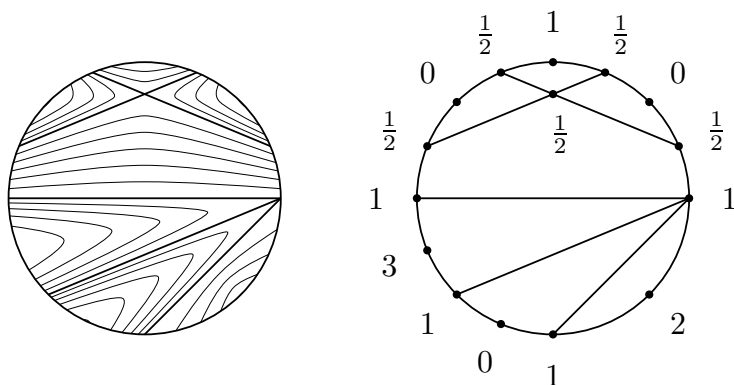


Рис. 5.3.1: Приклад діаграми деякої псевдогармонічної функції.

Ми побудували комбінаторний інваріант функції f як підмножину D^2 . Ми будемо розглядати його як абстрактний граф з фіксованим відношенням часткового порядку на множині вершин $V(P(f))$.

Означення 5.3.1 Дві комбінаторні діаграми $P(f)$ і $P(g)$ ізоморфні, якщо існує ізоморфізм $\phi : P(f) \rightarrow P(g)$, який зберігає відношення строгого частко-

вого порядку на їх вершинах (відображення $\phi|_{V(P(f))}$ і $\phi^{-1}|_{V(P(g))}$ монотонні) а також орієнтацію.

На діаграмі $P(f)$ можна природним чином означити топологію. Наприклад, це можна зробити через структуру CW-комплекса на $P(f)$. Всі вершини графа $P(f)$ можна розглядати як нольвимірні клітини, аналогічно, всі ребра можна вважати одновимірними клітинами. $P(f)$ також можна розглядати як підмножину \mathbb{R}^3 всі ребра якої є відрізками прямих.

Означення 5.3.2 Скажемо, що гомеоморфізм $\varphi : P(f) \rightarrow P(g)$ є реалізацією ізоморфізму $\phi : P(f) \rightarrow P(g)$ комбінаторних діаграм, якщо $\varphi|_{V(P(f))} = \phi|_{V(P(f))}$ і для довільного ребра $e \in E(P(f))$ з рівності $\phi(e) = e'$ слідує, що $\varphi(e) = e'$.

Зауваження 5.3.3 Зрозуміло, що кожен ізоморфізм ϕ комбінаторних діаграм реалізується за допомогою деякого гомеоморфізму, але цей гомеоморфізм не визначений однозначно: для кожного ребра $e \in E(P(f))$ ми можемо довільним чином вибрати гомеоморфізм $\varphi_e : e \rightarrow \phi(e)$, що збігається з ϕ на множині $e \cap V(P(f))$.

Ми побудували комбінаторну діаграму $P(f)$ як підмножину D^2 , отже коректно означений “носій” діаграми у D^2 . Він збігається з множиною

$$P_f = \Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2}) \cup \bigcup_i \widehat{f}^{-1}(a_i) \cup \bigcup_j \widehat{f}^{-1}(c_j), \quad (5.3.1)$$

де $\widehat{f}^{-1}(a_i)$ і $\widehat{f}^{-1}(c_j)$ є компонентами зв'язності множин рівня функції f , що містять сингулярні та сингулярні межові точки.

Аналогічно, вершинам $P(f)$ відповідає множина V_f , що є “носієм” його вершин у D^2 . Функція f породжує відношення строгого часткового порядку на цій множині за допомогою співвідношень $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Позначимо через $M(f) \subset \partial D^2$ множину локальних екстремумів f на D^2 . За побудовою кожна точка цієї множини відповідає деякій вершині $P(f)$, отже

$M(f) \subset V_f$. Інші вершини $P(f)$ характеризуються тією властивістю, що кожна з них є спільним кінцем принаймні трьох ребер, отже у просторі $P(f)$ вона не має околу, гомеоморфного інтервалу.

Означення 5.3.4 *Cr -підграфом графу $P(f)$ є такий підграф $q(f)$, що:*

- $q(f)$ є простим орієнтованим циклом;
- довільна пара сусідніх вершин $v_i, v_{i+1} \in q(f)$ є порівнянною.

Нехай $\varphi : P(f) \rightarrow D^2$ є довільним вкладенням топологічного простору $P(f)$ у D^2 таким, що $\varphi(P(f)) = P_f$. Зважаючи на сказане вище очевидно, що включення $M(f) \subseteq \varphi(V(P(f)))$ еквівалентне до $\varphi(V(P(f))) = V_f$.

Далі, якщо прямо не вказано інше, ми вважаємо, що для довільного вкладення $P(f)$ у D^2 орієнтація Cr -підграфу збігається з орієнтацією ∂D^2 .

Означення 5.3.5 *Нехай $\varphi : P(f) \rightarrow D^2$ є вкладенням топологічного простору $P(f)$ у D^2 . Воно сумісне з f , якщо виконується наступне:*

- $\varphi(P(f)) = P_f$;
- $M(f) \subseteq \varphi(V(P(f)))$;
- частковий порядок на $(V(P(f))) = V_f$, індукований з часткового порядку на $V(P(f))$ за допомогою φ , збігається з частковим порядком, індукованим на цій множині з \mathbb{R} функцією f .

Зрозуміло, що існує принаймні одне вкладення $\varphi : P(f) \rightarrow D^2$, сумісне з f . Якщо $\psi : P(f) \rightarrow P(f)$ є ізоморфізмом $P(f)$ на себе (наприклад, тотожне відображення), що може бути реалізованим за допомогою гомеоморфізму $\hat{\psi} : P(f) \rightarrow P(f)$, то вкладення $\varphi \circ \hat{\psi}$ також сумісне з f .

Нагадаємо, що вершини v_1 і v_2 деякого графу G називаються *сусідніми*, якщо вони є кінцями одного й того ж ребра.

Нехай v — деяка вершина діаграми $P(f)$, а $\{v_i\}, i = \{1, \dots, k\}$, є множиною всіх вершин, сусідніх до неї. Тоді існують точки x і x_i диску D^2 , що відповідають вершинам v і v_i . Позначимо через $X_i \subseteq D^2$ множину, що відповідає ребру $e(v, v_i)$ (зрозуміло, що кожна X_i гомеоморфна сегменту). Розглянемо наступні можливості:

Випадок 1: $x \in \text{Int } D^2$. Тоді $f(x) = f(x_i) = a$, де $i = \{1, \dots, k\}$ і число a є сингулярним значенням. Тому вершини v, v_1, v_2, \dots, v_k попарно непорівнянні. Оскільки компонента множини рівня сингулярного значення a є скінченним деревом, то всі вершини, які вона містить попарно непорівнянні.

Випадок 2: $x \in \partial D^2$. У цьому випадку точка x або регулярна, або є локальним екстремумом неперервної функції $f|_{\partial D^2}$, яка монотонно зростає (спадає) між сусідніми локальними екстремумами. Отже, серед множин X_i є такі, на яких функція монотонно зростає (спадає). Зрозуміло, що існують рівно дві криві X_j і X_k , які є підмножинами кола ∂D^2 . Кінцями цих кривих є точки x_j і x_k . Як ми вже бачили у попередньому випадку, якщо множина X_i не міститься у ∂D^2 , то кінці відповідного ребра не є порівнянними. Тому з усіх вершин $\{v_i\}$, що сусідні з v , лише v_j і v_k є порівнянними з v . Для кожної з вершин v_j і v_k існують рівно дві сусідні вершини, які з ними порівнянні і так далі. Отже, вершини v, v_j, v_k, \dots утворюють цикл (випадок двох або більшої кількості циклів неможливий, оскільки всі вершини і ребра цього ланцюжка лежать на колі, що обмежує диск D^2).

Очевидно, що v разом з обома вершинами v_j і v_k належить до $q(f)$ -циклу.

Те, що діаграма $P(f)$ побудована по псевдогармонічній функції, приводить до низки її характеристик.

Основні властивості діаграми $P(f)$:

C1) існує єдиний $\mathcal{C}r$ -підграф $q(f) \in P(f)$;

C2) $\overline{P(f) \setminus q(f)} = \bigcup_i \Psi_i$, $\Psi_j \cap \Psi_i = \emptyset$, де $i \neq j$, і кожне Ψ_i — це дерево, таке що для кожного індексу i дві довільні вершини $v', v'' \in \Psi_i$ непорівнянні;

C3) існує вкладення $\psi : P(f) \rightarrow D^2$, для якого $\psi(q(f)) = \partial D^2$ і $\psi(P(f) \setminus q(f)) \subset \text{Int } D^2$;

C4) для кожної компоненти зв'язності Θ множини $D^2 \setminus P_f$ функція f є регулярною на множині $\overline{\Theta}$.

Зі сказаного вище слідують існування $\mathcal{C}r$ -підграфу і справедливості C2. Єдиність $q(f)$ випливає з існування $\mathcal{C}r$ -підграфу і C2. Умова C3 є наслідком того, що $P(f)$ є діаграмою функції f , що означена на D^2 . $\mathcal{C}r$ -підграф $q(f) \in P(f)$ єдиний, тому з означень легко бачити, що для кожного вкладення $\psi :$

$P(f) \rightarrow D^2$, що узгоджене з f , має виконуватись рівність $\psi(q(f)) = \partial D^2$.

За означенням діаграми $P(f)$ кожне дерево Ψ_i відповідає компоненті зв'язності деякої сингулярної або напіврегулярної множини рівня функції f . Кількість дерев збігається з числом таких компонент, які містять сингулярні і сингулярні межові точки. Позначимо через $P_f^c = \overline{P_f \setminus \partial D^2}$ об'єднання цих компонент.

Нехай $\psi : P(f) \rightarrow D^2$ є вкладенням, що узгоджене з f . Якщо кінці v' і v'' деякого ребра $e = e(v', v'')$ діаграми $P(f)$ непорівнянні, то $\dot{e} = e \setminus \{v', v''\} \in P(f) \setminus q(f) \subseteq \bigcup_i \Psi_i$. Отже $\psi(\dot{e}) \subseteq P_f \cap \text{Int } D^2 \subseteq P_f^c$. Тому існує $c = c(e) \in \mathbb{R}$, для якого $\varphi(e) \subset f^{-1}(c)$. Кожна зв'язна множина $\psi(\Psi_i)$ належить до деякої компоненти зв'язності P_f^c . Внаслідок того, що відображення ψ є вкладенням і $\psi(q(f)) = \partial D^2$, виконуються рівності

$$\psi\left(\bigcup_i \Psi_i\right) = \psi(\overline{P(f) \setminus q(f)}) = \overline{\psi(P(f)) \setminus \psi(q(f))} = \overline{P_f \setminus \partial D^2} = P_f^c.$$

За означенням кількості компонент зв'язності множин $\bigcup_i \Psi_i$ і P_f^c збігаються, тому множина $\psi(\Psi_i)$ є компонентою зв'язності P_f^c .

Зберемо разом наслідки Властивостей C1–C3, що ми отримали вище.

Твердження 5.3.6 *Нехай $P(f)$ є комбінаторною діаграмою псевдогармонічної функції f і $\psi : P(f) \rightarrow D^2$ є вкладенням, що узгоджене з f . Тоді виконуються наступні умови:*

- $\psi(q(f)) = \partial D^2$;
- для кожного дерева Ψ_i множина $\psi(\Psi_i)$ є компонентою сингулярної або напіврегулярної множини рівня f .

Властивість C4 слідує з наступних тверджень.

Твердження 5.3.7 *Нехай $P(f)$ є комбінаторною діаграмою псевдогармонічної функції f і $\psi : P(f) \rightarrow D^2$ є вкладенням для якого $\psi(q(f)) = \partial D^2$.*

Множина $\text{Fr } \Sigma = \text{Fr } \bar{\Sigma}$ є образом простого циклу Q діаграми $P(f)$ для кожної компоненти зв'язності Σ множини $D^2 \setminus \psi(P(f))$.

Лема 5.3.8 Нехай $P(f)$ є діаграмою, яку побудовано по псевдогармонічній функції f і $\psi : P(f) \rightarrow D^2$ є вкладенням, що узгоджене з f .

Тоді для кожної компоненти Θ доповнення $D^2 \setminus P(f) = D^2 \setminus P_f$ її замикання $\bar{\Theta}$ гомеоморфне диску і f регулярна на $\bar{\Theta}$.

Лема 5.3.9 Нехай $P(f)$ є комбінаторною діаграмою псевдогармонічної функції; вкладення $\psi_1, \psi_2 : P(f) \rightarrow D^2$ відповідають співвідношенню $\psi_i(q(f)) = \partial D^2, i = 1, 2$.

Якщо образ $\psi_1(Q)$ простого циклу $Q \subset P(f)$ є межею деякої компоненти доповнення $D^2 \setminus \psi_1(P(f))$, то образ $\psi_2(Q)$ обмежує деяку компоненту доповнення $D^2 \setminus \psi_2(P(f))$.

Наслідок 5.3.10 В умовах Лемми 5.3.9 існує гомеоморфізм $\Phi : D^2 \rightarrow D^2$ такий, що $\Phi \circ \psi_1 = \psi_2$.

5.4 Умови на топологічну еквівалентність

Теорема 5.4.1 (І. А. Юрчук) Дві псевдогармонічні функції f і g топологічно еквівалентні тоді й лише тоді, коли існує ізоморфізм комбінаторних діаграм $\varphi : P(f) \rightarrow P(g)$, який зберігає строгий частковий порядок і орієнтацію на них.

На Рис. 5.4.1 зображено діаграми двох псевдогармонічних функцій, що мають по два локальних мінімуми, по два локальних максимуми на ∂D^2 і по одній сингулярній межовій точці. При цьому ці дві функції не є топологічно еквівалентними.

5.5 Критерій \mathcal{D} -планарності дерева

Нехай T є скінченним деревом, V — множина його вершин, V_{ter} є множиною його термінальних вершин і $V^* \subseteq V$ є підмножиною T , такою що $V_{ter} \subseteq V^*$. Припустимо, що з усіх елементів множини V^* утворено деякий цикл $C = (v_1, \dots, v_k)$ (див. Підрозділ 4.4).

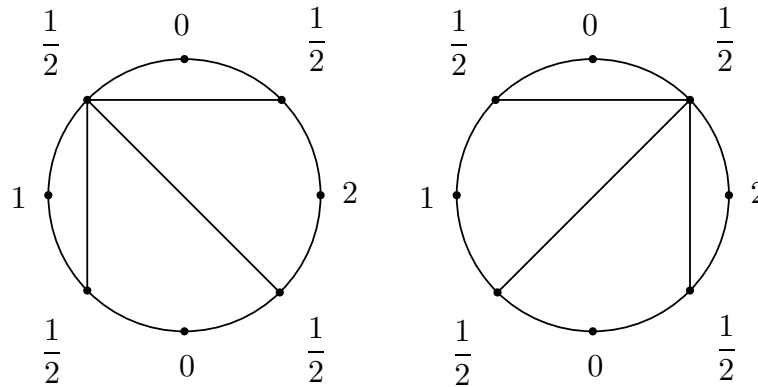


Рис. 5.4.1: Діаграми топологічно не еквівалентних псевдогармонічних функцій.

Зауваження 5.5.1 Для графу G означене поняття циклу. Циклом у графі називається шлях, початок і кінець якого збігаються. Щоб уникнути плутанини, ті об'єкти, які означені у Підрозділі 4.4, будемо далі називати абстрактними циклами.

Означення 5.5.2 Нехай G — граф, $\gamma = e_1, \dots, e_k = v_1, \dots, v_k, v_1$ — деякий цикл графу G . Тут e_i — ребро з кінцями v_i та v_{i+1} , $i \in \{1, \dots, k-1\}$; кінцями ребра e_k є вершини v_k і v_1 .

Скажемо, що цикл γ індукує абстрактний цикл (v_1, \dots, v_k) .

Означення 5.5.3 Нехай G і γ ті ж, що у попередньому означенні. Нехай \hat{V} — деяка підмножина множини $\{v_1, \dots, v_k\}$ вершин, через які проходить γ .

Скажемо, що цикл γ індукує абстрактний цикл $(v_{s_1}, \dots, v_{s_i})$ на множині \hat{V} , якщо виконуються наступні умови:

- $1 \leq s_1 < \dots < s_i \leq k$;
- $v_j \in \hat{V}$ тоді й тільки тоді, коли $j \in \{s_1, \dots, s_i\}$.

Іншими словами, γ розбивається на послідовність шляхів

$$P(v_{s_1}, v_{s_2}), \dots, P(v_{s_{i-1}}, v_{s_i}), P(v_{s_i}, v_{s_1}),$$

кожний з яких з'єднує вершини з множини \hat{V} і перетинає цю множину

тільки по своїм кінцям.

Очевидно, що Означення 5.5.2 є частинним випадком Означення 5.5.3 з $\hat{V} = \{v_1, \dots, v_k\}$.

Зауважимо, що цикл γ не обов'язково простий (може мати самоперетини). Тому вершини v_{s_1}, \dots, v_{s_i} не обов'язково попарно різні.

Означення 5.5.4 *Абстрактний цикл $C = (a_1, \dots, a_m)$ називається простим, якщо $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$.*

Зауваження 5.5.5 *За означенням, коли цикл γ в Означенні 5.5.3 простий, то вершини v_1, \dots, v_k попарно різні. Внаслідок цього для кожної підмножини $\hat{V} \subset \{v_1, \dots, v_k\}$ абстрактний цикл, індукований циклом γ на \hat{V} , теж є простим.*

Отже припустимо, що з усіх елементів підмножини V^* вершин дерева T утворено деякий простий абстрактний цикл $C = (v_1, \dots, v_k)$.

Припустимо, що вкладення $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^2$, відповідає (5.2.2). Тоді з елементів множини $\varphi(V^*) = \varphi(T) \cap \partial D^2$ можна утворити два різних абстрактних цикли.

З одного боку, відображення $\varphi|_{V^*} : V^* \rightarrow \varphi(V^*)$ бієктивне, тому співвідношення

$$\varphi(C) = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_k))$$

коректно означає деякий простий абстрактний цикл.

З іншого боку, обходячи коло S^1 у додатному напрямку ми можемо означити абстрактний цикл

$$S = (\varphi(v_{\sigma(1)}), \dots, \varphi(v_{\sigma(k)}))$$

природним чином: точки $\varphi(v_{\sigma(1)}), \dots, \varphi(v_{\sigma(k)})$ обходяться у вказаному порядку при обході кола.

Означення 5.5.6 *Дерево T називається \mathcal{D} -планарним, якщо існує вкладення $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^2$, яке відповідає (5.2.2), і таке що абстрактний цикл $\varphi(C)$ збігається з абстрактним циклом S .*

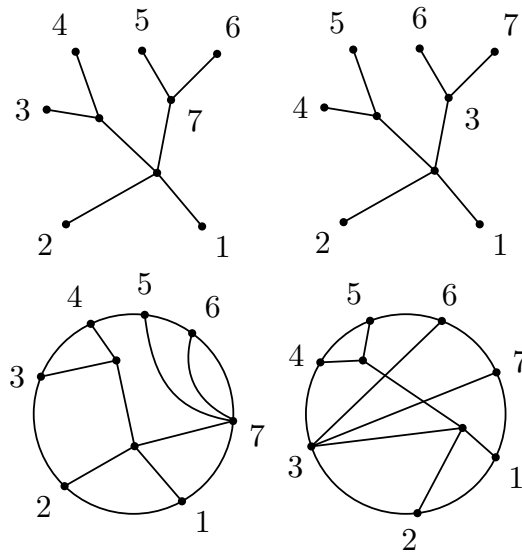


Рис. 5.5.1: Дерево зліва є \mathcal{D} -планарним. Тут $C = (1, \dots, 7)$.

Зауваження 5.5.7 Відомо, що скінченне дерево має принаймні дві термінальні вершини. Тому завжди множина V^* містить принаймні два елементи.

Теорема 5.5.8 ([33]) \mathcal{D} -планарність дерева T еквівалентна такій умові:

- для довільного ребра e існує рівно два шляхи, кожен з яких проходить через e і з'єднує деяку пару вершин з множини V^* , що є сусідніми елементами простого абстрактного циклу C .

5.6 Умови на граф

Нехай $G \subset R^3$ є скінченим зв'язним графом, на множині вершин якого задано строгий частковий порядок. Припустимо, що кожна вершина G має порядок не менше 2.

Множина $V \times V$ ділиться на дві частини C_1 і C_2 . Пара вершин v_1, v_2 міститься у C_1 , якщо вершини порівнянні (тобто справедлива одна з нерівностей $v_1 < v_2$ або $v_2 < v_1$), інакше пара v_1, v_2 належить C_2 .

Означення 5.6.1 Cr -цикл графа G — це підграф γ , який є простим циклом, причому кожна пара сусідніх вершин γ належить C_1 .

Далі ми розглядаємо такі умови на граф $G \subset R^3$:

A1) існує єдиний Cr -цикл γ ;

A2) $\overline{G \setminus \gamma} = F = \bigcup_{i=1}^k T_i$, де F є лісом, для якого виконуються умови:

- якщо $v_k < v$ (відповідно, $v_k > v$) для деякої вершини $v_k \in T_i \subset F$, де $v \in G$, то $v_l < v$ (відповідно, $v_l > v$) для кожної $v_l \in T_i \subset F$;
- $\deg(v) = 2s \geq 4$ для кожної вершини $v \in G \setminus \gamma$;

A3) Умова на строгий порядок на Cr -циклі γ : для кожної вершини v підграфу γ і сусідніх з нею вершин v_1 і v_2 , таких що $v_1, v_2 \in \gamma$, справедливе наступне:

- якщо $\deg(v) = 2$, то $\deg(v_1) > 2$, $\deg(v_2) > 2$ і існує єдиний індекс i , для якого $v_1, v_2 \in T_i$;
- якщо $\deg(v) = 2s > 2$ (відповідно, $\deg(v) = 2s + 1$), то $v_1 < v > v_2$ або $v_1 > v < v_2$ (відповідно, $v_1 < v < v_2$ або $v_1 > v > v_2$).

A4) Умова на строгий порядок на G : якщо $(v_1, v_2), (v_2, v_3) \in C_2$, то і $(v_1, v_3) \in C_2$.

Зауважимо, що з A2 слідує, що всі вершини кожної компоненти зв'язності T_i попарно непорівнянні.

Якщо виконується A2, то очевидно існує непорожня підмножина V^* вершин графа F , яка містить множину V_{ter} всіх термінальних вершин F , і така що $V^* = V(F) \cap \gamma$. Зрозуміло, що підмножина V^* вершин F розпадається на підмножини V_k^* так що $V_{ter}(T_k) \subset V_k^* \subset T_k \subset F$ і $V^* = \bigcup_i V_i^*$.

Означення 5.6.2 Скінченний граф $G \subset R^3$ називається \mathcal{D} -планарним, якщо існують його підграф γ і вкладення $\varphi : G \rightarrow D^2$, для яких справедливо наступне:

- γ є простим циклом;
- $\overline{G \setminus \gamma} = \bigcup_{i=1}^k T_i = F$ є скінченним об'єднанням дерев;
- γ містить всі термінальні вершини F ;
- $\varphi(\gamma) = \partial D^2$, $\varphi(G \setminus \gamma) \subseteq \text{Int } D^2$.

Теорема 5.6.3 (Є. О. Полулях, І. А. Юрчук, див. [33]) *Нехай G є графом, $\gamma \subseteq G$ є простим циклом, таким що $\overline{G \setminus \gamma} = \bigsqcup_i T_i$, де кожне T_i є деревом.*

Тоді G є \mathcal{D} -планарним тоді й лише тоді, коли виконуються наступні умови:

- *кожне дерево T_i з підмножиною вершин V_i^* , на якій цикл γ індукує простий абстрактний цикл C_i , є \mathcal{D} -планарним;*
- *для кожної пари індексів $m \neq n$ підмножина вершин V_n^* дерева T_n належить єдиній компоненті зв'язності множини $\gamma \setminus V_m^*$.*

Зауваження 5.6.4 *Якщо G задовольняє $A1$ і $A2$, то G відповідає вимогам Теорема 5.6.3.*

Припустимо, що G задовольняє $A1$ і $A2$. Розглянемо довідьну пару вершин v_1, v_2 з множини V_i^* , що належить підграфу T_i графа G . Множина $\gamma \setminus (v_1 \cup v_2)$ є об'єднанням двох неперетинних зв'язних множин γ_1 і γ_2 .

Означення 5.6.5 *Пара вершин $v_1, v_2 \in V_i^*$ називається граничною, якщо одна з множин γ_1 або γ_2 не містить вершин множини V_i^* , але містить принаймні одну вершину з множини $V^* \setminus V_i^*$.*

Позначимо через $\omega(v_1, v_2)$ граничну пару, а через α — ту множину γ_k , що не містить вершин V_i^* і містить елементи множини $V^* \setminus V_i^*$. Зрозуміло, що для кожної вершини $v_j, j \in \{1, 2\}$, граничної пари $\omega(v_1, v_2)$ існує сусідня вершина \tilde{v}_j , така що $\tilde{v}_j \in \alpha$.

Означення 5.6.6 *Граф G називається спеціальним, якщо виконуються наступні умови:*

- S1) G задовольняє $A1$ і $A2$;*
- S2) G є \mathcal{D} -планарним;*
- S3) для довільної граничної пари $\omega(v_1, v_2) \in V_i^*$ пара сусідніх вершин \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 належить до однієї множини V_k^* , де $V_k^* \subset V^* \setminus V_i^*$, $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in \alpha$.*

Зауваження 5.6.7 *Якщо граф G є спеціальним і вершини v_1, v_2 утворюють граничну пару, то пара \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 є граничною парою дерева $T_k \supset V_k^*$.*

Лема 5.6.8 Якщо граф G є спеціальним, то множина $\Theta = D^2 \setminus \varphi(G)$ є незв'язним об'єднанням областей U_i , таких що $\partial\bar{U}_i$ містить одну або дві невідіржені дуги межі ∂D^2 , де $\varphi : G \rightarrow D^2$ є вкладенням, для якого $\varphi(\gamma) = \partial D^2$, $\varphi(G \setminus \gamma) \subset \text{Int } D^2$.

Означення 5.6.9 Спеціальний граф $G \subset R^3$ називається Δ -графом, якщо він задовольняє АЗ.

Лема 5.6.10 Якщо $\hat{v} = \min\{V\}$, $\check{v} = \max\{V\}$ є вершинами Δ -графу G , то $\hat{v}, \check{v} \in \gamma$ і $\deg(\hat{v}) = \deg(\check{v}) = 2$.

Припустимо, що на A задано два часткових порядки $< i <'$. Скажемо, що частковий порядок $<'$ є продовженням порядку $<$, якщо тотожне відображення $Id : (A, <) \rightarrow (A, <')$ є монотонним.

Лема 5.6.11 Розглянемо Δ -граф G як CW -комплекс. Існує неперервна функція $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ на топологічному просторі G , яка відповідає умовам:

- g відображає частково впорядковану множину $V(G)$ вершин графу G в \mathbb{R} монотонно;
- множина локальних екстремумів обмеження $g|_\gamma$ збігається з множиною вершин G , які мають парний порядок і належать циклу γ ;
- кожне дерево T_i , $i = 1, \dots, k$ графу $F = \overline{G \setminus \gamma}$ є підмножиною деякої множини рівня функції g .

Тоді частковий порядок $<'$, індукований функцією g на множині $V(G)$ вершин графу G , є продовженням часткового порядку $<$ на $V(G)$.

5.7 Теорема реалізації

Теорема 5.7.1 (Є. О. Полулях, І. А. Юрчук, див. [33]) Якщо граф G є комбінаторною діаграмою деякої псевдогармонічної функції f , то G є Δ -графом.

Якщо граф G є Δ -графом, то частковий порядок на $V(G)$ може бути продовжений так, що граф G з новим частковим порядком на множині вершин буде ізоморфний комбінаторній діаграмі деякої псевдогармонічної функції f .

Нехай G є Δ -графом. З Теорема 5.7.1 слідує, що існує псевдогармонічна функція f на диску, яка відповідає графу G . Але, взагалі кажучи, ця функція означена неоднозначно, оскільки ми ніяк не обмежуємо вибір монотонного відображення $g : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Отже, для непорівнянних вершин v' і v'' графа G не обов'язково виконується рівність $g(v') = g(v'')$.

Неважко побудувати приклад Δ -графу G і двох відображень $g_1, g_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$, які є монотонними на множині вершин G і відповідають Лемі 5.6.11, а також задовольняють нерівності $g_1(v') < g_1(v'')$ та $g_2(v') > g_2(v'')$ для деякої пари непорівнянних вершин $v', v'' \in V(G)$.

Теорема 5.7.2 ([33]) *Нехай G є Δ -графом.*

G задовольняє умову A4 тоді й тільки тоді, коли строгий частковий порядок на графі G збігається зі строгим частковим порядком на діаграмі $P(f)$ деякої псевдогармонічної функції f , що відповідає графу G .

Розділ 6

Смугості поверхні

6.1 Означення смугастої поверхні

Означення 6.1.1 Підмножину $S \subset \mathbb{R} \times [-1, 1]$ будемо називати модельною смугою якщо

- (1) $\mathbb{R} \times (-1, 1) \subset S$,
- (2) перетин $S \cap (\mathbb{R} \times \{-1, 1\})$ є (можливо, порожнім) об'єднанням відкритих обмежених інтервалів замикання яких попарно не перетинаються.

Наприклад, $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ є модельною смугою, тоді як $\mathbb{R} \times [-1, 1]$, $\mathbb{R} \times (-1, 1]$, $\mathbb{R} \times [-1, 1)$ не є.

Для модельної смуги S будемо вживати наступні позначення:

$$\partial_- S := S \cap \mathbb{R} \times \{-1\}, \quad \partial_+ S := S \cap \mathbb{R} \times \{1\}, \quad \partial S := \partial_- S \cup \partial_+ S.$$

Назвемо множини $\partial_- S$ і $\partial_+ S$ *берегами* модельної смуги S . Компоненти зв'язності множини $\partial_- S$ (відповідно, $\partial_+ S$) назвемо *нижніми* (відповідно, *верхніми*) межовими інтервалами.

Нехай зафіксовано деяку не більш ніж зліченну множину індексів \mathbf{A} і набір модельних смуг $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$. Нехай $\{I_c\}_{c \in \mathbf{C}}$ — сім'я всіх межових інтервалів смуг з цього набору.

Припустимо, що для деякої множини індексів \mathbf{B} зафіксовано два ін'єктивних відображення $\mathbf{i}, \mathbf{j} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$, таких що $\mathbf{i}(\mathbf{B}) \cap \mathbf{j}(\mathbf{B}) = \emptyset$.

Позначимо $X_\beta = I_{\mathbf{i}(\beta)}$, $Y_\beta = I_{\mathbf{j}(\beta)}$, для кожного $\beta \in \mathbf{B}$.

Означення 6.1.2 *Смугастою поверхнею назвемо фактор-простір*

$$Z = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha / \{Y_\beta \stackrel{\phi_\beta}{\sim} X_\beta\}_{\beta \in \mathbf{B}}, \quad (6.1.1)$$

де

- (а) $\bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha$ є незв'язним об'єднанням модельних смуг;
- (б) $\phi_\beta : Y_\beta \rightarrow X_\beta$, $\beta \in \mathbf{B}$, є гомеоморфізмом, що зберігає або обертає орієнтацію.

Отже, смугаста поверхня, це поверхня, отримана з сім'ї модельних смуг шляхом ототожнення деяких пар межових інтервалів за допомогою гомеоморфізмів. Дозволяється, щоб дві смуги склеювались уздовж більш ніж однієї пари межових компонент.

Можливо також склеювати пару інтервалів, які належать межі однієї смуги S , навіть якщо вони лежать одночасно на нижній або на верхній частині межі ∂S .

Означення 6.1.3 *Смугаста поверхня Z називається аффіною, якщо кожне відображення $\phi_\beta : Y_\beta \rightarrow X_\beta$, $\beta \in \mathbf{B}$ є аффіним.*

Зауваження 6.1.4 Для кожного $\beta \in \mathbf{B}$ межові інтервали X_β, Y_β є горизонтальними, тому $X_\beta \subset \mathbb{R} \times \{w_\beta\}$, $Y_\beta \subset \mathbb{R} \times \{y_\beta\}$ для деяких $w_\beta, y_\beta \in \{-1, 1\}$. Отже, в координатах відображення $\phi_\beta : Y_\beta \rightarrow X_\beta$ виглядає наступним чином:

$$\phi_\beta(x, y) = (\psi_\beta(x), w_\beta), \quad (x, y) \in Y_\beta. \quad (6.1.2)$$

Тут ψ_β — деякий гомеоморфізм інтервала прямої. Якщо відображення ψ_β є аффіним, то воно продовжується до аффіного автоморфізму прямої, див. [83].

Зауваження 6.1.5 Зауважимо, що якщо $a < b$ і $c < d$, то існує рівно два *афінних* гомеоморфізма $\psi^+, \psi^- : (a, b) \rightarrow (c, d)$, таких що ψ^+ зберігає орієнтацію, а ψ^- обертає її. А саме,

$$\psi^+(t) = \frac{d-c}{b-a}(t-a) + c, \quad \psi^-(t) = \frac{c-d}{b-a}(t-a) + d, \quad (6.1.3)$$

для $t \in (a, b)$.

Зауваження 6.1.6 Далі для спрощення міркувань нам часто буде зручно припускати, що відображення приклеювання є *афінними*. Зокрема ми це суттєво використаємо при доведенні Лема 6.3.3. Насправді це обмеження не є суттєвим, як показує Лема 6.1.8.

Нехай Z є смугастою поверхнею, яку означено за допомогою співвідношення (6.1.1), і

$$q : \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha \longrightarrow Z$$

є відображенням проєкції. Тоді Z є некомпактним двовимірним многовидом, що може бути незв'язним, неорієнтовним, і може мати нетривіальну межу. Кожна зв'язна компонента межі ∂Z є інтервалом. Також відмітимо, що підмножина $U \subset Z$ відкрита тоді і лише тоді, коли $q^{-1}(U)$ відкрита в $\bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha$.

Для кожного $\alpha \in \mathbf{A}$ нехай

$$\xi_\alpha : S_\alpha \hookrightarrow Z_0 = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha \xrightarrow{q} Z$$

є композицією включення S_α у $\bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha$ і проєкції q . Назвемо ξ_α *картою*, що відповідає S_α .

Для зручності введемо такі позначення:

$$\widehat{S}_\alpha = \xi_\alpha(S_\alpha), \quad \partial_- \widehat{S}_\alpha = \xi_\alpha(\partial_- S_\alpha), \quad \partial_+ \widehat{S}_\alpha = \xi_\alpha(\partial_+ S_\alpha), \quad \partial \widehat{S}_\alpha = \xi_\alpha(\partial S_\alpha).$$

Зокрема, образ $\widehat{S}_\alpha = \xi_\alpha(S_\alpha)$ будемо називати *смугою* поверхні Z .

Зауважимо, що кожна модельна смуга S допускає одновимірне шарування Δ_S , листами якого є зв'язні компоненти ∂S і множини $\mathbb{R} \times \{t\}$, $t \in (-1, 1)$.

У більш широкому загальному, нехай Z є смугастою поверхнею. Оскільки її смуги склеєні за допомогою гомеоморфізмів листів, шарування на смугах Z породжують шарування Δ_Z на Z . Назвемо його *канонічним*.

Гомеоморфізм $h : Z \rightarrow Z'$ смугастих поверхонь будемо називати *листовим гомеоморфізмом*, якщо він відображає листи шарування Δ_Z на листи $\Delta_{Z'}$.

Означення 6.1.7 Дві смугасті поверхні Z' і Z'' , що мають атласи $q' : Z'_0 \rightarrow Z'$ і $q'' : Z''_0 \rightarrow Z''$, назвемо еквівалентними, якщо існує пара листових гомеоморфізмів $h : Z'_0 \rightarrow Z''_0$ і $k : Z' \rightarrow Z''$, для якої комутативна наступна діаграма.

$$\begin{array}{ccc} Z'_0 & \xrightarrow{h} & Z''_0 \\ q' \downarrow & & \downarrow q'' \\ Z' & \xrightarrow{k} & Z'' \end{array} \quad (6.1.4)$$

Лема 6.1.8 (С. І. Максименко, Є. О. Полулях, див. [66]) *Кожна смугаста поверхня Z еквівалентна деякій афінній смугастій поверхні.*

Доведення цієї леми наведено в Додатку Е.1.

6.2 Канонічне шарування на смугастій поверхні

Нехай $\Gamma(\Delta) = Z/\Delta$ є простором листів і наділений відповідною фактор-топологією, нехай $p : Z \rightarrow \Gamma(\Delta)$ є фактор-відображенням. За означенням підмножина $V \subset \Gamma(Z)$ відкрита тоді й лише тоді, коли її повний прообраз $p^{-1}(V)$ є відкритим у просторі Z . Отже, відкриті підмножини $\Gamma(\Delta)$ — це відкриті насичені підмножини Z .

Лема 6.2.1 $\Gamma(\Delta)$ є T_1 -простором.

Доведення. Ми маємо перевірити, що кожна односточкова множина $\{x\} \subset \Gamma(\Delta)$ є замкненою в $\Gamma(\Delta)$, тобто що кожен лист ω шарування Δ замкнений у

Z . Оскільки $Z = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha / \{Y_\beta \stackrel{\phi_\beta}{\sim} X_\beta\}_{\beta \in \mathbf{B}}$, див. (6.1.1), ми маємо довести, що кожен лист у модельній смузі є замкненим. Це очевидно для листів, прообрази яких відносно відображення q лежать у внутрішності смуг $\text{Int } S_\alpha = \mathbb{R} \times (-1, 1)$.

Якщо для деякого листа $\omega \in \Delta$ його прообраз $q^{-1}(\omega)$ лежить в $\bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha$, то для кожного $\alpha \in \mathbf{A}$ підмножина $q^{-1}(\omega) \cap S_\alpha$ замкнена в S_α згідно пункту (2) Означення 6.1.1. Отже $q^{-1}(\omega)$ замкнена в Z_0 і ω є замкненою підмножиною Z . \square

Зрозуміло, що для кожного листа ω маємо рівно одну з наступних можливостей.

(а) ω належить до $\widehat{S}_\gamma \setminus \partial \widehat{S}_\gamma$ для деякого $\gamma \in \mathbf{A}$; у цьому випадку ω називається *внутрішнім*.

(б) $\omega \subset \partial \widehat{S}_\gamma \subset \partial Z$ для деякого $\gamma \in \mathbf{A}$; у цьому випадку ω називається *межовим листом*.

(с) $\omega \subset \partial_\varepsilon \widehat{S}_\gamma \cap \partial_{\varepsilon'} \widehat{S}_{\gamma'}$ для деякого $\gamma, \gamma' \in \mathbf{A}$ і $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm\}$. Тоді $\omega = \xi_\gamma(X_\beta) = \xi_{\gamma'}(Y_\beta)$ для деякого $\beta \in \mathbf{B}$. Це можливість розпадається на наступні неперетинні випадки:

(с1) $\gamma = \gamma'$, $X_\beta = \partial_\varepsilon S_\gamma$, і $Y_\beta = \partial_{\varepsilon'} S_\gamma$; отже $\omega = \partial_- \widehat{S}_\gamma = \partial_+ \widehat{S}_\gamma = \partial \widehat{S}_\gamma$;

(с2) $\gamma \neq \gamma'$, $X_\beta = \partial_\varepsilon S_\gamma$, і $Y_\beta = \partial_{\varepsilon'} S_{\gamma'}$, отже $\omega = \partial_\varepsilon \widehat{S}_\gamma = \partial_{\varepsilon'} \widehat{S}_{\gamma'}$;

(с3) $X_\beta \neq \partial_\varepsilon S_\gamma$ або $Y_\beta \neq \partial_{\varepsilon'} S_{\gamma'}$, у цьому випадку ω називається *особливим*.

Наша мета — звести ситуацію до випадку, коли відсутні листи типів (с1) і (с2). Для цього нам потрібна наступна лема.

Лема 6.2.2 *Нехай $S = \mathbb{R} \times (-1, 1)$ і $T = S \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) \times 0$. Тоді існує гомеоморфізм $h : S \rightarrow T$ який є тотожним зовні $\mathbb{R} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ і зберігає горизонтальні лінії, тобто $h(x, y) = (\alpha(x, y), y)$ для деякої неперервної функції α , див. Рис. 6.2.1.*

Доведення. Нехай гомеоморфізм $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ задано за допомогою рівності

$$\sigma(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x.$$

Розглянемо ще функцію $\tau : (-1, 1) \rightarrow [0, 1]$,

$$\tau(y) = \begin{cases} 16y^4 - 8y^2 + 1, & |y| < \frac{1}{2}, \\ 0, & |y| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Легко бачити, що τ неперервна і $\tau^{-1}(1) = 0$.

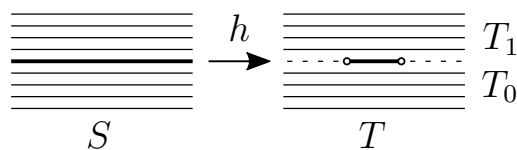


Рис. 6.2.1:

Означимо $h : S \rightarrow T$ за допомогою формули

$$h(x, y) = (x(1 - \tau(y)) + \sigma(x)\tau(y), y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (-1, 1).$$

Перевірку того, що h насправді є гомеоморфізмом і має відповідні властивості, ми залишаємо читачеві. \square

Наслідок 6.2.3 *Нехай $S = \mathbb{R}^2$ і $T = \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) \times \{2n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Тоді існує гомеоморфізм $h : S \rightarrow T$, що є тотожнім зовні $\mathbb{R} \times \cup_{n \in \mathbb{Z}} (2n - \frac{1}{2}, 2n + \frac{1}{2})$ і зберігає горизонтальні лінії, тобто $h(x, y) = (\alpha(x, y), y)$ для деякої неперервної функції α , див. Рис. 6.2.2.*

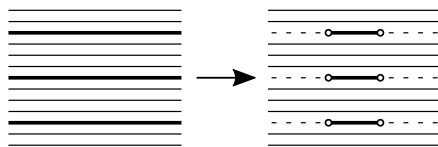


Рис. 6.2.2:

Зауваження 6.2.4 Відмітимо, що T з Лема 6.2.2 є смугастою поверхнею, яку склеєно з двох смуг T_0 і T_1 так, що $\omega = (-1, 1) \times 0$ є листом типу (с2), див. Рис. 6.2.1. Лема 6.2.2 стверджує, що ці дві смуги можна замінити однією так, що відповідний лист типу (с2) стає внутрішнім, тобто має тип (а).

Більш того, Наслідок 6.2.3 показує, що навіть нескінченна послідовність смуг, які склеєні так як показано на Рис. 6.2.2, також можна замінити однією смугою.

Нехай межа модельної смуги S має вигляд $\partial_+ S = (-2, 2)$, $\partial_- S = (-2, 2)$, див. Рис. 6.2.3.

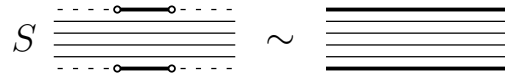


Рис. 6.2.3:

Означимо наступні два гомеоморфізми $\phi_c, \phi_m : \partial_+ S \rightarrow \partial_- S$ за допомогою рівностей

$$\phi_c(t, 1) = (t, -1), \quad \phi_m(t, 1) = (-t, -1),$$

для всіх $t \in (-2, 2)$. Нехай також $C = S/\phi_c$, $M = S/\phi_m$ є фактор-просторами простору S , які отримано ототожненням межових компонент смуги за допомогою відображень ϕ_c і ϕ_m , відповідно. З Лема 6.2.2 слідує, що C є відкритим циліндром, а M є відкритим листом Мебіуса. Більш того, лист шарування Δ_Z , отриманий склеюванням $\partial_+ S$ з $\partial_- S$ має тип (c1).

Лема 6.2.5 *Якщо Z зв'язна і має лист типу (c1), то вона листово гомеоморфна одній з поверхонь C або M .*

Доведення. Нехай $\omega = \partial_- \widehat{S}_\gamma = \partial_+ \widehat{S}_\gamma$ є листом типу (c1) для деякого $\gamma \in \mathbf{A}$. Нехай також

$$(a, b) \times \{-1\} = \partial_- S_\gamma \quad \text{та} \quad (c, d) \times \{1\} = \partial_+ S_\gamma$$

є компонентами межі S_γ , так що

$$S_\gamma = (a, b) \times \{-1\} \cup \mathbb{R} \times (-1, 1) \cup (c, d) \times \{1\}.$$

Оскільки $\omega = \partial_- \widehat{S}_\gamma = \partial_+ \widehat{S}_\gamma$, то

$$S_\gamma = q^{-1}(\widehat{S}_\gamma) \subset \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha.$$

Але S_γ є відкрито-замкненою підмножиною $\bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha$, і з означення фактортопології на Z слідує, що \widehat{S}_γ є відкрито-замкненою підмножиною Z , внаслідок чого вона збігається з Z .

Таким чином Z отримана шляхом склеювання $(c, d) \times \{+1\}$ з $(a, b) \times \{-1\}$ за допомогою афінного гомеоморфізму ϕ_γ . Якщо ϕ_γ зберігає орієнтацію, то Z гомеоморфна до C . Інакше Z гомеоморфна M . \square

Означення 6.2.6 *Смугаста поверхня називається зведеною, якщо вона не має листів типів (c1) і (c2), тобто кожен лист типу (c) має тип (c3).*

Теорема 6.2.7 (С. І. Максименко, Є. О. Полулях, див. [64]) *Кожна зв'язна смугаста поверхня Z зі зліченною базою листово гомеоморфна циліндру C , листу Мебіуса M , або зведеній поверхні.*

Доведення цієї теореми наведено в Додатку E.2.

6.3 Група гомеоморфізмів, які зберігають шарування Δ_Z

Нехай Z є смугастою поверхнею. Позначимо через $\mathcal{H}(\Delta_Z)$ групу листових гомеоморфізмів поверхні Z , тобто таких гомеоморфізмів, що для кожного $h \in \mathcal{H}(\Delta_Z)$ і кожного листа $\omega \in \Delta_Z$ образ $h(\omega)$ також є листом Δ_Z .

Нехай також $\mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$ є підгрупою групи $\mathcal{H}(\Delta_Z)$, яка складається з гомеоморфізмів h , таких що $h(\omega) = \omega$ для кожного листа шарування Δ_Z і h зберігає орієнтацію на ω .

Наділимо $\mathcal{H}(\Delta_Z)$ відповідною компактно-відкритою топологією. Нехай $\mathcal{H}_0(\Delta_Z)$ є компонентою лінійної зв'язності одиниці $\mathcal{H}(\Delta_Z)$, тобто вона складається з гомеоморфізмів $h \in \mathcal{H}(\Delta_Z)$, які ізотопні у $\mathcal{H}(\Delta_Z)$ до id_Z .

Нехай $\Sigma(\Delta_Z)$ є об'єднанням листів типів (b) і (c3). Очевидно, $h(\Sigma(\Delta_Z)) = \Sigma(\Delta_Z)$ для кожного $h \in \mathcal{H}(\Delta_Z)$.

Спочатку розглянемо випадок, коли Z є модельною смугою.

Лема 6.3.1 *Нехай $S \subset \mathbb{R} \times [-1, 1]$ є модельною смугою і $g \in \mathcal{H}(\Delta_S)$. Тоді*

$$g(x, y) = (\lambda(x, y), \mu(y)), \quad (6.3.1)$$

де $\mu : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ є гомеоморфізмом, і $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією, такою що для кожного $y \in (-1, 1)$ відповідність $x \mapsto \lambda(x, y)$ є гомеоморфізмом $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Доведення. Оскільки g зберігає листи Δ_S , тобто лінії $\mathbb{R} \times y$, $y \in (-1, 1)$, то μ не залежить від x . Більш того, з того що g гомеоморфно відображає листи на листи слідує, що відображення $x \mapsto \lambda(x, y)$ є гомеоморфізмом $\mathbb{R} \times y \rightarrow \mathbb{R} \times \mu(y)$ для кожного $y \in (-1, 1)$. Нарешті, функція $\mu : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1)$ є строго монотонною, сюр'єктивною і неперервною. Тому вона продовжується до гомеоморфізму відрізка $[-1, 1]$ на себе. \square

Доведення наступної леми просте і ми залишаємо його читачеві.

Лема 6.3.2 *Нехай $\widehat{S} \subset Z$ є смугою, що містить листи з $\Sigma(\Delta_Z)$, відображення $\xi : S \rightarrow \widehat{S}$ задає відповідну карту, і $h \in \mathcal{H}(\Delta_Z)$. Якщо $h(\widehat{S}) = \widehat{S}$, то h піднімається до гомеоморфізму $g : S \rightarrow S$ модельної смуги S , для якого $\xi \circ g = h \circ \xi$.*

Лема 6.3.3 *Група $\mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$ стягувана.*

Доведення цієї леми наведено в Додатку [Е.3](#).

Теорема 6.3.4 (С. І. Максименко, Є. О. Полулях, див. [64]) *Нехай Z є зв'язною зведеною смугастою поверхнею і $h \in \mathcal{H}(\Delta_Z)$. При цих умовах $h \in \mathcal{H}_0(\Delta_Z)$ тоді і лише тоді, коли виконуються три наступні умови:*

(a) $h(\widehat{S}_\alpha) = \widehat{S}_\alpha$ для всіх $\alpha \in \mathbf{A}$;

(b) якщо $g_\alpha : S_\alpha \rightarrow S_\alpha$, $g(x, y) = (\lambda(x, y), \mu(y))$, $\alpha \in \mathbf{A}$, є єдиним підняттям $h|_{\widehat{S}_\alpha}$ виду (6.3.1), то μ зростає і $\lambda(x, y)$ також зростає для кожного фіксованого $y \in (-1, 1)$.

(c) h лишає інваріантним кожен лист $\omega \subset \Sigma(\Delta_Z)$ і зберігає його орієнтацію.

Більш того, $\mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$ є строгим деформаційним ретрактом $\mathcal{H}_0(\Delta_Z)$, зокрема, $\mathcal{H}_0(\Delta_Z)$ також стягувана.

Доведення цієї теореми див. у Додатку **Е.4**.

Розділ 7

Шарування на некомпактних поверхнях, всі листи яких некомпактні.

7.1 Вступ

Нехай X — двовимірний многовид, можливо незв'язний і з межею, на якому задано одновимірне шарування Δ . Скажемо, що Δ належить до класу \mathcal{F} , якщо воно відповідає наступним трьом умовам.

1. Кожен лист ω шарування Δ є замкненою підмножиною X .
2. Кожна компонента зв'язності ω межі ∂X є листом шарування Δ .
3. Нехай $\omega \in \Delta$ є листом, а також $J = [0, 1)$, якщо $\omega \subset \partial X$, і $J = (-1, 1)$ у протилежному випадку. Тоді існують відкритий окіл U листа ω і гомеоморфізм $\phi : \mathbb{R} \times J \rightarrow U$, такі що $\phi(\mathbb{R} \times 0) = \omega$ і $\phi(\mathbb{R} \times t)$ є листом шарування Δ для всіх $t \in J$, див. Рис. 7.1.1.

Грубо кажучи, *одновимірне шарування Δ* , це розбиття простору X , яке виглядає як розбиття \mathbb{R}^2 на паралельні прямі у околі кожної точки $x \in X$. Тоді Δ належить до класу \mathcal{F} , якщо воно виглядає як розбиття \mathbb{R}^2 на паралельні прямі у околі кожного листа $\omega \in \Delta$. Зокрема, кожен лист шарування Δ гомеоморфний до \mathbb{R} .

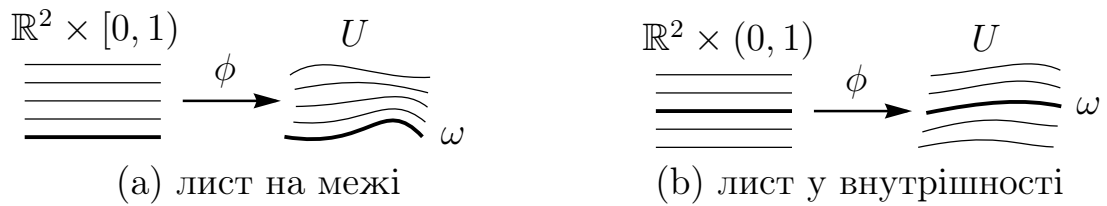


Рис. 7.1.1:

Нашою метою є описати топологічну структуру шарувань, які належать до класу \mathcal{F} з точністю до листових гомеоморфізмів, див. Теорему 7.1.5 нижче. Шарування такого типу на площині були досліджені В. Капланом [8] і вони виявляються шаруваннями на компоненти зв'язності множин рівня псевдогармонічних функцій на \mathbb{R}^2 , див. В. Каплан [8, Теорема 42], В. Бутбі [12], [13], М. Морс і Дж. Дженкінс [21], М. Морс [15]. Ми покращимо конструкцію Каплана і узагальнюємо її на шарування на довільних поверхнях.

Топологічна структура шарувань з особливостями на поверхнях, зокрема шарувань на орбіти потоків, досліджувалась у наступних роботах: А. Андронов та Л. Понтрягін [34], М. Пейксото [35], [36], С. Арансон і В. Грінес [37], [38], І. Бронштейн та І. Ніколаєв [39], С. Арансон, Є. Жужома і В. Медведєв [40], Л. Плахта [4], [5], [6], А. Ошемков і В. Шарко [41], С. Арансон, В. Грінес і В. Кайманович [42], М. Фарбер [43], Н. Будницька і О. Пришляк [44], Н. Будницька і Т. Рибалкіна [45] і багатьох інших.

Вилучаючи сингулярності, можна застосувати отримані результати до шарувань з особливостями, що задані на поверхнях і не мають компактних регулярних шарів.

Спеціальні листи

Припустимо, що Δ є шаруванням з класу \mathcal{F} на поверхні X . Нехай $Y = X/\Delta$ є простором листів, а відображення $p : X \rightarrow Y$ є проекцією. Наділимо Y фактор-топологією, так що підмножина $V \subset Y$ відкрита тоді й лише тоді, коли її повний прообраз $p^{-1}(V)$ відкритий в X . Насиченням $S(U)$ множини $U \subset X$ відносно Δ є об'єднання всіх листів Δ , що перетинають U . Еквівалентно, $S(U) = p^{-1}(p(U))$.

Оскільки кожен лист шарування Δ є замкненою підмножиною X , то Y є T_1 -простором. Але взагалі кажучи простір Y не є Хаусдорфовим.

Лема 7.1.1 *Якщо $\Delta \in \mathcal{F}$, то проекція $p : X \rightarrow Y$ є відкритим відображенням.*

Доведення. Нам потрібно довести, що для кожного відкритого $V \subset X$ його насичення $S(V)$ є також відкритим. Таким чином, для кожного $x \in S(V)$ нам потрібно знайти відкриту насичену множину W , для якої $x \in W = S(W) \subset S(V)$. Нехай ω є листом, що містить x . Припустимо, що $J = [0, 1)$, якщо $\omega \subset \partial X$, і $J = (-1, 1)$ у протилежному випадку. Тоді за означенням класу \mathcal{F} існує листовий гомеоморфізм $\phi : \mathbb{R} \times J \rightarrow U$, такий що $\phi^{-1}(x) = (t, 0) \in \mathbb{R} \times 0$ для деякого $t \in \mathbb{R}$. Внаслідок цього $\phi^{-1}(V \cap U)$ є відкритим околom точки $(t, 0)$, тому існує $\varepsilon > 0$, таке що для множини $K = J \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$ виконується включення $t \times K \subset \phi^{-1}(V \cap U)$. Але K відкрита в J , тому $\mathbb{R} \times K$ відкрита в $\mathbb{R} \times J$. Отже множина $\phi(\mathbb{R} \times K)$ є насиченою і відкритою в U , яка в свою чергу відкрита в X . Тому $\phi(\mathbb{R} \times K)$ відкрита в X і $x \in \phi(\mathbb{R} \times K) \subset S(V)$. Внаслідок цього $S(V)$ відкрита в X . \square

Означення 7.1.2 *Нехай ω є листом шарування Δ і $y = p(\omega) \in Y$. Скажемо, що ω є спеціальним листом і y є спеціальною точкою простору Y , якщо простір Y не є Хаусдорфовим у точці y , тобто $y \neq \bigcap_{y \in V} \bar{V}$, де V пробігає всі відкриті околи точки y .*

Приклад 7.1.3 Розглянемо шарування на \mathbb{R}^2 , зображене на Рис. 7.1.2(а). Воно розбивається листами α, β, γ і δ , які зображені жирними лініями, на п'ять “смуг” A, B, C, D і E , розшарованих на “паралельні” лінії, див. Рис. 7.1.2(б). Крім того, простір листів Y має структуру, зображену на Рис. 7.1.2(с), на якому смуги зображені жирними лініями, а тонкі лінії лише вказують на те, що α належить до замикання A і B , β належить до замикань B і C і т. ін.. Зокрема, простір Y не є Хаусдорфовим у точках α, β, γ і δ . Точніше, підпростір $Y \setminus \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ є Хаусдорфовим, проте кожен окіл α перетинається з довільним околom β , і аналогічна властивість виконується для пар $\{\beta, \gamma\}$ і $\{\gamma, \delta\}$. Отже листи α, β, γ і δ є спеціальними.



Рис. 7.1.2:

Кожна модельна смуга S (див. Означення 6.1.1) допускає природне одновимірне шарування на паралельні лінії $\mathbb{R} \times t$ і на межові інтервали з ∂S . Нагадаємо, що воно називається *канонічним*. З Лема 6.2.2 слідує, що це шарування належить до класу \mathcal{F} .

Модельну смугу виду $\mathbb{R} \times (a, b)$ будемо називати *відкритою*.

Приклад 7.1.4 Шарування з Прикладу 7.1.3 розбивається на п'ять модельних смуг так що

$$A \cong E \cong \mathbb{R} \times (0, 1) \cup (0, 1) \times 1,$$

$$B \cong C \cong D \cong \mathbb{R} \times (0, 1) \cup ((0, 1) \cup (2, 3)) \times 1.$$

Розглянемо модельну смугу, у кожному березі якої міститься єдиний межовий інтервал. Нагадаємо, що *стандартний циліндр* C і *стандартна стрічка Мебіуса* M отримані з цієї модельної смуги склеюванням її межових інтервалів за допомогою гомеоморфізму, який, відповідно, зберігає або обертає орієнтацію. З Лема 6.2.2 слідує, що канонічні шарування Δ_C і Δ_M на C і M , відповідно, належать до класу \mathcal{F} .

Шарування, асоційовані з регулярними функціями

Неперервну функцію $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ назвемо *регулярною*, якщо для кожного $z \in \mathbb{R}^2$ існують локальні координати (u, v) , в яких $z = (0, 0)$ і $f(u, v) = u + \text{const}$.

Тоді розбиття Δ простору \mathbb{R}^2 на зв'язні компоненти множин рівня $f^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ функції f є *шаруванням* у звичайному сенсі, тобто воно *локально* гомеоморфне до розбиття \mathbb{R}^2 на паралельні прямі. Скажемо, що Δ є *шаруванням*,

що асоційоване з f .

Відмітимо, що f не має локальних екстремумів, отже всі листи f гомеоморфні \mathbb{R} . Дійсно, якщо Δ лист ω , який є простою замкненою кривою, то по теоремі Жордана ω обмежує двовимірний диск. Оскільки f постійна на ω , вона мусить досягати локального екстремуму всередині диску, що призводить до суперечності.

Нехай підмножина $J \subset \mathbb{R}$ є зв'язною, тобто є відкритим, замкненим, або напів-відкритим інтервалом. Тоді *перерізом* $\sigma : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ шарування Δ будемо називати неперервну криву, яка перетинає кожен лист не більш, ніж в одній точці. Легко перевірити, що σ є перерізом тоді й лише тоді, коли композиція $f \circ \sigma : J \rightarrow \mathbb{R}$ є строго монотонною.

Назвемо *насиченням перерізу* $\sigma : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ насичення його образу $S(\sigma(J))$ і позначимо його $S(\sigma)$, див. [8, §1.4]

Каплан [8, Theorem 30] довів, що насичення $S(\sigma)$ перерізу $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ шарування Δ листово гомеоморфне до простору $\mathbb{R} \times [a, b]$, який розшаровано на горизонтальні прямі. Однак, цей результат може вводити в оману, оскільки множина $S(\sigma)$ не обов'язково замкнена в X .

Наприклад, розглянемо шарування, зображене на Рис. 7.1.2(b). Нехай крива $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ є перерізом, що перетинає спеціальний лист α і для якого $\sigma(a) \in A$ та $\sigma(b) \in B$. Тоді $\overline{S(\sigma)} \setminus S(\sigma) = \beta$.

Конструкція Каплана

У [8, Теорема 29] В. Каплан довів, що шарування Δ , асоційоване з регулярною функцією f належить до класу \mathcal{F} . Насправді, він зіставив шаруванню Δ сім'ю пар $\xi = \{(\omega_i, \sigma_i)\}_{i=-a}^b$ для деяких $a, b \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, де

- ω_i є листом, що є спеціальним при $i \neq 0$;
- $\sigma_0 : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma_i : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ для $i > 0$, і $\sigma_i : (-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ для $i < 0$, це деякі “гарні” перерізи шарування Δ ;

- $\sigma_i(0) \in \omega_i$ для кожного i ,

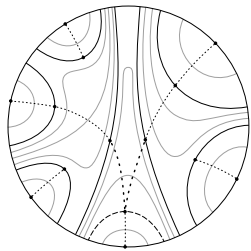
$$\sigma_i[0, 1) \cap \overline{S\left(\bigcup_{j=0}^{i-1} \sigma_j[0, 1)\right)} = \sigma_i(0), \quad i > 0,$$

$$\sigma_i(-1, 0] \cap \overline{S\left(\bigcup_{j=i+1}^0 \sigma_j(-1, 0]\right)} = \sigma_i(0), \quad i < 0.$$

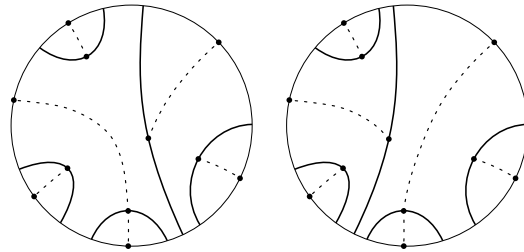
Каплан довів, що сім'я ξ визначає Δ з точністю до листового гомеоморфізму.

Як відмічено вище, $S(\sigma_0)$ є листово гомеоморфним до $\mathbb{R} \times (0, 1)$, у той час як $S(\sigma_i)$, $i \neq 0$, листово гомеоморфні до смуги $\mathbb{R} \times [0, 1)$. Отже, ξ визначає щонайбільш зліченну сім'ю смуг $\{V_i = S(\sigma_i)\}$ таку що V_{i+1} приклеєна до V_i вздовж інтервалу ω_i на їх спільній межі.

Метою Каплана було зменшити кількість смуг наскільки це можливо, див. перший параграф [8, Розділ 3.1]. Проте, вибір сім'ї ξ тоді стає неоднозначним і залежить від конкретного вибору спеціальних листів і перерізів. Це проілюстровано на Рис. 7.1.3(b), на якому зображені дві різні сім'ї смуг і перерізів для одного шарування.



(a) Шарування



(b) Дві різні максимальні сім'ї перерізів (позначені штрихованими лініями)

Рис. 7.1.3:

З іншого боку, розрізання \mathbb{R}^2 вздовж спеціальних листів є однозначною процедурою, яка дає канонічне розбиття площини \mathbb{R}^2 .

При додатковому припущенні, що сім'я всіх спеціальних листів є локально скінченною (кожна точка простору X має окіл, який перетинає лише скінченну кількість спеціальних листів) ми узагальнюємо результати Каплана на шарування Δ з класу \mathcal{F} на довільних поверхнях X і описуємо топологічну

структуру компонент зв'язності множини $X \setminus \text{Spec}(\Delta)$ і їх замикань в просторі X , де $\text{Spec}(\Delta)$ є об'єднанням всіх спеціальних листів шарування Δ .

Теорема 7.1.5 (С. І. Максименко, Є. О. Полулях, див. [65]) *Нехай X є зв'язним двовимірним многовидом і Δ є шаруванням на X , що належить до класу \mathcal{F} . Нехай сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ всіх спеціальних листів шарування Δ є локально скінченною, і нехай Q є компонентою зв'язності множини $X \setminus (\text{Spec}(\Delta) \cup \partial X)$. Тоді справедливі такі твердження.*

1. Q листово гомеоморфна або до стандартного циліндру C , або до стандартної стрічки Мебіуса M , або до відкритої модельної смуги $\mathbb{R} \times (-1, 1)$. Крім того, у перших двох випадках $Q = X$.

2. Нехай Q є листово гомеоморфною до відкритої модельної смуги. Зафіксуємо листовий гомеоморфізм $\phi : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow Q$ і позначимо

$$A = \phi(\mathbb{R} \times (-1, 0]), \quad B = \phi(\mathbb{R} \times [0, 1)).$$

Тоді замикання \bar{A} і \bar{B} листово гомеоморфні до модельних смуг.

З цієї теореми слідує, що топологічна структура шарування $\Delta \in \mathcal{F}$ однозначно визначається комбінаторикою склеювання модельних смуг.

Доведення Теореми 7.1.5 буде наведено у підрозділах 7.4 та 7.6.

Наслідок 7.1.6 (С. І. Максименко, Є. О. Полулях, див. [66]) *Нехай X є зв'язним двовимірним многовидом і Δ — шарування на X , що належить до класу \mathcal{F} . Нехай сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ всіх спеціальних листів шарування Δ є локально скінченною.*

Тоді X листово гомеоморфний до деякої смугастої поверхні, на якій задано канонічне шарування.

Доведення наслідку наведено у Додатку Ж.1.

7.2 Спеціальні точки просторів, що не є Хаусдорфовими

У цьому підрозділі Y — це топологічний простір.

Означення 7.2.1 Нехай β_y — сім'я, яка складається зі всіх околів точки $y \in Y$. Множина

$$\text{hcl}(y) := \bigcap_{V \in \beta_y} \bar{V}$$

називається Хаусдорфовим замиканням точки y . Скажемо, що y є спеціальною точкою простору Y , якщо $y \neq \text{hcl}(y)$. Множина всіх спеціальних точок Y буде позначатись \mathcal{V} .

Відмітимо, що простір Y є Хаусдорфовим тоді й лише тоді, коли $\mathcal{V} = \emptyset$.

Лема 7.2.2 1) Нехай $y, z \in Y$. Тоді включення $y \in \text{hcl}(z)$ і $z \in \text{hcl}(y)$ еквівалентні, проте, взагалі кажучи, $\text{hcl}(y) \neq \text{hcl}(z)$.

2) Нехай відображення $f : Y \rightarrow Z$ неперервне і простір Z Хаусдорфів. Тоді $f(\text{hcl}(y)) = f(y)$ для кожного $y \in Y$.

3) Підпростір $Y \setminus \mathcal{V}$ всіх точок, що не є спеціальними, є Хаусдорфовим.

Доведення. 1) Нехай $y \in \text{hcl}(z) = \bigcap_{V \in \beta_z} \bar{V}$, тобто y належить замиканню кожного околу точки z , що в свою чергу означає, що кожен окіл точки y перетинає довільний окіл точки z . Остання властивість є симетричною по відношенню до точок y і z , тому також $z \in \text{hcl}(y)$.

2) Нехай $z \in \text{hcl}(y)$, причому $f(y) \neq f(z)$. Оскільки простір Z Хаусдорфів, існують відкриті неперетинні околи $W_{f(y)}$ і $W_{f(z)}$ точок $f(y)$ і $f(z)$. Тоді їх прообрази $V_y = f^{-1}(W_{f(y)})$ і $V_z = f^{-1}(W_{f(z)})$ є відкритими неперетинними околами точок y і z , відповідно. Отже z не може належати $\text{hcl}(y)$, що суперечить припущенню.

3) Нехай $y, z \in Y \setminus \mathcal{V}$ — дві різні точки. Тоді $y = \text{hcl}(y) \neq z$, внаслідок чого існують два неперетинні околи V_y і V_z точок y і z , відповідно. Отже, простір $Y \setminus \mathcal{V}$ Хаусдорфів. \square

Нехаусдорфові одновимірні многовиди

Нехай топологічний простір Y відповідає аксиомі T_1 і кожна точка цього простору має відкритий окіл, гомеоморфний відкритій підмножині простору $[0, 1)$. Зауважимо, що Y може не бути Хаусдорфовим. Тоді, як звичайно, множину точок, що мають відкритий окіл, гомеоморфний до $(0, 1)$ позначимо $\text{Int } Y$ і назвемо *внутрішністю* Y , а доповнення до цієї множини $\partial Y := Y \setminus \text{Int } Y$ буде називатися *межею* Y .

Лема 7.2.3 *Припустимо, що множина \mathcal{V} спеціальних точок Y є локально скінченною. Тоді кожна компонента зв'язності W множини $Y \setminus \mathcal{V}$ є відкритою в Y і гомеоморфна одній з наступних множин: $[0, 1)$, $(0, 1)$, $[0, 1]$, S^1 . Якщо має місце один з двох останніх випадків, тобто W є компактом, то W є компонентою зв'язності простору Y .*

Кожна компонента зв'язності $Y \setminus (\mathcal{V} \cup \partial Y)$ гомеоморфна $(0, 1)$.

Доведення. Оскільки Y є T_1 -простором, кожна точка $y \in Y$ є замкненою множиною. Також з локальної скінченності \mathcal{V} слідує, що множина \mathcal{V} є замкненою, тому з пункту 3) Лемми 7.2.2 слідує, що $Y \setminus \mathcal{V}$ є Хаусдорфовим простором, який локально гомеоморфний до $[0, 1)$. Отже, кожна компонента зв'язності W множини $Y \setminus \mathcal{V}$ є одновимірним многовидом, внаслідок чого вона гомеоморфна до одного з наступних просторів $[0, 1)$, $(0, 1)$, $[0, 1]$, S^1 . Крім того, оскільки простір $Y \setminus \mathcal{V}$ локально зв'язний, то множина W відкрита у просторі $Y \setminus \mathcal{V}$, який сам є відкритою підмножиною Y . Тому W відкрита у Y .

Припустимо, що множина W компактна, отже гомеоморфна $[0, 1]$ або S^1 . Покажемо, що у цьому випадку W є також замкненою підмножиною Y . З цього буде слідувати, що W є компонентою зв'язності Y .

Нехай послідовність $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset W$ є збіжною до деякого $z \in Y$. Нам треба перевірити, що $z \in W$. Оскільки W є компактом, то ця послідовність збігається також до деякого $y \in W$. Отже, для двох довільних околів V_y і V_z точок y і z , відповідно, існує $n > 0$, таке що $y_n \in V_y \cap V_z$. Тому $V_y \cap V_z \neq \emptyset$, з чого слідує, що $z \in \text{hcl}(y) = \{y\}$, тобто $z = y \in W$.

Останнє твердження ми залишаємо читачеві. \square

Припустимо, що простір Y зв'язний і не гомеоморфний колу.

Позначимо $\widehat{Y} = Y \setminus (\mathcal{V} \cup \partial Y)$. Нехай $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ є сім'єю всіх компонент зв'язності цього простору. Тоді у відповідності з Леммою 7.2.3 кожна множина $W_\alpha \in \mathcal{A}$ відкрита у Y і гомеоморфна відкритому інтервалу.

Для кожного $\alpha \in \mathcal{A}$ зафіксуємо точку $x_\alpha \in W_\alpha$ і розглянемо множину $Z = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha$. Позначимо $\widehat{Y}^0 = \widehat{Y} \setminus Z = Y \setminus (Z \cup \mathcal{V} \cup \partial Y)$. Нехай $\{\widehat{W}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ є сім'єю всіх компонент зв'язності простору \widehat{Y}^0 . Зрозуміло, що $\mathcal{B} = \mathcal{A} \times \{0, 1\}$ оскільки кожна множина $W_\alpha \setminus x_\alpha$ має дві компоненти зв'язності.

Нарешті, розглянемо точку $y \in \mathcal{V} \cup \partial Y$ і підпростори $\widehat{Y}_y = \widehat{Y} \cup \{y\}$ та $\widehat{Y}_y^0 = \widehat{Y}^0 \cup \{y\}$ простору Y з індукованою топологією.

Як легко бачити, якщо $z \in Y' \subset Y$, то $\text{hcl}_{Y'}(z) \subset \text{hcl}(z)$. Тут $\text{hcl}_{Y'}(z)$ є Хаусдорфовим замиканням точки z у підпросторі Y' простору Y в індукованій топології. Отже, підпростори \widehat{Y} та \widehat{Y}^0 простору Y є Хаусдорфовими. З Лема 7.2.2 слідує, що $\widehat{Y}_y^0 \cap \text{hcl}(y) \subset \widehat{Y}_y \cap \text{hcl}(y) = \{y\}$, тому простори \widehat{Y}_y та \widehat{Y}_y^0 також Хаусдорфові.

Лема 7.2.4 *Припустимо, що множина \mathcal{V} спеціальних точок простору Y є локально скінченною.*

Нехай $y \in \partial Y$. Тоді існує єдина $K \in \{\widehat{W}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$, така що $y \in \overline{K}$ у просторі Y . В цьому випадку $V := \{y\} \cup K$ є відкритим околom y в Y і існує гомеоморфізм $\psi : [0, 1) \rightarrow V$ для якого $\psi(0) = y$.

Нехай $y \in \mathcal{V} \setminus \partial Y$. Тоді існують два різних елементи $K, L \in \{\widehat{W}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$, такі що $y \in \overline{K} \cap \overline{L}$ і $y \notin \overline{M}$ для всіх інших $M \in \{\widehat{W}_\beta\}_{\beta \in \mathcal{B}}$. Крім того, множина $V := K \cup \{y\} \cup L$ є відкритим околom точки y в Y і існує гомеоморфізм $\mu : (-1, 1) \rightarrow V$, такий що $\mu(0) = y$.

Доведення цієї лема наведено в Додатку Ж.2.

7.3 Розбиття і фактор-простори

Розглянемо розбиття Δ топологічного простору X . Нехай $Y = X/\Delta$ є фактор-простором, а $p : X \rightarrow Y$ є відображенням проєкції. Наділимо Y фактор-

топологією, так що підмножина $V \subset Y$ відкрита тоді й тільки тоді, коли її повний прообраз $p^{-1}(V)$ є відкритим у X .

Насиченням $S(U)$ підмножини $U \subset X$ відносно Δ є об'єднання всіх $\omega \in \Delta$, таких що $\omega \cap U \neq \emptyset$. Еквівалентно, $S(U) = p^{-1}(p(U))$. Підмножина U є насиченою, якщо $U = S(U)$. Очевидно, якщо $A \cap S(B) = \emptyset$, то й $S(A) \cap S(B) = \emptyset$.

Лема 7.3.1 1) Y є T_1 -простором тоді й лише тоді, коли кожен елемент $\omega \in \Delta$ замкнений.

2) Наступні умови еквівалентні:

(а) відображення $p : X \rightarrow Y$ відкрите;

(б) для кожного $x \in X$ існує відкритий окіл U , насичення $S(U)$ якого є відкритим;

(в) існує відкрите покриття $\beta = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$ простору X таке, що для кожного $i \in \Lambda$ обмеження $p|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ є відкритим відображенням.

3) Якщо відображення p відкрите, то для кожної насиченої множини B виконуються співвідношення

$$X \setminus \overline{B} = S(X \setminus \overline{B}), \quad (7.3.1)$$

$$p(\overline{B}) = \overline{p(B)}. \quad (7.3.2)$$

Зокрема, $\overline{S(A)}$ і $X \setminus \overline{S(A)}$ є насиченими для кожної підмножини $A \subset X$.

4) Нехай $\beta = \{W_i\}_{i \in \Lambda}$ — сім'я підмножин простору Y , і $\alpha = \{p^{-1}(W_i)\}_{i \in \Lambda}$ — сім'я прообразів цих множин у просторі X . Якщо β локально скінченна, то і α відповідає цій властивості. З іншого боку, якщо α локально скінченна і відображення p відкрите, то β також локально скінченна.

5) Нехай топологічний простір X нормальний і $\alpha = \{\omega_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — локально скінченна сім'я попарно неперетинних замкнених підмножин X . Тоді для кожного $i \in \mathbb{N}$ існує окіл U_i множини ω_i , такий що $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ для $i \neq j$.

6) Нехай $f : A \rightarrow B$ — відображення топологічних просторів. Припустимо, що $\{K_i\}_{i \in \Lambda}$ є локально скінченним покриттям A замкненими множинами. Якщо кожне з обмежень $f|_{K_i} : K_i \rightarrow B$ неперервне, то й f неперервне.

Крім того, припустимо, що відображення f бієктивне, сім'я $\{\psi(K_i)\}_{i \in \Lambda}$ локально скінченна, множина $f(K_i)$ замкнена в B , і обмеження $f|_{K_i} : K_i \rightarrow f(K_i)$ є гомеоморфізмом для кожного $i \in \Lambda$. Тоді f також гомеоморфізм.

Доведення цієї леми наведено в Додатку **Ж.3**.

Означення 7.3.2 Скажемо, що розбиття Δ є локально тривіальним, якщо для кожного $\omega \in \Delta$ існують відкритий окіл U , топологічний простір J , точка $t_0 \in J$, і гомеоморфізм $\phi : \omega \times J \rightarrow U$, такі що $\phi(\omega \times t)$ є елементом Δ для кожного $t \in J$, а також $\phi(x, t_0) = x$ для всіх $x \in \omega$.

Зокрема, шарування, що належить до класу \mathcal{F} , є локально тривіальним розбиттям.

Зауважимо, що у позначеннях Означення **7.3.2** множина U насичена і відкрита в X , тому з Леми **7.1.1** слідує, що її образ $V = p(U)$ є відкритою підмножиною Y і наступна діаграма є комутативною:

$$\begin{array}{ccc} \omega \times J & \xrightarrow[\cong]{\phi} & U = p^{-1}(V) \\ q_2 \downarrow & & \downarrow p \\ J & \xrightarrow[\text{1-1}]{\xi} & V \end{array} \quad (7.3.3)$$

Тут q_2 є проекцією на другий множник, а ξ — індуковане бієктивне фактор-відображення, але не обов'язково ξ є гомеоморфізмом.

Лема 7.3.3 Наступні умови еквівалентні:

1. фактор-відображення $p : X \rightarrow Y$ є локально-тривіальним розшаруванням;
2. розбиття Δ є локально тривіальним і фактор-відображення $p : X \rightarrow Y$ є відкритим.

Доведення. (1) \Rightarrow (2). Нехай p є локально-тривіальним розшаруванням. Тоді розбиття Δ є локально-тривіальним. Дійсно, нехай $\omega \in \Delta$ і $y = p(\omega) \in Y$.

Оскільки p є локально-тривіальним, то існує окіл V точки y , для якого є комутативною наступна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} \omega \times V & \xrightarrow[\cong]{\phi} & U_\omega = p^{-1}(V) \\ q_2 \downarrow & & \downarrow p \\ V & \xrightarrow{\xi = \text{id}_V} & V \end{array} \quad (7.3.4)$$

У цій діаграмі ϕ є гомеоморфізмом. Вона збігається з (7.3.3) для $J = V$, отже розбиття Δ є локально-тривіальним.

Доведемо, що відображення p є відкритим. Відмітимо, що відображення координатної проекції q_2 у діаграмі (7.3.4) є відкритим. Оскільки ϕ є гомеоморфізмом, і за вибором множина $V = p(U_\omega)$ відкрита в Y , то обмеження $p|_{U_\omega}$ також є відкритим відображенням. Але тоді $\beta = \{U_\omega\}_{\omega \in \Delta}$ є відкритим покриттям простору X і кожне обмеження $p|_{U_\omega}$ є відкритим відображенням. Отже, з 2) і з Лемми 7.3.1 слідує, що відображення p є відкритим.

(2) \Rightarrow (1). Припустимо, що відображення p є відкритим і розбиття Δ локально-тривіальне. Ми стверджуємо, що тоді у (7.3.3) відображення ξ є відкритим, внаслідок чого це відображення є гомеоморфізмом. З цього буде випливати, що p є локально-тривіальним розшаруванням.

Нехай підмножина $T \subset J$ є відкритою. Тоді $\phi \circ q_2^{-1}(T)$ відкрита в U . Оскільки p відкрите відображення, то $\xi(T) = p \circ \phi \circ q_2^{-1}(T)$ відкрита в V . Отже відображення ξ є відкритим. \square

Означення 7.3.4 Елемент $\omega \in \Delta$ назвемо спеціальним, якщо його образ $y = p(\omega) \in Y$ є спеціальною точкою простору Y , тобто $y \neq \text{hcl}(y) := \bigcap_{V \in \beta_y} \bar{V}$, де β_y є сім'єю всіх околів точки y , див. Означення 7.2.1.

Позначимо

$$\text{hcl}(\omega) = \bigcap_{N(\omega)} \overline{S(N(\omega))}, \quad \text{hcl}_S(\omega) = \bigcap_{N_S(\omega)} \overline{N_S(\omega)},$$

де $N(\omega)$ пробігає всі відкриті околи множини ω і $N_S(\omega)$ пробігає всі насичені відкриті околи множини ω .

Лема 7.3.5 *Нехай $\omega \in \Delta$ і $y = p(\omega)$. Тоді*

$$\text{hcl}(\omega) \subset \text{hcl}_S(\omega) \subset p^{-1}(\text{hcl}(y)).$$

Якщо відображення p відкрите, то

$$\text{hcl}(\omega) = \text{hcl}_S(\omega) = p^{-1}(\text{hcl}(y)), \quad p(\text{hcl}_S(\omega)) = \text{hcl}(y).$$

Доведення. Спочатку встановимо, як зв'язані між собою $\text{hcl}(\omega)$ і $\text{hcl}_S(\omega)$. Відмітимо, що сім'я $\mathcal{A} = \{S(N(\omega))\}$, яка складається з насичень всіх відкритих околів множини ω , включає сім'ю $\mathcal{B} = \{N_S(\omega)\}$ всіх насичених відкритих околів множини ω . Тому перетин $\text{hcl}(\omega)$ множин з більшої сім'ї \mathcal{A} міститься у перетині $\text{hcl}_S(\omega)$ множин з меншої сім'ї \mathcal{B} , тобто $\text{hcl}(\omega) \subset \text{hcl}_S(\omega)$.

Якщо відображення p відкрите, так що насичення відкритої множини є відкритою множиною, то $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, отже $\text{hcl}(\omega) = \text{hcl}_S(\omega)$.

Опишемо зв'язок між $\text{hcl}_S(\omega)$ і $\text{hcl}(y)$. За означенням фактор-топології на Y , відображення p – це бієкція між сім'ями \mathcal{B} і β_y . Крім того, якщо $N_S(\omega) \in \mathcal{B}$ є насиченим відкритим околom множини ω і $V = p(N_S(\omega)) \in \beta_y$ є відкритим околom точки y , тоді з неперервності p слідує, що $p(\overline{N_S(\omega)}) \subset \overline{V}$. Отже $p(\text{hcl}_S(\omega)) \subset \text{hcl}(y)$ і $\text{hcl}_S(\omega) \subset p^{-1}(\text{hcl}(y))$.

Якщо відображення p відкрите, то $p(\overline{N_S(\omega)}) = \overline{p(N_S(\omega))} = \overline{V}$ внаслідок (7.3.2), звідки

$$p(\text{hcl}_S(\omega)) = p\left(\bigcap_{N_S(\omega) \in \mathcal{B}} \overline{N_S(\omega)}\right) = p\left(\bigcap_{V \in \beta_y} p^{-1}(\overline{V})\right) = \bigcap_{V \in \beta_y} \overline{V} = \text{hcl}(y). \quad (7.3.5)$$

Остаточно, оскільки перетин насичених множин $\text{hcl}_S(\omega)$ є насиченою множиною, то з (7.3.5) слідує, що $\text{hcl}_S(\omega) = p^{-1}(\text{hcl}_S(y))$. \square

Лема 7.3.6 *Припустимо, що виконуються наступні умови:*

- (а) $p : X \rightarrow Y$ є локально-тривіальним розшаруванням з шаром \mathbb{R} ;
- (б) множина $\text{Spec}(\Delta)$ спеціальних елементів простору X є локально скінченною;

(с) Y є T_1 -простором, кожна точка якого має окіл, гомеоморфний деякій відкритій множині простору $[0, 1)$.

Тоді кожна компонента зв'язності Q множини $X \setminus \text{Spec}(\Delta)$ є відкритою в X і листово гомеоморфна одній з п'яти наступних смугастих поверхонь: модельним смугам $\mathbb{R} \times (0, 1)$, $\mathbb{R} \times [0, 1)$, $\mathbb{R} \times [0, 1]$, або стандартному циліндру C , або стандартному листу Мебіуса M . Більш того, в останніх трьох випадках, Q також є замкненою в X .

Доведення. З (а) і Лемми 7.3.3 слідує, що відображення p відкрите. Тому $\text{Spec}(\Delta) = p^{-1}(\mathcal{V})$ згідно Лемі 7.3.5 і $p(\text{Spec}(\Delta)) = \mathcal{V}$, де \mathcal{V} є множиною спеціальних точок простору Y . Тоді з (б) і пункту 4) Лемі 7.3.1 випливає, що сім'я точок \mathcal{V} також є локально скінченною. Внаслідок (с) кожна точка з Y є замкненою множиною, отже множина \mathcal{V} замкнена у Y .

Нехай W є компонентою зв'язності $Y \setminus \mathcal{V}$. Тоді множина W відкрита в Y і є відкрито-замкненою підмножиною $Y \setminus \mathcal{V}$. Отже $Q = p^{-1}(W)$ є відкритою в X і відкрито-замкненою в $X \setminus \text{Spec}(\Delta)$, тобто Q є компонентою зв'язності множини $X \setminus \text{Spec}(\Delta)$. Крім того, з (а) слідує, що обмеження $p : Q \rightarrow W$ є локально-тривіальним розшаруванням з шаром \mathbb{R} . Також W гомеоморфна одному з просторів: $(0, 1)$, $[0, 1)$, $[0, 1]$, S^1 внаслідок Лемі 7.2.3. Тому у трьох перших випадках (коли W є зтягуваним) Q пошарово гомеоморфна добутку $\mathbb{R} \times W$, а у останньому випадку, коли $W \cong S^1$, Q пошарово гомеоморфна стандартному циліндру C або стандартному листу Мебіуса M .

Нам лишилось перевірити, що кожна компонента зв'язності Q множини $X \setminus \text{Spec}(\Delta)$ може бути представлена у вигляді $Q = p^{-1}(W)$ для деякої компоненти зв'язності W множини $Y \setminus \mathcal{V}$. Нехай $W = p(Q)$. Ми стверджуємо, що W є відкрито-замкненою підмножиною $Y \setminus \mathcal{V}$. Справді, нехай W' є компонентою зв'язності множини $Y \setminus \mathcal{V}$, що містить W . Тоді, як було відмічено вище, $p^{-1}(W')$ є зв'язною і містить Q , внаслідок чого $Q = p^{-1}(W')$, отже $W = W'$.

□

7.4 Доведення твердження (1) Теорема 7.1.5

Нехай X є двовимірним многовидом і Δ є одновимірним шаруванням на X , що належить до класу \mathcal{F} , множина $\text{Spec}(\Delta)$ спеціальних листів якого є локально скінченною. Нехай також $Y = X/\Delta$ є простором листів з відповідною фактор-топологією, а $p : X \rightarrow Y$ — відображення проєкції.

Ми стверджуємо, що p відповідає умовам (а)-(с) Лема 7.3.6. Дійсно, відображення p відкрите внаслідок Лема 7.1.1, а внаслідок Лема 7.3.3 воно є локально-тривіальним розшаруванням з шаром \mathbb{R} , отже умова (а) виконана. Умова (b) виконується за припущенням, а умова (с) прямо слідує з означення класу \mathcal{F} .

Отже, згідно з Лемою 7.3.6 кожна компонента зв'язності $X \setminus \text{Spec}(\Delta)$ є листово гомеоморфною до одного з просторів: $\mathbb{R} \times (0, 1)$, $\mathbb{R} \times [0, 1)$, $\mathbb{R} \times [0, 1]$, C , M .

Застосовуючи наведені міркування до поверхні $X \setminus \partial X$, приходимо до висновку, що кожна компонента зв'язності простору $X \setminus (\text{Spec}(\Delta) \cup \partial X)$ листово гомеоморфна до одного з просторів: $\mathbb{R} \times (0, 1)$, C , або M . Твердження (1) Теорема 7.1.5 доведене.

7.5 Трапеції

Результат цього підрозділу буде викорисаний для доведення твердження (2) Теорема 7.1.5.

Нехай $c < d$ і неперервні функції $\alpha, \beta : (c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ відповідають нерівності $\alpha(y) < \beta(y)$ для кожного $y \in (c, d]$. Тоді підмножину

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), c < y \leq d\}$$

будемо називати *напів-відкритою трапецією*, або просто *трапецією*. У цьому випадку $[\alpha(d), \beta(d)] \times d$ є *верхньою основою* T , d є *рівнем* верхньої основи,

$(d - c)$ є висотою T , а множина

$$\text{roof}(T) := \{(\alpha(y), y)\}_{y \in (c, d]} \cup [\alpha(d), \beta(d)] \times d \cup \{(\beta(y), y)\}_{y \in (c, d]}$$

є дахом T , див. Рис. 7.5.1а).



Рис. 7.5.1: Напів-відкрита трапеція

Зауважимо, що коли $\phi : \mathbb{R} \times (c, d] \rightarrow \mathbb{R} \times (c, d]$ є гомеоморфізмом, що зберігає другу координату, тобто $\phi(\mathbb{R} \times y) = \mathbb{R} \times y$ для кожного $y \in (c, d]$, то множина $\phi(T)$ також є трапецією.

Взагалі кажучи, α і β можуть бути необмеженими, або не мати границь, коли $y \rightarrow c + 0$. Припустимо додатково, що існують скінченні або несконченні границі

$$\lim_{y \rightarrow c+0} \alpha(y) = a \qquad \lim_{y \rightarrow c+0} \beta(y) = b,$$

такі що $a < b$. Тоді назвемо $(a, b) \times c$ (нижньою) основою T . Якщо a і b скінченні, то назвемо T трапецією з обмеженою основою, а множину

$$\bar{T} = T \cup [a, b] \times c$$

назвемо замкненою трапецією. Зокрема, якщо функції α і β постійні, трапеція T буде називатися прямокутником.

Лема 7.5.1 Нехай $J = (a, b) \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ є відкритим інтервалом, $N = J \cup \mathbb{R} \times (0, +\infty)$, і U є відкритим околom J у N . Тоді існує напів-відкрита трапеція $T \subset U$ з основою J , див. Рис. 7.5.1b).

Доведення. Зафіксуємо дві послідовності $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}, \{b_i\}_{i=0}^{\infty} \subset (a, b)$, такі що $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a, \lim_{i \rightarrow \infty} b_i = b$, і

$$\cdots < a_{i+1} < a_i < \cdots < a_0 < b_0 < \cdots < b_i < b_{i+1} < \cdots$$

Нехай також $J_i = [a_i, b_i] \times 0$. Оскільки U є відкритим оточенням J_i і множина J_i компактна, то знайдеться $r_i > 0$, таке що $J_i \times [0, r_i] \subset U$. Можемо вважати, що $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = 0$ і послідовність $\{r_i\}$ є строго спадною. Позначимо $d = r_1$. Нехай $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow (0, d]$ — єдина пара неперервних функцій, така що для кожного $i \geq 0$ виконуються умови:

- $\alpha(a_i) = \beta(b_i) = r_{i+1}$;
- обмеження $\alpha|_{[a_{i+1}, a_i]}$ і $\beta|_{[b_i, b_{i+1}]}$ лінійні.

Легко перевірити, що функції α і β строго монотонні і обернені до них функції α^{-1} і β^{-1} визначають напів-відкриту трапецію $T \subset U$ з основою J . \square

Твердження 7.5.2 *Нехай $T_i \subset \mathbb{R} \times (c, d]$, $i \in \mathbb{N}$, є напів-відкритою трапецією, верхня основа якої знаходиться на рівні $d_i \in (c, d]$, причому $T_i \cap T_j = \emptyset$ при $i \neq j$ і $\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = c$. Тоді існує гомеоморфізм $\eta : \mathbb{R} \times (c, d] \rightarrow \mathbb{R} \times (c, d]$, такий що*

- $\eta(\mathbb{R} \times y) = \mathbb{R} \times y$ для кожного $y \in (c, d]$;
- $\eta(T_i)$ є напів-відкритим прямокутником.

Доведення цього твердження наведено в Додатку **Ж.4**.

Гомеоморфізми трапецій, які зберігають рівні.

Нехай відображення $q_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $q_2(x, y) = y$, є проекцією на другу координату і

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), a < y \leq b\},$$

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid \gamma(y) \leq x \leq \delta(y), c < y \leq d\},$$

дві трапеції зі скінченними основами. Тут $\alpha, \beta : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma, \delta : (c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ — такі неперервні функції, що $\alpha < \beta$ і $\gamma < \delta$.

Нехай $A \subset S$ і $B \subset T$ — деякі підмножини. Тоді скажемо, що відображення $\xi : A \rightarrow B$ зберігає рівні, якщо

$$q_2 \circ \xi(x, y) = q_2 \circ \xi(x', y)$$

для всіх x, x', y , таких що $(x, y), (x', y) \in A$.

Лема 7.5.3 *Кожний гомеоморфізм $\xi : \text{roof}(S) \rightarrow \text{roof}(T)$, що зберігає рівні, між дахами трапецій, продовжується до гомеоморфізму $\xi : S \rightarrow T$, що зберігає рівні. Крім того, якщо S і T мають скінченні основи, то ξ також продовжується до гомеоморфізму $\xi : \bar{S} \rightarrow \bar{T}$, що зберігає рівні, їх замикань.*

Доведення. Оскільки ξ зберігає рівні, коректно означено гомеоморфізм $\sigma : (a, b] \rightarrow (c, d]$, $\sigma(y) = q_2 \circ \xi(\alpha(y), y)$. Тоді ξ продовжується до гомеоморфізму $S \rightarrow T$ наступним чином:

$$\xi(x, y) = \left(\gamma(\sigma(y)) + \frac{\delta(\sigma(y)) - \gamma(\sigma(y))}{\beta(y) - \alpha(y)}(x - \alpha(y)), \sigma(y) \right).$$

Крім того, якщо додатково S і T мають скінченні основи, так що α і β означені і неперервні на $[a, b]$, а γ і δ означені і неперервні на $[c, d]$, то наведені рівності означають гомеоморфізми $\sigma : [a, b] \rightarrow [c, d]$ і $\xi : \bar{S} \rightarrow \bar{T}$. \square

7.6 Доведення твердження (2) Теорема 7.1.5

Нехай Δ є розбиттям поверхні X класу \mathcal{F} таким, що сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ всіх спеціальних листів є локально скінченною. Нехай також $\text{Spec}(\Delta)^* = \text{Spec}(\Delta) \cup \partial X$ є об'єднанням всіх спеціальних і межових листів X , Q є зв'язною компонентою множини $X \setminus \text{Spec}(\Delta)^*$ гомеоморфною до модельної смуги, а $\phi : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow Q$ є листовим гомеоморфізмом. Позначимо, див. Рис. 7.6.1:

$$A = \phi(\mathbb{R} \times (-1, 0]), \quad K = \phi(\mathbb{R} \times 0), \quad B = \phi(\mathbb{R} \times [0, 1)). \quad (7.6.1)$$

Нам потрібно довести, що замикання \bar{A} і \bar{B} листово гомеоморфні деяким модельним смугам. Досить перевірити це тільки для \bar{A} .

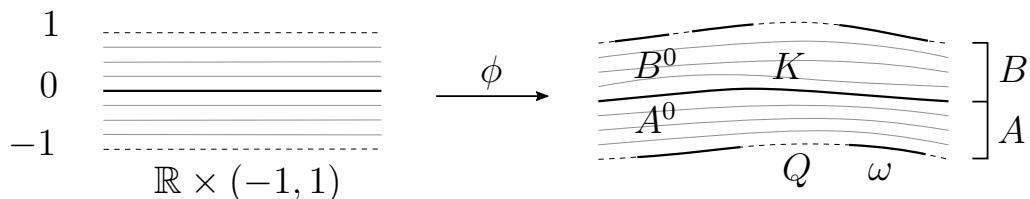


Рис. 7.6.1:

Лема 7.6.1 1) $\bar{A} \setminus Q = \bar{A} \setminus A$ і $\bar{B} \setminus Q = \bar{B} \setminus B$.

2) $\bar{Q} \setminus Q = (\bar{A} \setminus A) \cup (\bar{B} \setminus B) \subset \text{Spec}(\Delta)^*$.

3) Нехай ω є листом у $\bar{A} \setminus A$, $J = (-1, 1) \times 0 \subset \mathbb{R}^2$, і $N = J \cup \mathbb{R} \times (0, 1]$.

(а) Тоді $Q \cup \omega$ є відкритою підмножиною \bar{Q} і $A \cup \omega$ є відкритим у \bar{A} .

(б) Існує листовий гомеоморфізм $\psi : N \rightarrow A \cup \omega$, такий що $\psi(J) = \omega$.

(с) Нехай $U \subset X$ є відкритим околом листа ω і $R \subset \psi^{-1}(U)$ є підмножиною, що має компактне замикання в \mathbb{R}^2 . Припустимо, що виконуються співвідношення

$$J \subset R, \quad \bar{R} \setminus R \subset \mathbb{R} \times 0, \quad \bar{U} \cap (\bar{A} \setminus A) = \omega.$$

Тоді $\psi(R)$ замкнена в X . Зокрема, якщо T — трапеція з основою J , то множина $\psi(T \cup J)$ замкнена в X .

Доведення цієї леми див. у Додатку Ж.5.

Згідно умові 5) Лемі 7.3.1 існує сім'я $\mathcal{U} = \{U_\omega\}_{\omega \in \text{Spec}(\Delta)^*}$, що складається з околів елементів $\text{Spec}(\Delta)^*$, така що замикання елементів \mathcal{U} попарно неперетинні в X .

Нехай $\{\omega_i\}_{i \in \Lambda}$ — всі листи, що містяться у $\bar{A} \setminus A$. Тоді множина Λ не більш ніж зліченна і можна вважати, що або $\Lambda = \{1, \dots, k\}$ для деякого скінченного k , або $\Lambda = \mathbb{N}$.

Згідно Лемі 7.6.1 для кожного $i \in \Lambda$ існує листовий гомеоморфізм $\phi_i : N \rightarrow A \cup \omega_i$, такий що $\psi_i(J) = \omega_i$.

Тоді $\psi_i^{-1}(U_{\omega_i})$ є відкритим околom множини $J = (-1, 1) \times 0$, отже згідно Лемі 7.5.1 існує трапеція $T_i \subset \psi_i^{-1}(U_{\omega_i}) \cap \mathbb{R} \times (0, 1)$ з основою J . Нехай

$$\widehat{T}_i = T_i \cup J.$$

Тоді згідно Лемі 7.6.1 множина $\psi_i(\widehat{T}_i)$ замкнена в \overline{A} .

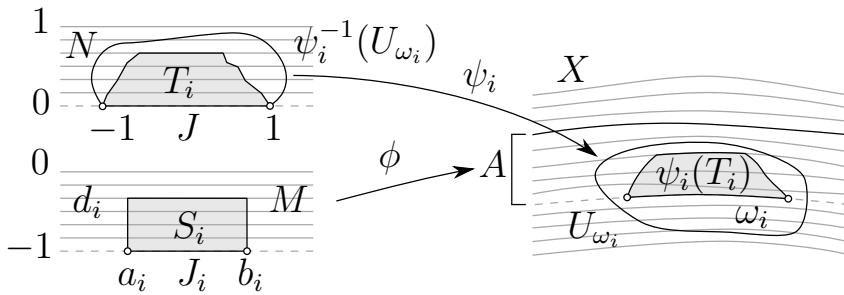


Рис. 7.6.2:

Позначимо $S_i = \phi^{-1} \circ \psi_i(T_i)$. Тоді $\{S_i \mid i \in \Lambda\}$ є сім'єю трапецій у $\mathbb{R} \times (-1, 0]$. Припустимо, що верхня основа трапеції S_i міститься у $\mathbb{R} \times d_i$ для деякого $d_i \in (-1, 0)$. Якщо Λ є нескінченним, то зменшуючи при необхідності T_i (отже і S_i), можемо вважати, що $\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = -1$. Згідно з Твердженням 7.5.2 можна змінити ϕ так, що $S_i = [a_i, b_i] \times (-1, d_i]$ є “напів-відкритим прямокутником” для деяких $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Тоді $[a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset$ для $i \neq j \in \Lambda$. Нехай також $J_i = (a_i, b_i) \times \{-1\}$ і

$$M := \mathbb{R} \times (-1, 0] \cup \bigcup_{i \in \Lambda} J_i.$$

Тоді M є модельною півсмугою. Нашою метою є побудова листового гомеоморфізму між M і \overline{A} .

