НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Сорока Юлія Юріївна

УДК 515.146.27 + 515.162.2

АВТОМОРФІЗМИ ШАРУВАНЬ НА ДВОВИМІРНИХ НЕКОМПАКТНИХ ПОВЕРХНЯХ

01.01.04 – геометрія та топологія

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі геометрії, топології та динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Наукові керівники:

доктор фізико-математичних наук,
професор, член-кореспондент НАН України
Шарко Володимир Васильович

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Максименко Сергій Іванович,
Інститут математики НАН України,
завідувач лабораторії топології
у складі відділу алгебри та топології.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Болотов Дмитро Валерійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Вєркіна НАН України,
старший науковий співробітник відділу
диференціальних рівнянь та геометрії;

доктор фізико-математичних наук, професор
Савченко Олександр Григорович,
ДВНЗ «Херсонський державний аграрний університет»,
професор кафедри прикладної математики та
економічної кібернетики економічного факультету.

Захист відбудеться 15 травня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 4 квітня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Максименко С. І.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню гомотопічних типів груп автоморфізмів несингулярних шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях та автоморфізмів сингулярних шарувань зі скінченним числом особливих точок на площині.

Актуальність теми. (Сингулярні) шарування на многовидах природно виникають у різних контекстах, наприклад, як розв'язки диференціальних рівнянь, розбиття на орбіти дій груп Лі або на множини рівня гладкої функції чи гладкого відображення. Тому теорія шарувань має застосування у багатьох розділах математики та фізики.

Базовим «локальним» фактом цієї теорії є теорема Фробеніуса[1,2,3], яка дає необхідні і достатні умови інтегровності поля k-вимірних площин в $\mathbb{R}^n$ і була доведена ще у 1840 році.

Далі, одним з перших «глобальних» результатів про існування шарувань на всьому многовиді була теорема Пуанкаре-Хопфа (1926), наслідком з якої є те, що на замкнутому многовиді існує одновимірне шарування (фактично векторне поле без особливостей) тоді і лише тоді, коли Ейлерова характеристика цього многовиду дорівнює нулю.

Загальне питання про існування шарувань вищих розмірностей на компактних многовидах та їх топологічних властивостей було поставлене у роботі G. Ehresmann і G. Reeb (1944). G. Reeb (1952) вперше побудував «нетривіальний» приклад шарування корозмірності 1 на заповненому торі $D^2 \times S^1$, яке зараз називають *шаруванням Ріба.* С. П. Новіков (1965) довів, що двовимірне шарування на тривимірному многовиді, універсальне накриття якого не є стягуваним, має компактний шар. З цього результату, зокрема, випливало, що кожне 2-шарування на 3-сфері має компоненту Ріба.

Далі, у другій половині 60-х років з'явилися інші приклади шарувань корозмірності 1 на замкнутих многовидах, наприклад, I. Tamura (1972), J. L. Arraut (1973) та ін.

[1] *Deahna F.* Über die Bedingungen der Integräbilitat linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veranderlicher GroBen // J. Reine Angew. Math. – **20**. – 1840. – Pp. 340-350.

[2] *Clebsch A.* Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen // J. Reine Angew. Math. – 1866. – **65**. – Pp. 257-268.

[3] *Frobenius G.* Über das Pfaffsche Problem // J. Reine Agnew. Math. – 1877. – **82**. – Pp. 230-315.

Також A. Haefliger (1970) показав, що на некомпактних многовидах завжди існують шарування корозмірності 1.

H. J. Sussman (1973) та P. Stefan (1980) узагальнили теорему Фробеніуса на шарування з особливостями. Робота W. Thurston[4] та її узагальнення, отримані J. Mather та D. B. A. Epstein (1974 – 1977), давали інформацію про гомотопічні властивості деяких класів груп дифеоморфізмів многовидів. Зокрема, W. Ling (1974), A. Banyaga (1977), T. Rybicki (1995-1996), K. Fukui та H. Imanishi (2001), K. Abe та K. Fukui (2005), J. Lech та T. Rybicki (2007), J. Lech (2008) та інші встановили досконалість деяких груп пошарових дифеоморфізмів та гомеоморфізмів.

З точки зору диференціальної геометрії цікавими є питання про існування шарувань із заданими обмеженнями на кривину, див., напр., книгу P. Molino[5]. В Україні цією тематикою займаються харківські математики О. А. Борисенко, Д. В. Болотов, В. В. Круглов.

Найбільш повний опис топологічної структури шарувань і, зокрема, поведінки траєкторій векторних полів був отриманий на многовидах малих розмірностей Є. О. Леонтович та А. Г. Майєром (1937), К. Р. Мейєром (1968), М. М. Пейското (1973), С. Х. Арансоном та В. З. Грінесом (1986), О. А. Гірик (1993), Д. М. Полтавцем (1993), І. У. Бронштейном та І. Г. Ніколаєвим (1997), Л. П. Плахтою (2003), М. Фарбером (2004), Н. В. Будницькою та О. О. Пришляком (2009), Н. В. Будницькою та Т. В. Рибалкіною (2012), та багатьма іншими математиками. Топологічна класифікація векторних полів Морса-Смейла на тривимірних многовидах знайдена О. О. Пришляком (1997).

W. Kaplan та H. Whitney займалися вивченням властивостей несингулярних C^0-шарувань на площині у 40-50-х рр. XX ст. Їх результати були поширені на сингулярні шарування з ізольованими особливостями в роботах W. Boothby[6], M. Morse та J. Jenkins[7], M. Morse[8].

---

[4] *Thurston William.* Foliations and groups of diffeomorphisms // Bull. Amer. Math. Soc. – 1974. – **80**. – Pp. 304–307.

[5] *Molino Pierre.* Riemannian foliations // Progress in Mathematics. – 1988. – **73**. – P. 339.

[6] *Boothby William M.* The topology of regular curve families with multiple saddle points // American Journal of Mathematics. – 1951. –**73**. – Pp. 405–438.

[7] *Jenkins James, Morse Marston.* Contour equivalent pseudoharmonic functions and pseudoconjugates // American Journal of Mathematics. – 1952. – **74**. – Pp. 23–51.

[8] *Morse Marston.* The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces // Fund. Math. – 1952. – **39**. – Pp. 269–287.

