

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Інститут математики НАН України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

СОРОКА ЮЛІЯ ЮРІЇВНА

УДК 515.146.27 + 515.162.2

ДИСЕРТАЦІЯ

АВТОМОРФІЗМИ ШАРУВАНЬ НА ДВОВИМІРНИХ НЕКОМПАКТНИХ ПОВЕРХНЯХ

01.01.04 – геометрія та топологія

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук (доктора філософії)

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Ю. Ю. Сорока

Наукові керівники:

доктор фізико-математичних наук,
професор, член-кореспондент НАН України

Шарко Володимир Васильович

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник

Максименко Сергій Іванович

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Сорока Ю. Ю. Автоморфізми шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.04 «Геометрія та топологія» — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2017.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню гомотопічних типів груп автоморфізмів несингулярних шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях та автоморфізмів сингулярних шарувань зі скінченим числом особливих точок на площині.

Важливою частиною сучасної математики є теорія шарувань, яка виникла як геометричний погляд на розв'язки диференціальних рівнянь та інтегровних систем і згодом переросла в потужний розділ геометрії, що вивчався G. Reeb, A. Haefliger, W. Thurston, P. Molino, С. П. Новіковим та багатьма іншими математиками.

Шарування застосовуються в теорії динамічних систем і виникають у дослідженні питань топологічних властивостей потоків векторних полів. Історія вивчення цього питання веде ще до робіт А. Пуанкаре. Основою для топологічної класифікації на двовимірних поверхнях є теорія Пуанкаре-Бенедіксона. Загалом вивченням потоків на двовимірних многовидах займалися багато математиків Є. О. Леонтович, А. Г. Майер, М. Пейското, С. Х. Арансон, В. З. Грінес, І. У. Бронштейн, І. Г. Ніколаєв, В. В. Шарко, О. О. Пришляк, Д. М. Полтавець, О. А. Гірик та інші.

Топологічна частина теорії функцій комплексної змінної пов'язана з топологічною класифікацією аналітичних та псевдогармонічних функцій, і зокрема з дослідженням шарувань їх ліній рівня. Такі питання розглядалися в роботах С. Стоїлова, G. T. Whyburn, А. Т. Фоменка і О. В. Болсінова, А. О. Ошемкова,

В. О. Мантурова, В. В. Шарка, О. О. Пришляка, С. І. Максименка, Є. О. Полуляха та І. А. Юрчук.

Властивості несингулярних шарувань площини вивчалися в роботах В. Каплана.^{1,2} Він показав, що кожне одновимірне шарування на площині «склеєне» з не більше ніж зліченного числа поверхонь, внутрішності яких пошарово гомеоморфні $\mathbb{R} \times (0, 1)$, уздовж їх компонент межі. С. І. Максименко, Є. О. Полулях в своїх роботах^{3,4} досліджували властивості шарування з некомпактними замкнутими шарами на некомпактній поверхні, які можна склеїти з не більше ніж зліченного числа смуг $\mathbb{R} \times (0, 1) \subset S$, замикання яких вкладається в $\mathbb{R} \times [0, 1]$, вздовж відкритих інтервалів. Такі поверхні названо *смугастими*, а відповідні шарування на них – канонічними. Розрізання смугастої поверхні на смуги задає так званий *смугастим атлас*.

В дисертаційній роботі розглядаються пошарові гомеоморфізми таких смугастих поверхонь Z , тобто гомеоморфізми $h : Z \rightarrow Z$, що переводять шар шарування Δ в шар. Зокрема, в розділі 2 доведено, що будь-яка смуга є пошарово гомеоморфною модельній смузі $S \subset \mathbb{R} \times [u, v]$, тобто смузі кожна компонента зв'язності межі якої ∂S є обмеженим інтервалом і замикання межових інтервалів ∂S в $\mathbb{R} \times [u, v]$ є диз'юнктивним. В підрозділі 2.3 доведено, що для модельних смуг S монотонний гомеоморфізм межі ∂S продовжується до пошарового гомеоморфізму всієї смуги. Цей результат використовується для доведення теореми 3.1.3.1 про необхідні та достатні умови еквівалентності двох смугастих атласів.

Розділ 3 присвячений вивченню гомотопічних типів груп усіх пошарових го-

¹ *Kaplan W.* Regular curve-families filling the plane, I // Duke Math. J. – 1940. – vol.7. – Pp. 154–185.

² *Kaplan W.* Regular curve-families filling the plane, II // Duke Math J. – 1941. –vol.8. – Pp. 11–46.

³ *Maksymenko S., Polulyakh E.* Foliations with non-compact leaves on surfaces // Proceedings of Geometric Center. – 2015. – vol.8., no. 3–4. – Pp. 17–30.

⁴ *Maksymenko S., Polulyakh E.* Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2016. – vol.22, no. 3. - Pp. 266–282.

меоморфізмів $\mathcal{H}(\Delta)$ несингулярних шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях для яких визначений смугастий атлас. Для цього розглядається група гомеотопій $\pi_0\mathcal{H}(\Delta) = \mathcal{H}(\Delta)/\mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$, що є аналогом групи класів відображень для пошарових гомеоморфізмів, де $\mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$ — підгрупа $\mathcal{H}(\Delta)$, що складається з гомеоморфізмів ізотопних id в $\mathcal{H}(\Delta)$. С. І. Максименком та Є. О. Полуляхом доведено, що, окрім двох шарувань спеціального вигляду на циліндрі та на стрічці Мебіуса, тотожна компонента зв'язності $\mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$ групи $\mathcal{H}(\Delta)$ є стягнутою.

З кожним смугастим атласом поверхні можна пов'язати граф G з додатковою комбінаторною інформацією про склейки поверхні зі смуг. Смугом відповідати-муть вершини графа, ребрам — інтервали склеювання та компоненти межі. На ребрах, інцидентних кожній вершині, визначені лінійний порядок та знак — плюс або мінус, що несе інформацію про зберігання чи зміну орієнтації шарів під час склеювання. В підрозділі 3.3 побудовано ізоморфізм між групами гомеотопій канонічних шарувань смугастих поверхонь та групами автоморфізмів графів її атласів.

В підрозділі 3.4 розглянуто клас \mathfrak{F} смугастих поверхонь, граф яких є кореневим деревом скінченного діаметру. Встановлено, що група G є ізоморфною групі гомеотопій канонічних шарувань смугастої поверхні класу \mathfrak{F} тоді і лише тоді, коли G можна отримати з одиничної групи за допомогою композиції скінченного числа операцій таких типів: злічених прямих добутків та вінцевих добутків з групою \mathbb{Z} . Також доведено ізоморфізм між групами гомеотопій канонічних шарувань смугастих поверхонь класу \mathfrak{F} та групами гомеотопій спеціальних гомеоморфізмів їх просторів шарів.

Розділ 4 присвячений дослідженню топологічної еквівалентності псевдогармонічних функцій на площині. В підрозділі 4.1 розглядаються такі функції $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, множини ліній рівня яких утворюють несингулярні шарування площини. В теоремі 4.1.0.1 встановлено умови топологічної еквівалентності цих функцій до проєкцій \mathbb{R}^2 на пряму. Також розглянуто псевдогармонічні функції

загального положення (різні сингулярні точки знаходяться на різних множинах рівня) на площині, які до того ж мають скінченну кількість сингулярних точок, а їх простори Кронрода-Ріба є гаусдорфовими. Множини ліній рівня цих функцій утворюватимуть сингулярні шарування у яких всі особливі шари є мульти-сідлами. В підрозділі 4.3 для таких функцій будуються інваріанти, що допомагають розрізнити їх: навантажені та слабо навантажені графи Кронрода-Ріба. Показано, що дві псевдогармонічні функції загального положення f і g , що задовольняють додаткову умову, є орієнтовано пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли слабо навантажений граф Кронрода-Ріба функції f еквівалентний слабо навантаженому графу Кронрода-Ріба однієї з функцій g або $-g$. Також f і g є топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх навантажені графи Кронрода-Ріба є еквівалентними.

Ключові слова: одновимірні шарування, некомпактні поверхні, автоморфізми шарувань, групи гомеотопій, простір Кронрода-Ріба, псевдогармонічні функції загального положення, топологічна еквівалентність функцій.

ABSTRACT

Soroka Yu. Yu. Automorphisms of foliations on two-dimensional noncompact surfaces. — Manuscript.

The thesis for obtaining the Degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Doctor of Philosophy) in specialty 01.01.04 «Geometry and topology» — Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to study of the homotopy type of the automorphisms group of nonsingular foliations on two-dimensional noncompact surfaces and automorphisms of singular foliations with a finite number of singular points on the plane.

An important branch of modern mathematics is the theory of foliations, arisen from geometric point on the solutions of differential equations and integrable systems, and later turned into a powerful branch of geometry studied by G. Reeb,

A. Haefliger, W. Thurston, P. Molino, C. P. Novikov and many other mathematicians.

Foliations are used in the theory of dynamical systems and the problems of topological properties of flows of vector fields arise in the investigated issues. The history of studying this issue leads to the work of A. Poincare. The basis for the topological classification on two-dimensional surfaces is the Poincare-Benedickson theory. In general, many mathematicians E.O. Leontovich, A. G. Mayer, M. M. Peixoto, V. V. Sharko, O. O. Pryshlyak, D. M. Poltavets, O. A. Girik and others were involved in the study of flows in two-dimensional manifolds. .

Topological part of the theory of functions of a complex variable concerns with the topological classification of analytic and pseudoharmonic functions and is also related with the study of level-sets foliations of those functions. Such questions were solved in the works of S. Stoilov, G. T. Whyburn, A. T. Fomenko and O. V. Bolsinov, A. O. Oshemkov, V. V. Sharko, O. O. Pryshlyak, S. I. Maksymenko, E. O. Polulyakh and I. A. Yurchuk.

Properties of the nonsingular foliations on the plane were studied in works by W. Kaplan.^{1,2} He shown that each one-dimensional foliation on the plane is «glued» of at most countably many surfaces whose interiors are foliated homeomorphic with $\mathbb{R} \times [0, 1]$ along their boundary components. In works^{3,4} S. I. Maksymenko, Ye. O. Polulyakh studied the properties of foliations with non-compact closed leaves on non-compact surfaces that can be glued of at most countably many strips $\mathbb{R} \times (0, 1) \subset S$ whose closures are embedded in $\mathbb{R} \times [0, 1]$ along the open intervals. Such surfaces are called *striped*, and the corresponding foliations on them are canonical. A decomposition of surface onto the strips defined a *striped atlas* on it.

¹ *Kaplan W.* Regular curve-families filling the plane, I // Duke Math. J. – 1940. – vol.7. – Pp. 154–185.

² *Kaplan W.* Regular curve-families filling the plane, II // Duke Math J. – 1941. –vol.8. – Pp. 11–46.

³ *Maksymenko S., Polulyakh Ye.* Foliations with non-compact leaves on surfaces // Proceedings of Geometric Center. – 2015. – vol.8., no. 3–4. – Pp. 17–30.

⁴ *Maksymenko S., Polulyakh Ye.* Foliations with all non-closed leaves on non-compact surfaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2016. – vol.22, no. 3. - Pp. 266–282.

In the thesis, we consider foliated homeomorphisms of such striped surfaces Z , that is, homeomorphisms $h : Z \rightarrow Z$, which maps the leaf of Δ into the leaf. In particular, in Section 2 it is proved that any strip is a foliated homeomorphic to model strip $S \subset \mathbb{R} \times [u, v]$, that is, the strip for each boundary component of ∂S is bounded. The interval and closure of the boundary intervals ∂S in $\mathbb{R} \times [u, v]$ are mutually disjoint. In subsection 2.3, it is proved that for model strip S monotonous homeomorphisms of the boundary ∂S extends to the foliated homeomorphism of the entire strip. This result is used to prove the theorem 3.1.3.1 giving the necessary and sufficient conditions for the equivalence of two striped atlases.

Section 3 is devoted to the study of the homotopy type of a group of all foliated homeomorphisms $\mathcal{H}(\Delta)$ of nonsingular foliations on two-dimensional non-compact surfaces. For this purpose we study the homeotopy group $\pi_0 \mathcal{H}(\Delta) = \mathcal{H}(\Delta) / \mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$, which is an analogue of the group of mappings for foliated homeomorphisms, where $\mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$ is a subgroup $\mathcal{H}(\Delta)$ consisting of homeomorphisms isotopic to id in $\mathcal{H}(\Delta)$. S. I. Maksymenko and Ye. O. Polulyakh proved that identity component $\mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$ of the group $\mathcal{H}(\Delta)$ is contactible except for two specific foliations on a cylinder and a Moebius band.

To each striped atlas on a surface one can associate a certain graph G which additional information encoding the gluing of a surface from strips. Strips correspond to vertices of the graph, while edges correspond to the gluing intervals and the boundary components. On the edges incident to each vertex the linear order and the sign (plus or minus) are specified that holds information about the preserving or reversing of the orientation during the gluing.

In subsection 3.3, we establish an isomorphism between the homeotopy group of a canonical foliation of a striped surface and the group of automorphisms of its atlas.

In 3.4 we consider a class \mathfrak{F} of striped surfaces having an atlas whose graphs are rooted tree of finite diametre. It is shown that a group G is isomorphic to a homeotopy group of a canonical foliations of a striped surface from class \mathfrak{F} if and

only if G can be obtained from the unit group using a composition of a finite number of operations of the following types: counted direct products and wreath products with the group \mathbb{Z} . We also establish an isomorphism between the homeotopy groups of canonical foliations of striped surfaces from class \mathfrak{F} and the homotopy group of special groups of homeomorphisms of the corresponding spaces of leaves.

Section 4 is devoted to the investigation of the topological equivalence of pseudoharmonic functions on a plane. In subsection 4.1 we consider functions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ that do not contain critical points. Their level sets will form nonsingular foliations of the plane. The conditions for the topological equivalence of these functions to the projections \mathbb{R}^2 on the line are established in the theorem 4.1.0.1. Also pseudoharmonic functions of the general position (distinct singular points belong to distinct level sets), which in addition have a finite number of singular points, and their Kronrod-Reeb spaces are Hausdorff spaces, are also considered. The sets of level sets of these functions will form singular foliations in which all special foliations are multi-saddles. In paragraph 4.4 for such functions, we construct invariants that help to distinguish them: weighted and weakly weighted Kronrod-Reeb graphs. It is shown that two pseudoharmonic functions of the general position f and g satisfying an additional condition are oriented in a foliated equivalent if and only if the weakly weighted Kronrod-Reeb graph of f is equivalent to a weakly weighted Kronrod-Reeb graph of one of the functions g or $-g$. Also, f and g are topologically equivalent if and only if their weighted Kronrod-Reeb graphs are equivalent.

Keywords: one-dimensional foliations, noncompact surfaces, automorphisms of foliations, homeotopy groups, Kronrod-Reeb space, pseudoharmonic functions of general position, topological equivalence of functions.

