Відгук

офіційного опонента

на дисертаційну роботу

Полуляха Євгена Олександровича

„Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання ”,

подану на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.04 –геометрія і топологія

Важливим інструментом теорії динамічних систем, яка вивчає якісні властивості розв'язків диференціальних рівнянь і з часів А.Пуанкаре активно розвивається багатьма математиками, виступають шарування з особливостями на гладких многовидах. З іншого боку, такі шарування з особливостями є класичним об'єктом диференціальної топології, дослідження якого містить широкий спектр цікавих питань і нерозв'язаних проблем. Разом з тим, одним із чинників розвитку сучасного комплексного аналізу, як і багатьох інших розділів математики, виступає широке використання топологічних методів, яке бере свій початок з робіт С.Стоїлова, де, зокрема було введено поняття внутрішнього відображення. Подальше використання цього поняття привело до виникнення у працях М.Морса псевдогармонічних функцій (топологічного аналога гармонічних функцій), які інтенсивно вивчались і продовжують вивчатись у працях багатьох математиків (W.Kaplan, W.Boothby, Y.Toki,J. Jenkins, W.Fox та ін.) і мають широке застосування.

До такого сорту актуальних досліджень, що знаходяться на стику теорії динамічних систем, диференціальної топології на многовидах і топологічних методів у теорії функцій комплексної змінної, відноситься дисертаційна робота Євгена Полуляха.

Дисертація Євгена Полуляха складається зі вступу, сімнадцяти розділів, висновків і списку використаних джерел. Крім того, дисертація містить вісім додатків. У першому розділі роботи, що носить допоміжний характер, викладені означення основних понять і попередні відомості про них, які використовуються у наступних дослідженнях.

Другий розділ дисертації присв'ячений дослідженню ліній рівня псевдогармонічних функцій на площині. З допомогою досить копітких міркувань, які, в основному, стосуються вивчення властивостей графів на площині, автор доводить основний результат даного розділу -- теорему 2.1.6. А саме, встановлюється, що для довільного скінченного лісу F з нетермінальними вершинами парного порядку і для довільного плоского відображення $\Psi: F \setminus V_{ter} \to \mathbb{R}^2$ цього лісу без термінальних вершин існує псевдогармонічна функція на $\mathbb{R}^2$, для якої множина нульового рівня є, в точності, множиною значень відображення Ψ.

У третьому розділі дисертації автор вивчає властивості графів Конрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ неперервних функцій f, означених на двовимірній поверхні M^2. Основним результатом даного розділу є теорема 3.1.6, яка твердить, що якщо функція задовольняє умови $(f.a)$, $(f.b), (f.1)-(f.3)$, то її граф Конрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ є графом з черенками. Визначальним технічним інструментом в доведенні цього факту є теорема 3.2.21, яка описує компоненти зв'язності множини $M^2 \setminus K$, де K є об'єднанням всіх ліній рівня функції f, які містять сингулярні точки. Крім того, автор показує, що для функції f, яка задовольняє природні умови $(f.a)$ і $(f.b)$, умови $(f.2)$ і $(f.3)$ є необхідними для того, щоб граф Конрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ функції f був графом з черенками. Що стосується умови $(f.1)$, то, з одного боку, доведено, що для функції f, визначеної на площині, ця умова також є необхідною, а з іншого – побудовано приклад , який вказує, що в для неплоскої поверхні це не так.

У четвертому розділі роботи досліджуються умови топологічної еквівалентості двох псевдогармонічних функцій $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Основна частина цього розділу присвячена детальному вивченню властивостей графа Конрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ псевдогармонійних функцій $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ загального положення, які задовольняють додаткові умови $\mathfrak{I}$. Використовуючи одержані властивості, автор встановлює (теорема 4.8.1), що для двох псевдогармонічних функцій $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ загального положення, які задовольняють додаткові умови $\mathfrak{I}$, орієнтовано топологічна еквівалентність функцій f і g рівносильна еквівалентності навантажених графів Конрода-Ріба цих функцій, а орієнтовано пошарова аквівалентність функцій f і g рівносильна тому, що слабо навантажений граф Конрода-Ріба функції f еквівалентний слабо навантаженому графу Конрода-Ріба функції g або функції $-g$.