Позначимо $\widehat{S}_i = S_i \cup J_i, i \in \Lambda, i$

$$Z := M \setminus \bigcup_{i \in \Lambda} (\widehat{S}_i \setminus \text{roof}(S_i)) \subset \mathbb{R} \times (0, 1].$$

Лема 7.6.2 $\{Z\} \cup \{\widehat{S}_i\}_{i \in \Lambda}$ є локально скінченним покриттям M замкненими множинами.

Доведення. Очевидно, що множина \widehat{S}_i замкнена в M . Крім того, $\widehat{S}_i \setminus \text{roof}(S_i)$ відкрита в M , тому Z є також замкненою в M . Отже, залишається тільки

довести, що кожна $z = (x, y) \in M$ має відкритий окіл V , який перетинає лише скінченну кількість елементів \widehat{S}_i .

Якщо $y = -1$, то $z \in (a_i, b_i) \times \{-1\} \subset \widehat{S}_i$ для деякого $i \in \Lambda$. Отже $V = \widehat{S}_i \setminus \text{roof}(S_i)$ є відкритим оточенням z у N , що перетинається тільки з \widehat{S}_i .

Припустимо, що $y > -1$. Зафіксуємо деяке t , для якого $-1 < t < y$. Тоді $V = \mathbb{R} \times (t, 0]$ є відкритим оточенням z у M . За припущенням $\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = -1$, тому існує $n > 0$, таке що $-1 < d_i < t$ для кожного $i > n$, отже $\widehat{S}_i \cap V = \emptyset$. \square

Лема 7.6.3 $\{\phi(Z)\} \cup \{\psi_i(\widehat{T}_i)\}_{i \in \Lambda}$ є локально скінченним покриттям множини \overline{A} замкненими множинами.

Доведення. З 3с) Лемми 7.6.1 слідує, що кожна $\psi_i(\widehat{T}_i)$ є замкненою в X . Крім того,

$$\phi(Z) = \phi\left(M \setminus \bigcup_{i \in \Lambda} (\widehat{S}_i \setminus \text{roof}(S_i))\right) = \overline{A} \setminus \bigcup_{i \in \Lambda} \psi_i(\widehat{T}_i \setminus \text{roof}(T_i)),$$

і також очевидно, що $\widehat{T}_i \setminus \text{roof}(T_i)$ є відкритою в N . Але ψ_i є гомеоморфізмом N на відкриту підмножину $A \cup \omega_i$ множини \overline{A} згідно з 3b) Лемми 7.6.1. Тому $\psi_i(\widehat{T}_i \setminus \text{roof}(T_i))$ є відкритою в \overline{A} , отже $\phi(Z)$ замкнена в \overline{A} .

Лишається довести, що сім'я $\{\psi_i(\widehat{T}_i)\}_{i \in \Lambda}$ є локально скінченною. Нехай $q \in \overline{A}$.

Якщо $q \in \omega_i$, то U_{ω_i} є відкритим оточенням q , що перетинає рівно одну множину $\psi_i(\widehat{T}_i)$.

Припустимо, що $q \in \overline{A} \setminus A$ і нехай $z = (x, y) = \phi^{-1}(q) \in \mathbb{R} \times (-1, 0] \subset M$. Тоді згідно Лемми 7.6.2 існує відкритий окіл V точки z в $\mathbb{R} \times (-1, 0]$, який перетинає тільки скінченну кількість множин \widehat{S}_i . Але відображення $\phi : \mathbb{R} \times (-1, 0] \rightarrow A$ є гомеоморфізмом, отже $\phi(V)$ відкритим оточенням q в A , який перетинає лише скінченну кількість множин $\psi_i(\widehat{T}_i) = \phi(S_i) \cup \omega_i$. \square

Відмітимо, що композиція $\psi^{-1} \circ \phi|_{S_i} : S_i \rightarrow T_i$ є гомеоморфізмом, що зберігає рівні, проте взагалі кажучи він не може бути продовжений до гомеоморфізму між їх основами. Але $\psi^{-1} \circ \phi$ породжує гомеоморфізм, що зберігає рівні,

$\text{roof}(S_i) \rightarrow \text{roof}(T_i)$, і внаслідок цього згідно Лемі 7.5.3 він продовжується до гомеоморфізму, що зберігає рівні $\xi_i : \overline{S_i} \rightarrow \overline{T_i}$.

Означимо відображення $\eta : M \rightarrow \overline{A}$ за допомогою співвідношення

$$\eta(z) = \begin{cases} \psi_i \circ \xi_i(z), & z \in \widehat{S}_i \text{ для деякого } i \in \Lambda, \\ \phi(z), & z \in Z. \end{cases}$$

Ми стверджуємо, що η і є потрібний нам гомеоморфізм.

Дійсно, зрозуміло, що відображення η бієктивне. Крім того, $\{Z\} \cup \{\widehat{S}_i\}_{i \in \Lambda}$ є локально скінченним замкненим покриттям M згідно Лемі 7.6.2, а у відповідності з Лемою 7.6.3 образи елементів цього покриття $\{\phi(Z)\} \cup \{\psi_i(\widehat{T}_i)\}_{i \in \Lambda}$ утворюють локально скінченне замкнене покриття \overline{A} . Нарешті, обмеження $\eta|_Z$ і $\eta|_{\widehat{S}_i}$ є гомеоморфізмами. Тоді η є гомеоморфізмом згідно 6) Лемі 7.3.1.

Теорему 7.1.5 доведено.

Розділ 8

Характеризація смугастих поверхонь

8.1 Вступ

В попередньому розділі ми розглянули одновимірні шарування Δ на двовимірних многовидах Z , які відповідають наступній властивості: Z допускає структуру локально тривіального розшарування з шаром \mathbb{R} , яка узгоджена з Δ , тобто кожен лист $\omega \in \Delta$ є шаром цього розшарування. Клас всіх шарувань, що відповідають цій властивості ми позначили через \mathcal{F} .

В термінах так званих спеціальних листів, див. Означення 7.3.4, ми довели наступне. Якщо для многовиду Z , на якому задане шарування Δ з класу \mathcal{F} , сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ всіх спеціальних листів є локально скінченною, то існує смугаста поверхня з канонічним шаруванням на ній, яка є листово гомеоморфною до Z з шаруванням Δ (див. Наслідок 7.1.6).

Виявляється, що для шарувань з класу \mathcal{F} відображення проєкції $\text{pr} : Z \rightarrow Z/\Delta$ на простір листів є локально тривіальним розшаруванням з шаром \mathbb{R} . Спеціальні листи відображаються в точки простору Z/Δ , в яких він не є Хаусдорфовим. Більш того, поверхня Z з одновимірним шаруванням Δ з класу \mathcal{F} допускає “смугасту структуру” тоді й лише тоді, коли сім'я спеціальних листів є локально скінченною, див. Теорему 8.4.1 нижче.

А саме, якщо компонента зв'язності X многовиду Z не є листово гомеоморфною стандартному циліндру або листу Мебіуса, то розбиття X на смуги — це набір замкнених підмножин $\{\overline{Q_i}\}$, де $\{Q_i\}$ — сім'я компонент зв'язності множини $X \setminus \text{Spec}(\Delta)$ (див. Теорему 7.1.5). Отже, склейка смуг відбувається по їх межовим інтервалам, що є листами Δ з множини $\text{Spec}(\Delta) \cap (X \setminus \partial X)$.

У цьому розділі ми перейдемо до розгляду більш загального випадку.

Нехай Z — некомпактний двовимірний многовид і Δ — одновимірне шарування на Z таке, що кожен лист $\omega \in \Delta$ гомеоморфний \mathbb{R} і є замкненою підмножиною Z .

Наведений вище підхід у цьому випадку перестає працювати, як показує наступний приклад.

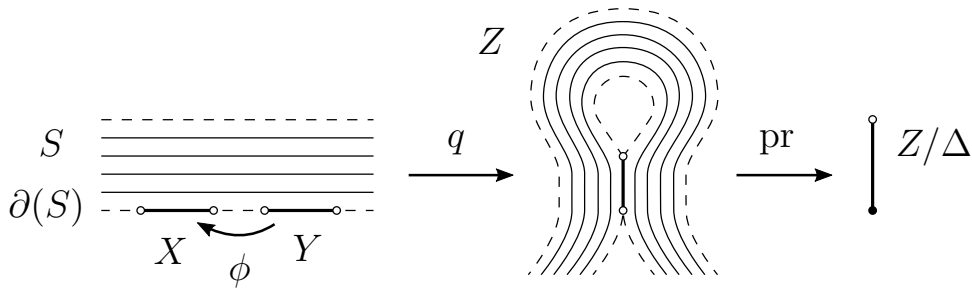


Рис. 8.1.1: Склеювання межових інтервалів, які лежать в одному березі смуги

Приклад 8.1.1 Розглянемо смугу $S = (\mathbb{R} \times (-1, 1)) \cup X \cup Y$, де $X = (-2, -1) \times \{-1\}$, $Y = (1, 2) \times \{-1\}$, а також гомеоморфізм $\phi : Y \rightarrow X$, $\phi(t, -1) = (-t, -1)$, $t \in (1, 2)$.

Нехай многовид Z є фактор простором S відносно склеювання по ϕ (отожднесення точок $y \in Y$ і $\phi(y) \in X$), $q : S \rightarrow Z$ — відображення проєкції і Δ — канонічне шарування на Z (див. Підрозділ 6.1). Нехай ще Z/Δ — простір листів шарування Δ і $\text{pr} : Z \rightarrow Z/\Delta$ — проєкція. Див. Рис. 8.1.1.

Позначимо $\omega_0 = q(X \cup Y)$.

З одного боку легко бачити, що $Z/\Delta = [0, 1)$, $0 = \text{pr}(\omega_0)$. Очевидно, це Хаусдорфів простір. Отже, лист ω_0 не є спеціальним.

З іншого боку, лист ω_0 не виглядає “регулярним”. Дійсно, не існує насиченого відносно Δ околу цього листа в Z , який мав би структуру прямого

добутку, узгоджену з Δ (таку, щоб прообрази точок відносно однієї з проєкцій були листами Δ). Щоб побачити це, відмітимо наступний простий факт. Нехай лист ω має насичений окіл U зі структурою прямого добутку, яка узгоджена з Δ . Тоді для кожної точки $z \in \omega$ сім'я листів Δ , які містяться в U є **одностаينو локально зв'язною в точці** $z \in \omega$, тобто для кожного околу W точки z в U знайдеться інший її окіл $W' \subset W$, такий що для будь-якого $\omega' \in \Delta$ кожну пару точок з $\omega' \cap W'$ можна з'єднати в W зв'язною підмножиною множини ω' (див. Означення 2.4.1). Але для кожної точки $z \in \omega_0$ і достатньо малого її околу W у Z множина ω_0 розділяє W , причому всі листи Δ , близькі до ω_0 , підходять до z одночасно з двох сторін відносно ω_0 .

Ми пропонуємо більш загальне поняття *сингулярних* листів, див. Означення 8.2.4, що відповідають точкам простору Z/Δ , для яких не існує відкритих околів V таких що пара (\bar{V}, V) гомеоморфна (\bar{J}, J) для деякої відкритої підмножини J простору $[0, 1)$.

Нашою метою є повна характеристика смугастих поверхонь: ми доводимо, що поверхня Z з одновимірним шаруванням Δ на ній допускає “смугасту структуру” тоді й лише тоді, коли сім'я всіх сингулярних листів шарування є локально скінченною, див. Теорему 8.4.4.

8.2 Попередні відомості

Простір шарів шарування

Поверхня з шаруванням — це пара (Z, Δ) , яка складається з двовимірного многовиду Z і одновимірного шарування Δ на Z , такого що кожна компонента зв'язності множини ∂Z є листом Δ .

Гомеоморфізм $h : Z \rightarrow Z'$ поверхонь з шаруваннями (Z, Δ) і (Z', Δ') називається *листовим*, якщо для кожного листа $\omega \in \Delta$ його образ $h(\omega)$ є листом Δ' .

Якщо множина U відкрита, позначимо через Δ_U індуковане шарування U , листами якого є компоненти зв'язності перетинів $\omega \cap U$ по всіх $\omega \in \Delta$.

Розглянемо множину $Y = Z/\Delta$ всіх листів Δ і природну проекцію $\text{pr} : Z \rightarrow Z/\Delta$, що ставить у відповідність кожному $z \in Z$ лист шарування Δ , який містить z . Наділимо Y топологією фактор-простору, так що підмножина $U \subset Y$ відкрита тоді й лише тоді, коли $\text{pr}^{-1}(U)$ відкрита в Z . Відомо, що відображення pr відкрите, див. [100, Твердження 1.5] або [101, Теорема 4.10].

Нагадаємо, що *Хаусдорфовим замиканням* $\text{hcl}(y)$ точки $y \in Y$ називається перетин замикань всіх околів цієї точки. Очевидно, $y \in \text{hcl}(y)$. Більш того, простір Y є Хаусдорфовим тоді й лише тоді, коли $\{y\} = \text{hcl}(y)$ для кожного $y \in Y$. Точка $y \in Y$ *спеціальна*, якщо $\{y\} \neq \text{hcl}(y)$, див. Означення 7.2.1.

Нагадаємо також, що для листа $\omega \in \Delta$ ми ввели у попередньому розділі наступні позначення:

$$\text{hcl}(\omega) = \bigcap_{N(\omega)} \overline{S(N(\omega))}, \quad \text{hcl}_S(\omega) = \bigcap_{N_S(\omega)} \overline{N_S(\omega)},$$

де $N(\omega)$ пробігає всі відкриті околи множини ω , а $N_S(\omega)$ пробігає всі відкриті насичені околи ω .

Лема 7.3.5 дозволяє переписати Означення 7.3.4 у наступному вигляді: *Лист $\omega \in \Delta$ називається спеціальним, якщо виконується якась з наступних еквівалентних умов:*

- $\omega \neq \text{hcl}(\omega)$;
- $\omega \neq \text{hcl}_S(\omega)$;
- $y = \text{pr}(\omega)$ є спеціальною точкою Y , тобто $y \neq \text{hcl}(y)$.

Означення 8.2.1 *Нехай $a < b \in \mathbb{R}$. Припустимо, що $J = [a, b)$ або $J = (a, b)$. Нехай також $\gamma : J \rightarrow Z$ — неперервне відображення, для якого $\gamma(J \cap \{a\}) \in \partial Z$.*

Тоді γ називається перерізом шарування Δ , якщо відображення $\text{pr} \circ \gamma : J \rightarrow Z/\Delta$ є ін'єктивним, тобто для відмінних $u, v \in J$ їх образи $\gamma(u)$ і $\gamma(v)$ належать до відмінних листів Δ . Назвемо γ локальним перерізом Δ , якщо відображення $\text{pr} \circ \gamma : J \rightarrow Z/\Delta$ локально ін'єктивне.

У роботі [102] для n -вимірних многовидів, $n \geq 2$, з одновимірними шаруваннями на них була доведена одна загальна теорема, частинний випадок

якої для поверхонь з шаруваннями формулюється наступним чином.

Теорема 8.2.2 (див. [102, Теорема 2.8]) *Нехай (Z, Δ) — зв'язна поверхня з шаруванням, яка має зліченну базу і така що кожен лист шарування Δ некомпактний і є замкненою підмножиною Z . Припустимо також, що сім'я всіх спеціальних листів є локально скінченною. Тоді наступні умови еквівалентні одна одній:*

(А) *відображення проєкції $\text{pr} : Z \rightarrow Z/\Delta$ на простір листів є локально тривіальним розшаруванням з шаром \mathbb{R} і простір Z/Δ локально гомеоморфний $[0, 1)$ (хоча він не обов'язково Хаусдорфів);*

(Б) *для кожного листа ω існує відкритий насичений окіл, листово гомеоморфний $\mathbb{R} \times V$, де V — відкрита підмножина простору $[0, 1)$;*

(В) *через кожен лист шарування Δ проходить деякий переріз.*

Зауваження 8.2.3 *Еквівалентність умов (А) і (Б) слідує з Лема 7.3.3.*

Означення 8.2.4 (див. [67]) *Назвемо лист $\omega \subset \text{Int } Z$ регулярним, якщо існує його насичений окіл U , такий що пара (\bar{U}, U) листово гомеоморфна парі $(\mathbb{R} \times [-1, 1], \mathbb{R} \times (-1, 1))$, причому листовий гомеоморфізм відображає ω на $\mathbb{R} \times 0$.*

Аналогічно, лист $\omega \subset \partial Z$ називається регулярним якщо існує його насичений окіл U такий що пара (\bar{U}, U) листово гомеоморфна парі $(\mathbb{R} \times [0, 1], \mathbb{R} \times [0, 1))$ і листовий гомеоморфізм відображає ω на $\mathbb{R} \times 0$.

Листи, що не є регулярними, будемо називати сингулярними.

Позначимо через $\text{Spec}(\Delta)$ і $\text{Sing}(\Delta)$ сукупності всіх спеціальних і, відповідно, сингулярних листів шарування Δ .

Лема 8.2.5 *Кожен регулярний лист не є спеціальним, тобто кожен спеціальний лист є сингулярним і $\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta)$.*

Доведення. Нехай лист $\omega \subset \text{Int } Z$ є регулярним і лежить у внутрішній частині Z , так що існують насичений окіл U і листовий гомеоморфізм

$$\phi : (\bar{U}, U) \rightarrow (\mathbb{R} \times [-1, 1], \mathbb{R} \times (-1, 1)),$$

такі що $\phi(\omega) = \mathbb{R} \times 0$. Тоді множина $U_t = \phi^{-1}(\mathbb{R} \times (-t, t))$ для кожного $t \in (0, 1)$ є відкритим насиченим околом листа ω і $\overline{U}_t = \phi^{-1}(\mathbb{R} \times [-t, t])$. Отже

$$\text{hcl}(\omega) \subset \bigcap_{t \in (0,1)} \overline{U}_t = \phi^{-1}\left(\bigcap_{t \in (0,1)} \mathbb{R} \times [-t, t]\right) = \phi^{-1}(\mathbb{R} \times 0) = \omega,$$

і ω не є спеціальним.

Випадок $\omega \subset \partial Z$ розглядається аналогічно. \square

Смуги

Нагадаємо, що підмножина $S \subset \mathbb{R}^2$ називається *смугою*, якщо існують $u < v \in \mathbb{R}$, такі що

- (i) $\mathbb{R} \times (u, v) \subset S \subset \mathbb{R} \times [u, v]$;
- (ii) S є відкритою підмножиною простору $\mathbb{R} \times [u, v]$.

Для такої смуги будемо використовувати наступні позначення:

$$\begin{aligned} \partial_- S &:= S \cap \mathbb{R} \times \{u\}, & \partial_+ S &:= S \cap \mathbb{R} \times \{v\}, \\ \partial S &:= \partial_- S \cup \partial_+ S, & \text{Int } S &:= \mathbb{R} \times (u, v). \end{aligned}$$

Відмітимо, що межа ∂S відкрита в просторі $\mathbb{R} \times \{u, v\}$, отже вона є незв'язним об'єднанням не більш ніж зліченної сім'ї відкритих (можливо, необмежених) інтервалів.

Зрозуміло, що на кожній смузі S є природне одновимірне орієнтовне шарування, елементами якого є горизонтальні прямі $\mathbb{R} \times t$, $t \in (u, v)$, а також межові інтервали (компоненти зв'язності межі ∂S). Назвемо це шарування *канонічним*.

Смугасти атлас

Нехай Z — двовимірний топологічний многовид, а $Z_0 = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha$ — не більш ніж зліченна сім'я смуг, які попарно не перетинаються. Назвемо *смугастим атласом* на Z відображення $q : Z_0 \rightarrow Z$, що відповідає наступним умовам:

(1) $q \in$ відображенням проєкції, тобто воно неперервне, сюр'єктивне, а також підмножина $U \subset Z$ є відкритою тоді й лише тоді, коли множина $q^{-1}(U) \cap S_\alpha$ відкрита в S_α для кожного $\alpha \in \mathbf{A}$;

(2) існує дві неперетинні сім'ї $\mathcal{X} = \{X_\beta\}_{\beta \in \mathbf{B}}$ і $\mathcal{Y} = \{Y_\beta\}_{\beta \in \mathbf{B}}$ попарно відмінних межових інтервалів з Z_0 , які індексовано однією й тією ж множиною \mathbf{B} , такі що

- (а) відображення q ін'єктивне на $Z_0 \setminus (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$, а також на \mathcal{X} та \mathcal{Y} ;
- (б) $q(X_\beta) = q(Y_\beta)$ для кожного $\beta \in \mathbf{B}$;
- (в) обмеження $q|_{X_\beta} : X_\beta \rightarrow q(X_\beta)$ й $q|_{Y_\beta} : Y_\beta \rightarrow q(Y_\beta)$ є вкладеннями і їх образи замкнені в Z ;

Відмітимо, що кожен смугастий атлас q індукує на Z одновимірне шарування, отримане з канонічних шарувань на відповідних смугах S_λ . Назвемо його *канонічним шаруванням*, асоційованим зі смугастим атласом q і позначимо його Δ . Очевидно, що кожен лист шарування Δ є гомеоморфним образом \mathbb{R} і є замкненою підмножиною Z .

Поверхню з шаруванням (Z, Δ) назвемо *смугастою поверхнею*, якщо існує смугастий атлас на Z , для якого Δ є канонічним шаруванням.

Відмітимо також, що для кожного $\beta \in \mathbf{B}$ означено “гомеоморфізм склейки”

$$\phi_\beta = (q|_{X_\beta})^{-1} \circ q|_{Y_\beta} : Y_\beta \rightarrow X_\beta, \tag{8.2.1}$$

отже смугасту поверхню отримано з сім'ї смуг склейкою вздовж певних межових інтервалів за допомогою гомеоморфізмів ϕ_β , див. Означення 6.1.2 та Рис 8.2.1.

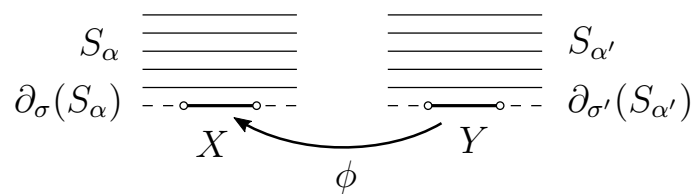


Рис. 8.2.1: Склеювання межових інтервалів

Дозволяється склеювати дві смуги більш ніж по одній парі межових інтер-

валів, також дозволяється склеювати межові інтервали, що належать одній смугі, навіть якщо вони розташовані з *одного боку* однієї смуги.

Стандартні шарування на циліндрі й листі Мебіуса

Нехай $S = \mathbb{R} \times [0, 1]$, $s = \pm 1$, і гомеоморфізм $\phi_s : \mathbb{R} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{1\}$ задано за допомогою співвідношення $\phi_s(x, 0) = (sx, 1)$. Відображення проєкції $q : S \rightarrow S/\phi_s$ визначає смугастий атлас, що складається з однієї смуги. Будемо називати відповідну смугасту поверхню S/ϕ_s *стандартним відкритим циліндром*, якщо $s = +1$, і *стандартним листом Мебіуса* у випадку $s = -1$.

Типи листів канонічного шарування

Розглянемо смугастий атлас $q : \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha \rightarrow Z$. Для того, щоб виділити окремо листи шарування Δ , які є образами склейки пари межових інтервалів, що належать спільному берегу однієї смуги, розглянемо більш тонке розбиття сім'ї листів на типи, ніж те, що було нами введено у Підрозділі 6.2. Отже, кожен лист ω асоційованого канонічного шарування Δ відповідає рівно одному з наступних типів:

(a) $\omega \subset q(\text{Int } S_\alpha)$ для деякого $\alpha \in \mathbf{A}$.

(b) $\omega \subset q(\partial_\sigma S_\alpha) \subset \partial Z$ для деякого $\alpha \in \mathbf{A}$ and $\sigma \in \{-, +\}$. У цьому випадку ω називається *межовим листом*. Цей тип ділиться на такі підтипи:

(b1) $\omega = q(\partial_\sigma S_\beta)$, отже $\partial_\sigma S_\beta$ складається з єдиного листа;

(b2) $\omega \subsetneq q(\partial_\sigma S_\beta)$, тому $\partial_\sigma S_\beta$ містить більше одного листа.

(c) $\omega = q(X_\beta) = q(Y_\beta)$ для деякого $\beta \in \mathbf{B}$, де $X_\beta \subset \partial_\sigma S_\alpha$, $Y_\beta \subset \partial_{\sigma'} S_{\alpha'}$ для певних $\alpha, \alpha' \in \mathbf{A}$, а також $\sigma, \sigma' \in \{-, +\}$. Цей тип розпадається на наступні підтипи:

(c1) $\alpha = \alpha'$, $X = \partial_\sigma S_\alpha$ і $Y = \partial_{\sigma'} S_\alpha$, отже $\sigma' = -\sigma$ і ми склеюємо різні сторони однієї смуги S_α і кожна зі сторін складається з єдиного межового інтервалу;

(c2) $\alpha \neq \alpha'$, $X = \partial_\sigma S_\alpha$, і $Y = \partial_{\sigma'} S_{\alpha'}$;

(c3) $X \neq \partial_\sigma S_\alpha$ або $Y \neq \partial_{\sigma'} S_{\alpha'}$. У цьому випадку ω називається *особливим*

листом. Цей тип ділиться на такі підтипи:

$$(c31) \quad \alpha = \alpha', \sigma' = \sigma, \text{ і } X \cup Y = \partial_\sigma S_\alpha;$$

$$(c32) \quad \alpha = \alpha', \sigma' = \sigma, \text{ і } X \cup Y \neq \partial_\sigma S_\alpha;$$

(c33) всі інші можливості.

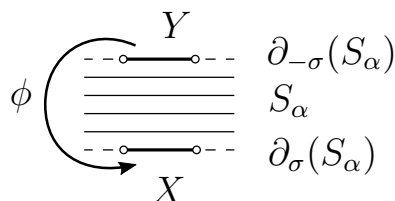


Рис. 8.2.2: Тип (c1) ($\alpha' = \alpha, \sigma' = -\sigma$)

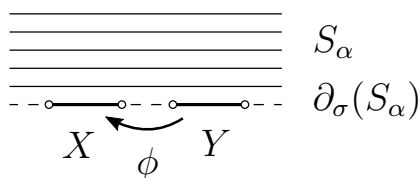


Рис. 8.2.3: Типи (c31) та (c32) ($\alpha' = \alpha, \sigma' = \sigma$)

Отже, типи (c31) і (c32) відповідають склеюванню межових інтервалів, що належать одній стороні спільної смуги.

Наступна лема характеризує спеціальні, регулярні й сингулярні листи канонічних шарувань смугастих поверхонь за допомогою типів (a)–(c). Зокрема, вона показує, що різниця між сингулярними і спеціальними листами канонічного шарування — це листи типу (c31). Доведення леми зводиться до простої безпосередньої перевірки, яку ми залишаємо читачеві.

Лема 8.2.6 Нехай $q : \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha \rightarrow Z$ — смугастий атлас, і Δ — канонічне шарування на Z . Тоді виконуються наступні твердження.

(1) Лист $\omega \in \Delta$ є спеціальним, тобто $\omega \neq \text{hcl}(\omega)$, тоді й тільки тоді, коли він належить одному з типів (b2), (c32), або (c33).

(2) Для довільного листа $\omega \in \Delta$ наступні властивості еквівалентні:

(i) $\omega \in \Delta$ допускає переріз;

(ii) $\omega \in \Delta$ має відкритий насичений окіл, листово гомеоморфний $\mathbb{R} \times V$, де V — відкрита підмножина $[0, 1)$;

(iii) ω не належить до типів (с31) і (с32).

(3) Лист $\omega \in \Delta$ є регулярним, див. Означення 8.2.4, тоді й лише тоді, коли він має один з типів (а), (b1), (с1), або (с2).

(4) Відповідно, лист $\omega \in \Delta$ є сингулярним тоді й тільки тоді, коли він належить до типів (b2), (с31), (с32) або (с33).

Означення 8.2.7 *Смугастий атлас q , що не містить листів типів (с1) і (с2), назвемо зведеним (див. також Означення 6.2.6).*

$$\text{Позначимо } D = q\left(\bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \partial S_\alpha\right).$$

Наслідок 8.2.8 (див. також [66, Лема 7.2]) *Сім'ї $\text{Spec}(\Delta)$, $\text{Sing}(\Delta)$, ∂Z і D є локально скінченними, також $\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta)$ і $\partial Z \cup \text{Sing}(\Delta) \subset D$. Більш того, смугастий атлас q є зведеним тоді й лише тоді, коли $\partial Z \cup \text{Sing}(\Delta) = D$.*

Лема 8.2.9 *Нехай кожен лист шарування Δ допускає переріз, отже відповідає кожній з еквівалентних умов (А)-(В) Теорема 8.2.2. Якщо атлас q є зведеним, то для листа $\omega \subset \text{Int } Z$ наступні умови еквівалентні:*

- (i) ω має тип (с33);
- (ii) ω є спеціальним, тобто $\omega \neq \text{hcl}(\omega)$;
- (iii) ω є сингулярним;
- (iv) ω має тип (с), отже $\omega = q(X_\beta) = q(Y_\beta)$ для деякого $\beta \in \mathbf{B}$.

Якщо додатково кожен сингулярний лист міститься в ∂Z , то відсутні листи типу (с), отже q є гомеоморфізмом і Z є незв'язним об'єднанням смуг.

Доведення. Стрілки (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) слідуєть безпосередньо з (1) і (4) Лема 8.2.6.

(iii) \Rightarrow (iv). Нехай ω — сингулярний лист, що міститься у $\text{Int } Z$. Тоді згідно з твердженням (4) Лема 8.2.6 він має один з типів (с31), (с32) або (с33), отже ω має тип (с).

(iv) \Rightarrow (i). Припустимо, що лист ω має тип (с). Атлас є зведеним, тому ω не може бути типу (с1) або (с2). Більш того, оскільки ω допускає переріз, то з

твердження (i) Лема 8.2.6 слідує, що ω також не може мати типу (с31) або (с32). Отже ω має тип (с33).

Для доведення останнього твердження помітимо, що за побудовою атласу кожен лист типу (с) міститься в $\text{Int } Z$. Більш того, внаслідок еквівалентності (iii) \Leftrightarrow (iv) кожен такий лист має також бути сингулярним. Отже, якщо кожен сингулярний лист ω шарування Δ міститься в ∂Z , то q не має листів типу (с). Іншими словами, q не може склеювати ніяких листів, отже q є гомеоморфізмом і Z є незв'язним об'єднанням смуг. \square

8.3 Розрізання поверхні з шаруванням вздовж ізольованих листів

Означення 8.3.1 *Нехай (Z, Δ) — поверхня з шаруванням. Лист ω називається ізольованим, якщо для кожного $z \in \omega$ існує листова карта (див. Означення 1.7.1), яка містить цю точку і перетинає ω по дузі. Іншими словами, існують відкритий окіл W точки z і вкладення $\phi : (-1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow Z$, такі що*

- $\phi((-1, 1) \times (-1, 1)) = W$,
- $\phi^{-1}(\omega) = (-1, 1) \times 0$,
- $\phi(-1, 1) \times t$ міститься в деякому листі шарування Δ при кожному $t \in (-1, 1)$.

Теорема 8.3.2 (С. Максименко, Є. Полулях, див. [67]) *Нехай (Z, Δ) — поверхня з шаруванням, а $\Sigma \subset \text{Int } Z$ — локально скінченна сім'я, яка складається з ізольованих листів. Тоді існують поверхня з шаруванням $(\tilde{Z}, \tilde{\Delta})$ і неперервне відображення $p : \tilde{Z} \rightarrow Z$, які відповідають наступним властивостям.*

- (1) p — відображення проєкції, тобто підмножина $A \subset Z$ відкрита тоді й лише тоді, коли $p^{-1}(A)$ відкрита в \tilde{Z} ;
- (2) обмеження $p : \tilde{Z} \setminus p^{-1}(\Sigma) \rightarrow Z \setminus \Sigma$ є листовим гомеоморфізмом;

(3) для кожного листа $\omega \in \Sigma$ його прообраз $p^{-1}(\omega)$ складається з двох листів $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \subset \partial\tilde{Z}$ шарування $\tilde{\Delta}$, причому відображення $p|_{\tilde{\omega}_i} : \tilde{\omega}_i \rightarrow \omega$, $i = 1, 2$, є гомеоморфізмами.

Доведення. Позначимо $U = Z \setminus \Sigma$. Нехай $j : U \subset Z$ — відображення включення. Для кожного листа $\omega \in \Sigma$ і точки $z \in \omega$ позначимо $U_z = (-1, 1) \times (-1, 1)$,

$$U_z^- = (-1, 1) \times (-1, 0], \quad U_z^+ = (-1, 1) \times [0, 1).$$

Нехай $\phi_z : U_z \rightarrow Z$ — вкладення, яке відповідає Означенню 8.3.1, так що

- множина $\phi_z(U_z)$ відкрита в Z ,
- $\phi_z^{-1}(\omega) = (-1, 1) \times 0$,
- $\phi_z(-1, 1) \times t$ міститься в деякому листі шарування Δ .

Оскільки сім'я Σ локально скінченна, додатково можемо вважати, що

- $\phi_z^{-1}(\Sigma) = \phi_z^{-1}(\omega) = (-1, 1) \times 0$.

Нехай

$$N = U \bigsqcup_{\substack{z \in \omega \in \Sigma, \\ \sigma = \pm}} U_z^\sigma$$

є незв'язним об'єднанням U з множинами U_z^- і U_z^+ по всім $\omega \in \Sigma$ і $z \in \omega$. Тоді означене природне відображення $\hat{p} : N \rightarrow Z$,

$$\begin{aligned} \hat{p}|_U &= j : U \subset Z, \\ \hat{p}|_{U_z^\sigma} &= \phi_z|_{U_z^\sigma} = \phi_{z,\sigma} : U_z^\sigma \rightarrow Z, \quad (z \in \Sigma, \sigma = \pm). \end{aligned}$$

Лема 8.3.2.1 \hat{p} є відображенням проєкції.

Доведення. Оскільки \hat{p} неперервне і сюр'єктивне, а обмеження $\hat{p}|_U$ і $\hat{p}|_{U_z^\sigma}$ є вкладеннями, досить лише перевірити, що для підмножини $A \subset Z$ наступні умови є еквівалентними:

- (а) множина A відкрита;
- (б) $A \cap \hat{p}(U)$ відкрита в $\hat{p}(U)$ і $A \cap \phi_{z,\sigma}(U_z^\sigma)$ відкрита в $\phi_{z,\sigma}(U_z^\sigma)$ для всіх $z \in \Sigma$ і $\sigma = \pm$.

Імплікація (а) \Rightarrow (б) очевидна.

(б) \Rightarrow (а) Зрозуміло, що множини $\phi_{z,-}(U_z^-)$ і $\phi_{z,+}(U_z^+)$ утворюють скінченне замкнене покриття $\phi_z(U_z)$ для кожного $z \in \omega \in \Sigma$. Отже, якщо обидва перетини $A \cap \phi_{z,-}(U_z^-)$ і $A \cap \phi_{z,+}(U_z^+)$ відкриті відповідно в $\phi_{z,-}(U_z^-)$ і $\phi_{z,+}(U_z^+)$, то $A \cap \phi_z(U_z)$ відкрита в U_z .

Оскільки множини $\hat{p}(U)$ і $\phi_z(U_z)$, $z \in \omega \in \Sigma$, відкриті в Z , і їх перетини з A також відкриті, то A є відкритою підмножиною Z . \square

Зараз ми представимо \hat{p} у вигляді такої композиції двох неперервних відображень

$$\hat{p} = p \circ q : N \xrightarrow{q} \tilde{Z} \xrightarrow{p} Z, \quad (8.3.1)$$

щоб p задовольняло твердженню Теорема 8.3.2.

Для кожного $z \in \Sigma$ розглянемо сім'ю

$$\mathcal{V}_z = \{U_x^\sigma \mid z \in \phi_x(U_x^\sigma), x \in \Sigma, \sigma = \pm\}$$

всіх U_x^σ , образ яких в Z містить z . Відмітимо, що для кожного $U_x^\sigma \in \mathcal{V}_z$ існує $\epsilon > 0$, таке що виконується рівно одна з наступних умов:

$$\text{або } \phi_x^{-1}\left(\phi_z(0 \times [0, \epsilon])\right) \subset U_x^\sigma, \quad \text{або } \phi_x^{-1}\left(\phi_z(0 \times [-\epsilon, 0])\right) \subset U_x^\sigma.$$

Отже \mathcal{V}_z є незв'язним об'єднанням двох підсімей, див. Рис. 8.3.1:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_z^- &= \left\{ U_x^\sigma \in \mathcal{V}_z \mid \phi_x^{-1}\left(\phi_z(0 \times [-\epsilon, 0])\right) \subset U_x^\sigma \text{ для деякого } \epsilon > 0 \right\}, \\ \mathcal{V}_z^+ &= \left\{ U_x^\sigma \in \mathcal{V}_z \mid \phi_x^{-1}\left(\phi_z(0 \times [0, \epsilon])\right) \subset U_x^\sigma \text{ для деякого } \epsilon > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Більш того, на N означене наступне розбиття:

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_x\}_{x \in U} \bigsqcup \{\mathcal{G}_{x,\sigma}\}_{x \in \Sigma, \sigma = \pm},$$

де

$$\mathcal{F}_x = j^{-1}(x) \bigcup_{z \in \Sigma, \sigma = \pm} \phi_{z,\sigma}^{-1}(x), \quad (x \in U),$$

$$\mathcal{G}_{x,\sigma} = \{\phi_{z,\nu}^{-1}(x) \mid U_z^\nu \in \mathcal{V}_x^\sigma, z \in \Sigma, \nu = \pm\}, \quad (x \in \Sigma, \sigma = \pm).$$

Нехай $\tilde{Z} = N/\mathcal{F}$ — множина елементів \mathcal{F} і $q : N \rightarrow \tilde{Z}$ — відображення проєкції. Наділимо \tilde{Z} відповідною фактор-топологією: такою, щоб підмножина $A \subset \tilde{Z}$ була відкрита тоді й лише тоді, коли її прообраз $q^{-1}(A)$ відкритий в N . Безпосередня перевірка показує, що відображення q відкрите.

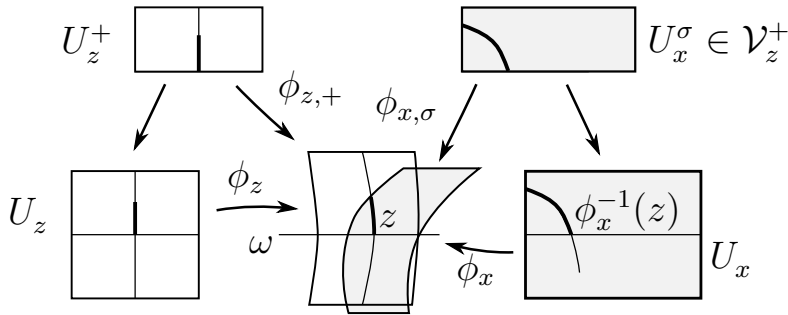


Рис. 8.3.1:

Відмітимо, що

$$\hat{p}(\mathcal{F}_x) = x, \quad (x \in U), \quad \hat{p}(\mathcal{G}_{x,\sigma}) = x, \quad (x \in \Sigma, \sigma = \pm),$$

отже \hat{p} індукує відображення $p : \tilde{Z} \rightarrow Z$, що й дає бажану композицію $\hat{p} = p \circ q$, див. (8.3.1).

Перевірку властивостей (1)-(3) ми залишаємо читачеві. \square

8.4 Основні результати

В цьому розділі ми будемо вважати, що (Z, Δ) — поверхня з шаруванням, яка має зліченну базу і така, що кожен лист шарування Δ гомеоморфний \mathbb{R} і є замкненою підмножиною Z . Нехай також $\text{Spec}(\Delta)$ і $\text{Sing}(\Delta)$ — сім'ї всіх спеціальних і, відповідно, сингулярних листів шарування Δ .

Наступне твердження характеризує смугасті поверхні, що не мають листів типів (с31) і (с32).

Теорема 8.4.1 (див. **Наслідок 7.1.6** і [66, Теорема 7.4].) *Наступні умови еквівалентні:*

(1) (Z, Δ) допускає смугастий атлас, який не має листів типів (с31) і (с32);

(2) Сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ є локально скінченною і шарування Δ задовольняє кожну з еквівалентних умов (А)-(В) Теорема 8.2.2.

Доведення. (1) \Rightarrow (2). Згідно з **Наслідком 8.2.8** сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ є локально скінченною. Також оскільки q не має листів типів (с31) і (с32), з твердження (2) **Лема 8.2.6** слідує, що кожен лист шарування Δ допускає переріз, іншими словами, виконується умова (В) Теорема 8.2.2.

Імплікація (2) \Rightarrow (1) випливає з **Наслідку 8.2.8** і твердження (2) **Лема 8.2.6**.
□

Наступне розширення Теорема 8.4.1 дозволяє обмежитись перевіркою існування перерізів тільки для листів шарування, які лежать у внутрішності Z .

Теорема 8.4.2 *Нехай сім'я $\text{Sing}(\Delta)$ є локально скінченною, а також кожен лист шарування Δ , який міститься в $\text{Int } Z$ допускає переріз. Тоді кожен лист, що лежить в ∂Z , також допускає переріз. Отже, згідно Теорема 8.4.1 (Z, Δ) є смугастою поверхнею.*

Ми доведемо цю теорему в §8.5. З неї слідує наступна характеристика вироджених випадків смугастих поверхонь.

Теорема 8.4.3 *Нехай Z є зв'язною, сім'я $\text{Sing}(\Delta)$ є локально скінченною, а також $\text{Sing}(\Delta) \subset \partial Z$. Тоді Z листово гомеоморфна або стандартному циліндру, або стандартному листу Мебіуса, або смузі з канонічним шаруванням на ній.*

Доведення. Нехай (Z, Δ) не є ні стандартним циліндром, ані стандартним листом Мебіуса. Перевіримо, що тоді вона листово гомеоморфна смузі з канонічним шаруванням на ній.

$\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta)$ згідно Лемі 8.2.5, отже сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ також локально скінченна. Більш того, оскільки $\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta) \subset \partial Z$, то кожен лист в $\text{Int } Z$ є регулярним, отже він допускає переріз. Тоді (Z, Δ) допускає зведений атлас q за Теоремою 8.4.2. Оскільки $\text{Sing}(\Delta) \subset \partial Z$, то Z є незв'язним об'єднанням смуг внаслідок Лемі 8.2.9. Але Z зв'язна, отже вона листово гомеоморфна смузі. \square

Наступне твердження характеризує всі смугасті поверхні.

Теорема 8.4.4 (С. Максименко, Є. Полулях, див. [67]) *Наступні умови еквівалентні:*

- (1) (Z, Δ) допускає смугастий атлас;
- (2) сім'я $\text{Sing}(\Delta)$, що складається зі всіх сингулярних листів є локально скінченною.

Доведення. Імплікація (1) \Rightarrow (2) міститься в Наслідку 8.2.8.

(2) \Rightarrow (1). Нехай сім'я $\text{Sing}(\Delta)$, що складається зі всіх сингулярних листів, є локально скінченною. За припущенням кожен лист ω шарування Δ гомеоморфний \mathbb{R} і є замкненою підмножиною Z . Тому кожна листова карта перетинає ω по дискретній сім'ї дуг. Отже кожен сингулярний лист є ізольованим, внаслідок чого згідно Теоремі 8.3.2 існують поверхня з шаруванням $(\tilde{Z}, \tilde{\Delta})$ і відображення проєкції $q : \tilde{Z} \rightarrow Z$, такі що

а) обмеження $q : \tilde{Z} \setminus q^{-1}(\text{Sing}(\Delta)) \rightarrow Z \setminus \text{Sing}(\Delta)$ є листовим гомеоморфізмом, а також

б) для кожного листа $\omega \in \text{Sing}(\Delta)$ прообраз $q^{-1}(\omega)$ складається з двох листів $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \subset \partial \tilde{Z}$ шарування $\tilde{\Delta}$, таких що відображення $q|_{\tilde{\omega}_i} : \tilde{\omega}_i \rightarrow \omega$, $i = 1, 2$, є гомеоморфізмами.

Нехай $\text{Sing}(\tilde{\Delta})$ — сім'я всіх сингулярних листів шарування $\tilde{\Delta}$. Оскільки сім'я $\text{Sing}(\Delta)$ є локально скінченною, а для відображення p на множині $\text{Sing}(\tilde{\Delta})$ прообраз кожної точки складається рівно з двох точок, то сім'я $\text{Sing}(\tilde{\Delta})$ також є локально скінченною. Більш того, $\text{Sing}(\tilde{\Delta}) \subset \partial \tilde{Z}$, отже згідно Теоремі 8.4.3 кожна компонента зв'язності простору \tilde{Z} є смугою з канонічним шаруванням на ній. Отже q є смугастим атласом для (Z, Δ) . \square

8.5 Доведення Теорема 8.4.2

Лема 8.5.1 Нехай (Z, Δ) – зв’язна смугаста поверхня зі зліченною базою, така що $\partial Z = \emptyset$. Припустимо, що $\delta : [0, 1] \rightarrow Z$ – локальний переріз, точки $\delta(0)$ й $\delta(1)$ належать одному й тому ж листу шарування Δ . Тоді виконується рівно одна з двох наступних умов:

(а) або Z є стандартним циліндром чи листом Мебіуса і збігається з насиченням $S(\delta([0, 1]))$ образу δ ;

(б) або δ перетинається з сингулярним листом $\omega \in \Delta$.

Доведення. Розглянемо відображення проєкції на простір листів $\text{pr} : Z \rightarrow Z/\Delta$. Тоді припущення на δ означає, що відображення $\text{pr} \circ \delta : [0, 1] \rightarrow Z/\Delta$ є локально ін’єктивним і задовольняє рівність $\text{pr} \circ \delta(0) = \text{pr} \circ \delta(1)$. Отже, $\text{pr} \circ \delta$ індукує неперервне відображення кола $\alpha : S^1 = [0, 1]/\{0, 1\} \rightarrow Z/\Delta$.

(а) Припустимо, що Z є стандартним циліндром чи листом Мебіуса, отже простір листів Z/Δ гомеоморфний одиничному колу S^1 . Тоді відображення $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ є неперервним і локально ін’єктивним, отже воно має бути і сюр’єктивним. А це означає, що δ перетинає кожен лист шарування Δ , тобто $Z = S(\delta([0, 1]))$.

(б) Нехай Z не є ні стандартним циліндром, ані листом Мебіуса. Тоді з [64, Theorem 3.7] слідує, що Z допускає зведений атлас $q : \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha \rightarrow Z$, тобто атлас, що не має листів типів (с1) і (с2). Нехай $D = q(\bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \partial S_\alpha)$ і $\text{Sing}(\Delta)$ сім’я всіх сингулярних листів шарування Δ . Оскільки $\partial Z = \emptyset$, то з Наслідка 8.2.8 випливає, що $D = \partial Z \cup \text{Sing}(\Delta) = \text{Sing}(\Delta)$.

Отже, нам потрібно довести, що образ δ перетинає D .

Припустимо, що $\delta([0, 1]) \cap D = \emptyset$. Тоді $\delta([0, 1]) \subset q(\text{Int } S_\alpha)$ для деякого $\alpha \in \mathbf{A}$. Розглянемо наступну композицію відображень:

$$\beta = \pi \circ q^{-1} \circ \delta : [0, 1] \xrightarrow{\delta} q(\text{Int } S_\alpha) \xrightarrow{q^{-1}} \text{Int } S_\alpha = \mathbb{R} \times (u, v) \xrightarrow{\pi} (u, v),$$

де π – це проєкція на другу координату.

Зрозуміло, що відображення $\beta : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ неперервне. Відповідно до

умов Лемі β є локально ін'єктивним (отже, строго монотонним), а також $\beta(0) = \beta(1)$. Одночасно ці дві умови виконуватись не можуть, тому $\delta([0, 1])$ перетинає $D = \text{Sing}(\Delta)$. \square

Зараз ми можемо довести Теорему 8.4.2. Нехай $\partial Z \neq \emptyset$. Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що Z зв'язна.

Нехай $\text{Spec}(\Delta)$ — сім'я всіх спеціальних листів Δ . Тоді $\text{Spec}(\Delta) \subset \text{Sing}(\Delta)$ згідно Лемі 8.2.5, тому сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ є локально скінченною. Більш того, кожен лист, що належить $\text{Int } Z$, задовольняє властивість (В) Теорему 8.2.2. Отже, згідно Теоремі 8.4.1 поверхня з шаруванням $(\text{Int } Z, \Delta_{\text{Int } Z})$ допускає смугастий атлас.

Припустимо, що існує лист ω шарування Δ який лежить в ∂Z і не допускає перерізів. Тоді ω є сингулярним, як слідує з Лемі 8.2.6.

Нехай $x \in \omega$. Очевидно, існує листова карта $\phi : (-1, 1) \times [0, 1) \rightarrow Z$, така що $\phi(0, 0) = x$. Зафіксуємо лист $\omega_0 \in \Delta_{\text{Int } Z}$. Оскільки кожен лист шарування Δ замкнений в Z за припущенням, ми можемо вважати, що ω_0 не перетинає образ ϕ в Z . Означимо $\delta : [0, 1) \rightarrow Z$ за допомогою співвідношення $\delta(t) = \phi(0, t)$, $t \in [0, 1)$. Тоді $\delta([0, 1)) \cap \omega_0 = \emptyset$.

Оскільки ω не допускає перерізів, то для кожного $\varepsilon \in (0, 1]$ крива $\delta((0, \varepsilon)) \subset \text{Int } Z$ перетинає деякий лист шарування Δ більш ніж в одній точці. Отже, існують $a_\varepsilon < b_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$, такі що $\delta(a_\varepsilon)$ і $\delta(b_\varepsilon)$ належать одному й тому ж листу. Оскільки кожен лист, що міститься в $\text{Int } Z$, допускає переріз, то $\delta((0, \varepsilon))$ є локальним перерізом. Отже, крива $\delta : [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \rightarrow \text{Int } Z$ також є локальним перерізом.

Припустимо, що $\text{Int } Z$ є стандартним циліндром або листом Мебіуса. Тоді $S(\delta([a_\varepsilon, b_\varepsilon])) = \text{Int } Z$ згідно твердженню (а) Лемі 8.5.1, тобто композиція

$$p \circ \delta : [a_\varepsilon, b_\varepsilon] \xrightarrow{\delta} \text{Int } Z \xrightarrow{p} \text{Int } Z / \Delta_{\text{Int } Z} = S^1$$

є сюр'єктивною, що неможливо, оскільки $p(\omega_0) \notin p \circ \delta([a_\varepsilon, b_\varepsilon])$ за вибором ω_0 .

Таким чином, $\text{Int } Z$ не є ні стандартним циліндром, ані листом Мебіуса. Отже, згідно Лемі 8.5.1 існує точка $c_\varepsilon \in [a_\varepsilon, b_\varepsilon]$, образ якої лежить на деякому сингулярному листі $\omega_\varepsilon \subset \text{Int } Z$. Внаслідок цього $x \in \partial Z$ є точкою накопичення

множини $\text{Sing}(\Delta) \cap \text{Int } Z \subset \text{Sing}(\Delta) \setminus \omega$.

За умовою кожен елемент сім'ї сингулярних листів є замкненою підмножиною Z , а сама сім'я $\text{Sing}(\Delta)$ — локально скінченна. Тому для кожної підсім'ї $\text{Sing}(\Delta)$ об'єднання її елементів є замкненою підмножиною Z . Зокрема, множина

$$\bigcup_{\omega' \in \text{Sing}(\Delta) \setminus \omega} \omega'$$

замкнена в Z , а це суперечить тому, що $x \in \omega$ є точкою накопичення цієї множини.

Отримана суперечність завершує доведення Теорема 8.4.2.

Розділ 9

Про сідлові точки неперервних функцій на замкненому двовимірному диску

9.1 Вступ.

Нехай $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ — замкнений диск на площині, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція.

Існує принаймні два різних способи визначення поняття регулярної точки неперервної функції.

Означення 9.1.1a Точка $x \in \text{Int } D$ називається регулярною для функції f , якщо існує такий відкритий окіл $U_x \ni x$, що для кожного $y \in U_x$ зв'язна компонента γ_y множини

$$U_x \cap f^{-1}(f(y)),$$

яка містить точку y , гомеоморфна відкритому інтервалу $(0, 1)$.

Інший підхід дається наступним означенням.

Означення 9.1.1b Точка $x \in \text{Int } D$ називається регулярною для функції f , якщо існує такий відкритий окіл $U_x \ni x$, що

- зв'язна компонента γ_x множини $U_x \cap f^{-1}(f(x))$, яка містить точку x , гомеоморфна відкритому інтервалу $(0, 1)$;
- множина $U_x \setminus \gamma_x = U_x^- \cup U_x^+$ має дві компоненти зв'язності U_x^- і U_x^+ , причому

$$\begin{aligned} f(x) < f(y) & \quad \forall y \in U_x^+; \\ f(x) > f(y) & \quad \forall y \in U_x^-. \end{aligned}$$

Точки диска, які не є регулярними будемо називати *критичними*.

Маючи визначення регулярної точки неперервної функції f , визначимо поняття сідлової точки.

Означення 9.1.2 Точка $x \in \text{Int } D$ називається сідловою точкою функції f , якщо існують такі відкритий окіл $U_x \ni x$ і гомеоморфізм $h : U_x \rightarrow \text{Int } D$, що

- при деякому $n > 1$ компонента зв'язності γ_x множини $U_x \cap f^{-1}(f(x))$, яка містить точку x , відповідає рівності

$$h(\gamma_x) = h(U_x) \cap \{z \in \text{Int } D \mid \text{Re } z^n = 0\};$$

- кожна точка $y \in U_x \setminus \{x\}$ є регулярною точкою функції f .

Нагадаємо, що *локальним екстремумом* функції f називається точка x , яка має окіл U_x , такий що або для всіх $y \in U_x$ виконується нерівність $f(y) \leq f(x)$, або справедлива нерівність $f(y) \geq f(x)$ для кожного $y \in U_x$.

Розглянемо тепер неперервну функцію $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає двом додатковим вимогам

- $f(\partial D) = 0$, $f(x) > 0$ для всіх $x \in \text{Int } D$ (тут ∂D позначає межове коло диска D);
- функція f має в $\text{Int } D$ рівно два локальних екстремума.

По аналогії з гладким випадком виникає природне питання: чи вірно, що неперервна функція f , яка відповідає вимогам (i) і (ii), має в $\text{Int } D$ хоча б одну сідлову точку?

Основною ціллю данної роботи є побудова неперервної функції $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає вимогам (i) і (ii) і не має в $\text{Int } D$ жодної сідлової точки незалежно від того, за допомогою якого з означень 9.1.1a або 9.1.1б визначаються її регулярні точки.

9.2 Побудова функції f з двома екстремумами і без сідлових точок в $\text{Int } D$.

Розіб'ємо процес побудови f на декілька кроків за наступним планом.

Спочатку побудуємо неперервну функцію $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка має рівно три критичні точки — два локальні максимума $M_1 = (0, 1)$, $M_2 = (0, -1)$ і сідлову точку $S = (0, 0)$. Також подбаємо, щоб для деякого $c \in \mathbb{R}$ функція g мала лінію рівня $\gamma = g^{-1}(c)$, яка обмежує диск, що містить точки M_1 , M_2 і S .

Потім побудуємо ін'єктивне відображення $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times [-1, 1]$, яке є гомеоморфізмом на свій образ, і продовжимо обернене відображення $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ до неперервного відображення \hat{F} , так щоб $\hat{F}(\{0\} \times [-1, 1]) = (0, 0)$.

Визначимо неперервну функцію $\hat{f} = g \circ \hat{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ і доведемо, що ні одна точка відрізка $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times [-1, 1]$ не є ні локальним екстремумом, ані сідловою точкою функції \hat{f} .

Обмежимо \hat{f} на замкнену область \hat{D} , межею якої слугує проста замкнена крива $\hat{\gamma} = F(\gamma) = (g \circ \hat{F})^{-1}(c) = \hat{f}^{-1}(c)$. Фіксуємо гомеоморфізм $H_0 : \hat{D} \rightarrow \partial D$ і продовжимо його до гомеоморфізму $H : \hat{D} \rightarrow D$, скориставшись теоремою Шенфліса (див. [46], [103]).

Позначимо $f' = \hat{f} \circ H^{-1} : D \rightarrow \mathbb{R}$. Тоді функція $f(x) = f'(x) - c$, $x \in D$, має відповідати умовам (i) і (ii) і ні одна з її сингулярних точок не буде сідловою.

9.2.1 Функція g з двома локальними максимумами і однією сідловою точкою.

Нехай ρ – стандартна відстань на площині. Розглянемо функцію $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(z) = \max(1 - \rho(z, M_1), 1 - \rho(z, M_2)) = \begin{cases} 1 - \rho(z, M_1), & \text{якщо } \text{Im } z \geq 0, \\ 1 - \rho(z, M_2), & \text{якщо } \text{Im } z \leq 0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що функція g неперервна, точки M_1 і M_2 є її локальними максимумами і кожна точка множини $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \times \{0\}$ є регулярною точкою цієї функції як в сенсі означення 9.1.1а, так і в сенсі означення 9.1.1б.

Щоб дослідити поведінку g в точках прямої $\mathbb{R} \times \{0\}$, знайдемо лінії рівня функції g .

Очевидно, що при $0 < c < 1$ множина

$$g_c = g^{-1}(c) = \{z \mid \rho(z, M_1) = 1 - c\} \cup \{z \mid \rho(z, M_2) = 1 - c\}$$

є незв'язним об'єднанням двох кіл з центрами в точках M_1 і M_2 .

При $c = 0$ маємо

$$g_0 = \{z \mid \rho(z, M_1) = 1\} \cup \{z \mid \rho(z, M_2) = 1\} = \{z \mid |z - i| = 1\} \cup \{z \mid |z + i| = 1\}$$

і g_0 є об'єднанням двох кіл, які перетинаються в єдиній точці $S = 0$.

При $c < 0$ множина

$$g_c = \{z \mid \rho(z, M_1) = 1 - c, \text{Im } z \geq 0\} \cup \{z \mid \rho(z, M_2) = 1 - c, \text{Im } z \leq 0\}$$

складається з двох дуг зі спільними кінцями.

З теореми Жордана про криву слідує, що при $c < 0$ проста замкнена крива g_c розбиває площину на дві зв'язні компоненти, одна з яких гомеоморфна відкритому диску, а друга необмежена. Позначимо їх через $U_{g,c}^0$ і $U_{g,c}^\infty$, відповідно. Легко бачити, що

$$U_{g,c}^0 = \{z \mid g(z) > c\}, \quad U_{g,c}^\infty = \{z \mid g(z) < c\}.$$

Зі сказаного робимо висновок, що кожна точка множини $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \{0\}$ є регулярною точкою функції g як в сенсі означення 9.1.1а, так і в сенсі означення 9.1.1б.

Точка ж $S = 0$ є сідловою точкою функції g . В означенні 9.1.2 для точки S треба взяти $n = 2$, $U_S = U_\varepsilon(S) = \{z \mid \rho(z, S) < \varepsilon\}$ при $\varepsilon \in (0, 1)$. Для того, щоб побудувати неперервне відображення h , яке б відповідало означенню 9.1.2, нам буде потрібне наступне твердження і його наслідок.

Лема 9.2.2 *Нехай $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ і $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервні функції. Нехай*

$$K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [\min(\alpha(x), \beta(x)), \max(\alpha(x), \beta(x))] \}.$$

Відображення $G : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow K$,

$$G(x, t) = (x, t\beta(x) + (1 - t)\alpha(x)) \quad (9.2.1)$$

є факторним.

Наслідок 9.2.3 *Нехай $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ і $\alpha_i, \beta_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, — неперервні функції. Нехай*

$$K_i = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b], y \in [\min(\alpha_i(x), \beta_i(x)), \max(\alpha_i(x), \beta_i(x))] \},$$

$$C_i = \{ x \in [a, b] \mid \alpha_i(x) = \beta_i(x) \}, \quad i = 1, 2.$$

Якщо $C_1 \subseteq C_2$, то відображення $H : K_1 \rightarrow K_2$,

$$H(x, y) = \begin{cases} \left(x, \frac{(y - \alpha_1(x))\beta_2(x) + (\beta_1(x) - y)\alpha_2(x)}{\beta_1(x) - \alpha_1(x)} \right), & \alpha_1(x) \neq \beta_1(x), \\ (x, \alpha_2(x)), & \alpha_1(x) = \beta_1(x), \end{cases} \quad (9.2.2)$$

неперервне.

Якщо $C_1 = C_2$, то H гомеоморфно відображає K_1 на K_2 .

Перед доведенням леми нагадаємо деякі топологічні поняття (див. [80]).

Нехай $h : X \rightarrow Y$ — деяке неперервне відображення. Нехай \mathfrak{f} і \mathfrak{h} — деякі розбиття просторів X і Y відповідно і відображення h переводить елементи розбиття \mathfrak{f} в елементи розбиття \mathfrak{h} . тоді однозначно визначене і неперервне відображення $\text{fact } h : X/\mathfrak{f} \rightarrow Y/\mathfrak{h}$, для якого комутативна наступна діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \text{pr}_X \downarrow & & \downarrow \text{pr}_Y \\ X/\mathfrak{f} & \xrightarrow{\text{fact } h} & Y/\mathfrak{h} \end{array}$$

Нехай тепер \mathfrak{h} — розбиття простору Y на окремі точки, $\text{zer } h = \mathfrak{f}$ — розбиття простору X на прообрази точок простору Y . В цьому випадку $Y/\mathfrak{h} \cong Y$, а відображення $\text{fact } h$, для якого виконується рівність $h = \text{fact } h \circ \text{pr}_X$ називається *взаємно-однозначним фактором* відображення h . Неперервне відображення h називається *факторним*, якщо його взаємно-однозначний фактор є гомеоморфізмом (в цьому випадку простір Y можна розглядати як фактор-простір простору X по розбиттю $\text{zer } h$).

Доведення лемі 9.2.2. Легко бачити, що відображення $\text{pr}_1 \circ G : (x, t) \mapsto x$ та $\varphi(x, t) = \text{pr}_2 \circ G(x, t) = t\beta(x) + (1 - t)\alpha(x)$, $(x, t) \in [a, b] \times I$, проєкцій на вісі координат неперервні, тому що можуть бути представлені як композиції неперервних відображень. Внаслідок цього і відображення G неперервне в кожній точці $(x, t) \in [a, b] \times I$.

Зрозуміло, що підпростір K площини \mathbb{R}^2 хаусдорфів і $G([a, b] \times I) = K$. Простір $[a, b] \times I$ є компактом, тому відображення G замкнене, а це є достатньою умовою його факторності (див.[80]). \square

Доведення наслідка 9.2.3. Розглянемо відображення $G_i : [a, b] \times I \rightarrow K_i$, $i = 1, 2$, які відповідають лемі 9.2.2. Можемо дивитися на простори K_i , як на фактор-простори простору $[a, b] \times I$ по розбиттям $\text{zer } G_i$, а G_i вважати відображеннями проєкції.

Для кожного $x \in [a, b]$ при $x \notin C_i$ кожна точка відрізка $\{x\} \times I$ є елементом розбиття $\text{zer } G_i$, а при $x \in C_i$ весь відрізок $\{x\} \times I$ стає елементом $\text{zer } G_i$, $i = 1, 2$. Включення $C_1 \subseteq C_2$ гарантує нам, що розбиття $\text{zer } G_1$ є подрібне-

нням розбиття $\text{zer } G_2$. Тому існує неперервне відображення \hat{H} , яке замикає комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} [a, b] \times I & \xrightarrow{\text{Id}} & [a, b] \times I \\ G_1 \downarrow & & \downarrow G_2 \\ K_1 & \xrightarrow{\hat{H} = \text{fact Id}} & K_2 \end{array}$$

Нехай $(x, t) \in [a, b] \times I$, $(x, y_i) = G_i(x, t)$, $i = 1, 2$. Тоді $\hat{H}(x, y_1) = (x, y_2)$. З формули (9.2.1) знаходимо $y_i - \alpha_i(x) = t(\beta_i(x) - \alpha_i(x))$, $i = 1, 2$.

Якщо $\alpha_1(x) \neq \beta_1(x)$, то $t = (y_1 - \alpha_1(x))/(\beta_1(x) - \alpha_1(x))$ і

$$y_2 = \frac{(y_1 - \alpha_1(x))\beta_2(x) + (\beta_1(x) - y_1)\alpha_2(x)}{\beta_1(x) - \alpha_1(x)}.$$

Якщо ж $\alpha_1(x) = \beta_1(x)$, то зі співвідношення $C_1 \subseteq C_2$ слідує, що $\alpha_2(x) = \beta_2(x)$ і $y_2 = \alpha_2(x)$.

Очевидно, для будь-якої точки $(x, y_1) \in K_1$ знайдеться її прообраз $(x, t) \in G_1^{-1}(x, y_1) \subseteq \{x\} \times I \subseteq [a, b] \times I$. Тому відображення $\hat{H} = \text{fact Id}$ відповідає формулі (9.2.2), тобто $\hat{H} = H$.

Якщо $C_1 = C_2$, то як легко бачити, розбиття $\text{zer } G_1$ і $\text{zer } G_2$ співпадають. Тому відображення H бієктивне. Множина $K_1 = G_1([a, b] \times I)$ є компактом (як образ компакта $[a, b] \times I$ в Хаусдорфовому просторі K_1) і простір K_2 хаусдорфів, тому відображення H є гомеоморфізмом. \square

Повернемося до функції $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Доведемо, що точка $S = 0$ є сідловою для g . Ми вже перевірили, що всі близькі до S точки є регулярними для g , тому нам достатньо побудувати гомеоморфізм $h : U_S \rightarrow \mathbb{R}^2$, який заданий на деякому околі U_S точки S і відображає множину $g_0 \cap U_S$ на $h(U_S) \cap \{z \mid \text{Re } z^2 = 0\}$.

Розглянемо квадрат $[-1, 1] \times [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ і неперервні функції $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2$,

$$\psi_2, \eta_1, \eta_2 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1],$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -1 + \sqrt{1-x^2}, & \psi_1(x) &= 1 - \sqrt{1-x^2}, \\ \varphi_2(x) &= -|x|, & \psi_2(x) &= |x|, \\ \eta_1(x) &= -1, & \eta_2(x) &= 1. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що множина

$$\Theta_1 = \{(x, \varphi_1(x)) \mid x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \psi_1(x)) \mid x \in [-1, 1]\}$$

утворює перетин $([-1, 1] \times [-1, 1]) \cap g_0$, а множина

$$\Theta_2 = \{(x, \varphi_2(x)) \mid x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \psi_2(x)) \mid x \in [-1, 1]\}$$

утворює діагоналі квадрата $[-1, 1] \times [-1, 1]$ (перетин квадрата з множиною $\{z \mid \operatorname{Re} z^2 = 0\}$).

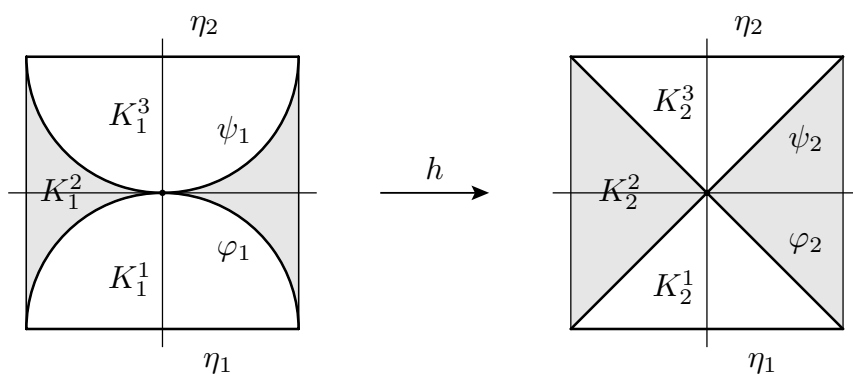


Рис. 9.2.1: Заштриховані області K_1^2 і K_2^2

Застосуємо наслідок 9.2.3 послідовно до пар функцій η_1, φ_1 і η_1, φ_2 ; φ_1, ψ_1 і φ_2, ψ_2 ; ψ_1, η_2 і ψ_2, η_2 . Отримаємо розбиття квадрата на три замкнених області K_1^1, K_1^2, K_1^3 , і три гомеоморфізми $H_i : K_1^i \rightarrow K_2^i, i = 1, 2, 3$, які узгоджені на спільних частинах областей K_1^1, K_1^2, K_1^3 . Отже, коректно визначене неперервне взаємно-однозначне відображення $h[-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]^2$,

$$h(x, y) = H_i(x, y), \quad \text{якщо } (x, y) \in K_1^i,$$

і це відображення переводить множину Θ_1 в Θ_2 (див. малюнок 9.2.1).

9.2.4 Відображення $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Розглянемо наступні функції на відрізку $J = [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(x) &= -1 - \sqrt{1 - x^2}, & \varphi_1(x) &= -1 + \sqrt{1 - x^2}, \\ \tilde{\psi}_1(x) &= 1 + \sqrt{1 - x^2}, & \psi_1(x) &= 1 - \sqrt{1 - x^2}, \\ \varphi_2(x) &= -|x|, & \psi_2(x) &= |x|, \\ \eta_1(x) &= -1, & \eta_2(x) &= 1, \end{aligned}$$

а також функції на множині $J \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \nu(x) &= (1 - |x|)^2 \sin \frac{-\pi}{x}, \\ \nu_1(x) &= \nu(x) - |x|, \quad \nu_2(x) = \nu(x) + |x|. \end{aligned}$$

Графіки цих функцій наведені на малюнках 9.2.2 і 9.2.3.

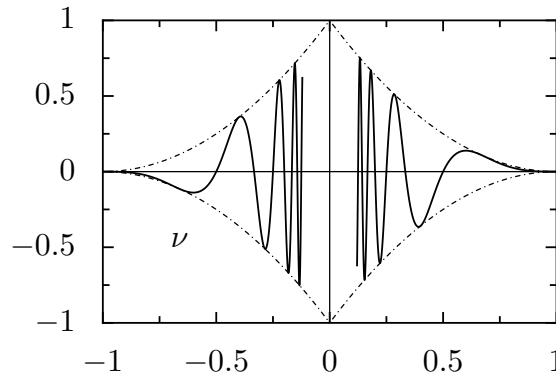
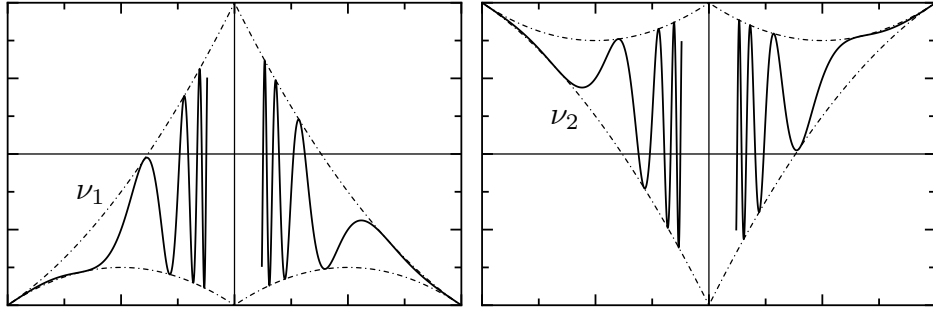


Рис. 9.2.2: Функція ν . Пунктиром показано функції $\pm(1 - |x|)^2$

Розглянемо також наступні підмножини площини

$$\begin{aligned} K^- &= \{(x, y) \mid x \in J, y \in [\tilde{\varphi}_1(x), \varphi_2(x)]\}, \\ \hat{K}^- &= \{(x, y) \mid x \in J, y \in [\tilde{\varphi}_1(x), \eta_1(x)]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K^+ &= \{(x, y) \mid x \in J, y \in [\psi_2(x), \tilde{\psi}_1(x)]\}, \\
\hat{K}^+ &= \{(x, y) \mid x \in J, y \in [\eta_2(x), \tilde{\psi}_1(x)]\}, \\
L &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \mid x \in J, y \in [\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\psi}_1(x)]\}.
\end{aligned}$$

Рис. 9.2.3: Функції ν_1 і ν_2

Застосуємо наслідок 9.2.3 при $[a, b] = J$, $\alpha_1 = \tilde{\varphi}_1$, $\beta_1 = \varphi_2$, $\alpha_2 = \tilde{\varphi}_1$, $\beta_2 = \eta_1$. Отримаємо гомеоморфізм

$$F^- : K^- \rightarrow \hat{K}^-,$$

який для кожного $x \in J$ лінійно відображає відрізок $\{x\} \times [\tilde{\varphi}_1(x), \varphi_2(x)]$ на відрізок $\{x\} \times [\tilde{\varphi}_1(x), \eta_1(x)]$.

Аналогічно, при $\alpha_1 = \psi_2$, $\beta_1 = \tilde{\psi}_1$, $\alpha_2 = \eta_2$ і $\beta_2 = \tilde{\psi}_1$ наслідок 9.2.3 дасть нам гомеоморфізм

$$F^+ : K^+ \rightarrow \hat{K}^+.$$

Розглянемо також гомеоморфізм

$$F_L = \text{Id}_L : L \rightarrow L.$$

Розглянемо іще для кожного $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ множини

$$I_n = \left[\min \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right), \max \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
K_n^- &= \{(x, y) \mid x \in I_n, y \in [\varphi_2(x), \varphi_1(x)]\}, \\
\hat{K}_n^- &= \{(x, y) \mid x \in I_n, y \in [\eta_1(x), \nu_1(x)]\}, \\
K_n^0 &= \{(x, y) \mid x \in I_n, y \in [\varphi_1(x), \psi_1(x)]\}, \\
\hat{K}_n^0 &= \{(x, y) \mid x \in I_n, y \in [\nu_1(x), \nu_2(x)]\}, \\
K_n^+ &= \{(x, y) \mid x \in I_n, y \in [\psi_1(x), \psi_2(x)]\}, \\
\hat{K}_n^+ &= \{(x, y) \mid x \in I_n, y \in [\nu_2(x), \eta_2(x)]\}, \\
K_n &= K_n^- \cup K_n^0 \cup K_n^+ = \{(x, y) \mid x \in I_n, y \in [-|x|, |x|]\}, \\
\hat{K}_n &= \hat{K}_n^- \cup \hat{K}_n^0 \cup \hat{K}_n^+ = \{(x, y) \mid x \in I_n, y \in [-1, 1]\}.
\end{aligned}$$

Нехай $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Для відрізка $[a, b] = I_n$ і функцій $\alpha_1 = \varphi_2$, $\beta_1 = \varphi_1$, $\alpha_2 = \eta_1$, $\beta_2 = \nu_1$ наслідок 9.2.3 дасть нам гомеоморфізм

$$F_n^- : K_n^- \rightarrow \hat{K}_n^-,$$

який при кожному $x \in I_n$ відображає відрізок $\{x\} \times [\varphi_2(x), \varphi_1(x)]$ лінійно на відрізок $\{x\} \times [\eta_1(x), \nu_1(x)]$.

Аналогічно, користуючись наслідком 9.2.3 спочатку для функцій φ_1 , ψ_1 , ν_1 , ν_2 , потім для функцій ψ_1 , ψ_2 , ν_2 , η_2 , отримаємо відповідно гомеоморфізми

$$F_n^0 : K_n^0 \rightarrow \hat{K}_n^0, \quad F_n^+ : K_n^+ \rightarrow \hat{K}_n^+.$$

Помітимо, що гомеоморфізми F_n^- , F_n^0 і F_n^+ узгоджені на спільній частині області визначення, тобто $F_n^- = F_n^0$ на множині $K_n^- \cap K_n^0$ і $F_n^0 = F_n^+$ на множині $K_n^0 \cap K_n^+$. Тому визначене відображення $F_n : K_n \rightarrow \hat{K}_n$,

$$F_n(x, y) = \begin{cases} F_n^-(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in K_n^-, \\ F_n^0(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in K_n^0, \\ F_n^+(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in K_n^+. \end{cases}$$

Нагадаємо деякі факти з загальної топології (див. [80]).

Фундаментальним покриттям простору X називається таке покриття

$\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$, що довільна множина $U \subseteq X$ відкрита (замкнена) в X , коли для кожного $\alpha \in A$ множина $U \cap V_\alpha$ відкрита (замкнена) в просторі V_α в індукованій з X топології. Відомо, що кожне відкрите покриття, а також локально-скінченне замкнене покриття є фундаментальним.

Нехай $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — деяке покриття простору X і $\{\Theta_\alpha : V_\alpha \rightarrow Y\}_{\alpha \in A}$ — сім'я відображень, які узгоджені на спільній частині області визначення, тобто

$$\Theta_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = \Theta_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta},$$

якщо $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$, $\alpha, \beta \in A$.

Нехай відображення $\Theta : X \rightarrow Y$ визначене за допомогою співвідношення

$$\Theta(x) = \Theta_\alpha(x), \quad \text{якщо } x \in V_\alpha.$$

Тоді якщо всі Θ_α неперервні і покриття $\{V_\alpha\}$ фундаментальне, то і Θ неперервне.

Покриття K_n^-, K_n^0, K_n^+ множини K_n є замкненим і скінченим, тому воно фундаментальне і відображення F_n неперервне. Легко бачити, що F_n взаємно-однозначно відображає компакт K_n на \hat{K}_n , отже це відображення є гомеоморфізмом.

Розглянемо множини

$$K = \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} K_n = \{(x, y) \mid x \in J \setminus \{0\}, y \in [-|x|, |x|]\},$$

$$\hat{K} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \hat{K}_n = \{(x, y) \mid x \in J \setminus \{0\}, y \in [-1, 1]\}.$$

Легко бачити, що сім'я множин $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ утворює локально-скінченне замкнене покриття простору K і сім'я відображень $\{F_n\}$ відповідає умовам

$$F_n|_{K_n \cap K_m} = F_m|_{K_n \cap K_m}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

(за побудовою $K_n \cap K_m \neq \emptyset$ тільки якщо $|m - n| \leq 1$). Тому покриття $\{K_n\}$

фундаментальне і відображення $F_K : K \rightarrow \hat{K}$,

$$F_K(x, y) = F_n(x, y), \quad \text{якщо } (x, y) \in K_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

неперервне.

Кожне з відображень F_n є гомеоморфізмом K_n на \hat{K}_n , тому визначені неперервні відображення

$$\hat{F}_n = F_n^{-1} : \hat{K}_n \rightarrow K_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Безпосередня перевірка показує, що виконуються співвідношення

$$\hat{F}_n \Big|_{\hat{K}_n \cap \hat{K}_m} = \hat{F}_m \Big|_{\hat{K}_n \cap \hat{K}_m}, \quad m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Отже, визначене відображення $\hat{F}_K : \hat{K} \rightarrow K$,

$$\hat{F}_K(x, y) = \hat{F}_n(x, y), \quad \text{якщо } (x, y) \in \hat{K}_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Як і вище, сім'я множин $\{\hat{K}_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ утворює фундаментальне покриття простору \hat{K} і відображення \hat{F}_K неперервне.

Якщо $(x, y) \in K_n$, то $F_K(x, y) \in \hat{K}_n$ і

$$\hat{F}_K \circ F_K(x, y) = \hat{F}_K \circ F_n(x, y) = \hat{F}_n \circ F_n(x, y) = F_n^{-1} \circ F_n(x, y) = (x, y).$$

Тому $\hat{F}_K \circ F_K = \text{Id}_K$.

Аналогічно, $F_K \circ \hat{F}_K = \text{Id}_{\hat{K}}$. Отже, $\hat{F}_K = F_K^{-1}$ і відображення $F_K : K \rightarrow \hat{K}$ є гомеоморфізмом.

Очевидно,

$$F_K \Big|_{\{-1\} \times J} = F_{-1} \Big|_{\{-1\} \times J} = \text{Id}, \quad F_K \Big|_{\{1\} \times J} = F_1 \Big|_{\{1\} \times J} = \text{Id}.$$

Тому виконуються співвідношення

$$F_K|_{K \cap L} = F_L|_{K \cap L}, \quad F_K|_{K \cap K^\pm} = F^\pm|_{K \cap K^\pm}, \quad F_L|_{K \cap K^\pm} = F^\pm|_{L \cap K^\pm}.$$

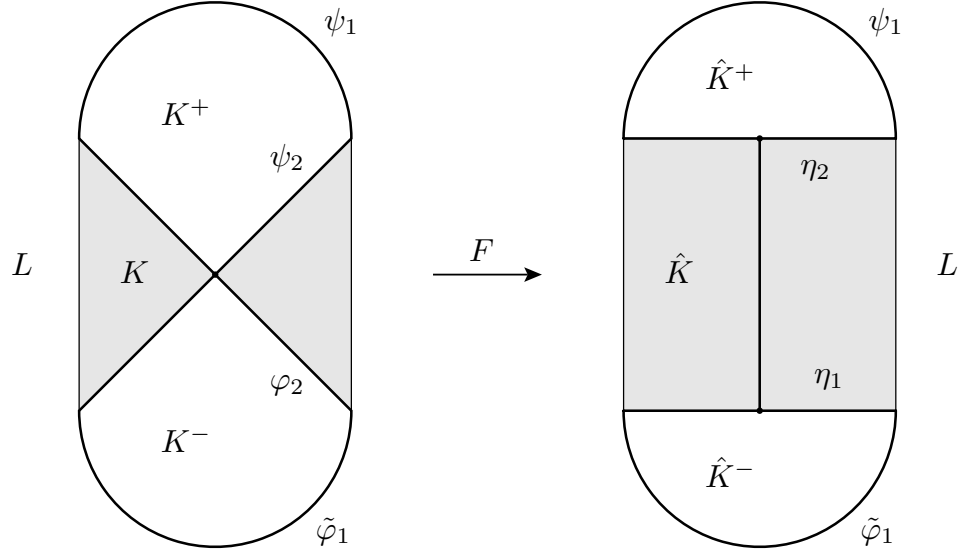


Рис. 9.2.4: Відображення F . Заштриховано області K і \hat{K}

Позначимо

$$\begin{aligned} M^+ &= K^+ \setminus \{(0, 0)\}; & \hat{M}^+ &= \hat{K}^+ \setminus \{(0, 1)\}; \\ M^- &= K^- \setminus \{(0, 0)\}; & \hat{M}^- &= \hat{K}^- \setminus \{(0, -1)\}. \end{aligned}$$

Очевидно, $F^\pm(M^\pm) = \hat{M}^\pm$, тому визначене відображення (див. малюнок 9.2.4)

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = K \cup M^+ \cup M^- \cup L \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$F(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{якщо } (x, y) \in L; \\ F^\pm(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in M^\pm; \\ F_K(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in K. \end{cases}$$

Набір множин $\{K, M^+, M^-, L\}$ є скінченним замкненим покриттям простору $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, тому це покриття фундаментальне і відображення F неперервне.

За побудовою $F(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \hat{K} \cup \hat{M}^+ \cup \hat{M}^- \cup L = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J)$.

Як і вище перевіряється, що відображення F_L^{-1} , $(F^\pm)^{-1}$ і $\hat{F}_K = F_K^{-1}$ узгоджені на перетині своїх областей визначення і покриття \hat{K} , \hat{M}^+ , \hat{M}^- , L простору $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J)$ фундаментальне. Тому визначене і неперервне відображення

$$\hat{F}_0 : \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J) \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\hat{F}_0(x, y) = \begin{cases} (x, y), & \text{якщо } (x, y) \in L; \\ (F^\pm)^{-1}(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in \hat{M}^\pm; \\ \hat{F}_K(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in \hat{K}. \end{cases}$$

Проста безпосередня перевірка показує, що $\hat{F}_0(\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J)) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\hat{F}_0 \circ F = \text{Id}$, $F \circ \hat{F}_0 = \text{Id}$. Тому F гомеоморфно відображає $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ на $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J)$ і $\hat{F}_0 = F^{-1}$.

Довизначимо відображення \hat{F}_0 на $\{0\} \times J$ до відображення $\hat{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ за допомогою співвідношення

$$\hat{F}(x, y) = \begin{cases} \hat{F}_0(x, y), & \text{якщо } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J); \\ (0, 0), & \text{якщо } (x, y) \in \{0\} \times J. \end{cases}$$

Перевіримо неперервність відображення \hat{F} .

Нехай $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — відкрита множина.

Якщо $0 \notin U$, то $\hat{F}^{-1}(U) = \hat{F}_0^{-1}(U)$ — відкрита підмножина простору $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J)$, який сам є відкритим підпростором площини. Тому множина $\hat{F}^{-1}(U)$ відкрита в \mathbb{R}^2 .

Припустимо тепер, що $0 \in U$. За побудовою $F^\pm(0, 0) = (0, \pm 1) = \hat{F}^{-1}(0, 0) \cap K^\pm$. Тому $\hat{F}|_{\hat{K}^\pm} = (F^\pm)^{-1}$ і існують такі δ^+ , $\delta^- > 0$, що $\hat{F}^{-1}(U) \cap \hat{K}^\pm \supseteq B_{\delta^\pm}(0, \pm 1)$. Тут $B_\varepsilon(z_0) = \{z \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$ — відкритий шар радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці z_0 .

Легко бачити, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $m \in \mathbb{N}$, для якого $V_m \subseteq B_\varepsilon(0, 0)$,

де

$$V_m = \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ |i| > m}} K_i,$$

тому існує таке $s \in \mathbb{N}$, що $\hat{V}_s \subseteq \hat{F}^{-1}(U)$, де

$$\hat{V}_s = \hat{F}^{-1}(V_s) = F(V_s) = \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ |i| > s}} \hat{K}_i.$$

За побудовою $\hat{V}_s = ((-1/s, 0) \cup (0, 1/s)) \times J$. Нехай $\delta = \min(\delta^+, \delta^-, 1/s)$. Тоді

$$\begin{aligned} B_\delta(\{0\} \times J) &= (B_\delta(0, 1) \cap \hat{K}^+) \cup (B_\delta(0, -1) \cap \hat{K}^-) \cup \\ &\cup (((-\delta, 0) \cup (0, \delta)) \times J) \cup \hat{F}^{-1}(0, 0) \subseteq \hat{F}^{-1}(U), \end{aligned}$$

і множина $\hat{F}^{-1}(U)$ відкрита в \mathbb{R}^2 , тому що вона є об'єднанням двох відкритих множин

$$\hat{F}^{-1}(U) = \hat{F}^{-1}(U \setminus \{(0, 0)\}) \cup B_\delta(\{(0, 0)\} \times J).$$

9.2.5 Функція $\hat{f} = g \circ \hat{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ не має сідлових точок.

Відображення $\hat{F}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \times J} = F^{-1}$ є гомеоморфізмом на свій образ, тому точки $q_1 = \hat{F}^{-1}(0, 1) = F(0, 1)$ і $q_2 = \hat{F}^{-1}(0, -1) = F(0, -1)$ будуть локальними мінімумами функції \hat{f} , а всі точки з множини $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times J \cup \{q_1, q_2\})$ будуть регулярними точками цієї функції.

Доведемо, що множина $\{0\} \times J$ не містить локальних екстремумів функції \hat{f} .

Нехай $y \in [-1, 1]$. Тоді рівняння $\sin(-\pi/x) = y$ має наступні розв'язки

$$x_m = x_m(y) = \frac{\pi}{2\pi m - \arcsin y}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, $x_m \rightarrow \pm 0$ відповідно при $m \rightarrow \pm \infty$. Тому $\nu_1(x_m) = (1 - |x_m|)^2 y - |x_m| \rightarrow y$ і $\nu_2(x_m) = (1 - |x_m|)^2 y + |x_m| \rightarrow y$.

Отже, для кожної точки $(0, y) \in \{0\} \times J$ і кожного $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$, таке, що $\nu_1(x_m(y)), \nu_2(x_m(y)) \in B_\varepsilon(0, y)$ при всіх $m \in \mathbb{Z}$, $|m| > N$.

Розглянемо множини

$$\begin{aligned}\hat{\mu}^+(y, m) &= \{x_m\} \times ([-1, \nu_1(x_m)) \cup (\nu_2(x_m), 1]), \\ \hat{\mu}^-(y, m) &= \{x_m\} \times (\nu_1(x_m), \nu_2(x_m)), \quad |m| > 1.\end{aligned}$$

За побудовою маємо

$$\begin{aligned}\mu^+(y, m) &= \hat{F}(\hat{\mu}^+(y, m)) = \{x_m\} \times ([-1, \varphi_1(x_m)) \cup (\psi_1(x_m), 1]) \subseteq g^{-1}((0, 1)), \\ \mu^-(y, m) &= \hat{F}(\hat{\mu}^-(y, m)) = \{x_m\} \times (\varphi_1(x_m), \psi_1(x_m)) \subseteq g^{-1}((-\infty, 0)).\end{aligned}$$

Тому $\hat{f}(z) > 0$ для всіх $z \in \hat{\mu}^+(y, m)$, а для кожного $z \in \hat{\mu}^-(y, m)$ справедлива нерівність $\hat{f}(z) < 0$.

Очевидно, при фіксованих $(0, y) \in \{0\} \times J$ і $\varepsilon > 0$, а також при достатньо великих по модулю $m \in \mathbb{Z}$ маємо $\hat{\mu}^\pm(y, m) \cap B_\varepsilon(0, y) \neq \emptyset$.

Отже, для кожної точки $(0, y) \in \{0\} \times J$ в її довільному околі знайдуться як точки, в яких функція \hat{f} від'ємна, так і точки, в яких ця функція приймає додатні значення. Зважаючи на те, що $\hat{f}(\{0\} \times J) = g(0, 0) = 0$, робимо висновок, що множина $\{0\} \times J$ не містить локальних екстремумів функції \hat{f} і єдиними локальними екстремумами цієї функції є точки q_1 і q_2 .

Розглянемо множину рівня $\hat{f}_0 = \hat{f}^{-1}(0) = \hat{F}^{-1}(g_0) = F(g_0) \cup \{0\} \times J$. Очевидно, множина $g_0 = g^{-1}(0)$ є об'єднанням графіків функцій $\tilde{\varphi}_1, \varphi_1, \psi_1, \tilde{\psi}_1$ на відрізку $J = [-1, 1]$. Тому множина \hat{f}_0 є об'єднанням графіків функцій $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\psi}_1$ на відрізку J , графіків ν_1, ν_2 на множині $[-1, 0) \cup (0, 1]$, а також множини $\{0\} \times J$.

За побудовою в околі множини $\{0\} \times J$ функції ν_1 і ν_2 ведуть себе як $\sin(1/x)$, тому $\{0\} \times J$ є компонентою лінійної зв'язності множини \hat{f}_0 і для кожної точки $z \in \{0\} \times J$ і її достатньо малого відкритого околу U_z множина γ_z (компонента зв'язності точки z в множині $\hat{f}_0 \cap U_z$) належить до $\{0\} \times J$. Тому множина γ_z гомеоморфна або інтервалу, або напівінтервалу, і не може бути відображена на перетин деякого околу початку координат з множиною

$\{z \mid \operatorname{Re} z^n = 0\}$ при $n \geq 2$.

Зі сказаного робимо висновок, що ні одна точка відрізка $\{0\} \times J$ не є сідловою для функції \hat{f} .

9.2.6 Функція f на крузі з двома локальними екстремумами і без сідлових точок.

Розглянемо множину

$$\hat{f}_{-1} = \hat{f}^{-1}(-1) = \hat{F}^{-1}(g^{-1}(-1)) = F(g_{-1}).$$

Легко бачити, що $g_{-1} = g^{-1}(-1)$ є підмножиною L , тому $F(g_{-1}) = g_{-1}$ і $\hat{f}_{-1} = g_{-1}$.

В підрозділі 9.2.1 ми встановили, що множина g_{-1} гомеоморфна колу і обмежує диск $U_{g,-1}^0$, який містить обидва локальні екстремуми функції g і її сідлову точку $(0, 0) \in g^{-1}(0)$. За побудовою обидва екстремума q_1 і q_2 функції \hat{f} належать до множини

$$\{0\} \times ((\tilde{\varphi}_1(0), \eta_1(0)) \cup (\eta_2(0), \tilde{\psi}_1(0))) = \{0\} \times ((-2, -1) \cup (1, 2)),$$

яка лежить в $U_{g,-1}^0$.

Зафіксуємо гомеоморфізм

$$H_0 : g_{-1} \rightarrow \partial D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

і, скориставшись теоремою Шенфліса (див. [46], [103]), продовжимо його до гомеоморфізму

$$H : g_{-1} \cup U_{g,-1}^0 \rightarrow D.$$

Розглянемо функцію $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \hat{f} \circ H^{-1}(x, y) + 1 = g \circ \hat{F} \circ H^{-1}(x, y) + 1, \quad (x, y) \in D.$$

Очевидно, $\partial D = f^{-1}(0)$ і $f(x, y) > 0$ для всіх $(x, y) \in \operatorname{Int} D$. За побудовою

обидві точки $(F \circ H^{-1})^{-1}(0, 1) = H \circ F(0, 1) = H(q_1)$ і $(F \circ H^{-1})^{-1}(0, -1) = H \circ F(0, -1) = H(q_2)$ належать до $\text{Int } D$. Тому функція f відповідає умовам (i) і (ii) з розділу 9.1.

Зрозуміло, що властивість точки бути сідловою точкою неперервної функції є топологічним інваріантом. Відображення H^{-1} є гомеоморфізмом і функція \hat{f} не має сідлових точок. Тому і функція $\hat{f} \circ H^{-1}$, а разом з нею і f , не має сідлових точок в $\text{Int } D$.

Отже, ми довели наступне твердження.

Теорема 9.2.7 ([56]) *Нехай D — стандартний замкнений диск на площині, ∂D — його межове коло.*

Існує неперервна функція $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає вимогам:

- (i) $f(\partial D) = 0$;
- (ii) $f(z) > 0$ для кожного $z \in \text{Int } D$;
- (iii) f має в $\text{Int } D$ рівно два локальні екстремуми;
- (iv) f не має сідлових точок в $\text{Int } D$.

9.3 Прикінцеві зауваження.

Зауваження 9.3.1. Неважко довести, що для функції \hat{f} кожна точка множини $\{0\} \times (-1, 1)$ є регулярною в сенсі означення 9.1.1a (це є наслідком того, що за побудовою при $c \neq 0$ кожна лінія рівня $\hat{f}^{-1}(c)$ в множині $\hat{K} \cup \hat{K}^+ \cup \hat{K}^-$ локально є графіком неперервної функції). Тому точки $(0, 1)$ і $(0, -1)$ є ізольованими критичними точками для \hat{f} , але вони не є ані локальними екстремумами, ні сідловими точками.

З іншого боку, вище показано, що в сенсі означення 9.1.1b кожна точка відрізка $\{0\} \times [-1, 1]$ є критичною.

Зауваження 9.3.2. Розглянемо на площині множину

$$R = \{z \mid |z - i/2| = 1/2\} \cup \{z \mid |z - i| = 1\}$$

і функцію $\tilde{g} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g}(z) = \pm\rho(z, R)$, $z \in \mathbb{C}$, причому знаки розставимо як на малюнку 9.3.1.

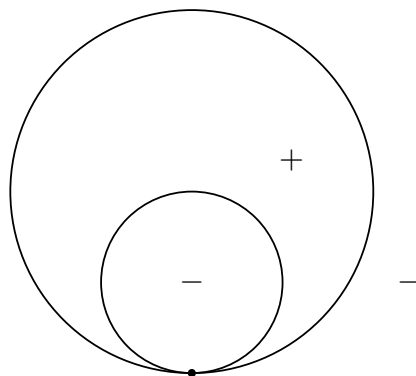


Рис. 9.3.1: Знаки функції \tilde{g}

Легко бачити, що ця функція має локальний максимум в точці $(0, 3/2)$, локальний мінімум в точці $(0, 1/2)$, точка $(0, 0)$ є її сідловою точкою, а всі інші точки регулярні як в сенсі означення 9.1.1а, так і в сенсі означення 9.1.1б.

Стартучи з цієї функції, за допомогою описаного вище метода можна побудувати функцію $\tilde{f} : D \rightarrow \mathbb{R}$, яка відповідає теоремі 9.2.7 і має один локальний максимум і один локальний мінімум в $\text{Int } D$.

Розділ 10

Про поведінку F-функцій на замиканні множини своїх S-відділених точок

10.1 Вступ

Нехай M є двовимірною орієнтовною поверхнею з краєм ∂M . Позначимо $\text{Int } M = M \setminus \partial M$.

Припустимо, що $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ — деяка функція. Нехай $x \in A \subset M$. Введемо наступні позначення для множин рівня f :

$$M^x = M_{f(x)} = \{y \in M \mid f(y) = f(x)\},$$

$$A^x = A_{f(x)} = A \cap M^x.$$

Означення 10.1.1 Функцію $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ назвемо F-функцією, якщо

- (i) f неперервна;
- (ii) f відкрита на $\text{Int } M$;
- (iii) для кожного $x \in \text{Int } M$ множина M^x є локально-зв'язною в точці x .

F-функції були введені У. Фоксом в роботі [23] під назвою *Peano-interior functions* як узагальнення псевдогармонічних функцій.

У статті [24] Фокс будує продовження F-функції, що задана на поверхні M , до F-функції, яка задана на більшій поверхні $C(M) \supset \text{Int } M$, і є локально постійною на межі $\partial C(M)$. Він дає таке означення.

Означення 10.1.2 *Функція $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ називається відділеною зверху від $\text{Int } M$ в точці $x \in \partial M$, або S-відділеною в точці x , якщо існує окіл U точки x в M , такий що $f(y) < f(x)$ для всіх $y \in U \cap \text{Int } M$.*

Нехай J є компонентою межі поверхні M . Позначимо через $D(S, J)$ множину всіх S-відділених точок, що належать J . Оскільки функція f неперервна, то вона постійна на кожній компоненті зв'язності множини $D(S, J)$.

Взагалі кажучи, множина $D(S, J)$ не є ні відкритою, ані замкненою підмножиною J . Щоб зменшити кількість компонент зв'язності, Фокс в [24] пропонує розглядати замість $D(S, J)$ замкнену множину $\overline{D(S, J)}$. Його метод побудови продовження F-функції працює лише тоді, коли ця функція постійна на кожній компоненті множини $\overline{D(S, J)}$.

У той-же час, в [24] Фокс формулює в якості нерозв'язаної проблеми таке питання: *чи завжди F-функція f постійна на компонентах зв'язності множини $\overline{D(S, J)}$?*

Нижче ми будемо приклад F-функції, означеної на квадраті $M = [0, 1] \times [0, 1]$, який дає негативну відповідь на це питання. Ми доводимо наступне твердження.

Теорема 10.1.3 ([58]) *Нехай $M = [0, 1] \times [0, 1]$. Існує F-функція $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, така що множина $\overline{D(S, \partial M)}$ зв'язна і $f(\overline{D(S, J)}) = [0, 1]$.*

10.2 Означення й позначення

Нагадаємо деякі означення та конструкції.

Нехай $\Gamma \subset [0, 1]$ — стандартна множина Кантора, $g_0 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ — Канторові сходи — неперервна непостійна неспадна функція на відрізку, локально постійна на множині $[0, 1] \setminus \Gamma$.

Введемо наступні позначення.

Нехай $i \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$. Існує єдине розкладення числа $(2k-1)/2^i$ у суму виду

$$\frac{2k-1}{2^i} = \sum_{s=1}^i \frac{\beta_s}{2^s} = \sum_{s=1}^{i-1} \frac{\beta_s}{2^s} + \frac{1}{2^i},$$

де $\beta_s \in \{0, 1\}$, $s \in \{1, \dots, i\}$. Помітимо, що $\beta_i = 1$, оскільки число $(2k-1)$ непарне.