Список публікацій здобувача за тематикою дисертації

1. Sharko V. V. Topological equivalence to a projection / V. V. Sharko and Yu. Yu. Soroka // Methods Funct. Anal. Topology.— 2015.—Vol.21, no. 1.—

- Рр. 3–5.
2. Шарко В. В. Топологічна еквівалентність псевдогармонічних функцій загального положення на площині / В. В. Шарко, Є. О. Полулях, Ю. Ю. Сорока // Праці Інституту математики НАН України.— 2015.— Том. 12, №. 6.— 7–47 с.
 3. Сорока Ю. Ю. Групи симетрій несингулярних шарувань площини / Сорока Ю. Ю. // Тези доповідей 10-тої літньої школи «Алгебра, Топологія. Аналіз» (Одеса).— 2015.— 60–61 с.
 4. Soroka Yulya. Non-singular foliations in the plane / Yulya Soroka // 3rd EUMLS Conference «Mathematics for Life Sciences» (Rivne).— 2015.— P. 43.
 5. Polulyakh Ye. O. Topological equivalence of pseudo-harmonic functions of general position in the plane / Ye. O. Polulyakh, Yu. Yu. Soroka // International conference "Geometry and Topology in Odessa - 2016"(Odessa).— 2016.— P. 28.
 6. Сорока Ю. Ю. Групи гомеотопій несингулярних шарувань коренево подібних смугастих поверхонь / Ю. Ю. Сорока // Тези доповідей 11-тої літньої школи «Алгебра, Топологія. Аналіз» (Одеса).— 2016.—124–125 с.
 7. Soroka Yu. Yu. Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations on the plane / Yu. Yu. Soroka // Methods Funct. Anal. Topology.— 2016.—Vol.22, no. 3.— Pp. 283–294.
 8. Soroka Yu. Yu. Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations / Yu. Yu. Soroka // Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday, (Kharkiv).— 2016.—P. 47 – 48.
 9. Soroka Yuliia. Homeotopy groups of non-singular foliations on the plane / Yuliia Soroka // The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv).—2016.— P. 49.

10. Сорока Ю. Группы гомеотопий несингулярных шарувань плоскости / Ю. Сорока // Український математичний журнал. — 2017.— Том. 69, №. 7. — 1000–1008 с.
11. Maksymenko Sergiy. Homeotopy groups of one-dimensional foliations on surfaces / Sergiy Maksymenko, Yugene Polulyakh, Yuliya Soroka // Proceedings of the International Geometry Center.— 2017.—Vol.10, no. 71.— Pp. 22–46.

ЗМІСТ

Анотація	2
Вступ	13
1 Попередні відомості	22
1.1 Шарування на многовидах	22
1.2 Несингулярні шарування площини	26
1.3 Групи гомеотопій пошарових гомеоморфізмів	28
1.4 Вінцевий добуток	28
1.5 Топологічна еквівалентність функцій та їх простір Кронрода-Ріба	29
1.6 Висновки	31
2 Модельні смуги та смугаста поверхня	32
2.1 Модельні смуги	32
2.2 Доведення Твердження 2.1.0.2	34
2.3 Доведення Теорема 2.1.1.1	38
2.4 Смугастий атлас	41
2.5 Висновки	44
3 Групи гомеотопій несингулярних шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях	45
3.1 Граф смугастого атласу	45
3.2 Редукований смугастий атлас	55

	12
3.3 Група гомеотопій канонічного шарування смугастої поверхні . . .	56
3.4 Групи гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смуга- стих поверхонь	58
3.5 Зв'язок груп гомеотопій шарувань смугастих поверхонь класу \mathfrak{F} та їх просторів шарів	70
3.6 Висновки	76
4 Топологічна еквівалентність псевдогармонічних функцій за- гального положення на площині	77
4.1 Топологічна еквівалентність функцій до проєкції \mathbb{R}^2 на пряму . .	77
4.2 Псевдогармонічні функції загального положення на площині . . .	80
4.3 Навантажені і слабо навантажені графи Кронрода-Ріба	92
4.4 Топологічна еквівалентність функцій загального положення, що задовольняють умовам \mathcal{N}	95
4.5 Висновки	115
Висновки	116
Список використаних джерел	117
Додаток	127

ВСТУП

Дисертація присвячена вивченню автоморфізмів шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях.

Актуальність теми

Шарування на многовидах природно виникають в різних контекстах, наприклад, як розв'язки диференціальних рівнянь та інтегровних систем, розбиття многовиду на орбіти дій груп Лі або на множини рівня гладкої функції чи гладкого відображення.

Базовим «локальним» фактом теорії шарувань є твердження [8, 7, 11], яке дає необхідні і достатні умови інтегровності поля k -вимірних площин в \mathbb{R}^n . Воно доведене ще в 1840 році і зараз називається теоремою Фробеніуса.

Одним з перших «глобальних» результатів про існування шарувань на всьому многовиді була теорема Пуанкаре-Хопфа, наслідком з якої є те, що на компактному многовиді існує одновимірне шарування (фактично векторне поле без особливостей) тоді і лише тоді, коли елерова характеристика цього многовиду дорівнює нулю.

Робота G. Ehresmann і G. Reeb [9] стала поштовхом для дослідження існування шарувань з шарами вищих розмірностей. «Тривіальними» прикладами таких шарувань є шарування на шари локально тривіальних розшарувань, і, зокрема, прямі добутки. G. Reeb [44] вперше побудував «нетривіальний» приклад шарування корозмірності 1, яке зараз називають *шаруванням Ріба*.

С. П. Новіков (1965) довів, що двовимірне шарування на тривимірному мно-

говиді, універсальне накриття якого не є стягуваним, має компактний шар. З цього результату, зокрема, випливало, що кожне 2-шарування на 3-сфері має компоненту Ріба.

Далі, у другій половині 60-х років з'явилися інші приклади шарувань корозмірності 1 на замкнених многовидах, наприклад, Ж. Тамура [54, 56, 55], Ж. Л. Араут [2].

Також А. Наефлігер [13] показав, що на некомпактних многовидах завжди існують шарування корозмірності 1.

Робота В. Тюрстона [57] та її узагальнення отримані Ж. Матер [30, 29, 33, 32, 31, 34] давали інформацію про гомотопічні властивості груп дифеоморфізмів многовидів. Зокрема, В. Лінг [23], А. Ваняга [3], Т. Рубіцкі [46], К. Фукуй та Н. Іманіші [12], К. Абе та К. Фукуй [1], Ж. Лех та Т. Рубіцкі [21], Ж. Лех [22] встановили досконалість деяких груп дифеоморфізмів та гомеоморфізмів, що зберігають шари шарувань.

З точки зору диференціальної геометрії цікавими є питання про існування шарувань із заданими обмеженнями на кривину, див. напр. книгу Р. Моліно [35]. В Україні цією тематикою займалися харківські математики О. А. Борисенко [63], Д. В. Болотов [60, 61], В. В. Круглов [18, 19].

Найбільш повний опис топологічної структури шарувань, і зокрема, поведінки траєкторій векторних полів, був отриманий на многовидах малих розмірностей Є. О. Леонтович та А. Г. Майером [68], К. Р. Мейер [69], М. М. Пейскотто [37], С. Х. Арансоном та В. З. Грінесом [59], О. А. Гірик [66], Д. М. Полтавцем [74], Л. П. Плахтою [38, 39] І. У. Бронштейном та І. Г. Ніколаєвим [6], М. Фарбером [10], Н. В. Будницькою та О. О. Пришляком [64], Н. В. Будницькою та Т. В. Рибалкіною [65], та багатьма іншими математиками.

Топологічна класифікація векторних полів Морса-Смейла на тривимірних многовидах знайдена О. О. Пришляком [76, 77, 78].

W. Kaplan [16, 17] та H. Whitney [58] займалися вивченням властивостей не-сингулярних C^0 шарувань на площині в 40-50-х. Їх результати були поширені на сингулярні шарування з ізольованими особливостями в роботах W. Boothby [4, 5], M. Morse and J. Jenkins [14], M. Morse [36].

Зокрема, W. Kaplan [16, 17] довів, що кожне C^0 -шарування Δ на площині має такі властивості:

- 1) канонічна проекція на простір шарів $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \Delta$ є локально тривіальним розшаруванням, а сам простір шарів \mathbb{R}^2 / Δ є (взагалі кажучи, негаусдорфовим) одновимірним многовидом;
- 2) існує неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ без локальних екстремумів, лінії рівня якої є шарами шарування Δ ;
- 3) існує не більш ніж зліченна сім'я шарів $\{\omega_i\}_i$ шарування Δ така, що

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{\omega_i\}_i = \bigsqcup S_i$$

є диз'юнктним об'єднанням відкритих підмножин S_i пошарово гомеоморфних до $\mathbb{R} \times (0, 1)$ з шаруванням на паралельні прямі $\mathbb{R} \times t$, $t \in (0, 1)$.

Таким чином, Δ «склеєне» з не більш ніж зліченого числа поверхонь \overline{S}_i , внутрішності яких пошарово гомеоморфні $\mathbb{R} \times (0, 1)$, уздовж їх граничних інтервалів. Відмітимо, що при цьому вибір шарів ω_i є неоднозначним, а пошаровий гомеоморфізм $S_i \cong \mathbb{R} \times (0, 1)$ не обов'язково продовжується до вкладення \overline{S}_i в $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

С. І. Максименко та Є. О. Полулях [24, 25, 27] на некомпактних поверхнях X , у яких кожен шар є некомпактною замкнутою підмножиною. Підмножину $S \subset \mathbb{R} \times [0, 1]$ назвемо *смугою* якщо $\mathbb{R} \times (0, 1) \subseteq S$ і S є відкритою в топології $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Остання умова еквівалентна тому, що її межа $\partial S = S \cap (\mathbb{R} \times \{0, 1\})$ є диз'юнктним об'єднанням щонайбільше зліченної кількості відкритих інтер-

валів. Назвемо шар $\omega \in \Delta$ *регулярним*, якщо він має відкритий окіл V , такий, що пара (\bar{V}, V) пошарово гомеоморфна парі $(\mathbb{R} \times [0, 1], \mathbb{R} \times (0, 1))$.

В роботі [27] показано, що шарування з некомпактними замкнутими шарами на некомпактній поверхні можна склеїти із смуг у сенсі 3) тоді і лише тоді, коли сім'я його нерегулярних шарів є локально скінченною. Такі поверхні названо *смугастими*, а відповідні шарування на них – *канонічними*. Розрізання смугастої поверхні на смуги задає так званий *смугастим атлас*, а те, як ці смуги склеюються уздовж граничних інтервалів можна закодувати певним графом з додатковою інформацією: вершини графа – це смуги, а ребра – шари, уздовж яких відбувається склеювання.

В роботі [26] досліджувалось питання про гомотопічний тип груп пошарових гомеоморфізмів канонічних смугастих поверхонь і було доведено, що компоненти зв'язності таких груп, за виключенням двох випадків, є стягуваними.

Залишалось відкритим питання про алгебраїчну структуру фактор-групи всіх гомеоморфізмів шарувань по підгрупі, що складається з гомеоморфізмів ізотопних тотожному відображенню. Ця фактор-група називається групою *гомеотопій* і є аналогом групи класів відображень (mapping class group) для пошарових гомеоморфізмів.

Один з основних результатів представленої дисертаційної роботи ототожнює групи гомеотопій смугастих поверхонь з групами автоморфізмів графів їх атласів, а також описує групи гомеотопій деякого класу «кореневоподібних» смугастих поверхонь.

Структура шарувань з ізольованими особливостями на компактних 2- та 3-многовидах, зокрема, топологічна класифікація функцій Морса, досліджувалась в роботах А. Т. Фоменка і О. В. Болсінова [62], А. О. Ошемкова [73], В. В. Шарка [48, 83], О. О. Пришляка [42, 43], С. І. Максименка [70, 71], Є. О. Полуляха та І. А. Юрчук [41], Є. О. Полуляха [75], та багатьох інших.

З іншого боку, топологічна структура функцій на некомпактних поверхнях є менш дослідженою, див. напр. В. В. Шарка [47, 83].

Однією із задач дисертаційної роботи є встановлення топологічної класифікації псевдогармонічних функцій загального положення на площині зі скінченим числом сингулярних точок.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами

Робота виконана на кафедрі геометрії, топології і динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Результати дисертації частково використані при виконанні державної науково-дослідної теми кафедри, номер державної реєстрації 16БФО38-01.

Мета і завдання дослідження

Метою роботи є дослідження гомотопічних типів груп автоморфізмів несингулярних шарувань двовимірних некомпактних поверхонь та автоморфізмів сингулярних шарувань на таких поверхнях зі скінченим числом особливих точок.

Об'єкт дослідження: автоморфізми некомпактних поверхонь, що зберігають структуру шарування, тобто шар шарування переводять в шар.

Предмет дослідження: групи гомеотопій несингулярних шарувань некомпактних поверхонь, а також пошарова та топологічна еквівалентність псевдогармонічних функцій на площині, лінії рівня яких визначають сингулярне шарування зі скінченною кількістю особливостей.

Завдання дослідження:

- 1) отримати необхідні та достатні умови еквівалентності атласів смугастої поверхні;
- 2) обчислити гомотопічний тип груп пошарових гомеоморфізмів канонічних шарувань смугастих поверхонь;

- 3) визначити алгебраїчну структуру класу груп гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь, тобто поверхонь, граф яких є кореневим деревом скінченного діаметру;
- 4) дослідити властивості автоморфізмів просторів шарів кореневоподібних смугастих поверхонь;
- 5) з'ясувати, коли дві псевдогармонічні функції загального положення на площині є пошарово та топологічно еквівалентними.

Методи дослідження

У роботі використовуються методи алгебри, алгебраїчної, геометричної та диференціальної топології та теорії особливостей.

Наукова новизна одержаних результатів

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

- отримано необхідні та достатні умови еквівалентності атласів смугастої поверхні;
- для атласу смугастої поверхні визначено граф, що описує інформацію про склеювання цієї поверхні зі смуг та встановлено ізоморфізм між групою гомеотопій її канонічного шарування та групою автоморфізмів графа атласу;
- описано алгебраїчну структуру класу груп гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь;
- встановлено зв'язок між групами гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь та групами гомеотопій їх просторів шарів;

- отримано необхідні та достатні умови пошарової та топологічної еквівалентностей двох псевдогармонічних функцій загального положення на площині, множини ліній рівня яких утворюють сингулярне шарування зі скінченним числом особливостей, а простір шарів яких є гаусдорфовим.

Практичне значення одержаних результатів

Результати дисертації носять теоретичний характер. Отримані в ній результати можуть бути використані в дослідженнях з топології, алгебри, теорії особливостей гладких відображень, теорії шарувань.

Особистий внесок здобувача

Визначення загального плану досліджень та постановка задач належать науковому керівникові. Всі результати здобувачем отримано самостійно, а у роботах, які опубліковані у співавторстві, внесок усіх авторів є рівноцінним.

Апробація результатів

Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

- 3rd EUMLS Conference «Mathematics for Life Sciences» (Rivne, 2015);
- 10-та Літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса, 2015);
- 11-та Літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса, 2016);
- Міжнародна конференція «Геометрія та топологія в Одесі – 2016» (м. Одеса, 2016);
- Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday (Kharkiv, 2016);

- The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv, 2016);
- Науковий семінар лабораторії топології відділу алгебри та топології Інституту математики НАН України (м. Київ);
- Семінар кафедри геометрії, топології та динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 2017).

Публікації

Основні результати дисертації опубліковано в 5 статтях [49, 84, 53, 82, 28] в наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України, серед них три статті [49, 53, 82] — в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus).

Також результати роботи представлені в матеріалах конференцій [80, 50, 40, 81, 52, 51].

Структура та обсяг дисертації

Дисертаційна робота складається з анотації (двома мовами), вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 84 найменувань, та додатку. Повний обсяг роботи 126 сторінок.