П'ятий розділ дисертації присвячений вивченню графів, які є комбінаторними діаграмами для функцій f, означених і неперервних у замкненому одиничному крузі комплексної площини, які є псевдогармонічними у відповідному відкритому крузі і звуження яких на одиничне коло має скінченну кількість екстремумів. Спочатку в теоремі 5.6.3 автор дає необхідні і достатні умови $\mathcal{D}$-планарності графів – властивості, що охоплює комбінаторні діаграми. Потім в теоремах 5.7.1 і 5.7.2 встановлює зв'язки між комбінаторними діаграмами і Δ-графами та строгими частковими порядками на них.

У шостому розділі дисертації автор роботи досліджує властивості смугастих поверхонь, що природним чином виникають у зв'язку з питаннями топологічної класифікації функцій, означених на відкритих двовимірних поверхнях. З допомогою техніки графів встановлено теорему 6.2.7, яка твердить, що кожна смугаста поверхня зі зліченною базою листово гомеоморфна циліндру, листу Мебіуса, або зведеній поверхні. Крім того, в теоремі 6.3.4 одержано опис компоненти лінійної зв'язності $\mathcal{H}_0(\Delta_Z)$, що містить одиницю id_Z, в просторі $\mathcal{H}(\Delta_Z)$ всіх листових гомеоморфізмів смугастої поверхні Z. З цього опису, зокрема, випливає, за яких умов компонента $\mathcal{H}_0(\Delta_Z)$ є стягуваною, що спрощує обчислення гомотопійного типу простору $\mathcal{H}(\Delta_Z)$.

Сьомий розділ дисертаційної роботи Є.Полуляха присвячений вивченню одновимірних шарувань Δ зв'язного двовимірного многовиду X з межею ∂X, які входять до класу $\mathcal{F}$ шарувань, що складаються з копій числової прямої і локально є добутками числової прямої і проміжків. Досліджуючи властивості негаусдорфових (спеціальних) листів таких шарувань, у випадку, коли сім'я $\mathrm{Spec}(\Delta)$ всіх спеціальних листів є локально скінченною, автор доводить (теорема 7.1.5), яка дає опис компонент зв'язності Q множини $X \setminus (\cup \mathrm{Spec}(\Delta) \cup \partial X)$.

У восьмому розділі розвиваються результати попереднього розділу і досліджуються шарування Δ зв'язного двовимірного некомпактного многовиду X з замкненими листами гомеоморфними числовій прямій. Встановлено, що в загальнішій ситуації важливу роль відіграє ширша, ніж $\mathrm{Spec}(\Delta)$, сім'я $\mathrm{Sing}(\Delta)$ всіх сингулярних листів. Основним результатом даного розділу є теорема 8.4.4, яка твердить, що локальна скінченність сім'ї $\mathrm{Sing}(\Delta)$ рівносильна тому, що пара (X, Δ) допускає смугастий атлас.

Дев'ятий розділ дисертаційної роботи Є.Полуляха присвячений побудові неперервної функції у замкненому одиничному крузі D комплексної площини, яка дорівнює нулю на відповідному одиничному колі, строго додатна на відповідному відкритому крузі, має два локальних екстремуми і не має сідлових точок у відкритому крузі.

Десятий розділ дисертації стосується дослідження поведінки F-функцій, тобто функцій, означених і неперервних на двовимірній орієнтованій поверхні M, відкритих на внутрішності цієї поверхні і локально зв'язними в точках межі поверхні лініями рівня. Автор будує F-функцію f на квадраті $[0,1] \times [0,1]$ з всюди щільною на $K = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$ множиною -відділених точок і з $f(K) = [0,1]$. Зазначимо, що даний приклад дає негативну відповідь на одне питання У.Фокса, котрий вивчав можливості продовження F-функцій.