Зокрема, W. Kaplan[9] довів, що кожне C^0-шарування Δ на площині має такі властивості:

1) канонічна проекція на простір шарів $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Delta$ є локально тривіальним розшаруванням, а сам простір шарів $\mathbb{R}^2/\Delta$ є (взагалі кажучи, негаусдорфовим) одновимірним многовидом;
2) існує неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ без локальних екстремумів, лінії рівня якої є шарами шарування Δ;
3) існує не більш ніж зліченна сім'я шарів $\{\omega_i\}_i$ шарування Δ така, що $\mathbb{R}^2 \setminus \{\omega_i\}_i = \bigsqcup S_i$ є диз'юнктним об'єднанням відкритих підмножин S_i пошарово гомеоморфних до $\mathbb{R} \times (0,1)$ з шаруванням на паралельні прямі $\mathbb{R} \times t$, $t \in (0,1)$.

Таким чином, Δ «склеєне» з не більш ніж зліченного числа поверхонь $\overline{S_i}$, внутрішності яких пошарово гомеоморфні $\mathbb{R} \times (0,1)$, уздовж їх граничних інтервалів. Відмітимо, що при цьому вибір шарів ω_i є неоднозначним, а пошаровий гомеоморфізм $S_i \cong \mathbb{R} \times (0,1)$ не обов'язково продовжується до вкладення $\overline{S_i}$ в $\mathbb{R} \times [0,1]$.

С. І. Максименко та Є. О. Полулях[10,11,12] розглядали клас шарувань Δ на некомпактних поверхнях X, у яких кожен шар є некомпактною замкнутою підмножиною. Підмножину $S \subset \mathbb{R} \times [0,1]$ назвемо *смугою*, якщо $\mathbb{R} \times (0,1) \subseteq S$ і S є відкритою в топології $\mathbb{R} \times [0,1]$. Остання умова еквівалентна тому, що її межа $\partial S = S \cap (\mathbb{R} \times \{0,1\})$ є диз'юнктним об'єднанням щонайбільше зліченної кількості відкритих інтервалів. Назвемо шар $\omega \in \Delta$ *регулярним*, якщо він має відкритий окіл V, такий, що пара $(\overline{V}, V)$ пошарово гомеоморфна парі $\big(\mathbb{R} \times [0,1], \mathbb{R} \times (0,1)\big)$.

У роботі[12] С. І. Максименка та Є. О. Полуляха показано, що шарування з некомпактними замкнутими шарами на некомпактній поверхні можна склеїти із *смуг* у сенсі 3) тоді і лише тоді, коли сім'я його нерегулярних шарів є локально скінченною. Такі поверхні було названо *смугастими*, а відповідні шарування на них – канонічними. Розрізання смугастої поверхні на смуги задає так званий *смугастий атлас*, а те, як

[9] *Kaplan W.* Regular curve-families filling the plane, I // Duke Math. J. – 1940. – **7**. – P. 154–185.

[10] *Maksymenko S., Polulyakh E.* Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2016. – **22**, 3.– Pp. 266–282.

[11] *Maksymenko S., Polulyakh E.* One-dimensional foliations on topological manifolds // Proceedings of the International Geometric Center. – 2016. – **9**. – Pp. 1–23.

[12] *Maksymenko S., Polulyakh E.* Characterization of striped surfaces // Proceedings of the International Geometric Center. – 2017. – **10**, 2. – Pp. 22–38.

ці смуги склеюються уздовж граничних інтервалів, можна закодувати певним графом з додатковою інформацією: вершини графа – це смуги, а ребра – шари, уздовж яких відбувається склеювання.

У іншій роботі[13] цих же авторів, досліджувалось питання про гомотопічний тип груп пошарових гомеоморфізмів канонічних смугастих поверхонь і було доведено, що компоненти зв'язності таких груп, за виключенням двох випадків, є стягуваними.

Залишалось відкритим питання про алгебраїчну структуру фактор-групи всіх гомеоморфізмів шарувань по підгрупі, що складається з гомеоморфізмів, ізотопних тотожному відображенню. Ця фактор-група названа групою *гомеотопій* за аналогією з групою класів відображень (mapping class group) для пошарових гомеоморфізмів.

Один з основних результатів представленої дисертаційної роботи ототожнює групи гомеотопій смугастих поверхонь з групами автоморфізмів графів їх атласів, а також описує групи гомеотопій канонічних шарувань деякого класу смугастих поверхонь, названих *кореневоподібними*.

Структура шарувань з ізольованими особливостями на компактних 2- та 3-многовидах, зокрема, топологічна класифікація функцій Морса, досліджувалась у роботах А. Т. Фоменка, С. В. Матвєєва, О. В. Болсінова[14], А. О. Ошемкова[15], В. В. Шарка[16,17], С. І. Максименка[18], В. О. Ман-

---

[13] *Maksymenko S., Polulyakh E.* Foliations with non-compact leaves on surfaces // Proceedings of Geometric Center. – 2015. – **8**, 3–4. – Pp. 17–30.

[14] *Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. – 1990. – **45**, 2(272). – С. 49–77.

[15] *Ошемков А. А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей // Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, Сборник статей, Тр. МИАН. – 1994. – **205**.– С. 131–140.

[16] *Sharko V. V.* Classification of Morse functions on surfaces // Low-Dimensional Topology and Combinatorial Group Theory. – 1996. – Pp. 19–25.

[17] *Шарко В. В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, 5. – С. 687–700.

[18] *Максименко С. І.* Еквівалентність m-функцій на поверхнях // Некоторые проблемы современой математики. Праці Інс-ту математики НАН України. – 1998. – **25**. – С. 128–134.

турова[19], О. О. Пришляка[20], Є. О. Полуляха та І. А. Юрчук[21] та багатьох інших.

З іншого боку, топологічна структура функцій на некомпактних поверхнях є менш дослідженою, див., напр., працю В. В. Шарка[22].

Однією із задач дисертаційної роботи є встановлення топологічної класифікації псевдогармонічних функцій загального положення на площині зі скінченним числом сингулярних точок.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами. Робота виконана на кафедрі геометрії, топології і динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Результати дисертації частково використані при виконанні державної науково-дослідної теми кафедри, номер державної реєстрації 16БФО38-01.

Метою роботи є дослідження гомотопічних типів груп автоморфізмів несингулярних шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях та автоморфізмів сингулярних шарувань на площині зі скінченним числом особливих точок.

Об'єкт дослідження: автоморфізми некомпактних поверхонь, що зберігають структуру шарування, тобто шар шарування переводять в шар.

Предмет дослідження: групи гомеотопій несингулярних шарувань некомпактних поверхонь, а також топологічна еквівалентність псевдогармонічних функцій на площині, лінії рівня яких визначають сингулярне шарування зі скінченним числом особливих точок.