Подяки

Автор висловлює щирю вдячність своєму науковому керівникові, доктору фізико-математичних наук, завідувачу лабораторії топології Інституту математики НАН України Максименку Сергію Івановичу, і кандидату фізико-математичних наук, старшому науковому співробітнику лабораторії топології Інституту математики НАН України Полуляху Євгенію Олександровичу за співпрацю,

підтримку та увагу до роботи. А також всім учасникам семінару лабораторії топології Інституту математики НАН України за цінні зауваження під час обговорення результатів дисертації.

Розділ 1. Попередні відомості

1.1 Шарування на многовидах

Нехай X є n -вимірним многовидом, $n \geq 2$.

1.1.1 Одновимірні шарування на многовидах

Означення 1.1.1.1. *Пошаровою картою на X розмірності 1 називається пара (U, φ) , де U — відкрита підмножина X , $\varphi : U \rightarrow (a, b) \times B^{n-1}$ є гомеоморфізмом, а B^{n-1} — деяка відкрита підмножина \mathbb{R}_+^{n-1} і $a < b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.*

Множини $P_y = \varphi^{-1}((a, b) \times \{y\})$, $y \in B^{n-1}$, називаються *пластинками* цієї пошарової карти.

Означення 1.1.1.2. *Нехай $\Delta = \{\omega_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — розбиття простору X на лінійно зв'язні підмножини ω_α . Припустимо, що X має сім'ю $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Lambda}$, яка складається з пошарових карт розмірності 1, таку, що для кожної пари індексів $\alpha \in A$ та $i \in \Lambda$ кожна компонента лінійної зв'язності перетину $\omega_\alpha \cap U_i$ є пластинкою. Тоді Δ називається **одновимірним (регулярним) шаруванням на X** (шаруванням розмірності 1), а $(U_i, \varphi_i)_{i \in \Lambda}$ називається **пошаровим атласом, асоційованим з Δ** , а кожна множина ω_α — шаром шарування.*

Нехай $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}_+^{n-1}$ — проекція і (U, φ) та (V, ψ) — дві пошарові карти такі, що $U \cap V \neq \emptyset$. Тоді маємо таку комутативну діаграму:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{n-1} \supset \varphi(U \cap V) & \xrightarrow{\psi \circ \varphi^{-1}} & \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^{n-1} \\
\downarrow p & & \downarrow p \\
\mathbb{R}_+^{n-1} \supset p \circ \varphi(U \cap V) & \xrightarrow{q} & p \circ \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}_+^{n-1}
\end{array}$$

де q — відображення індуковане відображенням переходу $\psi \circ \varphi^{-1}$.

Скажемо, що відображення переходу $\psi \circ \varphi^{-1}$ зберігає орієнтацію шарів, якщо для довільного $x \in p \circ \varphi(U \cap V)$ звуження

$$\mathbb{R} \times x \cap \varphi(U \cap V) \xrightarrow{\psi \circ \varphi^{-1}} \mathbb{R} \times q(x) \cap \psi(U \cap V)$$

є строго зростаючим.

Означення 1.1.1.3. *Пошаровий атлас називатимемо **орієнтованим**, якщо всі відображення переходу цього атласу зберігають орієнтацію шарів. Шарування асоційоване з орієнтовним атласом називають **орієнтованим шаруванням**.*

Розглянемо декілька прикладів шарувань.

Приклад 1.1.1.4. *Шарування на торі. Нехай $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — субмерсія, визначена формулою $s(x, y) = x - ay$, $a \in \mathbb{R}$. Позначимо через Δ_s шарування шари якого є зв'язними компонентами ліній рівня s . Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2 = S^1 \times S^1$ — універсальне накриття тора, визначене за формулою $f(x, y) = (e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y})$. Тоді шарування Δ_s індукує шарування Δ на T^2 , тобто якщо (U, φ) є пошаровою картою Δ_s такою, що $f|_U$ є ін'єктивним, то $(f(U), \varphi \circ (f|_U)^{-1})$ є пошаровою картою Δ . Якщо a — раціональне число, то кожен шар є компактним, якщо a — ірраціональне, то кожен шар Δ гомеоморфний \mathbb{R} і скрізь щільний в T^2 .*

Приклад 1.1.1.5. *Нехай Δ — шарування $X \times [0, 1]$, де $X = (0, 1)$, на горизонтальні відрізки $X \times \{t\}$, $t \in [0, 1]$. Тоді неперервне сюр'єктивне відображення $f : X \times [0, 1] \rightarrow M$ таке, що $f(x, 0) = f(-x, 1)$, індукує шарування на стрі-*

чці Мебіуса M . Всі шари Δ гомеоморфні S^1 , що обмотують M двічі, окрім середньої лінії, що обмотує один раз.

Приклад 1.1.1.6. Шарування відкритого циліндра. Одним з тривіальних прикладів шарувань циліндра є добуток $C = S^1 \times \mathbb{R}$, де отримуємо шарування з компактними шарами, коли $S^1 \times \{r\}$, $r \in \mathbb{R}$ та некомпактними шарами, коли $\{s\} \times \mathbb{R}$, $s \in S^1$.

Приклад 1.1.1.7. Шарування площини \mathbb{R}^2 , що складається з кривих $y = \log |\sec x| + c$, та вертикальних прямих $\cos x = 0$.

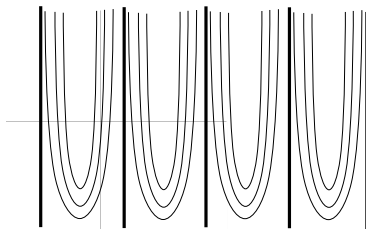


Рис. 1.1.1.1: $y = \log |\sec x| + c$

Приклади 1.1.1.4 — 1.1.1.7 визначають регулярні (несингулярні) шарування многовидів, тобто їх шари є підмноговидами однакової розмірності. Однак, природно вивчати і більш загальні розбиття многовидів. Відмінний від регулярного шар може виникати, наприклад, при розгляді шарування визначеного лініями рівня деякої гладкої функції на двовимірному многовиді X^2 , яка має критичні точки. Дійсно, нехай $f : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — гладка функція класу C^k і Σ — множина її критичних точок. Тоді розбиття $X^2 \setminus \Sigma$ на компоненти зв'язності множин $f^{-1}(c) \setminus \Sigma$, $c \in \mathbb{R}$ є шаруванням на $X^2 \setminus \Sigma$ в сенсі означення 1.1.1.2.

Нерегулярні шарування називають сингулярними шаруваннями. Загального означення для таких шарувань не існує. Надалі під *сингулярними шаруваннями* на многовиді X розумітимемо шарування на відкритій всюди щільній підмножині U в X , а точки доповнення $X \setminus U$ називатимемо особливими точками сингулярного шарування.

На кожному некомпактному многовиді можна визначити одновимірне шарування [13]. Компактний многовид має одновимірне шарування тоді і лише тоді, коли його ейлерова характеристика дорівнює нулю [72, С. 224].

Зауважимо, що надалі ми розглядатимемо шарування визначені на некомпактних поверхнях, усі шари яких є некомпактними.

1.1.2 Простір шарів шарування

Нехай X, Y — топологічні простори. Нагадаємо, що неперервне відображення $f : X \rightarrow Y$ називається *факторним*, якщо:

- 1) f є сюр'єктивним;
- 2) множина в Y буде відкритою тоді і тільки тоді, коли її повний прообраз є відкритим.

Нехай Δ — одновимірне шарування на многовиді X . Тоді *простором шарів* є фактор-простір X , одержаний ототожненням точок з X , якщо вони лежать на одному шарі Δ . Позначимо через $\pi : X \rightarrow X/\Delta$ — відповідне фактор-відображення.

Наділимо X/Δ фактор-топологією, тобто множину U в X/Δ вважатимемо відкритою тоді і тільки тоді, коли її прообраз $\pi^{-1}(U)$ є відкритим в (X, Δ) . В загальному випадку X/Δ не обов'язково є гаусдорфовим топологічним простором.

В розділі 4 нам буде потрібне твердження викладене в [79, Розділ 1 §2, 3].

Лема 1.1.2.1. *Нехай $f : X \rightarrow Y$ — факторне відображення і $\phi : X \rightarrow X$ — неперервне відображення таке, що для довільної точки $a \in Y$ існує точка $b_a \in Y$:*

$$\phi(f^{-1}(a)) \subset f^{-1}(b_a). \quad (1.1)$$

Тоді відображення $\psi : Y \rightarrow Y$, $\psi(a) = b_a$ є неперервним.

Зокрема, якщо ϕ гомеоморфізм, то ψ теж гомеоморфізм. Крім того, має місце наступна рівність $\psi \circ f = f \circ \phi$.

1.2 Несингулярні шарування площини

Шарування на площині, що не містять сингулярних точок, тобто задовольняють умову регулярності детально досліджувались в роботі W. Kaplan [16] як регулярні сім'ї кривих. В ній доведено таку теорему, яка узагальнює результати роботи E. Kamke [15].

Теорема 1.2.0.1. [16]. *Нехай Δ — несингулярне шарування площини. Тоді існує неперервна функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ з властивостями:*

- 1) для кожного $c \in \mathbb{R}$ рівняння $f(x, y) = c$ визначає щонайбільше зліченну кількість кривих Δ ;
- 2) в околі довільної точки (x_0, y_0) існують точки для яких $f(x, y) > 0$ та точки $f(x, y) < 0$.

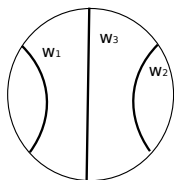
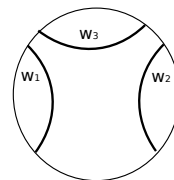
Зокрема, $f(x, y)$ не має локальних екстремумів.

Згідно теореми 1.2.0.1 шари несингулярного шарування Δ , що є розбиттям площини на зв'язні компоненти ліній рівня функції f не є компактними, бо в протилежному випадку за теоремою Жордана такий шар обмежував би двовимірний диск всередині якого функція досягала б свого екстремального значення. Крім того, кожен шар ω шарування Δ ділить площину на дві різні області зі спільною межею ω .

Наведемо декілька необхідних для пункту 4.1 означень та тверджень.

Для несингулярних шарувань можливі два відношення між трьома шарами $\omega_1 | \omega_3 | \omega_2$ та $|\omega_1, \omega_3, \omega_2|$. (Рис. 1.2.0.1, 1.2.0.2)

Означення 1.2.0.2. [16] *Три різних шари $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ шарування Δ знаходяться у відношенні $\omega_1 | \omega_3 | \omega_2$, якщо ω_1 і ω_2 належать до різних компонент*

Рис. 1.2.0.1: $\omega_1|\omega_3|\omega_2$ Рис. 1.2.0.2: $|\omega_1, \omega_3, \omega_2|$

доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \omega_3$.

Означення 1.2.0.3. [16] Три різних шари $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ шарування Δ знаходяться у відношенні $|\omega_1, \omega_3, \omega_2|$, якщо ω_1 і ω_2 належать до однієї компоненти доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus \omega_3$.

Об'єднання всіх шарів Δ , що перетинають підмножину $U \subset \mathbb{R}^2$ називається насиченням U і позначається $Sat(U)$.

Означення 1.2.0.4. [16] Нехай $p, q \in \mathbb{R}^2$. Дуга $[p, q]$, тобто гомеоморфний образ відрізка $[0, 1]$, що з'єднує ці точки, називається **локальним перерізом** шарування Δ , якщо існує відкрита підмножина U в \mathbb{R}^2 , що містить $[p, q]$ і така, що кожна крива в насиченні $Sat(U)$ множини U перетинає $[p, q]$ в U щонайбільше один раз.

Теорема 1.2.0.5. [16] Нехай ω_1, ω_2 два різних шари шарування Δ , що з'єднані локальним перерізом $[p, q]$, $p \in \omega_1$, $q \in \omega_2$, і S — множина шарів, що перетинають $[p, q]$ у всіх точках, окрім p і q . Тоді S відкрита множина і умова $\omega_1|\omega_3|\omega_2$ еквівалентна умові, що ω_3 міститься в S .

Крім того, існує гомеоморфізм $\phi : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \omega_1 \cup S \cup \omega_2$ такий, що $\omega_1 = \phi(\mathbb{R} \times 0)$, $\omega_2 = \phi(\mathbb{R} \times 1)$, і $\phi(\mathbb{R} \times t)$ є кривою, що належить до Δ для всіх $t \in (0, 1)$.

1.3 Групи гомеотопій пошарових гомеоморфізмів

Означення 1.3.0.1. Нехай на многовидах X_1 і X_2 зафіксовано одновимірні шарування Δ_1 і Δ_2 , відповідно. Гомеоморфізм $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ називається **пошаровим**, якщо він відображає шари шарування Δ_1 на шари Δ_2 . У цьому випадку простори X_1 і X_2 називають **пошарово гомеоморфними**.

Нехай X — це n -вимірний многовид, $n \geq 2$ з визначеним на ньому одновимірним шаруванням Δ . Позначимо через $\mathcal{H}(\Delta)$ — групу пошарових гомеоморфізмів $h : X \rightarrow X$.

Якщо шарування орієнтоване, то через $\mathcal{H}^+(\Delta)$ будемо позначати групу гомеоморфізмів, що зберігають орієнтацію шарів.

Наділимо $\mathcal{H}(\Delta)$ компактно відкритою топологією і нехай $\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)$ тотожна компонента зв'язності $\mathcal{H}(\Delta)$. Вона складається з усіх гомеоморфізмів $h \in \mathcal{H}(\Delta)$ ізотопних id_X в $\mathcal{H}(\Delta)$.

Тоді $\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)$ є нормальною підгрупою $\mathcal{H}(\Delta)$ і фактор групу $\mathcal{H}(\Delta)/\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)$ можна ототожнити з множиною $\pi_0\mathcal{H}(\Delta)$ всіх компонент зв'язності групи $\mathcal{H}(\Delta)$. Називатимемо її групою *гомеотопій* шарування Δ , тобто $\pi_0\mathcal{H}(\Delta) = \mathcal{H}(\Delta)/\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)$.

1.4 Вінцевий добуток

Нехай задано дві групи H і S . Позначимо через $\text{Map}(H, S)$ групу всіх відображень (не обов'язково гомоморфізмів) $\varphi : H \rightarrow S$ відносно операції поточкового множення. Тоді група H діє на $\text{Map}(H, S)$ за допомогою правила: результатом дії $\varphi \in \text{Map}(H, S)$ на $h \in H$ є відображення:

$$\varphi \circ h : H \longrightarrow H \longrightarrow S.$$

Напівпрямий добуток $\text{Map}(H, S) \rtimes H$, що відповідає цій дії, позначають $S \wr H$ і називають *вінцевим добутком* груп S і H . Отже,

$$S \wr H = \text{Map}(H, S) \rtimes H$$

це декартовий добуток $\text{Map}(H, S) \times H$ з множенням заданим формулою

$$(\varphi_1, h_1) \cdot (\varphi_2, h_2) = ((\varphi_1 \circ h_2) \cdot \varphi_2, h_1 \cdot h_2)$$

для $(\varphi_1, h_1), (\varphi_2, h_2) \in \text{Map}(H, S) \times H$.

Нехай $\varepsilon : H \rightarrow S$ постійне відображення в одиницю групи S . Тоді пара $(\varepsilon, \text{id}_H)$ є одиничним елементом $S \wr H$. Крім того, якщо $(\varphi, h) \in S \wr H$ і $\varphi^{-1} \in \text{Map}(H, S)$ — обернений елемент для φ , то $(\varphi^{-1} \circ h^{-1}, h^{-1})$ є оберненим елементом для (φ, h) в $S \wr H$.

