ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу
Полуляха Євгена Олександровича
«Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання»
подану на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук
за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія

Дисертація присвячена вивченню одновимірних шарувань з особливостями на поверхнях, а також об'єктів, які їх породжують — функцій, динамічних систем, тощо.

У зв'язку з прогресом у теорії гамільтонових динамічних систем з малою кількостю ступенів свободи за останні двадцять років виник інтерес до топологічної класифікації функцій на поверхнях, див. роботи А. Фоменка і А. Болсінова, А. Ошемкова, В. Шарка, І. Юрчук. Зокрема, велике значення мають функції, для яких існують потоки, орбіти яких лежать на множинах рівня цих функцій. Враховуючи теорему про трубку току, на поверхнях множини рівня таких функцій мають породжувати одновимірні шарування з особливостями.

Топологічна структура шарувань з особливостями на поверхнях, зокрема шарувань на орбіти потоків, досліджувалась у роботах: А. Андронова та Л. Понтрягіна, М. Пейксото, С. Арансона і В. Грінеса, І. Бронштейна та І. Ніколаєва, Л. Плахти, А. Ошемкова і В. Шарка, М. Фарбера, Н. Будницької і Т. Рибалкіної, О. Пришляка і багатьох інших.

Розглянемо одновимірні шарування на некомпактних двовимірних поверхнях, всі листи яких є некомпактними вкладеними многовидами. Для вивчення таких шарувань корисно отримати у якомусь сенсі їх "канонічне представлення", з яким зручно працювати. Для певного підкласу шарувань з цього класу на роль "канонічних представників" підходять *смугасті поверхні.*

Нехай Z — некомпактний двовимірний многовид, який отримано з сім'ї смуг $\mathbb{R} \times (0,1)$ з приєднаними до межі відкритими інтервалами за допомогою склейки цих смуг вздовж їх межових інтервалів. На кожній такій смузі означене шарування, яке має шарами паралельні прямі $\mathbb{R} \times \{t\}$, $t \in (0,1)$, а також межові інтервали. Звідси ми отримуємо шарування Δ на всьому Z. Багато шарувань на поверхнях, всі шари яких гомеоморфні прямій, мають таку "смугасту" структуру. Цей факт виявив В. Каплан (1940-41) для шарувань на площині $\mathbb{R}^2$ на множини рівня псевдогармонічних функцій $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ що не мають особливостей.

Якісна теорія функцій однієї комплексної змінної стосується топологічної класифікації аналітичних функцій а також їх дійсних складових — гармонічних функцій і псевдогармонічних функцій, які є топологічним узагальненням гармонічних функцій. Ця задача тісно пов'язана з дослідженням шарувань на множини рівня таких функцій.

Проблеми з цього класу розглядали С. Стоїлов і Г. Т. Уайберн, які означили поняття внутрішнього і, відповідно, легкого відкритого відображення. Означені ними класи відображень мають певні суттєві топологічні властивості аналітичних функцій.

Одночасно В. Каплан досліджував шарування на компоненти зв'язності множин рівня гармонічних функцій на площині. Результати Каплана пізніше були узагальнені на шарування з особливостями у роботах В. Бутбі, М. Морса і Дж. Дженкінса.

У. Бутбі, та М. Морс і Дж. Дженкінс, незалежно довели, що на площині кожна псевдогармонічна функція має спряжену псевдогармонічну функцію.

Приблизно в цей-же час Й. Токі сформулював і довів критерій того, що функція на поверхні є псевдогармонічною в термінах властивостей розбиття поверхні на її множини рівня.

Важливість псевдогармонічних функцій підкреслюють наступні міркування.

- Згідно *теоремі про ранг* у околі кожної регулярної точки функція класу гладкості C^p, $p \geq 1$, гладко еквівалентна до $\operatorname{Re} z$ (те-ж саме, що й координатна проекція).

- Відомо, що *для кожної ізольованої критичної точки* x_0 *(окрім локальних екстремумів) функції* $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ *існує окіл, у якому функція топологічно еквівалентна до* $\operatorname{Re} z^k$ *для деякого* $k \in \mathbb{N}$.

Отже, кожна функція $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$, всі критичні точки якої ізольовані, є псевдогармонічною у кожній точці крім локальних екстремумів. Внаслідок цього, вивчаючи властивості псевдогармонічних функцій, ми фактично вивчаємо топологічні властивості гладких функцій з ізольованими особливостями на двовимірних многовидах.