Завдання дослідження:

1) отримати необхідні та достатні умови еквівалентності атласів смугастої поверхні;
2) обчислити гомотопічний тип груп пошарових гомеоморфізмів канонічних шарувань смугастих поверхонь;
3) дослідити властивості автоморфізмів просторів шарів кореневоподібних смугастих поверхонь;

---

[19] *Manturov V. O.* Atoms, height athoms, chord diagrams and knots, enumerating atoms of small complexity by using mathematica 3.0 // Topological methods in the theory of Hamiltonian systems, Factorial. – 1998. – Pp. 203–212.

[20] *Prishlyak A. O.* Morse functions with finite number of singularities on a plane // Methods Funct. Anal. Topology. – 2002. – **8**, 1. – Pp. 75–78.

[21] *Polulyakh E. and Yurchuk I.* On the Pseudo-harmonic functions defined on the disk // Праці Інс-ту математики НАН України. – 2009. – 151 с.

[22] *Шарко В. В.* Гладкие функции на некомпактных поверхностях // Проблеми топології та суміжні питання, Праці Інс-ту математики НАН України. – 2006. – **3**, 3. – С. 443–473.

4) визначити алгебраїчну структуру класу груп гомеотопій канонічних шарувань на кореневоподібних смугастих поверхнях, тобто поверхнях, граф яких є кореневим деревом скінченного діаметру;

5) з'ясувати, коли дві псевдогармонічні функції загального положення на площині є пошарово та топологічно еквівалентними.

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

- отримано необхідні та достатні умови еквівалентності атласів смугастої поверхні;
- для атласу смугастої поверхні визначено граф, що описує інформацію про склеювання цієї поверхні зі смуг, та встановлено ізоморфізм між групою гомеотопій її канонічного шарування та групою автоморфізмів графа атласу;
- описано алгебраїчну структуру класу груп гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь;
- встановлено зв'язок між групами гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь та групами гомеотопій їх просторів шарів;
- отримано необхідні та достатні умови пошарової та топологічної еквівалентностей двох псевдогармонічних функцій загального положення на площині, множини ліній рівня яких утворюють сингулярне шарування зі скінченним числом особливостей і простір шарів яких є гаусдорфовим.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації носять теоретичний характер. Отримані у ній результати можуть бути використані в дослідженнях з топології, алгебри, теорії особливостей гладких відображень, теорії шарувань.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи алгебри, алгебраїчної, геометричної та диференціальної топології, а також теорії особливостей.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану досліджень та постановка задач належать науковому керівникові. Всі результати здобувачем отримано самостійно, а у роботах, які опубліковані у співавторстві, внесок усіх авторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідались на таких конференціях та семінарах:

- 3rd EUMLS Conference «Mathematics for Life Sciences» (м. Рівне, 2015);
- 10-та літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса, 2015);
- 11-та Літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса, 2016);
- Міжнародна конференція «Геометрія та топологія в Одесі – 2016» (м. Одеса, 2016);
- Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday (м. Харків, 2016);
- The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski (м. Львів, 2016);
- Науковий семінар лабораторії топології відділу алгебри та топології Інституту математики НАН України (м. Київ);
- Семінар кафедри геометрії, топології та динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 2017).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 5 статтях [1, 2, 7, 10, 11] у наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України, серед них три статті [1, 7, 10] — у журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus) та дві одноосібних статті [7, 10].

Також результати роботи представлені у матеріалах конференцій [3–6, 8, 9].

Структура й об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації (двома мовами), вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 84 найменувань, та додатка.

Повний обсяг роботи — 126 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Перший розділ містить допоміжні теоретичні відомості, що використовуються в інших розділах дисертації. Підрозділи 1.1-1.3 присвячені одновимірним шаруванням на топологічних многовидах. У них наведені деякі базові означення та приклади, введено поняття пошарових гомеоморфізмів, тобто гомеоморфізмів, які переводять шар шарування у шар, та їх груп гомеотопій, що є аналогами груп класів відображень для пошарових гомеоморфізмів. Дослідженню останніх груп присвячений розділ 3 дисертаційної роботи.

Підрозділ 1.5 містить означення та твердження, що використовуватимуться у розділі 4: дається поняття топологічної еквівалентності функцій та поняття простору Кронрода-Ріба.

У другому розділі вводяться означення та основні властивості об'єктів дослідження: смуга, смугастий атлас та смугаста поверхня.

Означення 2.1.0.1 *Підмножину* $S \subset \mathbb{R}^2$ *назвемо смугою, якщо*

(1) $\mathbb{R} \times (u, v) \ \subseteq \ S \ \subset \ \mathbb{R} \times [u, v]$;

(2) S *— відкрита в топології* $\mathbb{R} \times [u, v]$

для деяких $u < v \in \mathbb{R}$.

Позначимо

$$\partial_- S := S \cap \mathbb{R} \times \{u\}, \qquad \partial_+ S := S \cap \mathbb{R} \times \{v\},$$
$$\partial S := \partial_- S \cup \partial_+ S, \qquad \mathrm{Int} S := \mathbb{R} \times (u, v).$$

Називатимемо ∂S *межею* S, а $\partial_- S$ і $\partial_+ S$ — *берегами* S. Межа ∂S є диз'юнктним об'єднанням щонайбільше зліченної кількості відкритих (можливо необмежених) інтервалів.

Кожна смуга S має орієнтоване одновимірне шарування на горизонтальні прямі $\mathbb{R} \times t$, $t \in (u, v)$ і межові інтервали ∂S. Назвемо це шарування *канонічним.*

Нехай Z_1 і Z_2 — некомпактні поверхні з одновимірними шаруваннями Δ_1 і Δ_2 відповідно. Гомеоморфізм $\phi : Z_1 \to Z_2$ називається *пошаровим*, якщо він відображає шари шарування Δ_1 на шари Δ_2. У цьому випадку поверхні Z_1 і Z_2 називають *пошарово гомеоморфними.*

Теорема 2.1.1.1. *Кожний монотонний гомеоморфізм* $h : \partial S_1 \to \partial S_2$ *між межами двох смуг* S_1 *і* S_2 *продовжується до пошарового гомеоморфізму смуг* $\hat{h} : S_1 \to S_2$.