Справедлива така точна послідовність:

$$1 \rightarrow \text{Map}(H, S) \xrightarrow{i} S \wr H \xrightarrow{\pi} H \rightarrow 1,$$

де $i(\varphi) = (\varphi, e)$, e одиниця в H , і $\pi(\varphi, h) = h$. Крім того, π має переріз $s : H \rightarrow S \wr H$, визначений за допомогою формули $s(h) = (\varepsilon, h)$.

Приклад 1.4.0.1. Дієдральна група Dih_4 ізоморфна вінцевому добутку $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$.

Приклад 1.4.0.2. Нехай P — силівська p -підгрупа симетричної групи S_{p^n} степеня p^n , $n \geq 1$. Тоді P ізоморфна ітерованому вінцевому добутку з n копій \mathbb{Z}_p : $W_n = ((\mathbb{Z}_p \wr \mathbb{Z}_p) \wr \dots \wr \mathbb{Z}_p)$. Тут $W_1 = \mathbb{Z}_p$ і $W_k := W_{k-1} \wr \mathbb{Z}_p$ для всіх $k \geq 2$.

Наприклад, силівська 2-підгрупа групи S_4 є групою $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$. [45, С. 176]

1.5 Топологічна еквівалентність функцій та їх простір Кронрода-Ріба

Нехай X_1 та X_2 — n -вимірні многовиди.

Означення 1.5.0.1. Неперервні функції $f : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ і $g : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ називаються *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $h : X_1 \rightarrow X_2$ і $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що виконується рівність $k \circ f = g \circ h$.

Функції f та g *орієнтовано топологічно еквівалентні*, якщо додатково гомеоморфізм k зберігає орієнтацію. Скажемо, що f і g *пошарово еквіва-*

лентні, якщо існує гомеоморфізм $h : X_1 \rightarrow X_2$, який відображає компоненти зв'язності множин рівнів f на компоненти множин рівнів g .

В загальному, питання топологічної еквівалентності функцій є складним. Тому часто відокремлюють певний клас функцій та будують інваріант, що допомагає розрізнити функції цього класу. Зокрема, таким інваріантом є простір Кронрода-Ріба.

Розглянемо шарування Δ , елементами якого є компоненти множин зв'язності рівня гладкої функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, де X — n -вимірний многовид. Шари, які містять критичні точки, називатимемо *сингулярними*. Всі інші компоненти зв'язності множин рівня будемо називати *регулярними*.

Фактор-простір $\Gamma_{K-R}(f)$ по вказаному розбиттю Δ , наділений відповідно фактор-топологією, називається *простором Кронрода-Ріба функції f* . Позначимо через $\pi_f : X \rightarrow \Gamma_{K-R}(f)$ відображення проєкції.

Оскільки f приймає постійні значення на шарах шарування Δ , то існує (див. [79]) неперервне відображення $f_{K-R} : \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \mathbb{R}$, таке що $f = f_{K-R} \circ \pi_f$

Для довільної неперервної функції на квадраті I^2 чи на сфері S^2 простір Γ_{K-R} є дендритом [67]. З іншої сторони, відомо, що для функції f з ізольованими критичними точками, визначеної на замкнутій поверхні, простір Γ_{K-R} можна наділити структурою топологічного графа, який називатимемо *графом Кронрода-Ріба функції f* .

Іншими словами, Γ_{K-R} є одновимірним CW - комплексом (нульвимірними клітинами якого є вершини, а одновимірними — ребра з визначеною топологією).

Зауважимо, що для функцій з ізольованими критичними точками на некомпактних поверхнях простір Кронрода-Ріба може бути негаусдорфовим.

1.6 Висновки

В розділі 1, для зручності, наводяться допоміжні теоретичні відомості, що будуть використовуватися в подальшому викладі роботи.

Розділ 2. Модельні смуги та смугаста поверхня

В цьому розділі вводяться означення та основні властивості об'єктів дослідження: смуги, смугастого атласу та смугастої поверхні.

2.1 Модельні смуги

Означення 2.1.0.1. Підмножину $S \subset \mathbb{R}^2$ назвемо *смугою*, якщо

- 1) $\mathbb{R} \times (u, v) \subset S \subset \mathbb{R} \times [u, v]$;
- 2) S — відкрита в топології $\mathbb{R} \times [u, v]$

для деякого $u < v \in \mathbb{R}$.

Позначимо

$$\begin{aligned}\partial_- S &:= S \cap \mathbb{R} \times \{u\}, & \partial_+ S &:= S \cap \mathbb{R} \times \{v\}, \\ \partial S &:= \partial_- S \cup \partial_+ S, & \text{Int} S &:= \mathbb{R} \times (u, v).\end{aligned}$$

Називатимемо ∂S *межею* S , а $\partial_- S$ і $\partial_+ S$ — *берегами* S . Легко бачити, що ∂S є відкритою підмножиною в $\mathbb{R} \times \{u, v\}$, і тому є диз'юнктним об'єднанням щонайбільше зліченної кількості відкритих (можливо необмежених) інтервалів.

Якщо, додатково до (1) і (2), виконуються такі умови:

- 3) кожна компонента зв'язності ∂S є обмеженим інтервалом,
- 4) замикання межових інтервалів ∂S в $\mathbb{R} \times [u, v]$ — попарно диз'юнктні,

то S називатимемо *модельною смугою*.

Очевидно, що кожна смуга S має орієнтоване одновимірне шаруванням на горизонтальні прямі $\mathbb{R} \times t$, $t \in (u, v)$ і межові інтервали ∂S . Назвемо це шарування *канонічним*.

Наступне твердження дозволяє редукувати будь-яку смугу до технічно більш зручної форми.

Твердження 2.1.0.2. *Кожна смуга є пошарово гомеоморфна модельній смузі.*

Це твердження буде доведене в підрозділі 2.2.

2.1.1 Монотонний гомеоморфізм ∂S .

Зауважимо, що межу смуги можна розглядати як частково впорядковану множину, що складається з диз'юнктного об'єднання двох непорівнюваних між собою лінійно впорядкованих множин $\partial_- S$ і $\partial_+ S$.

Іншими словами, для $(a, x), (b, y) \in \partial S$ ми покладаємо, що $(a, x) < (b, y)$ тоді і лише тоді, коли $a < b$ і $x = y$.

Більш загально, нехай $A, B \subset \partial S$ — дві підмножини. Скажемо, що $A < B$ тоді і лише тоді, коли $a < b$ для всіх $a \in A$ і $b \in B$. Зокрема, це визначає лінійний порядок на межових інтервалах $\partial_- S$ та $\partial_+ S$. Таким чином, якщо $I_\alpha = (a, b) \times \{x\}$ і $I_\beta = (c, d) \times \{y\}$ є межовими інтервалами ∂S , де $x, y \in \{u, v\}$, то $I_\alpha < I_\beta$ тоді і лише тоді, коли $x = y$ і $b < c$.

Нехай тепер S_1 і S_2 дві модельні смуги, $A \subset \partial S_1$ і $B \subset \partial S_2$ — підмножини, і $h : A \rightarrow B$ — бієкція. Скажемо, що h зберігає (обертає) порядок, якщо для будь-яких $a, a' \in A$ матимемо, що $h(a) < h(a')$ ($h(a) > h(a')$) тоді і лише тоді, коли $a < a'$. В обох випадках h називатимемо *монотонним*.

Очевидно, якщо $h : S_1 \rightarrow S_2$ є пошаровим гомеоморфізмом між двома смугами, тоді його звуження $h|_{\partial S_1} : \partial S_1 \rightarrow \partial S_2$ є монотонним. Справедливим є і обернене твердження.

Теорема 2.1.1.1. *Кожний монотонний гомеоморфізм $h : \partial S_1 \rightarrow \partial S_2$ між межами двох смуг S_1 і S_2 продовжується до пошарового гомеоморфізму смуг $\hat{h} : S_1 \rightarrow S_2$.*

Доведення теореми 2.1.1.1 буде наведене в пункті 2.3.

2.2 Доведення Твердження 2.1.0.2

Означення 2.2.0.1. *Півсмугою назвемо смугу, у якій $\partial_- S = \mathbb{R} \times \{u\}$ або $\partial_+ S = \mathbb{R} \times \{v\}$.*

Для доведення Твердження 2.1.0.2 у випадку півсмуг необхідна така лема:

Лема 2.2.0.2. *Нехай S півсмуга з $\mathbb{R} \times [0, 1) \subset S \subset \mathbb{R} \times [0, 1]$. Тоді існує півсмуга S' і пошаровий гомеоморфізм $h : S \rightarrow S'$ такий, що*

- $\mathbb{R} \times [0, 1) \subset S' \subset S \subset \mathbb{R} \times [0, 1]$;
- замикання межових інтервалів $\partial_+ S'$ обмежені в \mathbb{R}^2 та попарно не перетинаються;
- h — нерухомий на $\mathbb{R} \times 0$ гомеоморфізм;
- h зберігає другу координату.

Доведення. а) Спочатку побудуємо смугу S' , замикання межових інтервалів $\partial_+ S'$ якої є обмеженими, хоча необов'язково диз'юнктними.

Для цього зафіксуємо будь-які $a < b \in \mathbb{R}$ і розглянемо таку півсмугу:

$$T = \mathbb{R} \times [0, 1) \cup (a, b) \times \{1\}.$$

Тоді згідно [24, Лема 3.2] існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow T$, що зберігає другу координату і є нерухомим на $\mathbb{R} \times 0$. Отже, $S' = h(S)$ є півсмугою з $\partial S' \subset \partial T = (a, b) \times 1$.

б) Надалі для спрощення міркувань замінимо S на S' і припустимо, що межові інтервали $\partial_+ S'$ є обмеженими в \mathbb{R}^2 . Побудуємо смугу, замикання межових інтервалів якої вже будуть попарно диз'юнктними.

Розглянемо таку підмножину в \mathbb{R}^7 :

$$A = \{ (a, u, b, c, v, d, t) \mid a < u < b, c < v < d, t \in [a, b] \}$$

і визначимо функцію $\gamma : A \rightarrow \mathbb{R}$ за допомогою формули

$$\gamma(a, u, b, c, v, d, t) = \begin{cases} \frac{t-a}{u-a}(v-c) + c, & t \in [a; u], \\ \frac{t-u}{b-u}(d-v) + v, & t \in [u; b]. \end{cases}$$

Тоді γ є неперервною, і для будь-якого набору перших шести параметрів a, u, b, c, v, d відображення $t \mapsto \gamma(a, u, b, c, v, d, t)$ гомеоморфно відображає відрізок $[a, b]$ на $[c, d]$ і переводить u в v .

Лема 2.2.0.3. *Нехай T замкнений трикутник на площині \mathbb{R}^2 з вершинами $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), O(x_o, y_o)$ такими, що $y_a = y_b > y_o$, і C точка на відкритому інтервалі (A, B) . Нехай також*

$$T' = T \setminus \{A, B\}, \quad T'' = T' \setminus \{A \cup [B, C]\}.$$

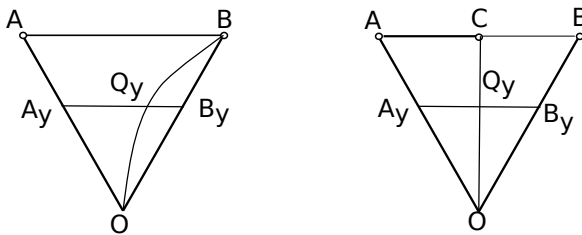
Тоді існує гомеоморфізм $f : T' \rightarrow T''$, що зберігає другу координату.

Зокрема, f є нерухомим на сторонах $(A, O), [O, B]$ і відображає інтервал (A, B) на (A, C) .

Доведення. Не втрачаючи загальності, припустимо, що $A(-1, 0), B(1, 1), O(0, 0)$ і $C(0, 1)$. Тоді f можна задати формулою:

$$f(x, y) = \begin{cases} (\gamma(-y, y^2, y, -y, 0, y, x), y), & 0 \leq y < 1, \\ \left(\frac{x+1}{2} - 1, 1\right), & y = 1. \end{cases}$$

Очевидно, f відображає криву $x = y^2$ на сегмент прямої $x = 0$. Більше того, отримаємо $f[A_y, Q_y] = [A_y, C_y]$, і $f[Q_y, B_y] = [C_y, B_y]$, див. рис. 2.2.0.1, \square

Рис. 2.2.0.1: Трикутники T' і T''

Повертаючись до доведення Лема 2.2.0.2 припустимо, що

$$\partial_+ S = \bigcup_{i=1}^N (a_i, b_i) \times \{1\},$$

де N є або деяке скінченне число або $+\infty$. Зафіксуємо строго монотонну послідовність $\{u_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [-1, 1]$ таку, що $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = 1$ і для кожного i визначимо трикутник T_i з вершинами $A_i(a_i, 1)$, $B_i(b_i, 1)$, $O_i(\frac{a_i+b_i}{2}, u_i)$, і нехай $C(\frac{a_i+b_i}{2}, 1)$. Визначимо також таку модельну півсмугу:

$$S_i = S \setminus \bigcup_{j \leq i} [C_j, B_j) \times \{1\},$$

і покладемо

$$S_0 = S, \quad S' = S \setminus \bigcup_{i=1}^N [C_i, B_i) \times \{1\} = \bigcap_{i=1}^N S_i.$$

Тоді замикання межових інтервалів S' є попарно диз'юнктними.

Позначимо $T'_i = T_i \setminus \{A_i, B_i\}$ і $T''_i = T_i \setminus \{A_i \cup [B_i, C_i]\}$. Тоді за Лемою 2.2.0.3 існує гомеоморфізм $f_i : T'_i \rightarrow T''_i$, що зберігає другу координату і є тотожним на сторонах $(A_i, O_i]$ і $[O_i, B_i)$. Продовжимо f_i за допомогою тотожного відображення на доповненні до трикутника A_i, O_i, B_i до гомеоморфізму $f_i : S_{i-1} \rightarrow S_i$.

Тоді пошаровий гомеоморфізм $\varphi : S \rightarrow S'$ можна визначити як композицію всіх f_i :

$$\varphi = \cdots \circ f_{i+1} \circ f_i \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 : S = S_0 \xrightarrow{f_1} S_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_i} S_i \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots S'.$$

Якщо N є скінченним числом, то φ коректно визначене.

Для нескінченного N перевіримо, що для кожної точки $z \in S$ послідовності вкладень

$$\{ g_j = f_j \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 : S \rightarrow S_j \subset S \}_{j \in \mathbb{N}}$$

«стабілізуються» на деякому околі U_z точки z , тобто $g_j = g_{j+1}$ на U для всіх достатньо великих j .

Нехай $z = (x, y) \in S$. Якщо $y < 1$, тоді існує i таке, що $y < u_i$. Позначимо $U = \mathbb{R} \times (0, u_i)$. Тоді $f_j(U) = U$ для всіх j . Більш того, f_j є нерухомим на U для всіх $j > i$. Отже $g_j = g_i$ на U для всіх $j > i$.

Припустимо $y = 1$, тоді $(x, y) \in (a_i, b_i) \times \{1\}$ для деякого i , тоді кожні f_j з $j \neq i$ є нерухомим на трикутниках T'_i . Тоді $U = T'_i \setminus ((A_i, O_i] \cup [O_i, B_i))$ є відкритим околom (x, y) в S , і $g_j = g_i = f_i$ на U для $j > i$. Таким чином, φ є гомеоморфізмом. Лема 2.2.0.2 доведена. \square

Покажемо справедливість Твердження 2.1.0.2.