У свій час У. Фокс розглянув узагальнення псевдогармонічних функцій (Peano-interior functions або F-функції), послабивши топологічні умови на множини рівня, які належать Й. Токі.

У. Фокс довів теорему про промені, яка показує подібність функці з цого класу до гармонічних функцій і стверджує наступне. *Кожна множина рівня такої функції* f *локально складається з парної кількості променів, які перетинаються у єдиній точці* x *і ділять маленький диск, що є її околом, на* *сектори. Кожен промінь межує з двома секторами, на одному з яких функція приймає значення, більші за $f(x)$, на іншому — менші за $f(x)$.*

Наслідком з цієї теореми є наступне твердження. *Відкрите неперервне відображення $f : M^2 \to \mathbb{R}$ на двовимірному многовиді без краю є F-функцією тоді й лише тоді, коли кожна компонента кожної множини рівня f є топологічним графом.* Це дозволяє говорити про порядок $\operatorname{ord}_f x$ функції f у точці x (порядок дорівнює кількості променів у точці x, поділеній навпіл).

Але на відміну від псевдогармонічних функцій F-функція f не обов'язково породжує шарування з дискретною множиною особливостей на M^2.

Основна частина дисертаційної роботи присвячена вивченню властивостей названих вище об'єктів, побудові їх топологічних інваріантів.

Перейдемо тепер до більш детального опису результатів роботи.

Дисертаційна робота складається зі вступу, сімнадцяти розділів та восьми додатків.

Перший розділ містить необхідні означення та твердження, що не є загально відомими.

На площині компонента лінійної зв'язності множини рівня псевдогармонічної функції не може мати циклів, тобто буде деревом. *У другому розділі* розглянуто питання про те, які саме дерева можуть бути представлені як компоненти множин рівня псевдогармонічної функції, а також більш широке питання, які комбінації дерев можуть представляти множини рівня псевдогармонічної функції. Означено поняття *плоского відображення* скінченного лісу у площину. Доведено, що довільний образ скінченного лісу на площині під дією плоского відображення є множиною рівня деякої псевдогармонічної функції (**теорема 2.1.6**).

Відомо, що для гладкої функції f з ізольованими особливостями на компактній поверхні простір Кронрода–Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$, точками якого є компоненти лінійної зв'язності множин рівня f, є топологічним графом (графом Кронрода–Ріба). На некомпактних поверхнях цей простір не має таких гарних властивостей (наприклад, може не бути хаусдорфовим простором).

У третьому розділі розглянуто клас неперервних функцій на некомпактних поверхнях, множини рівня яких локально мають таку ж топологічну будову, як і гладкі функції з ізольованими особливостями. Знайдені достатні умови (див. **теорему 3.1.6**), при виконанні яких простір Кронрода–Ріба такої функції є топологічним *графом з черенками* (топологічним графом, з якого вилучена деяка підмножина множини термінальних вершин). Доведено, що у випадку, коли поверхня є площиною $\mathbb{R}^2$, ці умови є також необхідними (**твердження 3.1.7 і теорема 3.1.8**).

Четвертий розділ присвячено вивченню псевдогармонічних функцій загального положення на площині (кожна множина рівня таких функцій містить не більше однієї сингулярної точки), які мають скінченну кількість сингулярних точок (в цих точках функція топологічно еквівалентна до $\mathrm{Re}\, z^n$, $n > 1$) і задовольняють додатково деяким умовам $\mathfrak{I}$, які гарантують, що $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками. На основі простору Кронрода–Ріба побудовано повний топологічний інваріант, що розрізняє такі функції (див. **теорему 4.8.1**).

У п'ятому розділі розглянуто клас неперервних функцій f означених на замкненому двовимірному диску D^2, які є псевдогармонічними у $\mathrm{Int}\, D^2$ і для яких обмеження f на ∂D^2 має лише скінченне число екстремумів. Для таких функцій відомий повний топологічний інваріант, який називається *комбінаторною діаграмою* $P(f)$ і є топологічним графом, що складається з межового кола ∂D і тих компонентів лінійної зв'язності множин рівня f, що не гомеоморфні відрізку. Крім того, комбінаторна діаграма має певну додаткову структуру. Для таких графів доведено теореми реалізації у якості комбінаторної діаграми деякої функції з вказаного класу (**теореми 5.7.1** і **5.7.2**).