Означення 2.4.0.1. *Смугастий атлас на поверхні* Z *— це відображення* $q : Z_0 \to Z$ *з такими властивостями:*

1) $Z_0 = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ *— щонайбільше зліченна сім'я попарно диз'юнктних смуг;*

2) *відображення* q *є факторним, тобто неперервним, сюр'єктивним, і таким, що підмножина* $U \subset Z$ *буде відкритою тоді і лише тоді, коли* $q^{-1}(U) \cap S_\lambda$ *відкрита у* S_λ *для кожного* $\lambda \in \Lambda$;

3) *існують дві диз'юнктні сім'ї* $\mathcal{X} = \{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ *і* $\mathcal{Y} = \{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ *попарно різних межових інтервалів* Z_0, *занумерованих однією і тією ж множиною індексів* Γ, *такі, що*

a) *q — ін'єктивне на $Z_0 \setminus (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$;*

b) *$q(X_\gamma) = q(Y_\gamma)$ для кожного $\gamma \in \Gamma$;*

c) *звуження $q|_{X_\gamma} : X_\gamma \to q(X_\gamma)$ і $q|_{Y_\gamma} : Y_\gamma \to q(Y_\gamma)$ є вкладеннями із замкненими образами.*

Означення 2.4.0.2. *Поверхню Z, наділену смугастим атласом, називатимемо смугастою поверхнею.*

Зауважимо, що смугаста поверхня Z є некомпактним двовимірним многовидом, який може бути незв'язним та неорієнтованим, а кожна компонента його межі є відкритим інтервалом.

Крім того, Z допускає одновимірне шарування, одержане з канонічних шарувань відповідних модельних смуг S_λ. Назвемо таке шарування *канонічним* шаруванням, асоційованим зі смугастим атласом q, і позначимо його через Δ. Очевидно, кожен шар Δ є гомеоморфним образом $\mathbb{R}$.

Означення 2.4.0.5. *Смугасті атласи $q : Z_0 \to Z$ і $q' : Z_0' \to Z'$ на поверхнях Z і Z' назвемо еквівалентними, якщо існують пошарові (відносно відповідних канонічних шарувань) гомеоморфізми $h : Z_0 \to Z_0'$ і $k : Z \to Z'$, що роблять комутативною таку діаграму:*

$$\begin{tikzcd} Z_0 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] & Z_0' \arrow[d, "q'"] \\ Z \arrow[r, "k"'] & Z' \end{tikzcd} \qquad (1)$$

У третьому розділі введено поняття графу смугастого атласу, який несе «комбінаторну» інформацію про склейки смуг.

А саме, *графом* смугастого атласу $q : \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \to Z$ на Z називається четвірка

$$G = (\Lambda, H, \xi, \sigma),$$

що складається з таких об'єктів.

- Λ — множина *вершин* графа G.
- $H = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \Big(d_{-1}(\lambda) \sqcup d_{+1}(\lambda)\Big)$ — сім'я щонайбільше зліченних лінійно впорядкованих попарно не перетинних множин.

  Множини $d_{-1}(\lambda)$ та $d_{+1}(\lambda)$ назвемо *півребрами інцидентними* λ і покладемо $d(\lambda) = d_{-1}(\lambda) \sqcup d_{+1}(\lambda)$.

- $\xi : H \to H$ — інволюція, тобто біекція така, що $\xi^2 = \mathrm{id}_H$. Якщо при цьому $X \neq \xi(X)$ для деякого $X \in H$, то *невпорядковану* пару $\{X, \xi(X)\}$ назвемо *замкненим ребром* графа G. У протилежному випадку X — нерухома точка ξ і її називатимемо *напіввідкритим ребром* графа G.
- $\sigma : E \to \{\pm 1\}$ відображення з множини

  $$E = \big\{\{X, \xi(X)\} \mid X \in H,\ X \neq \xi(X)\big\}$$

  всіх замкнених ребер графа G в $\{\pm 1\}$, яке називається *орієнтацією склейок.*

Означення 3.1.2.1. *Нехай $G = (\Lambda, H, \xi, \sigma)$ і $G' = (\Lambda', H', \xi', \sigma')$ — графи смугастого атласу деякої смугастої поверхні. Тоді під ізоморфізмом цих графів розумітимемо чотири відображення:*

$$\nu : \Lambda \to \Lambda', \qquad \varepsilon : H \to H', \qquad l, \tau : \Lambda \to \{\pm 1\},$$

що мають такі властивості:

1) *ν і ε — біекції, що задовольняють тотожності*

   $$\varepsilon(d_s(\lambda)) = d'_{\tau(\lambda)\cdot s}(\nu(\lambda))$$

   для всіх $\lambda \in \Lambda$ і $s \in \{\pm 1\}$, де $d'_{\pm 1}(\lambda') \subset H'$ — множина півребер графа G', інцидентних $\lambda' \in \Lambda$. Крім того, обидві біекції

   $$\varepsilon|_{d_{-1}(\lambda)} : d_{-1}(\lambda) \to d'_{-\tau(\lambda)}(\nu(\lambda)),$$
   $$\varepsilon|_{d_{+1}(\lambda)} : d_{+1}(\lambda) \to d'_{\tau(\lambda)}(\nu(\lambda)),$$

   є зростаючими для $l(\lambda) = +1$ і спадними для $l(\lambda) = -1$.

2) *$\xi' \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \xi$, зокрема, ε індукує біекцію між замкненими ребрами графа G і G'.*

3) *Нехай $\{X, Y\}$ — замкнене ребро G, де $X \in d(\lambda)$ і $Y = \xi(X) \in d(\mu)$ для деяких $\lambda, \mu \in \Lambda$. Тоді*

   $$l(\lambda) \cdot \sigma(X, Y) = \sigma'(\varepsilon(X), \varepsilon(Y)) \cdot l(\mu). \tag{2}$$

Зауважимо, що множина $\mathrm{Aut}(G)$ всіх автоморфізмів графа G є групою відносно операції множення: якщо

$$a' = (\nu', \varepsilon', l', \tau'),\ a = (\nu, \varepsilon, l, \tau) \ \in \ \mathrm{Aut}(G),$$

то їх добуток $a'' = a'a = (\nu'', \varepsilon'', l'', \tau'')$ визначений таким чином:

$$\nu'' = \nu' \circ \nu, \qquad \varepsilon'' = \varepsilon' \circ \varepsilon, \tag{3}$$

$$l''(\lambda) = l'(\nu(\lambda)) \cdot l(\lambda), \qquad \tau''(\lambda) = \tau'(\nu(\lambda)) \cdot \tau(\lambda), \tag{4}$$

для всіх $\lambda \in \Lambda$.

У підрозділі 3.1, використовуючи теорему 2.1.1.1, встановлено необхідні та достатні умови еквівалентності двох смугастих атласів.