Нехай S смуга, у якої $\text{Int}(S) = \mathbb{R} \times (-1, 1)$. Розглянемо дві півсмуги

$$A = S \cap \mathbb{R} \times [-1, 0], \quad B = S \cap \mathbb{R} \times [0, 1].$$

Тоді за Лемою 2.2.0.2 можна знайти дві півсмуги A' і B' , та пошарові гомеоморфізми $f : A \rightarrow A'$ і $g : B \rightarrow B'$ такі, що

- $\mathbb{R} \times (-1, 0] \subset A' \subset A \subset \mathbb{R} \times [-1, 0]$ та $\mathbb{R} \times [0, 1) \subset B' \subset B \subset \mathbb{R} \times [0, 1]$,
- замикання межових інтервалів $\partial_- A'$ і $\partial_+ B'$ є обмеженими у \mathbb{R}^2 і попарно диз'юнктними;
- f і g нерухомі на $\mathbb{R} \times 0$ і зберігають другу координату.

Тоді $S' = A' \cup B'$ є модельною смугою і пошаровий гомеоморфізм $h : S \rightarrow S'$ можна визначити за допомогою формул: $h|_{A'} = f$ і $h|_{B'} = g$.

2.3 Доведення Теорема 2.1.1.1

Нехай S_1 і S_2 дві смуги і $h : \partial S_1 \rightarrow \partial S_2$ — монотонний гомеоморфізм. Доведемо, що h можна продовжити до пошарового гомеоморфізму між S_1 і S_2 .

Не втрачаючи загальності, припустимо, що $h(\partial_- S_1) = \partial_- S_2$, $h(\partial_+ S_1) = \partial_+ S_2$, і звуження $h|_{\partial_- S_1}$ і $h|_{\partial_+ S_1}$ є зростаючими.

Випадок 1.

Припустимо, що S_1 і S_2 — дві півсмуги для яких

$$\begin{aligned} \partial_+ S_1 &= \bigsqcup_{i=1}^K X_i \times \{1\}, & \partial_+ S_2 &= \bigsqcup_{i=1}^K X'_i \times \{1\}, \\ \partial_- S_1 &= \partial_- S_2 = \mathbb{R} \times \{0\}, \end{aligned}$$

де $K \in \{0, 1, \dots, +\infty\}$, кожен $X_i \times \{1\}$ є межовим інтервалом $\partial_+ S_1$, X'_i — межовим інтервалом $\partial_+ S_2$, замикання $\overline{X_i}$ і $\overline{X'_i}$ є обмеженими,

$$\overline{X_i} \cap \overline{X_j} = \emptyset, \quad \overline{X'_i} \cap \overline{X'_j} = \emptyset, \quad (2.1)$$

для всіх $i \neq j$, і $h(X_i \times \{1\}) = X'_i \times \{1\}$.

Продовжимо h до гомеоморфізму $h : S_1 \rightarrow S_2$, що зберігає другу координату і є нерухомим на $\mathbb{R} \times 0$.

Фіксуємо будь-яку строго зростаючу послідовність $\{u_j\}_{j=0}^\infty \subset [0, 1)$ таку, що $u_0 = 0$ і $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j = 1$. Для кожного $u_j = 0, 1, \dots, \infty$ побудуємо нижче описаний гомеоморфізм $\psi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Оскільки $h(\mathbb{R} \times 0) = \mathbb{R} \times 0$, то можна записати, що $h(x, 0) = (\psi_0(x), 0)$ для єдиного гомеоморфізму $\psi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Далі зауважимо, що існує єдиний гомеоморфізм

$$\bar{h} : \bigsqcup_{i=1}^K X_i \rightarrow \bigsqcup_{i=1}^K X'_i$$

такий, що $\bar{h}(X_i) = X'_i$. Тоді для $j \geq 1$ визначимо $\psi_j : \bigsqcup_{i=1}^j X_i \rightarrow \bigsqcup_{i=1}^j X'_i$ так, щоб $\psi_j(x) = \bar{h}(x)$. Припустимо, що h зберігає порядок межових інтервалів, тобто $X_i < X_j$ тоді і лише тоді, коли $X'_i < X'_j$, $i, j \in 1, \dots, K$. Тоді, можемо застосувати нижче наведену Лему 2.3.0.1 і продовжити ψ_j до гомеоморфізму $\psi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Лема 2.3.0.1. *Нехай $\alpha = \{X_i\}_{i=1}^n$ і $\beta = \{X'_i\}_{i=1}^n$ дві сім'ї відкритих інтервалів прямої \mathbb{R} , що мають такі властивості:*

- (1) *замикання \bar{X}_i і \bar{X}'_i є обмеженими, і $\bar{X}_i \cap \bar{X}_j = \bar{X}'_i \cap \bar{X}'_j = \emptyset$ для всіх $i \neq j = 1, \dots, n$;*
- (2) *α і β «однакові впорядковані», тобто $X_i < X_j$ тоді і лише тоді, коли $X'_i < X'_j$ для всіх $i \neq j = 1, \dots, n$.*

Нехай також для кожного $i = 1, \dots, n$ задано зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм $\psi_i : X_i \rightarrow X'_i$. Тоді існує гомеоморфізм прямої $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такий, що $\psi|_{X_i} = \psi_i$.

Доведення. Покладемо, що $X_i = (a_i, b_i)$ і $X'_i = (c_i, d_i)$ для деяких $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$. Згідно з умовою (2) матимемо:

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n, \quad c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \dots < c_n < d_n.$$

Тоді гомеоморфізм ψ можна задати формулою:

$$\psi(x) = \begin{cases} x - a_1 + c_1, & x \in (-\infty, a_1], \\ \psi_i(x), & x \in (a_i, b_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{c_{i+1} - d_i}{a_{i+1} - b_i}(x - b_i) + d_i, & x \in [b_i, a_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n-1, \\ x - b_n + d_n, & x \in [b_n, +\infty). \end{cases}$$

Лема 2.3.0.1 доведена. □

Визначимо $h : S_1 \rightarrow S_2$ за допомогою формули:

$$h(x, y) = \begin{cases} (\psi_j(x), y), & y = u_j, \\ (\varepsilon_j(y)\psi_j(x) + (1 - \varepsilon_j(y))\psi_{j+1}(x), y), & y \in (u_j, u_{j+1}), \end{cases} \quad (2.2)$$

де $\varepsilon_j(y) = \frac{u_{j+1}-y}{u_{j+1}-u_j}$.

Очевидно, що h є бієкцією, яка зберігає другу координату і гомеоморфно відображає $S_1 \setminus \partial_+ S_1$ на $S_2 \setminus \partial_+ S_2$.

Залишається перевірити, що h гомеоморфізм. Оскільки $\psi_j = \psi_{j+1} = \bar{h}$ на X_i для $i \leq j$, це слідує з формули (2.2), що

$$h(x, y) = (\bar{h}(x), y).$$

для всіх $(x, y) \in X_i \times (u_i, 1]$. Тобто h гомеоморфно відображає відкриту множину $X_i \times (u_i, 1]$ з S_1 на відкриту множину $X'_i \times (u_i, 1]$ з S_2 . Оскільки сім'я

$$\{X_i \times (u_i, 1]\}_{i=1}^K \cup \{S_1 \setminus \partial_+ S_1\}$$

утворює відкрите покриття S_1 , то h є гомеоморфізмом.

Випадок 2.

Припустимо S_1 і S_2 — це півсмуги.

Вважатимемо, що $\mathbb{R} \times [0, 1) \subset S_i \subset \mathbb{R} \times [0, 1]$, $i = 1, 2$. Тоді за Лемою 2.2.0.2 знайдемо півсмугу S'_i і гомеоморфізм $\phi_i : S_i \rightarrow S'_i$ такі, що

- $\mathbb{R} \times [0, 1) \subset S'_i \subset S_i \subset \mathbb{R} \times [0, 1]$;
- замикання межових інтервалів у $\partial_+ S'_i$ обмежені та попарно не перетинаються;
- ϕ_i є нерухомим на $\mathbb{R} \times 0$ і зберігає другу координату.

Отже, композиція $h' = \phi_2 \circ h \circ \phi_1^{-1} : \partial S'_1 \rightarrow \partial S'_2$ є гомеоморфізмом, що зберігає порядок та орієнтацію межових інтервалів і збігається з h на $\mathbb{R} \times 0$. Таким чином, використовуючи Випадок 1, гомеоморфізм продовжується до пошарового гомеоморфізму $h' : S'_1 \rightarrow S'_2$. Тому $\phi_2^{-1} \circ h' \circ \phi_1 : S_1 \rightarrow S_2$ є шуканим продовженням h .

Випадок 3.

Розглянемо загальний випадок, коли S_1 і S_2 — смуги. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що

$$\mathbb{R} \times (-1, 1) \subset S_i \subset \mathbb{R} \times [-1, 1]$$

для $i = 1, 2$.

Аналогічно доведенню Твердження 2.1.0.2 розглянемо дві півсмуги

$$A_i = S_i \cap \mathbb{R} \times [-1, 0], \quad B_i = S_i \cap \mathbb{R} \times [0, 1].$$

Очевидно,

$$\partial_- A_i = \partial_- S_i, \quad \partial_+ A_i = \partial_- B_i = \mathbb{R} \times 0, \quad \partial_+ B_i = \partial_+ S_i.$$

Визначимо два гомеоморфізми $f : \partial A_1 \rightarrow \partial A_2$ і $g : \partial B_1 \rightarrow \partial B_2$ за допомогою правил:

$$f|_{\partial_- A_1} = h|_{\partial_- A_1}, \quad f|_{\partial_+ A_1} = g|_{\partial_- B_1} = \text{id}_{\mathbb{R} \times 0}, \quad f|_{\partial_+ B_1} = h|_{\partial_+ S_1}.$$

Тоді, використовуючи Випадок 2, f і g продовжимо до пошарового гомеоморфізму $f : A_1 \rightarrow A_2$ і $g : B_1 \rightarrow B_2$. Шукане продовження $h : S_1 \rightarrow S_2$ гомеоморфізму h можна задати формулою: $h|_{A'} = f$ і $h|_{B'} = g$.

Теорема 2.1.1.1 повністю доведена. □

2.4 Смугастиий атлас

Нехай Z — двовимірний топологічний многовид.

Означення 2.4.0.1. *Смугастий атлас на Z — це відображення $q : Z_0 \rightarrow Z$ для якого виконуються такі умови:*

- (1) $Z_0 = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ — щонайбільше зліченна сім'я попарно диз'юнктних смуг;
- (2) q — фактор відображення, тобто неперервне сюр'єктивне відображення, що володіє властивістю: підмножина $U \subset Z$ є відкритою тоді і лише тоді, коли $q^{-1}(U) \cap S_\lambda$ відкрита у S_λ для кожного $\lambda \in \Lambda$;
- (3) існують дві диз'юнктні сім'ї $\mathcal{X} = \{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ і $\mathcal{Y} = \{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ попарно різних межових інтервалів Z_0 занумерованих однією і тією ж множиною індексів Γ таких, що
 - (а) q — ін'єктивне на $Z_0 \setminus (\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})$;
 - (б) $q(X_\gamma) = q(Y_\gamma)$ для кожного $\gamma \in \Gamma$;
 - (в) звуження $q|_{X_\gamma} : X_\gamma \rightarrow q(X_\gamma)$ і $q|_{Y_\gamma} : Y_\gamma \rightarrow q(Y_\gamma)$ є вкладеннями зі замкненими образами.

Означення 2.4.0.2. *Поверхню Z наділену смугастиим атласом називатимемо смугастою поверхнею.*

Зауважимо, що смугаста поверхня Z є некомпактним двовимірним многовидом, який може бути незв'язним та неорієнтованим, а кожна компонента його межі є відкритим інтервалом.

Крім того, Z допускає одновимірне шарування одержане з канонічних шарувань відповідних модельних смуг S_λ . Назвемо таке шарування *канонічним шаруванням* асоційованим зі смугастиим атласом q і позначимо його через Δ . Очевидно, кожен шар Δ є гомеоморфним образом \mathbb{R} .

Означення 2.4.0.3. *Скажемо, що одновимірне шарування Δ' на Z і смугастий атлас $q : Z_0 \rightarrow Z$ узгоджені, якщо q гомеоморфно відображає кожен шар канонічного шарування кожної смуги у Z_0 на деякий шар Δ' .*

Отже, канонічне шарування асоційоване зі смугастим атласом узгоджене з цим атласом. Зауважимо, що смугаста поверхня може мати багато атласів узгоджених з її канонічним шаруванням.

Зауваження 2.4.0.4. Завдяки (с) для кожного $\gamma \in \Gamma$ маємо гомеоморфізм $\phi_\gamma : Y_\gamma \rightarrow X_\gamma$ визначений як

$$\phi_\gamma = (q|_{X_\gamma})^{-1} \circ q|_{Y_\gamma}. \quad (2.3)$$

Таким чином, можна вважати, що смугаста поверхня одержана з сім'ї модельних смуг склеєних вздовж певних межових інтервалів за допомогою гомеоморфізмів ϕ_γ . Тут також дозволяється склейка двох смуг уздовж більш ніж однієї пари межових компонент. Крім того, можливе склеювання разом межових компонент однієї смуги S .

Означення 2.4.0.5. Два смугастих атласи $q : Z_0 \rightarrow Z$ і $q' : Z'_0 \rightarrow Z'$ на смугастих поверхнях Z і Z' назвемо **еквівалентними**, якщо існують два пошарових гомеоморфізми $h : Z_0 \rightarrow Z'_0$ і $k : Z \rightarrow Z'$, які роблять комутативною таку діаграму:

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \xrightarrow{h} & Z'_0 \\ q \downarrow & & \downarrow q' \\ Z & \xrightarrow{k} & Z' \end{array} \quad (2.4)$$

Повертаючись до означення смугастої поверхні, зауважимо, що для кожного $\gamma \in \Gamma$ інтервали X_γ, Y_γ є горизонтальними, і тому

$$X_\gamma = (a, b) \times \{x_\gamma\}, \quad Y_\gamma = (c, d) \times \{y_\gamma\}$$

для усіх $x_\gamma, y_\gamma \in \{u, v\}$ і $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ з $a < b$ і $c < d$. Отже, $\phi_\gamma : Y_\gamma \rightarrow X_\gamma$ можна задати таким чином:

$$\phi_\gamma(s, y_\gamma) = (\psi_\gamma(s), x_\gamma), \quad s \in (c, d), \quad (2.5)$$

де $\psi_\gamma : (c, d) \rightarrow (a, b)$ певний гомеоморфізм.

Зауваження 2.4.0.6. Якщо $a < b$ і $c < d$, то існує рівно два афінних гомеоморфізми $\psi^+, \psi^- : (c, d) \rightarrow (a, b)$ визначених формулами

$$\psi^+(t) = \frac{b-a}{d-c}(t-c) + a, \quad \psi^-(t) = \frac{a-b}{d-c}(t-c) + b, \quad (2.6)$$

для $t \in (a, b)$. Очевидно, ψ^+ зберігає орієнтацію, а ψ^- змінює її.