У одинадцятому розділі дисертаційної роботи Є.Полулях доводить аналог одного результату І.Бернштейна про характеризацію спряженої псевдогармонічної функції, означеної на двовимірній поверхні. З допомогою цього факту і відомої теореми Стоїлова автор доводить (наслідок 11.1.6), що для довільних двох спряжених псевдогармонічних функцій на двовимірній поверхні існує така комплексна структура на цій поверхні, відносно якої ці функції є спряженими гармонічними функціями.

Дванадцятий розділ дисертації присвячений характеризації квазі-ізольованих точок в області $G \subset \mathbb{R}^n$ для C^n-гладкої функції $F: G \to \mathbb{R}$, тобто точок, які є компонентами зв'язності ліній рівня функції F. Доведено (теорема 12.2.1), що точка $x_0 \in G$ є квазі-ізольованою для F тоді і тільки тоді, коли F є $\boldsymbol{L}$-функцією у точці x_0, тобто існує послідовність гладких гіперповерхонь, що містяться у лініях рівня функції F , обмежують точку x_0 і стягуються в цю точку.

У тринадцятому розділі дисертації Є.Полулях доводить одне підсилення оберненої теореми Жордана про простоту замкненої кривої на площині, яка ділить площину на дві зв'язні частини, з кожної з яких кожна точка є досяжною. Використовуючи ретельні математичні міркування, викладені у теоремі 13.1.6, і з допомогою введеного і дослідженого автором поняття d-множини дисертант доводить основний результат цього розділу (теорему 13.2.9) про те, що кожна d-множина на площині є простою замкненою кривою.

Чотирнадцятий розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню достатніх умов на компактну підмножину $K \subset \mathbb{R}^n$ топологічної розмірності $k < n$ для того, щоб вона містила частину, гомеоморфну до $[0,1]^k$. Розбиваючи множину Менгера M_k^n на дві частини C_k^n і F_k^n, автор встановлює у теоремі 14.2.1, що такою достатньою умовою є існування вкладення f множини K у множину Менгера M_k^n з топологічною розмірністю перетину $f(K) \cap C_k^n$, яка дорівнює k.

У п'ятнадцятому розділі дисертації вивчається поведінка центру Біркгофа BC динамічної системи, породженої ітерацією гомеоморфізму гаусдорфового простору X. Доведено теорему 15.2.1, яка дає рівність $BC(g^n) = BC(g)$ для довільного гомеоморфізму g гаусдорфового топологічного простору X.

Шістнадцятий розділ роботи стосується дослідження можливості вкладення простору N розшарування Понтрягіна $\xi = (N, p, S^1)$ у двовимірний (орієнтований або довільний) многовид. Основним результатом даного розділу є теорема 16.2.5, яка дає два класи просторів N розшарування Понтрягіна, які не можуть бути вкладені в жодний двовимірний многовид і в жодний орієнтований двовимірний многовид відповідно.

В останньому розділі дисертації вивчаються динамічні системи (X, f) з гаусдорфовим компактним фазовим простором X. Спочатку автор вводить поняття періодичного розбиття динамічної системи і досліджує його властивості. Далі – встановлює властивості множини $\mathcal{P}(X, f)$ всіх періодів динамічної системи, а також властивості одометрів (A, g). І на завершення, подано категорну конструкцію, яка дає характеризацію нерозкладних динамічних систем.

Дисертація добре оформлена і справляє гарне враження. Викладені нижче зауваження і побажання вказують на можливість покращення викладу матеріалу дисертації, як цілісної і довершеної праці.

