ВІДГУК

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Полуляха Євгена Олександровича

“Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання”

подану на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія

Дисертація складається з сімнадцяти розділів і фактично підсумовує діяльність автора за період 2000–2017 роки. Всі розділи крім першого (який містить необхідні означення і твердження, що не є загально відомими) присвячені дослідженню широкого спектру задач, які так чи інакше мають відношення до одновимірних шарувань з особливостями на поверхнях, а також об'єктів, які їх породжують – функцій і динамічних систем.

Основні результати дисертації та їх актуальність.

Гладкі функції на многовидах породжують шарування ковимірності 1 з особливостями. Розглянемо гладку функцію f на многовиді M^n, яка має множину критичних точок Σ. Внаслідок теореми про ранг для кожної регулярної точки f існує дифеоморфізм деякого околу U_x точки x на окіл початку координат в $\mathbb{R}^n$, який відображає компоненти перетинів множин рівня f з U_x у множини рівня деякої координатної проекції. Тому розбиття множини $M^n \setminus \Sigma$ на компоненти зв'язності множин рівня f є $(n-1)$-вимірним шаруванням на $M^n \setminus \Sigma$, а розбиття Δ простору M^2 на компоненти зв'язності множин рівня f є шаруванням з особливостями на M^n з множиною особливостей Σ.

Розглянемо простір шарів $\Gamma_{K-R}(f) = M^n/\Delta$ з індукованою топологією. Для гладких функцій з ізольованими особливостями на замкнених многовидах простір $\Gamma_{K-R}(f)$ має природну структуру топологічного графу і називається графом Кронрода-Ріба. Він є досить популярним інструментом дослідження функцій із вказаного класу.

У той же час про будову простору $\Gamma_{K-R}(f)$ функції f на некомпактному многовиді мало що відомо. Існують приклади гладких функцій на площині, що не мають особливостей, і простори Кронрода-Ріба, яких навіть не є хаусдорфовими.

В розділі 3 дисертації запропоновано означення графа з черенками, який узагальнює поняття топологічного графу. Також розглянуто три умови, виконання яких є достатнім, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ функції f на некомпактній поверхні був графом з черенками (**Теорема 3.1.6**). Доведено, що дві з цих умов є також необхідними. У випадку, коли функція f задана на площині, отримано критерій того, щоб простір $\Gamma_{K-R}(f)$ був графом з черенками (**Теорема 3.1.8**).

Одні з перших прикладів функцій без особливих точок, для яких простір $\Gamma_{K-R}(f)$ не є хаусдорфовим, були розглянуті В. Капланом на початку 1940-х років, який вивчав гармонічні функції без особливостей на площині, а також відповідні їм шарування площини на компоненти лінійної зв'язності множин рівня таких функцій.

У розділах 6 – 8 узагальнено підхід, запропонований Капланом. Означено клас одновимірних шарувань з некомпактними шарами на двовимірних поверхнях, такой що простори шарів шарувань з цього класу є "нехаусдорфовими одновимірними многовидами". Зокрема, в розділі 6 означено "канонічну форму представлення" таких шарувань — смугасті поверхні — і досліджено гомотопічні властивості їх автоморфізмів. А в розділі 8 знайдено критерій того, щоб поверхню з одновимірним шаруванням на ній можна було представити як смугасту поверхню (**Теорема 8.4.4**).

Іншим природним джерелом шарувань з особливостями є гладкі потоки. Позначимо множину всіх нерухомих точок потоку $\Phi : M^n \times \mathbb{R} \to M^n$ через Σ. З теореми про трубку току слідує, що розбиття простору M^n на орбіти потоку Φ утворює одновимірне шарування з особливостями на M^n, множиною особливостей якого є Σ.

Топологічна структура шарувань з особливостями на поверхнях, зокрема шарувань на орбіти потоків, досліджувалась у роботах А. Андронова та Л. Понтрягіна, М. Пейксото, С. Арансона і В. Грінеса, І. Бронштейна та І. Ніколаєва, Є. Жужомаи і В. Медведєва, Л. Плахти, А. Ошемков і В. Шарко, В. Каймановича, М. Фарбера, Н. Будницької і О. Пришляка, Т. Рибалкіної і багатьох інших авторів.

Шарування, що породжені функціями, і шарування, породжені потоками, тісно пов'язані між собою.

Розглянемо, наприклад, задачу дослідження стійкості потоку в околі ізольованої нерухомої точки. Відомо, що для стійкості потоку Φ за Ляпуновим у точці x_0 досить, щоб знайшлась зліченна база околів x_0, обмежених гладкими гіперповерхнями (підмноговидами розмірності $n-1$) $\{H_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, для яких виконується наступна умова: для всіх $x \in H_i$, $i \in \mathbb{N}$, скалярний добуток зовнішньої нормалі до поверхні H_i у точці x і вектору швидкості руху вздовж орбіти потоку Φ у точці x є недодатним числом.

З питанням існування такого набору гіперповерхонь тісно пов'язана наступна задача. *Нехай* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *— гладка функція і* x_0 *— її критична точка (не обов'язково ізольована). При яких умовах на* g *існує зліченна база околів точки* x_0*, обмежених гладкими гіперповерхнями* $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$*, які є компонентами зв'язності множин рівня* g*?* Цю задачу розв'язано у розділі 12 (**Теорема 12.2.1**).