Означення 2.4.0.7. Смугастий атлас $q : Z_0 \rightarrow Z$ називатимемо **афінним**, якщо

- (i) Z_0 складається з модельних смуг;
- (ii) кожен гомеоморфізм склеювання $\phi_\gamma : Y_\gamma \rightarrow X_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ є афінним, тобто гомеоморфізм ψ_γ у (2.5) визначений однією з формул (2.6).

Теорема 2.4.0.8 ([28]). Кожен смугастий атлас $q : Z_0 \rightarrow Z$ смугастої поверхні Z еквівалентний афінному. Крім того, існує афінний атлас $q' : Z_0 \rightarrow Z$ і пошаровий гомеоморфізм $h : Z_0 \rightarrow Z_0$, який робить таку діаграму комутативною:

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \xrightarrow{h} & Z_0 \\ & \searrow q' & \swarrow q \\ & & Z \end{array}$$

2.5 Висновки

В розділі 2 означені поняття смуг, модельних смуг, смугастого атласу та доведено, що кожна смуга є гомеоморфною модельній, а також сформульовані достатні умови того, коли існує гомеоморфізм між двома смугами.

Розділ 3. Групи гомеотопій несингулярних шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях

В даному розділі досліджується гомотопічний тип груп гомеоморфізмів шарувань на смугастих поверхнях.

3.1 Граф смугастого атласу

Нехай $q : Z_0 = \sqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow Z$ смугастий атлас на поверхні Z .

3.1.1 Поняття графу смугастого атласу

Атласу q поставимо у відповідність деякий граф G , наділений «комбінаторною» інформацією щодо склейок смуг за допомогою q . Зауважимо, що такий граф може мати кратні ребра та петлі, а також відкриті півребра.

1. *Вершинами* графа G є смуги $\sqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$.
2. Для зручності назвемо кожен межовий інтервал X деякої смуги S_λ *півребром інцидентним вершині* S_λ . Множину всіх півребер $\partial_\pm S_\lambda$ позначимо $d_\pm(S_\lambda)$. Також покладемо $d(S_\lambda) = d_-(S_\lambda) \cup d_+(S_\lambda)$.
3. *Ребра* графа G можуть бути двох типів.
 - а) Якщо дві смуги S_1 і S_2 є склеєними вздовж їх межових інтервалів X_γ і Y_γ , то *вершини* S_1 і S_2 графа G з'єднані за допомогою ребра e_γ . Таким

чином, формально, ребро e_γ є невпорядкованою парою півребер (X_γ, Y_γ) і називатимемо його *замкненим* ребром графа G .

- б) Якщо X — межовий інтервал деякої смуги S_λ , яка не склеєна з жодною іншою смугою вздовж цього інтервалу, то X є межовим інтервалом Z . Вважатимемо, що X піввідкрите ребро з однією вершиною, що відповідає S_λ .

Додамо також до графу G інформацію про напрямки склейок межових інтервалів, і розташування межових інтервалів вздовж кожної смуги.

Для гомеоморфізма $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ визначимо число $\mathbf{or}(f) = +1$, якщо f зберігає орієнтацію, і $\mathbf{or}(f) = -1$ в протилежному випадку. Очевидно, що якщо $g : (c, d) \rightarrow (e, f)$ інший гомеоморфізм, то $\mathbf{or}(g \circ f) = \mathbf{or}(g) \cdot \mathbf{or}(f)$.

4. Кожному замкненому ребру (X_γ, Y_γ) , що відповідає склейці компонент межі, $\phi_\gamma : Y_\gamma \rightarrow X_\gamma$ поставимо у відповідність число $\sigma(X_\gamma, Y_\gamma) := \mathbf{or}(\phi_\gamma)$ і назвемо *орієнтацією склейки*.
5. Нагадаємо, що для кожної смуги S_λ множина її межових інтервалів є не більше ніж зліченною частково впорядкованою множиною, яка є диз'юнктним об'єднанням двох лінійно впорядкованих підмножин, $\partial_- S_\lambda$ і $\partial_+ S_\lambda$. Таким чином маємо *лінійний порядок* на кожній множині $d_-(S_\lambda)$ і $d_+(S_\lambda)$ для всіх півребер інцидентних *вершині* S_λ графа G .

Отже, формально, граф смугастого атласу — це четвірка

$$G = (\Lambda, H, \xi, \sigma),$$

яка складається з таких об'єктів.

- Λ множина *вершин* графа G .
- $H = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} (d_{-1}(\lambda) \sqcup d_{+1}(\lambda))$ сім'я попарно неперетинних щонайбільше зліченно лінійно впорядкованих множин, $d_{-1}(\lambda)$ та $d_{+1}(\lambda)$, назвемо їх *півребрами інцидентними* λ . Також позначимо через $d(\lambda) = d_{-1}(\lambda) \sqcup d_{+1}(\lambda)$.

- $\xi : H \rightarrow H$ — інволюція, тобто бієкція така, що $\xi^2 = \text{id}_H$. У цьому випадку якщо $X \neq \xi(X)$ для деякого $X \in H$, то *невпорядковану* пару $\{X, \xi(X)\}$ назовемо *замкненим ребром* графа G . В протилежному випадку X — нерухома точка ξ і назовемо її *піввідкритим ребром* графа G .
- $\sigma : E \rightarrow \{\pm 1\}$ відображення з множини

$$E = \{\{X, \xi(X)\} \mid X \in H, X \neq \xi(X)\}$$

всіх замкнених ребер графа G до $\{\pm 1\}$, назовемо його *орієнтацією склейок*.

Еквівалентно, σ можна розглядати як відображення $\sigma : H \setminus \text{Fix}(\xi) \rightarrow \{\pm 1\}$ таке, що $\sigma \circ \xi = \sigma$.

3.1.2 Ізоморфізм графів смугастого атласу

Означення 3.1.2.1. *Нехай $G = (\Lambda, H, \xi, \sigma)$ і $G' = (\Lambda', H', \xi', \sigma')$ графи двох смугастих атласів деяких смугастих поверхонь. Тоді під **ізоморфізмом** цих графів розумітимемо чотири відображення*

$$\nu : \Lambda \rightarrow \Lambda', \quad \varepsilon : H \rightarrow H', \quad l, \tau : \Lambda \rightarrow \{\pm 1\},$$

що мають такі властивості.

(а) ν і ε — бієкції, що задовольняють тотожності

$$\varepsilon(d_s(\lambda)) = d'_{\tau(\lambda), s}(\nu(\lambda))$$

для всіх $\lambda \in \Lambda$ і $s \in \{\pm 1\}$, де $d'_{\pm 1}(\lambda') \subset H'$ множина півребер графа G' інцидентних $\lambda' \in \Lambda$. Крім того, обидві бієкції

$$\varepsilon|_{d_{-1}(\lambda)} : d_{-1}(\lambda) \rightarrow d'_{-\tau(\lambda)}(\nu(\lambda)),$$

$$\varepsilon|_{d_{+1}(\lambda)} : d_{+1}(\lambda) \rightarrow d'_{\tau(\lambda)}(\nu(\lambda)),$$

є зростаючими для $l(\lambda) = +1$ і спадними для $l(\lambda) = -1$.

(б) $\xi' \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \xi$, зокрема, ε індукує бієкцію між замкненими ребрами графа G і G' .

(в) Нехай $\{X, Y\}$ замкнене ребро G з $X \in d(\lambda)$ і $Y = \xi(X) \in d(\mu)$ для деяких $\lambda, \mu \in \Lambda$. Тоді

$$l(\lambda) \cdot \sigma(X, Y) = \sigma'(\varepsilon(X), \varepsilon(Y)) \cdot l(\mu). \quad (3.1)$$

Зауважимо, що множина $\text{Aut}(G)$ всіх автоморфізмів графа G є групою відносно операції множення: якщо

$$a' = (\nu', \varepsilon', l', \tau'), \quad a = (\nu, \varepsilon, l, \tau) \in \text{Aut}(G),$$

то їх добуток $a'' = a'a = (\nu'', \varepsilon'', l'', \tau'')$ визначений таким чином:

$$\nu'' = \nu' \circ \nu, \quad \varepsilon'' = \varepsilon' \circ \varepsilon, \quad (3.2)$$

$$l''(\lambda) = l'(\nu(\lambda)) \cdot l(\lambda), \quad \tau''(\lambda) = \tau'(\nu(\lambda)) \cdot \tau(\lambda), \quad (3.3)$$

для всіх $\lambda \in \Lambda$.

Нехай $\mathbf{1} : \Lambda \rightarrow \{\pm 1\}$ — стала функція, що досягає значення $+1$. Тоді $(\text{id}_\Lambda, \text{id}_H, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ є одиницею групи $\text{Aut}(G)$ і $(\nu, \varepsilon, l, \tau)^{-1} = (\nu^{-1}, \varepsilon^{-1}, l, \tau)$.

Для множини X позначимо через $\Sigma(X)$ групу перестановок на X . Для групи A нехай також A^X група всіх відображень $X \rightarrow A$ відповідно до поточкового множення. Тоді група $\Sigma(X)$ природним чином діє справа на A^X за допомогою правила: результат дії бієкції $\nu : X \rightarrow X$ з $\Sigma(X)$ на відображення $a : X \rightarrow A$, що належить до A^X , є композицією відображень

$$a \circ \nu : X \xrightarrow{\nu} X \xrightarrow{a} A.$$

Відповідний напівпрямий добуток $A^X \rtimes \Sigma(X)$ називатимемо *вінцевим* добутком $\Sigma(X)$, та A над X і позначатимемо через $A \wr_X \Sigma(X)$. Отже, згідно означення, $A \wr_X \Sigma(X)$ є прямим добутком множин $A^X \times \Sigma(X)$ відносно множення:

$$(a', \nu')(a, \nu) = ((a' \circ \nu) \cdot a, \nu' \circ \nu),$$

де через \cdot позначимо множення у A^X . Зауважимо, що існує природний сюр'єктивний гомоморфізм $\eta : A \wr_X \Sigma(X) \rightarrow \Sigma(X)$, $\eta(a, \nu) = \nu$, чие ядро $A^X \times \text{id}_X$. Більше того, також матимемо включення $\mathbf{1} \times \Sigma(X) \subset A \wr_X \Sigma(X)$, де $\mathbf{1} : X \rightarrow A$ стале відображення у одиниці A . Іншими словами коротка точна послідовність

$$1 \rightarrow A^X \rightarrow A \wr_X \Sigma(X) \xrightarrow{\eta} \Sigma(X) \rightarrow 1$$

володіє *перерізом* $s : \Sigma(X) \rightarrow A \wr_X \Sigma(X)$, $s(\nu) = (\mathbf{1}, \nu)$, тобто таким гомоморфізмом, що $\eta \circ s = \text{id}(\Sigma(X))$.

Перепишемо (3.2) і (3.3) у вигляді:

$$(\nu', \varepsilon', l', \tau') (\nu, \varepsilon, l, \tau) = (\nu' \circ \nu, \varepsilon' \circ \varepsilon, (l' \circ \nu) \cdot l, (\tau' \circ \nu) \cdot \tau)$$

Тоді $\text{Aut}(G)$ є *підгрупою* групи

$$\left(\{\pm 1\}^2 \wr_{\Lambda} \Sigma(\Lambda) \right) \times \Sigma(H).$$

3.1.3 Еквівалентність смугастих атласів

Теорема 3.1.3.1. *Кожна еквівалентність смугастих атласів індукує ізоморфізм між їх графами. І навпаки, кожен ізоморфізм графів смугастих атласів визначає еквівалентність між самими атласами.*

Доведення. Нехай

$$q : Z_0 = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_{\lambda} \rightarrow Z, \quad q' : Z'_0 = \bigsqcup_{\lambda' \in \Lambda'} S'_{\lambda'} \rightarrow Z'$$

смугасті атласи на поверхнях Z і Z' , $G = (\Lambda, H, \xi, \sigma)$ та $G' = (\Lambda', H', \xi', \sigma')$ їх графи.

1) Припустимо, що пара гомеоморфізмів (h, k) визначає еквівалентність атласів, так, що комутативною є діаграма (2.4). Тоді h індукує бієкцію між компонентами зв'язності Z_0 і Z'_0 , а отже, і бієкцію $\nu : \Lambda \rightarrow \Lambda'$ між відповідними множинами індексів (що переводять вершини G і G') так, що $h(S_{\lambda}) = S'_{\nu(\lambda)}$.

Зокрема, h визначає також бієкцію між компонентами межі Z_0 і Z'_0 , що є множинами півребер графів G і G' , тому отримуємо бієкцію $\varepsilon : H \rightarrow H'$.

Залишається визначити функції $l, \tau : \Lambda \rightarrow \{\pm 1\}$. Візьмемо $\lambda \in \Lambda$ і розглянемо звуження $h|_{S_\lambda} : S_\lambda \rightarrow S'_{\nu(\lambda)}$. Припустимо, що $\text{Int}S_\lambda = \mathbb{R} \times (a, b)$ і $\text{Int}S_{\nu(\lambda)} = \mathbb{R} \times (c, d)$ для деяких $a < b, c < d \in \mathbb{R}$. Оскільки $h|_{S_\lambda}$ залишає шари горизонтальними лініями, матимемо, що

$$h|_{S_\lambda}(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(y))$$

де

- $\alpha : S_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція така, що для кожного $y \in (a, b)$ відповідність $x \mapsto \alpha(x, y)$ є гомеоморфізмом $\alpha_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- $\beta : (a, b) \rightarrow (c, d)$ — гомеоморфізм.

Очевидно, всі гомеоморфізми α_y є зростаючими чи спадними одночасно для всіх $y \in (a, b)$, тобто $\mathbf{or}(\alpha_y)$ не залежить від $y \in (a, b)$. Тому покладемо

$$l(\lambda) = \mathbf{or}(\alpha_y), \quad \tau(\lambda) = \mathbf{or}(\beta).$$

Ми стверджуємо, що $(\nu, \varepsilon, l, \tau)$ є ізоморфізмом графів G і G' в сенсі Означення 3.1.2.1.

Зауважимо, що звуження $h|_{\partial S_\lambda} : \partial S_\lambda \rightarrow \partial S'_{\nu(\lambda)}$ є монотонним гомеоморфізмом, що задовольняє умови (а) і (б) Означення 3.1.2.1. Перевіримо умову (с).

Нехай $\{X, Y\}$ замкнене ребро графа G з $X \in d(\lambda)$ і $Y = \xi(X) \in d(\mu)$ для деяких $\lambda, \mu \in \Lambda$, і $X' = \varepsilon(X)$ і $Y' = \varepsilon(Y)$. Це значить, що $X \subset \partial S_\lambda$ і $Y \subset \partial S_\mu$ є компонентами межі з $q(X) = q(Y)$, $X' = h(X) \subset \partial S'_{\nu(\lambda)}$, і $Y' = h(Y) \subset \partial S'_{\nu(\mu)}$.

Тоді отримуємо таку комутативну діаграму:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow[\mathbf{or}(h|_Y)=l(\mu)]{h|_Y} & Y' \\ \phi \downarrow \mathbf{or}(\phi)=\sigma(X, Y) & & \mathbf{or}(\phi')=\sigma'(X', Y') \downarrow \phi' \\ X & \xrightarrow[h|_X]{\mathbf{or}(h|_X)=l(\lambda)} & X' \end{array}$$

де ϕ та ϕ' гомеоморфізми склейки. Тут

$$\begin{aligned} l(\mu) \cdot \sigma'(X', Y') &= \mathbf{or}(h|_Y) \cdot \mathbf{or}(\phi') = \mathbf{or}(\phi' \circ h|_Y) = \\ &= \mathbf{or}(h|_X \circ \phi) = \mathbf{or}(h|_X) \cdot \mathbf{or}(\phi) = l(\lambda) \cdot \sigma(X, Y). \end{aligned}$$

2) Доведемо обернене твердження. Зауважимо, що згідно Теорема 2.4.0.8, можна припустити, що обидва атласи q і q' є афінними.