1. Назва підрозділу 2.2.9 повинна бути "Відношення суміжності ..." замість "Відношення сусідства ...".
2. В означенні узгоджених функцій на с.89_{10} умова "або $N(v_1) \cap N(v_2) = \emptyset$" є зайвою.
3. На с.101^{15-16} у доведенні твердження 3.1.2 слово "фундаментальним" потрібно замінити на слово "Тоді".
4. Умову (f.1) на с.103_{6-7} – "кожна компонента множини рівня функції f може містити не більш, ніж скінченну кількість сингулярних точок" краще було б сформулювати у лаконічнішому вигляді: "кожна компонента множини рівня функції f містить скінченну кількість сингулярних точок".
5. Позначення $\mathrm{Spec}(\Delta)$ має подвійне значення, кожне з яких, наприклад, зустрічається на с.170. Спочатку на с.170^3 $\mathrm{Spec}(\Delta)$ – це об'єднання всіх спеціальних листів шарування Δ, тобто $\mathrm{Spec}(\Delta)$ є підмножиною множини Δ, а у формулюванні теореми 7.1.5 позначення $\mathrm{Spec}(\Delta)$ – це сім'я всіх спеціальних листів шарування Δ, що є підмножиною системи 2^{Δ} і має інше значення. Напевно, об'єднання всіх спеціальних листів шарування Δ варто позначити через $\cup\,\mathrm{Spec}(\Delta)$.
6. Дещо непослідовним виглядає стиль нумерації пунктів у підрозділах. Наприклад, у підрозділі 2.2 є три підпункти: 2.2.1, 2.2.4 і 2.2.9.
7. Трохи хаотичним є стиль позначення додаткових умов на псевдогармонічні функції f. Так, наприклад, у третьому розділі додаткові умови позначаються через $(f.a)$, $(f.b)$, $(f.1) - (f.3)$, а у четвертому схожі (але інші) додаткові умови всі разом позначаються через $\mathfrak{I}$. Тоді, як у п'ятому розділі додаткові умови на граф позначаються через A1 – A4.
8. У роботі зустрічається скалькована або неправильно перекладена на українську мову математична термінологія. А саме, вживається *обмеження*

функції (с. 39^4, 116_8) замість *звуження функції*, *Хаусдорфовий простір* (с. 30, 83, 103, 171, 286) замість *гаусдорфовий простір*, *відділені точки* (розділ 10) замість *відокремлені точки*, *зворотна границя* (с. 320^1) замість *обернена границя*.

9. Крім того, у дисертації є часто вживані у математичних текстах русизми: *слідувати* (с. 64, 84, 104, …) замість *випливати*, *співпадати* (с. 67, 101, 104 …) замість *збігатися*, *приймати значення* (с. 94) замість *набувати значення*, *згідно наслідку, властивості, теоремі, умові* (с. 44, 105, 112, 119, 183) замість *згідно з наслідком, властивістю, теоремою, умовою*, *постійна функція* (с.47) замість *стала функція*, *у противному випадку* (с. 128, 164) замість *у протилежному випадку*.
10. Дисертаційна робота складається з досить великої кількості розділів, декотрі з яких дуже відрізняються за об'ємом. Тому для підвищення збалансованості і цілісності дисертації варто було б зменшити кількість розділів, об'єднавши деякі з них. Так, наприклад, останні три розділи, які стосуються динамічних систем, логічно на цій основі об'єднуються в один розділ.

Подані вище зауваження не мають принципового характеру, не применшують позитивного враження від дисертації і не впливають на високу оцінку роботи в цілому, яка демонструє високий рівень математичної кваліфікації її автора. Усі основні результати дисертації є новими, вони супроводжуються строгими і повними доведеннями і їх правильність не викликає сумніву. Автореферат та висновки адекватно відображають зміст дисертації.

Всі основні результати дисертації, представлені на захист, у повній мірі опубліковано у фахових виданнях з математики, а саме у 21 роботі, 20 з яких входять у Перелік ДАК МОН України, і 12 тезах наукових конференцій. З них -- 2 монографії, 15 статей у наукових журналах і 4 статті у збірниках наукових праць.

Вважаю, що дисертаційна робота Полуляха Євгена Олександровича «Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання» задовольняє вимоги п.п. 9, 10, 12-14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою КабінетуМіністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановою Кабінету Міністрів України № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.06.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.), щодо докторських дисертацій, а її автор Полулях Євген Олександрович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія і топологія.

Професор кафедри математичного аналізу
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича
доктор фізико-математичних наук Михайлюк В.В.

Підпис Михайлюк В.В. засвідчую
Учений секретар Чернівецького національного
університету імені Юрія Федьковича
"02" 05

Надійшов до спеціалізованої
вченої ради Д26.206.03 04.05.2018р.
секретар ради Артеменко Ж.Я.