Позначимо

$$r_{2k-1}^i = \sum_{s=1}^i \frac{2\beta_s}{3^s} = \sum_{s=1}^{i-1} \frac{2\beta_s}{3^s} + \frac{2}{3^i}, \quad l_{2k-1}^i = \sum_{s=1}^{i-1} \frac{2\beta_s}{3^s} + \frac{1}{3^i},$$

$$I_{2k-1}^i = (l_{2k-1}^i, r_{2k-1}^i).$$

Зокрема, $I_1^1 = (1/3, 2/3)$, $I_1^2 = (1/9, 2/9)$, $I_3^2 = (7/9, 8/9)$, ...

За означенням,

$$\Gamma = [0, 1] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}} I_{2k-1}^i.$$

Нагадаємо, що на множині $[0, 1] \setminus \Gamma$ функція g_0 означається за допомогою співвідношень

$$g_0(x) = \frac{2k-1}{2^i}, \quad \text{якщо } x \in I_{2k-1}^i,$$

а на множину Γ вона однозначно продовжується по неперервності.

10.3 Побудова F-функції, що відповідає Теоремі 10.1.3

Нехай $M = [0, 1] \times [0, 1]$. Розглянемо функцію $f_0 : \partial M \rightarrow \mathbb{R}$, означену наступним чином

$$f_0(x, y) = \begin{cases} g_0(x), & \text{якщо } y = 0, \\ x, & \text{якщо } y = 1 \text{ або } x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Ця функція аффінна на верхній стороні квадрата, є сходами Кантора на нижній стороні і постійна на кожній из бокових сторін. Зрозуміло, що f_0 неперервна на $\partial M = (\{0, 1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{0, 1\})$.

Позначимо через

$$\hat{a}_{2k-1}^i = (r_{2k-1}^i, 0) \in M$$

правий кінець інтервалу $I_{2k-1}^i \times \{0\}$, $i \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$.

Позначимо ще

$$B^i = [0, 1] \times [1/2^i, 1/2^{i-1}], \quad i \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $M = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B^i$.

Будемо послідовно по індукції продовжувати функцію f_0 на полоси B^i .

Позначимо

$$D_i = \partial M \cup \bigcup_{s \in \{1, \dots, i\}} B^s, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Домовимося для довільних точок $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ позначати через $[z_1, z_2]$ прямолінійний відрізок, що їх з'єднує.

База індукції. Нехай $i = 1$.

Розглянемо точки $a_0^1 = (0, 1)$, $a_2^1 = (1, 1)$. Нехай $a_1^1 = (1/2, 1)$ — середина відрізка $[a_0^1, a_2^1]$. Розглянемо відрізок $J_1^1 = [a_1^1, \hat{a}_1^1]$.

Позначимо $b_0^1 = (0, 1/2)$, $b_2^1 = (1, 1/2)$. Нехай b_1^1 — точка перетину відрізків $[b_0^1, b_2^1]$ і J_1^1 . Позначимо через S_1^1 і S_2^1 чотирикутники з вершинами $(a_0^1, a_1^1, b_1^1, b_0^1)$ та $(a_1^1, a_2^1, b_2^1, a_1^1)$, відповідно.

Означимо функцію $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ наступним чином.

Нехай $f_1(z) = f_0(z)$, якщо $z \in \partial M$. Тоді $f_1(a_1^1) = 1/2$. Покладемо $f_1(z) = g_0(\hat{a}_1^1) = 1/2$, якщо $z \in B^1 \cap D^1$. Тоді $f_1(b_1^1) = 1/2$.

Нехай $[\alpha_{m-1}^1, \alpha_m^1]$ є перетином горизонтального відрізка $[0, 1] \times \{y\}$, $y \in [1/2, 1]$, і трапеції S_m^1 , $m = 1, 2$. В точках $\alpha_k^1(y) \in (\{0\} \times [0, 1]) \cup J_1^1 \cup (\{1\} \times [0, 1])$ функція f_1 вже означена, $f_1(\alpha_k^1(y)) = k/2$, $k = 0, 1, 2$. Візьмемо аффінне продовження f_1 на відрізок $[\alpha_{m-1}^1(y), \alpha_m^1(y)]$, $m = 1, 2$.

Легко бачити, що $f_1(x, 1) = f_0(x, 1)$, $x \in [0, 1]$.

З побудови також зрозуміло, що обмеження $f|_{S_m^1}$ неперервне для $m = 1, 2$. Крім того, функція $f_1|_{\partial M} = f_0|_{\partial M}$ також неперервна. Оскільки множини S_1^1 , S_2^1 і ∂M утворюють скінченне замкнене покриття простору D^1 , то функція f_1 неперервна на D^1 (див. [80]).

Крок індукції. Нехай $i > 1$.

Позначимо через $\text{pr}_1, \text{pr}_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ координатні проекції $\text{pr}_1(x, y) = x$, $\text{pr}_2(x, y) = y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Припустимо, що ми вже побудували набір неперетинних відрізків

$$J_{2k-1}^s = [a_{2k-1}^s, \hat{a}_{2k-1}^s], \quad s \in \{1, \dots, i-1\}, \quad k \in \{1, \dots, 2^{s-1}\},$$

таких що $\text{pr}_1(a_{2k-1}^s) \in (0, 1)$, $\text{pr}_2(a_{2k-1}^s) = 1/2^{s-1}$ для всіх s і k .

Нехай також вже побудована неперервна функція $f_{i-1} : D^{i-1} \rightarrow \mathbb{R}$, що відповідає наступним умовам:

- $f_{i-1}|_{\partial M} = f_0$;
- $f_{i-1}(\cdot, y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ монотонно зростає від 0 до 1 при кожному фіксованому $y \in [1/2^{i-1}, 1]$;
- $J_{2k-1}^s \cap D^{i-1} \subset f_{i-1}^{-1}((2k-1)/2^s)$, $s \in \{1, \dots, i-1\}$, $k \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}$ (зокрема, $f_{i-1}(\hat{a}_{2k-1}^s) = g_0(\hat{a}_{2k-1}^s)$).

Нехай $k = (2m-1)2^{i-s-1} \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$. Позначимо через b_k^{i-1} точку перетину відрізків $[0, 1] \times \{1/2^{i-1}\}$ і J_{2m-1}^s . Відмітимо, що $(2m-1)/2^s = k/2^{i-1}$. Нехай також $b_0^{i-1} = (0, 1/2^{i-1})$, $b_{2^{i-1}}^{i-1} = (1, 1/2^{i-1})$. З властивостей функції f_{i-1} слідує, що

$$f_{i-1}(b_k^{i-1}) = \frac{k}{2^{i-1}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2^{i-1}\}.$$

Припустимо, що на додаток до попередніх властивостей функція f_{i-1} відповідає ще такій умові:

- функція f_{i-1} афінна на кожному відрізку $[b_{k-1}^{i-1}, b_k^{i-1}]$, $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$.

Нашою метою є побудова неперервної функції $f_i : D^i \rightarrow \mathbb{R}$ і набору неперетинних відрізків $J_{2k-1}^i = [a_{2k-1}^i, \hat{a}_{2k-1}^i]$, $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$, які б відповідали умовам

- а) $f_i|_{D^{i-1}} = f_{i-1}$;

б) набір відрізків J_{2k-1}^s , $s \in \{1, \dots, i\}$, $k \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}$, і функція f_i задовольняють вимоги, подібні до наших припущень, що перераховані вище.

Позначимо $a_{2k}^i = b_k^{i-1}$, $k \in \{0, \dots, 2^{i-1}\}$. Нехай a_{2k-1}^i є серединою відрізка $[a_{2k-2}^i, a_{2k}^i] = [b_{k-1}^{i-1}, b_k^{i-1}]$, $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$. З афінності функції f_{i-1} на цих відрізках слідує, що

$$f_{i-1}(a_k^i) = \frac{k}{2^i}, \quad k \in \{0, 1, \dots, 2^i\}. \quad (10.3.1)$$

Нехай $k = (2m-1)2^{i-s} \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$. Позначимо $\hat{a}_k^i = \hat{a}_{2m-1}^s$. Зрозуміло, що $g_0(\hat{a}_k^i) = g_0(\hat{a}_{2m-1}^s) = (2m-1)/2^s = k/2^i$.

Позначимо $J_k^i = [a_k^i, \hat{a}_k^i]$, $k \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$. З побудови легко слідує, що якщо число $k = (2m-1)2^{i-s}$ є парним, то $J_k^i \subset J_{2m-1}^s$. Тому

$$([0, 1] \times [0, \frac{1}{2^{i-1}}]) \cap \left(\bigcup_{s=1}^{i-1} \bigcup_{m=1}^{2^{s-1}} J_{2m-1}^s \right) = \bigcup_{k=1}^{2^i-1} J_k^i. \quad (10.3.2)$$

Функції $g_0, f_{i-1}(\cdot, 1/2^{i-1}) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є неспадними за побудовою. При цьому виконуються рівності

$$\begin{aligned} 0 < f_{i-1}(a_1^i) < \dots < f_{i-1}(a_{2^i-1}^i) < 1, \\ 0 < g_0(\hat{a}_1^i) < \dots < g_0(\hat{a}_{2^i-1}^i) < 1. \end{aligned}$$

Внаслідок цього відрізки J_k^i , $k \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$, попарно неперетинні. Отже (див. рівність (10.3.2)), відрізки з набору J_{2k-1}^s , $s \in \{1, \dots, i\}$, $k \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}$, попарно неперетинні.

Покладемо $f_i|_{D^{i-1}} = f_{i-1} : D^{i-1} \rightarrow \mathbb{R}$, зокрема

$$f_i(z) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \text{pr}_1(z) = 0, \\ 1, & \text{якщо } \text{pr}_1(z) = 1. \end{cases}$$

Нехай ще $f_i(z) = k/2^i$, якщо $z \in J_k^i \cap B^i$, $k \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$.

Нехай $b_0^i = (0, 1/2^i)$, $b_{2^i}^i = (1, 1/2^i)$. Позначимо через b_k^i точку перетину відрізків $[b_0^i, b_{2^i}^i] = [0, 1] \times \{1/2^i\}$ та J_k^i , $k \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$.

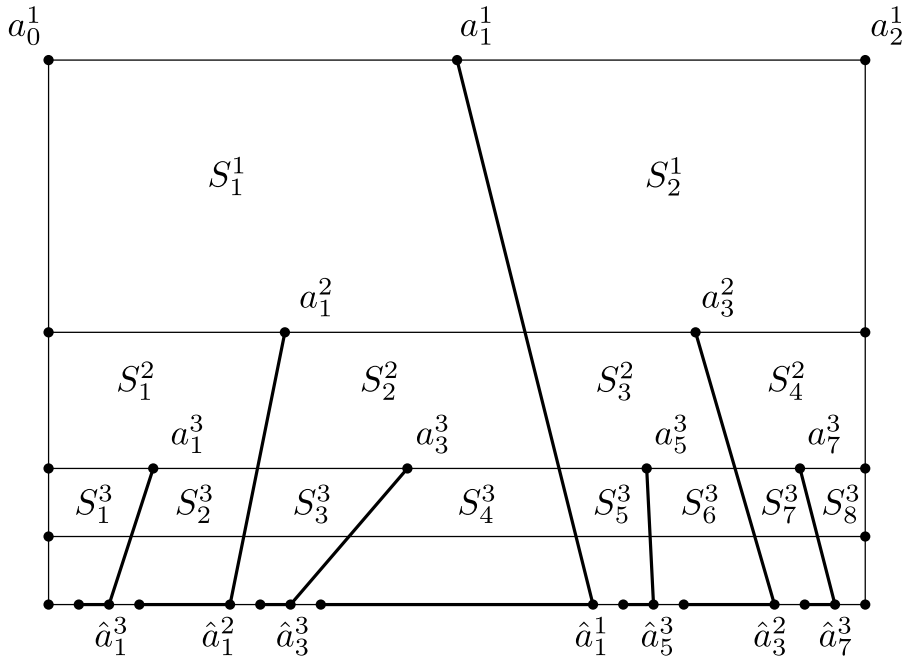


Рис. 10.3.1: Множини $J_{2^m-1}^s$ і чотирикутники S_k^i , на які вони ділять смуги B^i .

Відрізки J_k^i розбивають прямокутник

$$B^i = [0, 1] \times [1/2^i, 1/2^{i-1}]$$

на трапеції $S_1^i, \dots, S_{2^i}^i$ (див. Рис. 10.3.1). Вершинами чотирикутника S_k^i є точки $a_{k-1}^i, a_k^i, b_k^i, b_{k-1}^i, k \in \{1, \dots, 2^i\}$ (Рис. 10.3.2).

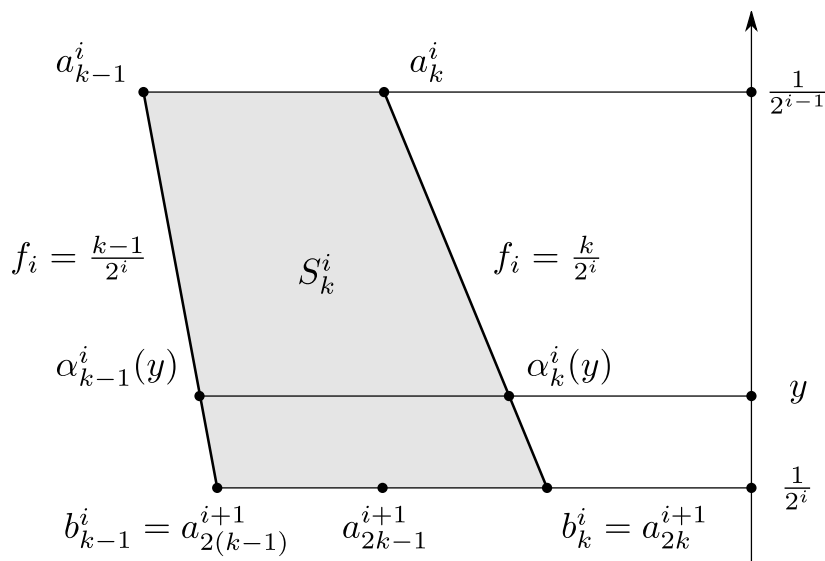
Нехай $[\alpha_{k-1}^i(y), \alpha_k^i(y)]$ є перетином горизонтального відрізка $[0, 1] \times \{y\}$, $y \in [1/2^i, 1/2^{i-1}]$, з чотирикутником S_k^i . В точках

$$\alpha_k^i(y) \in (\{0\} \times [0, 1]) \cup (\{1\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{m=1}^{2^i-1} J_m^i,$$

функція f_i вже означена,

$$f_i(\alpha_k^i(y)) = \frac{k}{2^i}, \quad k \in \{1, \dots, 2^i\}. \tag{10.3.3}$$

Також згідно нашим попереднім припущенням функція f_i означена і є афінною на верхній стороні $[a_{k-1}^i, a_k^i]$ кожної трапеції $S_k^i, k \in \{1, \dots, 2^i\}$.

Рис. 10.3.2: Чотирикутник S_k^i .

Продовжимо f_i афінним чином на відрізки

$$[\alpha_{k-1}^i(y), \alpha_k^i(y)], \quad y \in [1/2^i, 1/2^{i-1}], \quad k \in \{1, \dots, 2^i\}.$$

Відмітимо, що зокрема, f_i афінна на кожному відрізку $[b_{k-1}^i, b_k^i]$.

Легко бачити, що f_i неперервна на кожному S_k^i . Також неперервна згідно нашому припущенню і функція $f_i|_{D^{i-1}} = f_{i-1}$. Оскільки множини D^{i-1} , S_k^i , $k \in \{1, \dots, 2^i\}$, утворюють скінченне замкнене покриття простору D^i , то функція f_i неперервна на D^i .

Зрозуміло, що $f_i|_{\partial M} = f_{i-1}|_{\partial M}$, оскільки $\partial M \subset D^{i-1}$. Тому $f_i|_{\partial M} = f_0$.

За побудовою f_i зростає від $(k-1)/2^i$ до $k/2^i$ на кожному з відрізків $[\alpha_{k-1}^i(y), \alpha_k^i(y)]$, $y \in [1/2^i, 1/2^{i-1}]$, див. (10.3.3). Об'єднуючи це зауваження з нашими попередніми припущеннями відносно функції f_{i-1} приходимо до висновку, що функція $f_i(\cdot, y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ зростає від 0 до 1 при кожному фіксованому $y \in [1/2^i, 1]$.

Для кожного $k \in \{1, \dots, 2^i - 1\}$ існує єдине розкладення $k = (2m-1)2^{i-s}$.

За побудовою $J_k^i \cap B^i = J_{2m-1}^s \cap B^i$. Отже,

$$J_{2m-1}^s \cap B^i \subset f_i^{-1}\left(\frac{k}{2^i}\right) = f_i^{-1}\left(\frac{2m-1}{2^s}\right),$$

$$s \in \{1, \dots, i\}, \quad m \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}.$$

З попередніх припущень тепер видно, що

$$J_{2m-1}^s \cap D^i \subset f_i^{-1}\left(\frac{2m-1}{2^s}\right), \quad s \in \{1, \dots, i\}, \quad m \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}.$$

Зокрема, $f_i(\hat{a}_{2k-1}^s) = g_0(\hat{a}_{2k-1}^s)$.

Повторимо наведену побудову для кожного $i \in \mathbb{N}$. Отримаємо набір неперервних функцій $f_i : D^i \rightarrow \mathbb{R}$, таких що $f_i|_{D^s} = f_s$ при $s < i$.

Очевидно, $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} D^i$, тому означена функція

$$f : M \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(z) = f_i(z), \quad \text{якщо } z \in D^i.$$

Оскільки для кожного z , такого що $\text{pr}_2(z) > 0$, існує $s \in \mathbb{N}$, для якого $z \in \text{Int } D^s$ в просторі M , то функція f є неперервною на множині $[0, 1] \times (0, 1]$. Неперервність f на нижній стороні квадрату ми перевіримо нижче.

Паралельно з функціями f_i ми побудували набір точок a_{2k-1}^i , $i \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$, що відповідають умовам $\text{pr}_1(a_{2k-1}^i) \in (0, 1)$, $\text{pr}_2(a_{2k-1}^i) = 1/2^{i-1}$. Також ми побудували набір неперетинних відрізків $J_{2k-1}^i = [a_{2k-1}^i, \hat{a}_{2k-1}^i]$, таких що

$$J_{2k-1}^i \subset f^{-1}\left(\frac{2k-1}{2^i}\right), \quad i \in \mathbb{N}, \quad k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}.$$

За побудовою для кожного фіксованого $y \in (0, 1]$ функція $f(\cdot, y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ зростає від 0 до 1 на відрізку $[0, 1]$.

Фіксуємо $s \in \mathbb{N}$, а також $m \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}$. Розглянемо відрізок $J_{2m-1}^s = [a_{2m-1}^s, \hat{a}_{2m-1}^s]$ і прямокутники

$$R^s = [0, 1] \times [0, \frac{1}{2^{s-1}}], \quad R_0^s = [0, 1] \times (0, \frac{1}{2^{s-1}}).$$

Нехай $\alpha_{2m-1}^s(y)$ є точкою перетину відрізків J_{2m-1}^s та $[0, 1] \times \{y\}$, $y \in [0, 1/2^{s-1}]$.

Відрізок J_{2m-1}^s розбиває полосу R_0^s на дві частини

$$\begin{aligned} Q_{2m-1}^s(-) &= \{z \in R_0^s \mid \text{pr}_1(z) < \text{pr}_1(\alpha_{2m-1}^s(\text{pr}_2(z)))\}, \\ Q_{2m-1}^s(+) &= \{z \in R_0^s \mid \text{pr}_1(\alpha_{2m-1}^s(\text{pr}_2(z))) < \text{pr}_1(z)\}, \end{aligned} \quad (10.3.4)$$

що лежать, відповідно, по ліву і праву сторону від нього. За побудовою

$$f(Q_{2m-1}^s(-)) \subset [0, \frac{2m-1}{2^s}] \quad f(Q_{2m-1}^s(+)) \subset (\frac{2m-1}{2^s}, 1]. \quad (10.3.5)$$

Доведемо, що f неперервна в кожній точці $z \in [0, 1] \times \{0\}$.

Нехай спочатку $z \in (0, 1) \times \{0\}$. Тоді $f(z) = g_0(z) = \alpha \in (0, 1)$.

Фіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки всі числа $(2k-1)/2^i$, $i \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}$, різні і при фіксованому $i \in \mathbb{N}$ розбивають $[0, 1]$ на відрізки довжини $1/2^i$, то існують $s \in \mathbb{N}$ та $m \in \{1, \dots, 2^{s-1}\}$, для яких

$$\alpha - \varepsilon < \frac{2m-1}{2^s} < \alpha < \frac{2m+1}{2^s} < \alpha + \varepsilon.$$

Неперетинні відрізки J_{2m-1}^s та J_{2m+1}^s розбивають прямокутник R^s на три частини. Розглянемо множину

$$T = \{z \in R^s \mid \text{pr}_1(\alpha_{2m-1}^s(\text{pr}_2(z))) < \text{pr}_1(z) < \text{pr}_1(\alpha_{2m+1}^s(\text{pr}_2(z)))\}$$

точок R^s , що лежать між відрізками J_{2m-1}^s та J_{2m+1}^s . Це трапеція з вершинами a_{2m-1}^s , a_{2m+1}^s , \hat{a}_{2m+1}^s , \hat{a}_{2m-1}^s .

За побудовою точка z лежить на нижній основі цієї трапеції, причому $z \notin \{\hat{a}_{2m-1}^s, \hat{a}_{2m+1}^s\}$. Внаслідок цього знайдеться окіл U точки z у просторі M , що належить T .

Функція $f|_{[0,1] \times \{0\}} = g_0$ неспадна, тому

$$f(U \cap ([0, 1] \times \{0\})) \subseteq [f(\hat{a}_{2m-1}^s), f(\hat{a}_{2m+1}^s)] = [\frac{2m-1}{2^s}, \frac{2m+1}{2^s}].$$

Об'єднуючи це зауваження і співвідношення (10.3.4) та (10.3.5) робимо ви-

СНОВОК, ЩО

$$f(U) \subset f(T) = \left[\frac{2m-1}{2^s}, \frac{2m+1}{2^s} \right] \subset (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon).$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ може бути обрано довільним чином, то функція f неперервна в точці z .

Якщо z — одна из точок $\{(0, 0), (1, 0)\}$, то неперервність f в z доводиться аналогічно, з очевидними змінами.

Отже, функція f неперервна на M .

Знайдемо тепер множину $D(S, \partial M)$ S -відділених точок і її замикання $\overline{D(S, \partial M)}$.

Легко бачити (див. (10.3.4)), що для кожного $x \in [0, r_{2m-1}^s] = [0, \text{pr}_1(\hat{a}_{2m-1}^s))$ існує відкритий окіл $U(z)$ точки $z = (x, 0)$ в M , такий що $U(z) \cap \text{Int } M \subset Q_{2m-1}^s$. Отже, для довільного $y \in U(z) \cap \text{Int } M$ виконується нерівність $f(y) < (2m - 1)/2^s$.

Таким чином, всі точки напівінтервала

$$A_{2m-1}^s = [l_{2m-1}^s, r_{2m-1}^s) \times \{0\} = (I_{2m-1}^s \times \{0\}) \setminus \{\hat{a}_{2m-1}^s\}$$

є S -відділеними, оскільки належать за побудовою множині рівня $f^{-1}((2m - 1)/2^s)$. Точка \hat{a}_{2m-1}^s не є S -відділеною, тому що для довільного околу V цієї точки

$$V \cap \text{Int } M \cap f^{-1}\left(\frac{2m-1}{2^s}\right) \supset V \cap \text{Int } M \cap J_{2m-1}^s \neq \emptyset.$$

Помітимо ще, що всі точки множини $\{1\} \times [0, 1] = f^{-1}(1)$ також є S -відділеними.

В роботі [24] доведено наступне просте твердження: якщо точка $z \in \partial M$ є S -відділеною, то z є точкою локального максимуму функції $f|_{\partial M}$. Внаслідок цього для нашого приклада

$$D(S, \partial M) = (\{1\} \times [0, 1]) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^{i-1}\}} A_{2k-1}^i.$$

З іншого боку легко бачити, що

$$\overline{D(S, \partial M)} = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, 1]).$$

Ця множина зв'язна і $f|_{\overline{D(S, \partial M)}} \not\equiv \text{Const}$.

Для завершення побудови приклада нам лишається перевірити, що f є F-функцією.

Неперервність f ми вже довели.

Перевіримо, що f відкрита на $\text{Int } M = (0, 1) \times (0, 1)$.

Нехай $z = (x, y) \in \text{Int } M$. За побудовою функція $f(\cdot, y) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотонна, тому для кожного досить малого $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності

$$f(x - \varepsilon, y) < f(z) < f(x + \varepsilon, y)$$

і образ множини

$$I_\varepsilon(z) = \{w \in M \mid x - \varepsilon < \text{pr}_1(w) < x + \varepsilon, \text{pr}_2(w) = y\}$$

міститься у інтервалі $(f(x - \varepsilon, y), f(x + \varepsilon, y)) \ni f(z)$. Оскільки функція f неперервна, то вона приймає на інтервалі $I_\varepsilon(z)$ всі проміжні значення і

$$f(I_\varepsilon(z)) = (f(x - \varepsilon, y), f(x + \varepsilon, y)).$$

Зрозуміло, що для кожного околу U точки z знайдеться $\varepsilon > 0$, таке що $I_\varepsilon(z) \subset U$. Тому $f(U)$ містить разом з точкою $f(z)$ також її відкритий окіл $(f(x - \varepsilon, y), f(x + \varepsilon, y))$.

Таким чином f є відкритим у точці $z \in \text{Int } M$. Внаслідок довільності у виборі z відображення f є відкритим на $\text{Int } M$.

Доведемо тепер локальну зв'язність множин рівня f у точках множини $\text{Int } M$.

Нехай $z = (x, y) \in \text{Int } M$. Тоді існує $i \in \mathbb{N}$, для якого

$$z \in (0, 1) \times \left(\frac{1}{2^i}, 1\right) \subset \bigcup_{s=1}^i B^s.$$

За побудовою для кожного $s \in \mathbb{N}$ множина $M^z \cap B^s = f^{-1}(f(z)) \cap B^s$ є прямолінійним відрізком, таким що $\text{pr}_2(M^z \cap B^s) = [1/2^s, 1/2^{s-1}]$. Тому множина

$$M^z \cap \left(\bigcup_{s=1}^i B^s\right)$$

є скінченною ламаною лінією, отже вона локально-зв'язна. Оскільки $(0, 1) \times (1/2^i, 1)$ є відкритою підмножиною $\bigcup_{s=1}^i B^s$ у просторі M , то M^z є локально-зв'язною в кожній точці множини $(0, 1) \times (1/2^i, 1)$. Зокрема, і у точці z .

Внаслідок довільності у виборі $z \in \text{Int } M$ кожна множина рівня функції f є локально-зв'язною в точках $\text{Int } M$.

Таким чином, функція f є F-функцією.

Розділ 11

Про спряжені псевдогармонічні функції

Означення 11.1.1 Нехай U і V — деякі неперервні дійснозначні функції на поверхні M^2 . Скажемо, що V є відкритою на множинах рівня U , якщо для кожного $c \in U(M^2)$ відображення

$$V|_{U^{-1}(c)} : U^{-1}(c) \rightarrow \mathbb{R}$$

є відкритим у просторі $U^{-1}(c)$ у топології, індукованій з M^2 .

Теорема 11.1.2 ([57]) Нехай U — псевдогармонічна функція на M^2 . Для того, щоб дійснозначна неперервна функція $V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ була спряженою псевдогармонічною функцією для U на M^2 необхідно і досить, щоб V була відкритою на множинах рівня U .

Нагадаємо наступне

Означення 11.1.3 (див. [22]) Відображення $G : M_1^2 \rightarrow M_2^2$ поверхні M_1^2 у поверхню M_2^2 називається внутрішнім, якщо воно відповідає таким умовам:

- 1) G відкрите, тобто образ кожної відкритої підмножини M_1^2 є відкритим у M_2^2 ;
- 2) для кожного $p \in M_2^2$ повний прообраз $G^{-1}(p)$ не містить ніякого невідродженого континууму (замкненої зв'язної підмножини M_1^2).

Зауваження 11.1.4 *I. Берштейн у статті [104] розглядає аналог внутрішніх відображень для випадку відображень $G : X^r \rightarrow X^s$ просторів, що мають розмірності r і s (не обов'язково $r = s$), і доводить таку теорему: для того, щоб дійсна функція $v : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ була спряженою псевдогармонічною функцією для псевдогармонічної функції $u : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ необхідно й досить, щоб відображення v було внутрішнім на кожній компоненті зв'язності всіх множин рівня u .*

Для доведення Теорема 11.1.2 нам потрібна наступна

Лема 11.1.5 *Нехай U — псевдогармонічна функція на M^2 . Нехай дійснозначна неперервна функція V є відкритою на множині рівня U .*

Тоді відображення $F : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$F(p) = U(p) + iV(p), \quad p \in M^2$$

є внутрішнім.

Доведення цієї леми див. у Додатку **II**.

Доведення Теорема 11.1.2. Необхідність. Нехай $U, V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є спряженими псевдогармонічними функціями на M^2 (див. Означення 1.1.3 і 1.1.4).

Очевидно, V неперервна на M^2 . Припустимо, що всупереч твердженню Теорема існує таке число $c \in \mathbb{R}$, що V не є відкритою на множині рівня $\Gamma_c = U^{-1}(c) \subset M^2$, тобто відображення $V_c = V|_{\Gamma_c} : \Gamma_c \rightarrow \mathbb{R}$ не є відкритим на Γ_c у топології індукованій з M^2 .

Перевіримо, що V_c має в деякій точці $p \in \Gamma_c$ локальний екстремум.

Відмітимо, що простір Γ_c локально лінійно зв'язний, тобто для кожної точки $a \in \Gamma_c$ і її відкритого околу Q існує окіл $\hat{Q} \subseteq Q$ точки a , такий що кожну пару точок $b_1, b_2 \in \hat{Q}$ можна з'єднати неперервною кривою в Q . Це зразу слідує з зауваження, що йде за Означенням 1.1.1.

Оскільки за нашим припущенням відображення V_c не є відкритим, то існує відкрита підмножина O множини Γ_c , образ якої $R = V_c(O)$ не є відкритою підмножиною \mathbb{R} . Отже існує точка $d \in R \setminus \text{Int } R$. Зафіксуємо $p \in V_c^{-1}(d) \cap O$.

Покажемо, що p є точкою локального екстремуму V_c . Зафіксуємо окіл $\hat{O} \subseteq O$ точки p , такий що кожна пара точок $b_1, b_2 \in \hat{O}$ може бути з'єднана неперервною кривою $\beta_{b_1, b_2} : I \rightarrow \Gamma_c$, яка відповідає співвідношенням $\beta(0) = b_1$, $\beta(1) = b_2$ і $\beta(I) \subseteq O$. Оскільки образ лінійно зв'язної множини під дією неперервного відображення також є лінійно зв'язним, то виконуються наступні включення

$$\begin{aligned} (V_c(b_1), V_c(b_2)) &\subset V_c(I) \quad \text{якщо} \quad V_c(b_1) < V_c(b_2), \\ (V_c(b_2), V_c(b_1)) &\subset V_c(I) \quad \text{якщо} \quad V_c(b_2) > V_c(b_1). \end{aligned}$$

Очевидно, точка p не є внутрішньою точкою множини $V_c(\hat{O})$, оскільки за побудовою вона не є внутрішньою точкою $V_c(O)$ і $V_c(\hat{O}) \subseteq V_c(O)$. Внаслідок цього не існує пари точок $b_1, b_2 \in \hat{O}$, таких що $V_c(b_1) < V_c(p) < V_c(b_2)$ і або $V(b) \leq V(p)$ для всіх $b \in \hat{O}$ або $V(b) \geq V(p)$ для всіх $b \in \hat{O}$. Тобто p є точкою локального екстремума V_c .

Оскільки V є спряженою псевдогармонічною функцією для U в точці p (див. Означення 1.1.3), то існують окіл N точки p в M^2 і гомеоморфізм $T : D \rightarrow N$, такі що відображення $f : D \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(z) = u(z) + iv(z), \quad z \in D$$

є голоморфним на D . Тут $u = U \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}$ і $v = V \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Не обмежуючи загальності ми можемо вибрати окіл N настільки малим, щоб або $V(b) = V_c(b) \leq V_c(p) = V(p)$ для кожного $b \in N \cap \Gamma_c$, або $V(b) \geq V(p)$ для всіх $b \in N \cap \Gamma_c$.

Нехай для визначеності p є локальним максимумом функції V_c і $V(b) \leq V(p)$ для кожного $b \in N \cap \Gamma_c$. Випадок коли p є локальним мінімумом V_c розглядається аналогічно.

З одного боку, зі сказаного вище слідує, що

$$(\{U(p)\} \times (V(p), +\infty)) \cap f(D) = \emptyset,$$

оскільки за побудовою $u^{-1}(U(p)) = T^{-1}(\Gamma_c \cap N)$ і $v(z) = V(T(z)) \leq V(p)$ для

всіх $z \in T^{-1}(\Gamma_c \cap N)$. Тому точка $U(p) + iV(p) = f(T^{-1}(p))$ не є внутрішньою точкою множини $f(D)$.

З іншого боку відомо, що голоморфне відображення f є відкритим, отже точка $f(T^{-1}(p))$ має бути внутрішньою точкою області $f(D)$.

Отримали суперечність з нашим початковим припущенням, отже V відкрита на множинах рівня U .

Достатність. Нехай U — псевдогармонічна функція на M^2 і неперервна функція $V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є відкритою на множинах рівня U .

З Лема 11.1.5 слідує, що відображення $F : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $F(p) = U(p) + iV(p)$, $p \in M^2$ є внутрішнім.

Нехай $p \in M^2 \cap N$ є простим околom точки p в M^2 . Тоді існує гомеоморфізм $T : D \rightarrow N$. Зрозуміло, що для відкритої множини N відображення $F_N = F|_N : N \rightarrow \mathbb{C}$ є внутрішнім і його композиція $F_N \circ T = F \circ T : D \rightarrow \mathbb{C}$ з гомеоморфізмом T теж є внутрішнім відображенням.

З теореми Стоїлова слідує, що існує комплексна структура на D , така що відображення $F \circ T$ є голоморфним у цій комплексній структурі (see [22]). Але з теореми про уніформізацію (див. [105]) слідує, що однозв'язна область має єдину комплексну структуру. Отже, відображення $F \circ T$ голоморфне на D у стандартній комплексній структурі. Внаслідок цього функції $u = \operatorname{Re}(F \circ T) = U \circ T$ і $v = \operatorname{Im}(F \circ T) = V \circ T$ є спряженими гармонічними функціями на D . Тому V є спряженою псевдогармонічною функцією для U в точці p .

Враховуючи довільність у виборі $p \in M^2$, приходимо до висновку, що V є спряженою псевдогармонічною функцією для U на M^2 . \square

Наслідок 11.1.6 *Нехай $U, V : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — спряжені псевдогармонічні функції на M^2 .*

Тоді на M^2 існує комплексна структура, відносно якої U і V є спряженими гармонічними функціями на M^2 .

Доведення. Це твердження слідує з Теореми 11.1.2, Лема 11.1.5 і теореми Стоїлова, яка стверджує, що на M^2 існує комплексна структура, відносно якої внутрішнє відображення $F(p) = U(p) + iV(p)$, $p \in M^2$ є голоморфним (див. [22]). \square

Розділ 12

Квазі-ізолювані точки гладких функцій в \mathbb{R}^n

12.1 Послідовності вкладених гіперповерхонь

Нехай \mathbb{R}^n — n -вимірний Евклідов простір зі стандартною метрикою ρ . Для обмеженої множини $A \subset \mathbb{R}^n$ покладемо

$$\text{diam}(A) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Означення 12.1.1 *Нехай $\mathbf{H}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — зв'язна замкнена гіперповерхня (гладкий компактний підмноговид вимірності $n - 1$, що має порожню границю). Скажемо, що \mathbf{H}^{n-1} обмежує точку p у \mathbb{R}^n , якщо $p \notin \mathbf{H}^{n-1}$ і кожен шлях γ , що з'єднує p і $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ перетинає \mathbf{H}^{n-1} , якщо $\rho(p, \mathbf{x}) > \text{diam}(\mathbf{H}^{n-1})$.*

Відмітимо, що замкнена зв'язна гіперповерхня у Евклідовому просторі завжди є орієнтованою і розбиває простір на дві компоненти, одна з яких обмежена, а інша — ні [106]. Назвемо обмежену компоненту доповнення внутрішньою компонентою.

Означення 12.1.2 *Назвемо послідовність зв'язних замкнених гіперповерхонь \mathbf{H}_i^{n-1} вкладеною, якщо \mathbf{H}_{i+1}^{n-1} міститься у внутрішній компоненті доповнення $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{H}_i^{n-1}$ для кожного $i \in \mathbb{N}$.*

Нехай $\mathbf{H}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — гіперповерхня, що обмежує точку p у \mathbb{R}^n . Позначимо через

$$d(p, \mathbf{H}^{n-1}) = \max_{y \in \mathbf{H}^{n-1}} \{\|p - y\|\}$$

Хаусдорфову відстань між точкою p і \mathbf{H}^{n-1} .

Означення 12.1.3 *Послідовність вкладених гіперповерхонь $\{\mathbf{H}_i^{n-1}\}$, така що кожна \mathbf{H}_i^{n-1} обмежує точку p збігається до p у \mathbb{R}^n , якщо $d(p, \mathbf{H}_i^{n-1}) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.*

Регулярним значенням гладкої функції F називається таке значення, що диференціал F ненульовий у кожній точці з прообразу цього значення.

Максимальні зв'язні підмножини (впорядковані за включенням) непорожнього топологічного простору називаються його *компонентами зв'язності*.

Означення 12.1.4 *Нехай $z = F(\mathbf{x})$ — неперервна функція, означена в області $G \subset \mathbb{R}^n$. Точка $\mathbf{y} \in G$ є квазі-ізолюваною для функції $z = F(\mathbf{x})$, якщо $\{\mathbf{y}\}$ є компонентою зв'язності множини $F^{-1}(F(\mathbf{y}))$.*

Твердження 12.1.5 *Нехай $z = F(\mathbf{x})$ — неперервна функція, означена у області $G \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ і $\mathbf{y} \in G$. Для того, щоб точка \mathbf{y} була локальним екстремумом функції F необхідно й достатньо, щоб \mathbf{y} була ізолюваною точкою множини $F^{-1}(F(\mathbf{y}))$.*

Доведення. Необхідність очевидна.

Достатність слідує з наступних міркувань. Розглянемо область $U \subset G$, таку, що $F^{-1}(F(\mathbf{y})) \cap U = \mathbf{y}$. Нехай \mathbf{y}_1 і \mathbf{y}_2 — дві точки у G , такі що $F(\mathbf{y}_1) > F(\mathbf{y}) > F(\mathbf{y}_2)$. Розглянемо неперервний шлях $\gamma(t)$ в U , для якого $\gamma(0) = \mathbf{y}_2$, $\gamma(1) = \mathbf{y}_1$ і $\gamma(t) \cap \mathbf{y} = \emptyset$. Нехай $F(\gamma(t))$ — обмеження функції $z = F(\mathbf{x})$ на шлях $\gamma(t)$. Оскільки $F(\gamma(1)) > F(\gamma(0))$ і функція $F(\gamma(t))$ неперервна, то існує t_0 , таке що $F(\gamma(t_0)) = F(\mathbf{y})$. Але це суперечить вибору шляху $\gamma(t)$.

Отже, для кожного $\mathbf{y}_1 \in U$ маємо або $F(\mathbf{y}_1) > F(\mathbf{y})$ і тоді \mathbf{y} є локальним мінімумом, або $F(\mathbf{y}_1) < F(\mathbf{y})$ і точка \mathbf{y} є локальним максимумом. \square

Твердження 12.1.6 Припустимо, що $z = F(\mathbf{x})$ є C^r -гладкою функцією на області $G \subset \mathbb{R}^n$ і точка $\mathbf{y} \in G$ є квазі-ізолюваною для функції $z = F(\mathbf{x})$. Тоді \mathbf{y} є критичною точкою функції $z = F(\mathbf{x})$.

Доведення. Нехай z не є критичною точкою F . Тоді у околі $U \cap G$ точки \mathbf{y} існує гладка заміна координат, яка робить F лінійною на U . Але це суперечить припущенню, що \mathbf{y} є квазі-ізолюваною точкою. \square

Означення 12.1.7 (В. В. Шарко) Нехай $z = F(\mathbf{x})$ є C^r -гладкою функцією у області $G \subset \mathbb{R}^n$ і $\mathbf{y} \in G$. Нехай $F(\mathbf{y}) = a$. Функція $z = F(\mathbf{x})$ називається **L-функцією** у точці \mathbf{y} , якщо існує послідовність (a_i) регулярних значень $z = F(\mathbf{x})$, що відповідає наступним властивостям:

- i. $a_i \rightarrow a$ при $i \rightarrow \infty$;
- ii. для кожного i існує компонента зв'язності \mathbf{H}_i^{n-1} множини $F^{-1}(a_i)$, така що \mathbf{H}_i^{n-1} є гладкою гіперповерхнею, що обмежує точку \mathbf{y} ;
- iii. діаметри \mathbf{H}_i^{n-1} прямують до 0, при $i \rightarrow \infty$.

Твердження 12.1.8 Нехай F є L-функцією у точці $\mathbf{y} \in G$. Тоді \mathbf{y} є критичною точкою функції $z = F(\mathbf{x})$.

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай точка \mathbf{y} є регулярною точкою функції $z = F(\mathbf{x})$. Тоді у околі U точки \mathbf{y} існує гладка заміна координат, яка робить F лінійною на U . Це суперечить існуванню гладкої гіперповерхні \mathbf{H}_i^{n-1} , що обмежує точку \mathbf{y} . \square

12.2 Існування послідовностей вкладених гіперповерхонь

Наступна теорема вказує, як будувати послідовності вкладених гіперповерхонь, що збігаються до точки, за допомогою досить гладкої функції на відкритій області $G \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 12.2.1 ([7]) Нехай G — область в \mathbb{R}^n . Припустимо, що $F \in C^n(G)$.

Для того, щоб F була \mathbf{L} -функцією у точці $x_0 \in G$ необхідно й достатньо, щоб x_0 була квазі-ізолюваною точкою F .

Доведення цієї теореми наведено у Підрозділі 12.3.

Наслідок 12.2.2 Нехай $z = F(\mathbf{x})$ є C^n -гладкою функцією у області $G \subset \mathbb{R}^n$. Позначимо через $\Sigma(F(\mathbf{x}))$ множину критичних точок функції $z = F(\mathbf{x})$.

Нехай $\mathbf{y} \in G$ — квазі-ізолювана точка функції $z = F(\mathbf{x})$. Припустимо також, що \mathbf{y} не є ізолюваною точкою множини рівня $F^{-1}(F(\mathbf{y}))$.

Тоді $\mathbf{y} \in \Sigma(F(\mathbf{x}))$ і \mathbf{y} не є ізолюваною точкою множини $\Sigma(F(\mathbf{x}))$.

Доведення. Помітимо, що \mathbf{y} є критичною точкою F відповідно до Твердження 12.1.6.

Нехай \mathbf{y} є ізолюваною критичною точкою. Тоді існує $\varepsilon > 0$, таке що відкритий диск $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \varepsilon\} \subset G$ не містить інших критичних точок F .

Оскільки \mathbf{y} є квазі-ізолюваною, то з Теореми 12.2.1 слідує, що F є \mathbf{L} -функцією у точці \mathbf{y} . Отже, існують регулярне значення a функції F і гіперповерхня $\mathbf{H}^{n-1} \subset U \cap F^{-1}(a)$, такі що \mathbf{y} міститься у внутрішній компоненті W множини $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{H}^{n-1}$. Легко бачити, що $\overline{W} \subset U$. Помітимо також, що $\mathbf{y} \notin F^{-1}(a)$, оскільки \mathbf{y} є критичною точкою F і не може міститися в регулярній множині рівня.

Компакт \overline{W} має внутрішність W і межу \mathbf{H}^{n-1} . Функція F неперервна на \overline{W} , отже вона досягає своїх максимального та мінімального значень на \overline{W} . Нехай

$$M = \max_{\mathbf{x} \in \overline{W}} F(\mathbf{x}), \quad m = \min_{\mathbf{x} \in \overline{W}} F(\mathbf{x}).$$

Якщо $m = M$, то F є постійною на \overline{W} , що неможливо, оскільки $\mathbf{H}^{n-1} \subset F^{-1}(a)$ і $\mathbf{y} \notin F^{-1}(a)$. Отже, або $m \neq a$, або $M \neq a$.

Припустимо, що $m \neq a$.

Очевидно, $\emptyset \neq F^{-1}(m) \cap \overline{W} \subset W$ і $(F^{-1}(m) \cap \overline{W}) \subset \Sigma(F(\mathbf{x}))$, оскільки кожна точка цієї множини є локальним мінімумом F . Отже, якщо $F(\mathbf{y}) \neq m$

то U містить інші критичні точки F , відмінні від \mathbf{y} . Якщо $F(\mathbf{y}) = m$, то множина $F^{-1}(m) \cap \overline{W} = F^{-1}(F(\mathbf{y})) \cap W$ є підмножиною $\Sigma(F(\mathbf{x}))$ і також містить більше однієї точки, оскільки \mathbf{y} не є ізольованою точкою своєї множини рівня. Це суперечить нашому початковому припущенню, що \mathbf{y} є ізольованою критичною точкою F .

Випадок $M \neq a$ розглядається аналогічно.

З довільності у виборі $\varepsilon > 0$ слідує, що \mathbf{y} не є ізольованою точкою множини $\Sigma(F(\mathbf{x}))$. \square

12.3 Доведення Теорема 12.2.1.

Перед тим, як перейти до доведення теореми, розглянемо декілька допоміжних тверджень.

12.3.1 Замкнені гіперповерхні у \mathbb{R}^n .

Означення 12.3.2 (see. [47]) *Нехай X — метричний простір і $A \subset X$. Позначимо через $LC(A)$ множину всіх $x \in \overline{A}$, що відповідають наступній властивості: існує відкритий окіл G точки x як завгодно малого діаметру, такий що множина $G \cap A$ зв'язна.*

Нехай ρ — метрика на \mathbb{R}^n . Позначимо через $U_\varepsilon(A)$ ε -окіл множини $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$U_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \inf_{y \in A} (\rho(x, y)) < \varepsilon\}.$$

Лема 12.3.3 *Нехай W — область у \mathbb{R}^n . Припустимо, що межа $R = \text{Fr}(W)$ зв'язна і $R \subset LC(W)$.*

Тоді $W_\varepsilon = W \cap U_\varepsilon(R)$ зв'язна для кожного $\varepsilon > 0$.

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$.

Нехай $x_1, x_2 \in W_\varepsilon$. Візьмемо найближчі точки множини R до x_1 і x_2 . Позначимо їх x_1^0 і x_2^0 , відповідно. Нехай також $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ є неперервними кривими, що відповідають співвідношенням

- $\gamma_1(0) = x_1, \gamma_1(1) = x_1^0, \gamma_2(0) = x_2^0, \gamma_2(1) = x_2$;
- $\gamma_1[0, 1) \cup \gamma_2(0, 1] \subset W_\varepsilon$.

Наприклад, можемо взяти $\gamma_1(t) = (1-t)x_1 + tx_1^0, \gamma_2(t) = (1-t)x_2^0 + tx_2, t \in I$.

Скористаємось включенням $R \subset LC(W)$ і виберемо для кожного $x \in R$ відкритий окіл $G(x)$ у \mathbb{R}^n , який міститься у $U_\varepsilon(x)$, і такий що множина $V(x) = G(x) \cap W$ є зв'язною. Тоді $V(x) \subset W_\varepsilon, x \in R$.

Відомо (див. [47]), що маючи відкрите покриття зв'язного простору можна з'єднати кожну пару точок цього простору скінченним ланцюжком з елементів цього покриття. Отже, парі точок $x_1^0, x_2^0 \in R$ можна поставити у відповідність послідовність точок y_1, \dots, y_s , таку що $x_1^0 \in G(y_1), x_2^0 \in G(y_s)$ і

$$G(y_i) \cap G(y_{i+1}) \cap R \neq \emptyset \text{ для всіх } i \in \{1, \dots, s-1\}.$$

Оскільки $x_1^0 \in G(y_1)$, то $\gamma_1[0, 1) \cap G(y_1) \neq \emptyset$. З нерівності $\gamma_1[0, 1) \subset W_\varepsilon$ слідує, що $\gamma_1[0, 1) \cap V(y_1) \neq \emptyset$. Аналогічно, $\gamma_2(0, 1] \cap V(y_s) \neq \emptyset$.

Нехай $i \in \{1, \dots, s-1\}$. Непорожня множина $G(y_i) \cap G(y_{i+1}) \cap R$ міститься у $\text{Fr } W$. Тому її окіл $G(y_i) \cap G(y_{i+1})$ у \mathbb{R}^n перетинає W і $V(y_i) \cap V(y_{i+1}) \neq \emptyset$.

Отже, усі члени об'єднання

$$R = \gamma_1[0, 1) \cup V(y_1) \cup \dots \cup V(y_s) \cup \gamma_2(0, 1]$$

зв'язні і кожна пара сусідніх множин у цій послідовності має спільну точку. Внаслідок цього множина R зв'язна. Більш того, за побудовою вона належить до W_ε і містить точки $x_1 = \gamma_1(0)$ та $x_2 = \gamma_2(1)$.

З довільності у виборі $x_1, x_2 \in W_\varepsilon$ слідує, що множина W_ε є зв'язною. \square

Наслідок 12.3.4 *Припустимо, що N є зв'язною замкненою гіперповерхнею в \mathbb{R}^n . Нехай W є компонентою зв'язності доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N$.*

Тоді перетин $W_\varepsilon = W \cap U_\varepsilon(N)$ зв'язний для кожного $\varepsilon > 0$.

Доведення. Замкнена гіперповерхня в \mathbb{R}^n розділяє \mathbb{R}^n (див. [106]), тому $\mathbb{R}^n \setminus (W \cup N) \neq \emptyset$.

Розглянемо наступні функції.

$$\begin{aligned}\chi(x) &= \begin{cases} 1, & \text{коли } x \in W, \\ -1, & \text{інакше,} \end{cases} \\ \Phi(x) &= \rho(x, N), \\ \Psi(x) &= \chi(x) \cdot \Phi(x).\end{aligned}$$

Очевидно, Φ неперервна в \mathbb{R}^n і обидві функції χ і Ψ є неперервними у всіх точках відкритої множини $(\mathbb{R}^n \setminus N) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus \text{Fr } W)$.

Зрозуміло, що $N = \Psi^{-1}(0)$. Більш того, $\Phi(x) = |\Psi(x)|$, $x \in \mathbb{R}^n$. Отже, $\Psi^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) = \Phi^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$ відкрита для кожного $\varepsilon > 0$. Тому Ψ також неперервна у кожній точці $x \in N$.

Розглянемо дві підмножини N .

$$\begin{aligned}N_1 &= \{x \in N \mid \exists \varepsilon > 0 : \Psi(y) \leq 0 \quad \forall y \in U_\varepsilon(x)\} \cup \\ &\quad \cup \{x \in N \mid \exists \varepsilon > 0 : \Psi(y) \geq 0 \quad \forall y \in U_\varepsilon(x)\},\end{aligned}$$

$$N_2 = \{x \in N \mid \forall \varepsilon > 0 \exists y_1, y_2 \in U_\varepsilon(x) : \Psi(y_1)\Psi(y_2) < 0\}.$$

Очевидно, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ і $N_1 \cup N_2 = N$.

За означенням гіперповерхні для кожної точки $x \in \mathbb{R}^n$ існують окіл V_x в \mathbb{R}^n і диффеоморфізм $\psi_x : V_x \rightarrow \mathbb{R}^n$, такі що $\psi_x(V) = \mathbb{R}^n$, $\psi_x(V \cap N) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

За побудовою функція Ψ на кожній компоненті зв'язності доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N$ має фіксований знак. Отже, кожна $x \in N$ міститься в одній з множин N_1 або N_2 разом зі своїм околom $V_x \cap N$, і обидві множини N_1 та N_2 відкриті в N . Більш того, якщо $x \in N_2$ то рівно одна з двох компонент множини $V_x \setminus N$ належить до W . Внаслідок цього $N_2 \subset LC(W)$.

Відповідно до умов Наслідку, множина N є зв'язною. Отже, або $N_1 = \emptyset$ або $N_2 = \emptyset$.

Зрозуміло, що $\overline{W} \subseteq (W \cup N)$. Більш того, $\text{Fr } \overline{W} \neq \emptyset$, оскільки $\mathbb{R}^n \setminus (W \cup N) \neq \emptyset$. Легко перевірити, що $\text{Fr } \overline{W} = N_2$. Отже $N_2 \neq \emptyset$, тому $N_1 = \emptyset$ і $N = N_2 \subset LC(W)$. Остаточо, оскільки $\text{Fr } \overline{W} \subseteq \text{Fr } W \subseteq N$, то $N = \text{Fr } W$ і ми

можемо застосувати Лему 12.3.3. \square

Лема 12.3.5 *Нехай N_1 і N_2 — замкнені гіперповерхні в \mathbb{R}^n , що не перетинаються.*

Нехай V_1 і V_2 — компоненти зв'язності множин $\mathbb{R}^n \setminus N_1$ і $\mathbb{R}^n \setminus N_2$, відповідно.

Тоді множина $V_1 \cap V_2$ є зв'язною.

Доведення. Нехай $x_1, x_2 \in V_1 \cap V_2$. Перевіримо, що множина $V_1 \cap V_2$ містить зв'язну підмножину, якій належать x_1 і x_2 .

Відомо, що відкриті зв'язні підмножини \mathbb{R}^n є лінійно зв'язними. Отже, множини V_1 і V_2 лінійно зв'язні.

Нехай $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неперервна крива, що з'єднує x_1 і x_2 у V_1 , тобто $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$ і $\gamma(I) \subset V_1$.

Оскільки N_2 — замкнена гіперповерхня (компактна і без краю), вона має скінченну кількість компонент зв'язності. Позначимо їх N_2^1, \dots, N_2^m .

Нехай $\tau_1' = \inf\{t \in I \mid \gamma(t) \in N_2\}$. Оскільки N_2 замкнена в \mathbb{R}^n , то $\gamma(\tau_1') \in N_2$. Більш того $\tau_1' > 0$, тому що $x_1 = \gamma(0) \in V_1 \cap V_2$. Нехай $\gamma(\tau_1') \in N_2^{\sigma(1)}$. Позначимо $\tau_1'' = \sup\{t \in I \mid \gamma(t) \in N_2^{\sigma(1)}\}$. Тоді

- $\gamma(\tau_1'') \in N_2^{\sigma(1)}$,
- $\tau_1'' < 1$, оскільки $x_2 = \gamma(1) \in V_1 \cap V_2$,
- $\gamma(t) \notin N_2^{\sigma(1)}$ для всіх $t > \tau_1''$.

Якщо $\gamma(\tau_1'', 1] \cap N_2 \neq \emptyset$, то існує $\tau_2' = \inf\{t > \tau_1'' \mid \gamma(t) \in N_2\}$. Помітимо, що $\tau_2' > \tau_1''$. Дійсно, компакти $N_2^{\sigma(1)}$ і $N \setminus N_2^{\sigma(1)}$ мають неперетинні околиці, тому існує $\varepsilon > 0$, таке що $\gamma(t) \in N_2^{\sigma(1)}$ за умови виконання співвідношень $t \in \gamma^{-1}(N_2)$ і $|t - \tau_1''| < \varepsilon$.

Як і вище, перевіряється що $\gamma(\tau_2') \in N_2^{\sigma(2)}$ для деякого $\sigma(2) \in \{1, \dots, m\}$. За означенням $\gamma(\tau_1'', \tau_2') \cap N_2 = \emptyset$.

Позначимо $\tau_2'' = \sup\{t \in I \mid \gamma(t) \in N_2^{\sigma(2)}\}$. Тоді

- $\gamma(\tau_2'') \in N_2^{\sigma(2)}$,
- $\tau_2'' < 1$,
- $\gamma(t) \notin N_2^{\sigma(1)} \cup N_2^{\sigma(2)}$ для кожного $t > \tau_2''$.

Припустимо, що ми вже знайшли числа

$$0 < \tau'_1 \leq \tau''_1 < \tau'_2 \leq \tau''_2 < \cdots < \tau'_k \leq \tau''_k < 1, \quad (12.3.1)$$

такі що

- (a) $(\gamma[0, \tau'_1] \cup \gamma(\tau''_1, \tau'_2) \cup \cdots \cup \gamma(\tau''_{k-1}, \tau'_k)) \cap N_2 = \emptyset$;
- (b) $\gamma(\tau'_i), \gamma(\tau''_i) \in N_2^{\sigma(i)}$, $i \in \{1, \dots, k\}$;
- (c) $\gamma(t) \notin N_2^{\sigma(1)} \cup \cdots \cup N_2^{\sigma(i)}$ when $t > \tau''_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Нехай $\gamma(\tau''_k, 1] \cap N_2 \neq \emptyset$. Позначимо $\tau'_{k+1} = \inf\{t \in (\tau''_k, 1] \mid \gamma(t) \in N_2\}$.

Оскільки $\gamma(\tau''_k) \in N_2^{\sigma(k)}$ і компакт

$$\bigcup_{i=1}^k N_2^{\sigma(i)} \quad \text{і} \quad N_2 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k N_2^{\sigma(i)} \right)$$

не перетинаються, то $\tau'_{k+1} > \tau''_k$. Зрозуміло також, що $\gamma(\tau''_k, \tau'_{k+1}) \cap N_2 = \emptyset$.

Оскільки N_2 є компактом, то $\gamma(\tau'_{k+1}) \in N_2$. Отже існує $\sigma(k+1)$, для якого $\gamma(\tau'_{k+1}) \in N_2^{\sigma(k+1)}$. Позначимо $\tau''_{k+1} = \sup\{t \in I \mid \gamma(t) \in N_2^{\sigma(k+1)}\}$. Тоді

- $\gamma(\tau''_{k+1}) \in N_2^{\sigma(k+1)}$;
- $\tau''_{k+1} < 1$;
- $\gamma(t) \notin N_2^{\sigma(1)} \cup \cdots \cup N_2^{\sigma(i)}$ якщо $t > \tau''_i$, $i \in \{1, \dots, k+1\}$.

Внаслідок цього послідовність

$$0 < \tau'_1 \leq \tau''_1 < \tau'_2 \leq \tau''_2 < \cdots < \tau'_{k+1} \leq \tau''_{k+1} < 1$$

відповідає властивостям, аналогічним до (a)–(c).

Помітимо, що з (b) і (c) слідує, що всі числа $\sigma(i)$ попарно різні, $\sigma(i) \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Отже, якщо послідовність (12.3.1) задовольняє властивостям (a)–(c), то $k \leq m$. Тому існує $k \leq m$, таке що якщо послідовність (12.3.1) відповідає (a)–(c), то вона також задовольняє наступну умову:

$$\gamma(\tau''_k, 1] \cap N_2 = \emptyset.$$

Для зручності ми змінимо нумерацію компонент зв'язності N_2 так, щоб

виконувались рівності $\sigma(i) = i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Тоді послідовність (12.3.1) відповідає наступним властивостям:

- (a') $(\gamma[0, \tau'_1] \cup \gamma(\tau''_1, \tau'_2) \cup \dots \cup \gamma(\tau''_{k-1}, \tau'_k) \cup \gamma(\tau''_k, 1]) \cap N_2 = \emptyset$;
- (b') $\gamma(\tau'_i), \gamma(\tau''_i) \in N_2^i$, $i \in \{1, \dots, k\}$;
- (c') $\gamma(t) \notin N_2^1 \cup \dots \cup N_2^i$ якщо $t > \tau''_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Помітимо, що всі множини N_1, N_2^1, \dots, N_2^m компактні і попарно неперетинні. Тому існує $\varepsilon > 0$, таке що:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(N_1) \cap U_\varepsilon(N_2^i) &= \emptyset, \quad i \in \{1, \dots, m\}; \\ U_\varepsilon(N_2^i) \cap U_\varepsilon(N_2^j) &= \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Нехай W_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, є компонентою зв'язності множини $\mathbb{R}^n \setminus N_2^i$, для якої виконується нерівність $W_i \cap V_2 \neq \emptyset$. Легко бачити, що $V_2 \subseteq W_i$ для кожного i . Отже, компонента W_i визначена однозначно для кожного i , більш того $x_1, x_2 \in W_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

Помітимо, що множини

$$\begin{aligned} K'_i &= \gamma[0, \tau'_1] \cup \left(\bigcup_{j < i} N_2^j \right) \cup \left(\bigcup_{2 \leq j \leq i} \gamma(\tau''_{j-1}, \tau'_j) \right), \\ K''_i &= \gamma(\tau''_i, 1] \end{aligned}$$

є зв'язними для всіх $i \in \{1, \dots, m\}$, оскільки всі N_2^j зв'язні і виконуються умови (b').

Також справедливе співвідношення $K'_i \cup K''_i \subset W_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Дійсно, з одного боку з (a') слідує, що $K'_i \cap N_2^i = \emptyset$, а з (c') випливає $K''_i \cap N_2^i = \emptyset$; з іншого боку, $x_1 = \gamma(0) \in K'_i \cap W_i$ і $x_2 = \gamma(1) \in K''_i \cap W_i$.

Внаслідок цього

$$\gamma(\tau''_{i-1}, \tau'_i) \cup \gamma(\tau''_i, \tau'_{i+1}) \subset W_i, \quad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Разом з умовою (b') це співвідношення приводить до нерівностей

$$\gamma(\tau''_{i-1}, \tau'_i) \cap W_{i,\varepsilon} \neq \emptyset, \quad \gamma(\tau''_i, \tau'_{i+1}) \cap W_{i,\varepsilon} \neq \emptyset, \quad i \in \{1, \dots, k\}. \quad (12.3.2)$$

Тут $\tau_0'' = 0$, $\tau_{k+1}' = 1$, $W_{i,\varepsilon} = W_i \cap U_\varepsilon(N_2^i)$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

З Наслідку 12.3.4 і співвідношень (12.3.2) випливає, що множина

$$K = \gamma[0, \tau_1'] \cup W_{1,\varepsilon} \cup \gamma(\tau_1'', \tau_2') \cup \dots \cup \gamma(\tau_{k-i}'', \tau_k') \cup W_{k,\varepsilon} \cup \gamma(\tau_k'', 1]$$

є зв'язною. Дійсно, всі множини в цьому об'єднанні є зв'язними, а з (12.3.2) слідує, що кожні дві сусідні множини у цьому ланцюжку перетинаються.

Додатково, за вибором $\varepsilon > 0$ маємо

$$W_{i,\varepsilon} \cap (N_1 \cup N_2) = \emptyset, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Тому з вибору γ і з умов (а') слідує, що $K \cap (N_1 \cup N_2) = \emptyset$.

Отже, ми побудували зв'язну множину K , яка містить точки $x_1 = \gamma(0)$ та $x_2 = \gamma(1)$ і не перетинається з поверхнями N_1 та N_2 .

Внаслідок довільності у виборі точок $x_1, x_2 \in V_1 \cap V_2$ множина $V_1 \cap V_2$ є зв'язною. \square

Наслідок 12.3.6 В умовах Лемми 12.3.5 множина $V_1 \cap V_2$ є компонентою зв'язності доповнення $\mathbb{R}^n \setminus (N_1 \cup N_2)$.

Доведення. Згідно Лемі 12.3.5 множина $V_1 \cap V_2$ є зв'язною. Більш того, з умов Лемми 12.3.5 легко слідує, що ця множина не перетинається з $N_1 \cup N_2$. Отже, існує компонента W доповнення $\mathbb{R}^n \setminus (N_1 \cup N_2)$, що містить $V_1 \cap V_2$.

Припустимо, що наслідок не виконується. Тоді $W \neq (V_1 \cap V_2)$ і існує $x \in W \cap ((\mathbb{R}^n \setminus V_1) \cup (\mathbb{R}^n \setminus V_2))$.

Нехай $x \in (\mathbb{R}^n \setminus V_1)$. Оскільки $W \cap V_1 \supset W \cap (V_1 \cap V_2) = V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, то множина $W \cup V_1$ зв'язна. За побудовою $W \cap N_1 = \emptyset$, тому $W \cup V_1 \subset (\mathbb{R}^n \setminus N_1)$. У цьому випадку $(W \cup V_1) \supsetneq V_1$, оскільки $x \in W \setminus V_1$ згідно нашому припущенню. Отримали суперечність з Лемою 12.3.5, яка стверджує, що V_1 є компонентою зв'язності доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N_1$. Отже наше припущення хибне і $x \in V_1$.

Включення $x \in V_2$ перевіряється аналогічно.

Внаслідок цього $W = V_1 \cap V_2$. Наслідок доведено. \square

Наслідок 12.3.7 Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Нехай N — замкнена гіперповерхня в \mathbb{R}^n і W — компонента доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N$, така що $x_0 \in W$. Припустимо, що множина W обмежена.

Тоді існує компонента зв'язності N_0 множини N , така що компонента зв'язності W_0 доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N_0$, яка містить x_0 , є обмеженою.

Доведення. Оскільки N є компактом, вона обмежена в \mathbb{R}^n . Без обмеження загальності міркувань ми можемо припустити, що N міститься у одиничному диску B з центром у початку координат.

Позначимо через S одиничну сферу $\text{Fr } B$. Зрозуміло, що $S \subset \mathbb{R}^n \setminus N$. Обмеженість W означає що x_0 і зв'язна множина S містяться в різних компонентах доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N$.

Нехай N_1, \dots, N_m — компоненти зв'язності множини N . Нехай W_i є компонентою доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N_i$, для якої $x_0 \in W_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

Припустимо, що Наслідок не виконується. Це еквівалентно твердженню, що $S \subset W_i$ для всіх $i \in \{1, \dots, m\}$. Послідовно застосовуючи Лему 12.3.5 і Наслідок 12.3.6 до пар множин

$$N'(i) = \bigcup_{j=1}^i N_j, \quad N''(i) = N_{i+1}, \quad i \in \{1, \dots, m-1\},$$

перевіримо, що множина $W_1 \cap \dots \cap W_m \subset \mathbb{R}^n \setminus N$ зв'язна. Отже, x_0 і S містяться у одній компоненті зв'язності доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N$. Але це суперечить умовам Наслідка. \square

12.3.8 Доведення Теорема 12.2.1

Не обмежуючи загальності, ми можемо вважати, що $F(x_0) = 0$.

На протязі доведення ми будемо використовувати наступні позначення:

$$B_\delta = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(y, x_0) \leq \delta\}.$$

$$\mathring{B}_\delta = \text{Int}(B_\delta) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(y, x_0) < \delta\}.$$

Необхідність. Нехай $F \in \mathbf{L}$ -функцією у точці x_0 .

Виберемо послідовність $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ регулярних значень F , а також послідовність $\{\mathbf{H}_i^{n-1} \subset F^{-1}(a_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ компонент зв'язності множин рівня F , які відповідають означенню 12.1.7.

Позначимо через C компоненту зв'язності множини $F^{-1}(0)$, що містить x_0 .

Припустимо, що $C \neq \{x_0\}$ всупереч твердженню Теорема. Тоді існує $x_1 \in C$, $x_1 \neq x_0$. Позначимо $\delta = \rho(x_0, x_1)/2$.

Оскільки послідовність $\{\mathbf{H}_i^{n-1}\}$ збігається до x_0 , то для деякого індексу $M \in \mathbb{N}$ маємо $\mathbf{H}_M^{n-1} \subset B_\delta$.

З одного боку, за означенням точка x_0 міститься в обмеженій компоненті зв'язності доповнення $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{H}_M^{n-1}$. Але з вибору \mathbf{H}_M^{n-1} легко слідує, що x_1 міститься в необмеженій компоненті доповнення. Внаслідок цього зв'язна множина C повинна перетинатися з \mathbf{H}_M^{n-1} .

З нерівності $\mathbf{H}_M^{n-1} \cap C \neq \emptyset$ легко слідує, що $\mathbf{H}_M^{n-1} \cup C \subset F^{-1}(0)$. Множина $\mathbf{H}_M^{n-1} \cup C$ зв'язна і не збігається з \mathbf{H}_M^{n-1} , оскільки $\{x_0, x_1\} \subset C \setminus \mathbf{H}_M^{n-1}$. Це суперечить вибору \mathbf{H}_M^{n-1} , що є компонентою зв'язності відповідної множини рівня F .

Отримана суперечність доводить, що $C = \{x_0\}$ і x_0 є квазі-ізолюваною точкою F .

Достатність. Нехай x_0 є квазі-ізолюваною точкою F .

З Теорема Сарда [107] слідує, що множина регулярних значень F є залишковою і всюди щільною. Отже існує спадна послідовність додатніх цілих чисел $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, яка відповідає наступним властивостям:

- $\lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0$;
- всі числа $\pm \varepsilon_i$ є регулярними значеннями F .

Позначимо через U^i компоненту зв'язності відкритої множини $Q^i = \{x \in G \mid -\varepsilon_i < F(x) < \varepsilon_i\}$, для якої $x_0 \in U^i$. Очевидно, $U^j \subset U^i$ якщо $i < j$.

Зафіксуємо $\delta > 0$ досить мале, щоб виконувалось включення $B_\delta \subset G$. Позначимо через U_δ^i компоненту зв'язності $U^i \cap B_\delta$, таку що $x_0 \in U_\delta^i$. Нехай

також

$$K_\delta^i = \overline{U_\delta^i}, \quad i \in \mathbb{N}.$$

З неперервності F очевидно слідує, що

$$K_\delta^i \subset \{x \in G \mid -\varepsilon_i \leq F(x) \leq \varepsilon_i\}.$$

Також за побудовою маємо $U_\delta^j \subset U_\delta^i$ і $K_\delta^j \subset K_\delta^i$ при $i < j$.

Розглянемо множину

$$K_\delta = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_\delta^i.$$

З одного боку $x_0 \in K_\delta \subseteq F^{-1}(0)$, оскільки $\varepsilon_i \rightarrow 0$ якщо $i \rightarrow \infty$.

З іншого боку, $\{K_\delta^i\}$ є послідовністю вкладених зв'язних компактів. Тому множина K_δ є зв'язною.

Отже, з умов Теорема слідує, що $K_\delta = \{x_0\}$.

Тоді існує $m \in \mathbb{N}$, таке що $U_\delta^r \subset K_\delta^r \subset \mathring{B}_\delta$ для всіх $r \geq m$.

Згадаємо, що за побудовою U^i є компонентою зв'язності відкритої підмножини Q^i множини G . Простір \mathbb{R}^n є локально зв'язним, тому множина U^i відкрита в \mathbb{R}^n (див. [47]). З цього слідує, що множина U_δ^i відкрита в B_δ . Дійсно, простір B_δ локально зв'язний, оскільки є гомеоморфним образом замкненого диску. Множина U_δ^i є компонентою зв'язності $U^i \cap B_\delta$, отже $U^i \cap B_\delta$ відкрита в B_δ .

Таким чином, якщо виконується включення $U_\delta^i \subset \mathring{B}_\delta = \text{Int}(B_\delta)$, то множина U_δ^i відкрита в \mathbb{R}^n .

З іншого боку відомо (див. [47]), що для будь якої пари множин A і B , які пов'язані співвідношенням $A \subset B \subset \overline{A}$, зі зв'язності A слідує зв'язність B . Отже, множина $K_\delta^i \cap U^i$ є зв'язною. Дійсно, множина U_δ^i зв'язна і $U_\delta^i \subset K_\delta^i \cap U^i \subset \overline{U_\delta^i} = K_\delta^i$.

Внаслідок цього $K_\delta^i \cap U^i = U_\delta^i$, оскільки $K_\delta^i \cap U^i \subseteq K_\delta^i \cap (U^i \cap B_\delta)$ і U_δ^i є компонентою зв'язності множини $U^i \cap B_\delta$.

Отже, компакт K_δ^i задовольняє співвідношення $U_i \setminus U_\delta^i = U_i \setminus K_\delta^i$, тому множина $U_i \setminus U_\delta^i$ є відкритою в \mathbb{R}^n .

З попереднього можемо зробити висновок, що $U_\delta^r = U^r$ для $r \geq m$. Дійсно,

$U^r = U_\delta^r \sqcup (U^r \setminus U_\delta^r)$, більш того у нашому випадку обидві множини $U_\delta^r \ni x_0$ і $(U^r \setminus U_\delta^r)$ відкриті. Тому зі зв'язності U^r слідує, що $(U^r \setminus K_\delta^r) = \emptyset$.

Нехай $r \geq m$.

Розглянемо множину $N_r = \text{Fr } U^r$. Множина U^r відкрита, отже $N_r \cap U^r = \emptyset$. З іншого боку U^r є компонентою зв'язності множини $Q^r = \{x \in M^n \mid -\varepsilon_r < F(x) < \varepsilon_r\}$, тому $\overline{U^r} \cap Q^r = K_\delta^r \cap Q^r = U^r$. Внаслідок цього $N_r \subseteq F^{-1}(-\varepsilon_r) \cup F^{-1}(\varepsilon_r)$.

Як $-\varepsilon_r$, так і ε_r є регулярними значеннями F . Тому за Теоремою про неявну функцію (див. [3]) простір N_r у кожній точці є локально диффеоморфним до \mathbb{R}^{n-1} . Отже, N_r є замкненою гіперповерхнею в \mathbb{R}^n .

Застосовуючи до N_r Наслідок 12.3.7, приходимо до висновку, що існує компонента зв'язності N_r^0 множини N_r , яка відповідає наступній властивості: якщо компонента зв'язності W_r доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N_r^0$ містить x_0 , то W_r є обмеженою.

Ми вже довели, що $N_r \subset K_\delta^r \subset \mathring{B}_\delta$, тому $W_r \subset \mathring{B}_\delta$ і $\overline{W_r} \subset B_\delta$.

Нехай $B_{\delta_1} = B_\delta$. Ми вже знайшли $m_1 = m \in \mathbb{N}$, для якого існує компонента зв'язності $N_{m_1}^0$ гіперповерхні N_{m_1} , яка відповідає наступній властивості: якщо компонента зв'язності W_{m_1} доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N_{m_1}^0$ містить x_0 , то її замикання $K_{m_1} = \overline{W_{m_1}}$ є підмножиною B_{δ_1} .

Припустимо, що для деякого $k \in \mathbb{N}$ вже означені наступні об'єкти:

- додатні числа $\delta_1, \dots, \delta_k$, такі що $\delta_{i+1} < \delta_i/2$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$;
- сім'я $B_{\delta_1}, \dots, B_{\delta_k}$ околів точки x_0 , $B_{\delta_i} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(y, x_0) \leq \delta_i\} \subset G$, $i \in \{1, \dots, k\}$;
- послідовність чисел $m_1 < \dots < m_k$;
- компоненти зв'язності $N_{m_i}^0$ гіперповерхонь $N_{m_i} \subseteq F^{-1}(-\varepsilon_{m_i}) \cup F^{-1}(\varepsilon_{m_i})$, $i \in \{1, \dots, k\}$;
- замикання K_{m_i} компонент зв'язності W_{m_i} множин $M^n \setminus N_{m_i}^0$, $i = 1, \dots, k$.

Припустимо, що ці об'єкти пов'язані за допомогою таких співвідношень:

$$B_{\delta_i} \supset K_{m_i} \supset W_{m_i} \ni x_0, \quad i \in \{1, \dots, k\},$$

$$W_{m_i} \supset B_{\delta_{i+1}}, \quad i \in \{1, \dots, k-1\}.$$

Зафіксуємо $\delta_{k+1} \in (0, \delta_k/2)$, такі що $B_{\delta_{k+1}} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(y, x_0) \leq \delta_{k+1}\} \subset W_{m_k} \subset G$.

Повторюючи міркування наведені вище, знайдемо $m_{k+1} > m_k$, таке що $x_0 \in U^{m_{k+1}} \subset \overline{U^{m_{k+1}}} \subset \text{Int } B_{\delta_{k+1}}$. Тоді множина $N_{m_{k+1}} = \text{Fr } U^{m_{k+1}}$ є замкненою гіперповерхнею в \mathbb{R}^n і $N_{m_{k+1}} \subset \text{Int } B_{\delta_{k+1}}$. Також існує компонента зв'язності $N_{m_{k+1}}^0$ цієї гіперповерхні, що відповідає наступній властивості: якщо компонента зв'язності $W_{m_{k+1}}$ доповнення $\mathbb{R}^n \setminus N_{m_{k+1}}^0$ містить x_0 , то її замикання $K_{m_{k+1}}$ є підмножиною $B_{\delta_{k+1}}$.

Продовжуючи цей процес по індукції, ми побудуємо послідовність замкнених зв'язних гіперповерхонь $\{N_{m_i}^0, i \in \mathbb{N}\}$, послідовність компонент зв'язності $\{W_{m_i}\}$ множин $\mathbb{R}^n \setminus N_{m_i}^0$, і послідовність їх замикань $\{K_{m_i} = \overline{W_{m_i}}\}$, які пов'язані за допомогою співвідношень

$$G \supset B_{\delta_i} \supset K_{m_i} \supset W_{m_i} \supset B_{\delta_{i+1}} \ni x_0, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (12.3.3)$$

Усі B_{δ_i} є замкненими n -вимірними дисками, отже всі множини K_{m_i} є компактами. За побудовою гіперповерхні $N_{m_i}^0$ обмежують множини K_{m_i} . Зі співвідношень (12.3.3) слідує, що $K_{m_i} \supset K_{m_j} \ni x_0$ при $i < j$, отже $x_0 \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_{m_i}$. Очевидно, що $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = 0$. Внаслідок цього сім'я множин $\{B_{\delta_i}\}$ утворює базу околів точки x_0 в \mathbb{R}^n . Отже, $\{x_0\} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_{m_i}$. Нарешті, гіперповерхні $N_{m_i}^0$ попарно неперетинні, оскільки $N_{m_i}^0 \subset F^{-1}(-\varepsilon_{m_i}) \cup F^{-1}(\varepsilon_{m_i})$ і за побудовою $|\varepsilon_{m_i}| \neq |\varepsilon_{m_j}|$ при $i \neq j$.

Отже, сім'я $\{\mathbf{H}_i^{n-1} = N_{m_i}^0\}_{i \in \mathbb{N}}$ зв'язних замкнених гіперповерхонь відповідає умовам Означення 12.1.7.

Теорему доведено.

Розділ 13

Про теорему, обернену до теореми Жордана про криву

13.1 Перерізи компонент зв'язності доповнення до простих підмножин площини.

Нехай K є компактною підмножиною площини, що розбиває її на дві компоненти зв'язності. Назвемо таку множину *двосторонньою*.

Далі будемо позначати компоненти зв'язності доповнення до двосторонньої множини K через W_1 і W_2 . Також позначимо через A_i множину точок K , досяжних з W_i , $i = 1, 2$.

Твердження 13.1.1 *Нехай множина K є двосторонньою.*

Якщо множини A_1 і A_2 щільні в K , то K є спільною межею компонент зв'язності свого доповнення до площини, тобто

$$K = \text{Fr } W_1 = \text{Fr } W_2 . \quad (13.1.1)$$

Доведення. Очевидно, $\text{Fr } W_i \subseteq K$, $i = 1, 2$.

З іншого боку, $A_i \subseteq \text{Fr } W_i$, $i = 1, 2$. Отже $K = \overline{A_i} \subseteq \text{Fr } W_i$, $i = 1, 2$, оскільки множини $\text{Fr } W_i$ замкнені за означенням. \square

Для зручності дамо наступне

Означення 13.1.2 Нехай множина K є двосторонньою. Якщо A_1 і A_2 є щільними в K , скажемо що K — проста множина.

Твердження 13.1.3 Кожна проста множина зв'язна.

Доведення. Це твердження є безпосереднім наслідком попереднього твердження і наступної теореми: якщо області W_1 і W_2 на площині не перетинаються, але $\text{Fr } W_1 \subseteq \text{Fr } W_2$, то множина $\text{Fr } W_1$ зв'язна (див. [46], теорема V.14.1). \square

Позначення 13.1.4 Нехай $F \subset \mathbb{R}^2$, $x \in F$ і множина U є околом точки x (не обов'язково відкритим). Позначимо через $F(U, x)$ компоненту зв'язності множини $F \cap U$, що містить точку x .

Твердження 13.1.5 Нехай F — деяка підмножина площини, U_1, U_2 два околу точки $x \in F$ і $U_2 \subset U_1$.

Тоді $F(U_2, x) \subseteq F(U_1, x)$.

Доведення. За означенням компонента зв'язності точки x у $F \cap U_1$ є максимальною зв'язною підмножиною $F \cap U_1$, що містить x .

Зв'язна множина $F(U_2, x)$ належить до $F \cap U_1$ і містить x . Отже, $F(U_2, x) \subseteq F(U_1, x)$. \square

Теорема 13.1.6 Припустимо, що K — проста множина, $x \in K$. Нехай для деякого $\varepsilon > 0$ точки $y_1, y_2 \in K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x)$, $y_1 \neq y_2$, досяжні з компоненти зв'язності W_1 доповнення до K . Нехай крива

$$\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

є надрізом W_1 у точці y_i , $i = 1, 2$.

Для кожного $\varepsilon_1 > \varepsilon$ існує розріз

$$\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

множини W_1 з кінцями y_1, y_2 , такий що

$$(i) \beta(I) \subset U_{\varepsilon_1}(x);$$

$$(ii) \alpha_i([0, \tau_i]) \subset \beta(I), \quad i = 1, 2, \text{ для деяких } \tau_1, \tau_2 \in (0, 1).$$

Доведення Теорема 13.1.6 розіб'ємо на декілька кроків.

Нехай зафіксовано $\varepsilon_1 > \varepsilon$. Виберемо деяке $\varepsilon_2 \in (\varepsilon, \varepsilon_1)$.

1. Існує розріз $\beta_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ множини W_1 , який задовольняє твердження (ii) теореми.

Оскільки $y_1, y_2 \in U_{\varepsilon_2}(x)$, то існує $\tau_0 \in (0, 1)$, яке відповідає співвідношенням $\alpha_i([0, \tau_0]) \subset U_{\varepsilon_2}(x)$, $i = 1, 2$, і $\alpha_1([0, \tau_0]) \cap \alpha_2([0, \tau_0]) = \emptyset$.

Точки $z_1 = \alpha_1(\tau_0)$, $z_2 = \alpha_2(\tau_0)$ містяться у відкритій зв'язній множині W_1 . Відомо, що області у \mathbb{R}^2 є лінійно зв'язними. Отже, існує проста дуга

$$\gamma : I \rightarrow W_1,$$

яка з'єднує точки z_1 і z_2 .

Позначимо

$$\tau_i = \min\{\tau \mid \alpha_i(\tau) \in \gamma(I)\}, \quad i = 1, 2.$$

Непорожні замкнені множини $\{0\} = \alpha_i^{-1}(y_i)$ і $\alpha_i^{-1}(\gamma(I))$ не перетинаються, тому $\tau_i \in (0, \tau_0]$, $i = 1, 2$.

Однозначно визначені числа $t_i \in [0, 1]$, такі що $\alpha_i(\tau_i) = \gamma(t_i)$, $i = 1, 2$.

Розглянемо просту дугу

$$\beta_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \beta_0(t) = \begin{cases} \alpha_1(4t\tau_1), & t \in [0, 1/4], \\ \gamma(2(t - 1/4)t_2 + 2(3/4 - t)t_1), & t \in [1/4, 3/4], \\ \alpha_2(4(1 - t)\tau_2), & t \in [3/4, 1]. \end{cases}$$

Ця крива є дає потрібний нам переріз.

Якщо додатково $\beta_0(I) \subset U_{\varepsilon_1}(x)$, то теорему доведено. Отже, будемо вважати далі, що

$$\beta_0(I) \setminus U_{\varepsilon_1}(x) \neq \emptyset.$$

2. Розглянемо один спеціальний випадок. Нехай $K \subset \overline{U_\varepsilon(x)}$. Зрозуміло, що тоді $K \subset U_{\varepsilon_1}(x)$.

Справедливе наступне твердження (див. [46], Теорема V.9.3).

Лема 13.1.7 *Якщо замкнена множина $F \neq \mathbb{R}^2$ міститься в області D і D_1, D_2, \dots є компонентами зв'язності $\mathbb{R}^2 \setminus F$, то компонентами зв'язності $D \setminus F$ є множини $D \cap D_1, D \cap D_2, \dots$*

Внаслідок цього твердження точки $z_1 = \alpha_1(\tau_0)$, $z_2 = \alpha_2(\tau_0)$ містяться в одній компоненті зв'язності відкритої множини $U_{\varepsilon_1}(x) \setminus K$ (а саме у $W_1 \cap U_{\varepsilon_1}(x)$). Отже, існує проста дуга

$$\gamma : I \rightarrow W_1 \cap U_{\varepsilon_1}(x)$$

з кінцями z_1 і z_2 .

Повторюючи міркування з попереднього кроку, приходимо до висновку, що існує розріз

$$\beta_0 : I \rightarrow U_{\varepsilon_1}(x)$$

множини $W_1 \cap U_{\varepsilon_1}(x)$ з кінцями y_1, y_2 , який задовольняє твердження (ii) теореми.

Отже, якщо $K \subset \overline{U_\varepsilon(x)}$, то теорема виконується.

Далі будемо вважати, що

$$K \setminus \overline{U_\varepsilon(x)} \neq \emptyset.$$

3. Множина $K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x) \cup \beta_0(I)$ є зв'язною і ділить площину на дві області V_1 і V_2 , одна з яких міститься у W_1 .

Спочатку доведемо наступну лему.

Лема 13.1.8 *Нехай K є простою множиною. Для кожної власної замкненої підмножини $\tilde{K} \subsetneq K$ її доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{K}$ є зв'язним.*

Доведення. Нехай $y \in K \setminus \tilde{K}$. Тоді існує $\varepsilon(y) > 0$, таке що $U_{\varepsilon(y)}(y) \cap \tilde{K} = \emptyset$. Відповідно до Твердження 13.1.1 існують $z_1, z_2 \in U_{\varepsilon(y)}(y)$, такі що $z_i(y) \in W_i$, $i = 1, 2$.

Позначимо через $J_i(y)$ відрізок з кінцями y і $z_i(y)$, $i = 1, 2$. Очевидно, $J_i(y) \cap \tilde{K} = \emptyset$, $i = 1, 2$. Множина

$$Q(y) = W_1 \cup W_2 \cup J_1(y) \cup J_2(y)$$

є зв'язною і $Q(y) \cap \tilde{K} = \emptyset$.

Зафіксуємо точку $z \in W_1$. Оскільки $z \in Q(y)$ для кожного $y \in K \setminus \tilde{K}$, то множина

$$Q = \bigcup_{y \in K \setminus \tilde{K}} Q(y) = \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{K}$$

зв'язна. \square

Оскільки множина $K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x) \cup \beta_0(I)$ є об'єднанням зв'язних множин, що мають спільну точку, $y_1 = \beta_0(0)$, то вона є зв'язною.

За означенням $K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x)$ є компонентою зв'язності множини $\overline{U_\varepsilon(x)} \cap K$. Отже, вона замкнена в $\overline{U_\varepsilon(x)} \cap K$. Множина $\overline{U_\varepsilon(x)} \cap K$ замкнена в \mathbb{R}^2 , тому $K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x)$ теж замкнена в \mathbb{R}^2 .

З Лема 13.1.8 слідує, що доповнення

$$Q = \mathbb{R}^2 \setminus K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x)$$

є зв'язним.

Очевидно, крива β_0 є розрізом множини Q .

Справедливе наступне твердження (див. [46], Теорема V.2.7).

Лема 13.1.9 *Якщо обидва кінці розрізу L області $D \subset \mathbb{R}^2$ належать одній компоненті зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus D$, то $D \setminus L$ має дві компоненти зв'язності, причому межа кожної з них містить L .*

Внаслідок цієї леми множина

$$Q \setminus \beta_0(I) = \mathbb{R}^2 \setminus (K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x) \cup \beta_0(I))$$

має дві компоненти зв'язності V_1 і V_2 , причому

$$\beta_0(I) \subset (\text{Fr } V_1 \cap \text{Fr } V_2) . \quad (13.1.2)$$

Оскільки

$$W_2 \cap \left(K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x) \cup \beta_0(I) \right) = \emptyset , \quad (13.1.3)$$

то $(V_1 \cup V_2) \cap W_2 \neq \emptyset$. Не обмежуючи загальності, припустимо що $W_2 \cap V_2 \neq \emptyset$.

Множина W_2 зв'язна, тому зі співвідношення (13.1.3) слідує, що $W_2 \subset V_2$. Інакше ми отримали б розбиття $W_2 \cap V_1$, $W_2 \cap V_2$ множини W_2 .

Співвідношення (13.1.1) приводить до рівності $W_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{W_2}$. З іншого боку, $\overline{W_2} \subset \overline{V_2} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus V_1$. Отже,

$$V_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \overline{V_2} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{W_2} = W_1 .$$

4. Приступимо до побудови перерізу β множини $Q \cap U_{\varepsilon_1}(x)$, який міститься у $\beta_0(I) \cup V_1$.

Відомо, що для кожної простої неперервної кривої на площині існує гомеоморфізм \mathbb{R}^2 на себе, який відображає цю криву на прямолінійний відрізок (див. [46], параграф VI.17). Зафіксуємо гомеоморфізм

$$f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ,$$

що відображає криву β_0 на відрізок $[-2, 2] \times \{0\}$.

Легко бачити, що існує такий гомеоморфізм $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що композиція

$$f = (\varphi \times id) \circ f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

відповідає наступним вимогам:

$$\begin{aligned} f(y_1) &= f \circ \beta_0(0) = (-2, 0), \quad f(y_2) = f \circ \beta_0(1) = (2, 0); \\ f \circ \beta_0(1/4) &= f \circ \alpha_1(\tau_1) = (-1, 0), \quad f \circ \beta_0(3/4) = f \circ \alpha_2(\tau_2) = (1, 0). \end{aligned}$$

Якщо вони виконуються, очевидно (див. крок 1) що

$$\begin{aligned} f \circ \beta_0([0, 1/4]) &= f \circ \alpha_1([0, \tau_1]) = [-2, -1] \times \{0\} \subset f(U_{\varepsilon_2}(x)), \\ f \circ \beta_0([3/4, 1]) &= f \circ \alpha_2([0, \tau_2]) = [1, 2] \times \{0\} \subset f(U_{\varepsilon_2}(x)). \end{aligned}$$

Оскільки f є гомеоморфізмом і множина $U_{\varepsilon_2}(x)$ відкрита в \mathbb{R}^2 , то існує $\delta_1 > 0$, для якого виконуються співвідношення

$$U_{\delta_1}(f \circ \beta_0(1/4)) \subset f(U_{\varepsilon_2}(x)) \quad \text{і} \quad U_{\delta_1}(f \circ \beta_0(3/4)) \subset f(U_{\varepsilon_2}(x)).$$

Зафіксуємо також $\delta_2 > 0$, таке що

$$U_{\delta_2}([-1, 1] \times \{0\}) \cap f(K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x)) = \emptyset.$$

Ми можемо це зробити, оскільки множини $f(K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x))$ і $f \circ \beta_0([1/4, 3/4])$ неперетинні.

Нехай $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Розглянемо наступні підмножини $U_\delta([-1, 1] \times \{0\})$.

$$\begin{aligned} P_1 &= (\{-1\} \times [0, \delta/2]) \cup ([-1, 1] \times \{\delta/2\}) \cup (\{1\} \times [0, \delta/2]), \\ P_2 &= (\{-1\} \times [-\delta/2, 0]) \cup ([-1, 1] \times \{-\delta/2\}) \cup (\{1\} \times [-\delta/2, 0]). \end{aligned}$$

Виберемо параметризацію $\mu_i : I \rightarrow P_i$, $i = 1, 2$, яка перетворює ці ламані на прості неперервні криві і відповідає співвідношенням

$$\begin{aligned} \mu_1(0) = \mu_2(0) &= f \circ \beta_0(1/4) = (-1, 0), \\ \mu_1(1) = \mu_2(1) &= f \circ \beta_0(3/4) = (1, 0). \end{aligned}$$

Розглянемо додатково відрізок $J \subset U_\delta((-1, 0))$ з кінцями $(-1 - \delta/2, 0) \in f \circ \alpha_1([0, \tau_1])$ and $(-1, \delta/2) \in \mu_1(I)$.

Нехай $\mu : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — проста замкнена крива, яку означено за допомогою співвідношення

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1(2t), & t \in [0, 1/2], \\ \mu_2(2 - 2t), & t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Крива μ робиває площину на дві області. Позначимо обмежену компоненту зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \mu(S^1)$ через V_{in} , а необмежену компоненту — через V_o . Очевидно,

$$V_{in} = (-1, 1) \times (-\delta/2, \delta/2) \subset U_\delta([-1, 1] \times \{0\}) .$$

Отже, $f(K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x)) \subset V_o$.

Відрізок $[-1, 1] \times \{0\} = f \circ \beta_0([1/4, 3/4])$ розбиває прямокутник V_{in} на дві області. Позначимо через V_{in}^+ область, що міститься у верхній пів-площині, а іншу область позначимо V_{in}^- .

За побудовою $V_{in} \cap f(K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x)) = \emptyset$. Отже, відповідно до співвідношення (13.1.2), маємо $V_{in} \cap f(\text{Fr } V_1) = V_{in} \cap f(\text{Fr } V_2) = f \circ \beta((1/4, 3/4)) = (-1, 1) \times \{0\}$. Внаслідок цього одна з областей V_{in}^+ , V_{in}^- міститься у $f(V_1)$, а інша є підмножиною $f(V_2)$.

Припустимо, що $V_{in}^+ \in f(V_1)$. Інакше ми можемо замінити f на $i \circ f$, де $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, -x_2)$, є інверсією відносно осі абсцис.

Оскільки

$$\mu_i(I) \cap f \left(K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x) \cup \beta_0(I) \right) = \mu_i(0) \cup \mu_i(1), \quad i = 1, 2 ,$$

то

$$\mu_1((0, 1)) \subset f(V_1), \quad \mu_2((0, 1)) \subset f(V_2) .$$

5. Розглянемо просту замкнену криву

$$\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 ,$$

$$\gamma(t) = x + \varepsilon_2 \exp(2\pi it) ,$$

яка є межею околу $U_{\varepsilon_2}(x)$.

Позначимо

$$\theta = f^{-1} \circ \mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 .$$

Перевіримо, що криві γ і θ відповідають умовам Лема 1.3.5.

Оскільки $\beta_0(I) \setminus U_{\varepsilon_1}(x) \neq \emptyset$ (див. крок 1) і $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, то $\beta_0(I) \setminus \overline{U_{\varepsilon_2}(x)} \neq \emptyset$. За побудовою $\beta_0(I) \setminus \overline{U_{\varepsilon_2}(x)} \subset \beta_0((1/4, 3/4)) \subset f^{-1}(V_{in})$.

Зафіксуємо $z_0 \in \beta_0(I) \setminus \overline{U_{\varepsilon_2}(x)}$. Межа області $f^{-1}(V_{in})$ є Жордановою кривою θ . Отже $\theta(S^1) \setminus \overline{U_{\varepsilon_2}(x)} \neq \emptyset$. Дійсно, множина $f^{-1}(V_o)$ не обмежена, тому існує $z'_0 \in f^{-1}(V_o) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \overline{U_{\varepsilon_2}(x)})$. Множина $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{U_{\varepsilon_2}(x)}$ лінійно зв'язна, отже знайдеться проста неперервна крива $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \overline{U_{\varepsilon_2}(x)}$, що з'єднує точки z_0 і z'_0 . Області $f^{-1}(V_o)$ і $f^{-1}(V_{in})$ неперетинні, $z_0 \in f^{-1}(V_{in})$, $z'_0 \in f^{-1}(V_o)$, і $\theta(S^1) = \text{Fr } f^{-1}(V_{in}) = \text{Fr } f^{-1}(V_o)$. Тому $\psi(I) \cap \theta(S^1) \neq \emptyset$.

Нехай z_1 міститься у $\psi(I) \cap \theta(S^1) \subset \theta(S^1) \setminus \overline{U_{\varepsilon_2}(x)}$.

З іншого боку, за побудовою $z_2 = \beta_0(1/4) = \theta(0) \in U_{\varepsilon_2}(x)$.

Точки z_1 і z_2 розбивають Жорданову криву θ на дві прості дуги зі спільними кінцями

$$\theta_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2,$$

такі що

$$\begin{aligned} \theta_i(0) = z_1 \in U_{\varepsilon_2}(x), \quad \theta_i(1) = z_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{U_{\varepsilon_2}(x)}, \quad i = 1, 2; \\ \theta_1(I) \cap \theta_2(I) = \{z_1\} \cup \{z_2\}, \end{aligned}$$

Легко бачити, що $\theta_i \cap \text{Fr } U_{\varepsilon_2}(x) \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Внаслідок цього, перетин $\gamma(S^1) \cap \theta(S^1)$ містить принаймні дві точки і ми можемо застосувати Лему 1.3.5 до пари кривих γ і $\theta = f^{-1} \circ \mu$.

6. Нехай V_K компонента зв'язності доповнення площини до $\theta(S^1) \cup \gamma(S^1)$, яка містить множину $K(\overline{U_{\varepsilon}(x)}, x)$.

Нехай проста замкнена крива

$$\eta : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

є межею Жорданової області V_K .

За побудовою зв'язна множина

$$\begin{aligned} K_0 &= K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x) \cup \beta_0([0, 1/4] \cup (3/4, 1]) = \\ &= K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x) \cup \alpha_1([0, \tau_1]) \cup \alpha_2([0, \tau_2)) \end{aligned}$$

міститься у V_K . Внаслідок цього $\beta_0(1/4), \beta_0(3/4) \in \text{Fr } V_K = \eta(S^1)$. Аналогічно,

$$(K_0 \cup f^{-1}(J)) \setminus f^{-1}((-1, \delta/2))$$

є підмножиною V_K , тому $x_0 = f^{-1}((-1, \delta/2)) \in \text{Fr } V_K = \eta(S^1)$. Оскільки $x_0 \in f^{-1} \circ \mu_1((0, 1)) \subset V_1$, то $V_1 \cap \text{Fr } V_K \neq \emptyset$.

Точки $\beta_0(1/4)$ і $\beta_0(3/4)$ ділять криву η на дві дуги

$$\eta_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad i = 1, 2,$$

такі що

$$\begin{aligned} \eta_i(0) &= \beta_0(1/4), \quad \eta_i(1) = \beta_0(3/4), \quad i = 1, 2, \\ \eta_1(I) \cap \eta_2(I) &= \{\beta_0(1/4)\} \cup \{\beta_0(3/4)\}. \end{aligned}$$

Нехай η_1 — та з дуг, що містить точку x_0 .

7. Перевіримо, що $\eta_1((0, 1)) \subset V_1$.

Множина V_1 зв'язна, отже досить буде довести, що $\eta_1((0, 1)) \cap \text{Fr } V_1 = \emptyset$.

Ми отримаємо дещо сильніше співвідношення

$$\eta_1((0, 1)) \cap \left(K(\overline{U_\varepsilon(x)}) \cup \beta_0(I) \right) = \emptyset.$$

Оскільки $K_0 \subset V_K$, то $\eta_1(I) \cap K_0 = \emptyset$ і

$$\eta_1((0, 1)) \cap \left(K(\overline{U_\varepsilon(x)}) \cup \beta_0([0, 1/4] \cup [3/4, 1]) \right) = \emptyset.$$

З іншого боку, множини $K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x)$ і $\beta_0((1/4, 3/4))$ містяться в різних

компонентах $\mathbb{R}^2 \setminus \theta(S^1)$, а саме,

$$\begin{aligned} K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x) &\subset V_K \subset f^{-1}(V_o), \\ \beta_0((1/4, 3/4)) &\subset f^{-1}(V_{in}). \end{aligned}$$

Отже,

$$\eta_1((0, 1)) \cap \beta_0((1/4, 3/4)) \subset \overline{V_K} \cap f^{-1}(V_{in}) \subset \overline{f^{-1}(V_o)} \cap f^{-1}(V_{in}) = \emptyset.$$

8. Нагадаємо, що $V_1 \subset W_1$ і дуги α_1, α_2 є надрізами області W_1 в точках y_1 і y_2 , відповідно. Оскільки

$$\begin{aligned} \alpha_i([0, \tau_i]) &\subset V_K \subset U_{\varepsilon_2}(x), \quad i = 1, 2, \\ \eta_1(I) &\subset \text{Fr } V_K, \\ \alpha_1(\tau_1) &= \eta_1(0), \quad \alpha_2(\tau_2) = \eta_1(1), \end{aligned}$$

то проста дуга

$$\begin{aligned} \beta : I &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \beta(t) &= \begin{cases} \alpha_1(4t\tau_1) = \beta_0(t), & t \in [0, 1/4], \\ \eta(t/2 + 1/4), & t \in [1/4, 3/4], \\ \alpha_2(4(1-t)\tau_2) = \beta_0(t), & t \in [3/4, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

є розрізом області W_1 , який відповідає Теоремі 13.1.6. \square

13.2 d -множини і теорема, обернена до теореми Жордана про криву.