Теорема 3.1.3.1. *Кожна еквівалентність смугастих атласів індукує ізоморфізм між їх графами. Навпаки, кожен ізоморфізм графів смугастих атласів визначає деяку еквівалентність між самими атласами.*

Позначимо через $\mathcal{H}(\Delta)$ групу усіх пошарових гомеоморфізмів $h : Z \to Z$, тобто таких гомеоморфізмів, що $h(\omega) \in \Delta$ для кожного шару $\omega \in \Delta$. Нехай також $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta)$ — нормальна підгрупа групи $\mathcal{H}(\Delta)$, що складається з пошарових гомеоморфізмів, ізотопних тотожному відображенню id_Z у $\mathcal{H}(\Delta)$. Фактор-група $\mathcal{H}(\Delta)/\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta)$ тотожна з множиною $\pi_0\mathcal{H}(\Delta)$ компонент зв'язності $\mathcal{H}(\Delta)$ відносно компактно-відкритої топології, і її природно називати *групою гомеотопій* шарування Δ за аналогією з групами гомеотопій многовидів.

Зауважимо, що кожен гомеоморфізм смугастої поверхні $h : Z \to Z$ з $\mathcal{H}(\Delta)$ також індукує автоморфізм графа смугастого атласу $\rho(h) : G \to G$, а відповідність $h \mapsto \rho(h)$ є гомоморфізмом груп $\rho : \mathcal{H}(\Delta) \to \mathrm{Aut}(G)$.

Нехай $S = \mathbb{R} \times [0;1]$ — смуга з визначеним на ній канонічним шаруванням. Нехай також задано гомеоморфізми $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R} \times \{1\}$ за допомогою формул: $\varphi_1(x;0) = (x,1)$, $\varphi_2(x;0) = (-x,1)$. Тоді фактор-простір $Z_1 = S/\varphi_1$ є відкритим циліндром, $Z_2 = S/\varphi_2$ — стрічкою Мебіуса, а фактор відображення $p_i : S \to Z_i$ — смугастими атласами на $Z_i, i = 1,2$. Зокрема, Z_i є смугастою поверхнею.

Теорема 3.5.0.2. *Нехай* $q : \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \to Z$ *— смугастий атлас зв'язної поверхні* Z, G *її граф, і* Δ *відповідне канонічне шарування.*

1. *Якщо* Z *пошарово гомеоморфна або відкритому циліндру* Z_1, *або стрічці Мебіуса* Z_2, *то група* $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta)$ *гомотопічно еквівалентна до кола* S^1.

2. *У протилежному випадку,* $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta)$ *є стягуваною.*

В обох випадках гомоморфізм ρ *індукує ізоморфізм*

$$\rho : \pi_0\mathcal{H}(\Delta) \cong \mathrm{Aut}(G).$$

Позначимо через $\mathfrak{F}$ — клас смугастих поверхонь, для яких виконуються умови:

1) граф є направленим деревом скінченного діаметру;
2) з кожної вершини виходить не більш як зліченне число ребер і на множині цих ребер зафіксовано лінійний порядок, ізоморфний порядку на деякій підмножині цілих чисел;
3) у кожну вершину входить не більше одного ребра.

Відмітимо, що канонічне шарування Δ смугастої поверхні з класу $\mathfrak{F}$ є орієнтованим. Нехай $\mathcal{H}^+(\Delta)$ — підгрупа у $\mathcal{H}(\Delta)$, яка складається з гомеоморфізмів h, таких, що для кожного шару ω звуження відображення $h : \omega \to h(\omega)$ зберігає орієнтацію. Нехай також $\mathcal{H}^+_{\mathrm{id}}(\Delta)$ — підгрупа групи $\mathcal{H}^+(\Delta)$, що складається з пошарових гомеоморфізмів, ізотопних тотожному відображенню id_Z в $\mathcal{H}^+(\Delta)$, а $\pi_0\mathcal{H}^+(\Delta) = \mathcal{H}^+(\Delta)/\mathcal{H}^+_{\mathrm{id}}(\Delta)$ — відповідна група гомеотопій.

Клас груп гомеотопій канонічних шарувань на смугастій поверхні, яка належить класу $\mathfrak{F}$, позначимо через $\mathfrak{P}$, тобто

$$\mathfrak{P} = \{\pi_0\mathcal{H}^+(\Delta) \mid \Delta \text{ — канонічне шарування деякої поверхні } Z \in \mathfrak{F}\}.$$

Також визначимо інший клас груп $\mathfrak{G}$.

Означення 3.3.2.1 *Нехай $\mathfrak{G}$ — мінімальний клас груп, що задовольняють такі умови:*

1) $1 \in \mathfrak{G}$*;*
2) *якщо $G_i \in \mathfrak{G}$ для $i \in \mathbb{N}$, то $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i \in \mathfrak{G}$;*
3) *якщо $G \in \mathfrak{G}$, то вінцевий добуток $G \wr \mathbb{Z} \in \mathfrak{G}$.*

Відмітимо, що довільну групу G класу $\mathfrak{G}$ можна отримати з одиничної групи за допомогою скінченного числа операцій зліченних добутків та вінцевих добутків з $\mathbb{Z}$. При цьому одна й та ж група може бути отримана так багатьма різними способами. Наприклад,

$$\mathbb{Z} \;\cong\; 1 \wr \mathbb{Z} \;\cong\; 1 \times (1 \wr \mathbb{Z}) \;\cong\; (1 \times 1 \times 1) \wr \mathbb{Z}.$$

Надалі нас цікавитимуть найкоротші такі записи серед усіх можливих для даної групи.

Нехай $A = \{1, \mathbb{Z}, (,), \times, \wr\}$ — множина символів, яку назвемо *алфавітом*. Під *словом* розумітимемо не більш ніж зліченну впорядковану множину символів з алфавіту A. Введемо поняття допустимого слова α та його висоти $h(\alpha)$, яка може приймати значення від 0 до $+\infty$.

1) слово 1 є допустимим, причому $h(1) = 0$;
2) якщо слово α — допустиме, то (α) також допустиме, і $h(\alpha) = h((\alpha))$;
3) якщо слово α — допустиме, то $(\alpha)\wr\mathbb{Z}$ також допустиме, а його висота $h((\alpha)\wr\mathbb{Z}) = 1 + h(\alpha)$;
3) якщо $\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda\subset\mathbb{N}}$ — не більш ніж зліченна множина допустимих слів, то слово $\alpha' = (\alpha_1) \times (\alpha_2) \times ...$ є також допустимим і
$$h(\alpha') = 1 + \max_{i\in\Lambda}\{h(\alpha_i)\}.$$

Нехай W — множина допустимих слів. Зрозуміло, що кожне допустиме слово $\alpha \in W$ визначає деяку групу $\xi(\alpha)$ з класу $\mathfrak{G}$. Іншими словами, ми отримали сюр'єктивне відображення $\xi : W \to \mathfrak{G}$. Слово α назвемо представленням групи $\xi(\alpha)$ в алфавіті A.