У шостому розділі означено смугасті поверхні. Вивчено гомотопічний тип простору $\mathcal{H}(\Delta)$ листових гомеоморфізмів смугастої поверхні Z з канонічним шаруванням Δ на ній (гомеоморфізмів, що відображають листи Δ на листи) і доведено, що за виключенням двох випадків компонента лінійної зв'язності одиниці $\mathcal{H}_0(\Delta)$ простору $\mathcal{H}(\Delta)$ є стягуваною (**теорема 6.3.4**).

Сьомий і восьмий розділи присвячено вивченню одновимірних шарувань на некомпактних двовимірних поверхнях. Розглянуто одновимірні шарування, кожен лист яких гомеоморфний $\mathbb{R}^1$ і є замкненою підмножиною відповідної поверхні. Отримано наступну характеризацію смугастих поверхонь: *поверхня X листово гомеоморфна деякій смугастій поверхні тоді й лише тоді, коли сім'я* $\mathrm{Sing}(\Delta)$, *що складається зі всіх сингулярних листів, є локально скінченною* (**теорема 8.4.4**).

У дев'ятому розділі запропоновано означення регулярної та сідлової точки неперервної функції на поверхні, які є слабкішими аналогами означень регулярної та сингулярної точки псевдогармонічної функції. Побудовано приклад неперервної функції на замкненому двовимірному диску, яка є постійною на його межі, має рівно два нестрогих локальних екстремуми всередині диску і не має сідлових точок (див. **теорему 9.2.7**).

Одним з узагальнень псевдогармонічних функцій є F-функції, які вперше розглянув Дж. Фокс. *У десятому розділі* побудовано контр-приклад до гіпотези Дж. Фокса, яка стверджує, що F-функція f завжди постійна на компонентах зв'язності замикання множини своїх S-відділених точок (див. **теоре-**

му 10.1.3).

У одинадцятому розділі знайдено необхідні й достатні умови для того, щоб неперервна функція на поверхні була спряженою псевдогармонічною функцією до заданої псевдогармонічної функції (**теорема 11.1.2**).

Нехай G — область в $\mathbb{R}^n$, $F \in C^n(G)$. Точка $y \in G$ є *квазі-ізольованою* для функції F, якщо $\{y\}$ є компонентою зв'язності множини $F^{-1}(F(y))$. *У дванадцятому розділі* доведено, що $x_0 \in G$ є квазі-ізольованою точкою рівня $F^{-1}(F(x_0))$ тоді й лише тоді, коли існує вкладена послідовність гіперповерхонь, що обмежують x_0, яка збігається до x_0 і складається з компонент лінійної зв'язності регулярних множин рівня F (**теорема 12.2.1**).

Основним результатом *тринадцятого розділу* є узагальнення теореми, оберненої до теореми Жордана про криву (**теорема 13.2.9**).

Для кожного $X \subset \mathbb{R}^n$ рівність $\dim X = n$ виконується тоді й лише тоді, коли X має непорожню внутрішність у $\mathbb{R}^n$, тобто містить n-вимірний диск. Для k-вимірних підмножин $\mathbb{R}^n$ $(k < n)$ аналогічне твердження не виконується. Л. С. Понтрягін побудував пару компактних підмножин $\mathbb{R}^n$, таку що розмірність їх декартового добутку менша за суму їх розмірностей. З цього прикладу слідує існування k-вимірної компактної підмножини $\mathbb{R}^n$, яка не містить підмножини, гомеоморфної k-вимірному диску. *У чотирнадцятому розділі* знайдено достатню умову для того, щоб k-вимірна компактна множина $X \subset \mathbb{R}^n$ містила k-вимірний диск. (**теорема 14.2.1**).

При дослідженні потоків на поверхнях приходиться пов'язувати з ними динамічні системи (д. с.) з дискретним часом (наприклад за допомогою відображення послідування на деякій локальній трансверсалі). Може виникнути ситуація, коли дві різні д. с. з дискретним часом породжують неперервні надбудови, які є орбітно еквівалентними одній і тій же підсистемі початкового потоку. У зв'язку з цим корисно знайти інваріанти д. с. з дискретним часом, які залежать лише від класу орбітної еквівалентності неперервної надбудови такої системи. Зокрема, корисно знайти інваріантні підмножини, які є ітераційно стійкими (не змінюють своїх властивостей при переході від відображення, що породжує д. с. до його ітерації).