Означення 13.2.1 Нехай $F \subset \mathbb{R}^2$. Скажемо, що підмножина R множини F є досить щільною в F , якщо для кожного $x \in F$ і довільного відкритого околу U точки x виконується співвідношення $F(U, x) \cap R \neq \emptyset$.

Зауваження 13.2.2 Зрозуміло, що означення досить щільної підмножини можна переформулювати наступним чином: підмножина R множини $F \subset \mathbb{R}^2$ є досить щільною в F , якщо для довільної відкритої множини U кожна компонента зв'язності множини $F \cap U$ містить точку з R .

Означення 13.2.3 Назвемо двосторонню множину K d -множиною якщо обидві підмножини A_1 і A_2 є досить щільними в K .

Наведемо кілька простих властивостей d -множин.

Твердження 13.2.4 Нехай K є d -множиною.

Для кожної точки $x \in K$ і її відкритого околу U множини A_1 і A_2 є щільними в $K(U, x)$.

Зокрема, множини A_1 і A_2 є щільними в K .

Доведення. Нехай $y \in K(U, x)$ і V — деякий відкритий окіл точки y . Позначимо $V_0 = V \cap U$.

З умови d слідує, що існують $y_1, y_2 \in K(V_0, y)$, такі що $y_i \in A_i, i = 1, 2$.

Але $K(V_0, y) \subseteq K(U, y) = K(U, x)$. Отже, $y_1, y_2 \in K(U, x) \cap V$. \square

З Твердження 13.2.4 слідує, що d -множини є простими множинами.

Наслідок 13.2.5 Рівності (13.1.1) виконуються для кожної d -множини.

Відома теорема Жордана про криву каже, що доповнення площини до простої замкненої кривої має дві компоненти зв'язності, причому межа кожної з них збігається з цією кривою.

Виникає природне питання: за яких умов двостороння підмножина K площини буде Жордановою кривою?

Відповідь дає теорема, обернена до теореми Жордана про криву, яка стверджує, що двостороння підмножина площини, кожна точка якої досяжна з обох компонент зв'язності доповнення, є простою замкненою кривою (див. [46], теорема VI.16.1).

Виявляється, що вимога цієї теореми щоб кожна точка множини K була досяжна з обох компонент зв'язності доповнення надлишкова.

Як же можна послабити цю вимогу?

Тривіальна безпосередня перевірка показує, що для довільної області в \mathbb{R}^2 множина точок досяжних з неї є щільною підмножиною межі цієї області. Отже, з урахуванням Твердження 13.1.1 природно вимагати, щоб множини A_i точок, які досяжні зі зв'язних компонент доповнення W_i , $i = 1, 2$, були щільними у K . Цю вимогу не можна послабити, як показує наступний приклад.

Приклад 13.2.6

$$\begin{aligned} K &= \{\text{одичне коло у } \mathbb{R}^2\} && + \\ &+ \{\text{ізолювана точка у } W_1\} && + \\ &+ \{\text{ізолювана точка у } W_2\}. \end{aligned}$$

Але навіть якщо множини A_1 і A_2 є щільними в K , множина K не обов'язково є Жордановою кривою.

Приклад 13.2.7 Розглянемо об'єднання K таких множин

$$\begin{aligned} K_1 &= \{0\} \times [-1, 1], \\ K_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1], y = \sin \frac{\pi}{x} - \sin \pi x\}, \\ K_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, 1], y = \sin \frac{\pi}{x} + \sin \pi x\}. \end{aligned}$$

Можна показати, що множина K є простою і кожна точка кривої $K_2 \cup K_3$ досяжна з обох компонент зв'язності доповнення.

Проте множина K не є лінійно зв'язною (компонентами її лінійної зв'язності є множини K_1 і $K_2 \cup K_3$).

Також K не є d -множиною. Якщо $\varepsilon < 1$, то

$$K(U_\varepsilon(0), 0) = \{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

для кругового околу $U_\varepsilon(0)$, і ця множина не містить точок, досяжних з обмеженої компоненти зв'язності доповнення до K .

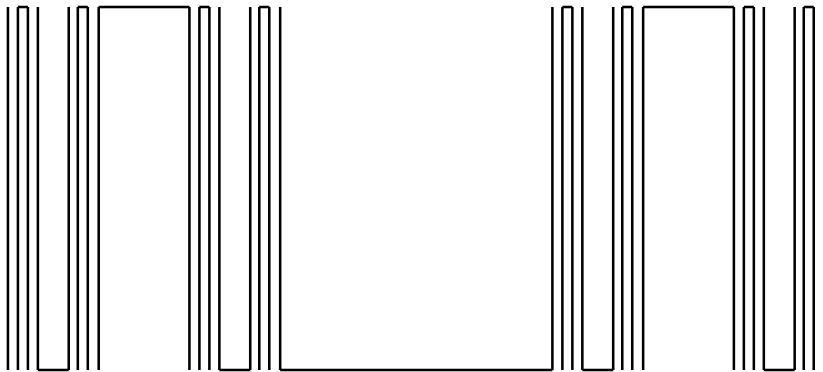
Цей приклад пояснює, чому потрібно розглядати d -множини.

Нехай F — деяка підмножина площини. Оскільки топологія площини має зліченну базу, існує зліченна підмножина, що є щільною в F .

Виникає природне питання: якою має бути мінімальна потужність досить щільної підмножини F ?

Наступний приклад показує, що існує проста підмножина \mathbb{R}^2 , така що кожна досить щільна її підмножина має потужність континуум.

Приклад 13.2.8 (Див. [47], розділ 48.1, приклад. 4) Нехай C_0 — множина Кантора, розташована на осі ξ_1 площини (ξ_1, ξ_2) і C_1 — ця ж множина, розташована на лінії $\xi_2 = 1$. З'єднаємо кожну точку множини C_0 з відповідною точкою в C_1 за допомогою вертикального відрізка. Додамо до C_0 суміжні інтервали довжин $1/3, 1/3^3, \dots$, а до C_1 додамо суміжні інтервали довжин $1/3^2, 1/3^4, \dots$. Отримаємо континуум K_0 , доповнення до якого є зв'язним.



Нехай

$$K_1 = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (\xi_1 - 1/2)^2 + (\xi_2 - 1)^2 = 1/4, \xi_2 \geq 1\} .$$

Дуга K_1 є розрізом доповнення площини до K_0 , отже континуум

$$K = K_0 \cup K_1$$

є двостороннім (див. Лему 13.1.9). Легко перевірити, що множина K задовольняє рівність (13.1.1), отже множина K є простою. Також з міркувань, що наведені далі, можна вивести, що K не є d -множиною.

Легко бачити, що для відкритої множини

$$V = \mathbb{R} \times (0, 1)$$

кожна компонента зв'язності множини $V \cap K = C \times (0, 1)$ має вигляд $\{c\} \times (0, 1)$, де $c \in C$ — деякий елемент множини Кантора C .

Отже, множина $V \cap K$ має континуум компонент зв'язності і з Зауваження 13.2.2 випливає, що кожна досить шільна підмножина K повинна мати потужність континуум.

Зараз нашою метою є доведення наступної теореми та її наслідку.

Теорема 13.2.9 ([52]) *Кожна d -множина на площині є простою замкненою кривою.*

Наслідок 13.2.10 *Нехай K — зв'язна двостороння підмножина площини. Якщо множини $K \setminus A_1$ і $K \setminus A_2$ є нульвимірними, то K є простою замкненою кривою.*

Теорему 13.2.9 буде доведено у Підрозділі 13.3.

Наслідок 13.2.10 випливає з Теореми 13.2.9 і двох наступних лем.

Лема 13.2.11 *Нехай F є компактною зв'язною підмножиною площини. Нехай X — замкнений окіл точки $x \in F$, такий що $F \setminus X \neq \emptyset$.*

Тоді $F(X, x) \cap \text{Fr } X \neq \emptyset$.

Доведення. Зафіксуємо $y \in F \setminus X$. Відомо (див. [46], теорема IV.5.1), що для кожного $\varepsilon > 0$ точки x і y можна з'єднати у множині F за допомогою ε -ланцюжка, тобто існує скінченна послідовність $x = z_1, z_2, \dots, z_k = y$ точок F , така що

$$\rho(z_i, z_{i+1}) < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k - 1.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ оберемо $1/n$ -ланцюжок точок F

$$x_1^n, \dots, x_{k(n)}^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

який з'єднує точки x і y .

Оскільки $y \notin X$, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ послідовність $\{x_i^n\}_{i=1}^{k(n)}$ містить елемент, який не належить до X . Отже, для всіх $n \in \mathbb{N}$ визначені індекси $j(n) \in \{1, \dots, k(n) - 1\}$, такі що

(i) $x_i^n \in X, i = 1, \dots, j(n)$;

(ii) $x_{j(n)+1}^n \notin X$.

Множина $F \cap X$ компактна, оскільки вона є замкненою підмножиною компактної множини F . Тому послідовність $\{x_{j(n)}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ має граничну точку $x_0 \in X \cap F$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $x_{j(n)}^n \rightarrow x_0$ (у протилежному випадку ми можемо перейти до підпослідовності).

Оскільки $x_{j(n)+1}^n \notin X$ і $\rho(x_{j(n)}^n, x_{j(n)+1}^n) \rightarrow 0$, то $\rho(x_{j(n)}^n, \mathbb{R}^2 \setminus X) \rightarrow 0$. Отже, $\rho(x_0, \mathbb{R}^2 \setminus X) = 0$ і $x_0 \in \text{Fr } X$.

З іншого боку, для кожного $\varepsilon > 0$ існують $n_1 \in \mathbb{N}$ і $n > n_1$, такі що $1/n_1 < \varepsilon$ і $\rho(x_{j(n)}^n, x_0) < \varepsilon$. Тоді точки x і x_0 можна з'єднати у $F \cap X$ за допомогою ε -ланцюжка

$$x = x_1^n, x_2^n, \dots, x_{j(n)}^n, x_0.$$

Внаслідок цього, (див. [46], теорема IV.5.4) точки x і x_0 належать до однієї компоненти зв'язності множини $F \cap X$. \square

Лема 13.2.12 *Нехай K — зв'язна двостороння підмножина площини. Якщо множини $B_1 = K \setminus A_1$ і $B_2 = K \setminus A_2$ є нульвимірними, то K є d -множиною.*

Доведення. Зафіксуємо $x \in K$ і відкритий окіл U точки x . Покажемо, що $K(U, x) \cap A_1 \neq \emptyset$.

Множина K ділить площину на дві компоненти зв'язності. Отже вона містить більше однієї точки. Візьмемо $\varepsilon > 0$, таке що $U_{2\varepsilon}(x) \subset U$ і $K \setminus U_{2\varepsilon}(x) \neq \emptyset$.

Згідно Лемі 13.2.11 існує $y \in K(\overline{U_\varepsilon(x)}, x) \cap \text{Fr } \overline{U_\varepsilon(x)}$. З Твердження 13.1.5 слідує, що $y \in K(U, x)$. Крім того, $y \in K \setminus U_\varepsilon(x)$.

Множина B_1 є нульвимірною. Тому простір B_1 допускає базу відкритих околів $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, таких що $\text{Fr } V_\alpha = \emptyset$ у просторі B_1 (в індукованій топології)

для кожного $\alpha \in \Lambda$.

Нехай $x \in B_1$. Тоді $x \in V_\beta$ і $V_\beta \subset U_\varepsilon(x)$ для деякого $\beta \in \Lambda$.

V_β є відкрито-замкненою підмножиною простору B_1 . Якщо $V = B_1 \setminus V_\beta \neq \emptyset$, то множини V і V_β утворюють розбиття простору B_1 .

Припустимо, що $K(U, x) \subset B_1$. Оскільки $y \notin U_\varepsilon(x)$ то $y \in V$ і $V \neq \emptyset$. Тому множини $V_\beta \cap K(U, x)$ і $V \cap K(U, x)$ утворюють розбиття множини $K(U, x)$, що суперечить її зв'язності.

Отже, $K(U, x) \cap A_1 \neq \emptyset$. Співвідношення $K(U, x) \cap A_2 \neq \emptyset$ доводиться подібним чином.

З довільності вибору точки $x \in K$ і її околу U робимо висновок, що K є d -множиною. \square

13.3 Досяжність точок простої підмножини площини з компоненти зв'язності доповнення до неї.

Теорема 13.2.9 є безпосереднім наслідком теореми, оберненої до теореми Жордана про криву, і наступного твердження.

Теорема 13.3.1 *Нехай K — проста підмножина площини. Якщо для деякого $x \in K$ і кожного відкритого околу U точки x множина $K(U, x) \cap A_1$ непорожня, то точка x досяжна з W_1 .*

Доведення. Якщо відомо, що точка x досяжна з W_1 , теорема виконується. Тому далі ми будемо вважати, що $(K(U, x) \cap A_1) \setminus \{x\} \neq \emptyset$ для кожного відкритого околу U точки x .

Зафіксуємо $x_1 \in (K(U_1(x), x) \cap A_1) \setminus \{x\}$.

Нехай для деякого $n \in \mathbb{N}$ вже обрані n попарно різних точок x_1, \dots, x_n , таких що $x_i \in K(U_{1/i}(x), x) \cap A_1$ і $x_i \neq x$, $i = 1, \dots, n$. Нехай

$$\varepsilon_1 = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \rho(x_i, x), \quad \varepsilon = \min\left(\varepsilon_1, \frac{1}{n+1}\right).$$

Зафіксуємо $x_{n+1} \in (K(U_\varepsilon(x), x) \cap A_1) \setminus \{x\}$. З Твердження 13.1.5 слідує включення $x_{n+1} \in K(U_{1/(n+1)}(x), x)$.

Повторюючи цю процедуру по черзі для всіх $n \in \mathbb{N}$, отримаємо послідовність $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, яка має попарно різні елементи і відповідає такій умові:

$$x_n \in (K(U_{1/n}(x), x) \cap A_1) \setminus \{x\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Фіксуємо для кожного $n \in \mathbb{N}$ надріз $\alpha_n : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ області W_1 у точці x_n (тобто просту неперервну криву, для якої $\alpha_n(0) = x_n$ і $\alpha_n((0, 1]) \subset W_1$).

Справедливе наступне твердження.

Лема 13.3.2 *Існує сім'я розрізів $\{\beta_n : I \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{n=2}^\infty$ області W_1 , яка задовольняє наступні вимоги:*

- (i) розріз β_n з'єднує точки x_n і x_{n+1} , $n \geq 2$;
- (ii) $\beta_n(I) \subset U_{1/(n-1)}(x)$, $n \geq 2$;
- (iii) для кожного $n \geq 2$ існує $\tau_n > 0$, таке що $\alpha_2([0, \tau_2]) \subset \beta_2(I)$ і $\alpha_n([0, \tau_n]) \subset (\beta_{n-1}(I) \cap \beta_n(I))$, $n \geq 3$.

Доведення. З Твердження 13.1.5 слідує, що

$$K(U_{1/(n+1)}(x), x) \subset K(U_{1/n}(x), x) \subset K(\overline{U_{1/n}(x)}, x)$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, $x_n, x_{n+1} \in K(\overline{U_{1/n}(x)}, x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Застосуємо для кожного $n \geq 2$ Теорему 13.1.6 до величин $\varepsilon = 1/n$, $\varepsilon_1 = 1/(n-1)$, точок $y_1 = x_n$, $y_2 = x_{n+1}$ і надрізів α_n, α_{n+1} . Отримаємо послідовність $\{\beta_n\}_{n=2}^\infty$ розрізів області W_1 і дві послідовності додатних чисел $\{\tau'_n\}_{n=2}^\infty$, $\{\tau''_n\}_{n=2}^\infty$, які зв'язані співвідношеннями

- (i) $\beta_n(I) \subset U_{1/(n-1)}(x)$, $n \geq 2$;
- (ii) $(\alpha_n([0, \tau'_n]) \cup \alpha_{n+1}([0, \tau''_n])) \subset \beta_n(I)$, $n \geq 2$.

Припустимо, що $\tau_2 = \tau'_2$, $\tau_n = \min(\tau'_n, \tau''_{n-1})$, $n \geq 3$. Тоді послідовності $\{\beta_n\}$ і $\{\tau_n\}$ відповідають Лемі 13.3.2. \square

Нехай $\{\beta_n\}_{n=2}^\infty$ і $\{\tau_n\}_{n=2}^\infty$ — сім'ї розрізів і, відповідно, параметрів з Ле-

ми 13.3.2. З цієї леми слідує, що для кожного $n \geq 2$

$$\alpha_n(\tau_n) \in U_{1/(n-1)}(x)$$

і точки $\alpha_n(\tau_n)$ та $\alpha_{n+1}(\tau_{n+1})$ містяться у спільній компоненті зв'язності множини $U_{1/(n-1)}(x) \cap W_1$. Отже, точки $\alpha_n(\tau_n)$ і $\alpha_{n+1}(\tau_{n+1})$ можна з'єднати у множині $U_{1/(n-1)}(x) \cap W_1$ простою ламаною лінією J_n зі скінченною кількістю ланок (див. [46], теорема V.6.3). Позначимо

$$Q_n = \bigcup_{k=2}^n J_k, \quad A = \bigcup_{n=2}^{\infty} Q_n = \bigcup_{n=2}^{\infty} J_n.$$

Очевидно, множина Q_n є зв'язною і замкненою для кожного $n \geq 2$. Тому множина A зв'язна, оскільки може бути представлена як об'єднання зв'язних множин, що мають спільну точку $\alpha_2(\tau_2)$.

Оскільки $A \setminus Q_n \subset U_{1/(n-1)}(x)$, $n \geq 2$, то $\bar{A} = A \cup \{x\}$. Множина \bar{A} зв'язна, тому що вона є замиканням зв'язної множини, і за побудовою $\bar{A} \setminus \{x\} \subset W_1$.

Подальше доведення базується на наступному твердженні (див. [46], теорема VI.14.3).

Лема 13.3.3 *Нехай $a \in \mathbb{R}^2$ і A є об'єднанням послідовності відрізків, $x_n y_n$, таких що $x_n \rightarrow a$, $y_n \rightarrow a$. Тоді якщо точки a та b ($b \neq a$) належать спільній компоненті зв'язності множини \bar{A} , то існує проста дуга у \bar{A} з кінцями в точках a і b .*

З цієї леми слідує існування простої неперервної кривої $\alpha : I \rightarrow \bar{A}$, що з'єднує точки x і $\alpha_2(\tau_2)$. Оскільки $\bar{A} \setminus \{x\} \subset W_1$, то крива α є надрізом області W_1 у точці x . \square

13.4 Прикінцеві зауваження

Теореми 13.2.9 і 13.3.1 можна переформулювати по іншому. Для цього розглянемо іншу топологію на двосторонній підмножині площини.

Означення 13.4.1 Нехай (X, \mathcal{T}) — топологічний простір. Нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — база відкритих множин у X .

Для кожного $\alpha \in A$ нехай $\{V_{\alpha\beta}\}_{\beta \in B(\alpha)}$ — сім'я всіх компонент зв'язності множини U_α .

Топологію, яку породжують елементи сім'ї $\{V_{\alpha\beta}\}_{\alpha \in A, \beta \in B(\alpha)}$ позначимо $\mathcal{LC}(X, \mathcal{T})$ (або $\mathcal{LC}(X)$, якщо початкова топологія на X зрозуміла з контексту).

Зауваження 13.4.2 Цю топологію неформально характеризує така властивість: для кожної відкритої підмножини W простору (X, \mathcal{T}) всі компоненти зв'язності W відкриті в топології $\mathcal{LC}(X, \mathcal{T})$.

Більш того, як видно з Означення 13.4.1, $\mathcal{LC}(X, \mathcal{T})$ є найбільш слабкою топологією на X , яка відповідає цій властивості.

Отже, це альтернативне означення топології $\mathcal{LC}(X, \mathcal{T})$.

Зауваження 13.4.3 Можна легко перевірити, що простір (X, \mathcal{T}) є локально зв'язним тоді й лише тоді, коли топології \mathcal{T} та $\mathcal{LC}(X, \mathcal{T})$ збігаються.

Використовуючи Означення 13.4.1, можна сформулювати теореми 13.2.9 і 13.3.1 у наступній формі.

Теорема 13.4.4 ([52]) Нехай K — двостороння підмножина площини. Якщо множини A_1 і A_2 є щільними у K у топології $\mathcal{LC}(K)$, то K є простою замкненою кривою.

Теорема 13.4.5 Нехай K — проста підмножина площини. Тоді множини A_1 і A_2 замкнені у топології $\mathcal{LC}(K)$.

Для спеціального класу просторів топологія $\mathcal{LC}(X, \mathcal{T})$ згадується у [47], розділ 6, підрозділ 49.VII (див. також [108]).

А саме, нехай (X, ρ) — метричний простір, що відповідає наступній властивості: для довільних $a, b \in X$ існує зв'язна підмножина $A \subset X$ така що $a, b \in A$ і

$$\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y) < \infty .$$

Тоді коректно означена і є метрикою так звана *відносна відстань*

$$\rho_r : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$\rho_r(a, b) = \inf\{\text{diam } A \mid a, b \in A \text{ і } A \text{ зв'язна}\}.$$

Твердження 13.4.6 *Топологія, індукована метрикою ρ_r збігається з топологією $\mathcal{LC}(X)$.*

Доведення. Фіксуємо $x \in X$. Для $\varepsilon > 0$ позначимо через $X(U_\varepsilon(x), x)$ компоненту зв'язності точки x у множині $U_\varepsilon(x)$.

Тоді у відповідності з Означенням 13.4.1 сім'я $\{X(U_\varepsilon(x), x)\}_{\varepsilon>0}$ утворює базу відкритих околів точки x у топології $\mathcal{LC}(X)$.

З іншого боку, позначимо

$$V_\varepsilon^r(x) = \{y \in X \mid \rho_r(x, y) < \varepsilon\}$$

для кожного $\varepsilon > 0$.

Легка безпосередня перевірка дає нерівності

$$V_{\varepsilon/3}^r(x) \subseteq X(U_\varepsilon(x), x) \subseteq V_{3\varepsilon}^r(x)$$

для всіх $\varepsilon > 0$. \square

Розділ 14

Представлення компактних підмножин \mathbb{R}^n

14.1 Структура множини M_k^n

Дамо інше означення множини M_k^n . Застосуємо для цього трійкову систему числення.

Відомо, що у трійковій системі числення кожне число $u \in I$ може бути представлене у вигляді послідовності $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ елементів множини $\{0, 1, 2\}$ так, що виконується рівність

$$u = \sum_{i \in \mathbb{N}} 3^{-i} u_i.$$

Така послідовність називається трійковим зображенням u . Трійкове зображення не завжди єдине (насправді їх не більше двох).

Точка $x = (x^1, \dots, x^n) \in I^n$ може бути представлена за допомогою n послідовностей $\{x_r^j\}_{r \in \mathbb{N}}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ чисел з множини $\{0, 1, 2\}$. Будемо записувати таке зображення наступним чином $x = ((x_r^1), \dots, (x_r^n))$.

Нехай $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_i = \{0, 1, 2\}^{n \times i}$. Елемент $\alpha \in \mathcal{A}_i$ будемо записувати у вигляді $\alpha = ((\alpha_r^1), \dots, (\alpha_r^n))$, $\alpha_r^j \in \{0, 1, 2\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $r \in \{1, \dots, i\}$.

Одиничний куб I^n розбивається на 3^{ni} кубів, вершини яких належать до множини $\{s/3^i\}_{s=0}^{3^i}$, а ребра паралельні координатним осям і мають довжину

3^{-i} . Назвемо елементи цього розбиття *кубами рангу i* .

Елементам $\alpha = ((\alpha_r^1), \dots, (\alpha_r^n))$ множини \mathcal{A}_i можна зіставити елементи множини кубів рангу i за наступним правилом

$$I_{i,\alpha} = \{x = ((x_r^1), \dots, (x_r^n)) \in I^n \mid x_r^j = \alpha_r^j \ \forall j = 1, \dots, n, \ r = 1, \dots, i\}.$$

Інакше це можна записати таким чином:

$$I_{i,\alpha} = \prod_{j=1}^n [b^j, b^j + 3^{-i}], \quad \text{де } b^j = \sum_{r=1}^i 3^{-r} \alpha_r^j.$$

Зрозуміло, що така відповідність елементів множини \mathcal{A}_i і кубів рангу i є бієктивною.

Нехай $|A|$ позначає потужність множини A .

Безпосередня перевірка показує для кожного $i \in \mathbb{N}$ куб $I_{i,\alpha}$ рангу i міститься в множині $M_k^n(i)$ тоді й лише тоді, коли

$$|\{j \mid (\alpha_r^j = 0) \vee (\alpha_r^j = 2)\}| \geq (n - k) \quad \text{для кожного } r \in \{1, \dots, i\}.$$

Отже, $x \in M_k^n(i)$ тоді й тільки тоді, коли існує трійкове зображення $x = ((x_r^1), \dots, (x_r^n))$, для якого

$$|\{j \mid (x_r^j = 0) \vee (x_r^j = 2)\}| \geq (n - k) \quad \text{для кожного } r \in \{1, \dots, i\}. \quad (14.1.1)$$

Позначимо через \mathcal{N}_s^n сім'ю всіх підмножин J множини $\{1, \dots, n\}$, таких що $|J| = s$. Тоді зі співвідношення (14.1.1) слідує таке твердження: $x \in M_k^n(i)$ тоді й лише тоді, коли існують трійкове зображення $x = ((x_r^1), \dots, (x_r^n))$ і $J(r) \in \mathcal{N}_{n-k}^n$, $r = 1, \dots, i$, які відповідають умові

$$x_r^j = 0 \text{ або } x_r^j = 2 \quad \text{для всіх } j \in J(r) \text{ і } r = 1, \dots, i. \quad (14.1.2)$$

Внаслідок цього $x \in M_k^n$ тоді й лише тоді, коли існують трійкове зображення $x = ((x_r^1), \dots, (x_r^n))$ і $J(i) \in \mathcal{N}_{n-k}^n$, такі що $x_i^j = 0$ або $x_i^j = 2$ для кожного $j \in J(i)$, $i \in \mathbb{N}$.

Скажемо, що $x \in M_k^n$ має скінченний порядок, якщо існують трійкове зображення $x = ((x_r^1), \dots, (x_r^n))$ і $m \in \mathbb{N}$, які відповідають наступній умові:

$$\exists J \in \mathcal{N}_{n-k}^n : (x_r^j = 0) \vee (x_r^j = 2) \quad \forall j \in J, i \geq m. \quad (14.1.3)$$

Назвемо *порядком* $x \in M_k^n$ найменше m , що відповідає умові (14.1.3), якщо x має скінченний порядок, або ∞ у протилежному випадку. Порядок x будемо позначати $\text{ord}(x)$.

Для кожного $i \in \mathbb{N}$ означимо

$$C_k^n(i) = \{x \in M_k^n \mid \text{ord}(x) \leq i\}.$$

Очевидно, $C_k^n(i) \subset C_k^n(i+1)$, $i \in \mathbb{N}$.

Доведемо, що всі множини $C_k^n(i)$, $i \in \mathbb{N}$, компактні.

Нехай $J = \{j^1, \dots, j^s\} \in \mathcal{N}_s^n$ і $a = (a^1, \dots, a^s) \in \mathbb{R}^s$. Позначимо через $l_J(a)$ перетин I^n з $(n-s)$ -вимірною площиною

$$\{x = (x^1, \dots, x^n) \mid x^{j^1} = a^1, \dots, x^{j^s} = a^s\}.$$

Легко бачити, що множина $l_J(a)$ гомеоморфна I^{n-s} .

Безпосередня перевірка показує, що

$$C_k^n(1) = \bigcup_{J \in \mathcal{N}_{n-k}^n} \bigcup_{a \in C^{n-k}} l_J(a), \quad (14.1.4)$$

де C^{n-k} — добуток $n-k$ примірників множини Кантора C . Ця множина представлена у вигляді скінченного об'єднання підмножин, гомеоморфних $C^{n-k} \times I^k$, отже є компактом.

Нехай тепер $i > 1$ і $\alpha = ((\alpha_r^1), \dots, (\alpha_r^n)) \in \mathcal{A}_i$. Розглянемо афінне відображення $\psi_{i,\alpha} : I^n \rightarrow I_{i,\alpha}$, яке зіставляє точці $x = ((x_r^1), \dots, (x_r^n)) \in I^n$ точку

$y = ((y_r^1), \dots, (y_r^n))$ за правилом

$$y_r^j = \begin{cases} \alpha_r^j, & \text{якщо } r \leq i, \\ x_{r-i}^j, & \text{якщо } r > i. \end{cases}$$

Легко бачити, що

$$C_k^n(i) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_i; I_{i,\alpha} \subset M_k^n(i)} \psi_{i,\alpha}(C_k^n(1)), \quad (14.1.5)$$

отже є скінченним об'єднанням компактів, кожен з яких гомеоморфний $C_k^n(1)$.

Оскільки $\dim C_k^n(1) = k$, то з Твердження 1.4.2 і 1.4.3 слідує, що

$$\dim C_k^n(i) = k \quad \text{для кожного } i \in \mathbb{N}. \quad (14.1.6)$$

Означимо

$$C_k^n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_k^n(i) = \{x \in M_k^n \mid \text{ord } x < \infty\},$$

$$F_k^n = M_k^n \setminus C_k^n = \{x \in M_k^n \mid \text{ord } x = \infty\}.$$

Тоді C_k^n і F_k^n є відповідно F_σ і G_δ підмножинами M_k^n . Неважко перевірити, що обидві підмножини всюди щільні у M_k^n .

Твердження 14.1.1 $\dim C_k^n = k$.

Доведення. Це прямий наслідок співвідношення (14.1.6) і Твердження 1.4.3.

□

14.2 k -вимірні компактні підмножини \mathbb{R}^n , які містять множину, гомеоморфну I^k , та їх представлення

Нехай X — k -вимірна компактна підмножина \mathbb{R}^n і f — вкладення X у M_k^n .
Означимо

$$X_1(f) = f(X) \cap C_k^n, \quad X_2(f) = f(X) \cap F_k^n.$$

Пара $X(f) = (X_1(f), X_2(f))$ називається *представленням множини X , асоційованим із вкладенням f* .

Теорема 14.2.1 (С. Максименко, М. Панков, Є. Полулях, див. [53])

Нехай X є k -вимірною компактною підмножиною \mathbb{R}^n і існує представлення $X(f)$ множини X , для якого $\dim X_1(f) = k$.

Тоді X містить підмножину, що гомеоморфна I^k .

Доведення цієї теореми спирається на наступну лему.

Лема 14.2.2 Нехай Y є k -вимірною компактною підмножиною $C_k^n(1)$.

Тоді Y містить підмножину, що гомеоморфна I^k .

Доведення. Для кожного $J \in \mathcal{N}_{n-k}^n$ означимо

$$C_J = \bigcup_{a \in C^{n-k}} l_J(a).$$

Співвідношення (14.1.4) показує, що

$$C_k^n(1) = \bigcup_{J \in \mathcal{N}_{n-k}^n} C_J.$$

Нехай $Y_J = Y \cap C_J$. Тоді

$$Y = \bigcup_{J \in \mathcal{N}_{n-k}^n} Y_J.$$

Для кожного $J \in \mathcal{N}_{n-k}^n$ множина Y_J є компактом і внаслідок Теорема 1.4.4 існує $J \in \mathcal{N}_{n-k}^n$, для якого $\dim Y_J = k$.

Доведемо, що множина Y_J містить підмножину, гомеоморфну I^k . Розглянемо проєкцію pr множини Y_J на $(n-k)$ -вимірну координатну площину, породжену осями $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}$, де $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = J$. Легко бачити, що $\text{pr}(Y_J) \subset C^{n-k}$ і відображення $\text{pr} : Y_J \rightarrow C^{n-k}$ замкнене. Нагадаємо, що $\dim C^{n-k} = 0$, отже внаслідок Теорема 1.4.5 існує $y \in C^{n-k} \subset \mathbb{R}^{n-k}$, таке що $\dim \text{pr}^{-1}(y) = k$. Оскільки $\text{pr}^{-1}(y) \subset l_J(y)$ і $l_J(y)$ гомеоморфна I^k , то з рівності $\dim \text{pr}^{-1}(y) = k$ слідує, що внутрішність підмножини $\text{pr}^{-1}(y)$ простору $l_J(y)$ непорожня, тобто $\text{pr}^{-1}(y)$ містить підмножину, що гомеоморфна I^k . \square

Доведення Теорема 14.2.1. Кожне $C_k^n(i)$ може бути представлене, як скінченне об'єднання підмножин, що гомеоморфні $C_k^n(1)$, див. рівність (14.1.5), отже

$$C_k^n = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_k^n(i) = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} C_s,$$

де кожна множина C_s гомеоморфна $C_k^n(1)$. Нехай $Y_s = Y \cap C_s$. Тоді $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Y_i$ і Теорема 1.4.4 гарантує існування індекса $i \in \mathbb{N}$, для якого $\dim Y_i = k$.

Для завершення доведення Теорема лишається застосувати Твердження 1.4.2 і Лему 14.2.2. \square

Розділ 15

Ітераційна стійкість центра Біркгофа динамічної системи

Відомо, що при переході від динамічної системи з дискретним часом, що породжена гомеоморфізмом g топологічного простору на себе, до системи, що породжена деякою його ітерацією $g^n = g \circ \dots \circ g$, неблукаюча множина може змінюватись. Приклади такої поведінки наведено у роботах [109], [110]. З іншого боку, множини рекурентних точок (див. [111]), ланцюгово рекурентних точок (див. [112]) і граничні множини не змінюються, коли ми переходимо від g до g^n . Виникає природне запитання, що відбувається при такому переході з центром Біркгофа динамічної системи.

Ми доводимо, що при переході від динамічної системи, що породжена гомеоморфізмом Хаусдорфового топологічного простору на себе, до системи, породженої деякою ітерацією цього гомеоморфізму, центр Біркгофа не змінюється.

15.1 Неблукаючі множини і ітерації гомеоморфізмів

Лема 15.1.1 *Нехай $g : X \rightarrow X$ — гомеоморфізм. Тоді $\Omega(g^n) \subseteq \Omega(g)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Нехай $x \in \Omega(g^n)$ і U_x — довільний окіл x . Тоді за означенням знайдеться $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, для якого $(g^n)^l(U_x) \cap U_x = g^{nl}(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$. Отже, $x \in \Omega(g)$, оскільки окіл U_x довільний і $N(U_x) = nl \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. \square

Нижче ми доведемо наступну теорему і використаємо її для доведення ітераційної стійкості центра Біркгофа.

Теорема 15.1.2 *Нехай простір X є Хаусдорфовим. Тоді для кожного гомеоморфізму $g : X \rightarrow X$ і для $n \geq 2$ виконується рівність $\text{Int}(\Omega(g) \setminus \Omega(g^n)) = \emptyset$.*

Наслідок 15.1.3 *Якщо $\Omega(g) = X$, то $\Omega(g^n) = \Omega(g) = X$ для всіх $n \geq 2$.*

Доведення. Оскільки множина $\Omega(g^n)$ замкнена, то множина $\Omega(g) \setminus \Omega(g^n) = X \setminus \Omega(g^n)$ відкрита в X . Але по Теоремі 15.1.2 вона не має внутрішніх точок в X . Отже $X \setminus \Omega(g^n) = \emptyset$. \square

Для доведення Теоремі 15.1.2 нам будуть потрібні деякі додаткові поняття і допоміжні результати.

Означення 15.1.4 *Скажемо, що точка x зачеплена з точкою y під дією гомеоморфізму g , якщо для як завгодно малих околів V_x та V_y точок x і y , відповідно, існує $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, для якого $g^t(V_x) \cap V_y \neq \emptyset$. Інакше кажучи, g -орбіта довільного околу точки x перетинається з довільним околom точки y .*

Якщо при цьому число t завжди можна вибрати додатним (від'ємним), то точка x називається ω -зачепленою (α -зачепленою) з y .

Приклад 15.1.5 *Неблукуюча точка зачеплена сама з собою.*

Лема 15.1.6 *Нехай простір X є Хаусдорфовим, $g : X \rightarrow X$ — гомеоморфізм і нехай $x \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$.*

Тоді існує $k \in \{1, \dots, n\}$, таке що точка x зачеплена з $g^k(x)$ під дією g^n .

Зауваження 15.1.7 *Очевидно, для того, щоб точки x і $g^k(x)$ були зачеплені під дією g досить, щоб виконувалась наступна умова: для довільного околу U точки x існує $N \neq k$ таке, що $U \cap g^{k-N}(U) \neq \emptyset$.*

Доведення лема 15.1.6. Припустимо, що $x \in \Omega(g) \setminus \Omega(g^n)$.

Оскільки $x \notin \Omega(g^n)$, то існує окіл W точки x , такий що $W \cap g^{nM}(W) = \emptyset$ для всіх $M \in \mathbb{Z}$.

Нехай U — деякий окіл точки x , який міститься у W . З одного боку $x \in \Omega(g)$, тому існує $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, для якого $U \cap g^m(U) \neq \emptyset$. З іншого боку $U \subset W$, отже $m \not\equiv 0 \pmod{n}$ і існують $s \in \{1, \dots, n-1\}$ та $N \in \mathbb{Z}$, для яких $U \cap g^{s-nN}(U) \neq \emptyset$. Очевидно, $s - nN \neq 0$.

Нехай тепер U та V — околи точки x , такі що $V \subset U \subset W$. Нехай для чисел $s = s(V) \in \{1, \dots, n-1\}$ і $N = N(V) \in \mathbb{Z}$ виконується співвідношення $V \cap g^{s-nN}(V) \neq \emptyset$. Очевидно, тоді $U \cap g^{s-nN}(U) \neq \emptyset$.

Нарешті, нехай $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — деяка база околів точки x (кожен окіл V точки x містить деякий окіл U_α , $\alpha = \alpha(V) \in A$). Не обмежуючи загальності міркувань можемо вважати, що $U_\alpha \subset W$ для всіх $\alpha \in A$. Тоді для кожного $\alpha \in A$ знайдуться $s(\alpha) \in \{1, \dots, n-1\}$ і $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$, для яких виконується рівність $U_\alpha \cap g^{s(\alpha)-nN(\alpha)}(U) \neq \emptyset$.

Позначимо $A_i = \{\alpha \in A \mid s(\alpha) = i\}$. Легко перевірити, що оскільки множина $\{1, \dots, n-1\}$ скінченна, то існує $k \in \{1, \dots, n-1\}$, таке що сім'я $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A_k}$ є базою околів точки x .

Внаслідок цього для кожного околу U точки x знайдеться $\alpha \in A_k$, для якого $x \in U_\alpha \subset U$. Отже $U \cap g^{k-nN(\alpha)}(U) \neq \emptyset$. З довільності вибору околу U слідує, що x і $g^k(x)$ зачеплені під дією g^n (див. Зауваження вище). \square

Нехай $g : X \rightarrow X$ — гомеоморфізм, $n \geq 2$ і $K = \{k_1, \dots, k_s\}$ — скінченна послідовність чисел, не обов'язково попарно різних, таких що $k_i \in \{0, \dots, n-1\}$, $i = 1, \dots, s$.

Означення 15.1.8 Скажемо, що точка $x \in K$ є K -зачепленою під дією гомеоморфізму g^n , якщо для кожного околу U точки x знайдуться такі цілі числа N_1, \dots, N_s відмінні від 0, що

$$U \cap \bigcap_{i=1}^s g^{k_i - nN_i}(U) \neq \emptyset.$$

Зауваження 15.1.9 K -зачепленість точки x під дією g^n означає, що x одночасно зачеплена з точками $g^{k_1}(x), \dots, g^{k_s}(x)$.

Якщо $0 \in K$, то x зачеплена під дією g^n з собою, тобто $x \in \Omega(g^n)$.

Лема 15.1.10 Нехай простір X — Хаусдорфів, $x \in \text{Int}(\Omega(g) \setminus \Omega(g^n))$ і $K = \{k_1, \dots, k_s\}$ — скінченна послідовність чисел, таких що $k_i \in \{0, \dots, n-1\}$, $i = 1, \dots, s$.

Припустимо, що точка x є K -зачепленою під дією g^n . Тоді знайдеться таке $k' \in \{1, \dots, n-1\}$, що x є K' -зачепленою під дією g^n , де

$$K' = \{k_1, \dots, k_s, k', k_1 + k', \dots, k_s + k'\} \pmod{n}$$

і всі суми беруться по модулю n .

Доведення. Нехай U — деякий окіл точки x . Оскільки множина $\text{Int}(\Omega(g) \setminus \Omega(g^n))$ є відкритою, не обмежуючи загальності можна вважати, що $U \subset \text{Int}(\Omega(g) \setminus \Omega(g^n))$.

Нехай N_1, \dots, N_s — такі цілі числа, відмінні від 0, що виконується нерівність

$$V_0 = U \cap \bigcap_{i=1}^s g^{k_i - nN_i}(U) \neq \emptyset.$$

Тоді $V_0 \subset U \subset \text{Int}(\Omega(g) \setminus \Omega(g^n))$. Нехай $y \in V_0$.

Легко бачити, що орбіта точки y під дією g не є періодичною, оскільки $y \notin \Omega(g^n)$. Отже скориставшись тим, що простір X є Хаусдорфовим, можемо знайти такий відкритий окіл V точки y , що $V \subset V_0$ і $V \cap g^r(V) = \emptyset$ для всіх $r \neq 0$, для яких виконується нервність

$$|r| \leq 2n \left(\max_{i \in \{1, \dots, s\}} |N_i| + 2 \right). \quad (15.1.1)$$

Скористаємось Лемою 15.1.6 (див. також Зауваження 15.1.7) і знайдемо числа $k' \in \{1, \dots, n-1\}$ і $M \in \mathbb{Z}$, такі що $V \cap g^{k' - nM}(V) \neq \emptyset$. Тоді

$$\emptyset \neq V_0 \cap g^{k' - nM}(V_0) = U \cap \bigcap_{i=1}^s g^{k_i - nN_i}(U) \cap g^{k' - nM}(U) \cap \bigcap_{i=1}^s g^{(k_i + k') - n(N_i + M)}(U).$$

Нехай $[\cdot]$ і $\{\cdot\}$ позначають цілу і дробову частину числа, відповідно. Тоді для кожного $i \in \{1, \dots, s\}$ маємо

$$\begin{aligned} (k_i + k') - n(N_i + M) &= n \left(\left[\frac{k_i + k'}{n} \right] + \left\{ \frac{k_i + k'}{n} \right\} \right) - n(N_i + M) \\ &= (k_i + k' \pmod{n}) - n \left(N_i + M - \left[\frac{k_i + k'}{n} \right] \right). \end{aligned}$$

Позначимо

$$k'_i = k_i + k' \pmod{n}, \quad M_i = \left(N_i + M - \left[\frac{k_i + k'}{n} \right] \right).$$

Тоді

$$\emptyset \neq U \cap \bigcap_{i=1}^s g^{k_i - nN_i}(U) \cap g^{k' - nM}(U) \cap \bigcap_{i=1}^s g^{k'_i - nM_i}(U)$$

і, оскільки $N_i \neq 0$ при $i = \{1, \dots, s\}$, то для завершення доведення нам досить показати, що всі числа M, M_1, \dots, M_s відмінні від нуля.

Нехай $i \in \{1, \dots, s\}$. Очевидно, що $|k_i + k'| < 2n$. Тому $|M_i| \geq |N_i + M| - 1 \geq |M| - |N_i| - 1$.

З іншого боку, оскільки $k' - nM \neq 0$, то зі співвідношення (15.1.1) отримуємо $|k' - nM| > 2n \left(\max_{i \in \{1, \dots, s\}} |N_i| + 2 \right)$. Тому

$$n(|M| + 1) > |nM| + |k'| > |k' - nM| > 2n \left(\max_{i \in \{1, \dots, s\}} |N_i| + 2 \right) > 2n(|N_i| + 2),$$

отже $|M| > 2|N_i| + 3 > 0$, внаслідок чого $|M_i| > |N_i| + 2 > 0$. \square

Доведення Теорема 15.1.2. Нехай $x \in \text{Int}(\Omega(g) \setminus \Omega(g^n))$. Тоді згідно Лемі 15.1.6 (див. також Зауваження 15.1.7) існує таке $k_1 \in \{1, \dots, n-1\}$, що точка $x \in K_1$ -зачепленою під дією g^n , де $K_1 = \{k_1\}$.

З Лемі 15.1.10 слідує існування такого $k_2 \in \{1, \dots, n-1\}$, що $x \in K_2$ -зачепленою під дією g^n , де

$$K_2 = \{k_1, k_2, k_1 + k_2\} \pmod{n}$$

і сума $k_1 + k_2$ береться по модулю n .

Аналогічно, існує $k_3 \in \{1, \dots, n - 1\}$, таке що $x \in K_2$ -зачепленою під дією g^n , де

$$K_3 = \{k_1, k_2, k_1 + k_2, k_3, k_1 + k_3, k_2 + k_3, k_1 + k_2 + k_3\} \pmod{n}$$

і всі суми беруться по модулю n . Помітимо, що елементами послідовності K_3 є суми всіх непорожніх підпослідовностей послідовності $\{k_1, k_2, k_3\}$, взяті по модулю n .

Аналогічні міркування на s -му кроці приводять до числа $k_s \in \{1, \dots, n - 1\}$, послідовності $\{k_1, \dots, k_s\}$, а також послідовності K_s , елементами якої є суми всіх непорожніх підпослідовностей послідовності $\{k_1, \dots, k_s\}$, взяті по модулю n . Причому точка $x \in K_s$ -зачепленою під дією g^n .

Тоді для досить великого s існує підпослідовність послідовності $\{k_1, \dots, k_s\}$ довжини n , всі елементи якої однакові. Сума цієї підпослідовності по модулю n дорівнює нулю і є елементом послідовності K_s . Отже, послідовність K_s містить 0 і $x \in \Omega(g^n)$ (див. Зауваження 15.1.9).

Отримана суперечність завершує доведення. \square

15.2 Ітераційна стійкість центра Біркгофа

Відомо, що для повних метричних просторів центр Біркгофа збігається з замиканням множини точок стійких за Пуасоном, отже зберігається при переході від гомеоморфізму до деякої його ітерації. У загальному випадку, для неповних метричних просторів центр Біркгофа може і не збігатися з замиканням множини точок стійких за Пуасоном (див. [49]).

Виявляється, що не дивлячись на ітераційну нестійкість неблукаючої множини, центр Біркгофа динамічної системи зберігається при переході від відображення, що її породжує, до його ітерації.

Теорема 15.2.1 (І. Ю. Власенко, Є. О. Полулях, див. [51], [55]) *Для*

кожного гомеоморфізму $g : X \rightarrow X$ Хаусдорфового топологічного простору X виконується рівність $BC(g^n) = BC(g)$.

Доведення цієї теореми спирається на Наслідок 15.1.3 і дві леми, які ми зараз розглянемо.

Лема 15.2.2 $BC(f^n) \subseteq BC(f)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Лема 15.2.3 Нехай $g : X \rightarrow X$ — гомеоморфізм. Якщо підпростір $A \subset X$ є інваріантним відносно g , тобто $g(A) = A$, то $BC(g|_A) \subseteq BC(g)$.

Перед тим, як доводити леми, відмітимо одне просте твердження.

Твердження 15.2.4 (див. [86]) Нехай $g : X \rightarrow X$ — гомеоморфізм і підпростір $A \subset X$ є інваріантним відносно g . Тоді $\Omega(g|_A) \subseteq \Omega(g)$.

Доведення. Нехай $x \in \Omega(g|_A)$ і $V \subset X$ — деякий окіл точки x в X . Оскільки $U = V \cap A$ є околом точки x в A і точка x є неблукаючою для $(A, g|_A)$, то існує $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, для якого $U \cap g^m|_A(U) \neq \emptyset$. Але тоді $V \cap g^m(V) \supset (V \cap A) \cap g^m(V \cap A) \neq \emptyset$. \square

Доведення леми 15.2.2. Нехай простір X і відображення g відповідають умовам Леми. Фіксуємо $n \in \mathbb{N}$.

Нагадаємо, що при побудові центра Біркгофа динамічної системи (X, g) виникає сім'я її замкнених інваріантних підмножин, поіндексованих за допомогою ординалів:

$$\begin{aligned} \Omega(g) = \Omega_1(g) \supseteq \Omega_2(g) \supseteq \cdots \supseteq \\ \supseteq \Omega_\omega(g) \supseteq \Omega_{\omega+1}(g) \supseteq \cdots \end{aligned} \quad (15.2.1)$$

Ця сім'я впорядкована за включенням. При цьому за побудовою співвідношення

$$\Omega_\alpha(g) \supseteq \Omega_\beta(g) \quad \text{та} \quad \alpha \leq \beta$$

рівносильні, а множина індексів сім'ї (15.2.1) приймає значення в класі ординалів Ξ .

Аналогічно, для динамічної системи (X, g^n) розглянемо сім'ю

$$\begin{aligned} \Omega(g^n) = \Omega_1(g^n) \supseteq \Omega_2(g^n) \supseteq \cdots \supseteq \\ \supseteq \Omega_\omega(g^n) \supseteq \Omega_{\omega+1}(g^n) \supseteq \cdots . \end{aligned} \quad (15.2.2)$$

Вона має за побудовою ті ж властивості, що й сім'я (15.2.1).

Скористаємося трансфінітною індукцією для доведення того, що

$$\Omega_\lambda(g) \supseteq \Omega_\lambda(g^n) \quad \forall \lambda \in \Xi . \quad (15.2.3)$$

База індукції. Нехай $\lambda = 1$. Тоді співвідношення

$$\Omega_1(g) = \Omega(g) \supseteq \Omega(g^n) = \Omega_1(g^n)$$

Слідє з Лема 15.1.1.

Крок індукції. Нехай $\lambda \in \Xi$. Припустимо, що для всіх $\alpha < \lambda$ справедлива нерівність $\Omega_\alpha(g) \supseteq \Omega_\alpha(g^n)$.

Розглянемо два випадка.

(i) Для елемента λ існує попередній елемент $\hat{\lambda} < \lambda$, тобто для довільного $\beta \in \Xi$ або $\beta \leq \hat{\lambda}$, або $\beta \geq \lambda$.

Для спрощення позначень покладемо $X = \Omega_{\hat{\lambda}}(g)$ і $X' = \Omega_{\hat{\lambda}}(g^n)$. Ці множини інваріантні відносно g і за припущенням індукції $X \supseteq X'$. Внаслідок цього

$$\Omega_\lambda(g) \equiv \Omega(g|_X) \stackrel{\text{Твердж. 15.2.4}}{\supseteq} \Omega(g|_{X'}) \stackrel{\text{Лема 15.1.1}}{\supseteq} \Omega(g^n|_{X'}) \equiv \Omega_\lambda(g^n) .$$

(ii) Елемент λ не має попереднього.

Тоді за побудовою

$$\Omega_\lambda(g) = \bigcap_{\beta < \lambda} \Omega_\beta(g) \supseteq \bigcap_{\beta < \lambda} \Omega_\beta(g^n) = \Omega_\lambda(g^n) .$$

Ця нерівність випливає з включень $\Omega_\beta(g) \supseteq \Omega_\beta(g^n)$, $\beta < \lambda$.

Отже, співвідношення (15.2.3) справедливо по індукції.

Нехай $\lambda, \lambda' \in \Xi$ — глибина центрів динамічних систем (X, g) і (X, g^n) , відповідно. Позначимо $\beta = \max(\lambda, \lambda')$. Тоді $BC(g) = \Omega_\beta(g) \supseteq \Omega_\beta(g^n) = BC(g^n)$. \square

Доведення Лема 15.2.3. Воно майже дослівно повторює міркування доведення Лема 15.2.2 лише з тією різницею, що замість g^n потрібно розглянути звуження $g|_{X'}$, а замість посилання на Лему 15.1.1 про те, що $\Omega(g) \supseteq \Omega(g^n)$ треба скористатися Твердженням 15.2.4, яке говорить, що $\Omega(g) \supseteq \Omega(g|_{X'})$. Деталі ми лишаємо читачеві. \square

Доведення Теорема 15.2.1. Розглянемо обмеження гомеоморфізма g на свій центр Біркгофа $BC(g)$, який ми позначимо для простоти B . Оскільки $B = \Omega(g|_B)$, то $B = BC(g|_B)$. Крім того по Теоремі 15.1.2 маємо $\Omega(g^n|_B) = B$, отже $B = BC(g^n|_B)$. Таким чином

$$B = BC(g|_B) \stackrel{\text{Насл. 15.1.3}}{=} BC(g^n|_B) \stackrel{\text{Лема 15.2.3}}{\subseteq} BC(g^n) \stackrel{\text{Лема 15.2.2}}{\subseteq} B.$$

Внаслідок цього $BC(g^n) = B = BC(g)$. \square

Розділ 16

Про вкладення фазових просторів динамічних систем Понтрягіна у двовимірні поверхні

16.1 Деякі властивості розшарувань Понтрягіна

Твердження 16.1.1 *Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ і $T_t : N \rightarrow N$ — відповідно розшарування Понтрягіна і спеціальний потік, побудовані по гомеоморфізму $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$.*

Нехай U — власна відкрита підмножина S^1 . Тоді існує тривіалізація $\varphi : U \times \Gamma \rightarrow p^{-1}(U)$ розшарування ξ над U (гомеоморфізм, для якого виконується рівність $\text{pr}_1 = p \circ \varphi$, де $\text{pr}_1 : U \times \Gamma \rightarrow U$ — проекція).

Якщо множина U додатково є зв'язною, то кожна тривіалізація φ розшарування ξ над U відповідає такій властивості: для кожної множини $U \times \{x\}$, $x \in \Gamma$, існує орбіта потоку T_t , яка містить множину $\varphi(U \times \{x\})$.

Доведення. Нехай U — відкрита власна підмножина S^1 .

Спочатку припустимо, що $h(0) \notin U$. Позначимо

$$W_0 = S^1 \setminus \{h(0)\} = I \setminus \{0, 1\} = (0, 1) \quad (16.1.1)$$

З означення ξ і з комутативної діаграми (1.8.2) легко слідує, що відображення

$$\psi_0 = H|_{W_0 \times \Gamma} : W_0 \times \Gamma \rightarrow H(W_0 \times \Gamma) = p^{-1}(W_0)$$

є тривіалізацією ξ над W_0 , зокрема $p \circ \psi_0 = \text{pr}_1 : W_0 \times \Gamma \rightarrow W_0$.

Тоді зважаючи на те, що $U \subset W_0$ за попереднім припущенням, відображення $\varphi = \psi_0|_{U \times \Gamma} = H|_{U \times \Gamma}$ є тривіалізацією ξ над U .

Нехай тепер $h(0) \in U$. Оскільки за умовами твердження $U \neq S^1$, то знайдеться $\tau \in (0, 1)$, таке що $s = h(\tau) \notin U$.

Легко бачити, що для кожного $t \in \mathbb{R}$ відображення $T_t : N \rightarrow N$ разом з відображенням $R_t : S^1 \rightarrow S^1$, $R_t(h(u)) = h(u + t \bmod 1)$, $u \in [0, 1)$, дають ізоморфізм розшарування ξ на себе (обернений морфізм задається парою відображень (T_{-t}, R_{-t})).

Позначимо

$$W_\tau = S^1 \setminus \{h(\tau)\} = R_\tau(W_0). \quad (16.1.2)$$

Тоді $p^{-1}(W_\tau) = T_\tau(p^{-1}(W_0))$.

Нехай $R_{-\tau} \times \text{id}_\Gamma : S^1 \times \Gamma \rightarrow S^1 \times \Gamma$,

$$R_{-\tau} \times \text{id}_\Gamma : (u, x) \mapsto (R_{-\tau}(u), x), \quad (u, x) \in S^1 \times \Gamma.$$

Зрозуміло, що це відображення є гомеоморфізмом і $R_{-\tau} \times \text{id}_\Gamma(W_\tau \times \Gamma) = W_0 \times \Gamma$.

Розглянемо відображення

$$\psi_\tau = T_\tau \circ \psi_0 \circ (R_{-\tau} \times \text{id}_\Gamma)|_{W_\tau \times \Gamma} : W_\tau \times \Gamma \rightarrow p^{-1}(W_\tau).$$

Помітимо, що

$$\begin{aligned} p \circ \psi_\tau &= p \circ T_\tau \circ \psi_0 \circ (R_{-\tau} \times \text{id}_\Gamma) \Big|_{W_\tau \times \Gamma} = R_\tau \circ p \circ \psi_0 \circ (R_{-\tau} \times \text{id}_\Gamma) \Big|_{W_\tau \times \Gamma} \\ &= R_\tau \circ \text{pr}_1 \circ (R_{-\tau} \times \text{id}_\Gamma) \Big|_{W_\tau \times \Gamma} = R_\tau \circ R_{-\tau} \circ \text{pr}_1 \\ &= \text{pr}_1 : W_\tau \times \Gamma \rightarrow W_\tau. \end{aligned}$$

Оскільки $U \subset W_\tau$, то відображення $\varphi = \psi_\tau \Big|_{U \times \Gamma} : U \times \Gamma \rightarrow p^{-1}(U)$ дає потрібну нам тривіалізацію ξ над U .

Зауважимо, що для тривіалізації ψ_0 над W_0 за означенням потоку T_t кожна множина $\psi_0(W_0 \times \{x\})$, $x \in \Gamma$, міститься у деякій орбіті T_t . З попередніх міркувань легко слідує, що аналогічне твердження справедливе також для кожного ψ_τ , $\tau \in [0, 1)$.

Нехай U — зв'язна відкрита власна підмножина S^1 , а $\varphi : U \times \Gamma \rightarrow p^{-1}(U)$ — деяка тривіалізація ξ над U . Як і раніше, знайдеться $\tau \in [0, 1)$, таке що $h(\tau) \notin U$. Тоді $U \subset W_\tau$ і $p^{-1}(U) \subset p^{-1}(W_\tau)$.

Розглянемо відображення $\theta = \text{pr}_2 \circ \psi_\tau^{-1} \circ \varphi : U \times \Gamma \rightarrow \Gamma$. Тут $\text{pr}_2 : W_\tau \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ — проекція на другий множник.

Нехай $x \in \Gamma$. Оскільки множина $U \times \{x\}$ зв'язна, то підмножина $\theta(U \times \{x\})$ множини Кантора Γ також зв'язна. Отже існує $y \in \Gamma$, для якого $\psi_\tau^{-1} \circ \varphi(U \times \{x\}) \subset W_\tau \times \{y\}$. Але множина $\psi_\tau(W_\tau \times \{y\})$ міститься в деякій орбіті T_t . Внаслідок цього $\varphi(U \times \{x\}) \subset \psi_\tau(W_\tau \times \{y\})$ теж міститься в деякій орбіті T_t . \square

Твердження 16.1.2 *Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ і $T_t : N \rightarrow N$ — ті ж, що й у попередньому твердженні.*

Для довільної простої замкненої кривої $\gamma : S^1 \rightarrow N$ множина $\gamma(S^1)$ збігається з однією з періодичних орбіт потоку T_t .

Доведення. Нехай $\gamma : S^1 \rightarrow N$ — проста замкнена крива. Доведемо спочатку, що її образ $\gamma(S^1)$ є підмножиною деякої орбіти спеціального потоку T_t .

Нехай $u \in S^1$, $s = p \circ \gamma(u) \in S^1$. Очевидно, знайдеться $\tau = \tau(u) \in [0, 1)$, таке що $h(\tau) \neq s$. Тоді $s \in W_\tau$. Оскільки множина $p^{-1}(W_\tau)$ відкрита в N

і простір S^1 локально зв'язний, то існує зв'язний окіл $U(u) \in S^1$ точки u , такий що $\gamma(U(u)) \subset p^{-1}(W_\tau)$. Тоді $\text{pr}_2 \circ \psi_\tau^{-1} \circ \gamma(U(u))$ — зв'язна підмножина множини Кантора Γ , отже існує $x \in \Gamma$, для якого $\gamma(U(u)) \subset \psi_\tau(W_\tau \circ \{x\})$. Внаслідок цього $\gamma(U(u))$ є підмножиною деякої орбіти потоку T_t .

Нехай $v_1, v_2 \in S^1$. Очевидно набір множин $\{U(u)\}_{u \in S^1}$ утворює відкрите покриття зв'язного простору S^1 . Знайдеться скінченний ланцюжок, утворений елементами цього покриття, що з'єднує v_1 з v_2 (див. [47]). Тобто знайдеться скінченна послідовність $u_1, \dots, u_m \in S^1$, така що $v_1 \in U(u_1)$, $v_2 \in U(u_m)$ і $U(u_i) \cap U(u_{i+1}) \neq \emptyset$ для кожного $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Оскільки різні орбіти потоку T_t не перетинаються і кожна з множини $\gamma(U(u_i))$, $i = 1, \dots, m$, міститься в якійсь орбіті потоку T_t , то точки $\gamma(v_1)$ і $\gamma(v_2)$ належать до спільної орбіти названого потоку.

Внаслідок довільності у виборі $v_1, v_2 \in S^1$ множина $\gamma(S^1)$ міститься в деякій орбіті потоку T_t . Іншими словами, існує $z \in N$, таке що $\gamma(S^1) \subset \bigcup_{t \in \mathbb{R}} T_t(z)$.

Зауважимо, що за вибором околів $U(u)$ для кожного $u \in S^1$ існує $t(u) \in \mathbb{R}$, таке що

$$\gamma(U(u)) \subset \bigcup_{t \in (t(u), t(u)+1)} T_t(z).$$

Запишемо орбіту точки z у вигляді $F_z : \mathbb{R} \rightarrow N$, $F_z(t) = T_t(z)$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді попереднє співвідношення перепишеться у вигляді $\gamma(U(u)) \subset F_z(t(u), t(u)+1)$, $u \in S^1$.

Оскільки S^1 — компакт, то знайдеться скінченне підпокриття покриття $\{U(u)\}_{u \in S^1}$. Отже існують $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, такі що $\gamma(S^1) \subset F_z([T_1, T_2])$.

Припустимо, що $F_z|_{[T_1, T_2]}$ — ін'єктивне відображення.

Відомо, що відображення F_z неперервне. Оскільки $[T_1, T_2]$ — компакт, то $\tilde{F} = F_z|_{[T_1, T_2]} : [T_1, T_2] \rightarrow F_z([T_1, T_2]) \subset N$ є вкладенням. Тому відображення $\tilde{F}^{-1} \circ \gamma : S^1 \rightarrow [T_1, T_2]$ теж є вкладенням, що неможливо.

З цієї суперечності легко слідує, що орбіта F_z періодична і $\gamma(S^1)$ збігається з $F_z(\mathbb{R})$. Подобиці ми залишаємо читачеві. \square

Відомо, що універсальним накриваючим простором для кола S^1 є пряма

\mathbb{R} . Нехай $\text{pr} : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = I/\{0, 1\}$ — накрыття, таке що $\text{pr}^{-1}(t) = t + \mathbb{Z}$ для кожного $t \in [0, 1)$. Тоді згідно з властивістю підняття шляхів для кожної неперервної замкненої кривої $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$ і точки $\tau \in \text{pr}^{-1}(\alpha(0))$ однозначно визначене підняття $\hat{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$ цієї кривої в \mathbb{R} , для якого $\hat{\alpha}(0) = \tau$ (див. [113]).

Поставимо у відповідність кривій α і точці τ число $\pi(\alpha) = \hat{\alpha}(1) - \hat{\alpha}(0)$. Нескладно перевірити, що $\pi(\alpha)$ не залежить від вибору $\tau \in \text{pr}^{-1}(\alpha(0))$.

Оскільки крива α замкнена, то $\pi(\alpha) \in \mathbb{Z}$, причому це число залежить тільки від гомотопічного класу $[\alpha]$ відображення $\alpha : S^1 \rightarrow S^1$.

Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ — розшарування Понтрягіна, $\gamma : S^1 \rightarrow N$ — проста замкнена крива, $z = \gamma(0)$. Нехай $F_z : \mathbb{R} \rightarrow N$ — орбіта точки z потоку T_t . Згідно з Твердженням 16.1.2 ця орбіта періодична і $F_z(\mathbb{R}) = \gamma(S^1)$. Нехай $n > 0$ — мінімальний період точки z .

Твердження 16.1.3 $n \in \mathbb{N}$ і $|\pi(p \circ \gamma)| = n$.

Доведення. Легко бачити, що за означенням для кожного $w \in N$ і чисел $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ рівність $p \circ F_w(t_1) = p \circ F_w(t_2)$ виконується тоді й лише тоді, коли $t_2 - t_1 \in \mathbb{Z}$. Внаслідок цього $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки орбіта F_z періодична, то для відображення $F_z|_{[0, n]} : [0, n] \rightarrow N$ існує ін'єктивне неперервне фактор-відображення $\beta : S^1 \cong [0, n]/\{0, n\} \rightarrow N$. Безпосередньо з означення потоку T_t слідує, що $\pi(p \circ \beta) = n$.

З іншого боку, гомеоморфізм $\beta^{-1} \circ \gamma : S^1 \rightarrow S^1$ ізотопний або тотожному відображенню id_{S^1} , або інволюції $\sigma : S^1 \rightarrow S^1$, $\sigma(t) = 1 - t$, $t \in [0, 1)$. Оскільки π залежить лише від гомотопічного класу свого аргументу, то $\pi(p \circ \gamma) = \pm \pi(p \circ \beta)$. \square

Твердження 16.1.4 Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ — розшарування Понтрягіна, побудоване по гомеоморфізму $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$, а $\gamma : S^1 \rightarrow N$ — проста замкнена крива.

Знайдеться відкритий окіл $W \subset N$ множини $\gamma(S^1)$, такий що для кожної простої замкненої кривої $\gamma_1 : S^1 \rightarrow N$ справедливе співвідношення

$$\pi(p \circ \gamma_1) = 0 \pmod{|\pi(p \circ \gamma)|}.$$

Доведення. Нехай $z = \gamma(0) \in N$. Позначимо через $F_z : \mathbb{R} \rightarrow N$ орбіту потоку T_t , для якої $z = F_z(0)$. Згідно з Твердженням 16.1.2 ця орбіта періодична і $F_z(\mathbb{R}) = \gamma(S^1)$. Нехай $n > 0$ – мінімальний період точки z . З Твердження 16.1.3 слідує, що $n = |\pi(p \circ \gamma)| \in \mathbb{N}$.

Нехай $(\tau, x) \in H^{-1}(z) \subset I \times \Gamma$.

Розглянемо динамічну систему (Γ, f) . Зрозуміло, що точка x є періодичною з мінімальним періодом n . Фіксуємо відкритий окіл U точки x , такий що множини $U, f(U), \dots, f^{n-1}(U)$ попарно неперетинні.

Нехай $\tilde{x} \in \Gamma$ – точка, для якої виконується співвідношення $O_f(\tilde{x}) \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(U)$. Відмітимо, що $f^n(U) \cap f^k(U) = \emptyset$ при $k \in \{1, \dots, n-1\}$, оскільки $f^n(U) \cap f^k(U) = f(f^{n-1}(U) \cap f^{k-1}(U)) = \emptyset$. Внаслідок цього для кожного $i \in \mathbb{Z}$ маємо $f^i(\tilde{x}) \in f^k(U)$, де $k = i \pmod{n}$.

Отже якщо точка \tilde{x} періодична з мінімальним періодом $m \in \mathbb{N}$, то $m = 0 \pmod{n}$.

Позначимо

$$V = (f^{n-1}(U) \cap f^{-1}(U)) \cup \bigcup_{k=0}^{n-2} f^k(U),$$

$$\tilde{W} = \{0\} \times f(V) \cup \{1\} \times V \cup \bigcup_{k=0}^{n-1} (0, 1) \times f^k(U).$$

Легко бачити, що множина \tilde{W} відкрита в $I \times \Gamma$ і насичена, отже її образ $W = H(\tilde{W}) \subset N$ є відкритим околом множини $F_z(\mathbb{R}) = \gamma(S^1)$.

Нехай $\gamma_1 : S^1 \rightarrow N$ – проста замкнена крива, така що $\gamma_1(S^1) \subset W$. З Тверджень 16.1.2 і 16.1.3 слідує, що $F_w(\mathbb{R}) = \gamma_1(S^1)$ і орбіта $F_w : \mathbb{R} \rightarrow N$ точки $w = \gamma_1(0)$ періодична з мінімальним періодом $m = |\pi(p \circ \gamma_1)| \in \mathbb{N}$.

Нехай $(s, y) \in H^{-1}(w) \subset I \times \Gamma$. Тоді мінімальний період точки y відносно динамічної системи (Γ, f) дорівнює m . Оскільки $F_w(\mathbb{R}) \subset W$, то $H^{-1}(F_w(\mathbb{R})) \subset \tilde{W}$ і $O_f(y) \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} f^k(U)$. Внаслідок цього $m = 0 \pmod{n}$. \square

16.2 Основний результат

Твердження 16.2.1 *Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ – розшарування Понтрягіна, X, Y – Хаусдорфові простори, а $\eta = (X, q, S^1)$ – деяке розшарування над колом.*

Нехай $\Phi : N \rightarrow Y$ і $\Psi : X \rightarrow Y$ – вкладення.

Припустимо, що $\gamma : S^1 \rightarrow Y$ – проста замкнена крива, причому $\gamma(S^1) \subset \Phi(N) \cap \Psi(X)$ і $\pi(q \circ \Psi^{-1} \circ \gamma) \neq 0$.

Тоді існує відкритий окіл W множини $\gamma(S^1)$, який відповідає наступній властивості: для кожної простої замкненої кривої $\gamma_1 : S^1 \rightarrow Y$, образ якої міститься в $W \cap \Phi(N) \cap \Psi(X)$, виконується співвідношення

$$\left| \frac{\pi(p \circ \Phi^{-1} \circ \gamma_1)}{\pi(p \circ \Phi^{-1} \circ \gamma)} \right| = \left| \frac{\pi(q \circ \Psi^{-1} \circ \gamma_1)}{\pi(q \circ \Psi^{-1} \circ \gamma)} \right|.$$

При доведенні Твердження 16.2.1 ми скористаємося наступним простим спостереженням.

Лема 16.2.2 *Нехай $\alpha_1, \alpha_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ – два неперервні шляхи. Якщо для кожного $t \in I$ виконується співвідношення $(|\alpha_2(t) - \alpha_1(t)| \bmod 1) < 1/4$, то $|(\alpha_2(1) - \alpha_1(1)) - (\alpha_2(0) - \alpha_1(0))| < 1/2$.*

Доведення. Функція $g(t) = \alpha_2(t) - \alpha_1(t)$ неперервна, причому $g(t) \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k - 1/4, k + 1/4)$ для кожного $t \in I$. Множина I зв'язна, отже є зв'язною і множина $g(I)$. Внаслідок цього знайдеться $k_0 \in \mathbb{Z}$, для якого $g(I) \subset (k_0 - 1/4, k_0 + 1/4)$. Тому $|g(1) - g(0)| < 1/2$. \square

Доведення Твердження 16.2.1. Нехай $\text{pr} : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = I/\{0, 1\}$ – накриття, таке що $\text{pr}^{-1}(t) = t + \mathbb{Z}$ для кожного $t \in [0, 1)$. Позначимо

$$\tilde{V}(t) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k + t - \frac{1}{8}, k + t + \frac{1}{8}), \quad V(t) = \text{pr}(\tilde{V}(t)).$$

Зрозуміло, що для кожного $t \in [0, 1)$ і довільних $\tau_1, \tau_2 \in \tilde{V}(t)$ виконуються співвідношення $(|\tau_2 - \tau_1| \bmod 1) < 1/4$.

Відображення Ψ є вкладенням, тому для кожного t існує відкрита підмножина $\hat{V}(t)$ простору Y , для якої $\hat{V}(t) \cap \Psi(X) = \Psi(p^{-1}(V(t)))$. Оскільки

множини $V(t)$ покривають S^1 , то $p^{-1}(V(t))$ покривають $X = p^{-1}(S^1)$, а множини $\hat{V}(t)$ покривають $\Psi(X)$, зокрема $\gamma(S^1) \subset \bigcup_{t \in [0,1)} \hat{V}(t)$.

Нехай $z \in \Phi^{-1}(\gamma(S^1)) \subset N$, $s = p(z) \in S^1$. Нехай U — власна відкрита підмножина кола, яка містить точку s . Згідно з Твердженням 16.1.1 існує тривіалізація $\phi : U \times \Gamma \rightarrow p^{-1}(U)$. Нехай $\phi^{-1}(z) = (s, x)$.

Нехай розшарування Понтрягіна ξ побудовано по гомеоморфізму $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$, і $T : \mathbb{R} \times N \rightarrow N$ — відповідна динамічна система Понтрягіна. Оскільки потік T є неперервною надбудовою над динамічною системою (Γ, f) , то для відображення $T_1 = T(1, \cdot) : N \rightarrow N$ виконується рівність $T_1(p^{-1}(s)) = p^{-1}(s)$ і відображення

$$\hat{f} = T_1|_{p^{-1}(s)} : p^{-1}(s) \rightarrow p^{-1}(s)$$

є гомеоморфізмом і породжує динамічну систему, яка є топологічно спряженою з (Γ, f) (існує гомеоморфізм $g : \Gamma \rightarrow p^{-1}(s)$, такий що $g \circ f = \hat{f} \circ g$). Внаслідок цього відображення

$$\tilde{f} = \phi^{-1} \circ \hat{f} \circ \phi|_{\{s\} \times \Gamma} : \{s\} \times \Gamma \rightarrow \{s\} \times \Gamma$$

є гомеоморфізмом і топологічно спряжене з f (за допомогою відображення $\phi \circ g$).

Згідно з Твердженням 16.1.2 орбіта $T(\mathbb{R} \times \{z\}) = F_z(\mathbb{R})$ точки z періодична і має мінімальний період $n = |\pi(p \circ \Phi^{-1} \circ \gamma)|$. Зрозуміло, що (s, x) є періодичною точкою динамічної системи $(\{s\} \times \Gamma, \tilde{f})$ з мінімальним періодом n .

Зафіксуємо відкритий окіл A_0 точки (s, x) у просторі $\{s\} \times \Gamma$, такий що $\tilde{f}^k(A_0) \cap A_0 = \emptyset$ для кожного $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Розглянемо компакту множину $T([0, n] \times \{z\}) = \Phi^{-1} \circ \gamma(S^1)$. Оскільки ϕ є вкладенням відкритої підмножини $U \times \Gamma$ в N , відображення Φ , T_t та $T_t^{-1} = T_{-t}$ є неперервними і простір $U \times \Gamma$ має топологію прямого добутку, то для кожного $\tau \in [0, n]$ існують $t \in [0, 1)$ і відкритий окіл $U(\tau) \times A(\tau) \subset U \times \Gamma$ точки (s, x) , які задовольняють співвідношення

$$T(\tau, \phi(U(\tau) \times A(\tau))) \subset \Phi^{-1}(\hat{V}(t)).$$

Існує скінченний набір τ_i , $i = 1, \dots, l$, такий що множини $\tilde{Q}_i = T(\tau_i, \phi(U(\tau_i) \times A(\tau_i)))$ утворюють відкрите покриття компакту $\Phi^{-1} \circ \gamma(S^1)$.

Нехай $A = A_0 \cap \bigcap_{i=1}^l A(\tau_i)$. Легко бачити, що множини

$$Q_i = T(\tau_i, \phi(U(\tau_i) \times A)), \quad i = 1, \dots, l,$$

теж утворюють покриття $\Phi^{-1} \circ \gamma(S^1)$.

Оскільки $\Phi : N \rightarrow Y$ — вкладення, то існує така відкрита підмножина $W \subset Y$, що

$$\Phi^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^l Q_i.$$

Нехай $\gamma_1 : S^1 \rightarrow Y$ — проста замкнена крива, така що $\gamma_1(S^1) \subset W \cap \Phi(N) \cap \Psi(X)$.

Згідно з Твердженням 16.1.2 множина $\Phi^{-1} \circ \gamma_1(S^1) \subset N$ є носієм періодичної орбіти потоку T . Нехай її мінімальний період дорівнює m . З Твердження 16.1.3 слідує, що $m = |\pi(p \circ \Phi^{-1} \circ \gamma_1)|$.

Оскільки $A \subset A_0$, то $\phi \circ \tilde{f}^k(\{s\} \times A) \cap \{s\} \times A = \emptyset$ при $k = 1, \dots, n-1$. Отже аргументи, подібні до наведених при доведенні Твердження 16.2.1, дозволяють зробити висновок, що

$$\Phi^{-1} \circ \gamma_1(S^1) \cap p^{-1}(s) \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} \phi \circ \tilde{f}^k(\{s\} \times A)$$

і $m = 0 \pmod{n}$. Нехай $z_0 \in \Phi^{-1} \circ \gamma_1(S^1) \cap \phi \circ \tilde{f}^k(\{s\} \times A)$ для деякого $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Тоді $z_1 = T(-k, z_0) \in \Phi^{-1} \circ \gamma_1(S^1) \cap \phi(\{s\} \times A)$.

Розглянемо два неперервних шляхи $\beta, \beta_1 : [0, m] \rightarrow N$, $\beta(\tau) = T(\tau, z)$, $\beta_1(\tau) = T(\tau, z_1)$, $\tau \in [0, m]$.

Очевидно, $\beta(\tau) = \beta(\tau \pmod{n})$ для всіх $\tau \in [0, m]$. Крім того за вибором множини A маємо $\beta_1(kn) = \phi \circ \tilde{f}^{kn}(\phi^{-1}(z_1)) \in \phi(\{s\} \times A)$, $k \in \{0, 1, \dots, (m-1)/n\}$. Внаслідок цього для кожного $\tau \in [0, m]$ існує таке $i(\tau) \in \{1, \dots, l\}$, що $\beta(\tau), \beta_1(\tau) \in Q_{i(\tau)}$.

Позначимо

$$\begin{aligned}\alpha &= q \circ \Psi^{-1} \circ \Phi \circ \beta : [0, m] \rightarrow S^1, \\ \alpha_1 &= q \circ \Psi^{-1} \circ \Phi \circ \beta_1 : [0, m] \rightarrow S^1.\end{aligned}$$

З попереднього слідує, що для кожного $\tau \in [0, m]$ існує $t(\tau) \in [0, 1)$, таке що $\alpha(\tau), \alpha_1(\tau) \in V(t(\tau))$. Нехай $\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}_1 : [0, m] \rightarrow \mathbb{R}$ — підняття шляхів α і α_1 , відповідно. Тоді $\tilde{\alpha}(\tau), \tilde{\alpha}_1(\tau) \in \tilde{V}(t(\tau))$ для кожного $\tau \in [0, m]$, отже

$$(|\tilde{\alpha}_1(\tau) - \tilde{\alpha}(\tau)| \bmod 1) < \frac{1}{4}, \quad \tau \in [0, m].$$

Застосовуючи Лему 16.2.2, приходимо до висновку, що $|\pi(\alpha_1) - \pi(\alpha)| < 1/2$. Оскільки шляхи α і α_1 замкнені, то числа $\pi(\alpha)$ і $\pi(\alpha_1)$ цілі, отже $\pi(\alpha) = \pi(\alpha_1)$.

За побудовою β_1 — проста замкнена крива, отже $\Psi^{-1} \circ \Phi \circ \beta_1$ — теж проста замкнена крива. Крім того $\Psi^{-1} \circ \Phi \circ \beta_1([0, m]) = \Psi^{-1} \circ \gamma_1(S^1)$, тому $\pi(\alpha_1) = \pm \pi(q \circ \Psi^{-1} \circ \gamma_1)$ (див. доведення Твердження 16.1.3).

Крива $\beta|_{[0, n]}$ є простою замкненою кривою. β — це крива $\beta|_{[0, n]}$, пройдена m/n разів поспіль. Оскільки $\Psi^{-1} \circ \Phi \circ \beta([0, n]) = \Psi^{-1} \circ \gamma(S^1)$, то $\pi(\alpha|_{[0, n]}) = \pm \pi(q \circ \Psi^{-1} \circ \gamma)$ і $\pi(\alpha) = \pm \pi(q \circ \Psi^{-1} \circ \gamma) \cdot m/n$. Отже

$$|\pi(q \circ \Psi^{-1} \gamma_1)| = |\pi(\alpha_1)| = |\pi(\alpha)| = \left| \frac{\pi(p \circ \Phi^{-1} \circ \gamma_1)}{\pi(p \circ \Phi^{-1} \circ \gamma)} \right| |\pi(q \circ \Psi^{-1} \gamma)|.$$

□

Означення 16.2.3 Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ — розшарування Понтрягіна. Назвемо U -кривою просту замкнену криву $\gamma : S^1 \rightarrow N$ для якої існує послідовність простих замкнених кривих $\beta_i : S^1 \rightarrow N$, $i \in \mathbb{N}$, що відповідає умовам:

(i) для довільного відкритого околу U множини $\gamma(S^1) \subset N$ існує $k \in \mathbb{N}$, таке що $\beta_i(S^1) \subset U$ при всіх $i > k$;

(ii) $|\pi(p \circ \gamma)| \neq |\pi(p \circ \beta_i)|$, $i \in \mathbb{N}$.

Назвемо U -криву γ RU -кривою, якщо існує послідовність простих замкнених кривих $\beta_i : S^1 \rightarrow N$, $i \in \mathbb{N}$, що відповідає умовам (i), (ii) і

(iii) $|\pi(p \circ \gamma)| \neq 2|\pi(p \circ \beta_i)|$, $i \in \mathbb{N}$.

З Твердження 16.2.1 слідує коректність наступного означення.

Означення 16.2.4 Топологічний простір N називається U -простором (відповідно, RU -простором), якщо в ньому існує U -крива (RU -крива).

Теорема 16.2.5 ([50]) Нехай $\xi = (N, p, S^1)$ — розшарування Понтрягіна.

Якщо N є U -простором (RU -простором), то він не може бути вкладений ні в який двовимірний орієнтовний многовид M^2 (відповідно, ні в який двовимірний многовид M^2 , не обов'язково орієнтовний).

Зауваження 16.2.6 В роботі [50] побудовано клас розшарувань Понтрягіна, який містить континуум елементів і відповідає наступним властивостям: тотальні простори розшарувань Понтрягіна з цього класу попарно не гомеоморфні і є RU -просторами.

В цій же роботі побудовано зліченну сім'ю $\xi_k = (N_k, p_k, S^1)$, $k \in \mathbb{N}$, розшарувань Понтрягіна, тотальні простори яких попарно не гомеоморфні, є U -просторами (але не RU -просторами) і простір N_k може бути вкладений у двовимірний замкнений неорієнтований многовид, що має (неорієнтований) рід не менше ніж k .

Для доведення Теорема 16.2.5 нам будуть потрібні дві наступні леми.

Лема 16.2.7 Нехай V — циліндр з екватором $\gamma : S^1 \rightarrow V$. Припустимо, що V є простором розшарування $\mu = (V, q, S^1)$, для якого γ є перерізом (тобто $q \circ \gamma = \text{id}_{S^1}$). Нехай $\text{pr} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ — накриття S^1 , для якого $\text{pr}^{-1}(t) = t + \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1)$.

Тоді для кожної простої замкненої кривої $\beta : S^1 \rightarrow V$ виконується співвідношення $|\pi(q \circ \beta)| \in \{0, 1\}$.

Доведення. Лема спирається на наступне твердження (див. [114], Теорема 4.2). Нехай β — проста замкнена крива в двовимірному многовиді M^2 , яка не є межею листа Мебіуса або диску. Нехай елемент $\delta \in \pi_1(M^2, *)$ представлений однократним обходом кривої β і нехай $\delta = \eta^k$, де $\eta \in \pi_1(M^2, *)$, $k \geq 0$. Тоді $\delta = \eta$.

Нехай $*$ = $\gamma(0)$. Очевидно, група $\pi_1(V, *)$ породжується елементом η , який представлений однократним обходом γ .

Тоді з наведеного вище твердження легко слідує, що або крива β гомотопна нулю і $\pi(\beta) = 0$, або один з елементів $\pm\eta \in \pi_1(V, *)$ представлений однократним обходом кривої β і $|\pi(\beta)| = |\pi(\gamma)| = 1$. \square

Лема 16.2.8 *Якщо в умовах попередньої лема V — лист Мебіуса з екватором γ , то $|\pi(q \circ \beta)| \in \{0, 1, 2\}$ для довільної простої замкненої кривої $\beta : S^1 \rightarrow V$.*

Доведення. Нехай V — лист Мебіуса з екватором $\gamma(S^1)$. Відомо, що існує дволистне накриття $g : \tilde{V} \rightarrow V$, причому простір \tilde{V} гомеоморфний циліндру з екватором $g^{-1}(\gamma(S^1))$.

Для кожної простої замкненої кривої $\beta : S^1 \rightarrow V$ множина $g^{-1}(\beta(S^1))$ є одновимірним підмноговидом \tilde{V} і має одну або дві компоненти зв'язності. Внаслідок цього β накривається деякою простою замкненою кривою $\tilde{\beta} : S^1 \rightarrow \tilde{V}$, причому або $|\pi(q \circ g \circ \tilde{\beta})| = |\pi(q \circ \beta)|$, якщо множина $g^{-1}(\beta(S^1))$ має дві компоненти зв'язності, або $|\pi(q \circ g \circ \tilde{\beta})| = 2|\pi(q \circ \beta)|$, якщо множина $g^{-1}(\beta(S^1))$ зв'язна.

Нехай екватор циліндра \tilde{V} є носієм простої замкненої кривої $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow \tilde{V}$, що накриває криву γ . Оскільки множина $g^{-1}(\gamma(S^1))$ зв'язна, то $|\pi(q \circ g \circ \tilde{\gamma})| = 2$.

З твердження, яке ми використали при доведенні попередньої лема випливає, що для простої замкненої кривої $\tilde{\beta} : S^1 \rightarrow \tilde{V}$, що накриває просту замкнену криву $\beta : S^1 \rightarrow V$, виконується одна з двох рівностей $|\pi(q \circ g \circ \tilde{\beta})| = 0$ або $|\pi(q \circ g \circ \tilde{\beta})| = |\pi(q \circ g \circ \tilde{\gamma})| = 2$. Внаслідок цього $|\pi(q \circ \beta)| \in \{0, 1, 2\}$. \square

Доведення Теорема 16.2.5. Нехай M^2 — двовимірний многовид, $\gamma : S^1 \rightarrow M^2$ — проста замкнена крива.

Відомо (див. [103], Теорема 6.6.1), що кожен двовимірний топологічний многовид зі зліченною базою триангульований. Також відомо (див. [114], Теорема A1), що для довільного вкладення $\gamma : S^1 \rightarrow M^2$ існує обіймаюча ізотопія (ambient isotopy) H простору M^2 , яка змінює γ на відтинково лінійне вкладення $\tilde{\gamma}$ і є нерухомою за межами деякої компактної множини.

Подрібнюючи триангуляцію простору M^2 , знайдемо (замкнений) регулярний окіл \tilde{V} поліедра $\tilde{\gamma}(S^1)$. Відомо (див. [115], Наслідок 3.30), що окіл \tilde{V} є регулярним околком поліедра $\tilde{\gamma}(S^1)$ тоді й тільки тоді, коли

- (i) \tilde{V} є компактним многовидом з краєм;
- (ii) $\tilde{V} \searrow \tilde{\gamma}(S^1)$ (\tilde{V} вдавлюється на $\tilde{\gamma}(S^1)$).

З умови (ii) слідує, що \tilde{V} має гомотопічний тип кола. Отже з (i) випливає, що \tilde{V} або (замкнений) циліндр, або лист Мебіуса з екватором $\tilde{\gamma}(S^1)$.

Ізотопія простору M^2 , обернена до H , змінює \tilde{V} на деякий (топологічний) компактний підмноговид V з краєм, який гомеоморфний циліндру або листу Мебіуса і такий, що множина $\gamma(S^1)$ є його екватором.

Зрозуміло, що V є околком множини $\gamma(S^1)$. Легко бачити, що на V можна означити структуру розшарування над колом $\mu = (V, q, S^1)$, для якого крива γ буде перерізом. Нехай $\text{pr} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ — накриття S^1 , таке що $\text{pr}^{-1}(t) = t + \mathbb{Z}$, $t \in [0, 1)$. Тоді $\pi(q \circ \gamma) = \pm 1$.

Якщо V є циліндром, то з Лемми 16.2.7 слідує, що для кожної простої замкненої кривої $\beta : S^1 \rightarrow V$ виконується співвідношення

$$\left| \frac{\pi(q \circ \beta)}{\pi(q \circ \gamma)} \right| \in \{0, 1\};$$

якщо ж V — лист Мебіуса, то внаслідок Лемми 16.2.8 маємо

$$\left| \frac{\pi(q \circ \beta)}{\pi(q \circ \gamma)} \right| \in \{0, 1, 2\}.$$

Теорема тепер випливає безпосередньо з означення U -простору (RU -простору) і Твердження 16.2.1. Подобиці ми залишаємо читачеві. \square

Розділ 17

Про проєкції на одометри динамічних систем з компактним фазовим простором

На початку розділу відмітимо, що у зв'язку з обмеженням на обсяг роботи всі результати цього розділу наведені без доведень. Повні доведення можна знайти у роботі [54], див. також [116].

17.1 Періодичні розбиття.

17.1.1 Означення періодичного розбиття.

Нехай задані компактний Хаусдорфів простір X і гомеоморфізм $f : X \rightarrow X$.

Означення 17.1.2 Назвемо скінченний набір $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ підмножин простору X періодичним розбиттям динамічної системи (X, f) довжини m , якщо він відповідає наступним умовам:

- (i) всі $W_i^{(m)}$ є відкрито-замкненими підмножинами простору X ;
- (ii) $W_i^{(m)} = f(W_{i-1}^{(m)})$, $i = 1, \dots, m-1$ і $W_0^{(m)} = f(W_{m-1}^{(m)})$;
- (iii) $W_i^{(m)} \cap W_j^{(m)} = \emptyset$ при $i \neq j$;
- (iv) $X = \bigcup_{i=0}^{m-1} W_i^{(m)}$.

Означення 17.1.3 Назвемо множину всіх довжин всіх можливих періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) множиною періодів динамічної системи (X, f) і позначимо її $\mathcal{P}(X, f)$.

Базові властивості множини $\mathcal{P}(X, f)$ описуються наступними двома твердженнями.

Твердження 17.1.4 Нехай $m \in \mathcal{P}(X, f)$ і m ділиться на $d \in \mathbb{N}$. Тоді $d \in \mathcal{P}(X, f)$.

Твердження 17.1.5 Нехай $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ і D — найменше спільне кратне чисел m_1 і m_2 . Тоді $D \in \mathcal{P}(X, f)$.

17.1.6 Основні властивості періодичних розбиттів.

Ясно, що для кожного $m \in \mathcal{P}(X, f)$, $m > 1$, існує більше одного періодичного розбиття динамічної системи (X, f) довжини m . Дійсно, зафіксувавши розбиття $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ для довільного $k \in \{1, \dots, m-1\}$ можна побудувати періодичне розбиття $W^{(m)}(k) = \{W_i^{(m)}(k)\}_{i=0}^{m-1}$ за допомогою циклічної перестановки індексів елементів розбиття $W_i^{(m)}$,

$$W_j^{(m)}(k) = W_i^{(m)} \quad \text{при } j \equiv i + k \pmod{m}, \quad j = 0, \dots, m-1.$$

Означення 17.1.7 Нехай $m \in \mathcal{P}(X, f)$. Два періодичних розбиття динамічної системи (X, f) назвемо еквівалентними, якщо одне розбиття можна отримати з другого за допомогою циклічної перестановки індексів.

Означення 17.1.8 Назвемо динамічну систему (X, f) нерозкладною, якщо вона відповідає властивості:

(А) якщо $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ і X_1, X_2 — замкнені інваріантні підмножини динамічної системи (X, f) , то або $X_1 = \emptyset$, або $X_2 = \emptyset$.

Зауваження 17.1.9 Нехай K — замкнена інваріантна множина динамічної системи (X, f) , $W^{(m)} = \{W_i^{(m)}\}_{i=0}^{m-1}$ — періодичне розбиття довжини m .

Для кожного $i = 0, \dots, m - 1$

$$f(W_i^{(m)} \cap K) = f(W_i^{(m)}) \cap f(K) = f(W_i^{(m)}) \cap K,$$

тому зокрема $W_i^{(m)} \cap K \neq \emptyset$, $i = 0, \dots, m - 1$, і якщо K відкрито-замкнена підмножина X , то набір множин $\{V_i^{(m)} = W_i^{(m)} \cap K\}_{i=0}^{m-1}$ задовольняє властивості (i) – (iii) Означення 17.1.2.

Твердження 17.1.10 Нехай $m \in \mathcal{P}(X, f)$, $m > 1$. Динамічна система (X, f) нерозкладна тоді й лише тоді, коли існує єдине з точністю до циклічної перестановки індексів періодичне розбиття $W^{(m)}$ довжини m .

Нехай $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$, d і D — відповідно найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне чисел m_1 та m_2 .

Розглянемо два періодичних розбиття $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ і $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ простору X довжин m_1 та m_2 .

Твердження 17.1.11 Нехай для деяких $k \in \{0, \dots, m_1 - 1\}$, $l \in \{0, \dots, m_2 - 1\}$ перетин $W_k^1 \cap W_l^2$ не порожній.

Тоді набір множин $\{V_s^{(D)} = f^s(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)})\}_{s=0}^{D-1}$ відповідає умовам (i) – (iii) Означення 17.1.2.

Позначимо

$$V_s^{(D)}(k, l) = f^s(W_k^{(m_1)} \cap W_l^{(m_2)}), \quad s = 0, \dots, D - 1,$$

$$A(k, l) = \bigcup_{s=0}^{D-1} V_s^{(D)}(k, l).$$

З Твердження 17.1.11 слідує, що $A(k, l)$ — відкрито-замкнена інваріантна підмножина динамічної системи (X, f) і якщо множина $V_0^{(D)}(k, l)$ не порожня, то набір множин $\{V_s^{(D)}(k, l)\}_{s=0}^{D-1}$ є періодичним розбиттям динамічної системи $(A(k, l), f|_{A(k, l)})$ довжини D .

Зауваження 17.1.12 Якщо динамічна система (X, f) нерозкладна, то або $A(k, l) = \emptyset$, або ж $A(k, l) = X$ і тоді $\{V_s^{(D)}(k, l)\}_{s=0}^{D-1}$ — періодичне розбиття динамічної системи (X, f) довжини D і $D \in \mathcal{P}(X, f)$.

З властивості (iv) Означення 17.1.2 слідує, що знайдуться k, l , для яких множина $A(k, l)$ не порожня. Отже Твердження 17.1.5 виконується для нерозкладних динамічних систем.

Якщо динамічна система (X, f) не є нерозкладною, взагалі кажучи не обов'язково $A(k, l) \in \{\emptyset\} \cup \{X\}$.

Означення 17.1.13 Нехай $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$. Періодичні розбиття $W^{(m_1)}$ і $W^{(m_2)}$ динамічної системи (X, f) називаються узгодженими, якщо для довільних $k \in \{0, \dots, m_1 - 1\}$, $l \in \{0, \dots, m_2 - 1\}$ або $A(k, l) = \emptyset$, або $A(k, l) = X$.

Зауваження 17.1.14 З Твердження 17.1.11 легко слідує, що якщо $m_2 = m_1$, то узгодженість розбиттів $\{W_i^{(m_1)}\}_{i=0}^{m_1-1}$ та $\{W_j^{(m_2)}\}_{j=0}^{m_2-1}$ означає, що ці два розбиття еквівалентні.

Зауваження 17.1.15 Безпосередньо з означень еквівалентності й узгодженості періодичних розбиттів слідує наступне твердження.

Нехай періодичні розбиття $W^{(m_1)}$ і $W^{(m_2)}$ узгоджені. Тоді якщо періодичне розбиття $\widetilde{W}^{(m_2)}$ еквівалентно розбиттю $W^{(m_2)}$, то періодичні розбиття $W^{(m_1)}$ й $\widetilde{W}^{(m_2)}$ узгоджені.

Твердження 17.1.16 Нехай $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$ і m_2 ділиться на m_1 .

Періодичні розбиття $W^{(m_1)}$ і $W^{(m_2)}$ узгоджені тоді й тільки тоді, коли розбиття $\{W_j^{(m_2)}\}$ простору X є подрібненням розбиття $\{W_i^{(m_1)}\}$.

Твердження 17.1.17 Нехай $m_1, m_2 \in \mathcal{P}(X, f)$. Для довільного періодичного розбиття $W^{(m_1)}$ динамічної системи (X, f) довжини m_1 знайдеться узгоджене з ним періодичне розбиття $W^{(m_2)}$ довжини m_2 .

Наслідок 17.1.18 Нехай динамічна система (X, f) нерозкладна. Тоді довільні два періодичних розбиття динамічної системи (X, f) узгоджені.

Зауваження 17.1.19 Взагалі кажучи, якщо динамічна система (X, f) не є нерозкладною, взявши довільне фіксоване розбиття $W^{(m_2)}$, можна побудувати більше одного періодичного розбиття довжини m_2 , що є узгодженим із заданим заздалегідь розбиттям $W^{(m_1)}$ довжини m_1 .

Приклад 17.1.20 Розглянемо скінченну множину $X = \{0, 1, \dots, 11\}$ з дискретною топологією і гомеоморфізм $f : X \rightarrow X$, $f(x) = x + 2 \pmod{12}$. Зрозуміло, що динамічна система (X, f) не є нерозкладною, оскільки має інваріантні множини

$$X_1 = \{x \in X \mid x - \text{непарне}\} \quad \text{і} \quad X_2 = \{x \in X \mid x - \text{парне}\}.$$

Нехай $m_1 = 3$, $W_1^{(3)} = \{1, 2, 7, 8\}$, $W_2^{(3)} = f(W_1^{(3)})$, $W_3^{(3)} = f^2(W_1^{(3)})$.

Нехай також $m_2 = 2$, $W_1^{(2)} = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$, $W_2^{(2)} = f(W_1^{(2)})$.

Періодичні розбиття $W^{(3)}$ і $W^{(2)}$ узгоджені, оскільки множина $V_1^{(6)} = W_1^{(3)} \cap W_1^{(2)} = \{1, 2\}$ породжує періодичне розбиття довжини 6 простору X .

Розглянемо інше періодичне розбиття $\widetilde{W}^{(2)}$, яке складається з множин $\widetilde{W}_1^{(2)} = \{2, 3, 6, 7, 10, 11\}$, $\widetilde{W}_2^{(2)} = f(\widetilde{W}_1^{(2)})$.

Відмітимо, що $\widetilde{W}_1^{(2)} = (W_1^{(2)} \cap X_2) \cup f^3(W_1^{(2)} \cap X_1)$.

Періодичні розбиття $W^{(3)}$ і $\widetilde{W}^{(2)}$ також узгоджені, оскільки множина $\widetilde{V}_1^{(6)} = W_1^{(3)} \cap \widetilde{W}_1^{(2)} = \{2, 7\} = \{2, f^3(1)\}$ породжує періодичне розбиття довжини 6 простору X .

Але періодичні розбиття $W^{(2)}$ і $\widetilde{W}^{(2)}$ не є узгодженими, тому що множина $\widetilde{V}_1^{(2)} = W_1^{(2)} \cap \widetilde{W}_1^{(2)} = \{2, 6, 10\}$ породжує періодичне розбиття довжини 2 простору X_2 , але не простору X .

Зауваження 17.1.21 Очевидно, відношення узгодженості двох періодичних розбиттів рефлексивне і симетричне. Однак попередній приклад показує, що це відношення взагалі кажучи не є транзитивним.

17.1.22 Правильні послідовності періодичних розбиттів.

У цьому підрозділі ми подаємо низку тверджень, що пов'язані з дослідженням питання про транзитивність відношення узгодженості періодичних розбиттів

і будуть використані далі.

Зараз нам будуть потрібні наступні об'єкти.