Нехай $W' = \{\alpha \mid \alpha \in W, h(\alpha) < \infty\}$ — множина слів скінченної висоти, а $\mathfrak{G}' = \xi(W')$ — підклас у $\mathfrak{G}$, який містить групи, що допускають представлення скінченної висоти в алфавіті A.

Теорема 3.3.2.5. *Класи $\mathfrak{P}$ та $\mathfrak{G}'$ збігаютьcя.*

У підрозділі 3.4 встановлено зв'язок груп гомеотопій канонічних шарувань смугастих поверхонь класу $\mathfrak{F}$ та їх просторів шарів.

Нехай $q : Z_0 = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \to Z$ — смугастий атлас на поверхні Z і Δ — відповідне канонічне шарування. Позначимо через $L = Z/\Delta$ простір шарів і нехай $\pi : Z \to L$ — фактор-відображення. Простір L можна розглядати як «негаусдорфовий» граф, у якого «розщеплені» вершини. Ребрами цього графа є внутрішності смуг S_λ, а вершинами — граничні інтервали. Покладемо $\partial_+ e_\lambda = \pi(\partial_+ S_\lambda)$ і $\partial_- e_\lambda = \pi(\partial_- S_\lambda)$.

Нехай $\mathcal{K}$ – це група гомеоморфізмів L, що переводять ребра в ребра зі збереженням орієнтації та лінійного порядку вершин на $\partial_+ e$, тобто, для $g \in \mathcal{K}$ такого, що $g(e_\lambda) = e_\mu$, а обмеження відображення $g : \partial_+ e_\lambda \to \partial_+ e_\mu$ повинно зберігати лінійний порядок вершин. Позначимо також через $\mathcal{K}_0$ групу гомеоморфізмів графа L з $\mathcal{K}$, що ізотопні тотожному відображенню $\mathcal{K}$.

Кожен гомеоморфізм смугастої поверхні $h : Z \to Z$ з $\mathcal{H}^+(\Delta)$ індукує фактор-відображення, що є гомеоморфізмом $\hat{\rho}(h) : L \to L$ простору шарів. Зауважимо, що відповідність $h \mapsto \hat{\rho}(h)$ є гомоморфізмом груп $\hat{\rho} : \mathcal{H}^+(\Delta) \to \mathcal{K}$.

Теорема 3.4.2.5. *Нехай $Z \in \mathfrak{F}$ і Δ — канонічне шарування. Тоді гомоморфізм $\hat{\rho} : \mathcal{H}^{+}(\Delta) \to \mathcal{K}$ індукує ізоморфізм груп $\pi_0\mathcal{H}^{+}(\Delta)$ та $\pi_0\mathcal{K}$.*

Четвертий розділ присвячений дослідженню топологічної еквівалентності псевдогармонічних функцій на площині.

Нехай X та Y – некомпактні поверхні. Неперервні функції $f : X \to \mathbb{R}$ і $g : Y \to \mathbb{R}$ називаються *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $h : X \to Y$ і $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що виконується рівність $k \circ f = g \circ h$. При цьому f та g є *орієнтовано топологічно еквівалентними*, якщо гомеоморфізм k можна вибрати так, щоб він зберігав орієнтацію. Скажемо, що f і g *пошарово еквівалентні*, якщо існує гомеоморфізм площини, який відображає компоненти зв'язності множин рівнів f на компоненти множин рівнів g.

У підрозділі 4.1 розглядаються неперервні функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, множини ліній рівня яких утворюють несингулярні шарування площини. Справедливе таке твердження.

Теорема 4.1.0.1. *Нехай $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — неперервна функція і $\Delta = \left\{ f^{-1}(p) \mid p \in \mathbb{R} \right\}$ розбиття $\mathbb{R}^2$ на лінії рівня функції f. Припустимо, що виконуються дві умови:*

1. *Для кожного $p \in f(\mathbb{R}^2)$, що належить образу f, відповідна лінія рівня $f^{-1}(p)$ гомеоморфна образу відкритого інтервалу. Зокрема, $f^{-1}(p)$ є лінійно зв'язною множиною.*
2. *Δ — несингулярне шарування на $\mathbb{R}^2$.*

Тоді образ $f\left(\mathbb{R}^2\right)$ є відкритим інтервалом (a, b), $a, b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$, і існує гомеоморфізм $\varphi : \mathbb{R} \times (a, b) \to \mathbb{R}^2$ такий, що $f \circ \varphi(x, y) = y$. Іншими словами, f топологічно еквівалентна до проекції $\mathbb{R}^2$ на пряму.

У підрозділі 4.2 розглянуто псевдогармонічні функції загального положення (різні сингулярні точки знаходяться на множинах різних рівнів), які, до того ж, мають скінченну кількість сингулярних точок, а їх простори Кронрода-Ріба є гаусдорфовими.

Нагадаємо, що функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ називається *псевдогармонічною*, якщо в околі кожної точки вона топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$ у деякому околі початку координат на комплексній площині ($n \in \mathbb{N}$ залежить від точки). Розбиття площини на компоненти звязності множин ліній рівня цих функцій утворюватимуть сингулярні шарування.

Нехай $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — псевдогармонічна функція загального положення, яка задовольняє наступним умовам (введеним у роботі Є. О. Полуляха[23]), і які позначимо через $\mathcal{N}$.

а) Число сингулярних точок функції f є скінченним.

б) Нехай для $a \in \mathbb{R}$, точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ належать різним компонентам множини рівня $f^{-1}(a)$. Тоді знайдуться відкриті околи U_1, $x_1 \in U_1$ та U_2, $x_2 \in U_2$, такі, що для кожного $b \in \mathbb{R}$ і компоненти F_b множини рівня $f^{-1}(b)$ виконується співвідношення $F_b \cap U_1 = \varnothing$ або $F_b \cap U_2 = \varnothing$.

Надалі розглядатимемо лише псевдогармонічні функції загального положення, що задовольняють умову $\mathcal{N}$.

Розглянемо розбиття площини на компоненти зв'язності множин рівня f. Відповідний фактор-простір $\Gamma_{K-R}(f)$ називається *простором Кронрода-Ріба функції* f. Нехай також $\pi_f : \mathbb{R}^2 \to \Gamma_{K-R}(f)$ — відповідне фактор-відображення. Наділимо $\Gamma_{K-R}(f)$ фактор-топологією відносно π_f.

Для функцій Морса на замкнутих поверхнях, $\Gamma_{K-R}(f)$ є скінченним одновимірним CW-комплексом. З іншого боку, для більш загальних функцій, зокрема функцій на некомпактних поверхнях, $\Gamma_{K-R}(f)$ може бути навіть негаусдорфовим.