Окремої уваги заслуговує розмірність $n = 2$, коли і функції, і потоки породжують одновимірні шарування з особливостями. Інтерес до топологічної класифікації функцій на поверхнях виник у зв'язку з прогресом у теорії Гамільтонових динамічних систем з малою кількостю ступенів свободи за останні роки, див. роботи А. Фоменко, А. Болсінова, А. Ошемкова, В. Шарко, І. Юрчук.

Топологічним аналогом гармонічних функцій на двовимірних многовидах є *псевдогармонічні функції* (функції, що у кожній точці локально топологічно еквівалентні гармонічним функціям).

У свій час псевдогармонічні функції активно досліджували В. Карлан, М. Морс, Дж. Дженкінс та інші.

Відома така теорема (П. Чорч і Дж. Тимуріан; О. Пришляк). *Для кожної ізольованої критичної точки* x_0 *(окрім локальних екстремумів) функції* $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$ *існує окіл, у якому функція топологічно еквівалентна до* $\operatorname{Re} z^k$ *для деякого* $k \in \mathbb{N}$. З цієї теореми і з теореми про ранг випливає, що кожна функція $f \in C^3(M^2, \mathbb{R})$, всі критичні точки якої ізольовані, є псевдогармонічною у кожній точці, крім локальних екстремумів. Внаслідок цього, вивчаючи властивості псевдогармонічних функцій, ми фактично вивчаємо топологічні властивості гладких функцій з ізольованими особливостями на двовимірних многовидах.

Розділи 2, 4, 5 та 11 присвячені дослідженню властивостей псевдогармонічних функцій та інваріантів, що їх розрізняють.

Зокрема, у розділі 4 розглянуто псевдогармонічні функції на площині, які мають скінченну кількість сингулярних точок (в цих точках функція топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$, $n > 1$) і відповідають певним додатковим умовам, і побудовано повний топологічний інваріант для функцій з цього класу (**Теорема 4.8.1**).

В розділі 5 розглянуто клас неперервних функцій f, означених на замкненому одиничному диску D^2 площини $\mathbb{C}$, які є псевдогармонічними у $\operatorname{Int} D^2$, і для яких обмеження $f|_{\partial D^2}$ має лише скінченне число екстремумів. Для комбінаторної діаграми $P(f)$ такої функції доведено теореми реалізації (**Теореми 5.7.1** і **5.7.2**).

Крім наведених вище результатів в дисертації автором доведено цілу низку інших важливих теорем, які стосуються неперервних функцій на поверхнях (розділи 9-10), узагальнення теореми, оберненої до теореми Жордана про криву (розділ 13), властивостей k-вимірних компактних підмножин $\mathbb{R}^n$ (розділ 14) та топологічної динаміки (розділи 15-17).

Зауваження.

1. На стор. 101 у кінці першого абзацу доведення твердження 3.1.2 чергове речення починається зі слова “фундаментальним”, яке до того ж написане з малої букви. Це слово ніяк не узгоджується з текстом, який його оточує. На його місці скоріш за все мало б стояти слово “отже”, або щось подібне.
2. В розділі 5 розглядаються функції, обмеження яких на межу має скінчене число екстремумів. Цікаво було б дослідити аналогічні питання для функцій, які є обмеження на диск псевдогарманічних функцій, заданих на площині.
3. На стор. 140 останній рядок не зрозуміла умова "ділять ребра на зв'язні частини".
4. У розділі 6 означено клас так званих смугастих поверхонь, які отримані з сім'ї модельних смуг за допомогою ототожнення точок деяких пар межових інтервалів. Зрозуміло, що ці поверхні не є компактними і не можуть мати компактних компонентів зв'язності межі. Легко також побачити, що за допомогою такої процедури можна отримати зв'язну поверхню довільного скінченного роду, що має довільне скінченне число “дірок”. Було б цікаво дослідити, чи можна реалізувати у вигляді смугастої поверхні довільну некомпактну поверхню, що не має компактних компонент межі. А якщо це не можливо, гарно було б знайти перешкоди.
5. Дисертація та автореферат містять ряд стилістичних неточностей таких, як вживання виразів "маючи" та "наступним (аналогічним, розумним) чином". Більшість виразів "наступні" краще замінити на "такі".

Однак, відмічені зхауваження абсолютно не псують загального позитивного враження від роботи.

Висновок. Дисертація носить теоретичний характер і виконана на високому науковому рівні. Всі наведені в ній результати є новими та належать автору. Результати роботи опубліковано у реферованих вітчизняних та зарубіжних журналах, вони неодноразово доповідались на наукових семінарах, у тому числі й у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, та пройшли апробацію на численних міжнародних наукових конференціях.

Вважаю, що дисертаційна робота Полуляха Євгена Олександровича "Топологія сингулярних шарувань на поверхнях і суміжні питання" задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12-14 "Порядку присудження наукових ступенів", затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України №567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з Постановами Кабінету Міністрів України №656 від 19.08.2015 р., №1159 від 30.12.2015 р., №567 від 27.06.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.), щодо докторських дисертацій, а її автор, Полулях Євген Олександрович, заслуговує на присудження йому наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія.

Офіційний опонент
професор кафедри геометрії, топології і динамічних систем,
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
доктор фізико-математичних наук, професор О. О. Пришляк

Підпис засвідчую
Вчений секретар
Карадульк[illegible]
26.04.[illegible]

Україна * Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Ідентифікаційний код 020[illegible]

Інститут математики Академії наук України * Канцелярія

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26.206.03 27.04.2018р.
секретар ради [illegible] /Артеменко Н.Я./