Означення 17.1.23 *Нехай задана послідовність чисел $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$.*

Назвемо послідовність $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) правильною, якщо вона відповідає наступним умовам:

- 1) n_k ділить n_{k+1} , $k \in \mathbb{N}$;
- 2) розбиття $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ і $\{W_{s_{k+1}}^{(n_{k+1})}\}$ узгоджені для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Зауваження 17.1.24 *З Твердження 17.1.16 легко слідує, що довільна правильна послідовність $\{W^{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) відповідає умові*

- 3) *періодичні розбиття $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ і $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ узгоджені для всіх $k, l \in \mathbb{N}$.*

Дійсно, нехай $k, l \in \mathbb{N}$, $k < l$. Згідно з Твердженням 17.1.16 розбиття $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}$ простору X є подрібненням розбиття $\{W_{s_{i+1}}^{(n_{i+1})}\}$ для кожного $i \in \mathbb{N}$. Внаслідок цього розбиття $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ є подрібненням розбиття $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ і, використовуючи Твердження 17.1.16 знову, приходимо до висновку, що розбиття $\{W_{s_l}^{(n_l)}\}$ і $\{W_{s_k}^{(n_k)}\}$ узгоджені.

Твердження 17.1.25 *Нехай задана послідовність чисел $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$, яка відповідає умові 1) Означення 17.1.23.*

Існує правильна послідовність $\{W^{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) .

Означення 17.1.26 *Назвемо правильні послідовності періодичних розбиттів $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}_{s_i=0}^{n_i-1}$, $i \in \mathbb{N}$, і $\{W_{\tau_j}^{(m_j)}\}_{\tau_j=0}^{m_j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, динамічної системи (X, f) узгодженими, якщо періодичні розбиття $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}$ й $\{W_{\tau_j}^{(m_j)}\}$ узгоджені для всіх $i, j \in \mathbb{N}$.*

Твердження 17.1.27 *Нехай $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}_{s_i=0}^{n_i-1}$, $i \in \mathbb{N}$, — правильна послідовність періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) .*

Нехай $m_j \in \mathcal{P}(X, f)$, $j \in \mathbb{N}$, і m_j ділить m_{j+1} для кожного $j \in \mathbb{N}$.

Тоді знайдеться правильна послідовність $\{W_{\tau_j}^{(m_j)}\}_{\tau_j=0}^{m_j-1}$, $j \in \mathbb{N}$, періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) , узгоджена з послідовністю $\{W_{s_i}^{(n_i)}\}$, $i \in \mathbb{N}$.

З Наслідку 17.1.18 слідує, що якщо динамічна система (X, f) нерозклада, то довільні дві правильні послідовності періодичних розбиттів цієї динамічної системи узгоджені.

Нехай задана послідовність чисел $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$, що відповідає умові 1) Означення 17.1.23.

Якщо динамічна система (X, f) не є нерозкладною, то знайдуться два неузгоджених періодичних розбиття $W^{(n_1)}$ і $\widetilde{W}^{(n_1)}$ динамічної системи (X, f) (див. Твердження 17.1.10 і Зауваження 17.1.14).

Очевидно, правильні послідовності періодичних розбиттів $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ та $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$, що побудовані за допомогою індуктивного застосування Твердження 17.1.17, починаючи з розбиттів $W^{(n_1)}$ і $\widetilde{W}^{(n_1)}$, відповідно, не будуть узгоджені.

17.1.28 Періодичні розбиття і рекурентні точки динамічної системи.

Нехай (X, f) — динамічна система.

Лема 17.1.29 *Нехай для деякої рекурентної точки $x \in X$ знайдеться замкнений окіл U , що відповідає такій властивості: існує $n \in \mathbb{N}$, для якого*

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^{kn}(x) \subset U.$$

Нехай

$$m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid f^{nk}(x) \in U \forall k \in \mathbb{Z}\}. \quad (17.1.1)$$

Тоді динамічна система $(\overline{\text{Orb}_f(x)}, f)$ має періодичне розбиття $\{W_i\}_{i=0}^{m-1}$ довжини m , для якого $x \in W_0 \subseteq U$.

17.2 Супернатуральні числа і підмножини множини натуральних чисел.

17.2.1 Супернатуральні числа.

Означення 17.2.2 Нехай $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ – множина всіх простих чисел, впорядкованих за зростанням. Послідовність

$$N = (N_2, N_3, \dots, N_p, \dots), \quad N_p \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}, \quad p \in \mathcal{S},$$

називається супернатуральним числом.

Множину всіх супернатуральних чисел будемо позначати через Σ .

Введем на множині Σ відношення часткового порядку. Скажемо, що

$$M \leq N, \quad M, N \in \Sigma,$$

якщо $M_p \leq N_p$ для кожного $p \in \mathcal{S}$ (будемо вважати, що $k \leq \infty$ для кожного $k \in \mathbb{Z}_+$). Елементарна перевірка показує, що це означення коректне.

Задамо на множині Σ бінарну операцію. Для $M = (M_p)$ і $N = (N_p)$ покладемо

$$M \cdot N = K = (K_p);$$

$$K_p = \left\{ \begin{array}{ll} M_p + N_p, & \text{якщо } M_p \neq \infty \text{ і } N_p \neq \infty, \\ \infty, & \text{у протилежному випадку.} \end{array} \right\}, \quad p \in \mathcal{S}.$$

Тривіально перевіряється, що (Σ, \cdot) напівгрупа з одиницею $E = (E_p = 0)$.

Зауваження 17.2.3 Безпосередня перевірка показує, що рівняння $M \cdot X = N$ має розв'язок в (Σ, \cdot) тоді й лише тоді, коли $M \leq N$.

Але цей розв'язок може бути і не єдиним.

Приклад 17.2.4 Нехай $M = N = (N_p)$,

$$N_p = \begin{cases} \infty, & \text{при } p = 2, \\ 0, & \text{при } p \neq 2. \end{cases}$$

Тоді $X^{(n)} = (X_p^{(n)})$,

$$X_p^{(n)} = \begin{cases} n, & \text{при } p = 2, \\ 0, & \text{при } p \neq 2. \end{cases}$$

є розв'язком рівняння $M \cdot X = N$ при довільному $n \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$.

Так само, як і у напівгрупі (\mathbb{N}, \cdot) , для довільних двох $M, N \in \Sigma$ означені їх найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне. Легко бачити, що

$$\text{нсд}(M, N) = (d_p), \quad d_p = \min(M_p, N_p), \quad p \in \mathcal{S}, \quad (17.2.1)$$

$$\text{нск}(M, N) = (D_p), \quad D_p = \max(M_p, N_p), \quad p \in \mathcal{S}. \quad (17.2.2)$$

Тут ми скористалися наступними домовленостями:

$$\max(a, \infty) = \infty, \quad \min(a, \infty) = a, \quad a \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}.$$

Означимо мономорфізм $\Phi_0 : (\mathbb{N}, \cdot) \rightarrow (\Sigma, \cdot)$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо розкладення

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

числа n на прості множники (ми припускаємо, що $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$). Покладемо $\Phi_0(n) = (\Phi_0(n)_p)$,

$$\Phi_0(n)_p = \begin{cases} \alpha_i, & \text{якщо } p = p_i \in \{p_1, \dots, p_k\}, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Зауваження 17.2.5 Відмітимо, що для всіх $m, n \in \mathbb{N}$

$$\Phi_0(\text{нсд}(m, n)) = \text{нсд}(\Phi_0(m), \Phi_0(n)),$$

$$\Phi_0(\text{нск}(m, n)) = \text{нск}(\Phi_0(m), \Phi_0(n)).$$

17.2.6 Допустимі підмножини множини натуральних чисел.

Нехай $A \subseteq \mathbb{N}$. Для кожного $p \in \mathcal{S}$ нехай

$$\Phi(A)_p = \sup\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid \exists a \in A : p^k \text{ ділить } a\} = \sup_{a \in A} \Phi_0(a)_p.$$

Позначимо через Φ відображення $\Phi : A \mapsto \Phi(A) = (\Phi(A)_p)$ з класу всіх непорожніх підмножин множини \mathbb{N} натуральних чисел в множину Σ супернатуральних чисел.

Зауваження 17.2.7 Легко перевіряється, що відношення порядку на множині Σ , яке ми означили вище, перетворює відображення Φ в ізотонне, іншими словами для довільних $A, B \subseteq \mathbb{N}$ з $A \subseteq B$ слідує $\Phi(A) \leq \Phi(B)$.

Приклад 17.2.8 Нехай $A = \{a\}$ — одноелементна множина. З означення легко слідує, що $\Phi(\{a\}) = \Phi_0(a)$.

Приклад 17.2.9 Нехай $A = \{a_1, \dots, a_j\}$ — скінченна підмножина \mathbb{N} . Розглянемо розкладення чисел a_1, \dots, a_j на прості множники

$$a_i = \prod_{p \in \mathcal{S}} p^{n_p(i)}, \quad i = 1, \dots, j$$

(тут $n_p(i) \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathcal{S}$, $i = 1, \dots, j$).

За означенням

$$\Phi(A)_p = \max\{n_p(1), \dots, n_p(j)\}, \quad p \in \mathcal{S},$$

тобто $\Phi(\{a_1, \dots, a_j\}) = \Phi(\{D\})$, де $D \in \mathbb{N}$ — найменше спільне кратне чисел a_1, \dots, a_j .

Зауваження 17.2.10 Нехай $A \subseteq \mathbb{N}$. З означення слідує, що $\Phi(\{a\}) \leq \Phi(A)$ для кожного $a \in A$.

Зауваження 17.2.11 Внаслідок співвідношень (17.2.1) і (17.2.2) для довільних непорожніх $A, B \subseteq \mathbb{N}$

$$\Phi(A \cup B) = \text{нск}(\Phi(A), \Phi(B)) .$$

Крім того, якщо $A \cap B \neq \emptyset$, то

$$\Phi(A \cap B) \leq \text{нсд}(\Phi(A), \Phi(B)) .$$

Означення 17.2.12 Назвемо непорожню підмножину $A \subseteq \mathbb{N}$ допустимою, якщо вона відповідає наступним умовам:

- (i) якщо $a \in A$ і $d \in \mathbb{N}$ ділить a , то $d \in A$;
- (ii) для довільних $a, b \in A$ їх найменше спільне кратне D також лежить в A .

Позначимо набір всіх допустимих множин через \mathcal{R} .

Зауваження 17.2.13 Внаслідок Тверджень 17.1.4 і 17.1.5 для кожної динамічної системи (X, f) множина $\mathcal{P}(X, f)$ є допустимою.

Лема 17.2.14 Нехай $A \in \mathcal{R}$. Тоді

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid \Phi(\{a\}) \leq \Phi(A)\} = \{a \in \mathbb{N} \mid \Phi_0(a) \leq \Phi(A)\} .$$

Безпосередньо з Лемми 17.2.14 випливає наступне.

Твердження 17.2.15 Відображення

$$\Phi|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \Sigma$$

є бієктивним.

Зауваження 17.2.16 Нехай $A, B \in \mathcal{R}$. Очевидно, $1 \in A \cap B \neq \emptyset$. З Лемми 17.2.14 слідує співвідношення

$$\Phi(A \cap B) = \text{нсд}(\Phi(A), \Phi(B)) .$$

Означення 17.2.17 Нехай $A \subseteq \mathbb{N}$. Назвемо послідовність $\{a_i \in A\}_{i \in \mathbb{N}}$ правильною, якщо a_i ділить a_{i+1} для кожного $i \in \mathbb{N}$.

Зауваження 17.2.18 Внаслідок Зауваження 17.2.7 для довільного $A \subseteq \mathbb{N}$ і довільної правильної послідовності $\{a_i \in A\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(A).$$

Твердження 17.2.19 Нехай $A \in \mathcal{R}$. Тоді знайдеться правильна послідовність $\{b_i \in A\}_{i \in \mathbb{N}}$, така що $\Phi(\{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(A)$.

Твердження 17.2.20 Нехай $A \subseteq \mathbb{N}$. Нехай задані дві правильні послідовності $\{a_i \in A\}_{i \in \mathbb{N}}$ й $\{b_j \in A\}_{j \in \mathbb{N}}$.

Наступні умови еквівалентні:

- 1) $\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\})$;
- 2) для кожного $i \in \mathbb{N}$ знайдеться $j \in \mathbb{N}$, таке що a_i ділить b_j .

Наслідок 17.2.21 Нехай $A \subseteq \mathbb{N}$. Нехай $\{a_i \in A\}_{i \in \mathbb{N}}$ — правильна послідовність.

Для довільної підпослідовності $\{b_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ послідовності $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ справедлива рівність

$$\Phi(\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{b_j \mid j \in \mathbb{N}\}).$$

17.3 Розширення одометрів і періодичні розбиття.

17.3.1 Означення одометра.

Нехай $\{n_i \in \mathbb{N}\}_{i \in \mathbb{N}}$ — правильна послідовність, яка не є обмеженою.

Розглянемо послідовність скінченних циклічних груп $\mathbb{Z}_{n_i} = \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ і групових гомоморфізмів

$$\varphi_i : \mathbb{Z}_{n_{i+1}} \rightarrow \mathbb{Z}_{n_i},$$

$$\varphi_i : 1 \mapsto 1.$$

Візьмемо зворотну границю $A = \varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Z}_{n_i}$ цієї послідовності груп і гомоморфізмів. Отримаємо абелеву групу $(A, +)$.

Наділимо кожну множину $\mathbb{Z}_{n_i} = \{0, 1, \dots, n_i - 1\}$ дискретною топологією. Кожне з відображень $\varphi_i \in$ неперервним у цій топології. Простір A з топологією \mathcal{T} зворотної границі гомеоморфний множині Кантора Γ .

Легко бачити, що в групі $(A, +)$ операції додавання й переходу до протилежного елементу неперервні в топології \mathcal{T} , таким чином A перетворюється в топологічну групу.

Зауваження 17.3.2 *Нагадаємо, що зворотну границю $A = \varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Z}_{n_i}$ можна уявляти як підмножину*

$$A = \{\vec{a} = (a_i \in \mathbb{Z}_{n_i}) \mid \varphi_i(a_{i+1}) = a_i, i \in \mathbb{N}\} \quad (17.3.1)$$

прямого добутку

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}. \quad (17.3.2)$$

В такому записі операція додавання в A означається покомпонентно, тобто $\vec{a} + \vec{b} = (a_i + b_i)$ для довільних $\vec{a} = (a_i), \vec{b} = (b_i) \in A$.

Відомо, що топологія прямого добутку (17.3.2) задається за допомогою бази, яка складається з так званих циліндричних множин

$$U(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \{(a_i) \mid a_{i_s} = x_{i_s}, s = 1, \dots, k\}; \\ x_{i_s} \in \mathbb{Z}_{n_{i_s}}, i_1 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}.$$

З означення множини A (див. співвідношення (17.3.1)) слідує, що

$$U(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \cap A = U(x_{i_k}) \cap A$$

для довільних $k \in \mathbb{N}, i_1 < \dots < i_k$ і $x_{i_s} \in \mathbb{Z}_{n_{i_s}}$. Отже, набір множин

$$V_{x_j} = U(x_j) \cap A = \{(a_i) \in A \mid a_j = x_j\} = \\ = \{(a_i) \in A \mid a_j = x_j, a_k = \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_{j-1}(x_j) \text{ при } k < j\}; \quad (17.3.3) \\ j \in \mathbb{N}, x_j \in \mathbb{Z}_{n_j}$$

є базою топології простору A .

Розглянемо елемент $\vec{e} = (1) = (1, \dots, 1, \dots) \in A$. Цей елемент називається *генератором* групи A і відповідає такій властивості: породжена цим елементом циклічна підгрупа $\langle \vec{e} \rangle$ є щільною в A у топології \mathcal{T} .

Очевидно, що відображення зсуву на елемент \vec{e}

$$g : A \rightarrow A,$$

$$g : \vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{e}$$

є гомеоморфізмом.

Означення 17.3.3 *Динамічна система (A, g) називається одометром.*

Зауваження 17.3.4 *Внаслідок того, що підгрупа $\langle \vec{e} \rangle$ є щільною в A , кожна орбіта $d. c. (A, g)$ є щільною в A , тобто одометр завжди є мінімальною динамічною системою.*

Лема 17.3.5 *Для довільних $k \in \mathbb{N}$ і $x_k \in \mathbb{Z}_{n_k}$ набір множин $\{W_j^{(n_k)} = V_{x_k+j}\}_{j=0, \dots, n_k-1}$ є періодичним розбиттям динамічної системи (A, g) довжини n_k .*

17.3.6 Правильні послідовності періодичних розбиттів і асоційовані з ними розбиття фазового простору динамічної системи.

Нехай (X, f) — динамічна система з компактним фазовим простором, $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$ — необмежена правильна послідовність. Нехай $\{W^{(n_i)}\}$ — правильна послідовність періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) .

Нехай $x \in X$. Помітимо, що в силу властивостей періодичних розбиттів для кожного $i \in \mathbb{N}$ існує єдине $\alpha_i(x) \in \mathbb{Z}_{n_i}$, таке що $x \in W_{\alpha_i(x)}^{(n_i)}$, тобто коректно означено відображення

$$F : X \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i},$$

$$F : x \mapsto (\alpha_i(x)), \quad x \in X.$$

Кожному $x \in X$ поставимо у відповідність підмножину

$$H(x) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_{\alpha_i(x)}^{(n_i)} \ni x$$

простору X . З Означень 17.1.2, 17.1.23 і Твердження 17.1.16 слідує, що

- 1) всі $H(x)$ — непорожні замкнені множини;
- 2) $H(x) = H(y)$, якщо $F(x) = F(y)$, або ж $H(x) \cap H(y) = \emptyset$, якщо $F(x) \neq F(y)$;
- 3) $F(f^{\pm 1}(x)) = F(x) \pm \vec{e}$ для всіх $x \in X$ (нагадаємо, що $\vec{e} = (1, 1, \dots, 1, \dots) \in A$).

Для кожного $\vec{a} = (a_i) \in F(X)$ фіксуємо $x \in F^{-1}(\vec{a})$ й позначимо $H_{\vec{a}} = H(x)$. З 2) слідує, що множина $H_{\vec{a}}$ не залежить від вибору $x \in F^{-1}(\vec{a})$.

З 1) і 2) слідує, що набір множин $\mathfrak{H} = \{H_{\vec{a}}\}_{\vec{a} \in F(X)} = \text{zer}(F)$ є розбиттям простору X , елементи якого — повні прообрази точок простору $F(X)$, а також комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & F(X) \\ pr \downarrow & & \parallel \\ X/\text{zer}(F) & \xlongequal{\quad} & X/\mathfrak{H} \xrightarrow{\text{fact } F} F(X) \end{array}$$

Твердження 17.3.7 *Відображення F неперервне.*

Оскільки X — компакт, $\text{fact } F$ — неперервне взаємно-однозначне відображення X/\mathfrak{H} на $F(X)$ і простір $F(X)$ Хаусдорфів, то $\text{fact } F$ є гомеоморфізмом (див. [82]).

Для кожного $\vec{a} \in F(X)$ з 2) і 3) легко отримати рівність $f(F^{-1}(\vec{a})) = F^{-1}(\vec{a} + \vec{e})$. Таким чином, якщо ми позначимо

$$g : F(X) \rightarrow F(X), \quad g : \vec{a} \mapsto \vec{a} + \vec{e};$$

$$\bar{f} = \text{fact } f : X/\mathfrak{H} \rightarrow X/\mathfrak{H}, \quad \bar{f} : H_{\vec{a}} \mapsto H_{\vec{a} + \vec{e}};$$

то отримаємо комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc}
 (X, f) & \xrightarrow{F} & (F(X), g) \\
 pr \downarrow & & \parallel \\
 (X/\mathfrak{H}, \bar{f}) & \xrightarrow{\text{fact } F} & (F(X), g)
 \end{array} \tag{17.3.4}$$

Задамося тепер питанням: що собою представляє множина $F(X)$?

Фіксуємо $x \in X$ і розглянемо множину

$$F(\text{Orb}_f(x)) = \{F(x) + n\vec{e} \mid n \in \mathbb{Z}\} = F(x) + \langle \vec{e} \rangle.$$

Зрозуміло, що $F(x) + \langle \vec{e} \rangle \subseteq F(\overline{\text{Orb}_f(x)}) \subseteq \overline{F(x) + \langle \vec{e} \rangle} = F(x) + \overline{\langle \vec{e} \rangle} = F(x) + A$ (A — адична група, побудована по послідовності $\{n_i\}$, див. вище).

Оскільки $\overline{\text{Orb}_f(x)}$ — компакт, то множина $F(\overline{\text{Orb}_f(x)})$ замкнена в $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$. Множина $F(x) + \langle \vec{e} \rangle$ є щільною в $F(x) + A$, тому $F(\overline{\text{Orb}_f(x)}) = F(x) + A$.

Нехай тепер y — інша точка простору X . $\overline{\text{Orb}_f(x)}$ — замкнена інваріантна підмножина динамічної системи (X, f) . Отже (див. Зауваження 17.1.9), $W_{s_i}^{(n_i)} \cap \overline{\text{Orb}_f(x)} \neq \emptyset$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, $s_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$.

Нехай $F(y) = (\beta_i)$. Можна перевірити, що множина $H_{(\beta_i)} \cap \overline{\text{Orb}_f(x)}$ не порожня і $F(y) = F(H_{(\beta_i)}) \in F(\overline{\text{Orb}_f(x)}) = F(x) + A$.

В результаті отримаємо

$$F(X) = F(x) + A,$$

тобто $F(X)$ — суміжний клас групи $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{n_i}$ по підгрупі A .

Зауваження 17.3.8 *Очевидно, $F(X) = A$ тоді й лише тоді, коли*

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} W_0^{(n_i)} \neq \emptyset. \tag{17.3.5}$$

Означення 17.3.9 *Назвемо правильну послідовність $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) когерентною, якщо вона задовольняє співвідношення (17.3.5).*

З Твердження 17.1.25, Зауваження 17.1.14 й конструкції, яку наведено вище, слідує

Твердження 17.3.10 *Нехай (X, f) — динамічна система з Хаусдорфовим компактним фазовим простором.*

Для будь-якої необмеженої правильної послідовності $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$ існує проєкція $\pi : (X, f) \rightarrow (A, g)$ на одометр (A, g) , побудований по послідовності $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Нехай тепер $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$ — правильна послідовність і пропустимо, що $\{W^{(n_i)}\}$ і $\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}$ — дві узгоджені правильні послідовності періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) . Тоді (див. Зауваження 17.1.14 й Означення 17.1.7) періодичні розбиття $W^{(n_i)}$ і $\widetilde{W}^{(n_i)}$ еквівалентні для кожного $i \in \mathbb{N}$. Внаслідок цього

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}) = \mathfrak{H}(\{\widetilde{W}^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}) = \widetilde{\mathfrak{H}}.$$

Твердження 17.3.11 *Нехай $\{n_i \in \mathcal{P}(X, f)\}_{i \in \mathbb{N}}$ і $\{m_j \in \mathcal{P}(X, f)\}_{j \in \mathbb{N}}$ — дві правильні послідовності.*

Нехай $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ і $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ — правильні послідовності періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) .

Нехай послідовності $\{W^{(n_i)}\}$ і $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$ не є узгодженими.

Тоді $H(x) \setminus \widetilde{H}(x) \neq \emptyset$ і $\widetilde{H}(x) \setminus H(x) \neq \emptyset$ для кожного $x \in X$.

Твердження 17.3.12 *Нехай $\{W^{(n_i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$ і $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ — правильні послідовності періодичних розбиттів динамічної системи (X, f) , \mathfrak{H} і $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — розбиття простору X , індуковані цими послідовностями.*

Наступні твердження еквівалентні:

- 1) розбиття $\widetilde{\mathfrak{H}}$ є подрібненням розбиття \mathfrak{H} (відповідно, $\mathfrak{H} = \widetilde{\mathfrak{H}}$),
- 2) $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \leq \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$ (відповідно, $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\})$) і послідовності $\{W^{(n_i)}\}$ та $\{\widetilde{W}^{(m_j)}\}$ узгоджені.

17.3.13 Основні властивості одометрів

Покажемо на прикладі одометрів, як працюють твердження, наведені вище.

Твердження 17.3.14 *Нехай $p : (X, f) \rightarrow (Y, g)$ — проєкція динамічної системи (X, f) на (Y, g) . Якщо $n \in \mathcal{P}(Y, h)$ і $W^{(n)} = \{W_i^{(n)}\}_{i \in \mathbb{Z}_n}$ — періодичне розбиття динамічної системи (Y, g) , то $n \in \mathcal{P}(X, f)$ і $\widetilde{W}^{(n)} = \{\widetilde{W}_i^{(n)} = p^{-1}(W_i^{(n)})\}_{i \in \mathbb{Z}_n}$ — періодичне розбиття динамічної системи (X, f) .*

Наслідок 17.3.15 *Якщо (Y, h) — фактор-система д. с. (X, f) , то $\mathcal{P}(Y, h) \subseteq \mathcal{P}(X, f)$.*

Скористаємося Зауваженням 17.2.7 і отримаємо ще таке твердження.

Наслідок 17.3.16 *В умових Наслідку 17.3.15 виконується нерівність $\Phi(\mathcal{P}(Y, h)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.*

Тож, якщо динамічні системи (X, f) і (Y, g) топологічно спряжені, то $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) = \Phi(\mathcal{P}(Y, g))$. Внаслідок цього $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \in \Sigma$ є топологічним інваріантом динамічної системи $(X, f) \in \mathcal{K}_0$.

Твердження 17.3.17 *Нехай (A, g) — одометр, побудований по правильній послідовності $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.*

Тоді $\Phi(\{\mathcal{P}(A, g)\}) = \Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\})$.

Нехай $\{W^{(m_j)}\}$ — правильна послідовність періодичних розбиттів динамічної системи (A, g) .

Набір множин $\{W_{r_j}^{(m_j)} \mid r_j \in \mathbb{Z}_{m_j}, j \in \mathbb{N}\}$ є базою топології простору A тоді й лише тоді, коли $\Phi(\{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}) = \Phi(\{\mathcal{P}(A, g)\})$.

Тепер з Твердження 17.3.10, Наслідку 17.3.16, Твердження 17.3.17, Зауваження 17.2.13 й Твердження 17.2.19 слідує таке твердження:

Теорема 17.3.18 *Нехай (X, f) — динамічна система з Хаусдорфовим компактним фазовим простором, (A, g) — одометр.*

Наступні твердження еквівалентні:

- (i) існує проєкція $\pi : (X, f) \rightarrow (A, g)$;
(ii) виконується нерівність $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Щоб сформулювати наступне твердження, нам потрібно дати два означення.

Нехай (X, f) — динамічна система з компактним метричним фазовим простором (X, ρ) .

Означення 17.3.19 Пара точок $x, y \in X$, $x \neq y$, називається дистальною, якщо існує $\delta > 0$, таке що $\rho(f^n(x), f^n(y)) > \delta$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$.

Динамічна система (X, f) називається дистальною, якщо довільна пара точок $x, y \in X$, $x \neq y$, дистальна.

Означення 17.3.20 Динамічна система (X, f) називається рівностепенно неперервною, якщо сім'я відображень $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ є рівностепенно неперервною відносно метрики ρ , тобто якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке що якщо $\rho(x, y) < \delta$ для деяких $x, y \in X$, то $\rho(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ для кожного $n \in \mathbb{Z}$.

Легко бачити, що дистальність і рівностепенна неперервність динамічної системи (X, f) не залежать (через компактність X) від вибору метрики, яка породжує задану топологію на X , тобто дистальність і рівностепенна неперервність є топологічними властивостями динамічної системи (X, f) з метризовним компактним фазовим простором X .

Теорема 17.3.21 (див. [117]) Нехай (Γ, f) — мінімальна динамічна система на множині Кантора Γ .

Тоді наступні умови рівносильні:

1. д. с. (Γ, f) топологічно спряжена з одометром;
2. д. с. (Γ, f) дистальна;
3. д. с. (Γ, f) рівностепенно неперервна.

Коли ми означали одометр, побудований по правильній послідовності $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, ми вимагали, щоб ця послідовність була необмеженою. Фактично

цю вимогу можна переписати в наступному вигляді:

$$\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \in \Sigma \setminus \Phi_0(\mathbb{N}).$$

Подивимося, що зміниться, якщо $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) = \Phi_0(m) \in \Phi_0(\mathbb{N})$. У цьому випадку $A = \varprojlim_{i \rightarrow \infty} \mathbb{Z}_{n_i} = \mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$, $\vec{e} = 1 \in \mathbb{Z}_m$, і динамічна система (A, g) складається з єдиної періодичної орбіти довжини m .

Розширимо означення одометрів і включимо в нього випадок, коли $\Phi(\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}) \in \Phi_0(\mathbb{N})$.

Тривіально перевіряється, що все сказане в Підрозділах 17.3.6 і 17.3.13, крім Теорема 17.3.21, виконується і для нашого нового означення.

Теорема 17.3.22 (див. [118]—[120]) **1.** Для кожного $N \in \Sigma$ існує одометр (A, g) , такий що $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = N$.

2. Одометри (A_1, g_1) і (A_2, g_2) топологічно спряжені тоді й лише тоді, коли $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

Твердження 17.3.23 Нехай (A, g) — динамічна система, топологічно спряжена з одометром. Для довільної пари точок $x, y \in A$ існує єдиний морфізм $h_{x,y} : (A, g) \rightarrow (A, g)$, такий що $h_{x,y}(x) = y$, і цей морфізм є ізоморфізмом.

17.3.24 Одна категорна конструкція.

Нехай \mathfrak{L} — деяка категорія.

Означення 17.3.25 Скажемо, що категорія \mathfrak{L} має властивість **LU** (Lifting Upstairs), якщо для довільних об'єктів $A, B \in \text{Ob } \mathfrak{L}$ і для будь-яких морфізмів $\alpha \in H_{\mathfrak{L}}(A, B)$ та $e_B \in H_{\mathfrak{L}}(B, B) \cap \text{Iso } \mathfrak{L}$ знайдеться морфізм $e_A \in H_{\mathfrak{L}}(A, A) \cap \text{Iso } \mathfrak{L}$, такий що

$$\alpha e_B = e_A \alpha.$$

Означення 17.3.26 Скажемо, що категорія \mathfrak{L} має властивість **LD** (Lifting Downstairs), якщо для довільних об'єктів $A, B \in \text{Ob } \mathfrak{L}$ і для будь-яких морфізмів $\alpha \in H_{\mathfrak{L}}(A, B)$ та $f_A \in H_{\mathfrak{L}}(A, A) \cap \text{Iso } \mathfrak{L}$ знайдеться морфізм

$f_B \in H_{\mathcal{L}}(B, B) \cap \text{Iso } \mathcal{L}$, такий що

$$f_A \alpha = \alpha f_B .$$

Нехай \mathcal{L} — категорія. Для кожної пари об'єктів $A, B \in \text{Ob } \mathcal{L}$ означимо на множині $H_{\mathcal{L}}(A, B)$ бінарне відношення \sim . Скажемо, що $\alpha \sim \beta$, $\alpha, \beta \in H_{\mathcal{L}}(A, B)$, якщо існують такі $e_A \in H_{\mathcal{L}}(A, A) \cap \text{Iso } \mathcal{L}$ і $e_B \in H_{\mathcal{L}}(B, B) \cap \text{Iso } \mathcal{L}$, що

$$e_A \alpha = \beta e_B .$$

Якщо \mathcal{L} відповідає одній з властивостей **LU** або **LD**, можна показати, що \sim є відношенням еквівалентності. Клас еквівалентності морфізма α будемо позначати $[\alpha]$.

Твердження 17.3.27 *Нехай категорія \mathcal{L} відповідає одній з властивостей **LU** або **LD**.*

Тоді коректно визначена категорія $\bar{\mathcal{L}}$, об'єктами якої є об'єкти категорії \mathcal{L} і для будь-якої пари об'єктів $A, B \in \bar{\mathcal{L}}$ множина морфізмів $H_{\bar{\mathcal{L}}}(A, B)$ є множиною класів еквівалентності морфізмів з $H_{\mathcal{L}}(A, B)$.

Зауваження 17.3.28 *Наведена конструкція є частинним випадком фактор-категорії (див. [121]).*

17.3.29 Основні властивості одометрів (продовження).

Нехай $(A_1, g_1), (A_2, g_2)$ — динамічні системи, топологічно спряжені з одометрами, $\pi_1, \pi_2 : (A_1, g_1) \rightarrow (A_2, g_2)$ і $h : (A_2, g_2) \rightarrow (A_2, g_2)$ — морфізми.

Позначимо через \mathcal{F} множину всіх морфізмів $f : (A_1, g_1) \rightarrow (A_1, g_1)$, для яких комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} (A_1, g_1) & \xrightarrow{f} & (A_1, g_1) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ (A_2, g_2) & \xrightarrow{h} & (A_2, g_2) \end{array}$$

З Твердження 17.3.23 слідує, що $h \in \text{Iso } \mathcal{K}_0$ і $\mathcal{F} \subseteq \text{Iso } \mathcal{K}_0$.

Твердження 17.3.30 Множина \mathcal{F} не порожня.

Для довільних $y \in A_2$ і $x_1 \in \pi_1^{-1}(y)$ виконується рівність

$$\mathcal{F} = \{h_{x_1, x_2} \mid x_2 \in \pi_2^{-1}(h(y))\}.$$

Розглянемо повну підкатегорію \mathcal{A} категорії \mathcal{K}_0 , об'єктами якої є всі динамічні системи, топологічно спряжені с одометрами.

Твердження 17.3.31 Категорія \mathcal{A} відповідає властивостям LU і LD.

Означення 17.3.32 Повна підкатегорія \mathfrak{Z} категорії \mathcal{K} , яка містить рівно по одному представнику з кожного класу ізоморфних об'єктів категорії \mathcal{K} , називається скелетом категорії \mathcal{K} .

Фіксуємо скелет \mathcal{A}_0 категорії \mathcal{A} .

Зауваження 17.3.33 З Теорема 17.3.22 слідує, що для кожного $N \in \Sigma$ категорія \mathcal{A}_0 містить рівно один об'єкт (A, g) , такий що $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = N$.

Зауваження 17.3.34 Внаслідок Теорема 17.3.18 для довільних двох об'єктів (A_1, g_1) і (A_2, g_2) категорії \mathcal{A}_0 наступні твердження еквівалентні:

- (i) $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$;
- (ii) $H_{\mathcal{A}_0}((A_1, g_1), (A_2, g_2)) \neq \emptyset$.

Скористаємось Твердженням 17.3.27 і побудуємо по категорії \mathcal{A}_0 категорію $\bar{\mathcal{A}}_0$.

Наслідок 17.3.35 Нехай $(A_1, g_1), (A_2, g_2) \in \text{Ob } \mathcal{A}_0$.

Якщо $\pi_1, \pi_2 \in H_{\mathcal{A}_0}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$, то $[\pi_1] = [\pi_2]$.

Наслідок 17.3.36 Нехай $(A_1, g_1), (A_2, g_2) \in \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}_0$.

Тоді

(i) Якщо $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$, то потужність множини $H_{\bar{\mathcal{A}}_0}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$ рівна одиниці;

(ii) в протилежному випадку $H_{\bar{\mathcal{A}}_0}((A_1, g_1), (A_2, g_2)) = \emptyset$.

Побудуємо по частково впорядкованій множині Σ категорію $\mathfrak{L}(\Sigma)$, об'єктами якої є елементи множини Σ , а морфізмами — всі пари елементів (M, N) , такі що $M \geq N$. Для довільних двох елементів $M, N \in \Sigma$ множина $H_{\mathfrak{L}(\Sigma)}(M, N)$ складається з одного морфізма (M, N) , якщо $M \geq N$ і є порожньою у протилежному випадку.

Теорема 17.3.37 Відповідність $\Psi_0 : \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}_0 \rightarrow \text{Ob } \mathfrak{L}(\Sigma)$,

$$\Psi_0 : (A, g) \mapsto \Phi(\mathcal{P}(A, g)), \quad (A, g) \in \text{Ob } \bar{\mathcal{A}}_0,$$

однозначно продовжується до функтора $\Psi : \bar{\mathcal{A}}_0 \rightarrow \mathfrak{L}(\Sigma)$.

Функтор Ψ задає ізоморфізм категорій $\bar{\mathcal{A}}_0$ і $\mathfrak{L}(\Sigma)$.

17.3.38 Розширення одометрів. Загальний випадок.

Нехай (X, f) — динамічна система з Хаусдорфовим компактним фазовим простором.

Нагадаємо, що для довільної динамічної системи $(A, g) \in \text{Ob } \mathcal{A}$ в категорії \mathcal{K}_0 існує морфізм $h : (X, f) \rightarrow (A, g)$ тоді й лише тоді, коли $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$ (див. Теорему 17.3.18).

Розглянемо повну підкатегорію $\mathcal{A}(X, f)$ категорії \mathcal{A} , об'єктами якої є динамічні системи $(A, g) \in \text{Ob } \mathcal{A}$, такі що $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Як слідує з Зауваження 17.3.33 категорія $\mathcal{A}(X, f)$ відповідає властивостям **LU** і **LD**.

Фіксуємо скелет $\mathcal{A}_0(X, f)$ категорії $\mathcal{A}(X, f)$ і використовуючи Твердження 17.3.27 побудуємо категорію $\mathcal{A}_0(\bar{X}, f)$.

Твердження 17.3.39 Нехай $(A_1, g_1), (A_2, g_2) \in \text{Ob } \mathcal{A}_0(\bar{X}, f)$.

Тоді

(i) якщо $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$, то потужність множини $H_{\mathcal{A}_0(\bar{X}, f)}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$ рівна одиниці;

(ii) в протилежному випадку $H_{\mathcal{A}_0(\bar{X}, f)}((A_1, g_1), (A_2, g_2)) = \emptyset$.

Розглянемо підмножину $\Sigma(X, f) = \{N \in \Sigma \mid N \leq \Phi(\mathcal{P}(X, f))\}$ множини (Σ, \leq) і побудуємо по цій частково впорядкованій множині категорію $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$.

Теорема 17.3.40 *Відповідність*

$$\Psi_0(X, f) : \text{Ob } \mathcal{A}_0(\bar{X}, f) \rightarrow \text{Ob } \mathfrak{L}(\Sigma(X, f)) ,$$

$$\Psi_0(X, f) : (A, g) \mapsto \Phi(\mathcal{P}(A, g)) , \quad (A, g) \in \text{Ob } \mathcal{A}_0(\bar{X}, f) ,$$

однозначно продовжується до функтора

$$\Psi(X, f) : \mathcal{A}_0(\bar{X}, f) \rightarrow \mathfrak{L}(\Sigma(X, f)) .$$

Функтор $\Psi(X, f)$ є ізоморфізмом категорій $\mathcal{A}_0(\bar{X}, f)$ і $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$.

Означимо категорію $\mathfrak{B}(X, f)$ наступним чином:

— об'єктами $\mathfrak{B}(X, f)$ є пари $(h, (A, g))$, де (A, g) — об'єкт категорії $\mathcal{A}(X, f)$, $h \in \text{Mor}_{\mathcal{K}_0}((X, f), (A, g))$;

— для довільних двох $(h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}(X, f)$ множина $H_{\mathfrak{B}(X, f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)))$ складається зі всіх таких трійок $((h_1, (A_1, g_1)), \pi, (h_2, (A_2, g_2)))$, що виконуються співвідношення $\pi \in H_{\mathcal{A}(X, f)}((A_1, g_1), (A_2, g_2))$ і $h_2 = \pi \circ h_1$.

Лема 17.3.41 *Нехай $(h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}(X, f)$.*

Тоді

(i) множина $H_{\mathfrak{B}(X, f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)))$ містить не більше одного елемента;

(ii) якщо множина $H_{\mathfrak{B}(X, f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)))$ не порожня, то $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \geq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

Лема 17.3.42 *Нехай $(h, (A, g)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}(X, f)$, $N \in \Sigma(X, f)$ і виконується нерівність $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq N$.*

Тоді знайдеться $(h_1, (A_1, g_1)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}(X, f)$, таке що

$$(i) \quad \Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = N;$$

$$(ii) \quad H_{\mathfrak{B}(X, f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h, (A, g))) \neq \emptyset.$$

Означимо “стираючий” функтор $\Theta : \mathfrak{B}(X, f) \rightarrow \mathcal{A}(X, f)$ за допомогою співвідношень

$$\Theta : (h, (A, g)) \mapsto (A, g), \quad (h, (A, g)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}(X, f);$$

$$\Theta : ((h_1, (A_1, g_1)), \pi, (h_2, (A_2, g_2))) \mapsto \pi, \\ ((h_1, (A_1, g_1)), \pi, (h_2, (A_2, g_2))) \in \text{Mor}(\mathfrak{B}(X, f)).$$

Розглянемо повний прообраз $\mathfrak{B}'(X, f)$ скелета $\mathcal{A}_0(X, f)$ під дією функтора Θ . Проста безпосередня перевірка показує, що $\mathfrak{B}'(X, f)$ є повною підкатегорією категорії $\mathfrak{B}(X, f)$.

Зауваження 17.3.43 *Нехай \mathfrak{L}' — повна підкатегорія категорії \mathfrak{L} . Нехай $A, B \in \text{Ob } \mathfrak{L}'$. За означенням $H_{\mathfrak{L}'}(A, B) = H_{\mathfrak{L}}(A, B)$.*

Внаслідок цього об'єкти A і B ізоморфні в \mathfrak{L}' тоді й лише тоді, коли вони є ізоморфними в \mathfrak{L} .

Нехай $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ — скелет категорії $\mathfrak{B}'(X, f)$. Очевидно, $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ — повна підкатегорія категорії $\mathfrak{B}(X, f)$.

Твердження 17.3.44 *Категорія $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ є скелетом категорії $\mathfrak{B}(X, f)$.*

Означимо на класі $\text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$ бінарне відношення \preceq . Скажемо, що

$$(h_1, (A_1, g_1)) \preceq (h_2, (A_2, g_2)),$$

якщо

$$H_{\mathfrak{B}(X, f)}((h_2, (A_2, g_2)), (h_1, (A_1, g_1))) \neq \emptyset.$$

Твердження 17.3.45 ([54]) Відношення \preceq є відношенням часткового порядку і виконуються наступні твердження:

- (i) кожен елемент $(h, (A, g)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$ мажоредується деяким елементом $(h', (A', g')) \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$, таким що $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$;
- (ii) елемент $(h, (A, g)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$ є максимальним відносно порядку \preceq тоді й лише тоді, коли виконується рівність $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = \Phi(\mathcal{P}(X, f))$.

Лема 17.3.46 ([54]) Нехай $(h, (A, g)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$ і $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \leq N$ для деякого $N \in \Sigma(X, f)$.

Існує такий об'єкт $(h', (A', g')) \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$, що

- (i) $\Phi(\mathcal{P}(A', g')) = N$;
- (ii) $H_{\mathfrak{B}'_0(X, f)}((h', (A', g')), (h, (A, g))) \neq \emptyset$.

За означенням $\Theta(\text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)) = \text{Ob } \mathcal{A}_0(X, f) = \text{Ob } \mathcal{A}_0(\bar{X}, f)$, отже коректно означено відображення

$$\Lambda_0 = \Psi_0 \circ \Theta : \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f) \rightarrow \text{Ob } \mathfrak{L}(\Sigma(X, f)) = (\Sigma(X, f), \leq) .$$

Наслідок 17.3.47 Відображення Λ_0 зберігає відношення порядку.

Повний прообраз $\Lambda_0^{-1}(\Phi(\mathcal{P}(X, f)))$ найбільшого елементу множини $(\Sigma(X, f), \leq)$ збігається з класом всіх максимальних елементів з $(\text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f), \preceq)$.

Наслідок 17.3.48 Відображення $\Lambda_0 : \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f) \rightarrow \text{Ob } \mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ однозначно продовжується до функтора

$$\Lambda : \mathfrak{B}'_0(X, f) \rightarrow \mathfrak{L}(\Sigma(X, f)) .$$

Для довільних двох об'єктів $B, B' \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$ відображення

$$\Lambda_{B, B'} : H_{\mathfrak{B}'_0(X, f)}(B, B') \rightarrow H_{\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))}(\Lambda(B), \Lambda(B'))$$

є ін'єктивним.

Зауваження 17.3.49 1). З Лемми 17.3.41 слідує, що необхідною умовою для того, щоб два об'єкти $(h_1, (A_1, g_1))$ і $(h_2, (A_2, g_2)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}(X, f)$ були ізоморфними, є рівність $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

2). З Наслідку 17.3.23 випливає таке твердження: якщо виконується рівність $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) = \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$, то об'єкти $(h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}(X, f)$ ізоморфні тоді й лише тоді, коли принаймні одна з множин

$$H_{\mathfrak{B}(X, f)}((h_1, (A_1, g_1)), (h_2, (A_2, g_2))) ,$$

$$H_{\mathfrak{B}(X, f)}((h_2, (A_2, g_2)), (h_1, (A_1, g_1)))$$

не порожня.

17.3.50 Розширення одометрів. Нерозкладні динамічні системи.

Виникає природне бажання якось “порівняти” категорії $\mathfrak{B}(X, f)$ і $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$.

Нижче ми побачимо, що у випадку, коли динамічна система (X, f) нерозкладна, категорія $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ ізоморфна скелету категорії $\mathfrak{B}(X, f)$ (і ізоморфізм задається функтором Λ).

Якщо ж динамічна система (X, f) не є нерозкладною, взагалі кажучи незрозуміло, як “порівнювати” категорії $\mathfrak{B}(X, f)$ і $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$, як показує наступна лема.

Лема 17.3.51 Нехай $(h, (A, g)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$, $N \in \Sigma(X, f)$ і виконується строга нерівність $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) \not\leq N$.

Об'єкт $(h', (A', g')) \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$, що відповідає Лемі 17.3.46, визначений однозначно тоді й лише тоді, коли динамічна система (X, f) є нерозкладною.

Зауваження 17.3.52 Очевидно, множина (Σ, \leq) має найменший елемент $E = (E_p = 0)_{p \in \mathcal{S}} = \Phi_0(1)$.

Отже, для довільної динамічної системи (X, f) об'єкт E є правим нулем категорії $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$.

В категорії $\mathcal{A}_0(X, f)$ елементу E відповідає динамічна система $(\{pt\}, Id)$ з фазовим простором, що є одноточковою множиною (відповідає в тому сенсі, що $\Phi(\mathcal{P}(\{pt\}, Id)) = E$).

Твердження 17.3.53 В категорії $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ є правий ноль $0_R \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$.

Зауваження 17.3.54 Оскільки за означенням скелета категорії будь-які два різних об'єкта категорії $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ не ізоморфні, то правий ноль визначено однозначно.

Наступні два твердження є наслідками Лема 17.3.51.

Наслідок 17.3.55 Нехай $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$, $N \in \Sigma(X, f)$ і $N \neq E$.

Знайдеться $(h, (A, g)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$, таке що $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = N$ і еквівалентні наступні твердження:

- (i) об'єкт $(h, (A, g)) \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$, для якого $\Phi(\mathcal{P}(A, g)) = N$, визначено однозначно;
- (ii) динамічна система (X, f) нерозкладна.

Зауваження 17.3.56 Іншими словами Наслідок 17.3.55 можна сформулювати так:

- відображення $\Lambda_0 : \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f) \rightarrow \text{Ob } \mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ сюр'єктивне;
- якщо $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$, то ін'єктивність відображення Λ_0 еквівалентна тому, що динамічна система (X, f) нерозкладна.

Наслідок 17.3.57 Якщо динамічна система (X, f) нерозкладна, то для довільних двох об'єктів $(h_1, (A_1, g_1))$ і $(h_2, (A_2, g_2))$ категорії $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ нерівність

$$H_{\mathfrak{B}(X, f)}((h_2, (A_2, g_2)), (h_1, (A_1, g_1))) \neq \emptyset$$

виконується тоді й лише тоді, коли справедлива нерівність $\Phi(\mathcal{P}(A_1, g_1)) \leq \Phi(\mathcal{P}(A_2, g_2))$.

Лема 17.3.58 Нехай $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$. Тоді наступні твердження еквівалентні:

- (i) категорія $\mathfrak{B}'_0(X, f)$ має лівий ноль $0_L \in \text{Ob } \mathfrak{B}'_0(X, f)$;
- (ii) динамічна система (X, f) нерозкладна.

Теорема 17.3.59 ([54]) *Нехай $\Phi(\mathcal{P}(X, f)) \neq E$, $\mathfrak{B}_0(X, f)$ — скелет категорії $\mathfrak{B}(X, f)$.*

Наступні твердження еквівалентні:

- (i) динамічна система (X, f) нерозкладна;
- (ii) категорії $\mathfrak{B}_0(X, f)$ і $\mathfrak{L}(\Sigma(X, f))$ ізоморфні.

Висновки

В даній роботі вивчались одновимірні шарування з особливостями на поверхнях, а також об'єкти, які їх породжують — функції, динамічні системи, тощо. Було отримано такі основні результати.

- Означено поняття плоского відображення локально скінченного дерева та скінченного ліса, який складається з таких дерев, у площину. Доведено, що довільний образ скінченного лісу на площині під дією плоского відображення є множиною рівня деякої псевдогармонічної функції. (**Розділ 2.**)
- Розглянуто клас неперервних функцій на некомпактних поверхнях, множини рівня яких локально мають таку ж топологічну будову, як і гладкі функції з ізольованими особливостями. Знайдені достатні умови, при виконанні яких простір Кронрода–Ріба такої функції є топологічним графом з черенками. Доведено, що у випадку, коли поверхня є площиною \mathbb{R}^2 , ці умови є також необхідними. (**Розділ 3.**)
- Розглянуто псевдогармонічні функції загального положення на площині, які мають скінченну кількість сингулярних точок і задовольняють додатково деяким умовам \mathfrak{J} , які гарантують, що $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками. На основі простору Кронрода–Ріба побудовано повний топологічний інваріант, що розрізняє такі функції. (**Розділ 4.**)
- Для певного класу графів доведено теорему реалізації у якості комбінаторної діаграми деякої функції f означеної на замкненому двовимірному диску D^2 , яка є псевдогармонічною у $\text{Int } D^2$ і для якої обмеження f на ∂D^2 має лише скінченне число екстремумів. (**Розділ 5.**)
- Означено клас смугастих поверхонь: двовимірних поверхонь які можуть

бути склеєні з горизонтальних смуг і на яких певним чином задається одновимірне канонічне шарування. Для поверхонь з цього класу вивчено гомотопічний тип груп $\mathcal{H}(\Delta)$ листових гомеоморфізмів Z (гомеоморфізмів, що відображають листи Δ на листи) і доведено, що за виключенням двох випадків компонента лінійної зв'язності одиниці $\mathcal{H}_0(\Delta)$ групи $\mathcal{H}(\Delta)$ є стягнутою. **(Розділ 6.)**

- Для двовимірного многовиду X , на якому задане одновимірне шарування Δ , що належить до класу \mathcal{F} (X має структуру локально тривіального розшарування, шарами якого є листи шарування Δ), доведено, що X листово гомеоморфний до деякої смугастої поверхні при виконанні додаткової умови що сім'я $\text{Spec}(\Delta)$ всіх спеціальних листів Δ локально скінченна. **(Розділ 7.)**
- Отримано наступну характеристику смугастих поверхонь: двовимірний многовид X , на якому задано одновимірне шарування Δ , кожен лист якого гомеоморфний \mathbb{R}^1 і є замкненою підмножиною X , листово гомеоморфний деякій смугастій поверхні тоді й лише тоді, коли сім'я $\text{Sing}(\Delta)$, що складається зі всіх *сингулярних* листів є локально скінченною. **(Розділ 8.)**
- Запропоновано означення регулярної та сідлової точки неперервної функції на поверхні, які є слабкішими аналогами означень регулярної та сингулярної точки псевдогармонічної функції. Побудовано приклад неперервної функції на замкненому двовимірному диску, яка є постійною на його межі, має рівно два нестрогих локальних екстремуми всередині диску і не має сідлових точок. **(Розділ 9.)**
- Побудовано контр-приклад до гіпотези Дж. Фокса, яка стверджує, що F -функція f завжди постійна на компонентах зв'язності замикання множини своїх S -відділених точок. **(Розділ 10.)**
- Знайдено необхідні й достатні умови для того, щоб неперервна функція на поверхні була спряженою псевдогармонічною функцією до заданої псевдогармонічної функції. **(Розділ 11.)**
- Нехай G — область в \mathbb{R}^n , $x_0 \in G$, $F \in C^n(G)$. Доведено, що точка x_0 є квазі-ізолюваною точкою рівня $F^{-1}(F(x_0))$ тоді й лише тоді, коли існує вкладена послідовність гіперповерхонь, що обмежують x_0 , яка збігається

до x_0 і складається з компонент лінійної зв'язності регулярних множин рівня F . (Розділ 12.)

- Узагальнено теорему, обернену до теореми Жордана про криву. (Розділ 13.)
- Запропоновано розбиття універсального простору Менгера M_k^n на дві неперетинні множини C_k^n і F_k^n . Доведено, що достатньою умовою для того, щоб k -вимірна компактна множина $X \subset \mathbb{R}^n$ містила k -вимірний диск є існування вкладення $f : X \rightarrow M_k^n$, для якого розмірність множини $f(X) \cap C_k^n$ дорівнює k . (Розділ 14.)
- Доведено, що для гомеоморфізму $g : X \rightarrow X$ Хаусдорфового топологічного простору X і для кожного $n \geq 2$ центри Біркгофа динамічних систем (X, g) і (X, g^n) збігаються. (Розділ 15.)
- Знайдено умови на співвідношення між періодами близьких періодичних орбіт д. с. з дискретним часом на множині Кантора, при виконанні яких фазовий простір неперервної надбудови над д. с. не може бути вкладений у двовимірну поверхню (відповідно, у орієнтовну двовимірну поверхню). (Розділ 16.)
- Для обертової д. с. (X, f) з Хаусдорфовим компактним фазовим простором X нами означені і досліджені періодичні розбиття простору X , а також побудовано топологічний інваріант $\mathcal{P}(X, f) \subset \mathbb{N}$ — множину потужностей всіх періодичних розбиттів простору X . Вказано, як по $\mathcal{P}(X, f)$ знайти всі одометри, на які має проєкції (X, f) . Розглянуто категорію, об'єктами якої є проєкції (X, f) на одометри. Описано скелет цієї категорії у випадку, коли д. с. (X, f) нерозкладна. (Розділ 17.)

Список цитованої літератури

- [1] В. А. Зорич, *Математический анализ*. М.: МЦНМО, 2002, т. 1, 674 с.
- [2] I. Nikolaev, *Foliations on Surfaces*, ser. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001, vol. 41, 450 pp.
- [3] J. Palis and W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer-Verlag New York, 1982, 209 pp.
- [4] L. P. Plachta, “The combinatorics of gradient-like flows and foliations on closed surfaces. I. Topological classification”, in *Proceedings of the Lviv Topological Seminar (1999/2000)*, vol. 128, 2003, pp. 63–91.
- [5] —, “The combinatorics of gradient-like flows and foliations on closed surfaces. II. The problem of realization and some estimates”, *Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya*, vol. 44, no. 2, pp. 7–16, 2001.
- [6] —, “The combinatorics of gradient-like flows and foliations on closed surfaces. III. The problem of realization and some estimates”, *Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya*, vol. 44, no. 3, pp. 7–16, 2001.
- [7] E. Polulyakh, V. Sharko, and I. Vlasenko, “Discretization of second Lyapunov method”, *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 157–180, 2016.
- [8] W. Kaplan, “Regular curve-families filling the plane, I”, *Duke Mathematical Journal*, vol. 7, no. 1, pp. 154–185, 1940.

- [9] —, “Regular curve-families filling the plane, II”, *Duke Mathematical Journal*, vol. 8, no. 1, pp. 11–46, Mar. 1941.
- [10] M. Morse, *Topological methods in the theory of functions of a complex variable*, ser. Annals of Mathematics Studies 15. Princeton University Press, 1947, 154 pp.
- [11] W. Kaplan, “Topology of level curves of harmonic functions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 63, no. 3, pp. 514–522, Mar. 1948.
- [12] W. M. Boothby, “The topology of regular curve families with multiple saddle points”, *American Journal of Mathematics*, vol. 73, no. 2, pp. 405–438, Apr. 1951.
- [13] —, “The topology of the level curves of harmonic functions with critical points”, *American Journal of Mathematics*, vol. 73, no. 3, pp. 512–538, Jul. 1951.
- [14] Y. Tôki, “A topological characterization of pseudo-harmonic functions”, *Osaka Math. Journ.*, vol. 3, no. 1, pp. 101–122, 1951.
- [15] M. Morse, “The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces”, *Fund. Math.*, vol. 39, 269–287 (1953), 1952.
- [16] J. Jenkins and M. Morse, “Topological methods on riemann surfaces”, *Ann. of Math. Stud.*, vol. 30, pp. 111–139, 1953, Pseudoharmonic functions. Contributions to the theory of Riemann surfaces.
- [17] J. Jenkins and M. Morse, “Conjugate nets, conformal structure, and interior transformations on open riemann surfaces”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 39, no. 12, pp. 1261–1268, Dec. 1953.
- [18] —, “Curve families F^* locally the level curves of a pseudoharmonic function”, *Acta Mathematica*, vol. 91, no. 1, pp. 1–42, Dec. 1954.
- [19] —, “Conjugate nets on an open Riemann surface”, in *Lectures on functions of a complex variable*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1955, pp. 123–185.

- [20] M. Morse, “La construction topologique d’un réseau isotherme sur une surface ouverte”, *J. Math. Pures Appl. (9)*, vol. 35, pp. 67–75, 1956.
- [21] J. A. Jenkins and M. Morse, “Contour equivalent pseudoharmonic functions and pseudoconjugates”, *American Journal of Mathematics*, vol. 74, no. 1, pp. 23–51, Jan. 1952.
- [22] S. Stoilov, *Lectures on topological principles of the theory of analytic functions*. Izdat. “Nauka”, Moscow, 1964, 227 pp.
- [23] W. C. Fox, “The critical points of peano-interior functions defined on 2-manifolds”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 83, no. 2, pp. 338–370, Nov. 1956.
- [24] —, “Sufficient conditions that a peano-interior function have an extension with constant boundary values”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 90, no. 2, pp. 255–271, Feb. 1959.
- [25] Е. А. Полулях, «Графы Кронрода – Роба функций на некомпактных двумерных поверхностях. I», *Укр. мат. журн.*, т. 67, № 3, с. 375–396, 2015.
- [26] G. Whyburn, *Analytic Topology*, ser. Colloquium Publications. American Mathematical Society, 1942, vol. 28, 280 pp.
- [27] E. Kamke, “Zur theorie der differentialgleichungen”, *Mathematische Annalen*, vol. 99, no. 1, pp. 602–615, Dec. 1928.
- [28] V. V. Sharko and Y. Y. Soroka, “Topological equivalence to a projection”, *Methods of Functional Analysis and Topology*, vol. 21, no. 1, pp. 3–5, 2015.
- [29] A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko, *Vvedenie v topologiyu integriruemyykh gamiltonovykh sistem (Introduction to the topology of integrable Hamiltonian systems)*. Moscow: “Nauka”, 1997, 352 pp.
- [30] A. A. Oshemkov, “Morse functions on two-dimensional surfaces. Coding of singularities”, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 205, no. Novye Rezult. v Teor. Topol. Klassif. Integr. Sistem, pp. 131–140, 1994.

- [31] V. V. Sharko, “Smooth and topological equivalence of functions on surfaces”, *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 55, no. 5, pp. 832–846, May 2003.
- [32] ———, “Smooth functions on non-compact surfaces”, *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.*, vol. 3, no. 3, pp. 443–473, 2006.
- [33] E. Polulyakh and I. Yurchuk, *On the Pseudo-harmonic Functions Defined On a Disk*, ser. Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos. Kyiv: Inst. Mat. NAN Ukr., 2009, vol. 80, 151 pp.
- [34] A. Andronov and L. Pontryagin, “Systèmes grossiers”, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, vol. 14, pp. 247–251, 1937.
- [35] M. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds”, *Topology*, vol. 1, no. 2, pp. 101–120, Apr. 1962.
- [36] ———, “Structural stability on two-dimensional manifolds. A further remark.”, *Topology*, vol. 2, pp. 179–180, 1963.
- [37] S. K. Aranson and V. Z. Grines, “Certain invariants of dynamical systems on two-dimensional manifolds (necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of transitive systems)”, *Mat. Sb. (N.S.)*, vol. 90(132), pp. 372–402, 479, 1973.
- [38] ———, “Topological classification of flows on closed two-dimensional manifolds”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 41, no. 1(247), pp. 149–169, 240, Feb. 1986.
- [39] I. Bronstein and I. Nikolaev, “Peixoto graphs of Morse-Smale foliations on surfaces”, *Topology Appl.*, vol. 77, no. 1, pp. 19–36, 1997.
- [40] S. K. Aranson, E. V. Zhuzhoma, and V. S. Medvedev, “On the continuity of geodesic frames of flows on surfaces”, *Mat. Sb.*, vol. 188, no. 7, pp. 3–22, 1997.
- [41] A. A. Oshemkov and V. V. Sharko, “On the classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds”, *Mat. Sb.*, vol. 189, no. 8, pp. 93–140, 1998.

- [42] S. K. Aranson, V. Z. Grines, and V. A. Kaimanovich, “Classification of supertransitive 2-webs on surfaces”, *J. Dynam. Control Systems*, vol. 9, no. 4, pp. 455–468, 2003.
- [43] M. Farber, *Topology of closed one-forms*, ser. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, 2004, vol. 108, xii+246.
- [44] N. V. Budnyts’ka and O. O. Pryshlyak, “Equivalence of closed 1-forms on surfaces with edge”, *Ukrain. Mat. Zh.*, vol. 61, no. 11, pp. 1455–1472, 2009.
- [45] N. V. Budnyts’ka and T. V. Rybalkina, “Realization of a closed 1-form on closed oriented surfaces”, *Ukrainian Math. J.*, vol. 64, no. 6, pp. 844–856, 2012.
- [46] M. H. A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1964, 214 pp.
- [47] K. Kuratowski, *Topology*. New York-London: Academic Press; Warsaw: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1968, vol. 2, 622 pp.
- [48] L. S. Pontrjagin, “Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension”, *C. R. Acad. Paris*, vol. 190, pp. 1105–1107, 1930.
- [49] И. Ю. Власенко и Е. А. Полулях, «Пример неблуждающего множества, не имеющего рекуррентных и предельных точек», *Збірник праць Інституту математики НАН України*, т. 3, № 3, с. 309–422, 2006.
- [50] Е. А. Полулях, «О вложении тотальных пространств расслоений над окружностью со слоем множество Кантора в двумерные многообразия», *Матем. физ., анал., геом.*, т. 7, № 1, с. 66–90, 2000.
- [51] И. Ю. Власенко, С. И. Максименко и Е. А. Полулях, *Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий*, сер. Труды Института математики НАН Украины. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006, т. 61, 363 с.

- [52] E. Polulyakh, “On the theorem converse to Jordan’s curve theorem”, *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 6, no. 4, pp. 56–69, 2000.
- [53] S. I. Maksimenko, M. A. Pankov, and E. A. Polulyakh, “Representations of compact subsets of \mathbb{R}^n ”, *Topology Appl.*, vol. 119, no. 1, pp. 33–39, 2002.
- [54] Е. А. Полулях, «О проекциях на одометры динамических систем с компактным фазовым пространством», *Збірник праць Інституту математики НАН України*, т. 3, № 3, с. 309–422, 2006, *Проблеми топології та суміжні питання*.
- [55] I. Y. Vlasenko та Е. А. Polulyakh, «On iteration stability of the Birkhoff center with respect to power 2», *Укр. мат. журн.*, т. 58, № 5, с. 705–707, 2006.
- [56] Є. О. Полулях, «Про сідлові точки неперервних функцій», *Мат. студії*, т. 31, № 2, с. 172–182, 2009.
- [57] Е. О. Polulyakh, «On conjugate pseudo-harmonic functions», *Збірник праць Інституту математики НАН України*, т. 6, № 2, с. 505–517, 2009, *Геометрія, топологія та їх застосування*.
- [58] Е. А. Полулях, «О поведении F-функций на замыкании множества своих S-отделенных точек», *Збірник праць Інституту математики НАН України*, т. 7, № 4, с. 153–168, 2010, *Геометрія та топологія функцій на многовидах*.
- [59] Є. О. Полулях, «Про множини рівня псевдогармонічної функції на площині», *Доповіді НАНУ*, № 1, с. 22–26, 2014.
- [60] —, «Дерева як множини рівня псевдогармонічних функцій на площині», *Укр. мат. журн.*, т. 65, № 7, с. 974–995, 2013.
- [61] —, «Дерева як множини рівня псевдогармонічних функцій на площині. II», *Укр. мат. журн.*, т. 68, № 2, с. 254–270, 2016.

- [62] Е. А. Полулях, «Графы Кронрода – Роба функций на некомпактных двумерных поверхностях. II», *Укр. мат. журн.*, т. 67, № 10, с. 1398–1408, 2015.
- [63] В. В. Шарко, Є. О. Полулях та Ю. Ю. Сорока, «Про топологічну еквівалентність псевдогармонічних функцій загального положення на площині», *Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, т. 12, № 6, с. 7–47, 2015, *Топологія відображень маловимірних многовидів*.
- [64] S. Maksymenko and E. Polulyakh, “Foliations with non-compact leaves on surfaces”, *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 8, no. 3–4, pp. 17–30, 2015. eprint: [1512.07809](https://arxiv.org/abs/1512.07809).
- [65] —, “Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces”, *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 22, no. 3, pp. 266–282, 2016.
- [66] S. Maksymenko, E. Polulyakh, and Y. Soroka, “Homeotopy groups of one-dimensional foliations on surfaces”, *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 10, no. 1, pp. 22–46, 2017.
- [67] S. Maksymenko and E. Polulyakh, “Characterization of striped surfaces”, *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 10, no. 2, pp. 24–38, 2017.
- [68] Е. А. Полулях, «Об одном топологическом инварианте динамических систем на множестве Кантора», в *Тези доповідей 4-ої міжнародної конференції з геометрії і топології, (м. Черкаси)*, 2001, с. 85.
- [69] Є. Полулях та І. Юрчук, «Псевдогармонічні функції в одиничному крузі», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія в Одесі – 2008”, (м. Одеса)*, 2008, с. 57.
- [70] E. Polulyakh, «One note on level sets of pseudo-harmonic functions in the plane», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія в Одесі – 2013”, (м. Одеса)*, 2013, с. 108.
- [71] —, «Kronrod–Reeb graphs of functions on non-compact 2-manifolds», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія в Одесі – 2015”, (м. Одеса)*, 2015, с. 57.

- [72] Y. O. Polulyakh та Y. Y. Soroka, «Topological equivalence of pseudo-harmonic functions of general position in the plane», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Геометрія і топологія в Одесі – 2016”*, (м. Одеса), 2016, с. 28.
- [73] Y. Polulyakh, «Regular continuous functions on a closed 2-disk», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Infinite dimensional analysis and topology”*, (м. Івано-Франківськ), 2009, с. 119–120.
- [74] I. Yurchuck та Y. Polulyakh, «Topological equivalence of the pseudoharmonic functions defined on the D^2 », в *Тези доповідей міжнародної конференції “Analysis & Topology”*, (м. Львів), 2008, с. 72–75.
- [75] Е. Полулях, «О седловых точках непрерывных функций на замкнутом двумерном диске», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Боголюбівські читання” присвяченої 90-річчю з дня народження Ю. О. Митропольського*, (м. Київ), 2007, с. 87–88.
- [76] Е. Polulyakh, «One note on level sets of pseudo-harmonic functions in the plane», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Боголюбівські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування” з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка*, (м. Севастополь), 2013, с. 211.
- [77] Y. A. Polulyakh, «Regular continuous functions on a closed 2-disk», в *Тезисы докладов международной конференции “Геометрия «в целом», топология и их приложения”*, посвященной 90-летию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова, (г. Харьков), 2009, с. 67.
- [78] Е. Polulyakh, V. Sharko та I. Vlasenko, «Stability in the sense of Lyapunov», в *Тези доповідей міжнародної конференції “Динамічні системи та їх застосування”*, (м. Київ), 2012, с. 32.
- [79] S. Maksymenko and E. Polulyakh, “Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces”, in *Book of abstracts of international conference “Modern Advances in Geometry and Topology” in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday*, (Kharkiv), 2016, pp. 31–32.

- [80] В. А. Рохлин и Д. Б. Фукс, *Начальный курс топологии. Геометрические главы*. М.: Наука, 1977, 496 с.
- [81] R. Engelking, *Dimension Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1978, 316 pp.
- [82] R. Engelking, *General topology*, ser. Sigma Series in Pure Math. Heldermann Verlag, 1989, vol. 6, 535 pp.
- [83] К. Берж, *Теория графов и ее применения*. М.: ИЛ, 1962, 320 с.
- [84] О. Оре, *Теория графов*. М.: Наука, 1980, 340 с.
- [85] P. J. Hilton and S. Wylie, *Homology Theory*. Cambridge University Press (CUP), 1960, 498 pp.
- [86] К. С. Сибирский, *Введение в топологическую динамику*. Кишинев, ШТИИИЦА, 1970, 143 с.
- [87] W. Gottschalk and G. Hedlund, *Topological Dynamics*, ser. AMS Colloq. Publ. American Mathematical Society, 1955, vol. 36, 163 pp.
- [88] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*. Princeton University Press, 1981, 212 pp.
- [89] G. Birkhoff, *Dynamical Systems*, ser. AMS Colloquium Publications. American Mathematical Society, 1927, vol. 9, 316 pp.
- [90] J. de Vries, *Elements of Topological Dynamics*, ser. Mathematics and Its Applications. Springer Nature, 1993, vol. 257, 748 pp.
- [91] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*. М.: Наука, 1977, 368 с.
- [92] В. М. Алексеев, *Символическая динамика*. Институт математики АН УССР, 1976, 212 с.
- [93] В. В. Немыцкий, «Топологические вопросы теории динамических систем», *Успехи Мат. Наук*, т. 4, № 6, с. 90—153, 1949.
- [94] А. С. Кронрод, «О функциях двух переменных», *Успехи Мат. Наук*, т. 5, № 1, с. 24—134, 1950.

- [95] G. Reeb, “Sur les points singuliers d’une forme de pfaff complètement intégrable ou d’une fonction numérique”, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences*, vol. 222, pp. 847–849, 1946.
- [96] A. O. Prishlyak, “Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface”, *Topology and its Applications*, vol. 119, no. 3, pp. 257–267, Apr. 2002.
- [97] P. T. Church and J. G. Timourian, “Differentiable open maps of $(p + 1)$ -manifold to p -manifold”, *Pacific J. Math.*, vol. 48, no. 1, pp. 35–45, 1973.
- [98] J. R. Munkres, *Topology*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 2000, 552 pp.
- [99] M. Morse, “The topology of pseudo-harmonic functions”, *Duke Mathematical Journal*, vol. 13, no. 1, pp. 21–42, Mar. 1946.
- [100] C. Godbillon, *Feuilletages: Études géométriques*, ser. Progress in Mathematics. Birkhauser, 1991, 491 pp.
- [101] I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction*, ser. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, vol. 97, 198 pp.
- [102] S. Maksymenko and E. Polulyakh, “One-dimensional foliations on topological manifolds”, *Proceedings of the International Geometry Center*, vol. 9, no. 2, pp. 1–23, 2016.
- [103] Х. Цишанг, Э. Фогт и Х.-Д. Колдевай, *Поверхности и разрывные группы*. М.: Наука, 1988, 687 с.
- [104] I. Berstein, “A topological characterization of the pseudo-conjugate of a pseudoharmonic function”, *Rev. Math. Pures Appl.*, vol. 1, no. 1, pp. 45–48, 1956.
- [105] O. Forster and B. Gilligan, *Lectures on Riemann Surfaces*, ser. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag GmbH, 1991, vol. 81, 261 pp.

- [106] H. Samelson, “Orientability of hypersurfaces in \mathbb{R}^n ”, *Proc. AMS.*, vol. 22, pp. 301–302, 1969.
- [107] A. Sard, “The measure of the critical points of differentiable maps”, *bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 48, pp. 883–900, 1942.
- [108] S. Mazurkiewicz, “Sur les lignes de Jordan”, *Fund. Math.*, vol. 1, pp. 166–209, 1920.
- [109] E. Coven and Z. Nitecki, “Non-wandering sets of the powers of maps of the interval”, *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 9–31, 1981.
- [110] K. Savada, “On the iterations of diffeomorphisms without C^0 - Ω -explosions: An example”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 79, no. 1, pp. 110–112, 1980.
- [111] W. H. Gottschalk, “Powers of homeomorphisms with almost periodic properties”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 50, no. 4, pp. 222–228, 1944.
- [112] C. Conley, *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*, ser. Conference Board of the Mathematical Sciences Series. American Mathematical Society, 1978, vol. 38, 93 pp.
- [113] A. Hatcher, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2001, 553 pp.
- [114] D. B. A. Epstein, “Curves on 2-manifolds and isotopies”, *Acta Mathematica*, vol. 115, pp. 83–107, 1966.
- [115] К. Рурк и Б. Сандерсон, *Введение в кусочно линейную топологию*. М.: Мир, 1974, 213 с.
- [116] E. Polulyakh, “On projections onto odometers of dynamical systems with the compact phase space”, Feb. 15, 2003. arXiv: [math/0302181v1](https://arxiv.org/abs/math/0302181v1) [[math.DS](#)].
- [117] C. Skau, “Minimal dynamical systems, ordered Bratteli diagrams and associated \mathbb{C}^* – crossed products”, in *Current topics in operator algebras*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991, pp. 264–280.

- [118] J. G. Glimm, “On a certain class of operator algebras”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 95, no. 2, pp. 318–340, 1960.
- [119] G. Barat, T. Downarowicz, A. Iwanik, and P. Liardet, “Propriétés topologiques et combinatoires des échelles de numération”, *Colloq. Math.*, vol. 84/85, no. 2, pp. 285–306, 2000.
- [120] L. Block and J. Keesling, “A characterization of adding machine maps”, *Topology and its Applications*, vol. 140, no. 2-3, pp. 151–161, 2004.
- [121] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1978, vol. 5, 317 pp.
- [122] S. Maksymenko, “Stabilizers and orbits of smooth functions”, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, vol. 130, no. 4, pp. 279–311, Jun. 2006. eprint: [arXiv:math/0411612](https://arxiv.org/abs/math/0411612).

Додаток А

Доведення окремих тверджень Розділу 2

А.1 Доведення Лемми 2.2.3

а) Нехай $w \in V \setminus V_{ter}$ — вершина порядку $n > 1$.

Нехай v_1, \dots, v_n — всі вершини, суміжні w , а $e_1 = (w, v_1), \dots, e_n = (w, v_n)$ — всі ребра, інцидентні вершині w .

(і) Припустимо спочатку, що $v_k \notin V_{ter}$, $k = 1, \dots, n$.

Образи ребер e_k , $k = 1, \dots, n$, під дією відображення Ψ є простими неперервними кривими, тому що Ψ є вкладенням $T \setminus V_{ter}$ у площину (див. доведення Твердження 2.2.2). Зафіксуємо параметризацію $\chi_k : [0, 1] \rightarrow \Psi(e_k)$, $\chi_k(0) = \Psi(w)$, $\chi_k(1) = \Psi(v_k)$, кривої $\Psi(e_k)$ в \mathbb{R}^2 , $k = 1, \dots, n$.

Нехай ρ — стандартна метрика в \mathbb{R}^2 ,

$$d = \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \rho(\chi_k(0), \chi_k(1)) = \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \rho(\Psi(w), \Psi(v_k)).$$

Розглянемо коло $S = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(\Psi(w), z) = d/2\}$ радіуса $d/2$ з центром в точці $\Psi(w)$. Зрозуміло, що всі $\Psi(v_k)$ лежать за межами S , тому для кожного $k = 1, \dots, n$, існує єдине значення параметра $\tau_k = \min\{t \mid \chi_k(t) \in S\} \in (0, 1)$, при якому відбувається перша зустріч кривої χ_k з колом S . За означенням

$\chi_k(t) \in \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(\Psi(w), z) < d/2\}$, коли $t \in [0, \tau_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Не обмежуючи загальності міркувань, змінимо нумерацію вершин і ребер так, щоб при обході кола S в додатному напрямі ми проходили точки $\chi_1(\tau_1), \chi_2(\tau_2), \dots, \chi_n(\tau_n)$ послідовно.

Позначимо $\alpha_k = \chi([0, \tau_k])$, $k = 1, \dots, n$. Нехай β_k — сегмент кола S , який при обході кола в додатному напрямку з'єднує точку $\chi_k(\tau_k)$ з точкою $\chi_{i+1}(\tau_{i+1})$, $k = 1, \dots, n-1$, а β_n — сегмент кола між точками $\chi_n(\tau_n)$ і $\chi_1(\tau_1)$.

Розглянемо коло $S_0 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(0, z) = 1\}$. Позначимо

$$r_k = (\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)) \in S_0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Розглянемо набір відрізків $\hat{\alpha}_k = \{r_k t \mid t \in [0, 1]\}$, $k = 1, \dots, n$, які з'єднують початок координат з точками r_1, \dots, r_n . Нехай $\hat{\beta}_k = \{(\cos(2\pi t/n), \sin(2\pi t/n)) \mid t \in [k, k+1]\}$, $k = 1, \dots, n$.

При обході кола S_0 в додатному напрямі ми проходимо точки r_1, \dots, r_n в тому ж порядку, що проходяться точки $\chi_1(\tau_1), \chi_2(\tau_2), \dots, \chi_n(\tau_n)$ при обході кола S в додатному напрямі. Тому існує гомеоморфізм $\mu_0 : S \rightarrow S_0$, такий що $\mu_0(\chi_k(\tau_k)) = r_k$, $\mu_0(\beta_k) = \hat{\beta}_k$, $k = 1, \dots, n$.

Зафіксуємо гомеоморфізми відрізків $\mu_k : \alpha_k \rightarrow \hat{\alpha}_k$, такі що $\mu_k(\Psi(w)) = 0$, $\mu_k(\chi_k(\tau_k)) = r_k$, $k = 1, \dots, n$.

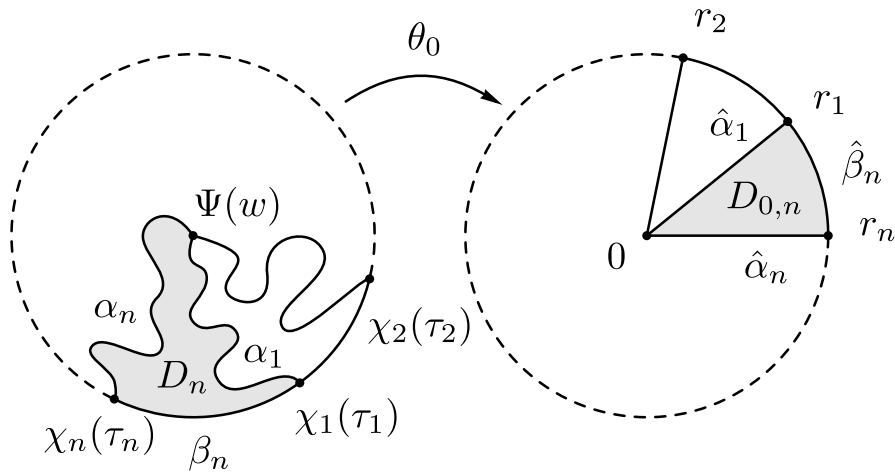
Позначимо $C = S \cup \bigcup_{k=1}^n \alpha_k$, $C_0 = S_0 \cup \bigcup_{k=1}^n \hat{\alpha}_k$.

Легко бачити, що коректно визначене відображення $\mu : C \rightarrow C_0$,

$$\mu(z) = \begin{cases} \mu_0(z), & \text{якщо } z \in S, \\ \mu_k(z), & \text{коли } z \in \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Компактні підмножини $S, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ утворюють фундаментальне покриття простору C (див. [80]) і обмеження μ на кожну з цих множин неперервне, тому і відображення μ є неперервним. Крім того, як легко бачити, μ є бієктивним відображенням компакта C на C_0 . Зі сказаного робимо висновок, що μ є гомеоморфізмом.

Позначимо $\gamma_n = \alpha_n \cup \alpha_1 \cup \beta_n$, $\gamma_k = \alpha_k \cup \alpha_{k+1} \cup \beta_k$, $k = 1, \dots, n-1$. Без-

Рис. А.1.1: Відображення θ_0 .

посередньо перевіряється, що всі $\gamma_k \in \mathcal{C}$ є Жордановими кривими. Нехай D_k — замкнений диск, обмежений кривою γ_k , нехай також $\mathring{D}_k = D_k \setminus \gamma_k$, $k = 1, \dots, n$.

З того, що перетин $\gamma_k \cap \gamma_m \in \mathcal{C}$ є зв'язною множиною при всіх $k \neq m$, $k, m \in \{1, \dots, n\}$, слідує, що $\mathring{D}_k \cap \mathring{D}_m = \emptyset$ при $k \neq m$.

Також $\mathring{D}_k \cap C = \emptyset$, $k = 1, \dots, n$, внаслідок попереднього спостереження і того, що $C = \bigcup_{k=1}^n \gamma_k = \bigcup_{k=1}^n \text{Fr } \mathring{D}_k$.

Позначимо $\hat{\gamma}_n = \hat{\alpha}_n \cup \hat{\alpha}_1 \cup \hat{\beta}_n$, $\hat{\gamma}_k = \hat{\alpha}_k \cup \hat{\alpha}_{k+1} \cup \hat{\beta}_k$, $k = 1, \dots, n-1$. Очевидно, всі $\hat{\gamma}_k \in \mathcal{C}$ є Жордановими кривими. Нехай $D_{0,k}$ — замкнений диск, обмежений кривою $\hat{\gamma}_k$, нехай також $\mathring{D}_{0,k} = D_{0,k} \setminus \hat{\gamma}_k$, $k = 1, \dots, n$.

Зрозуміло, що $\mathring{D}_{0,k} \cap \mathring{D}_{0,m} = \emptyset$ при $k \neq m$; також $\mathring{D}_{0,k} \cap C = \emptyset$, $k = 1, \dots, n$.

Відомо (див. [46]), що гомеоморфізм $\mu|_{\gamma_k} : \gamma_k \rightarrow \hat{\gamma}_k$, $k = 1, \dots, n$, простих замкнених кривих можна продовжити до гомеоморфізму дисків $\theta_k : D_k \rightarrow D_{0,k}$, $k = 1, \dots, n$, обмежених даними кривими.

Позначимо D (відповідно, D_0) замкнений диск, обмежений колом S (відповідно, S_0).

Елементарно перевіряється, що $D = \bigcup_{k=1}^n D_k$, $D_0 = \bigcup_{k=1}^n D_{0,k}$, і коректно визначене бієктивне відображення $\theta_0 : D \rightarrow D_0$, $\theta_0(z) = \theta_k(z)$, якщо $z \in D_k$.

Компактні підмножини D_1, \dots, D_n утворюють фундаментальне покриття простору D (див. [80]) і обмеження θ_0 на кожен з цих множин неперервне за побудовою, тому і відображення θ_0 є неперервним. Крім того з бієктивності неперервного відображення θ_0 компакта D на D_0 слідує, що θ_0 є гомеоморфі-

змом.

Відома теорема про продовження (див. [46]) стверджує, що гомеоморфізм двох Жорданових кривих на площині можна продовжити до гомеоморфізма площини на себе. Користуючись цією теоремою, знайдемо гомеоморфізм $\tilde{\theta}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такий що $\tilde{\theta}_1|_S = \theta_0|_S = \mu_0 : S \rightarrow S_0$. Позначимо через θ_1 обмеження $\tilde{\theta}_1$ на множину $D' = \{z \mid \rho(z, \Psi(w)) \geq d/2\}$ — замикання зовнішності кривої S .

Зрозуміло, що коректно визначене бієктивне відображення $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\theta(z) = \begin{cases} \theta_0(z), & \text{якщо } z \in D, \\ \theta_1(z), & \text{коли } z \in D'. \end{cases}$$

Множини D і D' утворюють скінченне замкнене покриття простору \mathbb{R}^2 , яке є фундаментальним, тому відображення θ є неперервним. Крім того легко бачити, що обидва відображення θ_0 і θ_1 замкнені, внаслідок чого відображення θ також замкнене. Тому обернене відображення θ^{-1} неперервне і θ є гомеоморфізмом.

Повторюючи з очевидними змінами міркування Твердження 1.6.5, приходимо до висновку, що множина

$$U_{0,w} = \bigcup_{k=1}^n \Psi^{-1} \circ \chi_k([0, \tau_k))$$

є відкритим околom вершини w в T , який належить до об'єднання суміжних ребер цієї вершини і гомеоморфний множині Q_n . Останнє твердження слідує з того, що за побудовою $\hat{Q}_n = \theta \circ \Psi(U_{0,w}) = (\bigcup_{k=1}^n \hat{\alpha}_k) \setminus S_0 = \bigcup_{k=1}^n \{r_k t \mid t \in [0, 1)\}$, а ця множина очевидно гомеоморфна Q_n .

Розглянемо замкнену підмножину $X_w = T \setminus U_{0,w}$ дерева T . Зрозуміло, що множина $\tilde{X}_w = X_w \setminus V_{ter}$ замкнена в $T \setminus V_{ter}$, а її образ $Y_w = \theta \circ \Psi(\tilde{X}_w)$ замкнений в $\theta \circ \Psi(T \setminus V_{ter})$. Множина $\theta \circ \Psi(T \setminus V_{ter})$ є замкненою в \mathbb{R}^2 , тому і $Y_w = (\theta \circ \Psi(T \setminus V_{ter})) \setminus \hat{Q}_n$ — замкнена підмножина площини.

Позначимо $\hat{D}_a(0) = \{z \mid \rho(z, 0) < a\}$, $a > 0$. За побудовою $0 = \theta \circ \Psi(w) \notin Y_w$, тому існує $\delta > 0$, для якого $Y_w \cap \hat{D}_\delta(0) = \emptyset$. Очевидно, можна вважати, що $\delta \leq 1$.

Позначимо $\hat{Q}_n(\delta) = \hat{Q}_n \cap D_\delta(0)$. За побудовою $0 = \theta \circ \Psi(w) \in \hat{Q}_n(\delta) = D_\delta(0) \cap \theta \circ \Psi(T \setminus V_{ter}) \subseteq \theta \circ \Psi(U_{0,w})$, Тому множина $U_w = (\theta \circ \Psi)^{-1}(\hat{Q}_n(\delta))$ лежить в об'єднанні ребер графа T , інцидентних вершині w .

Очевидно, $\hat{Q}_n(\delta)$ — відкрита підмножина $\theta \circ \Psi(T \setminus V_{ter})$, тому U_w є відкритою підмножиною простору $T \setminus V_{ter}$, який сам є відкритим підпростором T . Отже, множина U_w є відкритим околom вершини w в T .

Нарешті, $\theta \circ \Psi$ гомеоморфно відображає простір $T \setminus V_{ter}$ на свій образ (див. доведення Твердження 2.2.2), тому підмножина U_w простору $\theta \circ \Psi(T \setminus V_{ter})$ гомеоморфна множині $\hat{Q}_n(\delta)$, а разом з нею, і множині Q_n . Враховуючи те, що Q_n відкрита підмножина простору $T \setminus V_{ter}$, який у свою чергу є відкритим підпростором T , ми приходимо до висновку, що підпростір U_w простору T гомеоморфний Q_n .

Нехай $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(z) = z/\delta$, $\Theta = L \circ \theta$. Легко бачити, що окіл U_w вершини $w \in V \setminus V_{ter}$ і гомеоморфізм Θ задовольняють вимоги нашого твердження.

(ii) Нехай тепер $w \in V \setminus V_{ter}$, а суміжні вершини графа T відповідають таким вимогам: $v_1, \dots, v_m \in V_{ter}$; $v_{m+1}, \dots, v_n \in V \setminus V_{ter}$.

Розглянемо відрізки I_{e_k} , з \hat{T}_0 , які відповідають ребрам $e_k = (w, v_k)$, параметризовані за допомогою гомеоморфізмів $\varphi_{e_k} : [0, 1] \rightarrow I_{e_k}$, $k = 1, \dots, m$. Для простоти можна вважати, що $w = pr \circ \varphi_{e_k}(0)$, $v_k = pr \circ \varphi_{e_k}(1)$, $k = 1, \dots, m$.

Очевидно, $pr \circ \varphi_{e_k}([0, 1/2]) \subset T \setminus V_{ter}$. Тому відображення $\chi'_k : [0, 1] \rightarrow \Psi \circ pr \circ \varphi_{e_k}([0, 1/2])$, $\chi'_k(t) = \Psi \circ pr \circ \varphi_{e_k}(t/2)$, $t \in [0, 1]$, є простою неперервною кривою для кожного $k = 1, \dots, m$.

Розглядаючи замість вершин $v_k \in V_{ter}$ точки $v'_k = pr \circ \varphi_{e_k}(1/2) \in T \setminus V_{ter}$, а також криві χ'_k , $k = 1, \dots, m$, і повторюючи попередні міркування з очевидними змінами, знайдемо окіл U_w вершини $w \in V \setminus V_{ter}$ і гомеоморфізм Θ , які задовольняють вимоги нашого твердження.

б) Нехай точка $w \in T \setminus V$ лежить на ребрі e . Розглянемо відрізок I_e і його параметризацію $\varphi_e : [0, 1] \rightarrow I_e$. За побудовою $(pr \circ \varphi_e)^{-1}(V) = \{0, 1\}$, тому знайдуться $0 < t_1 < t_2 < 1$, такі що $(pr \circ \varphi_e)^{-1}(w) \in (t_1, t_2)$. Зрозуміло, що $pr \circ \varphi_e([t_1, t_2]) \subset T \setminus V_{ter}$, тому відображення $\chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\chi(t) = \Psi \circ pr \circ$

$\varphi_e(t_2t + t_1(1 - t))$ є простою неперервною кривою. Причому $\Psi(w) = \chi(t_0)$ для деякого $t_0 \in (0, 1)$.

Відомо (див. [46]), що кожна проста дуга на площині є дугою деякої Жорданової кривої. Зафіксуємо Жорданову криву γ , дугою якої є χ . Нехай γ_0 — Жорданова крива, що обмежує прямокутник $[-1, 1] \times [0, 1]$. Легко знайти гомеоморфізм $\eta : \gamma \rightarrow \gamma_0$, такий що $\eta \circ \Psi(w) = 0$, $\eta \circ \chi([0, 1]) = [-1, 1] \times \{0\}$.

Скористаємось теоремою про продовження (див. [46]) і продовжимо η до гомеоморфізму площини θ .

Множина $U_w = pr \circ \varphi((t_1, t_2)) = \Psi^{-1}(\chi((0, 1))) = (\theta \circ \Psi)^{-1}((-1, 1) \times \{0\})$ відкрита в T і гомеоморфна інтервалу (див. доведення Твердження 1.6.5).

Задовольнити вимогу **2** твердження, яке ми доводимо, допомагають міркування, абсолютно аналогічні (з очевидними змінами) тим, якими ми скористались у випадку $w \in V \setminus V_{ter}$.

Лемі 2.2.3 доведено.

А.2 Доведення Твердження 2.2.6

Нехай порядок вершини v дорівнює $n > 1$. З урахуванням Зауваження 2.1.4, не обмежуючи загальності міркувань ми можемо вважати, що відображення Θ тотожне і множина $\Psi(U_v) = \{t(\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)) \mid t \in [0, 1], k = 0, \dots, n - 1\}$ ділить диск \mathring{D}_0 на сектори, кожен з яких лежить в доповненні $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T \setminus V_{ter})$. З умови $0 = \Psi(v) \in \text{Fr } Q$ слідує, що принаймні один з цих секторів лежить в Q .

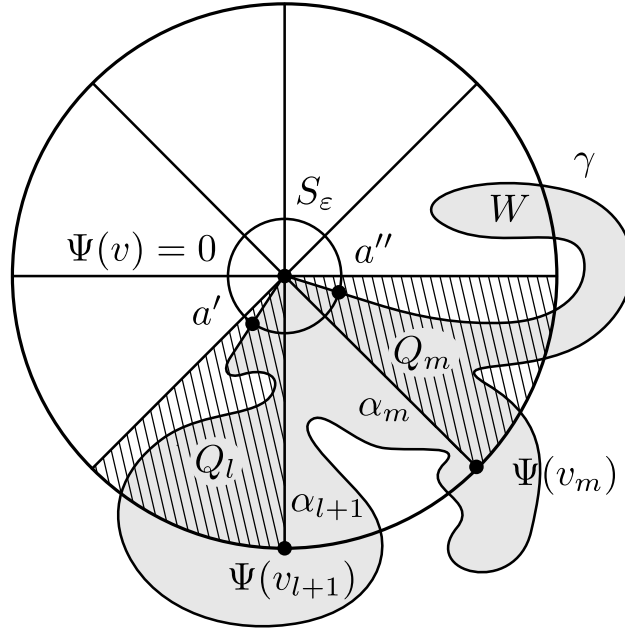
Нехай $e_k = (v, v_k)$ — ребро дерева T , образ якого містить множину

$$\alpha_k = \{t(\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n)) \mid t \in (0, 1)\},$$

$k = 1, \dots, n$. Позначимо через Q_k відкритий сектор диска \mathring{D}_0 , обмежений кривими α_k і α_{k+1} , $k = 1, \dots, n - 1$. Позначимо через Q_n сектор, обмежений кривими α_n і α_1 .

Припустимо, що $Q_l, Q_m \in Q$ для деяких $l, m \in \{1, \dots, n\}$, $l < m$.

Легко знайти просту замкнену криву $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = \gamma(1) = 0 = \Psi(v) \in$

Рис. А.2.1: Крива γ .

Fr Q , яка відповідає таким умовам:

- $\gamma(\overset{\circ}{I}) \subset Q$;
- існують $\beta' \in (2\pi l/n, 2\pi(l+1)/n)$ і $\tau_l \in \overset{\circ}{I}$, такі що $\gamma(t) = (t \cos \beta', t \sin \beta') \in Q_l$ при $t \in [0, \tau_l)$;
- існують $\beta'' \in (2\pi m/n, 2\pi(m+1)/n)$ і $\tau_m \in \overset{\circ}{I}$, такі що $\gamma(t) = ((1-t) \cos \beta'', (1-t) \sin \beta'') \in Q_m$ при $t \in (\tau_m, 1]$.

Нехай крива γ обмежує диск W (див. Рис. А.2.1).

$0 = \Psi(v) \notin \gamma([\tau_l, \tau_m])$, тому існує $\varepsilon > 0$, таке що $D_\varepsilon(0) \cap \gamma([\tau_l, \tau_m]) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \varepsilon\} \cap \gamma([\tau_l, \tau_m]) = \emptyset$. Зрозуміло, що $\varepsilon < \tau_l$ і $1 - \varepsilon > \tau_m$. Позначимо $a' = \gamma(\varepsilon)$, $a'' = \gamma(1 - \varepsilon)$, $S_\varepsilon(0) = \text{Fr } D_\varepsilon(0) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \varepsilon\}$. За побудовою $\{a', a''\} = \gamma(I) \cap S_\varepsilon(0)$.

Легко бачити, що або області $\overset{\circ}{D}_\varepsilon(0) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < \varepsilon\}$ і W не перетинаються, або принаймні одна з двох дуг, на які коло $S_\varepsilon(0)$ ділиться точками a' і a'' , лежить в W . Зі співвідношення $0 \in \text{Fr } W \cap \overset{\circ}{D}_\varepsilon(0)$ слідує, що $W \cap \overset{\circ}{D}_\varepsilon(0) \neq \emptyset$, внаслідок чого одна з компонент множини $S_\varepsilon(0) \setminus \{a', a''\}$ лежить в W .

Позначимо $N' = \{k \in \mathbb{N} \mid (1 \leq k \leq l) \vee (m < k \leq n)\}$, $N'' = \{k \in \mathbb{N} \mid l < k \leq m\}$. Зрозуміло, що при $1 \leq l < m \leq n$ обидві множини непорожні.

Помітимо, що одна з дуг множини $S_\varepsilon(0) \setminus \{a', a''\}$ перетинається з α_k для

кожного $k \in N'$, інша дуга перетинається з α_k для всіх $k \in N''$. Ми вже довели вище, що одна з цих дуг є підмножиною W , отже існує $j \in \{1, \dots, n\}$, таке що $\alpha_j \cap W \neq \emptyset$. За побудовою зв'язна множина α_j не перетинається з $\text{Fr } W = \gamma(I)$, отже $\alpha_j \subset W$.

Розглянемо відображення $\varphi_j = \varphi_{e_j} : I \rightarrow I_j = I_{e_j}$ та $\hat{\varphi}_j = pr \circ \varphi_j : I \rightarrow T$, які реалізують вкладення ребра e_j в простір T . Для простоти будемо вважати, що $\hat{\varphi}_j(0) = v$, $\hat{\varphi}_j(1) = v_j$.

За побудовою $\emptyset \neq \alpha_j \subset W \cap \Psi \circ \hat{\varphi}_j(\overset{\circ}{I})$. З іншого боку $\text{Fr } W \cap \Psi(T \setminus V_{ter}) = \gamma(I) \cap \Psi(T \setminus V_{ter}) = \Psi(v) = \Psi \circ \hat{\varphi}_j(0)$ і $\Psi \circ \hat{\varphi}_j(\overset{\circ}{I}) \cap \Psi \circ \hat{\varphi}_j(0) = \emptyset$, тому зв'язна множина $\Psi \circ \hat{\varphi}_j(\overset{\circ}{I})$ лежить в W .

За означенням плоского відображення

$$\Phi \circ \hat{\varphi}_j|_{\overset{\circ}{I}} = \psi \circ \Psi \circ \hat{\varphi}_j|_{\overset{\circ}{I}} : \overset{\circ}{I} \rightarrow S \setminus \{s\}.$$

Тому, якщо $v_j \in V_{ter}$, то за означенням $\Phi(v_j) = \Phi \circ \hat{\varphi}_j(1) = s$, внаслідок чого $s \in \Phi \circ \hat{\varphi}_j(\overset{\circ}{I})$, і множина $\Psi \circ \hat{\varphi}_j(\overset{\circ}{I})$ має бути необмеженою. Але ця множина міститься в обмеженій області W , отже $v_j \notin V_{ter}$ і визначена точка $\Psi(v_j) = \Psi \circ \hat{\varphi}_j(1) \in \overline{W}$. Зі співвідношень $\Psi(v_j) \neq \Psi(v)$ і $\text{Fr } W \cap \Psi(T \setminus V_{ter}) = \Psi(v)$ слідує, що $\Psi(v_j) \in W$.

Розглянемо множину $\psi(W)$. Це відкритий диск на сфері, обмежений кривою $\psi \circ \gamma$. Зрозуміло, що $\overline{\psi(W)} = \psi(W) \cup \psi \circ \gamma(I) \subset \psi(\mathbb{R}^2) = S \setminus \{s\}$. Тому $s \notin \overline{\psi(W)}$. Отже, з одного боку $\psi \circ \gamma(I) \cap \Phi(T \setminus V_{ter}) = \psi \circ \gamma(I) \cap \psi \circ \Psi(T \setminus V_{ter}) = \psi \circ \Psi(v) = \Phi(v)$, з іншого боку $\Phi(V_{ter}) = s \notin \psi \circ \gamma(I)$. Об'єднуючи ці співвідношення, отримаємо $\text{Fr } \psi(W) \cap \Phi(T) = \Phi(v)$.

Вилучимо з дерева T вершину v і суміжні їй ребра e_1, \dots, e_n . Отримаємо незв'язний граф T' , який є диз'юнктивним об'єднанням дерев T_1, \dots, T_n , причому v_i є вершиною дерева T_i , $i = 1, \dots, n$ (див Твердження 1.6.4). Зі сказаного вище слідує, що $\Phi(T') \cap \text{Fr } \psi(W) = \emptyset$.

Множина $\Phi(T_j)$ зв'язна, $\Phi(T_j) \cap \text{Fr } \psi(W) = \emptyset$ і $\emptyset \neq \{\Phi(v_j)\} \subset \Phi(T_j) \cap \psi(W)$. Внаслідок цього $\Phi(T_j) \subset \psi(W)$. Так як $s = \Phi(V_{ter})$ і $s \notin \psi(W)$, то $T_j \subset T \setminus V_{ter}$ і коректно визначена множина $\Psi(T_j)$.