Оскільки f відображає шари шаруванння в точки $\mathbb{R}$, то існує неперервне фактор-відображення $f_{K-R} : \Gamma_{K-R}(f) \to \mathbb{R}$, таке, що

$$f = f_{K-R} \circ \pi_f.$$

У підрозділі 4.2 встановлено деякі властивості простору Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$.

Нехай G — граф і V_0 є підмножиною множини листів G. Нехай також $e \subset G$ — (замкнене) ребро G, інцидентне деякому листу з V_0. Множину $e \setminus V_0$ назвемо *черешком*, а простір $G_0 = G \setminus V_0$ — *графом з черешками.*

Простір Кронрода-Ріба псевдогармонічної функції загального положення f, що задовольняє умову $\mathcal{N}$, є деревом з черешками[23].

У пункті 4.3 будуються інваріанти, що допомагають розрізняти такі функції : навантажені та слабо навантажені графи Кронрода-Ріба.

Очевидно, що напрямок зростання функції f_{K-R} уздовж ребер $\Gamma_{K-R}(f)$ задає орієнтацію цих ребер.

Крім того, для кожної вершини v можна визначити циклічний порядок на множині інцидентних їй ребер, так, що два сусідніх ребра в циклі мають протилежну орієнтацію. Такий циклічний порядок назвемо *спіном* $\lhd v$ вершини v.

[23] *Полулях Е. А.* Графы Кронрода-Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях. I // Укр. мат. журн. - 2015. - **67**,3. — С. 375-396.

Означення 4.3.0.1. *Слабо навантаженим графом Кронрода-Ріба називаєтъся орієнтований граф $\Gamma_{K-R}(f)$, для якого в кожній вершині визначений спін.*

Нехай V — множина вершин $\Gamma_{K-R}(f)$, V_{virt} — деяка множина його вершин степеня 1. На множині $V \cup V_{virt}$ означимо функцію f_{lim} таким чином. Якщо v є початком ребра e, нехай $f_{lim}(v) = m(e) = \inf_{x \in e} f_{K-R}(x)$; якщо v є кінцем e, нехай $f_{lim}(v) = M(e) = \sup_{x \in e} f_{K-R}(x)$. Кожна з цих величин може бути як скінченою, так і $\pm\infty$. Функція f_{K-R} є строго монотонною на ребрах. Внаслідок цього $f_{lim} = f_{K-R}$ на множині V «справжніх» вершин $\Gamma_{K-R}(f)$. Оскільки всі віртуальні вершини мають порядок 1, то f_{lim} коректно визначена також на V_{virt}.

Нас буде цікавити не вся множина V_{virt}, а лише ті віртуальні вершини, на яких f_{lim} набуває скінченні значення. Позначимо

$$V_{fin} = \{v \in V_{virt} \mid f_{lim}(v) \neq \pm\infty\}.$$

Множину $V_{ext} = V \cup V_{fin}$ назвемо *розширеною множиною вершин графа* $\Gamma_{K-R}(f)$.

Нарешті, ми маємо відношення часткового порядку на розширеній множині V_{ext} вершин дерева $\Gamma_{K-R}(f)$.

Означення 4.3.0.5. *Навантаженим графом Кронрода-Ріба називаєтъся слабо навантажений граф $\Gamma_{K-R}(f)$ разом із підмножиною V_{fin} множини віртуальних вершин і розширеним відношенням порядку на розширеній множині вершин $V_{ext} = V \cup V_{fin}$.*

Означення 4.3.0.7. *Графи Кронрода-Ріба функцій f і g* еквівалентні, *якщо існує комбінаторний ізоморфізм ψ орієнтованих графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$, який зберігає спіни і порядок між розширеними множинами вершин.*

У підрозділі 4.4 для псевдогармонічних функцій загального положення, що задовольняють умову $\mathcal{N}$, встановлено справедливість такої теореми.

Теорема 4.4.3.1. *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — псевдогармонічні функції загального положення, що задовольняють умови $\mathcal{N}$.*

f і g є орієнтовано пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли слабо навантажений граф Кронрода-Ріба функції f еквівалентний слабо навантаженому графу однієї з функцій g або $-g$.

f і g є орієнтовано топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх навантажені графи Кронрода-Ріба є еквівалентними.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню автоморфізмів несингулярних шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях. У роботі отримані такі результати:

- отримано необхідні та достатні умови еквівалентності атласів смугастої поверхні;
- для атласу смугастої поверхні визначено граф, що описує інформацію про склеювання цієї поверхні зі смуг та встановлено ізоморфізм між групою гомеотопій її канонічного шарування та групою автоморфізмів графа атласу;
- описано алгебраїчну структуру класу груп гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь;
- встановлено зв'язок між групами гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь та групами гомеотопій їх просторів шарів;
- отримано необхідні та достатні умови пошарової та топологічної еквівалентності двох псевдогармонічних функцій загального положення на площині, множини ліній рівня яких утворюють сингулярне шарування зі скінченним числом особливостей, а їх простори шарів є гаусдорфовими.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Sharko V. V. Topological equivalence to a projection / V. V. Sharko and Yu. Yu. Soroka // Methods Funct. Anal. Topology.— 2015.— **21**, 1.— Pp. 3–5.
2. Шарко В. В. Топологічна еквівалентність псевдогармонічних функцій загального положення на площині / В. В. Шарко, Є. О. Полулях, Ю. Ю. Сорока // Праці Інституту математики НАН України. — 2015.— **12**, 6.— С. 7 – 47.
3. Сорока Ю. Ю. Групи симетрій несингулярних шарувань площини / Ю. Ю. Сорока // Тези доповідей 10-тої літньої школи «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса).— 2015.— С. 60–61.
4. Soroka Yulya. Non-singular foliations in the plane / Yulya Soroka // 3rd EUMLS Conference «Mathematics for Life Sciences» (Rivne).— 2015.— P. 43.

5. Polulyakh Ye. O. Topological equivalence of pseudo-harmonic functions of general position in the plane / Ye. O. Polulyakh, Yu. Yu. Soroka // International conference "Geometry and Topology in Odessa - 2016"(Odessa).— 2016.—P. 28.
6. Сорока Ю. Ю. Групи гомеотопій несингулярних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь / Ю. Ю. Сорока // Тези доповідей 11-тої літньої школи «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса). — 2016. — С. 124 – 125.
7. Soroka Yu. Yu. Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations on the plane / Yu. Yu. Soroka // Methods Funct. Anal. Topology.— 2016.— **22**, 3.— Pp. 283–294.
8. Soroka Yu. Yu. Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations/ Yu. Yu. Soroka // Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday, (Kharkiv). — 2016. — Pp.47–48.
9. Soroka Yuliia. Homeotopy groups of non-singular foliations on the plane / Yuliia Soroka // The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv).—2016.— P. 49.
10. Сорока Ю. Групи гомеотопій несингулярних шарувань площини / Ю. Сорока // Український математичний журнал.— 2017. — **69**, 7. — С. 1000–1008.
11. Maksymenko Sergiy. Homeotopy groups of one-dimensional foliations on surfaces / Sergiy Maksymenko, Yugene Polulyakh, Yuliya Soroka // Proceedings of the International Geometry Center.— 2017.— **10**, 71.— Pp. 22–46.