Нехай $(\nu, \varepsilon, l, \tau)$ — ізоморфізм між графами G і G' в сенсі Означення 3.1.2.1.

Нехай також $\lambda \in \Lambda$ і $\lambda' = \nu(\lambda)$. Побудуємо гомеоморфізм $h_\lambda : S_\lambda \rightarrow S'_{\lambda'}$ за таким правилом.

(i) Спершу припустимо $\partial S_\lambda = \emptyset$, тобто $d(\lambda) = \emptyset$. Оскільки ε бієктивно відображає $d(\lambda)$ на $d'(\lambda')$, то $d'(\lambda') = \emptyset$, і тому також $\partial S'_{\nu(\lambda)} = \emptyset$. Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $S_\lambda = S'_{\lambda'} = \mathbb{R} \times (-1, 1)$. Тоді визначимо h_λ за допомогою формули:

$$h_\lambda(x, y) = (l(\lambda)x, \tau(\lambda)y).$$

(ii) Тепер припустимо, що $\partial S_\lambda \neq \emptyset$. Нехай $X \in d(\lambda)$ — півребро в G інцидентне вершині λ , тобто X є компонентою межі смуги S_λ . Тоді $\nu(X)$ є межовим інтервалом смуги $S'_{\nu(\lambda)}$. Оскільки ми припустили, що S_λ і $S'_{\nu(\lambda)}$ модельні смуги, то інтервали X і $\nu(X)$ є обмеженими. Визначимо h_λ на X як єдиний афінний гомеоморфізм $\psi_X : X \rightarrow \nu(X)$ з $\mathbf{or}(\psi_X) = l(\lambda)$.

Сім'я всіх $\{\psi_X\}_{X \in d(\lambda)}$ визначає гомеоморфізм $h_\lambda : \partial S_\lambda \rightarrow \partial S'_{\nu(\lambda)}$. Відповідно до властивості (а) Означення 3.1.2.1, h_λ є монотонним, і тому згідно Теорема 2.1.1.1 гомеоморфізм h продовжується до пошарового гомеоморфізму $h_\lambda : S_\lambda \rightarrow S'_{\nu(\lambda)}$.

Отже, ми одержали пошаровий гомеоморфізм $h : \sqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow \sqcup_{\lambda' \in \Lambda'} S'_{\lambda'}$ визначений за допомогою рівності $h|_{S_\lambda} = h_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda$.

Гомеоморфізм h індуктує пошаровий гомеоморфізм $k : Z \rightarrow Z'$ такий, що пара (h, k) є еквівалентністю смугастих атласів q і q' .

Нехай $D \subset Z_0$, (відповідно $D' \subset Z'_0$), множина межових інтервалів на якому $q, (q')$ не є ін'єктивним. Тоді h визначає гомеоморфізм $Z_0 \setminus D$ на $Z'_0 \setminus D'$, звідки визначимо $k : q(Z_0 \setminus D) \rightarrow q'(Z'_0 \setminus D')$ за допомогою рівності $k = q' \circ h \circ q^{-1}$.

Тому залишається показати, що h є узгодженим з q і q' на D і D' , тобто для кожної пари межових інтервалів $X \subset \partial S_\lambda$ і $Y \subset \partial S_\mu$ з $q(X) = q(Y)$, матимемо, що $q'(h(X)) = q'(h(Y))$ і справедлива така комутативна діаграма:

$$\begin{array}{ccccccc} q(X) & \xleftarrow{q} & X & \xrightarrow{h|_X=\psi_X} & X' & \xrightarrow{q'} & q'(X') \\ \parallel & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi' & & \parallel \\ q(Y) & \xleftarrow{q} & Y & \xrightarrow{h|_Y=\psi_Y} & Y' & \xrightarrow{q'} & q'(Y') \end{array} \quad (3.4)$$

де ϕ і ϕ' є гомеоморфізмами склейок. Тоді для кожного $z \in D$ покладемо $k(q(z)) = q' \circ h(z)$.

В термінах графів матимемо, що $\{X, Y\}$ замкнене ребро графа G таке, що $X \in d(\lambda), Y = \xi(X) \in d(\mu), X' = \varepsilon(X)$ і $Y' = \varepsilon(Y)$. Таким чином, за допомогою (b)

$$Y' = \varepsilon(Y) = \varepsilon \circ \xi(X) = \xi' \circ \varepsilon(X) = \xi'(X)$$

і тому $\{X', Y'\}$ замкнене ребро графа G' , тобто $q'(h(X)) = q'(h(Y))$.

Отже, отримуємо діаграму (3.4). Однак необхідно перевірити ще комутативність її центрального квадрата, що складається з афінних гомеоморфізмів. Тоді згідно (c) отримаємо, що $\mathbf{or}(\phi' \circ \psi_X) = \mathbf{or}(\psi_Y \circ \phi)$.

Оскільки $\phi' \circ \psi_X, \psi_Y \circ \phi : X \rightarrow Y'$ є афінними гомеоморфізмами, то вони тотожні один одному, і тому діаграма (3.4) є комутативною.

Отже, (h, k) — еквівалентність смугастих атласів, що визначає ізоморфізм $(\nu, \varepsilon, l, \tau)$ між G і G' . □

3.1.4 Обчислення групи $\text{Aut}(G)$ для деяких смугастих атласів

Розглянемо декілька ілюстративних прикладів. Зауважимо, що для збереження формалізму, розглядатимемо в цьому пункті відображення $f : A \rightarrow B$, де A може

бути порожньою множиною. Кожному відображенню $f : A \rightarrow B$ відповідає його графік $\{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B$. Таким чином, відображення $\emptyset \rightarrow B$ з порожньої множини є порожньою підмножиною порожньої множини $\emptyset \times B$.

Приклад 3.1.4.1. Нехай $S = \mathbb{R} \times (-1, 1)$ і $q = \text{id}_S : S \rightarrow S$ смугастий атлас, що складається з однієї смуги, див рис. 3.1.4.1(a). Тоді $\Lambda = \{*\}$ складається з однієї точки, $H = \emptyset$, а отже $\xi : H \rightarrow H$ та $\sigma : H \setminus \text{Fix}(\xi) \rightarrow \{\pm 1\}$ є відображеннями порожньої множини.

Нехай $(\nu, \varepsilon, l, \tau) \in \text{Aut}(G)$. Тоді $\nu = \text{id}_\Lambda$ і $\varepsilon = \text{id}_H$ однозначно визначені, в той час, як $l, \tau : \{*\} \rightarrow \{\pm 1\}$ можуть бути довільними відображеннями. Звідси легко бачити, що $\text{Aut}(G) \cong \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$.

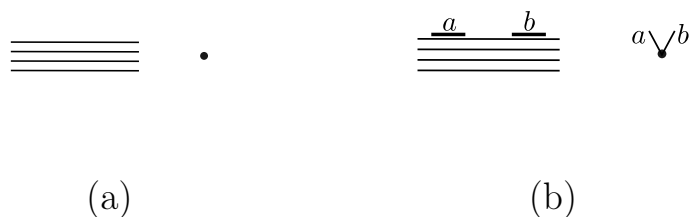


Рис. 3.1.4.1: Смугасті атласи складаються з однієї смуги і є тотожними відображеннями

Приклад 3.1.4.2. Нехай $S = \mathbb{R} \times (-1, 1) \cup \{(-2, -1) \cup (1, 2)\} \times \{1\}$ і знову $q = \text{id}_S : S \rightarrow S$ смугастий атлас, що складається з однієї смуги, див. рис. 3.1.4.1(b). Тоді $\Lambda = \{*\}$ складається з однієї точки, $H = \{a, b\} = d_{+1}(*),$ де $a = (-2, -1) \times \{1\}, b = (1, 2) \times \{1\},$ і $a < b$ в сенсі лінійного порядку $d_{+1}(*).$ Оскільки ці інтервали склеюються, то отримуємо, що $\xi = \text{id}_H : H \rightarrow H,$ а отже $\sigma : H \setminus \text{Fix}(\xi) \rightarrow \{\pm 1\}$ є відображенням з порожньої множини.

Нехай $x = (\nu, \varepsilon, l, \tau) \in \text{Aut}(G)$. Тоді $\nu = \text{id}_\Lambda$. А так як $H = d_{+1}(*)$ і також $d_{-1}(*) = \emptyset,$ то $\varepsilon(d_{+1}(*)) = d_{+1}(*),$ звідки $\tau(*) = +1.$

Якщо $\varepsilon(a) = a,$ то $\varepsilon = \text{id}_H,$ звідки $l(*) = +1,$ а тому x є одиницею групи $\text{Aut}(G).$ Припустимо $\varepsilon(a) = b.$ Тоді $\varepsilon(b) = a,$ отже ε обертаюча порядок

бієкція $H = d_{+1}(*),$ звідки $l(*) = -1.$ Таким чином, $\text{Aut}(G)$ складається з двох елементів, тобто $\text{Aut}(G) \cong \{\pm 1\}.$

Приклад 3.1.4.3. Нехай $S = \mathbb{R} \times [0, 1],$ $\phi : \mathbb{R} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{+1\}$ — гомеоморфізм заданий формулою $\phi(x, 0) = (x, 1).$ Тоді фактор-простір $Z = S/\phi$ є відкритим циліндром $\mathbb{R} \times S^1,$ а фактор-відображення $q : S \rightarrow Z$ є смугастим атласом, див. Рис. 3.1.4.2(a).

У цьому випадку $\Lambda = \{*\}$ знову складається з однієї точки, $H = \{a, b\},$ де $a = \mathbb{R} \times \{0\},$ $b = \mathbb{R} \times \{1\},$ а $\xi : H \rightarrow H$ і $\sigma : H \rightarrow \{\pm 1\}$ визначаються формулами: $\xi(a) = b,$ $\xi(b) = a,$ $\sigma(a) = \sigma(b) = \mathbf{or}(\phi) = +1.$

Нехай $x = (\nu, \varepsilon, l, \tau) \in \text{Aut}(G).$ Тоді $\nu = \text{id}_\Lambda.$ Оскільки G має єдине ребро $\{a, b\},$ ε зберігає його нерухомим, тому з (3.1) слідує, що $l(a) = l(b).$

Припустимо, що $\varepsilon(a) = a.$ Тоді $\varepsilon = \text{id}_H,$ а тому $\tau(*) = +1.$ В іншому випадку, $\varepsilon(a) = b,$ $\varepsilon(b) = a$ і $\tau(*) = -1.$ Зауважимо, що в обох випадках, спільне значення $l(a) = l(b)$ можна взяти довільним.

Це означає, що $\text{Aut}(G) \cong \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}.$

Приклад 3.1.4.4. Нехай, як і вище, $S = \mathbb{R} \times [0, 1].$ Однак зараз гомеоморфізм $\phi : \mathbb{R} \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \times \{+1\}$ змінює орієнтацію та визначається формулою $\phi(x, 0) = (-x, 1).$ Тоді фактор-простір $Z = S/\phi$ є відкритою стрічкою Мебіуса (див Рис. 3.1.4.2(b)). Легко перевірити, що також $\text{Aut}(G) \cong \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}.$

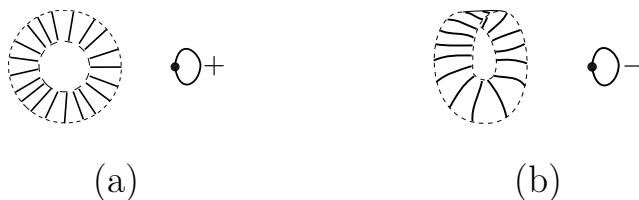


Рис. 3.1.4.2: Пошаровий відкритий циліндр і стрічка Мебіуса

3.2 Редукований смугастий атлас

Означення 3.2.0.1. Ребро $\{X, Y\}$ графа G назовемо **неістотним**, якщо $X = \partial_\epsilon S$ і $Y = \partial_{\epsilon'} S'$ для деяких різних смуг S, S' атласу і деяких $\epsilon, \epsilon' \in \{\pm\}$, див. Рис. 3.2.0.1. Смугастий атлас назовемо **редукованим**, якщо його граф не має неістотних ребер.

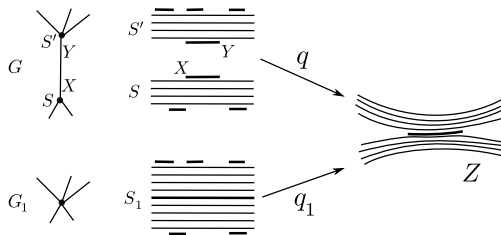


Рис. 3.2.0.1: Неістотне ребро

Наступне твердження доведене в [24]. Переформулюємо його у термінах смугастих атласів та їх графів.

Теорема 3.2.0.2. [24, Теорема 3.7]. *Кожна смугаста поверхня зі зліченною базою має редукований атлас.*

Основні спостереження в цій теоремі проілюстровані на Рис. 3.2.0.1. Оскільки $X = \partial_\epsilon S$ і $Y = \partial_{\epsilon'} S'$, то склеювання S і S' вздовж X і Y дає знову смугу, яку ми позначимо через S_1 (див. [24, Лему 3.2]). Іншими словами, можна замінити S та S' в атласі q на S_1 . На графі ми викидаємо замкнене ребро між S і S' . Такі методи також дозволяють усунути навіть злічені шляхи неістотних ребер. Оскільки поверхня передбачає наявність зліченної бази, це дозволяє видалити всі неістотні ребра.

Зауважимо однак, що якщо у нас є скінченний цикл неістотних ребер, то можна видалити їх всі, крім одного. Це дає дві спеціальні поверхні: відкритий циліндр і стрічку Мебіуса (Приклад 3.1.4.3 і 3.1.4.4) у яких ми склеюємо $X = \partial_- S$ з $Y = \partial_+ S$. Але відповідні замкнені ребра $\{X, Y\}$ не є неістотними, оскільки тепер X і Y належать до однієї смуги.

3.3 Група гомеотопій канонічного шарування смугастої поверхні

Нехай Z — зв'язна смугаста поверхня з канонічним шаруванням Δ . Розглянемо $\mathcal{H}(\Delta)$ — групу усіх пошарових гомеоморфізмів $h : Z \rightarrow Z$ і групу гомеотопій її канонічного шарування $\pi_0\mathcal{H}(\Delta) = \mathcal{H}(\Delta)/\mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$.

Наступне твердження про гомотопічний тип групи $\mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$ доведене в [24]. Переформулюємо його у термінах смугастих атласів і їх графів.

Теорема 3.3.0.1. [24, Теорема 4.4]. *Нехай $q : Z_0 = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow Z$ редукований смугастий атлас на зв'язній поверхні Z , G — граф смугастого атласу, і Δ — відповідне канонічне шарування. Для простоти покладемо $\text{Int}(S_\lambda) = \mathbb{R} \times (0, 1)$ для всіх $\lambda \in \Lambda$.*

Припустимо також, що Z не є пошарово гомеоморфним відкритому циліндру чи стрічці Мебіуса. Тоді мають місце такі твердження.