$\Psi(T_j) = \psi^{-1}(\Phi(T_j))$ є підмножиною компакта \overline{W} , тому дерево T_j є скін-

ченням (див. Твердження 2.2.2). За побудовою всі вершини дерева T_j крім v_j мають в T_j той самий порядок, що й у T . Вершина ж v_j має в T_j порядок на 1 менше, ніж в T . Отже або дерево T_j має єдину вершину v_j і $v_j \in V_{ter}$, або до T_j можна застосувати Твердження 1.6.3. У будь-якому випадку існує вершина v' дерева T_j , яка має в T порядок 1. Але це протирічить співвідношенню $T_j \subset T \setminus V_{ter}$.

Отримане протиріччя доводить, що два різних сектори, на які ділиться відкритий диск \mathring{D}_0 множиною $\Theta \circ \Psi(U_v)$, не можуть одночасно належати $\Theta(Q)$.

Твердження 2.2.6 доведено.

А.3 Доведення Лема 2.2.7

1) Перевіримо, що існує ребро T , образ якого міститься в $\text{Fr } Q$.

З Твердження 2.2.2 слідує, що образ множини вершин дерева T в \mathbb{R}^2 є дискретною множиною. Тому знайдеться $w \in T \setminus V$, така що $\Psi(w) \in \text{Fr } Q$. Нехай e_0 — ребро дерева T , яке містить точку w . З Твердження 2.2.5 слідує, що $\Psi(e_0 \setminus V_{ter}) \subset \text{Fr } Q$.

Зараз ми побудуємо простий максимальний ланцюжок $\{e_k\}_{k \in A}$, такий що $\Psi(e_k \setminus V_{ter}) \subset \text{Fr } Q$ для кожного $k \in A$.

Нехай для деякого $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, вже побудовано шлях

$$e_0 = (v_{-1}, v_0), \dots, e_k = (v_{k-1}, v_k),$$

такий що $\Psi(e_\lambda \setminus V_{ter}) \subset \text{Fr } Q$ для кожного $\lambda \in \{0, \dots, k\}$.

Якщо $v_k \in V_{ter}$, то позначимо $M = k$ і на цьому зупинимось.

Якщо $v_k \notin V_{ter}$, то порядок n вершини v_k більше одиниці і цій вершині інцидентне принаймні ще одне ребро крім e_k . Скористаємось Лемою 2.2.3 і знайдемо гомеоморфізм $\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такий що $\Theta \circ \Psi(v_k) = 0$ і множина $\Psi(T \setminus V_{ter})$ ділить диск \mathring{D}_0 на n секторів. Внаслідок Твердження 2.2.6 перетин $Q \cap \mathring{D}_0$ співпадає з одним із цих секторів. Нехай це буде сектор Q_j .

Межа сектора Q_j за побудовою належить об'єднанню образів двох ребер, інцидентних вершині v_k . Кожне інше ребро інцидентне v_k має точку, яка не є

вершиною і її образ не належить $\text{Fr } Q$. Тому воно може перетинатися з множиною $\text{Fr } Q$ лише по підмножині своїх кінців (див. Твердження 2.2.5). Внаслідок цього e_k — одне з двох ребер, образи яких межують з Q_j . Позначимо інше через $e_{k+1} = (v_k, v_{k+1})$. З Твердження 2.2.5 слідує, що $\Psi(e_{k+1} \setminus V_{ter}) \subset \text{Fr } Q$, оскільки e_{k+1} має точку, яка не є вершиною і образ якої лежить в $\text{Fr } Q$.

Відмітимо, що в силу сказаного вибір ребра e_{k+1} не залежить від вибору гомеоморфізму Θ .

Будемо повторювати цю процедуру до тих пір, поки не зупинимось, або ж до нескінченності.

За допомогою аналогічної індуктивної процедури або виберемо ребра

$$e_m = (v_{m-1}, v_m), \dots, e_{-1} = (v_{-2}, v_{-1}), \quad m < 0, \quad v_{m-1} \in V_{ter},$$

або знайдемо $e_k = (v_{k-1}, v_k)$ для кожного $k < 0$.

Об'єднуючи побудовані ланцюжки для $k \geq 0$ і для $k < 0$, отримаємо послідовність ребер $C = \{e_k = (v_{k-1}, v_k)\}_{k \in A}$, для якої виконується співвідношення $\Psi(e_k \setminus V_{ter}) \subset \text{Fr } Q$, $k \in A$.

Очевидно, набір індексів A є допустимим діапазоном. За побудовою $e_k \neq e_{k+1}$ для всіх допустимих значень індекса. Тому з означення дерева слідує, що $e_k \neq e_l$ при $k \neq l$, $k, l \in A$, і послідовність ребер C є ланцюжком.

Відмітимо, що в дереві кожен шлях є простим, тому наш ланцюжок теж є простим. Нарешті, за побудовою ланцюжок C максимальний.

2) Побудуємо неперервне відображення $\gamma : [-1, 1] \rightarrow S^2$, для якого виконується рівність $\gamma([-1, 1]) = \Phi(C) \cup \{s\}$, і перевіримо, що γ — проста замкнена крива.

Введемо декілька позначень. Нехай $k \in A$, $\varphi_k = \varphi_{e_k} : I \rightarrow I_k = I_{e_k} \subset \hat{T}_0$ — вкладення з означення простору T , $\hat{\varphi}_k = pr \circ \varphi_k : I \rightarrow T$, $\chi_k = \Phi \circ \hat{\varphi}_k : I \rightarrow S^2$. Можемо вважати, що $\hat{\varphi}_k(0) = v_{k-1}$, $\hat{\varphi}_k(1) = v_k$.

Розглянемо декілька можливостей.

(i) $|A| = 1$. Тоді $C = e = (v', v'')$ і $v', v'' \in V_{ter}$. Нехай $\varphi_e : I \rightarrow I_e \subset \hat{T}_0$ — вкладення, $\chi_e = \Phi \circ pr \circ \varphi_e : I \rightarrow S^2$. Означимо $\gamma : [-1, 1] \rightarrow S^2$ наступним чином: $\gamma(t) = \chi_e((t+1)/2)$, $t \in [-1, 1]$. Легко бачити, що це потрібне нам

відображення. З означення плоского відображення слідує, що воно є простою замкненою кривою.

(ii) $|A| > 1$. Не обмежуючи загальності міркувань можемо вважати, що $0 \in A$ і $1 \in A$.

Побудуємо окремо обмеження $\gamma_+ = \gamma|_{[0,1]}$ і $\gamma_- = \gamma|_{[-1,0]}$.

Припустимо спочатку, що існує $M = \max_{k \in A} k$. Тоді з означень слідує, що $v_k \notin V_{ter}$ при $k = 0, \dots, M-1$ і $v_M \in V_{ter}$. Означимо для $t \in [0, 1]$

$$\gamma_+(t) = \gamma(t) = \chi_k(Mt - k + 1), \quad \text{якщо } t \in \left[\frac{k-1}{M}, \frac{k}{M} \right].$$

З означення простого ланцюжка слідує, що якщо $e_k \cap e_j \neq \emptyset$ при $j < k$, то $k = j+1$ і $e_k \cap e_j = v_{k-1}$. Внаслідок цього γ_+ є простою неперервною кривою, що з'єднує точки $\Psi(v_0)$ і $s = \Psi(v_M)$.

Нехай тепер $\mathbb{N} \subset A$. Тоді $v_k \notin V_{ter}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Означимо для $t \in [0, 1]$

$$\gamma_+(t) = \gamma(t) = \begin{cases} \chi_k(2^k(t-1) + 2) & \text{якщо } t \in \left[\frac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}, \frac{2^k-1}{2^k} \right], \\ s & \text{якщо } t = 1. \end{cases}$$

Повторюючи попередні міркування (з очевидними змінами), легко бачити наступне. По перше, $\gamma(t) \neq s$ для кожного $t \in [0, 1)$. По друге, для кожного $\tau \in (0, 1)$ відображення $\gamma|_{[0,\tau]} : [0, \tau] \rightarrow S^2$ є простою неперервною кривою. Отже, відображення γ_+ ін'єктивне і неперервне для всіх $t < 1$.

Очевидно, для кожного відкритого околу W виділеної точки $s \in S^2$ прообраз $\psi^{-1}(S^2 \setminus W)$ є компактною підмножиною площини. З Твердження 2.2.2 і означення плоского відображення слідує, що існує $N(W) \in \mathbb{N}$, таке що $\Phi(e_k) \subset W$ для всіх $k \geq N(W)$. Внаслідок цього відображення γ_+ неперервне при $t = 1$.

Таким чином, і в цьому випадку γ_+ є простою неперервною кривою, що з'єднує точки $\Psi(v_0)$ і $s = \Psi(v_M)$.

Зрозуміло, що $\gamma_+([0, 1]) = \bigcup_{k>0, k \in A} \Phi(e_k) \cup \{s\}$.

Аналогічно будується і проста неперервна крива $\gamma_- : [-1, 0] \rightarrow S^2$, яка з'єднує точки s і $\Psi(v_0)$, і така що $\gamma_-([-1, 0]) = \bigcup_{k \leq 0, k \in A} \Phi(e_k) \cup \{s\}$.

Враховуючи те, що C — простий ланцюжок, зрозуміло, що $\gamma_-([-1, 0]) \cap \gamma_+([0, 1]) = \{\Psi(v_0), s\}$. Отже, відображення $\gamma : [-1, 1] \rightarrow S^2$,

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_-(t) & \text{якщо } t \in [-1, 0), \\ \gamma_+(t) & \text{якщо } t \in [0, 1], \end{cases}$$

є простою замкненою кривою і відповідає співвідношенню $\gamma([-1, 1]) = \Phi(C) \cup \{s\}$.

3) Перевіримо рівність $\gamma([-1, 1]) = \text{Fr } \psi(Q)$.

Згадаємо, що за побудовою $\Psi(e_k \setminus V_{ter}) \subset \text{Fr } Q$ для кожного $k \in A$. Тому $\Phi(e_k \setminus V_{ter}) \subset \text{Fr } \psi(Q)$ для кожного $k \in A$. Внаслідок цього $\gamma((-1, 1)) = \Phi(C \setminus V_{ter}) \subset \text{Fr } \psi(Q)$. З неперервності γ слідує, що $\gamma([-1, 1]) \subseteq \text{Fr } \psi(Q)$.

Множина $S = \gamma([-1, 1])$ ділить сферу S^2 на дві відкриті області W_1 і W_2 , і вона є їх спільною межею (див. [46]). Відкрита зв'язна множина $\psi(Q)$ є підмножиною однієї з цих областей. Нехай $\psi(Q) \subseteq W_1$. Щоб довести рівність $S = \text{Fr } \psi(Q)$, нам достатньо перевірити, що $W_1 \cap \Phi(T) = \emptyset$.

Якщо всі вершини дерева T лежать в C , то зрозуміло, що $T = C$ і $\psi(Q) = W_1$.

Нехай існує вершина $v \in V$, яка не лежить в C . Тоді знайдеться $k \in A$, таке що $v_k \notin V_{ter}$. Дійсно, якщо всі вершини T , які лежать в C мають порядок 1, то за означенням C зводиться до єдиного ізольованого ребра дерева T і $T = C$.

З'єднаємо в T вершини v і v_k шляхом

$$g_1 = (v, w_1) = (w_0, w_1), g_2 = (w_1, w_2), \dots, g_n = (w_{n-1}, w_n) = (w_{n-1}, v_k).$$

Очевидно, існують індекси $l \in \{1, \dots, n\}$ і $j \in A$, такі що $w_l = v_j \in C$ і $w_i \notin C$ при $i < l$. Тоді для шляху $P = g_1, \dots, g_l$ справедливе включення $\Phi(P \setminus \{v, w_l\}) \subset S^2 \setminus S$.

Відмітимо, що $v_j \notin V_{ter}$. Дійсно, або $v_j = v_k$, або $l < n$ і вершина v_j інцидентна принаймні двом ребрам g_l і g_{l+1} . Внаслідок цього $j + 1 \in A$.

Фіксуємо окіл U точки v_j і гомеоморфізм $\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, які відповідають Лемі 2.2.3. Ми вже знаємо, що рівно один із секторів, на які ділиться відкри-

тий диск $\mathring{D}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ множиною $\Theta \circ \Psi(U)$, лежить в $\Theta(Q)$. Позначимо його Q_j . За побудовою цей сектор обмежений в \mathring{D}_0 образами ребер $\Theta \circ \Psi(e_j \setminus V_{ter})$ і $\Theta \circ \Psi(e_{j+1} \setminus V_{ter})$.

Диск \mathring{D}_0 розбивається множиною $\Theta \circ \Psi((e_j \cup e_{j+1}) \setminus V_{ter})$ на дві відкриті області, Q_j і \hat{Q}_j . Згідно з побудовою ланцюжка C , якщо g — ребро, інцидентне вершині v_j , то або g лежить в C , або $\mathring{D}_0 \cap \Theta \circ \Psi(g \setminus (V_{ter} \cup \{v_j\})) \subset \hat{Q}_j$. Ребро g_l не належить ланцюжку C , тому $\mathring{D}_0 \cap \Theta \circ \Psi(g_l \setminus \{v, v_j\}) \subset \hat{Q}_j$.

Позначимо $B = \psi \circ \Theta^{-1}(\mathring{D}_0)$, $R_j = \psi \circ \Theta^{-1}(Q_j)$, $\hat{R}_j = \psi \circ \Theta^{-1}(\hat{Q}_j)$. Відображення $\psi \circ \Theta^{-1}$ є гомеоморфізмом площини на $S^2 \setminus \{s\}$. Легко бачити, що $\Phi(C) \cap B = \Phi(e_j \cup e_{j+1}) \cap B$, тому відкритий диск B розбивається кривою S на дві компоненти R_j і \hat{R}_j , причому $R_j \subset \psi(Q) \subseteq W_1$ і $\hat{R}_j \subset W_2$. З попереднього слідує, що $\Phi(g_l \setminus \{v, v_j\}) \subset \hat{R}_j$. Тому $\Phi(P \setminus \{v, w_l\}) \subset W_2$.

Якщо $v \notin V_{ter}$, то $\Phi(v) \in \overline{W_2} \cap (S^2 \setminus S) = W_2$. Тоді і всі ребра дерева T , які інцидентні вершині v , лежать в $\overline{W_2} = S^2 \setminus W_1$.

Якщо ж $v \in V_{ter}$, то за побудовою g_1 , єдине ребро інцидентне v , теж лежить в $\overline{W_2}$ і не перетинається з W_1 .

Отже, для всіх вершин і ребер дерева T , які не належать до C , їх образи в S^2 містяться в $S^2 \setminus W_1$. Внаслідок цього $\psi(Q) = W_1$ і $\text{Fr } \psi(Q) = S = \gamma([-1, 1])$.

Для завершення доведення Лему остається згадати, що за означенням $\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi$, ψ гомеоморфно відображає \mathbb{R}^2 на $S^2 \setminus \{s\}$ і $\Phi^{-1}(s) = V_{ter}$. Тому межа $\text{Fr } Q$ області Q в \mathbb{R}^2 має вигляд $\psi^{-1}(S \setminus \{s\}) = \Psi \circ \Phi^{-1}(S \setminus \{s\}) = \Psi(C \setminus V_{ter})$.

Лему 2.2.7 доведено.

А.4 Доведення Твердження 2.2.12

Скажемо, що замкнений ланцюжок $Q_0, Q_1, \dots, Q_n = Q_0$ простий, якщо $Q_k \neq Q_l$ при $k \neq l$, $k, l = 1, \dots, n$.

1) Спочатку доведемо Твердження для випадку, коли ланцюжок $Q_0, Q_1, \dots, Q_n = Q_0$ простий.

Існують ребра e_1, \dots, e_n дерева T , такі що $\Psi(e_k \setminus V_{ter}) \subset \text{Fr } Q_{k-1} \cap \text{Fr } Q_k$, $k = 1, \dots, n$. Зафіксуємо для кожного k точку $w_k \in e_k \setminus V$. З простоти ланцюжка

елементів \mathcal{Q} і з Лема 2.2.3 слідує, що $w_k \neq w_l$ при $k \neq l$.

Відомо, що для довільної пари різних точок Жорданової кривої на двовимірній сфері існує розріз області, обмеженої даною кривою між цією парою точок (див. [46]). Тому з Лема 2.2.7 слідує, що точки $\Phi(w_{k-1})$ і $\Phi(w_k)$ можуть бути з'єднані розрізом $\hat{\nu}_k : I \rightarrow \overline{\psi(Q_k)}$ області $\psi(Q_k)$, $k = 1, \dots, n$. Зрозуміло, що $\hat{\nu}_k(I) \subset S^2 \setminus \{s\}$ для кожного k , тому проста неперервна крива $\nu_k = \psi^{-1} \circ \hat{\nu}_k : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ є розрізом області Q_k між точками $\Psi(w_{k-1})$ і $\Psi(w_k)$, $k = 1, \dots, n$.

З того, що ланцюжок $Q_0, Q_1, \dots, Q_n = Q_0$ є простим, слідує, що криві з сім'ї $\{\nu_k\}$ можуть перетинатися лише в точках $\Psi(w_1), \dots, \Psi(w_n)$. Внаслідок цього відображення $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mu(t) = \nu_k(nt - k + 1), \quad \text{коли } t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right],$$

є простою замкненою кривою. Позначимо через W відкриту область в \mathbb{R}^2 , яку обмежує крива μ .

Відмітимо, що за побудовою $\mu(I) \cap \overline{Q_k} = \nu_k(I)$ і $\mu(I) \cap \text{Fr } Q_k = \text{Fr } W \cap \text{Fr } Q_k = \{\nu_k(0), \nu_k(1)\} = \{\Psi(w_{k-1}), \Psi(w_k)\}$.

Нехай $e_k = (v'_k, v''_k)$, $k = 1, \dots, n$. Перевіримо, що рівно одна з двох вершин $v'_k, v''_k \in V$ міститься в множині $\Psi^{-1}(W)$ (див. Рис. A.4.1).

Якщо $v'_k, v''_k \in V_{ter}$, то e_k — єдине ребро дерева T , $\mathcal{Q} = \{Q_{k-1}, Q_k\}$ і існує єдиний (з точністю до циклічної перестановки індексів) замкнений простий ланцюжок $Q_{k-1}, Q_k, Q_{k+1} = Q_{k-1}$. Внаслідок цього $n = 2$ і Твердження виконується.

Далі ми будемо вважати, що принаймні одна з двох вершин v'_k, v''_k має порядок більше 1.

За означенням плоского відображення, $\Phi(e_k)$ — неперервний образ відрізка, причому обмеження $\Phi|_{e_k \setminus V_{ter}}$ ін'єктивне. З нашого попереднього припущення слідує, що обмеження Φ на e_k також ін'єктивне. Ребро e_k є компактом, тому обмеження $\Phi|_{e_k}$ є гомеоморфізмом на свій образ.

Нехай $\gamma_k : [-1, 1] \rightarrow S^2$ — Жорданова крива, яка обмежує область $\hat{Q}_k = \psi(Q_k)$ в S^2 (див. Лему 2.2.7). За побудовою вона містить точки $\Phi(w_{k-1}) =$

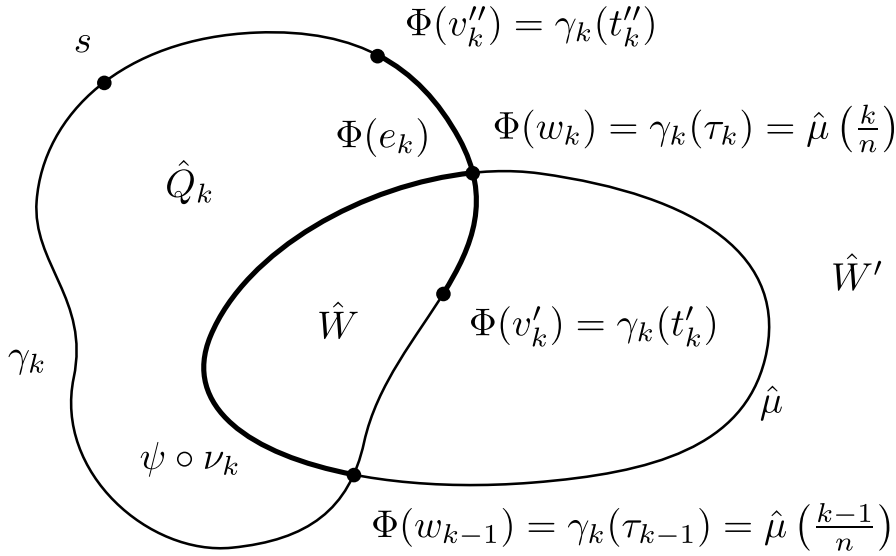


Рис. А.4.1: Взаємне розташування області \hat{W} і образа ребра дерева T , яке перетинається з її межею.

$\gamma_k(\tau_{k-1})$ і $\Phi(w_k) = \gamma_k(\tau_k)$. Змінивши при необхідності параметризацію кривої γ_k , ми можемо вважати, що $\tau_{k-1} < \tau_k$.

Також з Лемми 2.2.7 слідує, що $\Phi(e_k) \subset \gamma_k([-1, 1])$. Тому $\Phi(v_k') = \gamma(t_k')$ і $\Phi(v_k'') = \gamma(t_k'')$ для деяких $t_k', t_k'' \in [-1, 1]$. Змінюючи позначення вершин v_k' і v_k'' , будемо вважати, що $t_k' < t_k''$. Ми перевірили вище, що відображення, $\Phi(e_k)$ — гомеоморфний образ відрізка, причому точки $\Phi(v_k')$ і $\Phi(v_k'')$ є образами його кінців. Тому $\Phi(e_k) = \gamma_k([t_k', t_k''])$.

З того, що $w_{k-1} \notin e_k$ і $w_k \in (e_k \setminus V)$ слідує, що виконуються нерівності $-1 \leq \tau_{k-1} < t_k' < \tau_k < t_k'' \leq 1$.

Жорданова крива $\hat{\mu} = \psi \circ \mu$ ділить сферу S^2 на дві області \hat{W} і \hat{W}' . Зрозуміло, що $s \notin \hat{\mu}(I)$. Нехай $s \in \hat{W}'$. Тоді з означень слідує, що $\hat{W} = \psi(W)$.

За побудовою $Q_k \cap \mu(I) = \nu_k(I) \neq \emptyset$, тому $\hat{Q}_k \cap \hat{\mu}(I) \neq \emptyset$. Внаслідок цього $\hat{Q}_k \cap \hat{W} \neq \emptyset$.

Відмітимо, що $\gamma_k([-1, 1]) \cap \hat{\mu}(I) = \text{Fr } \hat{Q}_k \cap \text{Fr } \hat{W} = \{\Phi(w_{k-1}), \Phi(w_k)\} = \{\gamma_k(\tau_{k-1}), \gamma_k(\tau_k)\}$. Ця множина ділить Жорданову криву γ_k на дві дуги, причому за побудовою точки $\Phi(v_k') = \gamma_k(t_k')$ і $\Phi(v_k'') = \gamma_k(t_k'')$ належать різним дугам. Точка $\Phi(v_k'')$ лежить на тій же дузі, що й точка $s = \gamma_k(-1) = \gamma_k(1)$, тому $\Phi(v_k'') \in \hat{W}'$.

Якщо ми припустимо, що й $\Phi(v_k') \in \hat{W}'$, то $\gamma_k([-1, 1]) \setminus \{\gamma_k(\tau_{k-1}), \gamma_k(\tau_k)\} \subset$

\hat{W}' . Тоді $\gamma_k([-1, 1]) \subset S^2 \setminus \hat{W}$ і $\text{Fr } \hat{Q}_k \cap \hat{W} = \emptyset$. Внаслідок цього або $\hat{W} \subset \hat{Q}_k$, або $\hat{Q}_k \cap \hat{W} = \emptyset$. Ми знаємо, що $\mu(\frac{t+r-1}{n}) = \nu_r(t) \in Q_r$ при $r \neq k$ для кожного $t \in (0, 1)$. Тому $\text{Fr } W \cap \text{Int}(\mathbb{R}^2 \setminus Q_k) \neq \emptyset$ і $W \cap (\mathbb{R}^2 \setminus Q_k) \neq \emptyset$. Отже $\hat{W} \cap (S^2 \setminus \hat{Q}_k) \neq \emptyset$ і має виконуватися співвідношення $\hat{Q}_k \cap \hat{W} = \emptyset$, що неможливо.

Отримане протиріччя доводить, що $(e_k \cap V) \cap \Phi^{-1}(\hat{W}) = (e_k \cap V) \cap \Psi^{-1}(W) = \{v'_k\}$, $k = 1, \dots, n$.

Відмітимо, що для різних індексів k і l вершини v'_k і v'_l можуть співпадати. Також можуть співпадати при $k \neq l$ вершини v''_k і v''_l .

Нехай $e \cap \Psi^{-1}(W) \neq \emptyset$ для деякого ребра e дерева T . Тоді або e співпадає з одним із ребер e_1, \dots, e_n , або $e \subset \Psi^{-1}(W)$. Перевіримо це.

Відображення ψ за означенням ін'єктивне, тому

$$\Phi^{-1}(\hat{W}) = \Phi^{-1}(\psi(W)) = (\psi \circ \Psi)^{-1}(\psi(W)) = \Psi^{-1}(\psi^{-1}(\psi(W))) = \Psi^{-1}(W).$$

Аналогічно, $\Phi^{-1}(\text{Fr } \hat{W}) = \Psi^{-1}(\text{Fr } W)$.

Нехай $e \notin \{e_1, \dots, e_n\}$. Тоді $e \cap \Psi^{-1}(\text{Fr } W) = e \cap \Phi^{-1}(\text{Fr } \hat{W}) = \emptyset$. З іншого боку, множина e зв'язна. Отже, з нерівності $\Phi(e) \cap \hat{W} \neq \emptyset$ слідує, що $\Phi(e) \subset \hat{W}$ і визначено $\Psi(e) = \psi^{-1} \circ \Phi(e) \subset \psi^{-1}(\hat{W}) = W$.

Розглянемо підграф Γ_0 дерева T , ребрами якого є всі ребра дерева T , які перетинаються з множиною $\Psi^{-1}(W)$. З Твердження 2.2.2 слідує, що граф Γ_0 скінченний. Додамо до Γ_0 скінченну множину вершин u_1, \dots, u_n . Вилучимо з Γ_0 ребра e_1, \dots, e_n і додамо замість них ребра $g_1 = (v'_1, u_1), \dots, g_n = (v'_n, u_n)$. Отримаємо скінченний граф Γ .

Зі сказаного вище легко слідує, що вершини u_1, \dots, u_n мають в Γ порядок 1, всі інші вершини належать множині $\Psi^{-1}(W)$ і мають в Γ той же порядок, що й у T . Отже, з означення плоского відображення слідує, що порядок 1 в графі Γ мають тільки вершини u_1, \dots, u_n , всі ж інші вершини мають парний порядок більше 2. Тому з Наслідка 1.6.2 слідує, що число n має бути парним.

2) За допомогою індукції по довжині ланцюжка доведемо Твердження для довільного замкненого ланцюжка $Q_0, Q_1, \dots, Q_n = Q_0$ елементів \mathcal{Q} .

База індукції. За означенням ланцюжка елементів \mathcal{Q} області Q_{k-1} і Q_k мають бути суміжними, отже $Q_{k-1} \neq Q_k$ для кожного $k = 1, \dots, n$. Внаслі-

док цього всі замкнені ланцюжки довжини $n \leq 3$ є простими і для таких n Твердження вірне.

Крок індукції. Припустимо, що при деякому $n > 3$ відомо, що довжина кожного замкненого ланцюжка $Q'_0, Q'_1, \dots, Q'_m = Q'_0$ є парним числом, якщо $m < n$.

Нехай існує замкнений ланцюжок $Q_0, Q_1, \dots, Q_n = Q_0$ елементів \mathcal{Q} довжини n .

Якщо ланцюжок простий, ми вже перевірили, що n має бути парним числом і крок індукції завершено.

Якщо ланцюжок не є простим, знайдуться $l \neq m, l, m \in \{1, \dots, n\}$, для яких $Q_l = Q_m$. Змінюючи циклічно нумерацію елементів ланцюжка, можемо вважати, що $Q_0 = Q_k$ для деякого $k \in \{1, \dots, n-1\}$. З означення ланцюжка слідує, що насправді $2 \leq k \leq n-2$.

Очевидно, послідовності $Q_0, Q_1, \dots, Q_k = Q_0$ і $Q_k, Q_{k+1}, \dots, Q_n = Q_0 = Q_k$ елементів \mathcal{Q} утворюють два замкнених ланцюжка, довжини яких k і $n-k$, відповідно. Згідно вибору k виконуються нерівності $k < n$ і $n-k < n$. Тому згідно з припущенням індукції числа k і $n-k$ мають бути парними. Внаслідок цього і $n = k + (n-k)$ є парним числом.

Твердження 2.2.12 доведено.

А.5 Доведення Твердження 2.3.4

Побудуємо $\varepsilon : V' \rightarrow \{-1, 1\}$.

Зафіксуємо вершину $v_0 \in V'$.

Нехай $v \in V'$. Граф G є деревом, тому існує єдиний шлях

$$(v_0, w_1, v_1, \dots, w_n, v_n = v), \quad v_i \in V', w_i \in V'', \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

який з'єднує v_0 з v в G (очевидно, n залежить від v).

Позначимо

$$r(v) = |\{i \in \{1, \dots, n\} : f_{v_{i-1}}(w_i) \neq f_{v_i}(w_i)\}|, \quad \varepsilon(v) = (-1)^{r(v)}.$$

Для $v = v_0$ будемо вважати, що $n = 0$. Тому $r(v_0) = 0$ і $\varepsilon(v_0) = 1$.

Перевіримо, що функції з набору $\{\varphi_v^\varepsilon, v \in V'\}$ попарно узгоджені.

Нехай $v^{(1)}, v^{(2)} \in V'$. Якщо $N(v^{(1)}) \cap N(v^{(2)}) = \emptyset$, то $\varphi_{v^{(1)}}^\varepsilon$ і $\varphi_{v^{(2)}}^\varepsilon$ узгоджені за означенням.

Нехай $w \in N(v^{(1)}) \cap N(v^{(2)})$. З того, що G є деревом, слідує рівність $\{w\} = N(v^{(1)}) \cap N(v^{(2)})$. Дійсно, якщо існує інша вершина $w' \in N(v^{(1)}) \cap N(v^{(2)})$, то замкнений шлях $(v^{(1)}, w, v^{(2)}, w', v^{(1)})$ утворює цикл, а це неможливо.

Розглянемо шляхи $P(v_0, v^{(1)})$ і $P(v_0, v^{(2)})$.

Помітимо, що принаймні один із них проходить через вершину w . Дійсно, якщо це не так, то сума шляхів $P(v_0, v^{(1)})$ і $P(v_0, v^{(2)})$ містить шлях $P(v^{(1)}, v^{(2)})$, який не проходить через w . Разом зі шляхом

$$P'(v^{(1)}, v^{(2)}) = (v^{(1)}, w, v^{(2)})$$

він утворює цикл, а це неможливо, тому що G є деревом.

Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що через вершину w проходить шлях $P(v_0, v^{(1)})$. Внаслідок того, що G є деревом, шлях $P(v_0, v^{(1)})$ містить також ребро $(w, v^{(1)}) \in E$. Тому

$$P(v_0, v^{(1)}) = (v_0, w_1, v_1, \dots, w_{m-1}, v_{m-1}, w_m = w, v_m = v^{(1)}).$$

Розглянемо два випадки.

1) Шлях $P(v_0, v^{(1)})$ не проходить через вершину $v^{(2)}$. Тоді

$$P(v_0, v^{(2)}) = (v_0, w_1, v_1, \dots, w_{m-1}, v_{m-1}, w, v^{(2)}),$$

$$r(v^{(k)}) = \begin{cases} r(v_{m-1}), & \text{якщо } f_{v_{m-1}}(w) = f_{v^{(k)}}(w), \\ r(v_{m-1}) + 1, & \text{якщо } f_{v_{m-1}}(w) \neq f_{v^{(k)}}(w), \end{cases} \quad k = 1, 2.$$

Легко бачити, що $f_{v^{(1)}}(w) = f_{v^{(2)}}(w)$ тоді й тільки тоді, коли $r(v^{(1)}) = r(v^{(2)})$. Тому рівність $f_{v^{(1)}}(w) = f_{v^{(2)}}(w)$ рівносильна рівності $\varepsilon(v^{(1)}) = \varepsilon(v^{(2)})$. Внаслі-

ДОК ЦЬОГО

$$\varphi_{v^{(1)}}^\varepsilon(w) = \varepsilon(v^{(1)})f_{v^{(1)}}(w) = \varepsilon(v^{(2)})f_{v^{(2)}}(w) = \varphi_{v^{(2)}}^\varepsilon(w) \quad (\text{A.5.1})$$

і $\varphi_{v^{(1)}}^\varepsilon$ узгоджена з $\varphi_{v^{(2)}}^\varepsilon$.

2) Шлях $P(v_0, v^{(1)})$ проходить через $v^{(2)}$. Тоді він має містити також ребро $(v^{(2)}, w)$, тому

$$P(v_0, v^{(1)}) = (v_0, w_1, v_1, \dots, w_{m-1}, v_{m-1} = v^{(2)}, w, v^{(1)}),$$

$$r(v^{(1)}) = \begin{cases} r(v^{(2)}), & \text{якщо } f_{v^{(2)}}(w) = f_{v^{(1)}}(w), \\ r(v^{(2)}) + 1, & \text{якщо } f_{v^{(2)}}(w) \neq f_{v^{(1)}}(w), \end{cases}$$

і рівність (A.5.1) знову виконується. Отже, у цьому випадку також $\varphi_{v^{(1)}}^\varepsilon$ узгоджена з $\varphi_{v^{(2)}}^\varepsilon$.

Приймаючи до уваги довільність у виборі вершин $v^{(1)}$ і $v^{(2)}$, приходимо до висновку, що функція ε відповідає вимогам Твердження.

Твердження 2.3.4 доведено.

А.6 Доведення Твердження 2.3.6

Згідно з Означенням 2.1.5, позначимо $\Psi_i = \Psi|_{T_i \setminus V_{ter}}$. Нехай Ψ_i разом з відображеннями $\Phi_i : T_i \rightarrow S^2$ і $\psi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{s\}$ відповідають Означенню 2.1.3.

Нехай $Q \in \mathcal{Q}^{(i)}$. Позначимо $\hat{Q} = \psi_i(Q)$. Згідно Лемі 2.2.7 межа $\text{Fr } \hat{Q}$ гомеоморфна колу S^1 . З цього слідує (див. [46]), що

- область \hat{Q} локально-зв'язна в кожній точці межі $\text{Fr } \hat{Q}$;
- кожна точка $\hat{z} \in \text{Fr } \hat{Q}$ досяжна з \hat{Q} .

Отже, внаслідок рівності $\text{Fr } Q = \psi_i^{-1}(\text{Fr } \hat{Q} \setminus \{s\})$ кожна точка $z \in \text{Fr } Q$ досяжна з Q .

1. Доведемо, що Q містить деяку множину Q_λ з \mathcal{Q}_i .

З Означень 2.1.2-2.1.5 слідує, що кожна множина $\Psi(T_j \setminus V_{ter})$, $i = 1, \dots, n$, є замкнутою в \mathbb{R}^2 .

Фіксуємо $z \in \text{Fr } Q \subset \Psi(T_i \setminus V_{ter})$. Помітимо, що точка z відділена від замкненої множини

$$R_i = \Psi(F \setminus V_{ter}) \setminus \Psi(T_i \setminus V_{ter}) = \bigcup_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \Psi(T_j \setminus V_{ter}). \quad (\text{A.6.1})$$

Тому існує $\varepsilon > 0$, для якого $U_\varepsilon(z) \cap \Psi(F \setminus V_{ter}) = U_\varepsilon(z) \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter})$.

Ми знаємо, що точка z досяжна з Q , тобто існує проста неперервна крива $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, така що $\alpha(0) = z$ і $\alpha(t) \in Q \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T_i \setminus V_{ter})$ при кожному $t > 0$.

Не обмежуючи загальності міркувань ми можемо вважати, що $\alpha(t) \in U_\varepsilon(z)$, $t \in I$. Тоді зв'язна множина $A = \{\alpha(t) \mid t > 0\}$ міститься в $U_\varepsilon(z) \setminus \Psi(F \setminus V_{ter})$. Отже, існує $\lambda \in \Lambda$, для якого $A \subset Q_\lambda \subset Q$.

З іншого боку, за побудовою $z \in \bar{A} \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter}) \subset \bar{Q}_\lambda \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter}) \neq \emptyset$. Внаслідок цього $\lambda \in \Lambda_i$ і $Q_\lambda \in \mathcal{Q}_i$.

2. Нехай для деяких $\lambda, \mu \in \Lambda_i$ виконується включення $Q_\lambda \cup Q_\mu \subset Q$. Доведемо, що $Q_\lambda = Q_\mu$.

Зафіксуємо $w_1 \in \bar{Q}_\lambda \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter})$ і $w_2 \in \bar{Q}_\mu \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter})$. Зрозуміло, що $w_1, w_2 \in \text{Fr } Q$. Розглянемо точки $\hat{w}_1 = \psi_i(w_1)$, $\hat{w}_2 = \psi_i(w_2) \in \text{Fr } \hat{Q}$.

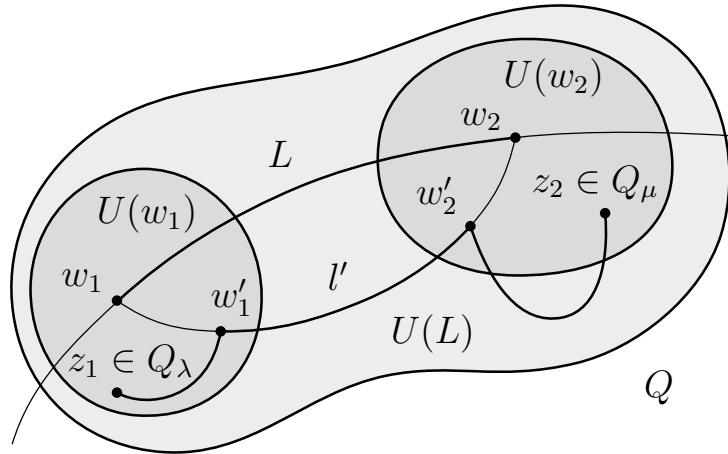
Зі співвідношення $\text{Fr } \hat{Q} \cong S^1$ слідує, що існує проста дуга $\hat{L} \subset \text{Fr } \hat{Q}$ з кінцями \hat{w}_1 і \hat{w}_2 , яка не містить виділеної точки s сфери S^2 . Тоді множина $L = \psi_i^{-1}(\hat{L}) \subset \text{Fr } Q \subset \Psi(T_i \setminus V_{ter})$ є простою дугою з кінцями w_1 і w_2 .

Компакт L не перетинається з замкненою множиною R_i (див. (A.6.1)), тому L відділений від R_i і існує $a > 0$, для якого $U_a(L) \cap R_i = \emptyset$.

Множина $\psi_i(U_a(L))$ є відкритим оточенням компакта \hat{L} , тому існує $\varepsilon > 0$, таке що $\hat{L} \subset U_\varepsilon(\hat{L}) \subset \psi_i(U_a(L))$. Позначимо $U(L) = \psi_i^{-1}(U_\varepsilon(\hat{L}))$. Це відкритий окіл дуги L .

Область \hat{Q} локально-зв'язна в точках $\hat{w}_1, \hat{w}_2 \in \text{Fr } \hat{Q}$ (див. вище). Тому існує $\delta > 0$, таке що довільну пару точок з $U_\delta(\hat{w}_k) \cap \hat{Q}$ можна з'єднати зв'язною множиною в $U_\varepsilon(\hat{w}_k) \cap \hat{Q}$, $k = 1, 2$.

Нехай $U(w_k) = \psi_i^{-1}(U_\delta(\hat{w}_k))$, $k = 1, 2$. Множина $U(w_1)$ є відкритим оточенням точки $w_1 \in \text{Fr } Q_\lambda$, тому існує $z_1 \in Q_\lambda \cap U(w_1)$. Аналогічно, знайдеться $z_2 \in Q_\mu \cap U(w_2)$. Позначимо $\hat{z}_k = \psi_i(z_k) \in U_\delta(\hat{w}_k)$, $k = 1, 2$.

Рис. А.6.1: Множина B .

Відомо (див. [46]), що для кожної дуги L простої замкненої кривої γ в S^2 і для довільного $\varepsilon > 0$ кожна з компонент доповнення $S^2 \setminus \gamma$ має розріз l між кінцями дуги L , котрий міститься в $U_\varepsilon(L)$.

Отже, знайдеться розріз \hat{l} області \hat{Q} між точками \hat{w}_1 і \hat{w}_2 , такий що $\hat{l} \subset U_\varepsilon(\hat{L})$.

Зрозуміло, що існують точки $\hat{w}'_k \in (U_\delta(\hat{w}_k) \setminus \{\hat{w}_k\}) \cap \hat{l}$, $k = 1, 2$. Нехай $\hat{l}' \subset \hat{l}$ – проста дуга з кінцями \hat{w}'_1 і \hat{w}'_2 . Очевидно, що $\hat{l}' \subset U_\varepsilon(\hat{L}) \cap \hat{Q}$.

Скористаємося локальною зв'язністю області \hat{Q} в точках \hat{w}_1 та \hat{w}_2 і знайдемо зв'язні множини \hat{A}_k , які з'єднують точки \hat{z}_k та \hat{w}'_k в $\hat{Q} \cap U_\varepsilon(\hat{w}_k)$, $k = 1, 2$.

За побудовою $\hat{A}_1, \hat{A}_2 \subset U_\varepsilon(\hat{L}) \cap \hat{Q}$. Отже, зв'язна множина $\hat{B} = \hat{A}_1 \cup \hat{l}' \cup \hat{A}_2$ є підмножиною $U_\varepsilon(\hat{L}) \cap \hat{Q}$ і містить точки \hat{z}_1 та \hat{z}_2 .

Таким чином, зв'язна множина $B = \psi_i^{-1}(\hat{B})$ містить точки z_1 та z_2 і є підмножиною $U(L) \cap Q \subset U(L) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(T_i \setminus V_{ter}))$ (див. Рис. А.6.1). За побудовою $U(L) \cap R_i \subset U_a(L) \cap R_i = \emptyset$, тому

$$B \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Psi(F \setminus V_{ter}).$$

Зі співвідношень $z_1 \in B \cap Q_\lambda$ і $z_2 \in B \cap Q_\mu$ слідує, що множина $B \cup Q_\lambda \cup Q_\mu$ зв'язна. Очевидно, вона міститься в доповненні $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(F \setminus V_{ter})$. Але за означенням множини Q_λ і Q_μ є компонентами $\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(F \setminus V_{ter})$. Тому має виконуватись рівність $Q_\lambda = B \cup Q_\lambda \cup Q_\mu = Q_\mu$.

Твердження 2.3.6 доведено.

А.7 Доведення Лема 2.3.10

Припустимо, що граф $G(\Psi)$ містить цикл

$$T_{k_1}, Q_{\lambda_1}, \dots, T_{k_m}, Q_{\lambda_m}, T_{k_{m+1}} = T_{k_1}.$$

Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що цей цикл простий (всі його вершини різні). Тоді $Q_{\lambda_i} \cap Q_{\lambda_j} = \emptyset$ при $i \neq j$. Аналогічно і $\Psi(T_{k_i} \setminus V_{ter}) \cap \Psi(T_{k_j} \setminus V_{ter}) = \emptyset$ при $i \neq j$.

Скористуємося Наслідком 2.3.8 та Лемою 2.2.7 і для кожного $i \in \{1, \dots, m\}$ виберемо точки $w'_i \in \Psi(T_{k_i} \setminus V_{ter}) \cap \overline{Q_{k_i}}$ і $w''_i \in \Psi(T_{k_{i+1}} \setminus V_{ter}) \cap \overline{Q_{k_i}}$, так щоб виконувались наступні умови.

- Якщо T_{k_i} складається з єдиного ребра, то $w'_i = w''_{i-1}$ ($w'_1 = w''_m$ при $i = 1$).
- Якщо T_{k_i} містить більше одного ребра, то $\Psi^{-1}(w'_i), \Psi^{-1}(w''_{i-1}) \in V$ (і $\Psi^{-1}(w''_m) \in V$ при $i = 1$).

Знову використаємо Наслідок 2.3.8 і для кожного $i \in \{1, \dots, m\}$ знайдемо розріз $\alpha_i : I \rightarrow \overline{Q_{k_i}}$ області Q_{k_i} між точками $w'_i, w''_i \in \text{Fr } Q_{k_i}$.

Якщо $w'_{i+1} \neq w''_i$ ($w'_1 \neq w''_m$ при $i = m$), то точки $\Psi^{-1}(w'_{i+1})$ та $\Psi^{-1}(w''_i)$ є вершинами дерева T_{k_i} . Тому є шлях P_i в T_{k_i} , що їх з'єднує. Зрозуміло, що він не містить вершин з V_{ter} . Отже, образ цього шляха в $\Phi(T_{k_i} \setminus V_{ter})$ є носієм простої неперервної кривої $\beta_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Проходячи послідовно криві α_i, β_i , отримаємо просту замкнену криву γ . Вона обмежує замкнений диск D .

Зрозуміло, що для кожного $i \in \{1, \dots, m\}$ точка $\alpha_i(1/2) \in Q_{\lambda_i}$ лежить на межі диска D , а множина Q_{λ_i} є відкритим околom цієї точки. Внаслідок цього $Q_{\lambda_i} \cap \text{Int } D \neq \emptyset$, $i \in \{1, \dots, m\}$.

Відкриті множини $Q_{\lambda} \cap \text{Int } D$, $\lambda \in \Lambda$, попарно не перетинаються, тому непорожня множина

$$(\mathbb{R}^2 \setminus \Psi(F \setminus V_{ter})) \cap \text{Int } D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (Q_{\lambda} \cap \text{Int } D)$$

не є зв'язною. Отже, $\Psi(F \setminus V_{ter}) \cap \text{Int } D \neq \emptyset$.

Диск D є компактом, тому для кожного $i \in \{1, \dots, m\}$ множина $T_i \cap \Psi^{-1}(D)$ міститься у скінченному підграфі дерева T_i (див. Твердження 2.2.2) і існує скінченне число ребер e_1, \dots, e_q графа F , таких що $\Psi(e_j) \cap \text{Int } D \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, q$, та

$$\Psi(F \setminus V_{ter}) \cap \text{Int } D \subseteq \bigcup_{j=1}^q \Psi(e_j).$$

Очевидно, існує найменший підграф R графа F , який містить всі ребра e_1, \dots, e_q . Нехай R_0 є невідродженою (містить принаймні одне ребро) зв'язною компонентою R . Зрозуміло, що R_0 є деревом. Перевіримо наступні твердження.

1. Всі ребра R лежать в $\Psi^{-1}(D)$.
2. Рівно одна вершина R_0 лежить в $\Psi^{-1}(\text{Fr } D)$. Всі інші вершини R_0 належать до $\Psi^{-1}(\text{Int } D)$.

Почнемо з першого твердження. Помітимо, що коли T_{k_i} містить рівно одне ребро e , то $\Psi(e) \cap \text{Int } D = \emptyset$. Дійсно, $\Psi(e \setminus V_{ter}) \cap \text{Fr } D = \{w'_i\}$. З іншого боку, обидва кінця ребра e за означенням містяться в V_{ter} , тому обидві компоненти множини $\Psi(e \setminus V_{ter}) \setminus \{w'_i\}$ мають непорожній перетин з околком нескінченності $\mathbb{R}^2 \setminus D$, див. Лему 2.2.7. Зі сказаного слідує, що $e \notin \{e_1, \dots, e_q\}$.

Якщо T_{k_i} містить більше одного ребра, то або $w''_{i-1} = w'_i$ і $\Psi^{-1}(\text{Fr } D) \cap T_{k_i} = \{\Psi^{-1}(w'_i)\} \subset V$, або за побудовою $P_i = \Psi^{-1}(\text{Fr } D) \cap T_{k_i} = \Psi^{-1} \circ \beta_i(I)$ є шляхом, що з'єднує вершини $\Psi^{-1}(w''_{i-1})$ та $\Psi^{-1}(w'_i)$. Отже, у множину P_i входять лише цілі ребра графа F .

За побудовою $F \cap \Psi^{-1}(\text{Fr } D) \subset \bigcup_{i=1}^m T_{k_i}$, тому $e_j \cap \Psi^{-1}(\text{Fr } D) \subset V$ для кожного ребра e_j графа R . З нерівності $\Psi(e_k) \cap \text{Int } D \neq \emptyset$ випливає, що $\Psi(e_k) \subset \overline{\text{Int } D} = D$.

Перевіримо друге твердження. Оскільки граф R_0 зв'язний, то існує $i \in \{1, \dots, m\}$, таке що $R_0 \subset T_{k_i}$. Ми вже встановили вище, що $P_i = \Psi^{-1}(\text{Fr } D) \cap T_{k_i}$ є зв'язним підграфом дерева T_{k_i} і не має спільних ребер з R_0 .

Припустимо, що існують дві вершини $v_1 \neq v_2$ графа R_0 , такі що $\Psi(v_1), \Psi(v_2) \in \text{Fr } D \cap \Psi(R_0)$. Тоді знайдуться шляхи P' та P'' в графах P_i та R_0 ,

відповідно, які з'єднують v_1 з v_2 . Множини ребер графів P_i та R_0 не перетинаються, тому $P' \neq P''$ і існують два різних шляхи, які з'єднують вершини v_1 і v_2 в T_{k_i} . А це неможливо, оскільки T_{k_i} є деревом.

Отже, рівно одна вершина R_0 (позначимо її v) лежить в $\Psi^{-1}(\text{Fr } D)$, а всі інші вершини належать до $\Psi^{-1}(\text{Int } D)$.

Зі сказаного вище слідує, що порядок кожної вершини R_0 крім v співпадає з порядком цієї вершини в T_{k_i} . Дійсно, якщо вершина w графа R_0 належить до $\Psi^{-1}(\text{Int } D)$, то образи всіх її суміжних ребер в T_{k_i} мають непорожній перетин з $\text{Int } D$. Внаслідок цього всі ребра графа T_{k_i} , суміжні w , є ребрами підграфа R_0 .

Відомо, див. 1.6.3, що в дереві R_0 є вершина $v' \neq v$, яка має порядок 1. Тому порядок v' в T_{k_i} також дорівнює 1. А це неможливо, бо $v' \notin V_{ter}$ згідно з означенням плоского відображення.

З отриманого протиріччя робимо висновок, що граф $G(\Psi)$ не містить циклів.

Перевіримо зв'язність графа $G(\Psi)$.

Зрозуміло, що для кожного $Q_\lambda \in \mathcal{Q}$ існує компонента $T_{i(\lambda)}$ графа F , така що $\overline{Q_\lambda} \cap T_{i(\lambda)} \neq \emptyset$. За означенням графа $G(\Psi)$ його вершини Q_λ і $T_{i(\lambda)}$ з'єднані ребром.

Внаслідок сказаного кожна компонента графа $G(\Psi)$ містить вершину виду T_i .

Припустимо, що G_1 і G_2 – дві різні компоненти $G(\Psi)$. Нехай G_1 містить вершину T_i , а G_2 містить вершину T_j . Позначимо через $V(G_1)$ множину вершин компоненти G_1 . Тоді $T_i \in V(G_1)$, $T_j \notin V(G_1)$. Введемо ще наступні позначення.

$$C_1 = \bigcup_{T_k \in V(G_1)} \Psi(T_k \setminus V_{ter}), \quad \hat{C}_1 = \bigcup_{T_k \notin V(G_1)} \Psi(T_k \setminus V_{ter}).$$

Всі множини $\Psi(T_k \setminus V_{ter})$, $k \in \{1, \dots, n\}$, замкнені і попарно не перетинаються за означенням плоского відображення. Тому множини C_1 і \hat{C}_1 замкнені та не перетинаються.

Зафіксуємо $w_i \in \Psi(T_i \setminus V_{ter}) \subset C_1$, $w_j \in \Psi(T_j \setminus V_{ter}) \subset \hat{C}_1$ і з'єднаємо ці дві точки простою неперервною кривою $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = w_i$, $\gamma(1) = w_j$.

Оскільки множина $\gamma^{-1}(C_1) \ni 0$ замкнена в I і $w_j = \gamma(1) \notin C_1$, то $1 > \tau_1 = \max\{t \in I \mid \gamma(t) \in C_1\}$. Нехай $\gamma(\tau_1) \in \Psi(T_r \setminus V_{ter})$ для деякого $r \in \{1, \dots, n\}$. З іншого боку, замкнені множини $\gamma^{-1}(\hat{C}_1) \ni 1$ та $\gamma^{-1}(C_1)$ не перетинаються, тому існує $\tau_2 = \min\{t \in (\tau_1, 1] \mid \gamma(t) \in \hat{C}_1\}$. За побудовою $\gamma(\tau_2) \in \Psi(T_s \setminus V_{ter})$ для деякого $s \in \{1, \dots, n\}$.

З одного боку $T_r \in V(G_1)$. Також $T_s \notin V(G_1)$, оскільки $\gamma(\tau_2) \notin C_1$.

З іншого боку, $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Psi(F \setminus V_{ter})$ для кожного $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Множина $\{\gamma(t) \mid \tau_1 < t < \tau_2\}$ зв'язна як образ зв'язної множини при неперервному відображенні, тому знайдеться $Q_\lambda \in \mathcal{Q}$, таке що $\gamma(t) \in Q_\lambda$, $t \in (\tau_1, \tau_2)$. Очевидно, $\gamma(\tau_1), \gamma(\tau_2) \in \overline{Q_\lambda}$. Внаслідок цього вершина Q_λ з'єднана ребром з кожною з вершин T_r та T_s . Отже, вершини T_r та T_s графа $G(\Psi)$ мають належати до однієї компоненти зв'язності.

З отриманої суперечності робимо висновок, що граф $G(\Psi)$ зв'язний.

Лему 2.3.10 доведено.

А.8 Доведення Лемми 2.4.4

а) Перевіримо, що відображення f є відкритим.

Нехай множина $W \in \mathbb{R}^2$ відкрита. Згідно з умовою 4 даної Лемми всі множини $f(W \cap U_i)$ відкриті, тому множина

$$f\left(W \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(W \cap U_i)$$

є відкритою.

Нехай $x \in W \cap \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$. Тоді $f(x) = 0$ згідно з умовою 5. Відповідно до умови 6 знайдемо індекси $j, k \in \mathbb{N}$, такі що $x \in \text{Fr } U_j \cap \text{Fr } U_k$, а також f від'ємна на U_j і додатна на U_k . Скористаємося умовою 3 і знайдемо надрізи $\alpha_j : [0, 1] \rightarrow \overline{U_j}$ і $\alpha_k : [0, 1] \rightarrow \overline{U_k}$ областей U_j і U_k , відповідно, в точці x їх спільної межі. Тоді $f \circ \alpha_j(0) = f \circ \alpha_k(0) = f(x) = 0$, $f \circ \alpha_j(t) < 0$ і $f \circ \alpha_k(t) > 0$

при $t > 0$.

Зафіксуємо окіл $W_x \subset W$ точки x . Криві α_j і α_k неперервні, тому знайдуться $t_j, t_k \in (0, 1]$, такі що $\alpha_j(t) \in W_x$ при $t \leq t_j$ і $\alpha_k(t) \in W_x$ при $t \leq t_k$. За побудовою $c_j = f \circ \alpha_j(t_j) < 0$ і $c_k = f \circ \alpha_k(t_k) > 0$.

Позначимо $V_{f(x)} = (c_j, c_k)$. Множина

$$A = \{\alpha_j(t) | t \in [0, t_j]\} \cup \{\alpha_k(t) | t \in [0, t_k]\} \subset W_x$$

зв'язна, тому і її образ $f(A)$ є зв'язною множиною. Очевидно, $c_j, c_k \in f(A)$, тому і $V_{f(x)} = (c_j, c_k) \subset f(A) \subset f(W_x) \subset f(W)$. Зрозуміло, що множина $V_{f(x)}$ є відкритим околом точки $f(x) = 0$.

Отже, для довільної точки $x \in W \cap \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ знайдуться її відкритий окіл $W_x \subset W$ і відкритий окіл $V_{f(x)}$ її образу $f(x)$, такі що $V_{f(x)} \subset f(W_x)$. Позначимо для зручності $H = W \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i)$. З очевидної рівності

$$W = \{x \in H\} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (W \cap U_i) = \bigcup_{x \in H} W_x \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (W \cap U_i)$$

слідuje, що

$$\begin{aligned} f(W) &= \bigcup_{x \in H} f(W_x) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(W \cap U_i) \supset \bigcup_{x \in H} V_{f(x)} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(W \cap U_i) \supset \\ &\supset \{f(x) | x \in H\} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(W \cap U_i) = f(W). \end{aligned}$$

Отже,

$$f(W) = \bigcup_{x \in H} V_{f(x)} \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(W \cap U_i)$$

і множина $f(W)$ відкрита.

Відкритість відображення f слідує з довільності у виборі відкритої множини $W \in \mathbb{R}^2$.

б) Нехай $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ і існують відкритий окіл V та індекси $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$, такі що $V \subset \overline{U_j} \cup \overline{U_k}$. Перевіримо, що сім'я $\{L_c\}_{c \in f(\mathbb{R}^2)}$ множин рівня f одностаїно локально зв'язна у точці x .

З умови 1 слідує, що $U_l \cap (\overline{U_j} \cup \overline{U_k}) = \emptyset$ для кожного $l \notin \{j, k\}$, $l \in \mathbb{N}$. Тому

$$\overline{U_l} \cap V = \emptyset, \text{ коли } l \notin \{j, k\}. \quad (\text{A.8.1})$$

Внаслідок умови 6 і попереднього співвідношення f приймає значення різних знаків на U_j і U_k . Не обмежуючи загальності міркувань, можемо вважати, що f від'ємна на U_j і додатна на U_k , тобто $f(U_j) \subset (-\infty, 0)$ і $f(U_k) \subset (0, +\infty)$.

Помітимо, що з умови 6 і рівності (A.8.1) також слідує, що $V \setminus (U_j \cup U_k) \subset (\text{Fr } U_j \cap \text{Fr } U_k)$. Внаслідок цього $f^{-1}(0) \cap V \subset (\text{Fr } U_j \cap \text{Fr } U_k)$.

Розглянемо відкритий окіл W точки x в \mathbb{R}^2 . Позначимо $W_0 = W \cap V$.

Користуючись умовою 7, знайдемо відкритий окіл $Q_j \subset W_0 \cap \overline{U_j}$ точки x у просторі $\overline{U_j}$, який має наступну властивість: для будь-якого $c \in f(\overline{U_j})$ кожену пару точок з $L_c^j \cap Q_j$ можна з'єднати у $W_0 \cap \overline{U_j}$ зв'язною підмножиною множини L_c^j . Виберемо також відкритий окіл $Q_k \subset W_0 \cap \overline{U_k}$ точки x в просторі $\overline{U_k}$ такий, що для будь-якого $c \in f(\overline{U_k})$ кожену пару точок з $L_c^k \cap Q_k$ можна з'єднати у $W_0 \cap \overline{U_k}$ зв'язною підмножиною множини L_c^k .

З означення індукованої топології на підпросторі слідує, що знайдуться відкриті околи W'_j і W'_k точки x в \mathbb{R}^2 , такі що $Q_j = W'_j \cap \overline{U_j}$ і $Q_k = W'_k \cap \overline{U_k}$. Позначимо $W' = V \cap W'_j \cap W'_k$.

Нехай $y_1, y_2 \in W' \cap L_c$ для деякого $c \in f(\mathbb{R}^2)$.

Якщо $c \geq 0$, то $y_1, y_2 \in \overline{U_j}$. Тому за означенням $y_1, y_2 \in L_c^j$. З вибору околу W' слідує, що $y_1, y_2 \in Q_j$. Внаслідок цього існує зв'язна підмножина $C \subset L_c^j \cap W_0 \cap \overline{U_j}$, яка містить ці точки. Очевидно, $L_c^j \subset L_c$, тому пару точок y_1, y_2 можна з'єднати у W зв'язною підмножиною множини L_c .

Коли $c \leq 0$, маємо $y_1, y_2 \in \overline{U_k}$. Повторюючи попередні міркування, приходимо до висновку, що і в цьому випадку точки y_1 і y_2 можна з'єднати у W зв'язною підмножиною множини L_c .

Враховуючи довільність у виборі відкритого околу W точки x , робимо висновок, що сім'я $\{L_c\}_{c \in f(\mathbb{R}^2)}$ множин рівня f одностайно локально зв'язна у точці x .

Лему 2.4.4 доведено.

А.9 Доведення Твердження 2.4.5

Розглянемо спочатку функцію $g_0 : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g_0(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R}.$$

Легко бачити, що множиною рівня $g_0^{-1}(c)$, $c \neq 0$, цієї функції є коло $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ радіуса $|c|$ з центром в т. $(c, 0)$, з якого виключено початок координат. Зокрема, $g_0(D') = (0, 1]$, $g_0(\text{Int } D) = (0, 1)$ і $\text{Fr } D \setminus \{0\} = g_0^{-1}(1)$.

Зауважимо також, що $D' = \{z \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \mid g_0(z) \in (0, 1]\}$.

Нехай

$$g_1(z) = 1 - g_0(z), \quad z \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}.$$

Тоді $g_1(D') = [0, 1)$, $g_1(\text{Int } D) = (0, 1)$ і $\text{Fr } D \setminus \{0\} = g_1^{-1}(0)$. Отже, функція g_1 відповідає умові (i).

Також виконується співвідношення

$$D' = \{z \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \mid g_1(z) \in [0, 1)\}. \quad (\text{A.9.1})$$

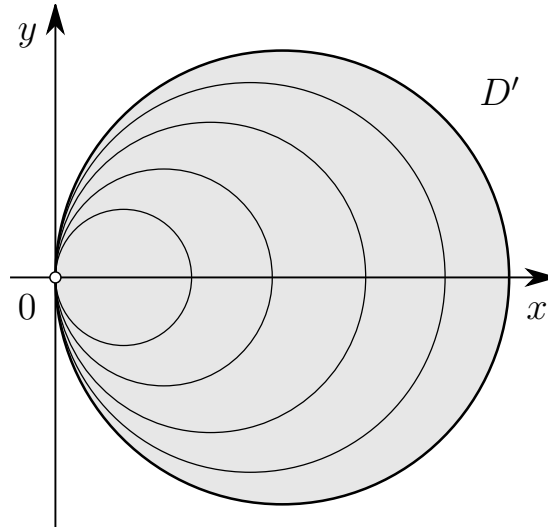
Легко бачити, що функція $g_1 : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є гладкою і не має критичних точок на області визначення.

Згідно з Теоремою про ранг (див. [1]) для кожного $z \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ існує окіл U_z , такий що функція $g_1|_{U_z} : U_z \rightarrow \mathbb{R}$ топологічно еквівалентна координатній проекції $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$, у деякому околі початку координат. Тобто існують вкладення $\chi_z : U_z \rightarrow \mathbb{R}^2$ і гомеоморфізм $\eta_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такі що $\chi_z(z) = 0$ і наступна діаграма є комутативною

$$\begin{array}{ccc} U_z & \xrightarrow{g_1|_{U_z}} & \mathbb{R} \\ \chi_z \downarrow & & \downarrow \eta_z \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{R} \end{array}$$

З цього миттєво слідує, що відображення g_1 відкрите.

Перевіримо, що сім'я множин рівня функції g_1 одностайно локально зв'яз-

Рис. А.9.1: Множини рівня функції g .

на на області визначення цієї функції.

Нехай W — окіл точки z в $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Множина $\chi_z(U_z \cap W)$ є околом точки $0 = \chi_z(z)$, тому існує $\delta > 0$, таке що $V_\delta(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < \delta^2\} \subset \chi_z(U_z \cap W)$. Тоді $W' = \chi_z^{-1}(V_\delta(0)) \subset W$ і $z \in W'$.

Зрозуміло, що для кожного $c \in g_1(W')$ виконується включення

$$\chi_z(g_1^{-1}(c)) \subset \pi_1^{-1}(\eta_z(c)) = \{\eta_z(c)\} \times \mathbb{R},$$

тому множина

$$W' \cap g_1^{-1}(c) = \chi_z^{-1}(V_\delta(0) \cap (\{\eta_z(c)\} \times \mathbb{R})) \subset W$$

є зв'язною, як образ інтервала під дією неперервного відображення χ_z^{-1} . Отже для будь якого $c \in g_1(W')$ кожену пару точок з множини $W' \cap g_1^{-1}(c)$ можна з'єднати в W зв'язною підмножиною множини $g_1^{-1}(c)$.

Внаслідок довільного вибору точки z та її околу W сім'я множин рівня функції g_1 одностайно локально зв'язна на множині $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$.

Розглянемо функцію $g = g_1|_{D'} : D' \rightarrow \mathbb{R}$ (див. Рис А.9.1).

Зі сказаного вище слідує, що g відповідає умові (i).

Відображення $g|_{\text{Int } D} = g_1|_{\text{Int } D} : \text{Int } D \rightarrow \mathbb{R}$ відкрите, тому що g_1 відкрите відображення і $\text{Int } D$ є відкритою підмножиною його області визначення.

Отже, умова (ii) також виконується для g .

Справедливість умови (iii) для g слідує з одностайної локальної зв'язності сім'ї множин рівня функції g_1 і з того, що D' є повним прообразом множини $[0, 1)$ (див. рівність (A.9.1)).

Твердження 2.4.5 доведено.

A.10 Доведення Твердження 2.4.8

Нехай $z \in \mathbb{R}^2$. Щоб перевірити першу частину твердження, нам потрібно знайти окіл $U_z \ni z$, який перетинається лише зі скінченною кількістю елементів $\{\overline{Q_\lambda}\}$.

За означенням $\mathbb{R}^2 = \Psi(F \setminus V_{ter}) \cup \bigcup_\lambda Q_\lambda$.

Припустимо, $z \in Q_\mu$ для якогось $\mu \in \Lambda$. Внаслідок того, що всі Q_λ відкриті і попарно не перетинаються, справедлива рівність $Q_\mu \cap \overline{Q_\lambda} = \emptyset$ і окіл $U_z = Q_\mu$ відповідає нашим вимогам.

Нехай $z \in \Psi(F \setminus V_{ter})$. Тоді існує $i \in \{1, \dots, n\}$, для якого $z \in \Psi(T_i \setminus V_{ter})$. Як і при доведенні Твердження 2.3.6 помітимо, що точка z відділена від замкненої множини R_i (див. (A.6.1)). Тому існує її окіл \tilde{U} , такий що $\tilde{U} \cap \Psi(F \setminus V_{ter}) = \tilde{U} \cap \Psi(T_i \setminus V_{ter})$.

Розглянемо плоске відображення $\Psi_i = \Psi|_{T_i \setminus V_{ter}} : T_i \setminus V_{ter} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Нехай U_z є околом точки z , який відповідає Лемі 2.2.3 відносно Ψ_i . Помітимо, що його можна вибрати як завгодно малим, тому можемо вважати, що $U_z \subset \tilde{U}$.

Позначимо $\Delta_z = \{\lambda \in \Lambda_i \mid \overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap U_z \neq \emptyset\}$.

Лема 2.2.3 і Твердження 2.2.6 стверджують, що окіл U_z гомеоморфний одиничному диску, розділеному на сектори скінченною кількістю променів, які з'єднують образ точки z з його межею. Образом дерева F в диску є об'єднання цих променів, а образами множин $Q_\mu^{(i)}$, $\mu \in \Delta_z$, є сектори, причому образом кожної множини $Q_\mu^{(i)}$ є рівно один сектор.

Зі сказаного випливають такі наслідки:

- $z \in \overline{Q_\mu^{(i)}}$, $\mu \in \Delta_z$;
- є принаймні два індекси $\lambda, \mu \in \Delta_z$, для яких образи компонент $Q_\lambda^{(i)}$ і

$Q_\mu^{(i)}$ є сусідніми секторами в диску, отже області $Q_\lambda^{(i)}$ і $Q_\mu^{(i)}$ є суміжними (див. Означення 2.2.10 і Твердження 2.2.5);

- якщо $z \in \Psi_i(T_i \setminus V) = \Psi(T_i \setminus V)$, то число секторів і променів дорівнює 2, тобто $\Delta_z = \{\lambda, \mu\}$ і $U_z \subset Q_\lambda^{(i)} \cup Q_\mu^{(i)} \cup (\overline{Q_\lambda^{(i)}} \cap \overline{Q_\mu^{(i)}})$.

В силу вибору околу \tilde{U} з нерівності $\overline{Q_\mu} \cap U_z \neq \emptyset$ слідує, що $\mu \in \Lambda_i$. Тоді Твердження 2.3.6 і його Наслідок 2.3.8 гарантують, що $\overline{Q_\mu} \cap U_z = \overline{Q_\mu^{(i)}} \cap U_z$.

Зокрема, $z \in U_z \subset \bigcup_{\lambda \in \Delta_z} \overline{Q_\lambda}$. З означення сім'ї $\{Q_\lambda\}$ і з попереднього співвідношення слідує, що $U_z \cap \overline{Q_\mu} = \emptyset$ для кожного $\mu \notin \Delta_z$. Внаслідок цього сім'я $\{\overline{Q_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ утворює локально скінченне замкнене покриття площини.

З урахуванням сказаного вище, Наслідок 2.3.13 гарантує наступне:

- $z \in \overline{Q_\mu}$, $\mu \in \Delta_z$;
- є принаймні два індекси $\lambda, \mu \in \Delta_z$, для яких області Q_λ і Q_μ є суміжними;
- якщо $z \in \Psi(F \setminus V)$, то $\Delta_z = \{\lambda, \mu\}$ і $U_z \subset (\overline{Q_\lambda} \cup \overline{Q_\mu})$.

Твердження 2.4.8 доведено.

Додаток Б

Доведення окремих тверджень Розділу 3

Б.1 Доведення Лема 3.2.5

Внаслідок Твердження 3.1.2 регулярні шари \mathfrak{F}_0 є вкладеними в M^2 одновиірними многовидами без межі (колами або інтервалами).

Нехай елемент розбиття $F \in \mathfrak{F}_0$, що міститься у множині рівня $f^{-1}(c)$, гомеоморфний інтервалу. Фіксуємо вкладення $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M^2$, $\alpha(\mathbb{R}) = F$. Нехай L' і L'' — ті ж, що й вище. Помітимо, що $L' \cup L'' \subset \overline{F}$, див. Зауваження 3.2.2. З неперервності f слідує, що $L' \cup L'' \subset f^{-1}(c)$.

Нехай x є регулярною точкою множини рівня $f^{-1}(c)$. З Означення 3.1.1 слідує, що точка x має окіл U , всі точки якого є регулярними, і такий що множина $A = U \cap f^{-1}(c)$ є гомеоморфним образом інтервала (зокрема, вона зв'язна). Тому множина A є підмножиною одного з елементів розбиття \mathfrak{F}_0 . Нехай $A \subset F'$, $F' \in \mathfrak{F}_0$.

Якщо $F' \neq F$, то $F \cap U = \emptyset$. Тоді $\overline{F} \cap U = \emptyset$ і $x \notin L' \cup L''$.

Нехай $F' = F$. Тоді $A \subset \alpha(\mathbb{R})$, зокрема $x = \alpha(t_0)$ для деякого $t_0 \in \mathbb{R}$.

Множина $\alpha^{-1}(U)$ є відкритим околом точки t_0 в \mathbb{R} . Тому знайдуться $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, такі що $t_1 < t_0 < t_2$ і інтервал $Q = (t_1, t_2)$ міститься в $\alpha^{-1}(U)$. Оскільки відображення α є вкладенням, то множина $\alpha(Q)$ є відкритим околом точки

x у просторі $\alpha(\mathbb{R})$ в індукованій з M^2 топології. Отже, існує відкритий окіл V точки x в M^2 , для якого $V \cap \alpha(\mathbb{R}) = \alpha(Q)$. Тоді справедлива рівність

$$V \cap (\alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t < t_1\}) \cup \alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t > t_2\})) = \emptyset.$$

З цього слідує, що $x \notin L' \cup L''$.

Отже ми довели, що регулярна точка множини рівня $f^{-1}(c)$ не може належати межовій множині шара $F \in \mathfrak{F}_0$.

Нехай x є сингулярною точкою множини рівня $f^{-1}(c)$. Тоді або x є локальним екстремумом, або сідловою точкою f .

Згідно умові (f.a) множина локальних екстремумів f є дискретною. Тому кожна точка локального екстремума є ізольованою точкою множини рівня f і не може належати межовій множині.

Отже, межа множини шара $F \in \mathfrak{F}_0$ складається тільки з сідлових точок.

Нехай x є сідловою точкою. З Означення 3.1.1 випливає, що точка x має окіл U_x , в якому f топологічно еквівалентна функції $\operatorname{Re} z^n$ в околі нуля для деякого $n > 1$. Легко бачити, що існують як завгодно малі околи точки x , такі що межа кожного з них перетинається з множиною рівня $f^{-1}(c)$ рівно в $2n$ точках. Отже межі таких околів перетинаються з $F = \alpha(\mathbb{R}) \subset f^{-1}(c)$ у скінченній кількості точок і ми знаходимося в умовах Твердження 3.2.3.

Лему 3.2.5 доведено.

Б.2 Доведення Твердження 3.2.8

Позначимо поверхню M^2 без множини локальних екстремумів f через G^* . З властивостей (f.a) і (f.б) слідує, що G^* є двовимірною поверхнею і всі особливі шари \mathfrak{F}_0 на G^* є сідловими точками.

Тому ми можемо застосувати Лему 3.1 з [16], яка стверджує, що існують такі відкритий окіл N множини R і гомеоморфізм $h : \bar{N} \rightarrow [-1, 1]^2$, що $0 \in h(R) \subset \{0\} \times (-1, 1)$ і розбиття множини \bar{N} , елементами якого є криві $h^{-1}(\{c\} \times [-1, 1])$, $c \in [-1, 1]$, підпорядковане розбиттю \mathfrak{F}_0 (кожна крива $h^{-1}(\{c\} \times [-1, 1])$ міститься в деякому елементі розбиття \mathfrak{F}_0).

Зрозуміло, що кожна множина $h^{-1}(\{c\} \times [-1, 1])$ є підмножиною деякої множини рівня f . Тому (див. [80]) існує неперервне фактор-відображення $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, яке замикає комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} [-1, 1]^2 & \xrightarrow{h^{-1}} & \overline{N} \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow f \\ [-1, 1] & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \end{array}$$

Доведемо ін'єктивність відображення g .

Нехай для $t_1 < t_2$ виконується рівність $g(t_1) = g(t_2) = c$. Позначимо $W = (t_1, t_2) \times (-1, 1) \subset [-1, 1]^2$, $V = h^{-1}(W)$.

Якщо ми припустимо, що $g(t) = c$ для всіх $t \in (t_1, t_2)$, то отримаємо рівність $c = f(x)$, $x \in V$. Проте згідно властивості **(f.a)** функція f не може бути постійною на відкритій множині V . Таким чином, $g(t) \neq c$ для деякого $t \in (t_1, t_2)$.

Неперервна функція g на компактi $[t_1, t_2]$ досягає своїх максимального та мінімального значень. Ми вже перевірили, що принаймні одне з них відрізняється від c . Не обмежуючи загалу міркувань будемо вважати, що $g(t_0) = \max\{g(t) \mid t \in [t_1, t_2]\} \neq c$ для деякого $t_0 \in (t_1, t_2)$.

Позначимо $w_0 = (t_0, 0) \in W$, $x_0 = h^{-1}(w_0) \in V$. За побудовою $g \circ \text{pr}_1(w) \leq g \circ \text{pr}_1(w_0)$ для всіх $w \in W$. Отже $f(x) \leq f(x_0)$ для кожного $x \in V$ і x_0 є точкою локального максимуму f . Проте $V \subset N \subset G^*$ і G^* не містить локальних екстремумів f .

Отримана суперечність доводить строгу монотонність g . Без обмеження загалу будемо вважати функцію g такою, що зростає. Образ g є компактною підмножиною \mathbb{R} . Нехай $g([-1, 1]) = [a_1, a_2]$. Продовжимо g на \mathbb{R} наступним чином

$$\hat{g}(t) = \begin{cases} a_1 + (t + 1) & \text{при } t < -1, \\ g(t) & \text{при } t \in [-1, 1], \\ a_2 + (t - 1) & \text{при } t > 1. \end{cases}$$

Легко бачити, що $\hat{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є гомеоморфізмом.

Нехай $h' = \hat{g}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Оскільки за побудовою $f(\overline{N}) = g([-1, 1]) = [a_1, a_2]$ і $\hat{g}^{-1}|_{[a_1, a_2]} = g^{-1}|_{[a_1, a_2]}$, то $h' \circ f = \text{pr}_1 \circ h$.

Твердження 3.2.8 доведено.

Б.3 Доведення Твердження 3.2.11

Нехай $F', F'' \in \mathfrak{F}$, $F' \subset f^{-1}(c')$, $F'' \subset f^{-1}(c'')$. Припустимо, що $c' \neq c''$. Тоді множини $\pi_f(f^{-1}(\{c \mid c < (c' + c'')/2\}))$ і $\pi_f(f^{-1}(\{c \mid c > (c' + c'')/2\}))$ є відкритими околами точок $\pi_f(F')$ і $\pi_f(F'')$ простору Γ_{K-R} що не перетинаються.

Нехай F' і F'' — дві різні компоненти множини рівня $f^{-1}(c)$.

З умови (f.a) слідує, що локальні екстремуми є ізольованими точками множини рівня f .

Нехай F' є регулярним елементом розбиття \mathfrak{F} або точкою локального екстремума f . Зафіксуємо довільну точку $x_1 \in F'$.

Якщо F' є сингулярним елементом \mathfrak{F} і не зводиться до точки локального екстремума, то він містить хоча б одну сідлову точку f . Нехай x_1, \dots, x_m — це всі сідлові точки f , що належать множині F' (згідно умові (f.1) їх скінченна кількість).

Подібним чином виберемо скінченний набір точок $y_1, \dots, y_n \in F''$.

Зафіксуємо відкриту множину $Q \subset M^2$ з компактним замиканням, таку що

$$x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in Q.$$

Згідно умові (f.2) знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що множина $Q \cap f^{-1}((c - \varepsilon, c) \cup (c, c + \varepsilon))$ перетинається тільки з регулярними елементами розбиття \mathfrak{F} . З неперервності f слідує, що $f^{-1}((c - \varepsilon, c + \varepsilon))$ є відкритим околom множини рівня $f^{-1}(c)$.

Позначимо $\hat{Q} = Q \cap f^{-1}((c - \varepsilon, c + \varepsilon))$. Зрозуміло, що $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in \hat{Q}$.

Нехай U'_{ij} і U''_{ij} є околами точок x_i і y_j , що відповідають умові (f.3), $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Зменшуючи за необхідності ці околи можна вважати, що $U'_{ij}, U''_{ij} \subset \hat{Q}$. Аналогічно, скориставшись умовами (f.6) околи U'_{ij} і U''_{ij}

можна зменшити так, щоб виконувались співвідношення

$$\begin{aligned} U'_{ij} \cap f^{-1}(c) &\subset F', \quad i = 1, \dots, m, \\ U''_{ij} \cap f^{-1}(c) &\subset F'', \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (\text{Б.3.1})$$

Для кожного $i = 1, \dots, m$ множина $V'_i = \bigcap_{j=1}^n U'_{ij}$ є околом точки x_i , аналогічно для кожного $j = 1, \dots, n$ множина $V''_j = \bigcap_{i=1}^m U''_{ij}$ є околом точки y_j . При цьому для всіх $F \in \mathfrak{F}$ виконуються співвідношення

$$(F \cap V'_i = \emptyset) \vee (F \cap V''_j = \emptyset), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{Б.3.2})$$

Розглянемо множини

$$\begin{aligned} W' &= \{F \in \mathfrak{F} \mid F \cap \bigcup_{i=1}^n V'_i \neq \emptyset\}, \\ W'' &= \{F \in \mathfrak{F} \mid F \cap \bigcup_{j=1}^n V''_j \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Очевидно, що $F' \subset W'$, $F'' \subset W''$, $\pi_f^{-1}(\pi_f(W')) = W'$ і $\pi_f^{-1}(\pi_f(W'')) = W''$. Зі співвідношень (Б.3.2) слідує, що $W' \cap W'' = \emptyset$. Тому $\pi_f(W') \cap \pi_f(W'') = \emptyset$.

Для завершення доведення нам досить показати, що множини W' і W'' відкриті в M^2 . Тоді за означенням фактор-топології (див. [80]) множини $\pi_f(W')$ і $\pi_f(W'')$ будуть також відкритими.

Розглянемо множини

$$\begin{aligned} \tilde{W}' &= \{F_0 \in \mathfrak{F}_0 \mid F_0 \cap \bigcup_{i=1}^n V'_i \neq \emptyset\}, \\ \tilde{W}'' &= \{F_0 \in \mathfrak{F}_0 \mid F_0 \cap \bigcup_{j=1}^n V''_j \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Згідно Твердженню 3.2.10 вони відкриті в M^2 . Оскільки $U'_{ij}, U''_{ij} \subset \hat{Q}$, то $W', W'', \tilde{W}', \tilde{W}'' \subset f^{-1}((c - \varepsilon, c + \varepsilon))$, причому множини $W' \cap f^{-1}((c - \varepsilon, c) \cup (c, c + \varepsilon))$ і $W'' \cap f^{-1}((c - \varepsilon, c) \cup (c, c + \varepsilon))$ складаються з регулярних елементів

розбиття \mathfrak{F} (які в свою чергу є регулярними елементами розбиття \mathfrak{F}_0).

Зі співвідношень (Б.3.1) слідує, що

$$W' \cap f^{-1}(c) = F'. \quad (\text{Б.3.3})$$

Якщо F' є регулярним елементом розбиття \mathfrak{F} або точкою локального екстремума f , то $F' \subset \tilde{W}'$. Тоді множина $W' = \tilde{W}'$ відкрита в M^2 .

Нехай F' є сингулярним елементом розбиття \mathfrak{F} , який не зводиться до точки локального екстремума. Тоді всі сингулярні елементи розбиття \mathfrak{F}_0 , що містяться в F' є сідловими точками. Це точки x_1, \dots, x_m .

Згідно Лемі 3.2.5 і Наслідку 3.2.7 всі регулярні елементи \mathfrak{F}_0 , які містяться в F' , гомеоморфні інтервалу і мають непорожні межові множини. Якщо регулярний елемент $F_0 \in \mathfrak{F}_0$ лежить в F' , то його межова множина L містить одну з точок x_1, \dots, x_m . З Зауваження 3.2.2 отримаємо співвідношення

$$F_0 \cap \bigcup_{i=1}^m V_i' \neq \emptyset.$$

фундаментальним $F' \subset \tilde{W}' \cap f^{-1}(c)$. А оскільки $\tilde{W}' \subset W'$, то $\tilde{W}' = W'$ і множина W' відкрита в M^2 .

До множини W'' можемо застосувати подібні міркування.

Твердження 3.2.11 доведено.

Б.4 Доведення Твердження 3.2.15

Позначимо $x_1 = \alpha_1(0)$, $x_2 = \alpha_2(0)$, $y_1 = \alpha_1(1)$, $y_2 = \alpha_2(1)$, $c_0 = f(x_1) = f(x_2)$, $c_1 = f(y_1) = f(y_2)$. Не обмежуючи загалу, будемо вважати, що $c_0 < c_1$.

Змінимо для зручності параметризацію кривої α_2 .

Функції $f \circ \alpha_1$ і $f \circ \alpha_2$ строго монотонні і $f \circ \alpha_1(k) = f \circ \alpha_2(k)$, $k = 0, 1$, отже $f \circ \alpha_1([0, 1]) = f \circ \alpha_2([0, 1]) = [c_0, c_1]$ і визначене неперервне відображення $\gamma = (f \circ \alpha_2)^{-1} \circ f \circ \alpha_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Причому γ бієктивне і лишає нерухомими кінці відрізка $[0, 1]$. Замінимо α_2 на $\alpha_2' = \alpha_2 \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{Q}$ і отримаємо

пару неперервних кривих α_1 і α'_2 , які задовольняють всі умови Твердження, а також наступну умову.

- $f \circ \alpha_1(t) = f \circ \alpha'_2(t)$ для всіх $t \in [0, 1]$.

Далі замість α'_2 будемо писати α_2 , маючи на увазі, що ця умова виконується.

Зі строгої монотонності функцій $f \circ \alpha_1$ і $f \circ \alpha_2$ слідує, що $f \circ \alpha_1(\tau_1) \neq f \circ \alpha_2(\tau_2)$ при $\tau_1 \neq \tau_2$.

Розглянемо множину

$$T = \{t \in [0, 1] \mid \forall \tau \in [0, t] \exists F_\tau \in \mathfrak{F} : \alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau) \in F_\tau\}.$$

Для завершення доведення нам досить показати, що $T = [0, 1]$.

Очевидно, $0 \in T$, оскільки $\alpha_1(0), \alpha_2(0) \in F_0$.

Перевіримо, що множина T відкрита в просторі $[0, 1]$.

Нехай $a \in T$. Тоді за означенням $[0, a] \subset T$. Якщо $a = 1$, то $T = [0, 1]$.

Припустимо, що $a < 1$. Тоді $\alpha_1(a), \alpha_2(a) \in F_a$ для деякого регулярного елемента $F_a \in \mathfrak{F}$.

Якщо $\alpha_1(a) = \alpha_2(a)$, то внаслідок умови (f.6) знайдеться окіл U точки $\alpha_1(a)$ в M^2 , такий що на U функція f топологічно еквівалентна функції $\operatorname{Re} z$ у околі $(-1, 1) \times (-1, 1)$ початку координат. Легко бачити, що всі непорожні перетини множин рівня f з U є зв'язними. Оскільки α_1 і α_2 неперервні, існує $\varepsilon > 0$, таке що $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau) \in U$ при всіх $\tau \in [a, a + \varepsilon)$. Тому точки $\alpha_1(\tau)$ і $\alpha_2(\tau)$ належать одній компоненті зв'язності множини рівня f при кожному $\tau \in [a, a + \varepsilon)$ і $[0, a + \varepsilon) \subset T$.

Нехай $\alpha_1(a) \neq \alpha_2(a)$. Оскільки елемент $F_a \in \mathfrak{F}$, який містить точки $\alpha_1(a)$ і $\alpha_2(a)$ є регулярним, то він гомеоморфний колу або інтервалу (див. Наслідок 3.2.6). У будь-якому випадку, знайдеться підмножина $R \in F_a$, що гомеоморфна відрізку і містить точки $\alpha_1(a)$ і $\alpha_2(a)$. Оберемо окіл $N \supset R$, $N \subset Q$, що відповідає Твердженню 3.2.8. Як і вище, всі непорожні перетини множин рівня f з N є зв'язними. Оскільки $\alpha_1(a), \alpha_2(a) \in R$, то знайдеться $\varepsilon > 0$, таке що $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau) \in N$ при всіх $\tau \in [a, a + \varepsilon)$. Таким чином і в цьому випадку $[0, a + \varepsilon) \subset T$ і множина T відкрита в $[0, 1]$.

Перевіримо, що множина T замкнена.

Нехай $b \in \bar{T}$. З $a \in T$ слідує, що $[0, a] \subset T$. Тому $[0, b) \subset T$. Оберемо зростаючу послідовність $\{t_k \in [0, 1]\}_{k \in \mathbb{N}}$, таку що $t_k \rightarrow b$ при $k \rightarrow \infty$. Оскільки $t_k \in T$ при всіх $k \in \mathbb{N}$, то для кожного k знайдеться $F_k \in \mathfrak{F}$, яке містить точки $\alpha_1(t_k), \alpha_2(t_k)$.

α_1 і α_2 неперервні, тому для довільної пари околів V_1 і V_2 точок $\alpha_1(b)$ і $\alpha_2(b)$ відповідно, існує $m \in \mathbb{N}$, для якого $\alpha_1(t_m) \in V_1$ і $\alpha_2(t_m) \in V_2$. Тоді $(F_m \cap V_1 \neq \emptyset) \wedge (F_m \cap V_2 \neq \emptyset)$. За побудовою $f \circ \alpha_1(b) = f \circ \alpha_2(b)$. Тому з умови (f.3) випливає, що $\alpha_1(b), \alpha_2(b) \in F_b$ для деякого $F_b \in \mathfrak{F}$. фундаментальним $b \in T$ і множина T замкнена.

Таким чином T є непорожньою відкрито-замкненою підмножиною зв'язного простору $[0, 1]$. Отже, $T = [0, 1]$.

Твердження 3.2.15 доведено.

Б.5 Доведення Лема 3.2.16

Відкрита зв'язна підмножина Q локально лінійно зв'язного простору M^2 є лінійно зв'язною (див. [47]). Тому існує проста неперервна крива $\alpha : [0, 1] \rightarrow Q$, така що $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$.

Згідно властивості (f.6) функції f для кожного $t \in [0, 1]$ знайдуться окіл $U_t \subset Q$ точки $\alpha(t)$ і гомеоморфізми $h_t : U_t \rightarrow (-1, 1) \times (-1, 1)$, $h'_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такі що $\text{pr}_1 \circ h_t = h'_t \circ f$.

Оберемо скінченне підпокриття відкритого покриття $\{\alpha^{-1}(U_t)\}_{t \in [0, 1]}$ відрізка $[0, 1]$. Нехай воно складається з прообразів множин $U_k = U_{t_k}$, $k = 1, \dots, m$. Нехай $h_k : U_k \rightarrow (-1, 1) \times (-1, 1)$ і $h'_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, — відповідні гомеоморфізми, для яких $\text{pr}_1 \circ h_k = h'_k \circ f$, $k = 1, \dots, m$.

Знайдемо число Лебега d покриття $\{\alpha^{-1}(U_k)\}_{k=1}^m$. Зафіксуємо натуральне $n > 1/d$. Набор точок $\tau_r = r/n$, $r = 0, \dots, n$ відповідає такій властивості: для кожного $r = 1, \dots, n$ існує $k(r) \in \{1, \dots, m\}$ таке що $\tau_{r-1}, \tau_r \in \alpha^{-1}(U_{k(r)})$. Позначимо $x_r = \alpha(\tau_r)$. Тоді $x_{r-1}, x_r \in U_{k(r)}$, $r = 1, \dots, n$.

Для кожного $r = 1, \dots, n$ з'єднаємо точки $h_{k(r)}(x_{r-1}), h_{k(r)}(x_r) \in (-1, 1)^2$ за допомогою відрізка прямої $\mu_r : [0, 1] \rightarrow (-1, 1)^2$, $\mu_r(t) = th_{k(r)}(x_{r-1}) + (1-t)h_{k(r)}(x_r)$, $t \in [0, 1]$. Очевидно, що функція $\text{pr}_1 \circ \mu_r$ або строго монотонна,

або постійна. А оскільки відображення $h'_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є гомеоморфізмом, то і функція $(h'_r)^{-1} \circ \text{pr}_1 \circ \mu_r$ має цю властивість.

Позначимо $\alpha_r^1 = h_{k(r)}^{-1} \circ \mu_r : [0, 1] \rightarrow U_{k(r)}$. Зрозуміло, що α_r^1 є простою неперервною кривою, що з'єднує точки x_{r-1} і x_r . З рівностей

$$(h'_{k(r)})^{-1} \circ \text{pr}_1 \circ \mu_r = (h'_{k(r)})^{-1} \circ h'_{k(r)} \circ f \circ (h_{k(r)}^{-1} \circ \mu_r) = f \circ \alpha_r^1$$

слідуює, що функція $f \circ \alpha_r^1$ або постійна, або строго монотонна.

Означимо $\alpha^1 : [0, 1] \rightarrow Q$ наступним чином

$$\alpha^1(t) = \alpha_r^1(tn - r + 1), \quad \text{якщо } t \in [(r-1)/n, r/n].$$

За побудовою $\alpha_r^1(1) = \alpha_{r+1}^1(0) = x_r$, $r = 1, \dots, n-1$, тому наше означення коректне і крива α^1 неперервна. Відмітимо, що α_r^1 може мати самоперетини.

Отже, є скінченна кількість максимальних відрізків, що не перекриваються, на частині з яких функція $f \circ \alpha^1$ строго монотонна, а на іншій частині відрізків вона постійна. За допомогою індукції змінимо нашу криву так, щоб залишились відрізки строгої монотонності тільки одного типу (або зростання, або зменшення $f \circ \alpha^1$).

Крок індукції.

Припустимо, що для неперервної кривої $\alpha^k : [0, 1] \rightarrow Q$, $\alpha^k(0) = x$, $\alpha^k(1) = y$, відрізок $[0, 1]$ можна представити у вигляді суми скінченної кількості відрізків, що не перекриваються, кожен з яких є або максимальним відрізком строгої монотонності функції $f \circ \alpha^k$, або максимальним відрізком, на якому вона постійна.

Припустимо, що знайдуться точки $0 \leq t'_1 < t''_1 \leq t'_2 < t''_2 \leq 1$, такі що при умові $t''_1 \neq t'_2$ відрізок $[t''_1, t'_2]$ є максимальним відрізком, на якому $f \circ \alpha^k$ постійна, а відрізки $[t'_1, t''_1]$ і $[t'_2, t''_2]$ є максимальними відрізками строгої монотонності різних типів. Не обмежуючи загалу будемо вважати, що на першому з них $f \circ \alpha^k$ зростає, а на другому спадає. Тоді $f \circ \alpha^k(t'_1) < f \circ \alpha^k(t''_1)$, $f \circ \alpha^k(t'_1) = f \circ \alpha^k(t'_2)$ і $f \circ \alpha^k(t'_2) > f \circ \alpha^k(t''_2)$.

Нехай $f \circ \alpha^k(t'_1) \leq f \circ \alpha^k(t''_2)$ (випадок $f \circ \alpha^k(t'_1) \geq f \circ \alpha^k(t''_2)$ розглядається

аналогічно). За теоремою про проміжне значення існує $t_0 \in [t'_1, t''_1)$, для якого $f \circ \alpha^k(t_0) = f \circ \alpha^k(t''_2)$.

Згідно з нашим припущенням функція $f \circ \alpha^k$ постійна на відрізку $[t''_1, t''_2]$, тому точки $\alpha^k(t''_1)$ і $\alpha^k(t''_2)$ належать одній компоненті зв'язності множини рівня функції f і можна застосувати Твердження 3.2.15 до неперервних кривих

$$\begin{aligned}\beta_1(t) &= \alpha^k((1-t)t''_1 + tt_0), \\ \beta_2(t) &= \alpha^k((1-t)t'_2 + tt''_2), \quad t \in [0, 1].\end{aligned}$$

фундаментальним точки $\beta_1(1) = \alpha^k(t_0)$ і $\beta_2(1) = \alpha^k(t''_2)$ належать одній компоненті зв'язності F множини рівня функції f . Оскільки носій кривої α^k належить Q , то елемент $F \in \mathfrak{F}$ регулярний і існує неперервна крива $\beta : [0, 1] \rightarrow F$, $\beta(0) = \alpha^k(t_0)$, $\beta(1) = \alpha^k(t''_2)$.

Розглянемо неперервну криву $\alpha^{k+1} : [0, 1] \rightarrow Q$,

$$\alpha^{k+1}(t) = \begin{cases} \beta\left(\frac{t-t_0}{t''_2-t_0}\right), & \text{якщо } t \in [t_0, t''_2], \\ \alpha^k(t), & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Легко бачити, що відрізок $[0, 1]$ можна представити у вигляді суми скінченної кількості відрізків, що не перекриваються, кожний з яких є або максимальним відрізком строгої монотонності функції $f \circ \alpha^{k+1}$, або максимальним відрізком, на якому вона постійна. Замість двох відрізків строгої монотонності $[t'_1, t''_1]$ і $[t'_2, t''_2]$ функції $f \circ \alpha^k$ нова функція $f \circ \alpha^{k+1}$ має один відрізок $[t'_1, t_0]$ (або ні одного, якщо $t'_1 = t_0$). Всі інші максимальні відрізки строгої монотонності функцій $f \circ \alpha^k$ і $f \circ \alpha^{k+1}$ збігаються.

Таким чином загальна кількість максимальних відрізків строгої монотонності функції $f \circ \alpha^{k+1}$ менше, ніж у функції $f \circ \alpha^k$. Тому стартуючи з неперервної кривої α^1 , ми можемо застосувати шаг індукції лише скінченну кількість разів.

Отже, існує $p \in \mathbb{N}$, таке що до кривої α^p шаг індукції вже не може бути застосований. Легко бачити, що на всіх максимальних відрізках строгої монотонності $f \circ \alpha^p$ має місце монотонність одного типу. Без обмеження загалу

ми можемо вважати, що на кожному з них $f \circ \alpha^p$ зростає.

За побудовою існує таке розбиття $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = 1$ відрізка $[0, 1]$, що $f \circ \alpha^p$ або постійна, або строго зростає на кожному $[t_{r-1}, t_r]$, $r = 1, \dots, l$. При цьому для кожної пари сусідніх відрізків на одному з них функція постійна, а на іншому зростає.

Фіксуємо t_r , таке що на відрізку $[t_{r-1}, t_r]$ функція $f \circ \alpha^p$ постійна. Нехай $[t_{r-1}, t_r] \subset (f \circ \alpha^p)^{-1}(c_r)$. Будемо вважати, що $t_{r-1} \neq 0$ і $t_r \neq 1$. Зв'язна множина $\alpha^p([t_{r-1}, t_r]) \subset Q$ належить деякій множині рівня функції f , тому знайдеться регулярний елемент $F_r \in \mathfrak{F}$, що містить $\alpha^p([t_{r-1}, t_r])$.

F_r є вкладеним у M^2 інтервалом або колом згідно Твердженню 3.2.3. У будь-якому випадку, якщо $\alpha^p(t_{r-1}) \neq \alpha^p(t_r)$, то існує підмножина $R \subset F_r \subset Q$, яка гомеоморфна відрізку і містить точки $\alpha^p(t_{r-1})$ і $\alpha^p(t_r)$. Нехай відкритий окіл N множини R і гомеоморфізми h і h' відповідають Твердженню 3.2.8.

Не обмежуючи загалу ми можемо вважати, що $N \subset Q$.

Користаючись неперервністю кривої α^p , знайдемо точки $t' \in (t_{r-2}, t_{r-1})$ і $t'' \in (t_r, t_{r+1})$, такі що $[t', t''] \subset (\alpha^p)^{-1}(N)$. Нехай $f \circ \alpha^p(t') = c'$, $f \circ \alpha^p(t'') = c''$. У точках t' і t'' неспадна функція $f \circ \alpha^p$ строго зростає, тому $c' < c_r < c''$, $[0, c'] = (f \circ \alpha^p)^{-1}(\{c \in \mathbb{R} \mid c \leq c'\})$, $[c'', 1] = (f \circ \alpha^p)^{-1}(\{c \in \mathbb{R} \mid c'' \leq c\})$.

Оскільки $h \circ \alpha^p(t_r) \in \{0\} \times (-1, 1) \subset N$, то $h'(c_r) = h' \circ f \circ \alpha^p(t_r) = \text{pr}_1 \circ h \circ \alpha^p(t_r) = 0$. З монотонності гомеоморфізма h' слідує, що числа $h'(c')$ і $h'(c'')$ мають різні знаки. Не обмежуючи загалу можемо вважати, що $h'(c') < 0 < h'(c'')$.

З'єднаємо точки $u' = h \circ \alpha^p(t')$, $u'' = h \circ \alpha^p(t'')$ у $(-1, 1)^2$ відрізком прямої $\mu : [0, 1] \rightarrow (-1, 1)^2$, $\mu(t) = tu'' + (1-t)u'$, $t \in [0, 1]$. Оскільки $\text{pr}_1 \circ \mu(0) = \text{pr}_1(u') = \text{pr}_1 \circ h \circ \alpha^p(t') = h' \circ f \circ \alpha^p(t') = h'(c')$ і $\text{pr}_1 \circ \mu(1) = h'(c'')$, то функція $\text{pr}_1 \circ \mu$ строго монотонна і $\text{pr}_1 \circ \mu([0, 1]) = [h'(c'), h'(c'')]$.

Розглянемо просту неперервну криву $\beta_r = h^{-1} \circ \mu : [0, 1] \rightarrow N$, яка з'єднує точки $\alpha^p(t')$ і $\alpha^p(t'')$. Зі строгої монотонності функцій h' і $h' \circ f \circ \beta_r = h' \circ f \circ h^{-1} \circ \mu = \text{pr}_1 \circ \mu$ слідує строга монотонність функції $f \circ \beta_r$.