АНОТАЦІЇ

***Сорока Ю. Ю.* Автоморфізми шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.**

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 «Геометрія та топологія» — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню гомотопічних типів груп автоморфізмів несингулярних шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях та автоморфізмів сингулярних шарувань на площині зі скінченим числом особливих точок.

У роботі описано алгебраїчну структуру класу груп гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь, а також встановлено зв'язок між групами гомеотопій пошарових гомеоморфізмів канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь та групами гомеотопій їх просторів шарів. Для атласу смугастої поверхні визначено граф, що описує інформацію про склеювання поверхні зі смуг, та встановлено ізоморфізм між групою гомеотопій пошарових гомеоморфізмів її канонічного шарування та групою гомеотопій автоморфізмів графа її атласу. Також встановлено необхідні та достатні умови пошарової та топологічної еквівалентностей двох псевдогармонічних функцій загального положення на площині, множини ліній рівня яких утворюють сингулярні шарування зі скінченним числом особливостей, а їх простори шарів є гаусдорфовими.

Ключові слова: автоморфізми шарувань, групи гомеотопій, псевдогармонічні функції, топологічна еквівалентність функцій.

Сорока Ю. Ю. **Автоморфизмы слоений на двумерных некомпактных поверхностях. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.**

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.04 «Геометрия и топология» — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена исследованию гомотопических типов групп автоморфизмов несингулярных слоений на двумерных некомпактных поверхностях и автоморфизмов сингулярных слоений с конечным числом особых точек на плоскости.

Свойства несингулярных слоений плоскости изучались в работах В. Каплана. Он показал, что каждое одномерное слоение на плоскости «склеено» из не более чем счётного числа поверхностей, внутренности которых послойно гомеоморфны $\mathbb{R} \times (0,1)$, вдоль их граничных компонент. С. И. Максименко, Е. А. Полулях в своих работах исследовали свойства слоений с некомпактными замкнутыми слоями на некомпактных поверхностях, которые можно склеить из не более чем счетного числа полос $\mathbb{R} \times (0,1) \subset S$, вдоль открытых интервалов. Такие поверхности названы *полосатыми*, а соответствующие слоения на них — каноническими. Разрезания полосатой поверхности на полосы задает *полосатый атлас.*

В диссертационной работе рассматриваются послойные гомеоморфизмы таких полосатых поверхностей Z, то есть гомеоморфизмы $h : Z \to Z$, переводящие слой слоения Δ в слой. В работе изучаются гомотопические типы групп всех послойных гомеоморфизмов $\mathcal{H}(\Delta)$ несингулярных слоений на двумерных некомпактных поверхностях, для которых определен полосатый атлас. Для этого рассматривается группа гомеотопий $\pi_0\mathcal{H}(\Delta) = \mathcal{H}(\Delta)/\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta)$, являющаяся аналогом группы классов отображений для послойных гомеоморфизмов, где $\mathcal{H}_{\mathrm{id}}(\Delta)$ — подгруппа $\mathcal{H}(\Delta)$, состоящая из гомеоморфизмов, изотопных id в $\mathcal{H}(\Delta)$.

С каждым полосатым атласом поверхности можно связать граф G с дополнительной комбинаторной информацией о склейках поверхности из полос. Полосам соответствуют вершины графа, а рёбрам — интервалы склеивания и компоненты границы. На рёбрах, инцидентных каждой вершине, определены линейные порядки и знаки — плюс или минус, несущие информацию о сохранении или изменении ориентации слоев при склеиваниях. В работе построен изоморфизм между группами гомеотопий канонических слоений полосатых поверхностей и группами автоморфизмов графов их атласов.

Также рассмотрено класс $\mathfrak{F}$ полосатых поверхностей, граф которых является корневым деревом конечного диаметра. Установлено, что группа G является изоморфной группе гомеотопий канонических слоений полосатой поверхности класса $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда G можно получить из единичной группы с помощью композиции конечного числа операций следующих типов: счётных прямых произведений и сплетений с группой $\mathbb{Z}$. Также построен изоморфизм между группами гомеотопий канонических слоений полосатых поверхностей класса $\mathfrak{F}$ и группами гомеотопий специальных гомеоморфизмов их пространств слоев.

Робота также посвящена исследованию топологической эквивалентности псевдогармонических функций на плоскости. Получены необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности двух псевдогармонических функций общего положения на плоскости, множества линий уровня которых образуют сингулярные слоения с конечным числом особенностей, а пространства слоев являются хаусдорфовыми.

Ключевые слова: автоморфизмы слоений, группы гомеотопий, псевдогармонические функции, топологическая эквивалентность функций.

***Soroka Yu. Yu.* Automorphisms of foliations on two-dimensional noncompact surfaces. — Manuscript.**

The thesis for obtaining the Degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Doctor of Philosophy) in specialty 01.01.04 «Geometry and topology» — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to study of the homotopy types of automorphisms groups of nonsingular foliations on two-dimensional noncompact surfaces and automorphisms of singular foliations on the plane with finitely many singular points.

We describe an algebraic structure of the class of homeotopy groups of canonical foliations of rooted tree-like striped surfaces, and establish a connection between homeotopy groups of foliated homeomorphisms of canonical foliations on rooted tree-like striped surfaces and homeotopy groups their spaces of leaves. For an atlas of a striped surface we define a graph describing the information about gluing of the surface from strips and establish an isomorphism between the homeotopy group of the canonical foliation of that striped surface and the group of automorphisms of its graph. We also obtain necessary and sufficient conditions for foliated and topological equivalences of two pseudo harmonic functions of general position on the plane, whose level-sets form singular foliations with finite number of singularities and their space of leaves are Hausdorff.

Keywords: automorphisms of foliations, homeotopy groups, pseudoharmonic functions, topological equivalence of functions.

Підписано до друку 27.02.2018.
Формат 60х84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,5. Умов. друк. арк. 1,4.
Тираж 100 пр. Зам. 25.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.