У п'ятнадцятому розділі доведено, що для гомеоморфізму $g : X \to X$ хаусдорфового топологічного простору X і для кожного $n \geq 2$ центри Біркгофа динамічних систем (X, g) і (X, g^n) збігаються (**теорема 15.2.1**).

Іншим інваріантом д. с. з дискретним часом, який залежить від класу орбітної еквівалентності її неперервної надбудови є співвідношення між періодами близьких періодичних орбіт. *У шістнадціятому розділі* знайдено умови на співвідношення періодів, при виконанні яких фазовий простір неперервної надбудови над д. с. з дискретним часом на множині Кантора не може бути вкладений у двовимірну поверхню (відповідно, у орієнтовну двовимірну поверхню) (**теорема 16.2.5**).

Для обертовної д. с. (X, f) з хаусдорфовим компактним фазовим простором X *у сімнадцятому розділі* означені і досліджені періодичні розбиття простору X, а також побудовано топологічний інваріант $\mathcal{P}(X, f) \subset \mathbb{N}$ — множину потужностей всіх періодичних розбиттів простору X. Вказано, як по $\mathcal{P}(X, f)$ знайти всі одометри, на які має проекції (X, f) (див. **твердження 17.3.45**, **лему 17.3.46** і **теорему 17.3.59**).

До дисертаційної роботи Є. О. Полуляха «Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання» можна висловити деякі побажання і зауваження.

1. У вступі на стор. 46 автор намагається не наводячи точного означення пояснити "на пальцях", що таке сингулярний лист. Його пояснення невірне і не відповідає **Означенню 8.4.2**, як показує наступний приклад. Розглянемо модельну смугу, яка має рівно два межових інтервали, і ці інтервали належать одному й тому ж берегу смуги. Зафіксуємо гомеоморфізм одного з цих інтервалів на інший і побудуємо з модельної смуги смугасту поверхню, ототожнивши точки межових інтервалів по цьому гомеоморфізму (відповідний лист канонічного шарування позначимо як ω). Тоді ω з точки зору означення 8.4.2 буде сингулярним, однак з точки зору пояснення на стор. 46 цей лист не буде сингулярним.

2. Назви математичних об'єктів, пов'язані з прізвищами видатних математиків, такі як *декартів добуток* (стор. 7 та 52), *хаусдорфів простір* (стор. 4, 8, 78, 117, 171 та ін.) пишуться у середині речення з малої букви. Це зауваження також стосується назв тверджень (слова *твердження*, *теорема*, тощо). Автор з якихось незрозумілих причин пише всі ці слова в середині речення з великої букви.

Незважаючи на висловленні вище зауваження, дисертаційна робота Євгена Олександровича Полуляха «Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання» є завершеною науковою працею, яку написано на високому науковому рівні.

Результати дисертації Є. О. Полуляха опубліковано у 21 роботі у фахових виданнях, 20 з яких належать до переліку, що затверджений ДАК МОН України, а сім входять до наукометричних баз даних Web of Science та Scopus, а також у 12 збірниках праць конференцій.

Автореферат правильно і повно відображає зміст дисертації.

Всі наукові результати дисертації Є. О. Полуляха є новими, наведені твердження чітко сформульовані та супроводжуються доведеннями, які не викликають сумніву. Дисертація добре проілюстрована.

Вважаю, що дисертаційна робота «Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання» задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України №656 від 19 серпня 2015 року, №1159 від 30 грудня 2015 року, №567 від 27 червня 2016 року та наказом МОН України від 12 січня 2017 року), щодо дисертаційних робіт на здобуття наукового ступеня доктора наук, а її автор – Євген Олександрович Полулях – заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.04 – геометрія та топологія.

Офіційний опонент
старший науковий співробітник
відділу диференціальних рівнянь та геометрії,
Фізико-технічний інститут
низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України,
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник Д. В. Болотов

Власноручний підпис гр. Болотова Д.В.
ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар ФТІНТ
ім. Б.І. Вєркіна НАН України
кандидат фізико-математичних наук
Кириченко О.В.

ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ ім. Б.І. Вєркіна * УКРАЇНА, М.ХАРКІВ *
Ідентифікаційний код 03534601

Інститут математики Академії наук України *
Канцелярія

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26.206.03 26.04.2018р.
секретар ради Артемищенко Ю.В.