Замінімо криву α^p на $\hat{\alpha} : [0, 1] \rightarrow Q$,

$$\hat{\alpha}(t) = \begin{cases} \beta_r \left(\frac{t-t'}{t''-t'} \right) & \text{якщо } t \in (t', t''), \\ \alpha^p(t) & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Легко бачити, що функція $f \circ \hat{\alpha}$ строго зростає на відрізку $[t_{r-2}, t_{r+1}]$. На інших відрізках $[t_{s-1}, t_s]$ ця функція збігається з $f \circ \alpha^p$.

Якщо на $[t_{r-1}, t_r]$ функція $f \circ \alpha^p$ постійна, то неможливе одночасне виконання рівностей $t_{r-1} = 0$ і $t_r = 1$, оскільки по умові Леми $f \circ \alpha^p(0) = f(x) \neq f(y) = f \circ \alpha^p(1)$. Тому знайдеться принаймні один відрізок $[t_{s-1}, t_s]$, що є сусіднім з $[t_{r-1}, t_r]$, і на якому функція $f \circ \alpha^p$ строго зростає.

Зрозуміло, що для випадків $r = 1$ і $r = l$ можна очевидним чином змінити попередні міркування і побудувати криву $\hat{\alpha}$, таку що функція $f \circ \hat{\alpha}$ буде строго монотонна на відрізку $[t_0, t_2]$ або $[t_{l-2}, t_l]$, а на всіх інших відрізках $[t_{s-1}, t_s]$ ця функція буде збігатися з $f \circ \alpha^p$.

Отже, переходячи від α^p до $\hat{\alpha}$, ми зменшуємо на одиницю число максимальних відрізків, на яких композиція цього відображення з f постійна. Повторюючи цю процедуру скінченну кількість разів, ми отримаємо неперервну криву $\alpha_{x,y} : [0, 1] \rightarrow Q$, $\alpha_{x,y}(0) = x$, $\alpha_{x,y}(1) = y$, для якої функція $f \circ \alpha_{x,y}$ строго монотонна на $[0, 1]$.

Оскільки функція $f \circ \alpha_{x,y}$ строго монотонна за побудовою, то крива $\alpha_{x,y}$ не може мати точок самоперетину і є простою неперервною кривою.

Лему 3.2.16 доведено.

Б.6 Доведення Леми 3.2.19

Якщо $x, y \in Q$, то доведення зводиться до застосування Леми 3.2.16.

Припустимо, що принаймні одна з точок x, y належить $\text{Fr } Q$. Розділимо доведення на декілька кроків.

Крок 1. Нехай $x \in \text{Fr } Q$, $c = f(x)$. Доведемо, що існує неперервна крива $\beta : [0, 1] \rightarrow \overline{Q}$, така що $\beta(0) = x$, $\beta(t) \in Q$ для всіх $t \in (0, 1]$ і функція $f \circ \beta$ строго монотонна.

$\text{Fr } Q \subset K$ згідно з означенням Q , тому точка x належить деякій сингулярній компоненті $F \in \mathfrak{F}$.

Нехай x є точкою локального екстремума f . Не обмежуючи загалу будемо вважати, що f має в x локальний максимум. Тоді згідно умові (f.a) існує відкритий окіл $U \ni x$, такий що $f(x') < f(x)$ для кожного $x' \in U \setminus \{x\}$.

Скористаємось неперервністю f та властивістю (f.2) цієї функції і оберемо окіл U настільки малим, що $U \setminus \{x\} \subset M^2 \setminus K$. Ми можемо обрати U зв'язним. Тоді, як легко бачити, $U \setminus \{x\} \subset Q$.

Оберемо зліченну базу вкладених околів точки x так, щоб виконувались наступні вимоги:

- всі $\overline{W}_k \subset U$ гомеоморфні замкненим дискам які обмежені колами $S_k = \text{Fr}(W_k)$;
- $\overline{W}_{k+1} \subset W_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Нехай $v_k \in S_k \subset U$, $f(v_k) = \max\{f(v) \mid v \in S_k\}$. Зрозуміло, що $v_k \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$. Тому $f(v_k) \rightarrow f(x)$. Оскільки $f(v_k) < f(x)$ при всіх $k \in \mathbb{N}$, то з послідовності $\{v_k\}$ можна обрати підпослідовність, на елементах якої значення f монотонно зростають. Не обмежуючи загалу будемо вважати, що $f(v_k) < f(v_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$.

Скористаємось Лемою 3.2.16 і для кожного $k \in \mathbb{N}$ з'єднаємо точки v_k та v_{k+1} неперервною кривою $\beta_k : [0, 1] \rightarrow Q$, $\beta_k(0) = v_k$, $\beta_k(1) = v_{k+1}$, такою що функція $f \circ \beta_k$ є строго зростаючою. Оскільки $f \circ \beta_k(t) > f(v_k)$ при $t > 0$ і $\beta_k(1) = v_{k+1} \in S_{k+1} \subset W_k$, то $\beta_k(t) \in W_k$ для всіх $t \in (0, 1]$. Отже, $\beta_m(t) \in W_k$ при довільних $m > k$ і $t \in [0, 1]$.

Розглянемо відображення $\beta : [0, 1] \rightarrow U$,

$$\beta(t) = \begin{cases} x & \text{при } t = 0, \\ \beta_k(2 - 2^k t) & \text{при } t \in [1/2^k, 1/2^{k-1}]. \end{cases}$$

Оскільки $\beta_{k+1}(0) = \beta_k(1)$, $k \in \mathbb{N}$, то це означення є коректним і крива β неперервна при $t > 0$. За побудовою $\beta(t) \in W_k$ при $t \in [0, 1/2^{k-1}]$, $k \in \mathbb{N}$. Оскільки сім'я $\{W_k\}$ є базою околів точки x , то β неперервна і при $t = 0$.

На кожному відрізку $[1/2^k, 1/2^{k-1}]$, $k \in \mathbb{N}$ функція $f \circ \beta$ монотонно спадає,

отже вона монотонно спадає на $[0, 1]$. Нам лишається відмітити, що $\beta(t) \in U \setminus \{x\} \subset Q$ при $t > 0$.

Нехай тепер $x \in \text{Fr } Q$ не є точкою локального екстремума f . Згідно властивості (f.6) функції f існують $n \in \mathbb{N}$, окіл $U \ni x$ і гомеоморфізми $h : U \rightarrow W$, $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такі що $h(x) = 0$ і $h' \circ f = g_n \circ h$. Ми позначили $W = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, $g_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(z) = \text{Re } z^n$.

Скористаємось неперервністю f та властивістю (f.2) і оберемо U настільки малим, що $U \setminus f^{-1}(c) \subset M^2 \setminus K$. Множина $f^{-1}(c) \cap U = h^{-1}(g_n^{-1}(0) \cap W)$ зв'язна і містить точку з K , отже $U \cap K = U \cap f^{-1}(c)$.

Нехай $u \in U \cap Q$, $v = h(u) \in W$. Розглянемо криву $\hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow W$, $\hat{\beta}(t) = tv$, $t \in [0, 1]$, яка з'єднує точки $0 = h(x)$ і v в W . Оскільки $f(u) \neq f(x)$, то $g_n(v) = \text{Re } v^n \neq 0$ і функція $g_n \circ \hat{\beta}(t) = t^n g_n(v)$ строго монотонна на $[0, 1]$.

Розглянемо неперервну криву $\beta = h^{-1} \circ \hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow U$, що з'єднує точки x і u . Оскільки $g_n \circ \hat{\beta} = g_n \circ h \circ \beta = h' \circ f \circ \beta$ і функція $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотонна, то $f \circ \beta$ теж є строго монотонною на області свого визначення.

$f \circ \beta(t) \neq f(x) = c$ при $t \neq 0$. фундаментальним $\beta(t) \in M^2 \setminus K$ при $t \in (0, 1]$ згідно вибору околу U . А оскільки $u = \beta(1) \in Q$, то $\beta(t) \in Q$ для всіх $t \in (0, 1]$.

Крок 2. Нехай $x \in \text{Fr } Q$, $y \in Q$. Доведемо, що існує проста неперервна крива $\alpha_{x,y}$, що з'єднує точки x і y та відповідає вимогам Лемі.

Нехай $u \in Q$ — точка, з якою можна з'єднати x за допомогою неперервної кривої $\beta : [0, 1] \rightarrow \bar{Q}$, $\beta(0) = x$, $\beta(1) = u$, що відповідає вимогам кроку 1. Не обмежуючи загалу будемо вважати, що $f(x) < f(u) = f \circ \beta(1)$.

Перевіримо, що для довільного $v \in Q$ виконується нерівність $f(x) < f(v)$.

Припустимо, що $f(x) \geq f(v)$ для деякого $v \in Q$. Згідно Лемі 3.2.16 точки u і v можна з'єднати за допомогою неперервної кривої $\gamma : [0, 1] \rightarrow Q$, $\gamma(0) = u$, $\gamma(1) = v$, такої що функція $f \circ \gamma$ строго монотонна. За теоремою про проміжне значення існує $t_0 \in (0, 1]$, таке що $f \circ \gamma(t_0) = f(x)$.

Розглянемо неперервні криві $\mu_1, \mu_2 : [0, 1] \rightarrow \bar{Q}$,

$$\mu_1(t) = \beta(1 - t), \quad \mu_2(t) = \gamma(tt_0), \quad t \in [0, 1].$$

Очевидно, що функції $f \circ \mu_1$ і $f \circ \mu_2$ строго монотонні, а також $\mu_1(t), \mu_2(t) \in Q$

при $t < 1$. Оскільки $\mu_1(0) = \mu_2(0) = u$ і $f \circ \mu_1(1) = f \circ \mu_2(1) = f(x)$, то криві μ_1 і μ_2 відповідають Твердженню 3.2.15. Отже існує $F \in \mathfrak{F}$ для якого $\mu_1(1), \mu_2(1) \in F$. А це неможливо, оскільки $\mu_2(1) \in Q$, $\mu_1(1) = x \in K$.

Отримане суперечність доводить, що $f(x) < f(v)$. Зокрема, якщо $x \in \text{Fr } Q$, то $f^{-1}(f(x)) \cap Q = \emptyset$.

Отже, $f(x) < f(y)$. Якщо $f(y) \leq f(u)$, по теоремі про проміжне значення існує $t_0 \in (0, 1]$, для якого $f \circ \beta(t_0) < f(y)$. Якщо $f(y) > f(u)$, візьмемо $t_0 = 1$. Скористаємося Лемою 3.2.16 і з'єднаємо точки $\beta(t_0)$ та y за допомогою простої неперервної кривої $\hat{\beta} : [0, 1] \rightarrow Q$, такої що функція $f \circ \hat{\beta}$ монотонно зростає.

Розглянемо неперервну криву $\alpha_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \overline{Q}$,

$$\alpha_{x,y}(t) = \begin{cases} \beta(2tt_0) & \text{при } t \in [0, 1/2], \\ \hat{\beta}(2t - 1) & \text{при } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Функція $f \circ \alpha_{x,y}$ зростає на кожному з проміжків $[0, 1/2]$ і $[1/2, 1]$, тому вона зростає на $[0, 1]$. фундаментальним крива $\alpha_{x,y}$ не має самоперетинів. За побудовою також $\alpha_{x,y}(t) \in Q$ при $t \in (0, 1]$.

Крок 3. Нехай $x, y \in \text{Fr } Q$. Доведемо існування кривої $\alpha_{x,y}$, яка відповідає Лемі.

За умовами Лемі $f(x) \neq f(y)$. Не обмежуючи загалу будемо вважати, що $f(x) < f(y)$.

Зафіксуємо точку $v \in Q$. Вище вже доведено, що $f(v) \neq f(x)$ і $f(v) \neq f(y)$. Нехай неперервні криві $\beta_x, \beta_y : [0, 1] \rightarrow \overline{Q}$ задовольняють вимоги кроку 2, причому $\beta_x(0) = x$, $\beta_y(0) = y$, $\beta_x(1) = \beta_y(1) = v$.

Перевіримо, що $f(v) \in (f(x), f(y))$.

Припустимо, що $f(v) < f(x)$ (випадок $f(v) > f(y)$ розглядається аналогічно). За теоремою про проміжне значення існує $t_0 \in (0, 1)$, для якого $f \circ \beta_y(t_0) = f(x)$. Тоді точки $\beta_y(t_0) \in Q$ і $x \in \text{Fr } Q$ належать спільній множині рівня f , що неможливо, як було доведено вище.

Отже, $f(x) < f(v) < f(y)$. Розглянемо неперервну криву $\alpha_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \overline{Q}$,

$$\alpha_{x,y}(t) = \begin{cases} \beta_x(2t) & \text{при } t \in [0, 1/2], \\ \beta_y(2 - 2t) & \text{при } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Безпосередня перевірка показує, що вона відповідає всім вимогам леми.

Лему 3.2.19 доведено.

Б.7 Доведення Теорема 3.2.21

Для доведення теореми нам буде потрібне одне технічне твердження.

Твердження Б.7.1 *Нехай неперервні відображення $\chi_1 : X_1 \rightarrow Y$, $\chi_2 : X_2 \rightarrow Y$, $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ топологічних просторів X_1, X_2, Y зв'язані співвідношенням $\chi_1 = \chi_2 \circ \varphi$.*

Припустимо, що χ_1 є вкладенням, а множина $\varphi(X_1)$ замкнена в X_2 .

Тоді відображення φ замкнене.

Доведення твердження Б.7.1. Нехай множина $R \subset X_1$ замкнена.

Оскільки χ_1 є вкладенням, то множина $\chi_1(R)$ замкнена в $\chi_1(X_1)$ у топології, яку індуковано з Y . Отже, $\chi_1(R) = \overline{\chi_1(R)} \cap \chi_1(X_1)$ і $\chi_2^{-1}(\chi_1(R)) = \chi_2^{-1}(\overline{\chi_1(R)}) \cap \chi_2^{-1}(\chi_1(X_1))$.

З іншого боку, $\varphi(R) = \chi_2^{-1}(\chi_1(R)) \cap \varphi(X_1) = \chi_2^{-1}(\overline{\chi_1(R)}) \cap (\chi_2^{-1}(\chi_1(X_1)) \cap \varphi(X_1)) = \chi_2^{-1}(\overline{\chi_1(R)}) \cap \varphi(X_1)$.

Множина $\varphi(X_1)$ замкнена за умовами Твердження, а $\chi_2^{-1}(\overline{\chi_1(R)})$ замкнена як прообраз замкненої множини під дією неперервного відображення. Тому і перетин $\varphi(R)$ цих множин замкнений в X_2 .

Внаслідок довільності у виборі замкненої множини $R \subset X_1$ відображення φ є замкненим. \square

Помітимо, що множина $f(Q)$ відкрита. Дійсно, Q складається з регулярних точок і є відкритою множиною згідно Твердженню 3.2.14. Тому для кожного $x \in Q$ існує окіл $U_x \subset Q$, на якому f топологічно еквівалентна $\text{Re } z$. Отже, знайдеться $\varepsilon = \varepsilon(U_x) > 0$, таке що $f(U_x) \supset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$.

Множина Q зв'язна за означенням. Тому зв'язними є також множини \overline{Q} , $f(Q)$ і $f(\overline{Q})$.

Зрозуміло, що відкрита зв'язна множина $f(Q) \in \mathbb{R}$ гомеоморфна інтервалу $(0, 1)$. Отже $f(\overline{Q})$ гомеоморфна зі збереженням орієнтації одній з множин $(0, 1)$, $[0, 1)$, $(0, 1]$ або $[0, 1]$. Нехай $f(\overline{Q})$ гомеоморфна множині J , яка належить до цього списку.

Побудуємо неперервну криву $\alpha_Q : J \rightarrow \overline{Q}$, для якої функція $f \circ \alpha_Q : J \rightarrow \mathbb{R}$ буде строго зростаючою, і таку що $f \circ \alpha_Q(J) = f(\overline{Q})$.

Фіксуємо точку $y \in Q$, для якої виконуються нерівності

$$\inf_{x \in Q} f(x) < f(y) < \sup_{x \in Q} f(x).$$

Нехай $0 \in J$. Тоді $a_0 = \inf_{x \in Q} f(x) \in f(\overline{Q})$. Оберемо $x_0 \in \overline{Q} \cap f^{-1}(a_0)$. Тоді $x_0 \in \text{Fr } Q$ згідно нашим попереднім міркуванням і $f(x_0) < f(y)$. Скористаємось Лемою 3.2.19 і знайдемо просту неперервну криву $\alpha_0 : [0, 1/2] \rightarrow \overline{Q}$, таку що $\alpha_0(0) = x_0$, $\alpha_0(1/2) = y$ і функція $f \circ \alpha_0$ строго зростає.

Нехай тепер $0 \notin J$. Позначимо $y_1 = y$ і оберемо $y_k \in Q$, $k \geq 2$, так, що послідовність $\{f(y_k)\}$ монотонно спадає і прямує до a_0 . Скористаємось Лемою 3.2.16 і для кожного $k \in \mathbb{N}$ знайдемо просту неперервну криву $\beta_k : [0, 1] \rightarrow Q$, таку що $\beta_k(0) = y_{k+1}$, $\beta_k(1) = y_k$ і функція $f \circ \beta_k$ строго зростає.

Розглянемо криву $\alpha_0 : (0, 1/2] \rightarrow Q$,

$$\alpha_0(t) = \beta_k(2^{k+1}t - 1), \quad \text{якщо } t \in [2^{-(k+1)}, 2^{-k}], k \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $\beta_{k+1}(1) = \beta_k(0)$, $k \in \mathbb{N}$, то ця крива коректно означена і неперервна. Легко бачити, що функція $f \circ \alpha_0$ строго зростає на $(0, 1/2]$. фундаментальним α_0 є простою неперервною кривою.

Аналогічно будується і крива $\alpha_1 : J \cap [1/2, 1] \rightarrow \overline{Q}$, така що $\alpha_1(1/2) = y$, функція $f \circ \alpha_1$ монотонно зростає і $\alpha_1(t) \in Q$ при $t < 1$.

Нехай

$$\alpha_Q(t) = \begin{cases} \alpha_0(t) & \text{якщо } t \leq 1/2, \\ \alpha_1(t) & \text{якщо } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Отримали неперервну криву $\alpha_Q : J \rightarrow \overline{Q}$, яка відповідає умовам (1) і (2) Теореми.

Розглянемо відображення $\hat{\alpha}_Q = \pi_f \circ \alpha_Q : J \rightarrow \Gamma_{K-R}(f)$. Внаслідок монотонності $f \circ \alpha_Q$ відображення $\hat{\alpha}_Q$ ін'єктивне.

Застосовуючи Наслідки 3.2.17 і 3.2.20, отримаємо з уже доведеного співвідношення $f \circ \alpha_Q(J) = f(\overline{Q})$ рівність $\hat{\alpha}_Q(J) = \pi_f(\overline{Q})$.

Множина $\pi_f^{-1}(\pi_f(\overline{Q}))$ є об'єднанням елементів розбиття \mathfrak{F} , які перетинаються з \overline{Q} . Множина Q збігається з $\pi_f^{-1}(\pi_f(Q))$ за означенням. З Наслідку 3.2.20 і властивостей кривої α_Q отримаємо наступне співвідношення:

$$\pi_f^{-1}(\pi_f(\text{Fr } Q)) = \bigcup_{\tau \in J \cap \partial I} F_\tau.$$

Тут F_τ — єдина компонента множини рівня $f^{-1}(f \circ \alpha_Q(\tau))$, яка перетинається з $\text{Fr } Q$. Множини рівня функції f замкнені, тому їх компоненти теж замкнені. Оскільки множина $J \cap \partial I$ містить не більше двох елементів, то $\pi_f^{-1}(\pi_f(\text{Fr } Q))$ є замкненою.

Отже, множина $\pi_f^{-1}(\pi_f(\overline{Q})) = Q \cup \text{Fr } Q \cup \pi_f^{-1}(\pi_f(\text{Fr } Q)) = \overline{Q} \cup \pi_f^{-1}(\pi_f(\text{Fr } Q))$ замкнена. фундаментальним множина $\pi_f(\overline{Q})$ замкнена в $\Gamma_{K-R}(f)$ за означенням фактор-топології.

Разом з включеннями $\pi_f(Q) \subset \pi_f(\overline{Q}) \subset \overline{\pi_f(Q)}$ замкненість $\pi_f(\overline{Q})$ дає рівності $\hat{\alpha}_Q(J) = \pi_f(\overline{Q}) = \overline{\pi_f(Q)}$.

Розглянемо трійку неперервних відображень $f \circ \alpha_Q : J \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{f} : \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ і $\hat{\alpha}_Q : J \rightarrow \Gamma_{K-R}(f)$.

За побудовою J зв'язна і $f \circ \alpha_Q$ строго зростає на J . фундаментальним відображення $f \circ \alpha_Q$ є вкладенням. Також множина $\hat{\alpha}_Q(J)$ є замкненою. Отже, ми знаходимося в умовах Твердження Б.7.1 і відображення $\hat{\alpha}_Q$ є замкненим. А оскільки воно неперервне і ін'єктивне, то $\hat{\alpha}_Q$ є гомеоморфізмом на свій образ $\overline{\pi_f(Q)}$.

Теорему 3.2.21 доведено.

Додаток В

Приклад до Розділу 3

Наведемо приклад функції $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яка не є К-Р – простою, але її простір $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками.

Для того, щоб означити поверхню M^2 і функцію f на ній, нам знадобиться ряд допоміжних конструкцій.

Розглянемо неперервні функції $x_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, $y^+, y^- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, див. Рис. В.0.1,

$$x_n(t) = \begin{cases} n + [t/2] + 2\{t/2\}, & \text{якщо } \{t/2\} \leq 1/2, \\ n + [t/2] + 1, & \text{якщо } \{t/2\} > 1/2, \end{cases}$$

$$y^+(t) = \begin{cases} [t/2], & \text{при } \{t/2\} \leq 1/2, \\ [t/2] + 2\{t/2\} - 1, & \text{при } \{t/2\} > 1/2, \end{cases}$$

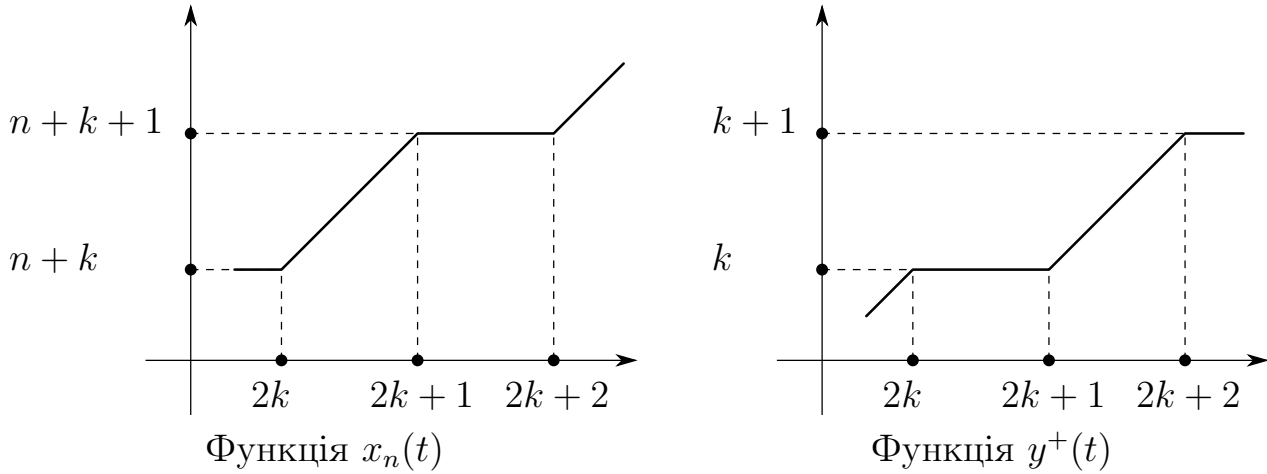
$$y^-(t) = -y^+(t).$$

Тут $[\cdot]$ і $\{\cdot\}$ позначають цілу та дробову частину числа, відповідно.

Розглянемо наступні підмножини площини \mathbb{R}^2 :

$$Z = (\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}),$$

$$Z_n^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([k+n, k+n+1] \times \{k\}) \cup (\{k+n+1\} \times [k, k+1]),$$

Рис. В.0.1: Графіки функцій $x_n(t)$ і $y^+(t)$

$$Z_n^- = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ([k+n, k+n+1] \times \{-k\}) \cup (\{k+n+1\} \times [-k-1, -k]),$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

Тут використані позначення $A \times \{s\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y = s\}$, $\{s\} \times A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = s, y \in A\}$.

Z є сіткою з вузлами, що мають цілочисельні координати. Z_n^+ і Z_n^- — “висхідні сходи” та “спадні сходи”, відповідно. Легко бачити, що $Z = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Z_n^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} Z_n^-$.

Розглянемо неперервні криві $\alpha_n^+ : \mathbb{R} \rightarrow Z_n^+$, $\alpha_n^- : \mathbb{R} \rightarrow Z_n^-$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\alpha_n^+(t) = (x_n(t), y^+(t)), \quad \alpha_n^-(t) = (x_n(t), y^-(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Безпосередньо перевіряється, що відображення α_n^+ і α_n^- є вкладеннями.

Побудуємо спочатку допоміжні поверхню \hat{M}^2 і функцію $\hat{f} : \hat{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Для цього розглянемо множину $Z \subset \mathbb{R}^2$, а також дві сім'ї замкнених напівплощин

$$B_n^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}, \quad B_n^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і функції $f_n^+ : B_n^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n^- : B_n^- \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$f_n^+(x, y) = y, \quad f_n^-(x, y) = y.$$

Позначимо

$$\begin{aligned}\partial B_n^+ &= \{(x, y) \in B_n^+ \mid y = 0\}, \\ \partial B_n^- &= \{(x, y) \in B_n^- \mid y = 0\}, \quad n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Зрозуміло, що $\partial B_n^+ = (f_n^+)^{-1}(0)$, $\partial B_n^- = (f_n^-)^{-1}(0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклеїмо кожну B_n^+ до Z за допомогою відображення $\gamma_n^+ : \partial B_n^+ \rightarrow Z_n^+ \subset Z$,

$$\gamma_n^+(x, 0) = \alpha_n^+(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Аналогічно, приклеїмо кожну B_n^- до Z за допомогою відображення $\gamma_n^- : \partial B_n^- \rightarrow Z_n^- \subset Z$,

$$\gamma_n^-(x, 0) = \alpha_n^-(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отримаємо простір \hat{M}^2 . Позначимо через $i_0 : Z \rightarrow \hat{M}^2$, $i_n^+ : B_n^+ \rightarrow \hat{M}^2$, $i_n^- : B_n^- \rightarrow \hat{M}^2$, $n \in \mathbb{Z}$, природні вкладення.

Означимо функцію $\hat{f} : \hat{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ наступним чином:

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} f_n^+((i_n^+)^{-1}(u)), & \text{якщо } u \in i_n^+(B_n^+), \\ f_n^-((i_n^-)^{-1}(u)), & \text{якщо } u \in i_n^-(B_n^-), \\ 0, & \text{якщо } u \in i_0(Z). \end{cases}$$

Безпосередньо перевіряється, що простір \hat{M}^2 є орієнтовною двовимірною поверхнею. Зокрема, справедливе наступне.

Якщо $u = i_0(r + \tau, s) \in i_0(Z)$, де $r, s \in \mathbb{Z}$, $\tau \in (0, 1)$, то

$$(r, r + 1) \times \{s\} = \alpha_{r+s}^-((-2s, -2s + 1)) = \alpha_{r-s}^+((2s, 2s + 1))$$

і окіл точки u

$$U_u = i_{r+s}^-((-2s, -2s + 1) \times (-1, 0]) \cup i_{r-s}^+((2s, 2s + 1) \times [0, 1))$$

гомеоморфний диску.

Аналогічно, якщо $u = i_0(r, s + \tau)$, де $r, s \in \mathbb{Z}$, $\tau \in (0, 1)$, то

$$\{r\} \times (s, s + 1) = \alpha_{r+s}^-((-2s - 1, -2s)) = \alpha_{r-s-1}^+((2s + 1, 2s + 2))$$

і оточення точки u

$$U_u = i_{r+s}^-((-2s - 1, -2s) \times (-1, 0]) \cup i_{r-s-1}^+((2s + 1, 2s + 2) \times [0, 1))$$

гомеоморфний диску.

Нарешті, якщо $u = i_0(r, s)$, де $r, s \in \mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned} \{r\} \times (s, s + 1) \cup (r, r + 1) \times \{s\} &= \alpha_{r+s}^-((-2s - 1, -2s + 1)), \\ (r - 1, r) \times \{s\} \cup \{r\} \times (s, s + 1) &= \alpha_{r-s-1}^+((2s, 2s + 2)), \\ (r - 1, r) \times \{s\} \cup \{r\} \times (s - 1, s) &= \alpha_{r+s-1}^-((-2s, -2s + 2)), \\ \{r\} \times (s - 1, s) \cup (r, r + 1) \times \{s\} &= \alpha_{r-s}^+((2s - 1, 2s + 1)), \end{aligned}$$

і оточення

$$\begin{aligned} U_u &= i_{r+s}^-((-2s - 1, -2s + 1) \times (-1, 0]) \cup i_{r-s-1}^+((2s, 2s + 2) \times [0, 1)) \cup \\ &\cup i_{r+s-1}^-((-2s, -2s + 2) \times (-1, 0]) \cup i_{r-s}^+((2s - 1, 2s + 1) \times [0, 1)) \end{aligned}$$

гомеоморфний диску.

Функція \hat{f} коректно означена, неперервна та відповідає умовам (f.a) і (f.б). Її єдиною сингулярною множиною рівня є $\hat{f}^{-1}(0) = i_0(Z)$. Ця множина зв'язна.

Якщо $u \in i_0(Z \setminus (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}))$, то в оточенні U_u функція \hat{f} топологічно еквівалентна функції $\operatorname{Re} z$ в оточенні нуля і u є регулярною точкою \hat{f} .

Якщо $u \in i_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, то в оточенні U_u функція \hat{f} топологічно еквівалентна функції $\operatorname{Re} z^2$ в оточенні нуля і u є сідловою точкою \hat{f} .

Оскільки

$$\hat{f}^{-1}(a) = \begin{cases} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} i_n^- (\mathbb{R} \times \{a\}) & \text{при } a < 0, \\ i_0(Z) & \text{при } a = 0, \\ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} i_n^+ (\mathbb{R} \times \{a\}) & \text{при } a > 0, \end{cases}$$

то простір $\Gamma_{K-R}(\hat{f})$ є об'єднанням зліченної кількості напів-інтервалів, які мають спільний кінець $\pi_{\hat{f}} \circ i_0(Z)$.

Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$.

Задамо на просторі \hat{M}^2 наступне відношення \sim :

$$i_n^-(x, y) \sim i_{n+km}^-(x, y) \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}, y \leq 0, n, k \in \mathbb{Z};$$

$$i_n^+(x, y) \sim i_{n+km}^+(x, y) \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}, y \geq 0, n, k \in \mathbb{Z};$$

$$i_0(v, w) \sim i_0(v + km, w) \text{ для всіх } (v, w) \in Z, k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки для всіх $\tau \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$ за означенням справедливі рівності

$$\begin{aligned} i_n^-(\tau, 0) &= \gamma_n^-(\tau, 0) = i_0 \circ \alpha_n^-(\tau) = i_0(x_n(\tau), y^-(\tau)), \\ i_{n+km}^-(\tau, 0) &= i_0(x_{n+km}(\tau), y^-(\tau)) = i_0(x_n(\tau) + km, y^-(\tau)), \\ i_n^+(\tau, 0) &= \gamma_n^+(\tau, 0) = i_0 \circ \alpha_n^+(\tau) = i_0(x_n(\tau), y^+(\tau)), \\ i_{n+km}^+(\tau, 0) &= i_0(x_{n+km}(\tau), y^+(\tau)) = i_0(x_n(\tau) + km, y^+(\tau)), \end{aligned}$$

то відношення \sim визначене коректно.

Легко бачити, що \sim є відношенням еквівалентності. Отже воно породжує розбиття простору \hat{M}^2 на класи еквівалентності і визначає фактор-простір $M_m^2 = \hat{M}^2 / \sim$. Нехай $\pi_m : \hat{M}^2 \rightarrow M_m^2$ — відображення проєкції. За означенням функції \hat{f} , якщо $u_1 \sim u_2$, то $\hat{f}(u_1) = \hat{f}(u_2)$ для всіх $u_1, u_2 \in \hat{M}^2$. Тому означена і неперервна функція $f_m : M_m^2 \rightarrow \mathbb{R}$, така що $\hat{f} = f_m \circ \pi_m$.

Можна показати, що \hat{M}^2 є накрыттям простору M_m^2 і відображення π_m є локальним гомеоморфізмом. Внаслідок цього M_m^2 є двовимірною поверхнею.

Можна показати також, що M_m^2 є орієнтовною при парному m і неорієнтовною при непарному m .

Оскільки властивості (f.a) і (f.б) функції \hat{f} є локальними, то функція $f_m : M_m^2 \rightarrow \mathbb{R}$ також їм відповідає. Причому регулярними точками функції f_m є в точності проєкції регулярних точок функції \hat{f} . Всі точки $\pi_m \circ i_0(r, s)$, $(r, s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, є сингулярними.

Відмітимо, що $\pi_m \circ i_n^-(B_n^-) = \pi_m \circ i_s^-(B_s^-)$ при $n \equiv s \pmod{m}$ і $\pi_m \circ i_n^-(B_n^-) \cap \pi_m \circ i_s^-(B_s^-) = \emptyset$ при $n \not\equiv s \pmod{m}$.

Аналогічно, $\pi_m \circ i_n^+(B_n^+) = \pi_m \circ i_s^+(B_s^+)$ при $n \equiv s \pmod{m}$ і $\pi_m \circ i_n^+(B_n^+) \cap$

$\pi_m \circ i_s^+(B_s^+) = \emptyset$ при $n \not\equiv s \pmod{m}$.

Тому

$$f_m^{-1}(a) = \begin{cases} \bigcup_{n=0}^{m-1} \pi_m \circ i_n^-(\mathbb{R} \times \{a\}) & \text{при } a < 0, \\ \pi_m \circ i_0(Z) & \text{при } a = 0, \\ \bigcup_{n=0}^{m-1} \pi_m \circ i_n^+(\mathbb{R} \times \{a\}) & \text{при } a > 0, \end{cases}$$

і простір $\Gamma_{K-R}(f_m)$ є об'єднанням $2m$ напів-інтервалів із спільним кінцем $\pi_{f_m} \circ \pi_m \circ i_0(Z)$, тобто цей простір є графом з черенками.

З іншого боку, оскільки $\pi_m \circ i_0(r, s) \neq \pi_m \circ i_0(r, s + j)$, $j \in \mathbb{Z}$, то сингулярна компонента $\pi_m \circ i_0(Z)$ множини рівня $f_m^{-1}(0)$ має нескінченну кількість сингулярних точок і функція f_m не є К-Р – простою.

Додаток Г

Доведення окремих тверджень Розділу 4.

Г.1 Доведення Твердження 4.6.1

Нехай F — сингулярна компонента зв'язності множини рівня f . З означення функції загального положення слідує, що існує єдина сингулярна точка $x_0 \in F$.

Розглянемо множину $F_0 = F \setminus \{x_0\}$. Нехай H — компонента зв'язності цієї множини.

Перевіримо, що $x_0 \in \overline{H}$. За означенням H є замкненою підмножиною простору F_0 в індукованій з \mathbb{R}^2 топології. Оскільки F_0 не містить інших сингулярних точок окрім x_0 , то цей простір є локально зв'язним (з умов \mathfrak{J} слідує, що в околі кожної точки F_0 локально гомеоморфний інтервалу) і H є його відкритою підмножиною. Нехай $x_0 \notin \overline{H}$. З одного боку, $H = \overline{H} \cap F_0 = \overline{H} \cap F$ і H замкнена в F . З іншого боку, множина F_0 відкрита в F і H відкрита в F_0 за припущенням. Тому множина H відкрита в F . Отже, H є відкрито-замкненою в F , що неможливо, оскільки за означенням F є зв'язною множиною і H — її власна підмножина.

Отже, для кожної компоненти зв'язності H множини F_0 точка x_0 міститься в її замиканні.

Згідно з Твердженням 3.1.2, H є або вкладеним у \mathbb{R}^2 відкритим інтервалом, або колом. Якщо H гомеоморфна колу, то H є компактом і $\overline{H} = H \not\ni x_0$. Ми щойно довели, що таке неможливо. Отже, кожна компонента зв'язності H множини F_0 є гомеоморфним образом інтервалу.

Згідно з Зауваженням 3.2.2 і Лемою 3.2.5 має виконуватися включення $\overline{H} \subset H \cup \{x_0\}$. По доведеному $x_0 \in \overline{H}$, отже $\overline{H} = H \cup \{x_0\}$.

Нехай $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — вкладення, таке що $\alpha(\mathbb{R}) = H$. Розглянемо (див. підрозділ 3.2.1) множини

$$L' = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\alpha(-\infty, -\tau)}, \quad L'' = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\alpha(\tau, +\infty)}.$$

Лема 3.2.19 стверджує, що кожна з цих множин або порожня, або збігається з $\{x_0\}$.

Випадок $L' = L'' = \emptyset$ неможливий. Дійсно, з одного боку $H \cup L' \cup L'' = \overline{H}$ згідно Зауваженню 3.2.2. З іншого боку ми довели, що $x_0 \in \overline{H} \setminus H$.

Припустимо, що $L' = L'' = \{x_0\}$. Тоді, як легко бачити, множина \overline{H} гомеоморфна колу. За Теоремою Жордана, див. [47], це коло є межею відкритого диску W . Нехай $D = \overline{W}$. Оскільки D є компактом, то функція $f|_D$ набуває в деяких точках мінімальне і максимальне значення m та M , відповідно. З умов \mathfrak{J} слідує, що функція f не є постійною на відкритій множині W , тому $m \neq M$ і одне з цих двох значень відрізняється від $f(x_0)$. Нехай $m \neq f(x_0)$. Оскільки $\overline{H} \subset F \subset f^{-1}(f(x_0))$, то існує точка $x \in W$, така що $f(x) = m$. Тоді, очевидно, x є локальним мінімумом функції f . А це протирічить умовам \mathfrak{J} .

Отже, одна з множин L', L'' порожня, а інша збігається з $\{x_0\}$. Внаслідок цього множина H є променем, який виходить з т. x_0 і прямує до нескінченності.

Нехай $n - 1$ — кратність сингулярної точки x_0 . Тоді у деякому околі U точки x_0 функція f топологічно еквівалентна до $g(z) = \operatorname{Re} z^n$ в околі нуля. Нехай $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$ та $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі гомеоморфізми, що $h(x_0) = 0$ та $h' \circ f = g \circ h$. Зменшуючи за необхідності окіл U , ми можемо вважати, що $h(U) = U_a(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < a\}$ для деякого $a > 0$. Не обмежуючи загалу можемо вважати, що $h(U) = U_1(0)$.

Розглянемо множину

$$F_0 \cap U = (F \cap U) \setminus \{x_0\} = h^{-1}((Z_n \cap U_1(0)) \setminus \{0\}).$$

Очевидно, вона має $2n$ компонент зв'язності.

Нехай знову H є компонентою зв'язності множини F_0 . Оскільки $x_0 \in \overline{H}$, то H перетинається принаймні з однією компонентою зв'язності множини $F_0 \cap U$. Припустимо, що H перетинається з двома різними компонентами цієї множини у точках x' та x'' , відповідно.

З вибору околу U слідує, що множина $F \cap U$ лінійно зв'язна, тому існує дуга $R_0 \subset F \cap U$ з кінцями у точках x' і x'' . Зрозуміло, що $x_0 \in R_0$.

З іншого боку, існує дуга $R_1 \subset H$, яка з'єднує точки x' і x'' . Очевидно, $x_0 \notin R_1$. Легко бачити, що разом дуги R_0 і R_1 утворюють коло $S \subset F \subset f^{-1}(f(x_0))$. Як було показано вище, у внутрішності диску, межею якого є S , має міститись локальний екстремум функції f . Але це протирічить умовам \mathfrak{J} .

Зрозуміло, що кожна компонента множини $F_0 \cap U$ має міститися у деякій компоненті більшої множини F_0 . Отже $H \cap U$ — компонента зв'язності множини $F_0 \cap U$ і F_0 має рівно $2n$ компонент.

Твердження 4.6.1 доведено.

Г.2 Доведення Твердження 4.6.3

Нехай U — окіл т. x_0 , в якому f топологічно еквівалентна до функції $\operatorname{Re} z^n$ в деякому околі 0. Нехай $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$ і $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — відповідні гомеоморфізми.

Не обмежуючи загалу (див. Зауваження 4.2.1), будемо вважати, що $U \cap K_f \subset F$ і $h(U) \supset \overline{U_1(0)}$. Нехай $D = h^{-1}(\overline{U_1(0)})$.

Позначимо через V_1, \dots, V_{2n} компоненти зв'язності множини $U_1(0) \setminus h(F) = U_1(0) \setminus Z_n$. Нехай $W_i = h^{-1}(V_i)$, $i = 1, \dots, 2n$. Зрозуміло, що всі W_i зв'язні, лежать у $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ і містять x_0 у межі. Також з властивостей $\operatorname{Re} z^n$ слідує, що для половини індексів виконується співвідношення $f(W_i) \subset (-\infty, f(x_0))$, а

для іншої половини $f(W_i) \subset (f(x_0), +\infty)$.

Нехай Q_i — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, для якої $W_i \subset Q_i$. З Теорема 4.2.2, а також з монотонності f на ребрах $\Gamma_{K-R}(f)$ слідує, що вершина $v = \pi_f(F)$ є початком ребра $e_i = \pi_f(Q_i)$, якщо $f(W_i) \subset (f(x_0), +\infty)$. Також v є кінцем e_i , якщо $f(W_i) \subset (-\infty, f(x_0))$.

Наслідок 4.6.2 стверджує, що для кожної компоненти зв'язності Q множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з множиною F , виконується співвідношення $x_0 \in \overline{Q}$. Оскільки $U \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K_f) \subset \bigcup_{i=1}^{2n} Q_i$, то Q збігається з однією з множин Q_1, \dots, Q_{2n} . Отже, вершині v графа Кронрода-Ріба функції f інцидентно не більше ніж $2n$ ребер.

Для завершення доведення нам досить перевірити, що $Q_i \neq Q_j$ при $i \neq j$.

Нехай це не так і $W_i \cup W_j \subset Q_i$ при деяких $i \neq j$.

Зафіксуємо $x_i \in W_i$, $x_j \in W_j$, і з'єднаємо їх у Q_i простою неперервною кривою $\gamma : [0, 1] \rightarrow Q_i \subset \mathbb{R}^2$. Це можливо, тому що відкрита зв'язна підмножина Q_i площини є лінійно зв'язною. Відкритість Q_i слідує з наступних міркувань. Множина $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ відкрита в силу Зауваження 4.2.1, тому всі її компоненти зв'язності теж відкриті, оскільки простір \mathbb{R}^2 є локально-зв'язним (див. [47]).

Нехай $x_i = \gamma(0)$, $x_j = \gamma(1)$. Позначимо

$$t_i = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in W_i\}, \quad t_j = \inf\{t \in [t_i, 1] \mid \gamma(t) \in W_j\}.$$

За побудовою $\overline{W_i} \cap \overline{W_j} \subset K_f$, тому $\overline{W_i} \cap \overline{W_j} \cap Q_i = \emptyset$ і $t_i < t_j$. Позначимо $y_i = \gamma(t_i)$, $y_j = \gamma(t_j)$.

Не обмежуючи загалу, можемо вважати, що $\gamma(t) \notin D$ при $t \in (t_i, t_j)$. Дійсно, якщо $\gamma(\tau) \in D$ для деякого $\tau \in (t_i, t_j)$, то знайдеться $k \in \{1, \dots, 2n\}$, таке що $\gamma(\tau) \in \overline{W_k}$. Оскільки $\gamma(\tau) \in \overline{W_k} \cap Q_i$, то з відкритості множини Q_i слідує, що $W_k \cap Q_i \neq \emptyset$, внаслідок чого $W_k \subset Q_i$. За побудовою $k \notin \{i, j\}$ і замість пари областей $W_i \cup W_j \subset Q_i$ можемо розглянути $W_i \cup W_k \subset Q_i$.

Нехай $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t_i + (t_j - t_i)t)$, $t \in [0, 1]$. За побудовою $\tilde{\gamma}$ — проста неперервна крива, $\tilde{\gamma}(0) = y_i$, $\tilde{\gamma}(1) = y_j$ і $\tilde{\gamma}(t) \notin D$ при всіх $t \in (0, 1)$.

Нехай γ_i і γ_j — прямолінійні відрізки, що з'єднують в $U_1(0)$ точку 0 з $h(y_i)$ та $h(y_j)$, відповідно. Позначимо $\tilde{\gamma}_i = h^{-1} \circ \gamma_i$, $\tilde{\gamma}_j = h^{-1} \circ \gamma_j$.

Проходячи послідовно криві $\tilde{\gamma}_i$, $\tilde{\gamma}$ та $\tilde{\gamma}_j$, отримаємо просту замкнену криву μ , яка проходить через x_0 і лежить у Q_i за виключенням цієї точки. Нехай E — відкритий диск, межею якого є μ .

Позначимо $S = \text{Fr}(U_1(0)) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\tilde{S} = h^{-1}(S) = \text{Fr } D$.

Коло \tilde{S} розбивається точками y_i та y_j на дві дуги S' та S'' . Оскільки $x_0 \in \mu \cap \text{Int } D \neq \emptyset$ і $\tilde{\gamma}(1/2) \in \mu \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D) \neq \emptyset$ за побудовою, то одна з цих дуг лежить в E , інша не перетинає E .

Нехай $S' \subset E$. Кінцями цієї дуги є точки $y_i \in \overline{W}_i \cap Q_i$ та $y_j \in \overline{W}_j \cap Q_i$. Точки $h(y_i)$ та $h(y_j)$ містяться в різних секторах множини $\overline{U_1(0)} \setminus Z_n$. З виду функції $\text{Re } z^n$ в околі 0 легко слідує, що дуга $h(S')$ містить точки множини $h(F) = h(U) \cap Z_n$. Відповідно, $S' \cap F \neq \emptyset$. Наприклад $F \cap \text{Fr } W_i \cap S' \neq \emptyset$ і $F \cap \text{Fr } W_j \cap S' \neq \emptyset$. Тому існує $x' \in F \cap E$. Очевидно, $x' \neq x_0$.

З Твердження 4.6.1 слідує, що існує промінь $\beta : [0, +\infty) \rightarrow F \subset \mathbb{R}^2$, який виходить з т. $x_0 = \beta(0)$, проходить через точку x' при деякому $t' > 0$ і прямує на нескінченність. За побудовою μ перетинається з F в єдиній точці x_0 , тому $\beta(t) \in E$ для кожного $t > 0$, що неможливо, оскільки множина \overline{E} компактна.

Внаслідок отриманої суперечності при $i \neq j$ виконується нерівність $Q_i \neq Q_j$.

Твердження 4.6.3 доведено.

Г.3 Доведення Наслідку 4.6.5

Нехай $U \subset F_x \cup (\mathbb{R}^2 \setminus K_f)$ — окіл т. x_0 , в якому f орієнтовано топологічно еквівалентна до функції $\text{Re } z^n$ в деякому околі 0. Нехай $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$ і $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — відповідні гомеоморфізми.

Не обмежуючи загалу будемо вважати, що $h(U) = U_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Позначимо через V_1, \dots, V_{2n} компоненти зв'язності множини $U_1(0) \setminus h(F_x) = U_1(0) \setminus Z_n$ в порядку обходу в додатному напрямку навколо початку координат. Нехай $W_i = h^{-1}(V_i)$, $i = 1, \dots, 2n$.

Позначимо через T_1, \dots, T_{2n} компоненти зв'язності множини $U_1(0) \cap (Z_n \setminus 0) = h(U \cap (F_x \setminus \{x\}))$ таким чином, щоб компонента T_i лежала у спільній межі

V_i та V_{i+1} , а T_{2n} — у спільній межі V_{2n} та V_1 . Нехай $R_i = h^{-1}(T_i)$, $i = 1, \dots, 2n$.

Нехай H_1, \dots, H_{2n} — компоненти множини $F_x \setminus \{x\}$. З Твердження 4.6.1 слідує, що кожна з них містить рівно одну з множин R_1, \dots, R_{2n} . Змінивши нумерацію множин H_i , можемо вважати, що $R_i = H_i \cap U$, $i = 1, \dots, 2n$.

Аналогічно, застосовуючи Твердження 4.6.3 можемо вважати, що для компонент Q_1, \dots, Q_{2n} множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, які межують з F_x , виконуються співвідношення $W_i = Q_i \cap U$, $i = 1, \dots, 2n$.

Розглянемо Q_k для деякого $k \in \{2, \dots, 2n\}$. Оскільки U є відкритою множиною, легко бачити, що $\overline{Q_k} \cap U = \overline{W_k} \cap U \supset R_{k-1} \cup R_k$ і $\overline{Q_k} \cap R_m = \emptyset$ при $n \notin \{k-1, k\}$. Тому з Наслідка 4.6.2 слідує, що $H_{k-1} \cup H_k \subset \overline{Q_k}$ і $H_m \cap \overline{Q_k} = \emptyset$ при $m \notin \{k-1, k\}$.

Аналогічно, коли $k = 1$ маємо $H_{2n} \cup H_1 \subset \overline{Q_1}$ і $H_m \cap \overline{Q_1} = \emptyset$ при $m \notin \{1, 2n\}$.

Внаслідок цього для довільної компоненти Q множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з F_x , існують дві компоненти H' і H'' множини $F_x \setminus \{x\}$, такі що $\overline{Q} \cap F_x = H' \cup H'' \cup \{x\}$.

Позначимо $v = \pi_f(F_x)$, $e_i = \pi_f(Q_i)$, $i = 1, \dots, 2n$. З вибору множин $W_i = Q_i \cap U$ слідує, що $\triangleleft v = (e_1, \dots, e_{2n})$.

Розглянемо H_k для деякого $k \in \{1, \dots, 2n-1\}$. По вже доведеному $H_k \subset \overline{Q_k} \cap \overline{Q_{k+1}}$ і $H_k \cap \overline{Q_m} = \emptyset$ при $m \notin \{k, k+1\}$. Очевидно, ребра e_k і e_{k+1} є сусідніми у циклі $\triangleleft v$.

Аналогічно, коли $k = 2n$ маємо $H_{2n} \subset \overline{Q_{2n}} \cap \overline{Q_1}$ і $H_{2n} \cap \overline{Q_m} = \emptyset$ при $m \notin \{1, 2n\}$. Ребра e_{2n} і e_1 є сусідніми у циклі $\triangleleft v$.

Для завершення доведення лишається зауважити, що для кожної компоненти зв'язності H множини $F_x \setminus \{x\}$ виконується співвідношення $H \in \{H_1, \dots, H_{2n}\}$.

Наслідок 4.6.5 доведено.

Г.4 Доведення Теорема 4.8.1

Для доведення теореми нам будуть потрібні наступні три леми.

Лема Г.4.1 *Нехай f – функція загального положення, що відповідає умовам \mathfrak{J} .*

Нехай Q – компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$.

Тоді знайдеться гомеоморфізм $\phi : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times f(\bar{Q}) \subset \mathbb{R}^2$, такий що $f = \text{pr}_2 \circ \phi$ (тут $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – проекція на другу координату).

Доведення. З умов \mathfrak{J} , а також з Твердження 3.2.14 і Наслідку 3.2.20 слідує, що

$$f(Q) = \text{Int } f(\bar{Q}), \quad f(\text{Fr } Q) = f(\bar{Q}) \cap \text{Fr } f(Q). \quad (\text{Г.4.1})$$

Множина \bar{Q} , а разом з нею і множина $f(\bar{Q})$ зв'язні. Тому існують $a, b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ такі, що $f(Q) = (a, b)$, $f(\text{Fr } Q) \subset \{a, b\} \cap \mathbb{R}$.

Якщо $a \in f(\text{Fr } Q)$, то $|a| < \infty$ і згідно з Наслідком 3.2.20, існує сингулярна компонента F_a множини рівня $f^{-1}(a)$, така що $f^{-1}(a) \cap \bar{Q} \subset F_a$.

З Наслідку 4.6.5 слідує, що $H_a = \bar{Q} \cap f^{-1}(a)$ є об'єднанням сингулярної точки і двох променів, що виходять з цієї точки і прямують на нескінченність. З цього і з теореми Жордана про криву легко слідує, що множина H_a гомеоморфна \mathbb{R} і розбиває площину на дві компоненти зв'язності, замикання кожної з яких гомеоморфне замкненій півплощині. H_a є спільною межею цих двох компонент.

Аналогічно, якщо $b \in f(\text{Fr } Q)$, то $|b| < \infty$ і існує сингулярна компонента F_b рівня $f^{-1}(b)$, яка містить множину $H_b = f^{-1}(b) \cap \bar{Q}$. Множина H_b гомеоморфна \mathbb{R} і розбиває \mathbb{R}^2 на дві півплощини, для яких H_b є спільною межею.

Таким чином, маємо три можливості.

1) $f(\text{Fr } Q) = \emptyset$. Тоді $\text{Fr } Q = \emptyset$ і Q є відкрито-замкненою підмножиною \mathbb{R}^2 . Тому $Q = \mathbb{R}^2$ і f не має сингулярних точок у \mathbb{R}^2 . Наслідок 3.2.17 стверджує, що для кожного $x \in Q$ множина $f^{-1}(f(x)) \cap Q$ зв'язна. Внаслідок цього можемо застосувати Теорему 1 з [28], що й доводить Лему у даному випадку.

2) Множина $f(\text{Fr } Q)$ не порожня і зв'язна. Тоді або $\text{Fr } Q = H_a$, або $\text{Fr } Q = H_b$.

Нехай $\text{Fr } Q = H_a$. У цьому випадку Q є одною з двох компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus H_a$. Позначимо іншу компоненту Q_a . Позначимо також через $x_0 \in H_a \subset F_a$ сингулярну точку функції f .

Зафіксуємо гомеоморфізм $\chi : \overline{Q_a} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, a]$. Розглянемо неперервну функцію $f_a = \text{pr}_2 \circ \chi : \overline{Q_a} \rightarrow \mathbb{R}$. За побудовою $f(x) = f_a(x)$ на множині $\overline{Q} \cap \overline{Q_a}$, а тому функція $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, означена за допомогою формули

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q}, \\ f_a(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q_a}, \end{cases}$$

буде неперервною на \mathbb{R}^2 .

Зрозуміло, що для кожного $x \in \mathbb{R}^2 \setminus H_a$ у деякому околі точки x функція g топологічно еквівалентна до координатної проекції pr_2 .

Також для кожного $x \in H_a$ у деякому околі точки x у просторі $\overline{Q_a}$ функція f_a орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі точки 0 у просторі $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$.

З першої умови \mathfrak{J} слідує, що для кожного $x \in H_a \setminus \{x_0\}$ функція f у деякому околі точки x орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі 0 у \mathbb{R}^2 . Оскільки за побудовою $f(y) > f(x)$ для кожного $y \in Q$, то функція $f|_{\overline{Q}}$ у околі x орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі 0 у просторі $[0, +\infty)$.

Внаслідок цього для кожного $x \in H_a \setminus \{x_0\}$ функція g топологічно еквівалентна до pr_2 .

Існує окіл U_0 точки x_0 , в якому f топологічно еквівалентна до $g_n = \text{Re } z^n$ в околі 0 . Нехай $h : U_0 \rightarrow h(U_0) \subset \mathbb{C}$ і $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — відповідна пара гомеоморфізмів, для яких $g_n \circ h = h' \circ f$.

З Тверджень 4.6.1 і 4.6.3 слідує, що образ $h(U_0 \cap \overline{Q})$ збігається з перетином $h(U_0)$ і замикання одного з секторів V , що є компонентою зв'язності множини $\mathbb{C} \setminus Z_n = \mathbb{C} \setminus g_n^{-1}(0)$. Тому на множині $h(U_0 \cap \overline{Q})$ означене неперервне відображення $\hat{h}(z) = \sqrt[n]{z}$, яке відображає V на півплощину. Нехай іще $\hat{h}'(t) = \text{Sign } t \cdot \sqrt[n]{|t|}$.

Легко бачити, що пара відображень $\hat{h} \circ h$ і $\hat{h}' \circ h'$ реалізує орієнтовану топологічну еквівалентність функції $f|_{\overline{Q}}$ в околі $U_0 \cap \overline{Q}$ точки x_0 до функції pr_2 у деякому околі 0 в просторі $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Внаслідок цього в околі точки x_0 функція f також топологічно еквівалентна до pr_2 .

За побудовою $g^{-1}(t) = f^{-1}(t) \cap Q$ при $t \in (a, b)$. Тому множина $g^{-1}(t)$ зв'язна при $t > a$, див. Наслідок 3.2.17. Аналогічно, $g^{-1}(t) = \chi^{-1}(\mathbb{R} \times \{t\})$ при $t \leq a$, тому множина $g^{-1}(t)$ зв'язна також при $t \leq a$.

Отже, ми можемо застосувати Теорему 1 з [28] до функції g .

Отримаємо гомеоморфізм $\phi_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, b)$, такий що $g = \text{pr}_2 \circ \phi_0$. Тоді обмеження $\phi_1 = \phi_0|_{\overline{Q}} : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, b)$ є вкладенням і $\phi_1(\overline{Q}) = [a, b)$. Тому ϕ_1 індукує гомеоморфізм $\phi : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b)$, $\phi(x) = \phi_1(x)$, $x \in \overline{Q}$, який відповідає вимогам Лема.

3) $f(\text{Fr } Q) = \{a, b\}$. Тоді $\text{Fr } Q = H_a \cup H_b$, множини $H_a \subset F_a$ і $H_b \subset F_b$ гомеоморфні \mathbb{R} і кожна з них розбиває \mathbb{R}^2 на дві півплощини. Позначимо через Q_a і Q_b ті компоненти зв'язності множин $\mathbb{R}^2 \setminus H_a$ і $\mathbb{R}^2 \setminus H_b$ відповідно, які не перетинаються з Q . Оскільки $H_a \subset f^{-1}(a)$, $H_b \subset f^{-1}(b)$, то $H_a \cap H_b = \emptyset$ і $\mathbb{R}^2 = \overline{Q}_a \cup \overline{Q} \cup \overline{Q}_b$, причому $\overline{Q}_a \cap \overline{Q} = H_a$, $\overline{Q}_b \cap \overline{Q} = H_b$.

Зафіксуємо гомеоморфізми $\chi_a : \overline{Q}_a \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, a]$ та $\chi_b : \overline{Q}_b \rightarrow \mathbb{R} \times [b, +\infty)$. Розглянемо неперервні функції $f_a = \text{pr}_2 \circ \chi_a : \overline{Q}_a \rightarrow \mathbb{R}$ і $f_b = \text{pr}_2 \circ \chi_b : \overline{Q}_b \rightarrow \mathbb{R}$. Очевидно, $f_a|_{H_a} = f|_{H_a}$ і $f_b|_{H_b} = f|_{H_b}$, тому коректно означена функція $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f_a(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q}_a, \\ f(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q}, \\ f_b(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q}_b. \end{cases}$$

Оскільки замкнені множини \overline{Q}_a , \overline{Q} і \overline{Q}_b утворюють скінченне замкнене покриття \mathbb{R}^2 і на кожній з них g неперервна, то g неперервна на \mathbb{R}^2 .

Міркування, аналогічні до наведених у попередньому випадку, доводять наступне. По перше, у деякому околі кожної точки площини функція g топологічно еквівалентна до координатної проекції. По друге, всі множини рівня g зв'язні.

Отже, можемо застосувати Теорему 1 з [28] до g .

Як і раніше, отримаємо гомеоморфізм $\phi_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такий що $g = \text{pr}_2 \circ \phi_0$. Тоді обмеження $\phi_1 = \phi_0|_{\overline{Q}} : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R}^2$ індукує гомеоморфізм $\phi : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b] = \phi_1(\overline{Q})$, який відповідає вимогам Лема.

Лему Г.4.1 доведено. \square

Зауваження Г.4.2 За рахунок додаткової підкрутки за допомогою відображення $\mathcal{I} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{I}(x, y) = (-x, y)$, завжди можна добитися щоб гомеоморфізм ϕ з Лема Г.4.1 був орієнтований.

Лема Г.4.3 Нехай f є функцією загального положення, що задовольняє умові \mathfrak{J} . Тоді її граф Кронрода-Ріба є деревом з черенками.

Доведемо спочатку одне допоміжне твердження.

Твердження Г.4.4 Нехай G є локально скінченним топологічним графом, V_0 — підмножина множини V_{ter} термінальних вершин G . Нехай $H = G \setminus V_0$ — граф з черенками.

Якщо H не містить циклів, то G є деревом.

Доведення. Нехай існує цикл

$$C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = v_0)$$

в G . Тут v_i , $i = 0, \dots, n$, — вершини, e_j — ребра, v_{j-1} та v_j інцидентні ребру e_j , $j = 1, \dots, n$.

Тоді $v_i \notin V_{ter}$ для кожного i . Отже, $v_i \notin V_0$ і $v_i \in H$, $i = 0, \dots, n$. Внаслідок цього цикл C міститься в H .

З наведених аргументів слідує, що якщо в H немає циклів, то й G не містить циклів. \square

Доведення Лема Г.4.3. Припустимо, що в $\Gamma_{K-R}(f)$ існує простий (без самоперетинів) цикл

$$C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = v_0).$$

Тут v_i — вершини, e_j — відкриті ребра простору $\Gamma_{K-R}(f)$, такі що $v_{j-1}, v_j \in \bar{e}_j$, $j = 1, \dots, n$.

Нагадаємо, що через K_f ми позначили об'єднання сингулярних компонентів рівня функції f . Нехай $F_i = \pi_f^{-1}(v_i)$ — відповідні сингулярні компоненти рівнів f , $Q_j = \pi_f^{-1}(e_j)$ — компоненти зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$.

З Теорема 4.2.2, Твердження 4.6.1 і Наслідку 4.6.4 слідує, що кожна компонента множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$ містить прообраз рівно одного відкритого ребра графа $\Gamma_{K-R}(f)$, яке інцидентне вершині v_0 .

Тому множини Q_1 і Q_n належать до різних компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$.

Розглянемо множину

$$C_0 = \bigcup_{i=1}^{n-1} v_i \cup \bigcup_{j=1}^n e_j$$

і її прообраз

$$\pi_f^{-1}(C_0) = \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i \cup \bigcup_{j=1}^n Q_j.$$

Очевидно, множина C_0 зв'язна. Перевіримо, що множина $\pi_f^{-1}(C_0)$ теж зв'язна.

Нехай $s \in \{1, \dots, n-1\}$. З Теорема 4.2.2 слідує, що існують точки $x_s \in \overline{Q_s} \cap F_s$ і $y_s \in \overline{Q_{s+1}} \cap F_s$. Множини Q_s , F_s , Q_{s+1} зв'язні, тому зв'язні також множини $Q_s \cup \{x_s\} \subset \overline{Q_s}$, $Q_{s+1} \cup \{y_s\} \subset \overline{Q_{s+1}}$. Отже, зв'язна і множина

$$W_s = Q_s \cup F_s \cup Q_{s+1} = (Q_s \cup \{x_s\}) \cup F_s \cup (Q_{s+1} \cup \{y_s\}).$$

Множина $\pi_f^{-1}(C_0) = \bigcup_{s=1}^{n-1} W_s$ теж зв'язна внаслідок того, що $W_s \cap W_{s+1} \supset Q_{s+1} \neq \emptyset$, $s = 1, \dots, n-2$.

Помітимо, що $\pi_f^{-1}(C_0) \cap F_0 = \emptyset$, оскільки $W_s \cap F_0 = \emptyset$ для кожного $s = 1, \dots, n-1$. Але $Q_1 \cup Q_n \subset \pi_f^{-1}(C_0)$ і зв'язна множина $\pi_f^{-1}(C_0)$ має перетинатись принаймні з двома різними компонентами множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$.

Отримана суперечність доводить, що $\Gamma_{K-R}(f)$ не містить циклів. Отже, $\Gamma_{K-R}(f)$ є деревом з черенками внаслідок Твердження Г.4.4.

Лему Г.4.3 доведено. \square

Розглянемо наступну конструкцію. Нехай $a < b$ і $c < d$ — деякі дійсні числа, $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $\chi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ — неперервні відображення. Нехай $\hat{\chi} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$,

$$\hat{\chi}(t) = \frac{\chi(t) - c}{d - c}, \quad t \in [a, b],$$

є композицією χ і афінного відображення відрізка $[c, d]$ на $[0, 1]$.

Розглянемо відображення $\Phi : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d]$,

$$\Phi(x, y) = (\alpha(x)(1 - \hat{\chi}(y)) + \beta(x)\hat{\chi}(y), \chi(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b]. \quad (\text{Г.4.2})$$

З неперервності α , β і χ слідує, що Φ неперервне.

Лема Г.4.5 *Нехай відображення α , β і χ є сюр'єктивними і строго зростають.*

Тоді Φ є гомеоморфізмом, зберігає орієнтацію і відображає горизонтальні прямі на горизонтальні прямі.

Доведення цієї леми ми лишаємо читачу.

Перейдемо безпосередньо до доведення **Теорема 4.8.1**.

Необхідність. Нехай існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, який відображає компоненти множин рівня f на компоненти множин рівня g . Відомо, що образ зв'язної множини під дією неперервного відображення зв'язний. Внаслідок того, що h і h^{-1} бієктивні та неперервні, образами різних компонент є різні компоненти.

Отже, означене бієктивне неперервне фактор-відображення $\eta : \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \Gamma_{K-R}(g)$ просторів Кронрода-Ріба. Зрозуміло, що гомеоморфізм h^{-1} породжує фактор-відображення, обернене до η . Тому η є гомеоморфізмом.

Нехай $x \in \mathbb{R}^2$, F_x — компонента множини рівня функції f , яка містить x . З умов \mathfrak{J} слідує, що порядок $\text{ord}_x(F_x)$ топологічного простору F_x у точці x більше 2 тоді й тільки тоді, коли x є сингулярною точкою f (див. [47]). Внаслідок цього множини Σ_g і K_g сингулярних точок і сингулярних компонент зв'язності множин рівня g є образами відповідних множин Σ_f і K_f , які відносяться до функції f .

Зі сказаного слідує, що η відображає множину вершин графа з черенками $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину вершин $\Gamma_{K-R}(g)$.

Зрозуміло, що h відображає компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ на компоненти множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$. Тому з Теорема 4.2.2 слідує, що η є ізоморфізмом графів з черенками.

Нехай h зберігає орієнтацію на площині. За умовами Теорема f і g є функціями загального положення, тому кожна їх сингулярна компонента лінії рівня містить рівно одну сингулярну точку. Отже множини Σ_f і Σ_g знаходяться у бієктивній відповідності з множинами вершин графів з черенками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$.

Оскільки h зберігає порядок обходу навколо точок площини, то η відображає спін у кожній вершині $\Gamma_{K-R}(f)$ на спін в образі цієї вершини, а отже η є еквівалентність графів зі спінами.

До сих пір ми не згадували про орієнтацію ребер. Нехай $\Gamma_{K-R}(g)$ — граф з черенками функції g , у кожній вершині якого задано спін. Нехай e — деяке ребро цього графа. Тоді орієнтація всіх ребер $\Gamma_{K-R}(g)$, що породжена напрямком зростання функції g_{K-R} , однозначно відновлюється по орієнтації ребра e . Перевіримо це.

Якщо ребро e інцидентне деякій вершині v , ми можемо скористатися Наслідком 4.6.4 і маючи спін $\langle v$ відновити орієнтацію всіх ребер, що інцидентні v .

Нехай e' — інше ребро $\Gamma_{K-R}(g)$. Зафіксуємо шлях

$$P(e, e') = (e = e_1, \dots, e_n = e'),$$

який з'єднує e і e' . Нехай він послідовно проходить через вершини v_1, \dots, v_{n-1} (v_i є спільним кінцем ребер e_i та e_{i+1}). За допомогою спінів $\langle v_1, \dots, \langle v_{n-1}$ ми можемо послідовно відновити орієнтації ребер $e_2, \dots, e_n = e'$. Згідно з Лемою Г.4.3 $\Gamma_{K-R}(g)$ є деревом з черенками, тому шлях $P(e, e')$, який з'єднує e і e' визначений однозначно. Отже, орієнтація ребра e' залежить тільки від орієнтації ребра e .

Внаслідок сказаного на графі зі спінами $\Gamma_{K-R}(g)$ можливі рівно дві різних орієнтації ребер.

Очевидно, функція $-g$ відповідає умовам \mathfrak{J} і є функцією загального положення. Слабо навантажені графи Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(g)$ і $\Gamma_{K-R}(-g)$ ізоморфні як графи з черенками, мають однакові спіни у відповідних вершинах і відрізняються тільки орієнтацією ребер. Оскільки η є еквівалентністю графів

зі спінами, то це відображення індукує еквівалентність слабо навантаженого графа Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ до $\Gamma_{K-R}(g)$, або $\Gamma_{K-R}(-g)$.

Це доводить необхідність твердження Теореми для орієнтовано пошарово еквівалентних функцій f і g .

Нехай функції f та g орієнтовано топологічно еквівалентні, тобто існують гомеоморфізми $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ та $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що зберігають орієнтацію і такі, що $k \circ f = g \circ h$. Тоді гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ відображає множини рівня функції f на множини рівня g . Зрозуміло, що будучи бієктивним, h відображає компоненти множин рівня f на компоненти множин рівня g . Отже f і g орієнтовано пошарово еквівалентні, внаслідок чого слабо навантажений граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ еквівалентний до $\Gamma_{K-R}(g)$, або $\Gamma_{K-R}(-g)$.

Нехай як і вище $\eta : \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \Gamma_{K-R}(g)$ є фактор-відображенням гомеоморфізму h відносно проєкцій π_f і π_g . Тоді виконується рівність

$$k \circ f_{K-R} = g_{K-R} \circ \eta. \quad (\text{Г.4.3})$$

Враховуючи що функція k монотонно зростає легко бачити, що η зберігає напрямок зростання індукованої функції на ребрах графа Кронрода-Ріба. Отже, слабо навантажений граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ еквівалентний до $\Gamma_{K-R}(g)$.

Зрозуміло, що η індукує бієктивне відображення множини $V_{virt}(f)$ віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину $V_{virt}(g)$ віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(g)$. Щоб не нагромаджувати позначень, ми його теж будемо позначати η .

Нехай e — ребро $\Gamma_{K-R}(f)$, $\tilde{e} = \eta(e)$ — відповідне йому ребро $\Gamma_{K-R}(g)$. Нехай як і раніше

$$\begin{aligned} m(e) &= \inf_{x \in e} f_{K-R}(x), & M(e) &= \sup_{x \in e} f_{K-R}(x), \\ m(\tilde{e}) &= \inf_{x \in \tilde{e}} g_{K-R}(x), & M(\tilde{e}) &= \sup_{x \in \tilde{e}} g_{K-R}(x). \end{aligned}$$

Функція k монотонно зростає, тому $m(\tilde{e}) = k \circ m(e)$ і $M(\tilde{e}) = k \circ M(e)$. Отже на множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ (включаючи віртуальні) виконується рівність $k \circ f_{lim} = g_{lim} \circ \eta$.

Враховуючи те, що $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є гомеоморфізмом, маємо $\eta(V_{fin}(f)) = V_{fin}(g)$. Отже $\eta(V_{ext}(f)) = V_{ext}(g)$ і η індукує ізоморфізм розширених відношень порядку на розширених множинах вершин.

Це доводить необхідність твердження Теорема для орієнтовано топологічно еквівалентних функцій f і g .

Достатність. Розглянемо дві функції $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ та $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Будемо вважати, що для слабо навантажених графів Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$, $\Gamma_{K-R}(g)$ цих функцій заданий комбінаторний ізоморфізм ψ , що зберігає спіни.

Нехай K_f і K_g - множини сингулярних компонент зв'язності рівнів функцій f та g відповідно.

Візьмемо вершину $v \in \Gamma_{K-R}(f)$ і відповідну вершину $w = \psi(v) \in \Gamma_{K-R}(g)$. Нехай $F_v = \pi_f^{-1}(v)$ і $\widetilde{F}_w = \pi_g^{-1}(w)$ — сингулярні компоненти множин рівня f і g , які відповідають вершинам v і w .

Побудуємо гомеоморфізм $h_v^0 : F_v \rightarrow \widetilde{F}_w$, такий, що для будь-якої компоненти доповнення $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$, якій відповідає ребро e графа $\Gamma_{K-R}(f)$, виконується рівність

$$h_v^0(\text{Fr } U \cap F_v) = \text{Fr } \widetilde{U} \cap \widetilde{F}_w, \quad (\text{Г.4.4})$$

де \widetilde{U} — компонента доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$, якій відповідає ребро $\psi(e)$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$.

Оскільки f є функцією загального положення, то множина F_v містить єдину сингулярну точку x_v функції f . Аналогічно, \widetilde{F}_w містить єдину сингулярну точку \widetilde{x}_w функції g . З Твердження 4.6.3 слідує, що кратності x_v і \widetilde{x}_w збігаються. Нехай вони дорівнюють $n - 1$ для деякого $n > 1$. Тоді з Твердження 4.6.1 випливає, що кожна з множин F_v і \widetilde{F}_w складається з сингулярної точки і $2n$ променів, що з неї виходять і прямують на нескінченність.

Нехай $\triangleleft v = (e_1, \dots, e_{2n})$. Позначимо через $Q_i = \pi_f^{-1}(e_i)$, $i = 1, \dots, 2n$, компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, які межують з F_v . Скористаємось Наслідком 4.6.5 і оберемо нумерацію компонент зв'язності множини $F_v \setminus \{x_v\}$ так, щоб компонента H_i містилась у $\text{Fr } Q_i \cap \text{Fr } Q_{i+1}$ при $i = 1, \dots, 2n - 1$, а також $H_{2n} \subset \text{Fr } Q_{2n} \cap \text{Fr } Q_1$.

За попереднім припущенням $\triangleleft w = (\psi(e_1), \dots, \psi(e_{2n}))$. Позначимо $\widetilde{Q}_i =$

$\pi_f^{-1}(\psi(e_i))$, $i = 1, \dots, 2n$, — компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$, які межують з \widetilde{F}_w . Знову Наслідок 4.6.5 гарантує нам можливість обрати нумерацію компонент зв'язності множини $\widetilde{F}_w \setminus \{\widetilde{x}_w\}$ так, щоб компонента \widetilde{H}_i містилась у $\text{Fr } \widetilde{Q}_i \cap \text{Fr } \widetilde{Q}_{i+1}$ при $i = 1, \dots, 2n - 1$, а також $\widetilde{H}_{2n} \subset \text{Fr } \widetilde{Q}_{2n} \cap \text{Fr } \widetilde{Q}_1$.

Для кожного $i = 1, \dots, 2n$ зафіксуємо гомеоморфізм

$$h_{v, H_i}^0 : \{x_v\} \cup H_i \rightarrow \{\widetilde{x}_w\} \cup \widetilde{H}_i$$

променя $\overline{H}_i = \{x_v\} \cup H_i$ на промінь $\widetilde{\overline{H}}_i = \{\widetilde{x}_w\} \cup \widetilde{H}_i$.

Зрозуміло, що $h_{v, H_i}^0(x_v) = \widetilde{x}_w$, а також $\overline{H}_i \cap \overline{H}_j = \{x_v\}$ при $i \neq j$. Тому коректно означене відображення $h_v^0 : F_v \rightarrow \widetilde{F}_w$,

$$h_v^0(x) = h_{v, H_i}^0(x), \quad \text{якщо } x \in \overline{H}_i, \quad i \in \{1, \dots, 2n\}.$$

Набір множин $\{\overline{H}_i\}$ утворює скінченне замкнене покриття F_v , отже відображення h_v^0 неперервне. З того, що всі h_{v, H_i}^0 є гомеоморфізмами слідує, що означене і неперервне обернене відображення $(h_v^0)^{-1}$. Отже, h_v^0 є гомеоморфізмом.

За побудовою $H_{i-1} \cup H_i \cup \{x_v\} = \text{Fr } Q_i$, $i = 2, \dots, 2n$, також $H_{2n} \cup H_1 \cup \{x_v\} = \text{Fr } Q_{2n}$ (див. Наслідки 4.6.2 і 4.6.5). Аналогічно, $\widetilde{H}_{i-1} \cup \widetilde{H}_i \cup \{\widetilde{x}_w\} = \text{Fr } \widetilde{Q}_i$, $i = 2, \dots, 2n$, також $\widetilde{H}_{2n} \cup \widetilde{H}_1 \cup \{\widetilde{x}_w\} = \text{Fr } \widetilde{Q}_{2n}$. Тому виконується співвідношення (Г.4.4).

Нагадаємо, що за означенням множини K_f і K_g є прообразами множин вершин графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ відносно проєкцій π_f і π_g , відповідно. Тому означене відображення $h^0 : K_f \rightarrow K_g$,

$$h^0(x) = h_{\pi_f(x)}^0(x).$$

Множини F_v , $v \in \pi_f(K_f)$, попарно не перетинаються, є замкненими і їх скінченне число (див. Зауваження 4.2.1). Те ж стосується і їх образів відносно h^0 . Звуження h^0 на кожному з множин F_v є гомеоморфізмом на свій образ $\widetilde{F}_{\psi(v)}$. Тому відображення h^0 є гомеоморфізмом.

Зараз ми продовжимо h^0 до відображення $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, яке компонентам зв'язності множин рівня функції f ставить у відповідність компоненти

множин рівня g .

Позначимо через \mathcal{Q}_f і \mathcal{Q}_g множини, елементами яких є компоненти зв'язності множин $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ і відповідно $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$.

Нехай $Q \in \mathcal{Q}_f$, $e = \pi_f(Q)$ — відповідне ребро $\Gamma_{K-R}(f)$. Згідно до Лема Г.4.1 і Зауваження Г.4.2 існує гомеоморфізм $\phi : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times f(\bar{Q})$, який зберігає орієнтацію і такий що $f = \text{pr}_2 \circ \phi$.

Нехай $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_g$, для якої $\pi_g(\tilde{Q}) = \psi(e)$. Тоді існує гомеоморфізм $\tilde{\phi} : \tilde{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times g(\tilde{Q})$, який зберігає орієнтацію і такий що $g = \text{pr}_2 \circ \tilde{\phi}$.

Множина $f(Q) = f_{K-R}(e)$ зв'язна. Зі співвідношень (Г.4.1) слідує, що множина $f(\bar{Q})$ гомеоморфна інтервалу, півінтервалу або відрізка, $f(Q) = \text{Int } f(\bar{Q})$ гомеоморфна відкритому інтервалу.

Нагадаємо, що f_{K-R} строго монотонна на ребрі e . Тому якщо $f(\bar{Q})$ містить кінець інтервала $f(Q)$, він відповідає вершині графа $\Gamma_{K-R}(f)$, яка інцидентна ребру e . Якщо не містить, то кінець інтервала відповідає віртуальній вершині.

Аналогічне справедливо і для множин $g(\tilde{Q})$ та $g(\tilde{\bar{Q}})$.

Оскільки ізоморфізм ψ зберігає орієнтації ребер і відображає множину віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(g)$, то зі сказаного вище слідує, що існує строго зростаюче бієктивне відображення $\chi : f(\bar{Q}) \rightarrow g(\tilde{\bar{Q}})$.

Отже, нехай $a, b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$, $a < b$, $f(Q) = (a, b)$, $f(\text{Fr } Q) \subset \{a, b\} \cap \mathbb{R}$. Нехай також $c, d \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$, $c < d$, $g(\tilde{Q}) = (c, d)$, $g(\text{Fr } \tilde{Q}) \subset \{c, d\} \cap \mathbb{R}$.

Множина $f(\text{Fr } Q)$ може мати не більше двох елементів. Розглянемо всі можливі випадки.

(а) Припустимо, що $\text{Fr } Q = \emptyset$. Тоді обидва кінці ребра $e = \pi_f(Q)$ віртуальні. Внаслідок цього $\text{Fr } \tilde{Q} = \emptyset$, $\Gamma_{K-R}(f) = e$, $\Gamma_{K-R}(g) = \psi(e)$, $Q = \tilde{Q} = \mathbb{R}^2$ (див. доведення Лема Г.4.1).

Розглянемо відображення

$$\Phi = id \times \chi : \mathbb{R} \times f(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \times g(\mathbb{R}^2).$$

Тут $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — тотожне відображення. Зрозуміло, що Φ є гомеоморфізмом

і зберігає орієнтацію. Тому і

$$h = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi$$

має подібні властивості.

Очевидно, ϕ відображає компоненти зв'язності множин рівня f на горизонтальні прямі, а $\tilde{\phi}^{-1}$ відображає горизонтальні прямі на компоненти множин рівня g . Тому h задає пошарову еквівалентність f і g .

(b) Нехай множина $f(\text{Fr } Q)$ містить рівно один елемент. Тоді з Наслідку 3.2.20 слідує, що множина $\text{Fr } Q$ зв'язна, отже існує єдина компонента зв'язності F_v множини K_f , така що $F_v \cap \overline{Q} \neq \emptyset$. Тут v — вершина $\Gamma_{K-R}(f)$, для якої $F_v = \pi_f^{-1}(v)$.

Тоді множина $g(\text{Fr } \tilde{Q})$ теж містить один елемент. Отже, для вершини $w = \psi(v)$ і відповідної компоненти зв'язності $\tilde{F}_w = \pi_g^{-1}(w)$ множини K_g має виконуватись співвідношення $\tilde{Q} \cap K_g \subset \tilde{F}_w$.

Нехай $\triangleleft v$ — спін при вершині v графа $\Gamma_{K-R}(f)$. Позначимо через e' ребро, яке передує e у цьому циклі. Нехай e'' — ребро, яке слідує за e . Розглянемо відповідні елементи $Q' = \pi_f^{-1}(e')$ і $Q'' = \pi_f^{-1}(e'')$ множини \mathcal{Q}_f .

Нехай $x_v \in F_v$ — сингулярна точка f . Позначимо H' та H'' компоненти множини $F_v \setminus \{x_v\}$, для яких виконуються співвідношення $H' \subset \overline{Q'} \cap \overline{Q}$, $H'' \subset \overline{Q} \cap \overline{Q''}$.

Аналогічно, нехай $\tilde{x}_w \in \tilde{F}_w$ — сингулярна точка g , $\triangleleft w$ — спін при вершині w графа $\Gamma_{K-R}(g)$. Нехай ребро $\tilde{e}' = \pi_g(\tilde{Q}')$ передує \tilde{e} у циклі $\triangleleft w$, $\tilde{e}'' = \pi_g(\tilde{Q}'')$ слідує за \tilde{e} . Позначимо через \tilde{H}' та \tilde{H}'' компоненти множини $\tilde{F}_w \setminus \{\tilde{x}_w\}$, такі що $\tilde{H}' \subset \tilde{\overline{Q'}} \cap \tilde{\overline{Q}}$, $\tilde{H}'' \subset \tilde{\overline{Q}} \cap \tilde{\overline{Q''}}$.

З Наслідка 4.6.5 випливає, що $\overline{Q} \cap F_v = H' \cup H'' \cup \{x_v\}$, $\tilde{\overline{Q}} \cap \tilde{F}_w = \tilde{H}' \cup \tilde{H}'' \cup \{\tilde{x}_w\}$. Оскільки ψ зберігає спіни, то $\tilde{e}' = \psi(e')$, $\tilde{e}'' = \psi(e'')$. Відображення h^0 побудовано таким чином, що $h^0(F_v) = h_v^0(F_v) = \tilde{F}_w$, $h^0(x_v) = \tilde{x}_w$, $h^0(H') = \tilde{H}'$, $h^0(H'') = \tilde{H}''$.

Отже, $h^0(\overline{Q} \cap F_v) = \tilde{\overline{Q}} \cap \tilde{F}_w$. Очевидно, обмеження h^0 на $\overline{Q} \cap F_v$ індукує гомеоморфізм

$$h_{v,Q}^0 : \overline{Q} \cap F_v \rightarrow \tilde{\overline{Q}} \cap \tilde{F}_w.$$

Припустимо, що $f(\text{Fr } Q) = \{a\}$. З існування χ слідує, що $g(\text{Fr } \tilde{Q}) = \{c\}$.
Нехай $q \in \mathbb{R}$. Введемо наступні позначення.

$$R_q^- = (-\infty, 0) \times \{q\} \subset \mathbb{R}^2, \\ R_q^+ = (0, +\infty) \times \{q\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Зі співвідношень (Г.4.1) слідує, що $\phi(\overline{Q} \cap F_v) = \mathbb{R} \times \{a\}$.

Не обмежуючи загалу можемо вважати, що $\phi(x_v) = (0, a)$, $\tilde{\phi}(\tilde{x}_w) = (0, c)$.
Будемо також вважати, що додатний напрямок обходу навколо точки на площині є напрямком проти годинникової стрілки.

При обході навколо точки x_v ми рухаємося у області Q від множини H' у напрямку множини H'' . Аналогічно, при обході навколо точки $(0, a) = \phi(x_v)$ ми рухаємося у області $\mathbb{R} \times (a, b) = \phi(Q)$ від R_a^+ у напрямку R_a^- . Оскільки ϕ зберігає орієнтацію, то $\phi(H') = R_a^+$, $\phi(H'') = R_a^-$.

Аналогічно, $\tilde{\phi}(\overline{Q} \cap \tilde{F}_w) = \mathbb{R} \times \{c\}$, $(0, c) = \tilde{\phi}(\tilde{x}_w)$, $\tilde{\phi}(\tilde{H}')$ і $\tilde{\phi}(\tilde{H}'') = R_c^-$.

Розглянемо відображення

$$\Phi_a = \tilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R} \times \{a\}} : \mathbb{R} \times \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, Φ_a є гомеоморфізмом на свій образ $\mathbb{R} \times \{c\}$. Також справедливі рівності $\Phi_a(R_a^-) = \tilde{\phi} \circ h^0(H'') = \tilde{\phi}(\tilde{H}'') = R_c^-$ і $\Phi_a(R_a^+) = R_c^+$.

Нехай $i_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i_a(t) = (t, a)$, $t \in \mathbb{R}$. Означимо функцію

$$\alpha = \text{pr}_1 \circ \Phi_a \circ i_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Тут $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — проекція на першу координату.

Легко бачити, що α є гомеоморфізмом. Тому ця функція або строго зростає, або строго спадає. Оскільки для множини $R^- = \{t \in \mathbb{R} \mid t < 0\}$ виконуються співвідношення $i_a(R^-) = R_a^-$ і $\text{pr}_1(R_c^-) = R^-$, то за побудовою $\alpha(R^-) = R^-$ і функція α зростає.

Означимо відображення $\Phi : \mathbb{R} \times [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d)$,

$$\Phi(x, y) = (\alpha(x), \chi(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b).$$

З властивостей α і χ слідує, що це гомеоморфізм, який зберігає орієнтацію. Також за побудовою $\Phi(x, y) = \Phi_a(x, y)$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{a\}$.

Нарешті, нехай

$$h_Q = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi : \overline{Q} \rightarrow \widetilde{Q}.$$

За побудовою h_Q є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію. Оскільки $\phi(\text{Fr } Q) = \mathbb{R} \times \{a\}$, то

$$h_Q|_{\text{Fr } Q} = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi_a \circ \phi = h^0.$$

За означенням множина $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ є об'єднанням усіх регулярних компонент рівня функції f . Внаслідок цього кожна компонента рівня f , яка перетинається з Q , міститься в Q . Аналогічно, якщо компонента зв'язності рівня g має непорожній перетин з \widetilde{Q} , вона міститься в цій області.

Отже, з властивостей ϕ і $\tilde{\phi}^{-1}$ слідує, що h_Q для кожної точки $x \in Q$ відображає компоненту зв'язності множини $f^{-1}(f(x))$, яка містить x , на компоненту множини рівня g , що містить точку $h_Q(x)$.

Випадок $f(\text{Fr } Q) = \{b\}$ розглядається аналогічно.

(с) Нехай множина $f(\text{Fr } Q)$ містить два елементи. Тоді обидва кінця ребра e не віртуальні. Позначимо їх v' і v'' . Як і раніше, застосовуючи Наслідок 3.2.20 приходимо до висновку, що для компонент зв'язності $F_{v'} = \pi_f^{-1}(v')$ і $F_{v''} = \pi_f^{-1}(v'')$ множини K_f справедливі співвідношення $F_{v'} \cap \overline{Q} \neq \emptyset$, $F_{v''} \cap \overline{Q} \neq \emptyset$, $\text{Fr } Q \subset F_{v'} \cup F_{v''}$.

Вершини $w' = \psi(v')$ і $w'' = \psi(v'')$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$ є кінцями ребра $\psi(e)$, тому компоненти зв'язності $\widetilde{F}_{w'} = \pi_f^{-1}(w')$ і $\widetilde{F}_{w''} = \pi_f^{-1}(w'')$ множини K_g відповідають співвідношенням $\widetilde{F}_{w'} \cap \widetilde{Q} \neq \emptyset$, $\widetilde{F}_{w''} \cap \widetilde{Q} \neq \emptyset$, $\text{Fr } \widetilde{Q} \subset \widetilde{F}_{w'} \cup \widetilde{F}_{w''}$.

Нехай як і вище гомеоморфізми $\phi : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b]$ і $\tilde{\phi} : \widetilde{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d]$ зберігають орієнтацію і відповідають співвідношенням $f = \text{pr}_2 \circ \phi$ і $g = \text{pr}_2 \circ \tilde{\phi}$.

Не обмежуючи загалу, ми можемо вважати, що $\phi(F_{v'} \cap \overline{Q}) = \{a\}$, $\phi(F_{v''} \cap \overline{Q}) = \{b\}$.

Ізоморфізм ψ зберігає орієнтацію ребер. Оскільки вона визначається напрямком зростання функцій f і g , то $\tilde{\phi}(\widetilde{F}_{w'} \cap \widetilde{Q}) = \{c\}$, $\tilde{\phi}(\widetilde{F}_{w''} \cap \widetilde{Q}) = \{d\}$.

Як і у попередньому випадку, з Наслідка 4.6.5 слідує, що коректно визначені відображення

$$\begin{aligned}\Phi_a &= \tilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R} \times \{a\}} : \mathbb{R} \times \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \Phi_b &= \tilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R} \times \{b\}} : \mathbb{R} \times \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

які гомеоморфно відображають $\mathbb{R} \times \{a\}$ і $\mathbb{R} \times \{b\}$ на $\mathbb{R} \times \{c\}$ та $\mathbb{R} \times \{d\}$, відповідно.

Нехай $i_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i_a(t) = (t, a)$, $i_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i_b(t) = (t, b)$, $t \in \mathbb{R}$. Як і вище перевіряється що функції

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{pr}_1 \circ \Phi_a \circ i_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \beta &= \text{pr}_1 \circ \Phi_b \circ i_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\end{aligned}$$

є бієктивними і такими, що строго зростають.

Зафіксуємо також гомеоморфізм $\chi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, такий що $\chi(a) = c$.

З Леми Г.4.5 слідує, що відображення $\Phi : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d]$, означене за допомогою формули (Г.4.2), є гомеоморфізмом, зберігає орієнтацію, а також відображає горизонтальні прямі на горизонтальні прямі.

Оскільки $\hat{\chi}(a) = 0$ і $\hat{\chi}(b) = 1$, то з (Г.4.2) випливає, що $\Phi(x, y) = \Phi_a(x, y)$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{a\}$ і $\Phi(x, y) = \Phi_b(x, y)$ для кожного $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{b\}$.

Означимо

$$h_Q = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi : \overline{Q} \rightarrow \overline{\tilde{Q}}.$$

За побудовою h_Q є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію. Оскільки $\phi(\text{Fr } Q) = \mathbb{R} \times \{a, b\}$, то аналогічно до попереднього випадку

$$h_Q|_{\text{Fr } Q} = h^0.$$

Як і вище перевіряється, що h_Q відображає кожну компоненту зв'язності множини рівня f , яка перетинається з Q , на деяку компоненту множини рівня g .

Поєднуючи випадки (а) – (с), для кожного $Q \in \mathcal{Q}_f$ ми отримали гомео-

морфізм h_Q її замикання на замикання деякого $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_g$, який відображає компоненти зв'язності множин рівня f , що належать Q , на компоненти множин рівня g .

Нехай Q' і Q'' — два різні елементи \mathcal{Q}_f . Тоді за означенням $\overline{Q'} \cap \overline{Q''} = \text{Fr } Q' \cap \text{Fr } Q'' \subset K_f$. Отже, за побудовою для кожного $x \in \overline{Q'} \cap \overline{Q''}$ виконується рівність $h_{Q'}(x) = h_{Q''}(x) = h^0(x)$. Крім того з Наслідка 4.6.2 випливає, що $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_f} \overline{Q}$.

Внаслідок цього коректно означене відображення $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$h(x) = h_Q(x), \quad \text{якщо } x \in \overline{Q}, \quad Q \in \mathcal{Q}_f. \quad (\text{Г.4.5})$$

Оскільки граф $\Gamma_{K-R}(f)$ скінченний (див. Зауваження 4.2.3), то набір множин $\{\overline{Q} \mid Q \in \mathcal{Q}_f\}$ утворює скінченне замкнене покриття площини і на кожному елементі цього покриття h неперервне за означенням. Тому h неперервне на \mathbb{R}^2 (див. [80]).

За побудовою $h|_{K_f} = h^0$ і h бієктивно відображає K_f на K_g . Також h бієктивно відображає кожну множину $Q \in \mathcal{Q}_f$ на деякий елемент сім'ї \mathcal{Q}_g .

Нехай $Q', Q'' \in \mathcal{Q}_f$, $Q' \neq Q''$, $\tilde{Q}' = h(Q')$, $\tilde{Q}'' = h(Q'')$. Нехай $e' = \pi_f(Q')$, $e'' = \pi_f(Q'')$, $\tilde{e}' = \pi_g(\tilde{Q}')$, $\tilde{e}'' = \pi_g(\tilde{Q}'')$ — відповідні ребра графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$. Оскільки $\tilde{e}' = \psi(e')$, $\tilde{e}'' = \psi(e'')$ і ψ — комбінаторний ізоморфізм, то \tilde{Q}' і \tilde{Q}'' — різні елементи \mathcal{Q}_g . Отже, $\tilde{Q}' \cap \tilde{Q}'' = \emptyset$.

Очевидно, для кожного $Q \in \mathcal{Q}_f$ виконуються співвідношення

$$\mathbb{R}^2 \setminus Q = K_f \cup \bigcup_{Q' \in \mathcal{Q}_f, Q' \neq Q} Q'.$$

Зі сказаного вище слідує, що

$$h(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = K_g \cup \bigcup_{\tilde{Q}' \in \mathcal{Q}_g, \tilde{Q}' \neq h(Q)} \tilde{Q}'.$$

Внаслідок цього $h(Q) \cap h(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = \emptyset$ для всіх $Q \in \mathcal{Q}_f$ і відображення h бієктивне.

Отже, означене відображення h^{-1} . Оскільки $h(Q) \in \mathcal{Q}_g$ і $h^{-1}|_{h(Q)} = h_Q^{-1}$ для кожного $Q \in \mathcal{Q}_f$, всі h_Q^{-1} неперервні за побудовою і сім'я $\{\tilde{Q} \mid \tilde{Q} \in \mathcal{Q}_g\}$ утворює скінченне замкнене покриття площини, то відображення h^{-1} неперервне і h є гомеоморфізмом.

Ми довели вище, що всі відображення $h|_Q$, $Q \in \mathcal{Q}_f$ і h_0 ставлять у відповідність компонентам зв'язності множин рівня f компоненти множин рівня g . Отже, h є пошаровою еквівалентністю f і g .

Аналогічно, якщо для слабо навантажених графів Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(-g)$ заданий комбінаторний ізоморфізм, що зберігає спіни, то функції f і $-g$ пошарово еквівалентні. Але зрозуміло, що розбиття \mathbb{R}^2 , елементами якого є компоненти зв'язності множин рівнів функції $-g$, збігається з аналогічним розбиттям на компоненти множин рівнів g . Тому і у цьому випадку функції f і g пошарово еквівалентні.

Припустимо тепер, що навантажені графи Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ та $\Gamma_{K-R}(g)$ є еквівалентними. Це означає, що слабо навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентні і комбінаторний ізоморфізм ψ , який зберігає слабке навантаження, також індукує ізоморфізм $\hat{\psi}$ частково впорядкованих розширених множин вершин V_{ext} і \tilde{V}_{ext} графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ відносно порядків P_{ext} і \tilde{P}_{ext} , відповідно.

Нагадаємо, що частковий порядок P_{ext} (відповідно, \tilde{P}_{ext}) індукується на множині V_{ext} (відповідно, \tilde{V}_{ext}) зі стандартного лінійного порядку на прямій за допомогою відображення $f_{lim} : V_{ext} \rightarrow \mathbb{R}$ (відповідно, $g_{lim} : \tilde{V}_{ext} \rightarrow \mathbb{R}$).

Позначимо $A_f = f_{lim}(V_{ext})$, $A_g = g_{lim}(\tilde{V}_{ext})$. З Твердження 4.7.3 слідує, що існує бієктивне зростаюче відображення $\hat{k} : A_f \rightarrow A_g$, таке що комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} V_{ext} & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \tilde{V}_{ext} \\ f_{lim} \downarrow & & \downarrow g_{lim} \\ A_f & \xrightarrow{\hat{k}} & A_g \end{array}$$

Множини A_f і A_g скінченні (див. Зауваження 4.2.3) і мають однакову кількість елементів m . Нехай $A_f = \{a_1, \dots, a_m\}$, $a_1 < \dots < a_m$; $A_g = \{b_1, \dots, b_m\}$,

$b_1 < \dots < b_m$. Очевидно, $b_i = \hat{k}(a_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Означимо відображення $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за допомогою співвідношення

$$k(t) = \begin{cases} t + (b_1 - a_1), & \text{якщо } t < a_1, \\ \frac{1}{a_{i+1} - a_i} [b_i(a_{i+1} - t) + b_{i+1}(t - a_i)], & \text{якщо } t \in [a_i, a_{i+1}], \\ t + (b_m - a_m), & \text{якщо } t > a_m. \end{cases}$$

Зрозуміло, що k є гомеоморфізмом і $k(a_i) = b_i = \hat{k}(a_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Оскільки слабо навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентні, ми можемо побудувати гомеоморфізми $h^0 : K_f \rightarrow K_g$ і $h_Q : \bar{Q} \rightarrow \tilde{\bar{Q}}$, $Q \in \mathcal{Q}_f$, як ми це зробили при доведенні пошарової еквівалентності f і g .

При побудові відображень h_Q є певна неоднозначність. Виявляється, що ці відображення можна вибрати таким чином, що гомеоморфізм h , визначений за допомогою (Г.4.5), дасть разом із k топологічну еквівалентність f і g .

Дійсно, нехай $Q \in \mathcal{Q}_f$, $e = \pi_f(Q)$ — відповідне ребро графа $\Gamma_{K-R}(f)$, $v', v'' \in V \cup V_{virt}$ — вершини, які з'єднує ребро e . Тоді вершини $w' = \psi(e')$ і $w'' = \psi(e'')$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$ з'єднані ребром $\psi(e)$. Нехай $\tilde{Q} = \pi_g^{-1}(\psi(e))$ — відповідний елемент \mathcal{Q}_g .

Вище ми побудували h_Q у вигляді $\tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi$, де ϕ і $\tilde{\phi}$ — відображення з Лема Г.4.1, а Φ має вигляд $\Phi(x, y) = (\eta(x, y), \chi(y))$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times f(\bar{Q})$ (див. формулу (Г.4.2)). Отже, комутативна наступна діаграма:

$$\begin{array}{ccc} \bar{Q} & \xrightarrow{h_Q} & \tilde{\bar{Q}} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \tilde{\phi} \\ \mathbb{R} \times f(\bar{Q}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R} \times g(\tilde{\bar{Q}}) \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \tilde{\text{pr}}_2 \\ f(\bar{Q}) & \xrightarrow{\chi} & g(\tilde{\bar{Q}}) \end{array}$$

Лема Г.4.1 стверджує, що $f = \text{pr}_2 \circ \phi$ і $g = \text{pr}_2 \circ \tilde{\phi}$. Тому комутативна на-

ступна діаграма:

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{Q} & \xrightarrow{h_Q} & \widetilde{Q} \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 f(\overline{Q}) & \xrightarrow{\chi} & g(\widetilde{Q})
 \end{array} \tag{Г.4.6}$$

У цій конструкції в якості $\chi : f(\overline{Q}) \rightarrow g(\widetilde{Q})$ можна взяти довільне неперервне бієктивне зростаюче відображення.

Функція f_{K-R} строго монотонна на ребрах $\Gamma_{K-R}(f)$. Отже, не обмежуючи загалу ми можемо вважати, що $f_{lim}(v') < f_{lim}(v'')$. Оскільки ψ зберігає орієнтацію ребер, то $g_{lim}(w') < g_{lim}(w'')$.

Нехай $v' \notin V_{ext}$. Тоді за означенням $f_{lim}(v') \in \pm\infty$. Оскільки $f_{lim}(v') < f_{lim}(v'')$, то $f_{lim}(v') = -\infty$. За означенням $\psi(V_{ext}) = \widetilde{V}_{ext}$, тому $w' = \psi(v') \notin \widetilde{V}_{ext}$ і по аналогії з попереднім $g_{lim}(w') = -\infty$.

Якщо $v' \in V_{ext}$, то $f_{lim}(v') = a_r$ для деякого $r \in \{1, \dots, m\}$. Тоді

$$g_{lim}(w') = g_{lim} \circ \psi(v') = \hat{k} \circ f_{lim}(v') = k \circ f_{lim}(v') = b_r.$$

Так само, або $f_{lim}(v'') = g_{lim}(w'') = +\infty$, або $f_{lim}(v'') = a_s$ і $g_{lim}(w'') = k \circ f_{lim}(v'') = b_s$ для деякого $s \in \{1, \dots, m\}$.

Внаслідок сказаного виконується рівність $k(f(\overline{Q})) = g(\widetilde{Q})$. Отже, можемо взяти

$$\chi(t) = k(t), \quad t \in f(\overline{Q}).$$

Тоді зі співвідношень (Г.4.5) і (Г.4.6) слідує, що $k \circ f = g \circ h$.

Теорему 4.8.1 доведено.

Додаток Д

Приклади до розділу 4

Нехай $n \geq 2$. Розглянемо наступні гармонічні функції на площині

$$\phi_n(x, y) = \operatorname{Re} z^n, \quad \mu_n(x, y) = \operatorname{Re} \frac{z^n(-z^{2n} + 3)}{2}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

За означенням множина Z_n , див. рівність (4.5.1), є сингулярною компонентою рівня функції ϕ_n . Оскільки функція $\operatorname{Re} z^{3n}$ також дорівнює нулю на цій множині, то і $\mu_n = 0$ на Z_n .

Відмітимо, що функція $\xi_n(z) = z^n(-z^{2n} + 3)/2$ є з точністю до постійного множника первинною для функції $\zeta_n(z) = z^{n-1}(z^{2n} - 1)$. Тому сингулярними точками функцій ξ_n і $\mu_n = \operatorname{Re} \xi_n$ є нулі ζ_n . Легко бачити, що всі розв'язки рівняння $\zeta_n(z) = 0$ вичерпуються числами 0 і ϵ^k , $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$, де ϵ — деякий примітивний корінь з 1 степені $2n$. Оскільки $\xi_n(\epsilon_k) = \pm 1$ для всіх k , то єдиною сингулярною точкою множини рівня $\mu_n^{-1}(0)$ є 0 . Легко перевірити, що кратність цієї сингулярної точки функції μ_n дорівнює $n - 1$. З цього слідує, що множина Z_n є сингулярною компонентою рівня функції μ_n .

Відмітимо, що знак функції μ_n ми підібрали таким чином, щоб вона відповідала наступній властивості. Множина Z_n має такий відкритий окіл O_n , що знаки чисел $\phi_n(x)$ і μ_n збігаються для кожного $x \in O_n$.

Сингулярні компоненти множин рівня функцій $\phi_2(x, y)$ і $\mu_2(x, y)$ зображені на Рис. Д.0.1. Знаками “+” і “-” позначені ті компоненти доповнення до множин K_{ϕ_2} і K_{μ_2} , на яких ці функції додатні і, відповідно, від'ємні.

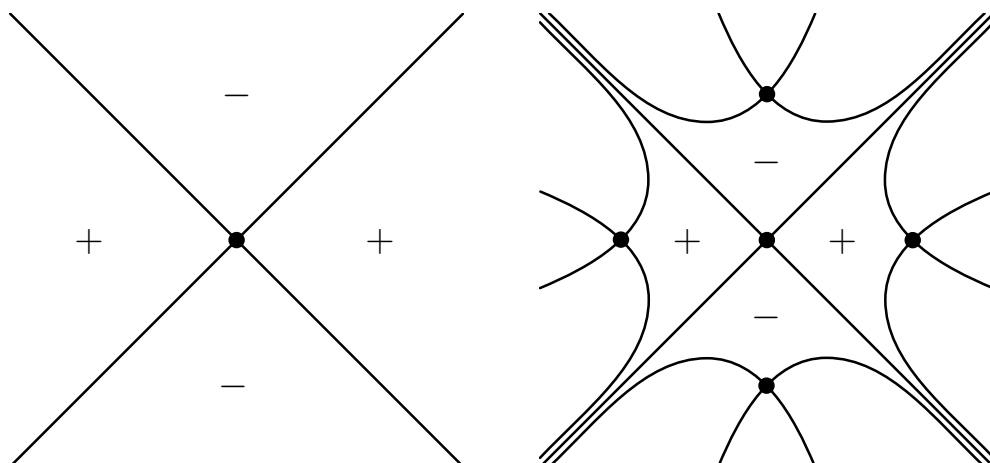


Рис. Д.0.1: Сингулярні компоненти множин рівня функцій $\phi_2(x, y)$ і $\mu_2(x, y)$

Позначимо

$$W_{n,k} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \arg(x + iy) \in \left[\frac{\pi k}{n} - \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi k}{n} + \frac{\pi}{2n} \right] \right\},$$

$$k \in \{0, 1, \dots, 2n - 1\}.$$

Нехай \mathcal{I} — деяка підмножина множини $\{0, 1, \dots, 2n - 1\}$. Означимо

$$f_{n,\mathcal{I}}(x) = \begin{cases} \phi_n(x), & \text{якщо } x \in W_{n,k} \text{ і } k \in \mathcal{I}, \\ \mu_n(x), & \text{якщо } x \in W_{n,k} \text{ і } k \notin \mathcal{I}. \end{cases} \quad (\text{Д.0.1})$$

Оскільки $W_{n,k} \cap W_{n,s} \subset Z_n$ при різних k і s , то функцію $f_{n,\mathcal{I}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ означено коректно.

Z_n є спільною компонентою множин рівня $\phi_n^{-1}(0)$ і $\mu_n^{-1}(0)$, а також у околі O_n цієї множини знаки ϕ_n і μ_n збігаються. З цього і з того, що функції ϕ_n і μ_n є псевдо-гармонічними, легко вивести, що функція $f_{n,\mathcal{I}}$ також псевдо-гармонічна.

Приклад Д.1 Нехай $n = 2$, $\mathcal{I} = \{0, 1\}$. На Рис. Д.0.2 зображено сингулярні компоненти множин рівня функції $f_{2,\{0,1\}}$, а також її простір $\Gamma_{K-R}(f_{2,\{0,1\}})$. Білими кружечками позначені термінальні вершини графа Кронрода-Ріба, які належать до V_0 .

Позначимо через Q_i компоненти множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_{f_{2,\{0,1\}}}$, що межують

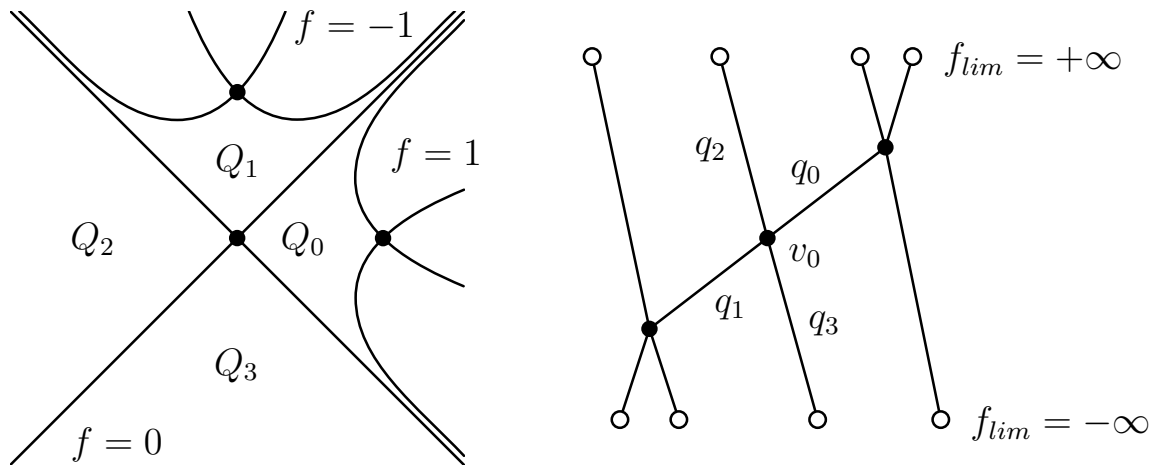


Рис. Д.0.2: Функція $f_{2,\{0,1\}}$ і її простір $\Gamma_{K-R}(f_{2,\{0,1\}})$.

з сингулярною компонентою Z_2 рівня $f_{2,\{0,1\}}^{-1}(0)$ цієї функції. Нехай індекси вибрано так, що $Q_k \subset W_{2,k}$. Нехай q_0, \dots, q_3 — відповідні ребра графу Кронрода-Ріба, а v_0 — вершина цього графа, яка відповідає множині Z_2 . Тоді $\langle v_0 = (q_0, q_1, q_2, q_3)$.

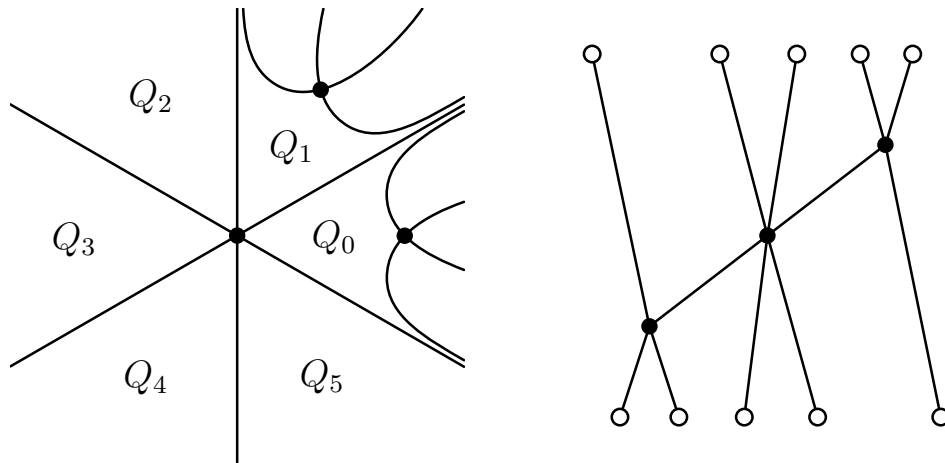
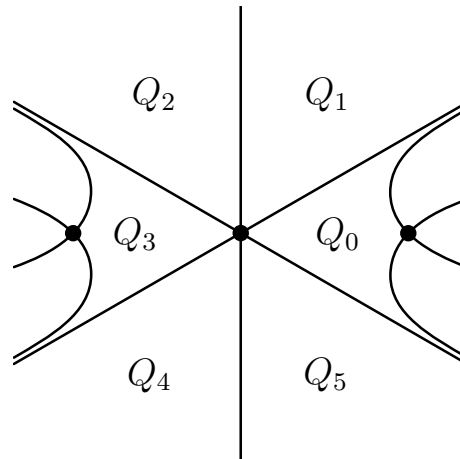


Рис. Д.1.1: Функція $f_{3,\{0,1\}}$ і її простір $\Gamma_{K-R}(f_{3,\{0,1\}})$

Приклад Д.2 Нехай $n = 3, \mathcal{I}' = \{0, 1\}$. На Рис. Д.1.1 зображено сингулярні компоненти множин рівня функції $f_{3,\{0,1\}}$, а також її простір $\Gamma_{K-R}(f_{3,\{0,1\}})$.

Нехай іще $\mathcal{I}'' = \{0, 3\}$. На Рис. Д.2.1 зображено сингулярні компоненти множин рівня функції $f_{3,\{0,3\}}$. Її простір $\Gamma_{K-R}(f_{3,\{0,3\}})$ збігається з відповідним простором функції $f_{3,\{0,1\}}$, хоча ці дві функції не є топологічно еквівалентними.

Рис. Д.2.1: Функція $f_{3,\{0,1\}}$

Як і у попередньому прикладі, розглянемо для $f_{3,\{0,1\}}$ компоненти Q_k доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_{f_{3,\{0,1\}}}$, які межують з множиною Z_3 , а також відповідні їм ребра q_k графа Кронрода-Ріба і вершину v_0 , що відповідає Z_3 . Тоді $\triangleleft v_0 = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$. Зрозуміло, що q_0 і q_1 – це єдині два ребра, які інцидентні v_0 і не є черенками. Ці два ребра є сусідніми у циклі $\triangleleft v_0$.

Що стосується функції $f_{3,\{0,3\}}$ і її графа Кронрода-Ріба, то єдині ребра, які інцидентні v_0 і не є черенками, це q_0 і q_3 . Ці два ребра не є сусідніми у циклі $\triangleleft v_0 = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$. Тому слабо навантажені графи Кронрода-Ріба функцій $f_{3,\{0,1\}}$ і $f_{3,\{0,3\}}$ не еквівалентні.

Нехай функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є псевдо-гармонічною, а неперервна функція $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ строго зростає на \mathbb{R} і $\beta(0) = 0$. Легко перевірити, що функція $\hat{f} = \beta \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є псевдо-гармонічною. Вона має те ж розбиття на множини рівня, що й f . Також знаки чисел $f(z)$ і $\hat{f}(z)$ збігаються для кожного $z \in \mathbb{R}^2$.

Скористуємось цим зауваженням і узагальнимо клас функцій $f_{n,\mathcal{I}}$. Отже, нехай $n > 1$, $\mathcal{I} \subset \{0, 1, \dots, 2n-1\}$. Розглянемо ще неперервні функції $\alpha_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$, що строго зростають на \mathbb{R} і для яких 0 є нерухомою точкою. Позначимо $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}\}$.

Означимо

$$f_{n,\mathcal{I},\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha_k \circ \phi_n(x), & \text{якщо } x \in W_{n,k} \text{ і } k \in \mathcal{I}, \\ \alpha_k \circ \mu_n(x), & \text{якщо } x \in W_{n,k} \text{ і } k \notin \mathcal{I}. \end{cases}$$

Аргументи, аналогічні наведеним вище доводять, що це означення коректне і функція $f_{n,\mathcal{I},\alpha}$ є псевдо-гармонічною.

Приклад Д.3 Нехай $n = 2$, $\mathcal{I} = \emptyset$, $\alpha = \{\alpha_0, \dots, \alpha_3\}$, $\alpha_0 = \arctan$, $\alpha_k = id$ при $k \neq 0$.

Розглянемо функції $f_{2,\mathcal{I}} = \phi_2$ і $f_{2,\mathcal{I},\alpha}$.

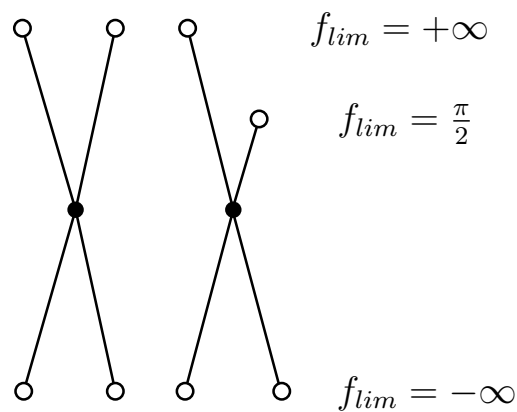


Рис. Д.3.1: Навантажені графи Кронрода-Ріба функцій ϕ_2 і $f_{2,\mathcal{I},\alpha}$

Легко бачити, що слабо навантажені графи Кронрода-Ріба цих функцій еквівалентні (кожен з них складається з п'яти вершин, чотири з яких є віртуальними, і чотирьох ребер).

Але $V_{fin} = \emptyset$ для функції ϕ_2 , в той час як для $f_{2,\mathcal{I},\alpha}$ множина V_{fin} містить один елемент, див. Рис Д.3.1. Отже, навантажені графи Кронрода-Ріба функцій ϕ_2 і $f_{2,\mathcal{I},\alpha}$ не еквівалентні.

Додаток Е

Доведення окремих тверджень Розділу 6

Е.1 Доведення Лема 6.1.8

Нехай $R = [a, b] \times [c, d]$ — замкнений прямокутник. Слідуючи термінології з [65], будемо називати множину

$$\text{roof}(R) = \{a, b\} \times [c, d] \cup [a, b] \times \{d\}$$

дахом R , а множину

$$J = [a, b] \times \{c\}$$

(нижньою) основою R .

Також будемо казати, що відображення $\eta : R \rightarrow R$ зберігає рівні, якщо $\text{pr}_2 \circ \eta(u) = \text{pr}_2(u)$ для кожного $u \in R$. Тут pr_2 — проєкція на другу координату.

Лема Е.1.1 *Нехай $\mu : J \rightarrow J$ — гомеоморфізм основи J замкненого прямокутника R на себе, який зберігає кінці відрізка J .*

Існує гомеоморфізм $\xi : R \rightarrow R$, такий що

- (i) ξ зберігає рівні;*
- (ii) $\xi|_J = \mu : J \rightarrow J$;*

(iii) відображення $\xi|_{\text{roof}(R)} : \text{roof}(R) \rightarrow \text{roof}(R)$ є тотожним.

Доведення. Відомо, що множина гомеоморфізмів відрізка на себе, які зафіксовані на кінцях відрізка, є опуклою (це легко слідує з того, що такі відображення зберігають порядок точок). Тобто для кожної пари гомеоморфізмів $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow [a, b]$, такої що $\alpha(a) = \beta(a)$ (і $\alpha(b) = \beta(b)$), відображення $h_t(\alpha, \beta) : [a, b] \rightarrow [a, b]$,

$$h_t(\alpha, \beta)(x) = t\beta(x) + (1 - t)\alpha(x), \quad x \in [a, b],$$

також буде гомеоморфізмом для кожного $t \in [0, 1]$.

Очевидно, $\mu(x, c) = (\nu(x), c)$, $(x, c) \in J$, для деякого гомеоморфізму $\nu : [a, b] \rightarrow [a, b]$. Розглянемо відображення $\xi : R \rightarrow R$,

$$\xi(x, y) = \left(\frac{y - c}{d - c}x + \frac{d - y}{d - c}\nu(x), y \right), \quad (x, y) \in R.$$

Легко бачити, що воно неперервне.

Нехай $\text{id} : [a, b] \rightarrow [a, b]$ — тотожне відображення. Для кожного $y \in [c, d]$ позначимо $t(y) = \frac{y - c}{d - c}$. Зрозуміло, що $t \in [0, 1]$ і $1 - t(y) = \frac{d - y}{d - c}$. Отже,

$$\xi(x, y) = (h_{t(y)}(\nu, \text{id})(x), y), \quad (x, y) \in R$$

і для кожного $y \in [c, d]$ відображення

$$\xi(\cdot, y) : [a, b] \times \{y\} \rightarrow [a, b] \times \{y\}$$

є гомеоморфізмом.

Внаслідок цього ξ є бієктивним неперервним відображенням компакта R на себе. Тому ξ є гомеоморфізмом.

(i) За побудовою ξ зберігає рівні.

(ii) $t(y) = 0$ при $y = c$, тому $\xi(x, c) = (\nu(x), c) = \mu(x, c)$, $x \in [a, b]$.

(iii) Аналогічно, $t(d) = 1$ і $\xi(x, d) = (x, d)$, $x \in [a, b]$. Крім того за умовою Леми $\nu(a) = a$ і $\nu(b) = b$, тому $\xi(a, y) = (a, y)$ і $\xi(b, y) = (b, y)$ для кожного $y \in$

$[c, d]$. Внаслідок цього відображення $\xi|_{\text{roof}(R)} : \text{roof}(R) \rightarrow \text{roof}(R)$ є тотожним.
□

Наслідок Е.1.2 Твердження Лема Е.1.1 лишається справедливим, якщо замінити замкнений прямокутник R на прямокутник

$$\hat{R} = (a, b) \times \{c\} \cup [a, b] \times (c, d]$$

зі скінченною основою $\hat{J} = (a, b) \times \{c\}$ (див. [65]), а гомеоморфізм μ на гомеоморфізм $\hat{\mu} : \hat{J} \rightarrow \hat{J}$, який зберігає порядок точок інтервалу \hat{J} .

Доведення. Дійсно, якщо $\hat{\mu}$ зберігає порядок точок на \hat{J} , то $\lim_{t \rightarrow a} \hat{\mu}(t, c) = (a, c)$ і $\lim_{t \rightarrow b} \hat{\mu}(t, c) = (b, c)$, отже $\hat{\mu}$ однозначно продовжується до неперервного відображення $\mu : J \rightarrow J$, яке зберігає кінці відрізка $J = [a, b] \times \{c\}$. Оскільки μ очевидно є бієктивним і J є компактом, то μ — гомеоморфізм.

Застосуємо Лему Е.1.1 до замкнутого прямокутника $R = [a, b] \times [c, d]$ і гомеоморфізму μ . Тоді відображення $\hat{\xi} = \xi|_{\hat{R}} : \hat{R} \rightarrow \hat{R}$ є гомеоморфізмом і відповідає умовам, аналогічним до умов (i)–(iii) цієї Лема. □

Припустимо, що S — модельна смуга з межею

$$\partial S = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} J_\lambda,$$

де J_λ , $\lambda \in \Lambda$, — межові інтервали.

Нехай L_λ , $\lambda \in \Lambda$, — деякий набір скінченних відкритих інтервалів і $\mu_\lambda : L_\lambda \rightarrow J_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, — набір гомеоморфізмів.

Лема Е.1.3 Існує листовий гомеоморфізм $\xi : S \rightarrow S$, що зберігає рівні (тобто $\text{pr}_2 \circ \xi = \text{pr}_2$), який відповідає наступним умовам:

1. $\xi(J_\lambda) = J_\lambda$ для всіх $\lambda \in \Lambda$;
2. відображення $\theta_\lambda = \xi \circ \mu_\lambda : L_\lambda \rightarrow J_\lambda$ є афінним для кожного $\lambda \in \Lambda$.

Доведення. Розглянемо окремо дві півсмуги

$$M_- = S \cap \mathbb{R} \times [-1, 0], \quad M_+ = S \cap \mathbb{R} \times [0, 1].$$

Нехай для простоти $\partial S = \partial_- S \subset \mathbb{R} \times \{-1\} \subset M_-$. Отже, $J_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda) \times \{-1\}$, $\lambda \in \Lambda$.

Оскільки множина індексів Λ не більш ніж зліченна, можемо вважати, що або $\Lambda = \{1, \dots, k\}$ для деякого $k \in \mathbb{N}$, або $\Lambda = \mathbb{N}$. Зафіксуємо послідовність чисел $d_\lambda \in (-1, 0)$, $\lambda \in \Lambda$, яка прямує до -1 у випадку $\Lambda = \mathbb{N}$. Розглянемо набір прямокутників

$$R_\lambda = J_\lambda \cup [a_\lambda, b_\lambda] \times (-1, d_\lambda], \quad \lambda \in \Lambda.$$

Позначимо $U_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda) \times [-1, d_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

Зрозуміло, що $R_\lambda = ([a_\lambda, b_\lambda] \times [-1, d_\lambda]) \cap M_-$, $\lambda \in \Lambda$, тому всі R_λ замкнені в M_- . З іншого боку, легко бачити, що всі U_λ відкриті в M_- . Тому множина

$$R_0 = M_- \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

замкнена в M_- і набір $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda \cup \{0\}}$ утворює замкнене покриття M_- .

Оскільки за означенням межові інтервали J_λ , $\lambda \in \Lambda$, попарно неперетинні, то $U_\lambda \cap U_j = \emptyset$ при $\lambda \neq j$. Внаслідок цього

$$U_\lambda \cap R_j = \emptyset \quad \text{при } \lambda \neq j, \lambda \in \Lambda, j \in \Lambda \cup \{0\}. \quad (\text{E.1.1})$$

Відмітимо також, що оскільки $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} d_\lambda = -1$ у випадку, коли множина індексів Λ нескінченна, то для кожного $c \in (-1, 0)$ відкрита підмножина $V_c = \mathbb{R} \times (c, 0]$ простору M_- перетинається лише зі скінченною кількістю прямокутників R_λ .

Очевидно,

$$M_- = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \cup \bigcup_{c \in (-1, 0)} V_c,$$

тому замкнене покриття $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda \cup \{0\}}$ простору M_- є локально скінченним.

Для кожного $\lambda \in \Lambda$ існує рівно два афінних гомеоморфізма $A_\lambda, B_\lambda : L_\lambda \rightarrow J_\lambda$, див. Зауваження 6.1.5. Легко бачити, що один з гомеоморфізмів $A_\lambda \circ \mu_\lambda^{-1}, B_\lambda \circ \mu_\lambda^{-1} : J_\lambda \rightarrow J_\lambda$ зберігає порядок точок на J_λ , а інший — обертає.

Нехай $\theta_\lambda : L_\lambda \rightarrow J_\lambda$ — такий афінний гомеоморфізм, що відображення $\theta_\lambda \circ \mu_\lambda^{-1}$ зберігає орієнтацію на J_λ . Тоді згідно Наслідку **E.1.2** існує гомеоморфізм $\xi_\lambda : R_\lambda \rightarrow R_\lambda$, такий що $\xi_\lambda|_{J_\lambda} = \theta_\lambda \circ \mu_\lambda^{-1}$, і який відповідає умовам (i)–(iii) Лема **E.1.1**.

Позначимо ще $\xi_0 = \text{id}_{R_0}$ — тотожне відображення R_0 на себе.

Оскільки $R_\lambda = \text{roof}(R_\lambda) \cup U_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, то з **(E.1.1)** слідує, що $R_\lambda \cap R_j \subset \text{roof}(R_\lambda)$ при $\lambda \neq j$, $\lambda \in \Lambda$, $j \in \Lambda \cup \{0\}$. Отже

$$\xi_\lambda|_{R_\lambda \cap R_j} = \xi_j|_{R_\lambda \cap R_j} = \text{id}_{R_\lambda \cap R_j},$$

якщо $R_\lambda \cap R_j \neq \emptyset$, і коректно означене відображення $\xi_- : M_- \rightarrow M_-$,

$$\xi_-(x) = \xi_\lambda(x), \quad \text{якщо } x \in R_\lambda, \lambda \in \Lambda \cup \{0\}.$$

За означенням кожне ξ_λ неперервне. Внаслідок того, що замкнене покриття $\{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda \cup \{0\}}$ простору M_- є локально скінченим, відображення ξ_- також неперервне.

Легко бачити, що відображення $\zeta_- : M_- \rightarrow M_-$, $\zeta_-(x) = \xi_\lambda^{-1}(x)$, якщо $x \in R_\lambda$, $\lambda \in \Lambda \cup \{0\}$, неперервне і є оберненим до ξ_- . Отже, ξ_- є гомеоморфізмом.

За означенням ξ_- зберігає рівні і відповідає умові (1) Лема **E.1.3**.

З іншого боку, відображення $\xi_- \circ \mu_\lambda = \xi_\lambda \circ \mu_\lambda = \theta_\lambda \circ \mu_\lambda^{-1} \circ \mu_\lambda = \theta_\lambda$ є афінним гомеоморфізмом для кожного $\lambda \in \Lambda$.

Відмітимо, що $\xi_-|_{R_0} = \text{id}_{R_0}$ за побудовою, зокрема $\xi_-|_{\mathbb{R} \times \{0\}} = \text{id}_{\mathbb{R} \times \{0\}}$.

Аналогічні до попередніх міркування приводять до відображення $\xi_+ : M_+ \rightarrow M_+$, яке має властивості, подібні до відображення ξ_- , зокрема $\xi_+|_{\mathbb{R} \times \{0\}} = \text{id}_{\mathbb{R} \times \{0\}}$.

Тоді відображення $\xi : S \rightarrow S$,

$$\xi(x) = \begin{cases} \xi_-(x), & x \in M_-, \\ \xi_+(x), & x \in M_+, \end{cases}$$

відповідає всім вимогам Лема. \square

Перейдемо безпосередньо до доведення Лемми 6.1.8. Розглянемо смугасту поверхню

$$Z = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha / \{Y_\beta \stackrel{\phi_\beta}{\sim} X_\beta\}_{\beta \in \mathbf{B}}$$

з атласом $q : Z_0 \rightarrow Z$, де $Z_0 = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha$.

Нехай $\alpha \in \mathbf{A}$, $\Lambda \subset \mathbf{C}$, S_α — модельна смуга, J_λ , $\lambda \in \Lambda$, — набір її межових інтервалів.

Розглянемо також набір $\{L_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ інтервалів

$$L_\lambda = \begin{cases} J_\alpha, & \text{якщо } \lambda \notin \mathbf{i}(\mathbf{B}), \\ Y_\beta, & \text{якщо } \lambda = \mathbf{i}(\beta) \in \mathbf{i}(\mathbf{B}) \text{ (тоді } J_\lambda = X_\beta), \end{cases}$$

і набір гомеоморфізмів $\mu_\lambda : L_\lambda \rightarrow J_\lambda$,

$$\mu_\lambda = \begin{cases} \text{id}, & \text{якщо } \lambda \notin \mathbf{i}(\mathbf{B}), \\ \phi_\beta, & \text{якщо } \lambda = \mathbf{i}(\beta) \in \mathbf{i}(\mathbf{B}). \end{cases}$$

Знайдемо листовий гомеоморфізм $\xi_\alpha : S_\alpha \rightarrow S_\alpha$, який відповідає Леммі E.1.3.

Зрозуміло, що $\xi_\alpha \circ \mu_\lambda = \text{id}$, якщо $\lambda \notin \mathbf{i}(\mathbf{B})$. Зокрема

$$\xi_\alpha|_{Y_\beta} = \xi_\alpha \circ \mu_\lambda = \text{id}_{Y_\beta} : Y_\beta \rightarrow Y_\beta, \quad \text{якщо } \lambda = \mathbf{j}(\beta) \in \mathbf{j}(\mathbf{B}).$$

Для кожного $\lambda = \mathbf{i}(\beta) \in \mathbf{i}(\mathbf{B})$ позначимо

$$\theta_\beta = \xi_\alpha \circ \mu_\lambda = \xi_\alpha \circ \phi_\beta : Y_\beta \rightarrow X_\beta.$$

Відповідно Лемі E.1.3 всі θ_β є афінними гомеоморфізмами.

Розглянемо афінну смугасту поверхню

$$Z' = \bigsqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} S_\alpha / \{Y_\beta \stackrel{\theta_\beta}{\sim} X_\beta\}_{\beta \in \mathbf{B}}$$

з атласом $q' : Z_0 \rightarrow Z'$, а також листовий гомеоморфізм $\xi : Z_0 \rightarrow Z_0$,

$$\xi|_{S_\alpha} = \xi_\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{A}.$$

Оскільки за побудовою

$$\xi|_{Y_\beta} = \text{id}_{Y_\beta} : Y_\beta \rightarrow Y_\beta, \quad \xi|_{X_\beta} = \theta_\beta \circ \phi_\beta^{-1} : X_\beta \rightarrow X_\beta,$$

для всіх $\beta \in \mathbf{B}$, то коректно означене неперервне фактор-відображення $\psi : Z \rightarrow Z'$, для якого комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \xrightarrow{\xi} & Z_0 \\ q \downarrow & & \downarrow q' \\ Z & \xrightarrow{\psi} & Z' \end{array}$$

Розглянемо відображення

$$\zeta : Z_0 \rightarrow Z_0, \quad \zeta|_{S_\alpha} = \xi_\alpha^{-1}, \quad \alpha \in \mathbf{A}.$$

Проста безпосередня перевірка показує, що для ζ визначене неперервне фактор-відображення і воно збігається з $\psi^{-1} : Z' \rightarrow Z$.

Отже, пара гомеоморфізмів (ξ, ψ) задає топологічну еквівалентність атласів q і q' . За побудовою відображення ξ листове. Оскільки шарування на смугастій поверхні індукується з канонічних шарувань на модельних смугах, то відображення ψ також листове. Тому пара (ξ, ψ) задає еквівалентність смугастих поверхонь Z і Z' . Зважаючи на те, що Z' афінна смугаста поверхня, Лемму 6.1.8 доведено.

Е.2 Доведення Теорема 6.2.7

За означенням Z складається не більше ніж зі зліченної кількості смуг.

Означимо граф G наступним чином:

- вершинами G є смуги Z , що містять листи типів (c1) або (c2);
- якщо існує лист ω типу (c1), такий що $\omega = \partial_- \widehat{S}_\gamma = \partial_+ \widehat{S}_\gamma$ для деякого $\gamma \in \mathbf{A}$, тоді ми вважаємо, що ω є петлею у вершині \widehat{S}_γ ;
- дві вершини \widehat{S}_γ і $\widehat{S}_{\gamma'}$ з'єднані ребром у G тоді і лише тоді, коли існує лист ω типу (c2), для якого $\omega = \partial_- \widehat{S}_\gamma$ або $\omega = \partial_+ \widehat{S}_\gamma$ і, аналогічно, $\omega = \partial_- \widehat{S}_{\gamma'}$ або $\omega = \partial_+ \widehat{S}_{\gamma'}$.

Зрозуміло, що кожна вершина G має степінь 1 або 2. Внаслідок цього кожна компонента зв'язності G має форму (i)-(v), що показані на Рис. E.2.1.

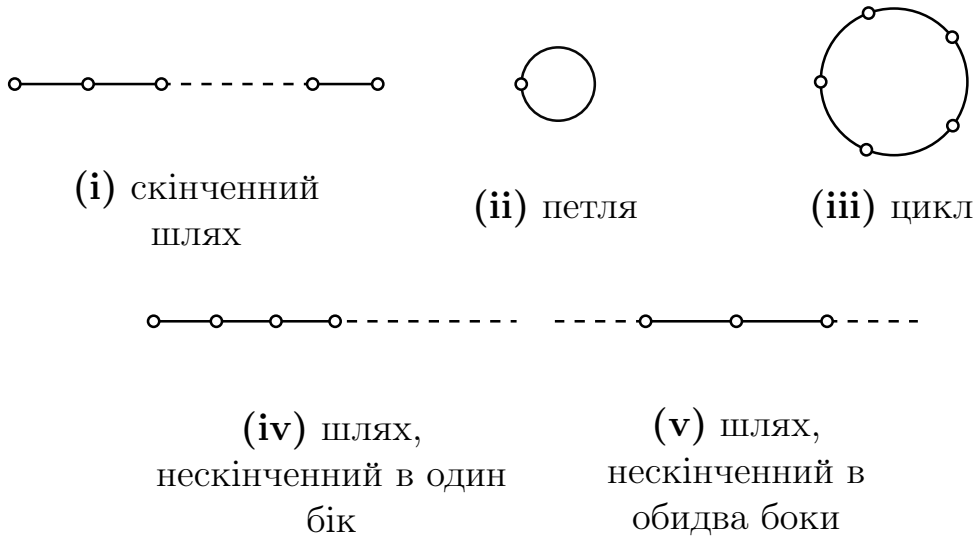


Рис. E.2.1:

Нехай G непорожній і підграф K є компонентою зв'язності G . Розглянемо випадки (i)-(v), зображені на Рис. E.2.1.

(i) Нехай K є скінченним незамкненим шляхом з n ребер. Як відмічено у Зауваженні 6.2.4, кожен лист типу (c2) можемо вважати внутрішнім після заміни розбиття Z на смуги, яка не змінює шарування Δ_Z . Це означає, що кожне окреме ребро K з різними кінцями може бути редуковано. Застосовуючи n разів Лему 6.2.2, можемо редукувати всі ребра K одне за одним.

(ii) Нехай K є петлею, отже її ребро відповідає листу типу (c1). Тоді згідно Лемі 6.2.5 простір Z є листово гомеоморфним S або M .

(iii) Нехай K є циклом з n ребер. Тоді за допомогою міркувань, аналогічних (i), K зводиться до петлі.

(iv) Нехай K є шляхом, що нескінченний в одному напрямку. Ми не можемо застосувати аргументи, подібні до (i), оскільки потрібно розглянути нескінченну послідовність ребер.

Нехай $\widehat{S}_0, \widehat{S}_1, \dots$ є нескінченною послідовністю смуг у Z , які відповідають вершинам K , причому ω_i , $i \geq 0$, є листом типу (c2) і відповідає ребру, що з'єднує вершини \widehat{S}_i і \widehat{S}_{i+1} у K . Міняючи ролями $\partial_- S_i$ і $\partial_+ S_i$, можемо вважати, що

$$\omega_i = \partial_+ \widehat{S}_i = \partial_- \widehat{S}_{i+1}, \quad i \geq 0.$$

Відмітимо, що кожна S_i вкладена у Z . Позначимо $T = \cup_{i=1}^{\infty} \widehat{S}_i$, тобто \widehat{S}_0 пропущено. Тоді з Наслідка 6.2.3 випливає, що T є листово гомеоморфною до модельної смуги, яка має тільки одну компоненту межі.

Лема Е.2.0.1 ω_0 розділяє Z таким чином, що $T \setminus \omega_0$ є компонентою зв'язності множини $Z \setminus \omega_0$.

Доведення. Нам досить довести, що $T \setminus \omega_0$ є відкрито-замкненою підмножиною $Z \setminus \omega_0$.

1) Спочатку перевіримо відкритість множини $T \setminus \omega_0$. Нехай $x \in T \setminus \omega_0$.

а) Якщо $x \in \text{Int } \widehat{S}_i \subset T$ для деякого $i \geq 1$, то $\text{Int } \widehat{S}_i$ є відкритим околom точки x у T .

б) Якщо $x \in \omega_i = \partial_+ \widehat{S}_i = \partial_- \widehat{S}_{i+1}$, $i \geq 1$, то x має відкритий окіл U , який перетинає тільки S_i і S_{i+1} , отже $U \subset T$.

Внаслідок цього $T \setminus \omega_0$ є відкритою підмножиною $Z \setminus \omega_0$.

2) Перевіримо, що $T \setminus \omega_0$ замкнена у $Z \setminus \omega_0$.

За побудовою $q^{-1}(\widehat{S}_i) = q^{-1}(\omega_{i-1}) \cup q^{-1}(\omega_i) \cup S_i$, причому $q^{-1}(\omega_i) \subset S_i \cup S_{i+1}$.

Отже,

$$q^{-1}(T) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} q^{-1}(\widehat{S}_i) = q^{-1}(\omega_0) \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i.$$

Множини $q^{-1}(\omega_0)$ і $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$, очевидно, замкнені в Z_0 , отже T замкнена в Z і $T \setminus \omega_0$ замкнена в $Z \setminus \omega_0$. \square

З цієї леми слідує, що ми можемо замінити T модельною смугою, отже ситуація зводиться до випадку, коли K складається з єдиного ребра з різними

кінцями. Тоді з випадку (i) слідує, що це ребро також може бути редуковане.

(v) Нарешті, нехай K є шляхом, що нескінченний у обидва боки. Повторюючи аргументи пункту (iv), можемо редукувати кожен нескінченну в один бік частину K до єдиної модельної смуги, а тоді за допомогою (i) редукувати всі ребра K . З цього також слідує, що Z є листово гомеоморфною до відкритої модельної смуги $\mathbb{R} \times (-1, 1)$.

Оскільки кожна смуга \widehat{S}_α може бути віднесена щонайбільше до однієї компоненти зв'язності графа G , то ми можемо застосувати випадки (i)-(v) послідовно до кожної компоненти зв'язності G . Це дозволяє редукувати всі листи типу (c2), або довести, що Z є листово гомеоморфною одній з поверхонь S або M .

Теорему 6.2.7 доведено.

Е.3 Доведення Лемми 6.3.3

Нехай $\xi : S \rightarrow \widehat{S}$ є смугою поверхні Z і $h \in \mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$. За припущенням $h(\widehat{S}) = \widehat{S}$, тому згідно Лемі 6.3.2 обмеження $h|_{\widehat{S}}$ підіймається до гомеоморфізма $g : S \rightarrow S$, такого що $\xi \circ g = h \circ \xi$. Більш того, з Лемми 6.3.1 і припущення, що h зберігає листи і орієнтації на них, слідує рівність

$$g(x, y) = (\lambda(x, y), y),$$

у якій відповідність $x \mapsto \lambda(x, y)$, $y \in (-1, 1)$, є автоморфізмом \mathbb{R} , що зберігає орієнтацію. Оскільки g є гомеоморфізмом і за побудовою зберігає кожен компоненту межі ∂S , то і для кожної компоненти межі ∂S відповідність $x \mapsto \lambda(x, y)$ є автоморфізмом цієї компоненти, що зберігає орієнтацію.

Тоді ізоморфізм $G : S \times [0, 1] \rightarrow S$ між g і id_S можемо означити за допомогою формули:

$$G(x, y; t) = ((1 - t)\lambda(x, y) + tx, y) \quad (\text{Е.3.1})$$

для $(x, y) \in S \subset \mathbb{R} \times [-1, 1]$.

Покажемо, що формули для G на різних смугах узгоджені з *афінними*

відображеннями склеювання ϕ_β для всіх $\beta \in \mathbf{B}$. Точніше, нехай $\xi : S \rightarrow \widehat{S}$ і $\xi' : S' \rightarrow \widehat{S}'$ є смугами поверхні Z . Припустимо, що для деяких $w, w' \in \{-1, 1\}$

$$Y \subset \partial S \cap (\mathbb{R} \times \{w\}), \quad X \subset \partial S' \cap (\mathbb{R} \times \{w'\}),$$

це дві компоненти межі, які склеєні за допомогою афінного гомеоморфізму $\phi : Y \rightarrow X$. Тоді $\phi(x, w) = (\psi(x), w')$, де ψ — деякий афінний гомеоморфізм інтервалів прямої, див. Зауваження 6.1.4.

Припустимо, що $g : S \rightarrow S$ та $g' : S' \rightarrow S'$ є відповідними підняттями відображень $h|_{\widehat{S}}$ та $h|_{\widehat{S}'}$. Тоді $g(x, y) = (\lambda(x, y), y)$, $(x, y) \in S$, і $g'(x, y) = (\lambda'(x, y), y)$, $(x, y) \in S'$.

Також нехай G і G' є відповідними ізотопіями для відображень g і g' , що задані за допомогою формули (Е.3.1).

За означенням $\phi \circ g = g' \circ \phi$, тому $\psi \circ \lambda(x, w) = \lambda'(\psi(x), w')$. Оскільки відображення ϕ (а разом з ним і ψ) є афінним, то позначивши через pr_1 проекцію на першу координату, отримаємо

$$\begin{aligned} \psi \circ \text{pr}_1 \circ G(x, w; t) &= \psi((1-t)\lambda(x, w) + tx) \\ &= (1-t)\psi \circ \lambda(x, w) + t\psi(x) = (1-t)\lambda'(\psi(x), w') + t\psi(x). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \phi \circ G(x, w; t) &= (\psi \circ \text{pr}_1 \circ G(x, w; t), w') \\ &= ((1-t)\lambda'(\psi(x), w') + t\psi(x), w') \\ &= G'(\psi(x), w'; t) = G' \circ \phi(x, w; t). \end{aligned}$$

Тому ізотопії (Е.3.1) узгоджені на різних модельних смугах, внаслідок чого вони породжують ізотопію між h і id_Z у $\mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$. Нескладно перевірити, що така ізотопія неперервна у $(h, t) \in \mathcal{H}'_0(\Delta_Z) \times I$, тому вона породжує стягування $\mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$.

Лемму 6.3.3 доведено.

Е.4 Доведення Теорема 6.3.4

Нехай $Q \subset \mathcal{H}(\Delta_Z)$ є підгрупою, яка складається з відображень, що відповідають (а), (б), (с). Перевіримо, що $\mathcal{H}_0(\Delta_Z) = Q$.

Включення $\mathcal{H}_0(\Delta_Z) \subset Q$. Припустимо, що $h \in \mathcal{H}_0(\Delta_Z)$, отже існує ізопія $h_t : Z \rightarrow Z$, $t \in I$, така що $h_0 = \text{id}_Z$, $h_1 = h$, і $h_t \in \mathcal{H}(\Delta_Z)$ для кожного $t \in I$.

(с) Оскільки $h_t(\Sigma(\Delta_Z)) = \Sigma(\Delta_Z)$ і кожен лист $\omega \subset \Sigma(\Delta_Z)$ є компонентою лінійної зв'язності простору $\Sigma(\Delta_Z)$, то

$$h(\omega) = h_1(\omega) = h_t(\omega) = h_0(\omega) = \omega, \quad t \in I.$$

Більш того, обмеження $h_t|_\omega : \omega \rightarrow \omega$ є ізопією між id_ω і $h|_\omega$, тому $h|_\omega$ зберігає орієнтацію.

(а) Далі, h також залишає інваріантною кожну компоненту $Z \setminus \Sigma(\Delta_Z)$. Але кожна така компонента є внутрішністю деякої смуги, тож $h(\widehat{S}_\alpha) = \widehat{S}_\alpha$ для кожного $\alpha \in \mathbf{A}$. Це доводить (а).

(б) Більш того, нехай $(g_\alpha)_t : \text{Int } S_\alpha \rightarrow \text{Int } S_\alpha$ є підняттям $h_t|_{\text{Int } \widehat{S}_\alpha}$. Тоді $(g_\alpha)_t = (\lambda_t(x, y), \mu_t(y))$, де λ_t і μ_t є неперервними у (x, y, t) . Крім того, $\{\mu_t\}_{t \in I}$ є ізопією між $\mu_0 = \text{id}_{(-1,1)}$ і $\mu_1 = \mu$. Тому μ зростає.

Аналогічно, для кожного фіксованого $y \in (-1, 1)$ відповідність $x \mapsto \lambda_t(x, y)$ також є ізопією між $\text{id}_{\mathbb{R}}$ і $x \mapsto \lambda(x, y)$. Отже, остання функція також зростає.

Для доведення оберненого включення $\mathcal{H}_0(\Delta_Z) \supset Q$ нам потрібна наступна лема:

Лема Е.4.1 $\mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$ є строгим деформаційним ретрактом Q .

Доведення. Нехай $h \in Q$, $\alpha \in \mathbf{A}$, і $g_\alpha : S_\alpha \rightarrow S_\alpha$ є підняттями для h , див. Лему 6.3.2. Тоді згідно (с)

$$g_\alpha(x, y) = (\lambda_\alpha(x, y), \mu_\alpha(y)),$$

причому μ зростає і $\lambda_\alpha(x, y)$ зростає по x при кожному фіксованому $y \in$

$(-1, 1)$. Означимо ізотопію $F_\alpha : S_\alpha \times I \rightarrow S_\alpha$ як

$$F_\alpha(x, y, t) = (\lambda_\alpha(x, y), ty + (1 - t)\mu_\alpha(y)). \quad (\text{E.4.1})$$

Тоді F_α фіксовано на ∂S_α , $(F_\alpha)_0 = g_\alpha$ і $(F_\alpha)_1$ зберігає кожен лист шарування Δ_{S_α} разом з орієнтацією. Отже, сім'я ізотопій $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ породжує ізотопію $F(h) : Z \times I \rightarrow I$ відображення h до дифеоморфізму, який зберігає кожен лист Δ_Z разом з його орієнтацією. Іншими словами, $F(h)_0 = h$, $F(h)_t \in Q$ для всіх $t \in I$, і $F(h)_1 \in \mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$.

Проста безпосередня перевірка показує, що відображення $F : Q \times I \rightarrow Q$, задане формулою $F(h, t) = F(h)_t$, неперервне. Крім того, якщо $h \in \mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$, то у (E.4.1) $\mu_\alpha(y) = y$, отже $F_\alpha(x, y, t) = g_\alpha(x, y)$, і тоді $F(h, t) = h$ для кожного $t \in I$. Інакше кажучи, F є деформацією, яка фіксована на $\mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$, тому $\mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$ є строгим деформаційним ретрактом Q . \square

Оскільки $\mathcal{H}'_0(\Delta_Z)$ зв'язна (навіть стягувана), з цієї леми слідує, що Q також зв'язно. Але $\text{id}_Z \in Q$, тому $Q \subset \mathcal{H}_0(\Delta_Z)$. Теорему 6.3.4 доведено.

Теорему 6.3.4 доведено.

Додаток Ж

Доведення окремих тверджень Розділу 7

Ж.1 Доведення Наслідку 7.1.6

Якщо $X \setminus (\text{Spec}(\Delta) \cup \partial X)$ листово гомеоморфний стандартному циліндру або листу Мебіуса, то наслідок виконується, див. Теореми 7.1.5 і 6.2.7. Отже, не обмежуючи загалу далі можемо вважати, що кожна компонента зв'язності Q_α множини $X \setminus (\text{Spec}(\Delta) \cup \partial X) = \sqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} Q_\alpha$ листово гомеоморфна до відкритої модельної смуги $\mathbb{R} \times (-1, 1)$.

Зафіксуємо сім'ю листових гомеоморфізмів $\phi_\alpha : \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow Q_\alpha$, $\alpha \in \mathbf{A}$. Тоді згідно Теоремі 7.1.5 для кожного $\alpha \in \mathbf{A}$ замикання $\widehat{S}_\alpha^- = \overline{\phi_\alpha(\mathbb{R} \times (-1, 0))}$ і $\widehat{S}_\alpha^+ = \overline{\phi_\alpha(\mathbb{R} \times (0, 1))}$ листово гомеоморфні до модельних смуг. (Зауважимо, що $\phi_\alpha(A) \subset \phi_\alpha(\overline{A}) \subset \overline{\phi_\alpha(A)}$, отже $\overline{\phi_\alpha(A)} = \overline{\phi_\alpha(\overline{A})}$ для кожного $A \subset \mathbb{R} \times (-1, 1)$ і $\alpha \in \mathbf{A}$.)

Позначимо через $q_\alpha^\pm : \widehat{S}_\alpha^\pm \rightarrow X$, $\alpha \in \mathbf{A}$, вкладення. Розглянемо незв'язне об'єднання $X' = \sqcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \widehat{S}_\alpha^- \sqcup \widehat{S}_\alpha^+$ і відображення $q : X' \rightarrow X$,

$$q(x) = q_\alpha^\pm(x), \quad \text{якщо } x \in \widehat{S}_\alpha^\pm, \alpha \in \mathbf{A}. \quad (\text{Ж.1.1})$$

Очевидно, це відображення неперервне.

Для кожного $\alpha \in \mathbf{A}$ зафіксуємо модельні смуги S_α^-, S_α^+ , а також листові гомеоморфізми $\psi_\alpha^- : S_\alpha^- \rightarrow \widehat{S}_\alpha^-$ і $\psi_\alpha^+ : S_\alpha^+ \rightarrow \widehat{S}_\alpha^+$. Крім того, позначимо

$$\begin{aligned}\phi_\alpha^- &= \phi_\alpha|_{\mathbb{R} \times (-1,0)} : \mathbb{R} \times (-1,0) \rightarrow X, \\ \phi_\alpha^+ &= \phi_\alpha|_{\mathbb{R} \times (0,1)} : \mathbb{R} \times (0,1) \rightarrow X.\end{aligned}$$

Зрозуміло, що образ ϕ_α^\pm належить до $\widehat{S}_\alpha^\pm \cap Q_\alpha$. Внаслідок цього означені ін'єктивні листові відображення $(\psi_\alpha^\pm)^{-1} \circ \phi_\alpha^\pm$.

Оскільки листами канонічного розшарування в просторі $\mathbb{R} \times (-1,0)$ є горизонтальні прямі, а листи канонічного розшарування у S_α^- є підмножинами горизонтальних прямих, то означене неперервне фактор-відображення $\chi_\alpha^- : (-1,0) \rightarrow \mathbb{R}$, яке замикає комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R} \times (-1,0) & \xrightarrow{(\psi_\alpha^-)^{-1} \circ \phi_\alpha^-} & S_\alpha^- \\ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_2 \\ (-1,0) & \xrightarrow{\chi_\alpha^-} & \mathbb{R}\end{array}$$

Тут pr_2 — проекція на другу координату. Не обмежуючи загальності міркувань, ми можемо вважати, що $\text{pr}_2(S_\alpha^-) = [-1,0]$.

Перевіримо, що відображення χ_α^- є монотонним.

Припустимо що χ_α^- має локальний екстремум у точці t_0 . Тоді або знайдеться $\tau \in (-1,0)$, близьке до $\chi_\alpha^-(t_0)$ і таке, що $\chi_\alpha^-(t_1) = \chi_\alpha^-(t_2) = \tau$ для деяких $t_1 \neq t_2$, або відображення χ_α^- локально постійне в t_0 .

Розглянемо перший випадок. Оскільки за означенням кожна множина $\mathbb{R} \times \{\tau\}$, $\tau \in (-1,0)$, є листом канонічного шарування на S_α^- , то прообраз листа $\mathbb{R} \times \{\tau\}$ має містити два різних листа $\mathbb{R} \times \{t_1\}$ і $\mathbb{R} \times \{t_2\}$ канонічного шарування на $\mathbb{R} \times (-1,0)$ і відображення $(\psi_\alpha^-)^{-1} \circ \phi_\alpha^-$ не може бути одночасно ін'єктивним і листовим.

Якщо ж відображення χ_α^- локально постійне в t_0 , то прообраз множини $\mathbb{R} \times \{\chi_\alpha^-(t_0)\}$ має містити континуум різних листів канонічного шарування на $\mathbb{R} \times (-1,0)$. Але за означенням модельної смуги кожна множина $\mathbb{R} \times \{\tau\}$,

$\tau \in [-1, 0]$ є об'єднанням не більш ніж зліченної кількості листів канонічного шарування на S_α^- . Отже і в цьому випадку відображення $(\psi_\alpha^-)^{-1} \circ \phi_\alpha^-$ не може бути одночасно ін'єктивним і листовим.

Внаслідок монотонності χ_α^- його образ має бути відкритою підмножиною \mathbb{R} .

З іншого боку, $\widehat{S}_\alpha^- = \overline{\phi_\alpha^-(\mathbb{R} \times (-1, 0))}$, тому

$$\mathbb{R} \times (-1, 0) \subset S_\alpha^- \subset \overline{(\psi_\alpha^-)^{-1} \circ \phi_\alpha^-(\mathbb{R} \times (-1, 0))} = \overline{\mathbb{R} \times \chi_\alpha^-((-1, 0))}.$$

Отже, $\chi_\alpha^-((-1, 0)) = (-1, 0)$, $\psi_\alpha^-(\mathbb{R} \times (-1, 0)) = \text{Int } \widehat{S}_\alpha^- \subset Q_\alpha$ і

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^-(\partial S_\alpha^-) &= \partial \widehat{S}_\alpha^- = \text{Fr } \phi_\alpha^-(\mathbb{R} \times (-1, 0)) \subset \\ &\subset \phi_\alpha^-(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \text{Fr } Q_\alpha \subset \phi_\alpha^-(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\text{Spec}(\Delta) \cup \partial X). \end{aligned}$$

Зокрема, якщо χ_α^- зростає, то

$$\partial_+ \widehat{S}_\alpha^- = \phi_\alpha^-(\mathbb{R} \times \{0\}) \subset Q_\alpha,$$

$$\partial_- \widehat{S}_\alpha^- \subset \text{Fr } Q_\alpha \subset \text{Spec}(\Delta) \cup \partial X.$$

Аналогічні міркування справедливі й для відображення $(\psi_\alpha^+)^{-1} \circ \phi_\alpha^+$.

Відмітимо, що $\text{Int } \widehat{S}_\alpha^- \cap \widehat{S}_\alpha^+ = \phi_\alpha^-(\mathbb{R} \times (-1, 0)) \cap \phi_\alpha^+(\mathbb{R} \times (0, 1)) = \emptyset$ для кожного $\alpha \in \mathbf{A}$. Крім того $\text{Int } \widehat{S}' \cap \text{Int } \widehat{S}'' \subset Q_{\alpha'} \cap Q_{\alpha''} = \emptyset$ якщо $\widehat{S}' \in \{\widehat{S}_{\alpha'}^-, \widehat{S}_{\alpha'}^+\}$, $\widehat{S}'' \in \{\widehat{S}_{\alpha''}^-, \widehat{S}_{\alpha''}^+\}$ і $\alpha' \neq \alpha''$.

Нехай $\omega \in \Delta$ — деякий лист. Згідно умови 3 на клас \mathcal{F} існують відкрита підмножина J_ω простору $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ і листовий гомеоморфізм $\nu_\omega : \mathbb{R} \times J_\omega \rightarrow V_\omega$ на деякий відкритий окіл V_ω множини ω у просторі X . (Множина $\mathbb{R} \times J_\omega$ розшарована на горизонтальні прямі.)

Оскільки сім'я листів шарування Δ , що належать $\text{Spec}(\Delta)$, локально скінченна, то сім'я листів, які належать $\text{Spec}(\Delta)' = \text{Spec}(\Delta) \cup \partial X$ теж локально скінченна. Тому існують такі J_ω і V_ω , що $(V_\omega \setminus \omega) \cap \text{Spec}(\Delta)' = \emptyset$, отже $V_\omega \setminus \omega \subset \bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} Q_\alpha$.

Не обмежуючи загальності міркувань можемо вважати, що множина J_α

зв'язна.

Зрозуміло, що $\omega \subset \partial X$ тоді й лише тоді, коли множина $V_\omega \setminus \omega$ зв'язна. У цьому випадку існує рівно один індекс $\alpha \in \mathbf{A}$, такий що $\omega \subset \overline{Q_\alpha}$.

Якщо множина $V_\omega \setminus \omega$ не є зв'язною, вона має дві компоненти зв'язності, отже існує не більше двох індексів $\alpha', \alpha'' \in \mathbf{A}$, таких що $\omega \subset \overline{Q_{\alpha'}} \cap \overline{Q_{\alpha''}}$. У цьому випадку $\omega \cap \overline{Q_\alpha} = \emptyset$, якщо $\alpha \neq \alpha', \alpha''$.

Внаслідок сказаного замкнене покриття $\{\overline{Q_\alpha}\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ простору X і його подрібнення $\{\widehat{S}_\alpha^\pm\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ є локально скінченними. Отже ці покриття є фундаментальними, див. [80]. (Множина $A \subset X$ замкнена тоді й лише тоді, коли всі перетини $A \cap \overline{Q_\alpha}$, і відповідно $A \cap \widehat{S}_\alpha^\pm$, замкнені). З цього випливає, що відображення (Ж.1.1) факторне, отже X є фактор-простором простору X' .

Відмітимо, що всі множини \widehat{S}_α^\pm є насиченими відносно розбиття Δ , тобто містять всі листи Δ , з якими мають непорожній перетин.

Зі сказаного вище легко слідує, що для кожного листа $\omega \in \Delta$ може виконуватись рівно одна з двох можливостей.

(i) $\omega \cap (\text{Spec}(\Delta) \cup \bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \phi_\alpha(\mathbb{R} \times \{0\})) = \emptyset$. Тоді або $\omega \subset \widehat{S} \cap \partial X$, або $\omega \subset \text{Int } \widehat{S}$ для деякого $\widehat{S} \in \{\widehat{S}_\alpha^\pm\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$. Зменшуючи за необхідності J_ω можна добитись, щоб окіл V_ω листа ω не перетинав інших елементів набору $\{\widehat{S}_\alpha^\pm\}$ крім \widehat{S} . Отже у цьому випадку існує єдина множина з набору $\{\widehat{S}_\alpha^\pm\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$, яка містить ω .

(ii) $\omega \subset \text{Spec}(\Delta) \cup \bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} \phi_\alpha(\mathbb{R} \times \{0\})$. Тоді зменшуючи за необхідності J_ω можна добитись, щоб кожна з двох компонент зв'язності множини $V_\omega \setminus \omega$ перетинала рівно одну множину з набору $\{\widehat{S}_\alpha^\pm\}$. Нехай це будуть множини \widehat{S}' і \widehat{S}'' . З одного боку ω за попереднім припущенням лежить на межі кожної з множин \widehat{S}' і \widehat{S}'' . З іншого боку, відкритий окіл V_ω множини ω відповідає співвідношенню $V_\omega \subset \widehat{S}' \cup \widehat{S}''$. Внаслідок цього $\widehat{S}' \neq \widehat{S}''$. Отже, існує рівно дві множини з набору $\{\widehat{S}_\alpha^\pm\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$, які містять ω , і ω є підмножиною спільної межі цих двох множин.

За побудовою всі відображення q_α^\pm є листовими, тому $\partial \widehat{S}_\alpha^\pm$ є об'єднанням образів межових інтервалів модельних смуг S_α^\pm . Крім того всі q_α^\pm є вкладеннями. Внаслідок цього виконуються властивості Означення 6.1.2 і співвідношення (6.1.1).

Наслідок 7.1.6 доведено.

Ж.2 Доведення Лемми 7.2.4

Розглянемо Хаусдорфів підпростір \widehat{Y}_y простору Y . Нехай C є компонентою зв'язності цього підпростору, що містить y .

Відмітимо, що за означенням кожна точка множини ∂Y має в Y окіл гомеоморфний $[0, 1)$, отже ця множина є локально скінченною. А разом з нею є локально скінченною і множина $\mathcal{V} \cup \partial Y$. Оскільки $\mathcal{V} \cup \partial Y$ замкнена згідно Лемі 7.2.3, то $(\mathcal{V} \setminus \{y\}) \cup \partial Y$ також є замкненою множиною і не містить точку y . Тому множина \widehat{Y}_y відкрита в Y .

Зрозуміло, що простір \widehat{Y}_y локально зв'язний. Тому його компонента C відкрита в \widehat{Y}_y , отже C відкрита також і в Y .

Множина \mathcal{V} локально скінченна, тому y має окіл у \widehat{Y}_y , гомеоморфний відкритій підмножині простору $[0, 1)$. Оскільки $\widehat{Y}_y \setminus \{y\} = \widehat{Y}$, то у всіх інших точках простір \widehat{Y}_y локально гомеоморфний відкритому інтервалу згідно Лемі 7.2.3. Внаслідок цього у випадку $y \in \partial Y$ компонента C гомеоморфна $[0, 1)$. Якщо ж $y \in \text{Int } Y$, то C є зв'язним одновимірним многовидом без краю.

Нехай $y \in \partial Y$. Тоді C гомеоморфна $[0, 1)$. Зафіксуємо гомеоморфізм $\phi : [0, 1) \rightarrow C$. Оскільки згідно зі сказаним вище $C \setminus \{y\}$ — одновимірний многовид без краю, то $\phi(0) = y$.

Відмітимо, що $\phi(0, 1)$ є зв'язною підмножиною \widehat{Y} . Тому існує $\gamma \in \mathcal{A}$, таке що $\phi(0, 1) \subset W_\gamma \subset \widehat{Y}$. З іншого боку, $W_\gamma \subset C$, оскільки $W_\gamma \cap C \neq \emptyset$ і W_γ — зв'язна підмножина \widehat{Y}_y . Отже $\phi(0, 1) = W_\gamma$.

Нехай $s = \phi^{-1}(x_\gamma)$. Оскільки множина $W_\gamma \setminus \{x_\gamma\}$ є об'єднанням компонент зв'язності простору \widehat{Y}^0 , то зв'язні множини $\phi(0, s)$ і $\phi(s, 1)$ є компонентами цього простору. Отже, $\phi(0, s) = \widehat{W}_\delta$ для деякого $\delta \in \mathcal{B}$.

Зрозуміло, що множина $V = \phi[0, s) = \{y\} \cup \widehat{W}_\delta$ відкрита у \widehat{Y}_y і має порожній перетин з \widehat{W}_β якщо $\beta \neq \delta$. Внаслідок цього, y не міститься у замиканні множини \widehat{W}_β якщо $\beta \neq \delta$.

Оскільки підпростір \widehat{Y}_y відкритий у Y , то відображення $\psi : [0, 1) \rightarrow V$, $\psi(t) = \phi(st)$, $t \in [0, 1)$, відповідає Лемі.

Припустимо, що $y \in \mathcal{V} \setminus \partial Y$. Тоді множина C гомеоморфна інтервалу $(-1, 1)$ або колу S^1 .

У першому випадку зафіксуємо гомеоморфізм $\phi : (-1, 1) \rightarrow C$ такий що $\phi(0) = y$. По аналогії з тим, як це було зроблено у випадку $y \in \partial Y$, легко перевірити, що множини $\phi(-1, 0)$ і $\phi(0, 1)$ є різними компонентами зв'язності простору \widehat{Y} , наприклад $\phi(-1, 0) = W_{\gamma'}$, $\phi(0, 1) = W_{\gamma''}$, $\gamma' \neq \gamma''$. Нехай $\phi(r) = x_{\gamma'}$, $\phi(s) = x_{\gamma''}$ для деяких $-1 < r < 0 < s < 1$. Тоді, як і вище, $\phi(-r, 0) = \widetilde{W}_{\delta'}$ і $\phi(0, s) = \widetilde{W}_{\delta''}$ для деяких $\delta', \delta'' \in \mathcal{B}$, $\delta' \neq \delta''$. Отже, y не міститься в замиканні множини \widetilde{W}_{β} , якщо $\beta \notin \{\delta', \delta''\}$, множина $V = \phi(-r, s)$ відкрита в Y і відображення $\mu : (-1, 1) \rightarrow V$,

$$\mu(t) = \begin{cases} \phi(rt), & t < 0, \\ \phi(st), & t \geq 0, \end{cases}$$

відповідає Лемі.

Припустимо, що множина C гомеоморфна колу. Нехай $\phi : S^1 \rightarrow C$ є гомеоморфізмом, $\phi(q) = y$ для $q \in S^1$. Аналогічно до попереднього, $\phi(S^1 \setminus \{q\}) = W_{\gamma}$ для деякого $\gamma \in \alpha$. Нехай $s = \phi^{-1}(x_{\gamma})$. Очевидно, що $s \neq q$. Відомо, що довільна пара різних точок робиває коло S^1 . Нехай S' і S'' є компонентами зв'язності множини $S^1 \setminus \{q, s\}$. Легко бачити, що зв'язні множини $\phi(S')$ і $\phi(S'')$ є різними компонентами зв'язності простору \widehat{Y}^0 , містять y у своєму замиканні в просторі Y , і ніяка інша компонента зв'язності \widehat{Y}^0 не володіє цією властивістю. Нарешті, пряма безпосередня перевірка показує, що множина $\phi(S^1 \setminus \{s\})$ відкрита в Y і що відображення $\mu = \phi \circ \xi : (-1, 1) \rightarrow \phi(S^1 \setminus \{s\})$ відповідає Лемі. Тут $\xi : (-1, 1) \rightarrow S^1 \setminus \{q\}$ — довільний гомеоморфізм, такий що $\xi(0) = q$. Ми залишаємо деталі читачеві.

Ж.3 Доведення Лемми 7.3.1

Перша частина твердження 6) відома, див. [80]. Твердження 1), 2), і друга частина твердження 6) прості і ми залишаємо їх читачеві.

3) Нехай відображення p є відкритим і множина $B \subset X$ насичена. Тоді

$X \setminus B$ також насичена, тобто $S(X \setminus B) = X \setminus B$, внаслідок чого

$$X \setminus \bar{B} \subset S(X \setminus \bar{B}) \subset S(X \setminus B) = X \setminus B.$$

Тому

$$\bar{B} \supset X \setminus S(X \setminus \bar{B}) \supset B.$$

Оскільки $X \setminus \bar{B}$ відкрита, то $S(X \setminus \bar{B})$ також відкрита, отже множина $X \setminus S(X \setminus \bar{B})$ є замкненою і містить B . Тому вона мусить містити також замикання \bar{B} , отже $\bar{B} = X \setminus S(X \setminus \bar{B})$, звідки слідує (7.3.1).

Доведемо (7.3.2). Оскільки відображення p неперервне, то підмножина $p^{-1}(\overline{p(B)})$ є замкненою і містить B . Тому вона містить \bar{B} і виконується співвідношення $p(\bar{B}) \subset \overline{p(B)}$.

В протилежний бік, з (7.3.1) слідує, що множина \bar{B} є насиченою і замкненою. Тоді за означенням фактор-топології підмножина $p(\bar{B})$ є замкненою і містить $p(B)$. Отже, вона також містить $\overline{p(B)}$, тобто $p(\bar{B}) \supset \overline{p(B)}$.

4) Припустимо, що сім'я β є локально скінченною і $x \in X$. Нам потрібно знайти окіл U точки x , який перетинає тільки скінченну кількість елементів α . Нехай $y = p(x)$. Оскільки сім'я β є локально скінченною, то існує окіл V точки y , який перетинає тільки скінченну кількість елементів $W_{i_1}, \dots, W_{i_k} \in \beta$. Тоді $p^{-1}(V)$ є відкритим околom точки x і перетинає тільки наступні елементи $p^{-1}(W_{i_1}), \dots, p^{-1}(W_{i_k})$ сім'ї α .

В протилежний бік, припустимо, що сім'я α є локально скінченною і відображення p відкрите. Нехай $y \in Y$ і $x \in X$ зв'язані рівністю $p(x) = y$. Тоді існує окіл U точки x , який перетинає тільки скінченну кількість елементів, наприклад $p^{-1}(W_{i_1}), \dots, p^{-1}(W_{i_k})$, сім'ї α . Тому його насичення $S(U) = p^{-1}(p(U))$ також перетинає тільки $p^{-1}(W_{i_1}), \dots, p^{-1}(W_{i_k})$.

Оскільки відображення p відкрите, то образ $p(U)$ є відкритим околom точки y . Ми стверджуємо, що $p(U)$ перетинає тільки елементи W_{i_1}, \dots, W_{i_k} сім'ї α . Дійсно, якщо $p(U) \cap W_i \neq \emptyset$ для деякого $i \in \Lambda$, то $p^{-1}(p(U)) \cap p^{-1}(W_i) \neq \emptyset$, що можливо тільки коли $i \in \{i_1, \dots, i_k\}$.

5) Для кожного $i \in \mathbb{N}$ розглянемо наступну підсім'ю $\alpha_i = \{\omega_j\}_{j \geq i}$ сім'ї α , так що $\alpha = \alpha_1$ і $\alpha_{i+1} \subset \alpha_i$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Тоді кожна α_i також локально

скінченна, внаслідок чого об'єднання $A_i = \bigcup_{j=i}^{\infty} \omega_j$ є замкненою підмножиною X .

Оскільки простір X нормальний і множини ω_1 та A_2 замкнені і неперетинні, то існує відкритий окіл U_1 множини ω_1 , такий що $\overline{U_1} \cap A_2 = \emptyset$. Тому множини ω_2 і $\overline{U_1} \cup A_3$ неперетинні і замкнені, внаслідок чого існує відкритий окіл U_2 множини ω_2 , який не перетинає $\overline{U_1} \cup A_3$. Повторюючи ці міркування і далі, ми побудуємо для кожного $i \in \mathbb{N}$ відкритий окіл U_i множини ω_i , такий що $\overline{U_i}$ не перетинає $(\bigcup_{j=1}^{i-1} \overline{U_j}) \cup A_{i+1}$. Тоді $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$ для всіх $i \neq j \in \mathbb{N}$.

Лему 7.3.1 доведено.

Ж.4 Доведення Твердження 7.5.2

Нам буде зручно уявляти, що для функції $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ її *графік* є підмножиною $\{(f(y), y) \mid y \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$, так що ми переставляємо координати місцями, порівняно зі стандартним означенням. Зокрема, для $q \in \mathbb{R}$ вертикальний сегмент $q \times [a, b]$ може вважатися графіком постійної функції $[a, b] \mapsto q$.

Нам будуть потрібні наступні три леми.

Лема Ж.4.1 (див. [122, Лема 6.1.1]) *Нехай $\Delta_k = \{(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k \mid y_1 < y_2 < \dots < y_k\}$ і $q_1 < q_2 < \dots < q_k \in \mathbb{R}$. Тоді існує C^∞ функція $u_k : \mathbb{R} \times \Delta_k \rightarrow \mathbb{R}$, що відповідає наступним властивостям:*

- (а) *для кожного $(y_1, \dots, y_k) \in \Delta_k$ відповідність $x \mapsto u_k(x; y_1, \dots, y_k)$ є гомеоморфізмом $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що зберігає орієнтацію;*
- (б) *$u_k(x; q_1, \dots, q_k) = x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$;*
- (с) *$u_k(y_i; y_1, \dots, y_k) = q_i$ для $i = 1, \dots, k$.*

Доведення. Побудова функції u_k подібна до [122, Лема 6.1.1]. Наприклад, можна означити

$$u_1(x; y_1) = x - y_1 + q_1, \quad u_2(x; y_1, y_2) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{y_2 - y_1}(x - y_1).$$

Залишаємо подробиці читачеві. \square

Лема Ж.4.2 Нехай $\gamma_i : (c, s] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ — скінченна сім'я неперервних функцій, причому якщо $i \neq j$, то $\gamma_i(y) \neq \gamma_j(y)$ для кожного $y \in (c, s]$.

Тоді існує гомеоморфізм $\phi : \mathbb{R} \times (c, s] \rightarrow \mathbb{R} \times (c, s]$ такий що

$$(1) \phi(\mathbb{R} \times y) = \mathbb{R} \times y \text{ для всіх } y \in (c, s];$$

$$(2) \phi \text{ нерухомий на } \mathbb{R} \times s;$$

(3) ϕ відображає графік $\{(\gamma_i(y), y) \mid y \in (c, s]\}$ функції γ_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, на вертикальний відрізок $\gamma_i(s) \times [a, s]$.

Доведення. Не обмежуючи загалу, можемо вважати, що $\gamma_i < \gamma_j$ при $i < j$.

Нехай $u_k : \mathbb{R} \times \Delta_k \rightarrow \mathbb{R}$ — функція з Лемми Ж.4.1, побудована для чисел $q_i = \gamma_i(s)$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Тоді гомеоморфізм ϕ , що відповідає (1)-(3), може бути означений за допомогою наступного співвідношення:

$$\phi(x, y) = (u_k(x; \gamma_1(y), \dots, \gamma_k(y)), y).$$

Справді, умова (1) очевидно виконується. Крім того, з властивості (b) функції u_k слідує, що

$$\phi(x, s) = (u_k(x; \gamma_1(s), \dots, \gamma_k(s)), s) = (x, s)$$

що доводить умову (2). Нарешті, з властивості (c) функції u_k слідує, що

$$\phi(\gamma_i(y), y) = (u_k(\gamma_i(y); \gamma_1(y), \dots, \gamma_k(y)), y) = (\gamma_i(s), y),$$

отже умова (3) теж виконана. \square

Лема Ж.4.3 Нехай послідовність $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset (c, d]$ прямує до $\lim_{i \rightarrow \infty} d_i = c$. Нехай для кожного $i \in \mathbb{N}$ фіксовано неперервну функцію $\gamma_i : (c, d_i] \rightarrow \mathbb{R}$ так, що графіки функцій γ_i та γ_j не перетинаються, якщо $i \neq j$. Тоді існує гомеоморфізм $\eta : \mathbb{R} \times (c, d] \rightarrow \mathbb{R} \times (c, d]$, такий що

$$\bullet \eta(\mathbb{R} \times y) = \mathbb{R} \times y \text{ для всіх } y \in (c, d];$$

$\bullet \eta$ відображає графік $\{(\gamma_i(y), y) \mid y \in (c, d_i]\}$ функції γ_i на вертикальний відрізок $q_i \times (c, d_i]$ для деякого $q_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$.

Доведення. Не обмежуючи загалу, додатково ми можемо вважати, що послідовність $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ незростаюча. Вилучимо з $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ елементи, що повторюються, і позначимо те що залишилось через $\{s_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Отже, існує зростаюча послідовність індексів $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_n < \dots$, для якої

$$s_i = d_{j_i} = d_{j_i+1} = \dots = d_{j_{i+1}-1} > s_{i+1} = d_{j_{i+1}} = \dots$$

Тоді згідно Лемі **Ж.4.2** існує гомеоморфізм $\phi_1 : \mathbb{R} \times (c, s_1] \rightarrow \mathbb{R} \times (c, s_1]$, нерухомий на $\mathbb{R} \times s_1$, який лишає незмінною другу координату і відображає графіки функцій $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_2-1}$ на вертикальні відрізки. Продовжимо ϕ_1 за допомогою тотожного відображення на $\mathbb{R} \times [s_1, d]$ до гомеоморфізму на всьому просторі $\mathbb{R} \times (c, d]$.

Позначимо через γ_i^1 образ графіка функції γ_i під дією ϕ_1 . Тоді знову існує гомеоморфізм $\phi_2 : \mathbb{R} \times (c, d] \rightarrow \mathbb{R} \times (c, d]$, який не змінює другу координату, є нерухомим на $\mathbb{R} \times [s_2, d]$, і відображає графіки функцій $\gamma_{j_1}^1, \dots, \gamma_{j_3-1}^1$ на вертикальні відрізки.

Отже, композиція $\phi_2 \circ \phi_1$ не змінює другу координату і відображає графіки функцій $\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_3-1}$ на вертикальні відрізки. Позначимо через γ_i^2 образ графіка функції γ_i під дією $\phi_2 \circ \phi_1$.

За допомогою подібних міркувань ми побудуємо нескінченну сім'ю гомеоморфізмів $\phi_1, \dots, \phi_k, \dots$ множини $\mathbb{R} \times (c, d]$, таку що ϕ_k не змінює другу координату, є нерухомим на $\mathbb{R} \times [s_k, d]$, і відображає графіки функцій $\gamma_{j_1}^{k-1}, \dots, \gamma_{j_{k+1}-1}^{k-1}$ на вертикальні відрізки.

Оскільки $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i = c$, то коректно означена нескінченна композиція

$$\eta = \dots \circ \phi_m \circ \phi_{m-1} \circ \dots \circ \phi_1 : \mathbb{R} \times (c, d] \rightarrow \mathbb{R} \times (c, d],$$

і вона є гомеоморфізмом, що відповідає твердженню Лемі. \square

Щоб вивести Твердження **7.5.2**, припустимо що T_i визначається за допомогою функцій $\alpha_i, \beta_i : (c, d_i] \rightarrow \mathbb{R}$. Позначимо $\gamma_{2i-1} = \alpha_i$ і $\gamma_{2i} = \beta_i$. Тоді існування відображення η слідує з Лемі **Ж.4.3**.

Ж.5 Доведення Лема 7.6.1

1) Позначимо $A^\circ = A \setminus K$ і $B^\circ = B \setminus K$. Тоді $K \subset \overline{A^\circ}$, отже

$$\overline{A} = \overline{A^\circ \cup K} = \overline{A^\circ} \cup K = \overline{A^\circ}.$$

Крім того, оскільки A° і B° відкриті в X і неперетинні, то $\overline{A} \cap B^\circ = \overline{A^\circ} \cap B^\circ = \emptyset$, звідки $\overline{A} \setminus Q = \overline{A} \setminus (A \cup B^\circ) = \overline{A} \setminus A$. Доведення для B подібне.

2) З (1) слідує, що $\overline{Q} \setminus Q = (\overline{A} \setminus Q) \cup (\overline{B} \setminus Q) = (\overline{A} \setminus A) \cup (\overline{B} \setminus B)$.

Доведемо, що $\overline{Q} \setminus Q \subset \text{Spec}(\Delta)^*$. Припустимо, $\overline{Q} \setminus Q \not\subset \text{Spec}(\Delta)^*$. Тоді існує компонента зв'язності P множини $X \setminus \text{Spec}(\Delta)^*$ відмінна від Q і така, що $\overline{Q} \cap P \neq \emptyset$. Але P відкрита в X , отже $P \cap Q \neq \emptyset$ і тому $P = Q$, що суперечить припущенню.

3а) Відмітимо, що сім'я $\text{Spec}(\Delta)^* \setminus \{\omega\}$ є локально скінченною, так само як і $\text{Spec}(\Delta)^*$. Отже множина

$$W := X \setminus (\text{Spec}(\Delta)^* \setminus \omega) = (X \setminus \text{Spec}(\Delta)^*) \cup \omega$$

відкрита в X . З 2) слідує, що $Q = \overline{Q} \cap (X \setminus \text{Spec}(\Delta)^*)$, тому множина $Q \cup \omega = \overline{Q} \cap ((X \setminus \text{Spec}(\Delta)^*) \cup \omega) = \overline{Q} \cap W$ відкрита в \overline{Q} .

Аналогічно, з 1) слідує, що $A = \overline{A} \cap Q$, тому множина $A \cup \omega = \overline{A} \cap \overline{Q} \cap ((X \setminus \text{Spec}(\Delta)^*) \cup \omega) = \overline{A} \cap W$ відкрита в \overline{A} .

3б) Відмітимо, що множина $A \cup \omega$ насичена і $p(A \cup \omega)$ гомеоморфна $[0, 1]$ згідно Лемі 7.2.4. Оскільки $p : A \cup \omega \rightarrow p(A \cup \omega)$ є локально-тривіальним розшаруванням з шаром \mathbb{R} , то $A \cup \omega$ листово гомеоморфна до $\mathbb{R} \times [0, 1]$, отже і до N .

3с) Достатньо довести, що множина $\psi(R)$ замкнена в множині \overline{A} , яка в свою чергу замкнена в X , внаслідок чого $\psi(R)$ також замкнена в X .

Нехай послідовність $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \psi(R)$ має граничну точку $z \in \overline{A}$. Ми маємо довести, що $z \in \psi(R)$. Переходячи до збіжної підпослідовності, можемо вважати, що $\{z_i\}$ збігається до z . Нехай $(x_i, y_i) = \psi^{-1}(z_i) \in R$. Оскільки \overline{R} є компактом, послідовність $\{(x_i, y_i)\}$ має граничну точку $(\bar{x}, \bar{y}) \in \overline{R}$. Не обме-

жуючи загалу можемо вважати, що $\{(x_i, y_i)\}$ збігається до (\bar{x}, \bar{y}) .

Якщо $(\bar{x}, \bar{y}) \in R$, то $z = \lim_{i \rightarrow \infty} z_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \psi(x_i, y_i) = \psi(\bar{x}, \bar{y}) \in \psi(R)$. У протилежному випадку $(\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{R} \setminus R \subset \mathbb{R} \times 0$, отже $\bar{y} = 0$ і $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = \bar{y} = 0$. Внаслідок цього $z \notin A = \psi(\mathbb{R} \times (0, 1])$. Тому $z \in \bar{U} \cap (\bar{A} \setminus A) = \omega = \psi(J) \subset \psi(R)$.

Лему 7.6.1 доведено.

Додаток І

Доведення Лема 11.1.5

Доведемо спочатку одне допоміжне твердження. Позначимо $I = [0, 1]$, $\mathring{I} = (0, 1) = I \setminus \{0, 1\}$.

Твердження І.1.1 *В умовах Лема 11.1.5 виконується наступне твердження.*

Нехай $\gamma : I \rightarrow M^2$ — проста неперервна крива і $\gamma(I) \subseteq U^{-1}(c)$ для деякого $c \in \mathbb{R}$. Якщо множина $\gamma(\mathring{I})$ є відкритою в $U^{-1}(c)$ у топології індукованій з M^2 , то функція $V \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ є строго монотонною.

Доведення. Припустимо, що всупереч Твердженню для деяких $\tau_1, \tau_2 \in I$, $\tau_1 < \tau_2$ виконується рівність $V \circ \gamma(\tau_1) = V \circ \gamma(\tau_2)$.

Оскільки функція $V \circ \gamma$ неперервна і множина $[\tau_1, \tau_2]$ є компактом, то коректно означені числа

$$d_1 = \min_{t \in [\tau_1, \tau_2]} V \circ \gamma(t), \quad d_2 = \max_{t \in [\tau_1, \tau_2]} V \circ \gamma(t).$$

Зафіксуємо $s_1, s_2 \in [\tau_1, \tau_2]$, такі що $d_i = V \circ \gamma(s_i)$, $i = 1, 2$.

Позначимо $W = (\tau_1, \tau_2)$. Очевидно, це відкрита підмножина \mathring{I} .

Спочатку розглянемо випадок $d_1 = d_2$. Тоді $[\tau_1, \tau_2] \subseteq (V \circ \gamma)^{-1}(d_1)$. Отже, V відображає відкриту підмножину $\gamma(W)$ множини рівня $U^{-1}(c)$ на одноточкову множину $\{d_1\}$, яка не є відкритою підмножиною \mathbb{R} . Внаслідок цього V не є відкритим на множинах рівня U .

Припустимо тепер, що $d_1 \neq d_2$. Оскільки $V \circ \gamma(\tau_1) = V \circ \gamma(\tau_2)$ згідно з попереднім припущенням, то одна з точок s_1 або s_2 міститься у W .

Нехай $s_1 \in W$ (випадок $s_2 \in W$ розглядається аналогічно). Тоді $V \circ \gamma(W) \subseteq [d_1, +\infty)$ і V не може відобразити відкриту підмножину $\gamma(W)$ множини рівня $U^{-1}(c)$ на відкриту підмножину \mathbb{R} , оскільки її образ мав би містити межову точку $d_1 = V \circ \gamma(s_1)$. Отже, в цьому випадку V не є відкритою на множинах рівня U .

Отримана суперечність показує, що наше початкове припущення не вірне і функція $V \circ \gamma$ є строго монотонною на I . \square

Перейдемо безпосередньо до **доведення Лема 11.1.5**. Нехай Q є відкритим оточом точки $p \in M^2$.

Ми збираємось перевірити, що множина $F(Q)$ містить оточ точки $F(p)$. У той же час ми доведемо, що p є ізольованою точкою множини рівня $F^{-1}(F(p))$.

Без обмеження загальності можемо вважати, що $U(p) = V(p) = 0$.

Нехай N є простим оточом точки p і $T : D \rightarrow N$ — гомеоморфізм, такий що для деякого $n \in \mathbb{N}$ виконується наступна рівність $u(z) = U \circ T(z) = \operatorname{Re} z^n$, $z \in D$ (див. Означення 1.1.1 і зауваження, яке за ним слідує). Зрозуміло, що не обмежуючи загальності ми можемо вважати, що N досить мала і міститься в Q .

Зауважимо, що для довільної множини рівня Γ функції U перетин $\Gamma \cap T(D) = \Gamma \cap N$ відкритий у Γ . Внаслідок цього оскільки T є гомеоморфізмом, то відображення $v = V \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}$ відкрите на множинах рівня $u = U \circ T : D \rightarrow \mathbb{R}$ (див. Означення 11.1.1).

Розглянемо дві можливості.

Випадок 1. Нуль є регулярною точкою гладкої функції $u = U \circ T$, тобто $n = 1$ і $u(z) = \operatorname{Re} z$, $z \in D$.

У цьому випадку $u^{-1}(u(0)) = u^{-1}(U(p)) = T^{-1}(U^{-1}(U(p))) = \{0\} \times (-1, 1)$. Згідно з Твердженням И.1.1 функція v є строго монотонною на кожному відрізку, що міститься у цьому інтервалі, отже вона строго монотонна на $\{0\} \times (-1, 1)$. Внаслідок цього для точок $z_1 = 0 - i/2$ і $z_2 = 0 + i/2$ виконується наступна нерівність $v(z_1) \cdot v(z_2) < 0$.

Відмітимо, що зі сказаного вище слідує, що V монотонна на дузі $\beta = T(\{0\} \times (-1, 1)) = U^{-1}(U(p)) \cap N$. І оскільки $F^{-1}(F(p)) \cap N \subset \beta$, то $F^{-1}(F(p)) \cap N = \{p\}$, тому p є ізольованою точкою множини рівня $F^{-1}(F(p))$.

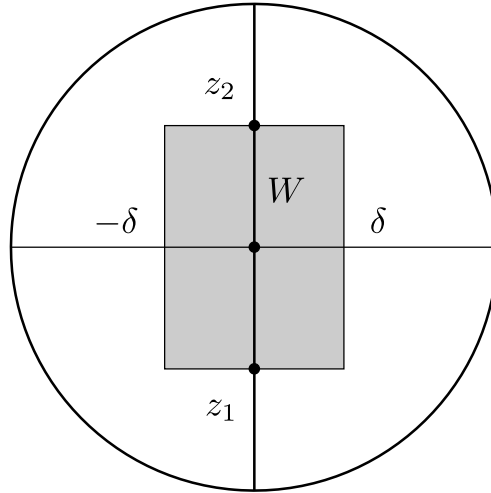


Рис. И.1.1:

Нехай $d_1 = v(z_1) < 0$ і $d_2 = v(z_2) > 0$ (Випадок $d_1 > 0$ і $d_2 < 0$ розглядається аналогічно). Позначимо

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min(|d_1|, |d_2|) > 0.$$

Функція v неперервна, тому існує $\delta > 0$, для якого виконуються наступні імплікації

$$\begin{aligned} |z - z_1| < \delta &\Rightarrow |v(z) - d_1| < \varepsilon, \\ |z - z_2| < \delta &\Rightarrow |v(z) - d_2| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Розглянемо окіл $W = (-\delta, \delta) \times (-1/2, 1/2)$ початку координат, який зображено на Рис. И.1.1. Легко бачити, що для кожного $x \in (-\delta, \delta)$ виконуються

наступні співвідношення

$$\begin{aligned} u(x + iy) &= x, \quad y \in (-\varepsilon, \varepsilon), \\ v(x - i/2) &< v(z_1) + \varepsilon < -2\varepsilon + \varepsilon = -\varepsilon, \\ v(x + i/2) &> v(z_2) - \varepsilon > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

З двох останніх рядків і з неперервності v на відрізку $\{x\} \times [-1/2, 1/2]$ слідує, що $v(\{x\} \times [-1/2, 1/2]) \supseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$. Отже

$$F \circ T(\{x\} \times [-1/2, 1/2]) \supseteq \{x\} \times (-\varepsilon, \varepsilon), \quad x \in (-\delta, \delta).$$

Оскільки $T(W) \subseteq N \subseteq Q$ за вибором N , то

$$0 = F(p) \in (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq F \circ T(W) \subseteq F(Q).$$

Випадок 2. Початок координат є сідловою точкою функції $u = U \circ T$, тобто $u(z) = \operatorname{Re} z^n$, $z \in D$ для деякого $n > 1$.

У цьому випадку

$$u^{-1}(u(0)) = T^{-1}(U^{-1}(U(p))) = \{0\} \cup \bigcup_{k=0}^{2n-1} \gamma_k,$$

де $\gamma_k = \{z \in D \mid z = a \cdot \exp(\pi i(k - 1/2)/n), a \in (0, 1)\}$, $k = 1, \dots, 2n - 1$.

Як і вище, з Твердження [И.1.1](#) слідує, що функція $v = V \circ T$ є строго монотонною на кожній дузі γ_k , $k = 1, \dots, 2n - 1$. Оскільки v неперервна і 0 є граничною точкою для кожного γ_k , то $v(z) \neq v(0)$ для всіх $z \in \bigcup_k \gamma_k$. Отже, $0 = (F \circ T)^{-1}(F \circ T(0))$ і $F^{-1}(F(p)) \cap N = \{p\}$, тобто p є ізольованою точкою множини рівня $F^{-1}(F(p))$.

Позначимо через

$$R_k = \left\{ z \in D \mid z = a e^{i\varphi}, a \in [0, 1), \varphi \in \left[\frac{\pi(k-1/2)}{2}, \frac{\pi(k+1/2)}{2} \right] \right\},$$

$k = 0, \dots, 2n - 1$

сектори, на які диск D ділиться множиною рівня $u^{-1}(u(0))$.

Також позначимо

$$D_l = \{z \in D \mid \operatorname{Re} z \leq 0\}, \quad D_r = \{z \in D \mid \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

Розглянемо відображення $\Phi : D \rightarrow D$, означене як $\Phi(z) = z^n$, $z \in D$. Легко бачити, що для кожного $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$ в залежності від парності Φ гомеоморфно відображає сектор R_k на D_l або на D_r . Означимо відображення $\Phi_k : R_k \rightarrow D_r$ наступним чином

$$\Phi_k = \begin{cases} \Phi|_{R_k}, & \text{якщо } k = 2m, \\ \operatorname{Inv} \circ \Phi|_{R_k}, & \text{якщо } k = 2m+1, \end{cases} \quad k = 0, \dots, 2n-1,$$

де $\operatorname{Inv} : D \rightarrow D$ означено як $\operatorname{Inv}(z) = -z$, $z \in D$. Очевидно, всі Φ_k є гомеоморфізмами.

Розглянемо зворотні відображення $\varphi_k = \Phi_k^{-1} : D_r \rightarrow D$, $k = 0, \dots, 2n-1$. За побудовою всі вони є вкладеннями. Більш того, легко бачити, що

$$u_k(z) = u \circ \varphi_k(z) = \begin{cases} \operatorname{Re} z, & \text{якщо } k = 2m, \\ -\operatorname{Re} z, & \text{якщо } k = 2m+1. \end{cases}$$

Зафіксуємо $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$. Зрозуміло, що φ_k гомеоморфно відображає область

$$\mathring{D}_r = \{z \in D \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

на область

$$\mathring{R}_k = \left\{ z \in D \mid z = ae^{i\varphi}, a \in (0, 1), \varphi \in \left(\frac{\pi(k-1/2)}{2}, \frac{\pi(k+1/2)}{2} \right) \right\},$$

отже за допомогою міркувань, подібних до тих, що передують випадку 1, ми можемо перевірити, що відображення $\mathring{v}_k = v \circ \varphi_k|_{\mathring{D}_r} : \mathring{D}_r \rightarrow \mathbb{R}$ відкрите на множинах рівня функції $\mathring{u}_k = u \circ \varphi_k|_{\mathring{D}_r} : \mathring{D}_r \rightarrow \mathbb{R}$. Як і вище, з Твердження **И.1.1**

слідуює, що функція \mathring{v}_k є строго монотонною на кожній дузі

$$\alpha_c = \mathring{u}_k^{-1}(\mathring{u}_k(c + 0i)) = \{z \in \mathring{D}_r \mid \operatorname{Re} z = c\}, \quad c \in (0, 1).$$

Ми вже знаємо, що функція v є строго монотонною на дугах γ_k і γ_s , де $s \equiv k + 1 \pmod{2n}$. Отже, функція $v_k = v \circ \varphi_k : D_r \rightarrow \mathbb{R}$ строго монотонна на дугах

$$\begin{aligned} \alpha_- &= \varphi_k^{-1}(\gamma_k) = \{z \in D_r \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ і } \operatorname{Im} z < 0\}, \\ \alpha_+ &= \varphi_k^{-1}(\gamma_s) = \{z \in D_r \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ і } \operatorname{Im} z > 0\}. \end{aligned}$$

Перевіримо, що v_k є строго монотонною на дузі

$$\alpha_0 = \alpha_- \cup \{0\} \cup \alpha_+ = u_k^{-1}(u_k(0)) = \{z \in D_r \mid \operatorname{Re} z = 0\}.$$

Оскільки $v_k(0) = v(0) = V(p) = 0$ у відповідності до наших початкових припущень і 0 є граничною точкою як для α_- так і для α_+ , то v_k має на кожній з цих двох дуг фіксований знак.

Існують дві можливості:

- або v_k має однакові знаки на α_- і α_+ , тоді $v_k|_{\alpha_0}$ має локальний екстремум у точці 0 ;
- або v_k має різні знаки на α_- і α_+ , тоді v_k є строго монотонною на α_0 .

Припустимо, що v_k має однакові знаки на α_- і α_+ .

Будемо вважати, що v_k від'ємна на кожній з дуг α_- і α_+ . Випадок, коли v_k додатна на α_- і α_+ розглядається аналогічно.

Позначимо $z_1 = 0 - i/2 \in \alpha_-$, $z_2 = 0 + i/2 \in \alpha_+$. Нехай

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} \min(|v_k(z_1)|, |v_k(z_2)|) > 0.$$

Оскільки v_k неперервна, то існує $\hat{\delta} > 0$ для якого виконуються наступні ім-

плікації

$$\begin{aligned} |z - z_1| < \hat{\delta} &\Rightarrow |v_k(z) - v_k(z_1)| < \hat{\varepsilon}, \\ |z - z_2| < \hat{\delta} &\Rightarrow |v_k(z) - v_k(z_2)| < \hat{\varepsilon}, \\ |z| = |z - 0| < \hat{\delta} &\Rightarrow |v_k(z) - v_k(0)| = |v_k(z)| < \hat{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (\text{И.1.1})$$

Нехай $c \in (0, \hat{\delta})$. Тоді точка $w_0 = c + i0$ розташована на кривій α_c між точками $w_1 = c - i/2$ та $w_2 = c + i/2$. З (И.1.1) слідує, що $v_k(w_1) < -\hat{\varepsilon}$, $v_k(w_2) < -\hat{\varepsilon}$ і $v_k(w_0) \in (-\hat{\varepsilon}, 0)$. Але ці три співвідношення не можуть виконуватися одночасно, оскільки (як ми вже довели) v_k строго монотонна на α_c .

Отримана суперечність показує, що v_k має різні знаки на α_- і α_+ . Отже, v_k є строго монотонною на α_0 .

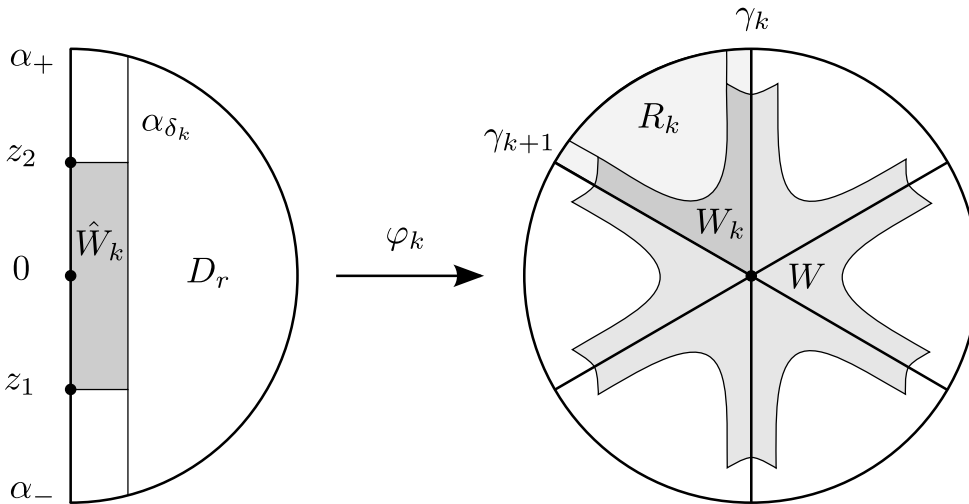


Рис. И.1.2:

Повторюючи міркування з випадку 1, знайдемо такі $\varepsilon_k > 0$ і $\delta_k > 0$, що множина

$$\hat{W}_k = [0, \delta_k) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

відповідає співвідношенням

$$\begin{aligned} F \circ T \circ \varphi_k(\hat{W}_k) &\supseteq [0, \delta_k) \times (-\varepsilon_k, \varepsilon_k), & \text{якщо } k = 2m, \\ F \circ T \circ \varphi_k(\hat{W}_k) &\supseteq (-\delta_k, 0] \times (-\varepsilon_k, \varepsilon_k), & \text{якщо } k = 2m + 1. \end{aligned} \quad (\text{И.1.2})$$

Позначимо $W_k = \varphi_k(\hat{W}_k)$,

$$W = \bigcup_{k=0}^{2n-1} W_k, \quad \delta = \min_{k=0, \dots, 2n-1} \delta_k > 0, \quad \varepsilon = \min_{k=0, \dots, 2n-1} \varepsilon_k > 0.$$

Легко перевірити, що W є відкритим околom точки 0 у D . З (I.1.2) і з наших початкових припущень слідує, що

$$F(Q) \supseteq F(N) \supseteq F \circ T(W) \supseteq (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Отже ми довели, що для довільної точки $p \in M^2$ і її відкритого околу Q множина $F(Q)$ містить окіл точки $F(p)$. Тому відображення $F : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$ є відкритим.

У той же час ми показали, що довільне $p \in M^2$ є ізольованою точкою своєї множини рівня $F^{-1}(F(p))$. Внаслідок цього кожна множина рівня $F^{-1}(F(p))$ не може містити невиродженого континууму.

Отже, відображення F є внутрішнім.

Лему 11.1.5 доведено.