- (1) *Нехай $\Sigma = q(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \partial S_\lambda)$. Тоді $k(\Sigma) = \Sigma$ для кожного $k \in \mathcal{H}(\Delta)$. Отже, k індукує гомеоморфізм $h : Z_0 \rightarrow Z_0$ такий, що $q \circ h = k \circ q$, тобто (h, k) є самоеквівалентністю атласу q .*
- (2) *Нехай $k \in \mathcal{H}(\Delta)$. Тоді k належить до $\mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$ тоді і лише тоді, коли*
 - (a) *k індукує гомеоморфізм $h : Z_0 \rightarrow Z_0$ такий, що $q \circ h = k \circ q$ і $h(S_\lambda) = S_\lambda$;*
 - (b) *для кожного $\lambda \in \Lambda$ звужений гомеоморфізм $h : S_\lambda \rightarrow S_\lambda$ задано за допомогою формул: $h(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(y))$, де відповідність $x \mapsto \alpha_y(x)$ є зростаючим гомеоморфізмом \mathbb{R} в \mathbb{R} для кожного $y \in (0, 1)$, і також $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ є зростаючим гомеоморфізмом;*
 - (c) *h залишає інваріантними кожен компоненту межі смуги S_λ разом з її орієнтацією.*

Іншими словами, $k \in \mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$ тоді і лише тоді, коли (h, k) є самоеквівалентністю смугастого атласу q , що індукує тотожній автоморфізм G .

Кожен гомеоморфізм смугастої поверхні $h : Z \rightarrow Z$ з $\mathcal{H}^+(\Delta)$ індукує автоморфізм графа смугастого атласу $\rho(h) : G \rightarrow G$. Зауважимо, що відповідність $h \mapsto \rho(h)$ є гомоморфізмом груп $\rho : \mathcal{H}^+(\Delta) \rightarrow \text{Aut}(G)$.

Використовуючи Теорему 3.3.0.1, покажемо справедливість такої теореми:

Теорема 3.3.0.2. *Нехай $q : Z_0 \sqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow Z$ редукований смугастий атлас зв'язної поверхні Z , G — граф смугастого атласу, і Δ — відповідне канонічне шарування.*

- (i) *Якщо Z пошарово гомеоморфна або відкритому циліндру або стрічці Мебіуса, то $\mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$ гомотопічно еквівалентна колу S^1 .*
- (ii) *В протилежному випадку, $\mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$ — стягнута.*

В обох випадках матимемо природний ізоморфізм $\rho : \pi_0 \mathcal{H}(\Delta) \cong \text{Aut}(G)$.

Доведення. Твердження (i) та (ii) доведені в [24, Теорема 4.4]. Доведемо, що ρ ізоморфізм.

Спершу припустимо, що Z є або відкритим циліндром, або стрічкою Мебіуса.

Кожен гомеоморфізм $k \in \mathcal{H}(\Delta)$ індукує гомеоморфізм $h = (\alpha(x, y), \beta(x, y))$, де відповідності $x \mapsto \alpha_y(x)$, $x \mapsto \beta_y(x)$ є зростаючими чи спадними гомеоморфізмами \mathbb{R} в \mathbb{R} для кожного $y \in (0, 1)$. Таким чином існує гомоморфізм груп $\varphi : \mathcal{H}(\Delta) \rightarrow \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$. Оскільки $\ker \varphi = \mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$, то $\pi_0 \mathcal{H}(\Delta) = \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$

Припустимо тепер, що Z не є ні відкритим циліндром ні стрічкою Мебіуса. У цьому випадку згідно (1) Теореми 3.3.0.1 кожен $k \in \mathcal{H}(\Delta)$ володіє самоеквівалентністю (h, k) атласу q . Тому певний автоморфізм $\rho(k)$ графа G , такий, що відповідність $k \mapsto \rho(k)$ є гомоморфізмом $\rho : \mathcal{H}(\Delta) \rightarrow \text{Aut}(G)$.

Згідно Теореми 3.1.3.1 кожен автоморфізм γ графа G індукований завдяки деякій еквівалентності (h, k) атласу q . У цьому випадку $\gamma = \rho(k)$. Тобто ρ є сюр'єктивним. Крім того, згідно (2) Теореми 3.3.0.1 $\ker(\rho) = \mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta)$.

Таким чином, отримуємо шуканий ізоморфізм:

$$\pi_0 \mathcal{H}(\Delta) = \mathcal{H}(\Delta) / \mathcal{H}_{\text{id}}(\Delta) = \mathcal{H}(\Delta) / \ker(\rho) \cong \text{Aut}(G).$$

Теорему доведено. □

3.4 Групи гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь

Нехай $J_i = (2i - 1, 2i)$, $i \in \mathbb{Z}$. Позначимо через

$$[0] = \emptyset, \quad [n] = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N} \quad -\mathbb{N} = \{-1, -2, \dots\}.$$

Означення 3.4.0.1. Модельну смугу S назвемо *стандартною*, якщо

$$\partial_- S = J_1 \times \{-1\}, \quad \partial_+ S = \bigcup_{i \in \mathbf{A}} J_i \times \{1\},$$

де \mathbf{A} одна з множин $[0], [1], \dots, \mathbb{N}, -\mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

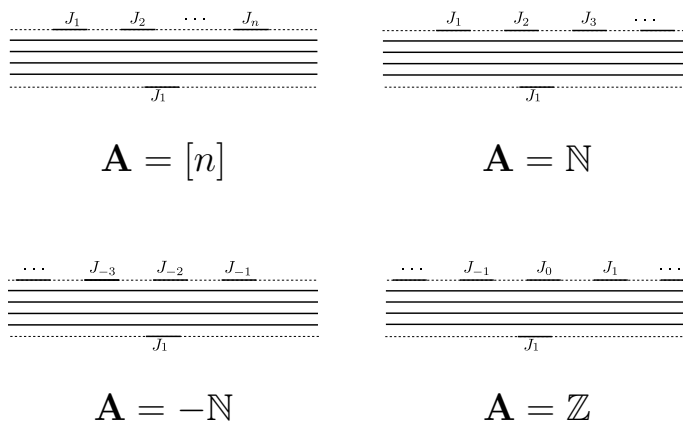


Рис. 3.4.0.1: Стандартні модельні смуги

3.4.1 Клас \mathfrak{F} кореневоподібних смугастих поверхонь

Нехай \mathfrak{F} — клас смугастих поверхонь, які мають атлас $q : Z_0 = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow Z$, що задовольняє таким умовам:

- 1) кожна $S_\lambda \subset \mathbb{R} \times [-1, 1]$, $\lambda \in \Lambda$, є стандартною модельною смугою;
- 2) граф G атласу q є деревом скінченного діаметра.

Зокрема, кожному модельній смугі S_λ атласу q можна розглядати як вершину графа G , що має одне вхідне ребро і не більше ніж зліченну кількість вихідних ребер, які є лінійно впорядкованими відповідно до \mathbf{A} .

Оскільки G є зв'язним та має скінченний діаметр і не містить циклів, то існує єдина вершина, що не містить вхідного ребра. Назвемо цю вершину *коренем* і відповідно смугу — *кореневою* смугою.

Отже, кожному поверхню $Z \in \mathfrak{F}$ діаметра d можна індуктивно представити таким чином (див. Рис. 3.4.1.1):

$$S \cup_{\partial_+ S} \left(\bigcup_{i \in \mathbf{A}} Z_i \right) \rightarrow Z, \quad (3.5)$$

де

- S коренева смуга Z ,

$$\partial_- S = J \times \{-1\}, \quad \partial_+ S = \bigcup_{i \in \mathbf{A}} J_i \times \{1\},$$

де J, J_i — обмежені інтервали, замикання яких попарно не перетинаються, $i \in \mathbf{A}$, \mathbf{A} одна з множин $[0], [1], \dots, \mathbb{N}, -\mathbb{N}, \mathbb{Z}$.

- Z_i є або порожньою, або смугастою поверхнею, що належить до класу \mathfrak{F} і граф її атласу G_i має діаметр менший ніж d .

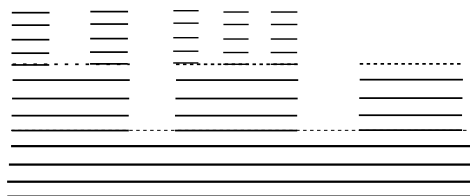


Рис. 3.4.1.1: Смугаста поверхня $Z \in \mathfrak{F}$ граф якої G має діаметр 3.

3.4.2 Групи гомеотопій шарувань поверхонь класу \mathfrak{F}

Нехай Z — поверхня з класу \mathfrak{F} . Тоді її канонічне шарування Δ є орієнтованим. Позначимо через $\mathcal{H}^+(\Delta)$ підгрупу усіх пошарових гомеоморфізмів $\mathcal{H}(\Delta)$, що складається з гомеоморфізмів $h : Z \rightarrow Z$ таких, що для кожного шару ω звуження відображення $h : \omega \rightarrow h(\omega)$ зберігає орієнтацію.

Розглянемо групу гомеотопій (див. підрозділ 1.3)

$$\pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta) = \mathcal{H}^+(\Delta) / \mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta).$$

Клас груп гомеотопій шарувань на смугастій поверхні, яка належить класу \mathfrak{F} позначимо через \mathfrak{P} , тобто

$$\mathfrak{P} = \{ \pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta) \mid \Delta \text{ канонічне шарування деякої смугастої поверхні } Z \in \mathfrak{F} \}.$$

Також визначимо інший клас груп \mathfrak{G} .

Означення 3.4.2.1. *Нехай \mathfrak{G} — мінімальний клас груп, що задовольняють такі умови:*

- 1) $1 \in \mathfrak{G}$;
- 2) якщо $G_i \in \mathfrak{G}$ для $i \in \mathbb{N}$, то $\prod_{i \in \mathbb{N}} G_i \in \mathfrak{G}$;
- 3) якщо $G \in \mathfrak{G}$, то $G \wr \mathbb{Z} \in \mathfrak{G}$.

Відмітимо, що довільну групу G класу \mathfrak{G} можна отримати з одиничної групи 1 за допомогою скінченного числа операцій злічених добутків та вінцевих добутків з \mathbb{Z} . При цьому одна й та ж група може бути отримана так багатьма різними способами. Наприклад,

$$\mathbb{Z} \cong 1 \wr \mathbb{Z} \cong 1 \times (1 \wr \mathbb{Z}) \cong (1 \times 1 \times 1) \wr \mathbb{Z}.$$

Надалі нас цікавитимуть найкоротші такі записи серед усіх можливих для даної групи.

Нехай $A = \{1, \mathbb{Z}, (,), \times, \wr\}$ — множина символів, яку назвемо *алфавітом*. Під *словом* розумітимемо не більше ніж зліченну впорядковану множину символів з алфавіту A . Введемо поняття допустимого слова α та його висоти $h(\alpha)$.

- 1) слово 1 є допустимим, причому $h(1) = 0$;
- 2) якщо слово α — допустиме, то (α) також допустиме, і $h(\alpha) = h((\alpha))$;
- 3) якщо слово α — допустиме, то $\alpha \wr \mathbb{Z} = (\alpha) \wr \mathbb{Z}$ також допустиме, а його висота $h((\alpha) \wr \mathbb{Z}) = 1 + h(\alpha)$;
- 3) якщо $\{\alpha_i\}_{i \in \Lambda \subset \mathbb{N}}$ — не більш ніж зліченна множина допустимих слів, то слово $\alpha' = (\alpha_1) \times (\alpha_2) \times \dots$ є також допустимим і $h(\alpha') = 1 + \max_{i \in \Lambda} \{h(\alpha_i)\}$.

Нехай W — множина допустимих слів. Зрозуміло, що кожне допустиме слово $\alpha \in W$ визначає деяку групу $\xi(\alpha)$ з класу \mathfrak{G} . Іншими словами, ми отримали сюр'єктивне відображення $\xi : W \rightarrow \mathfrak{G}$. Слово α назвемо представленням групи $\xi(\alpha)$ в алфавіті A .

Приклад 3.4.2.2. Нижче наведені приклади представлення груп $\{1\}$, \mathbb{Z} і $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ в алфавіті A та їх висоти:

$$\begin{aligned} h(1) &= 0, & h(1 \times 1) &= 1, \\ h(1 \wr \mathbb{Z}) &= 1, & h((1 \times 1) \wr \mathbb{Z}) &= 2, \\ h((1 \wr \mathbb{Z}) \times (1 \wr \mathbb{Z})) &= 2, & h(((1 \times 1) \wr \mathbb{Z}) \times (1 \wr \mathbb{Z})) &= 3. \end{aligned}$$

Нехай $W' = \{\alpha \mid \alpha \in W, h(\alpha) < \infty\}$ — множина слів скінченної висоти. Тоді $\mathfrak{G}' = \xi(W')$ — підклас в \mathfrak{G} , що й складається з груп, що мають представлення скінченної висоти, містить групи, що допускають представлення скінченної висоти в алфавіті A .

Наша мета довести таку теорему:

Теорема 3.4.2.3. Класи \mathfrak{F} та \mathfrak{G}' збігаються.

3.4.3 Допоміжні твердження

Нехай Z — смугаста поверхня класу \mathfrak{F} зі смугастим атласом (3.5), і S — коренева смуга Z . Нехай $\partial_+ S = \cup_{i \in \mathbf{A}} J_i \times \{1\}$.

Зауважимо, що якщо $h \in \mathcal{H}^+(\Delta)$, то $h(S) = S$. Отже, існує єдине число $\eta(h) \in \mathbb{Z}$ таке, що у карті для S :

$$h(J_i \times \{1\}) = J_{i+\eta(h)} \times \{1\}$$

для всіх $i \in \mathbf{A}$. Легко перевірити, що відповідність $h \mapsto \eta(h)$ є гомоморфізмом

$$\eta : \mathcal{H}^+(\Delta) \rightarrow \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Очевидно, η може бути ненульовим гомоморфізмом лише тоді, коли $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$.

Розглянемо такі дві підгрупи групи $\mathcal{H}^+(\Delta)$:

$$Q_S = \{h \in \mathcal{H}^+(\Delta) \mid h(\omega) = \omega, \text{ для кожного } \omega \text{ з } \Delta \text{ визначеного на } S\},$$

$$H^+(\Delta, S) = \{h \in \mathcal{H}^+(\Delta) \mid h|_S = \text{id}|_S\}.$$

Очевидно, що

$$H^+(\Delta, S) \subset Q_S \subset \ker(\eta). \quad (3.7)$$

Лема 3.4.3.1. *Вкладення (3.7) є гомотопічними еквівалентностями.*

Доведення. Спершу побудуємо деформацію $\ker(\eta)$ в Q_S . Нехай $h \in \ker(\eta)$. Оскільки $h(S) = S$, то h переставляє шари шарування Δ . Тоді для S шари Δ є лініями $y = \text{const}$, звідси

$$h(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(y)),$$

де $\alpha, \beta : S \rightarrow \mathbb{R}$ неперервні функції такі, що β не залежить від x , і для кожного $y \in (0, 1)$ відповідність $x \mapsto \alpha(x, y)$ є зберігаючим орієнтацію гомеоморфізмом \mathbb{R} в \mathbb{R} .

Отже, $h \in Q_S$ тоді і лише тоді, коли $\beta(y) = y$ для всіх $y \in [0, 1]$. Визначимо відображення $H : \ker(\eta) \times [0, 1] \rightarrow \ker(\eta)$ за допомогою формули:

$$H(h, t)(z) = \begin{cases} (\alpha(x, y), (1-t)\beta(y) + ty), & z = (x, y) \in S, \\ z, & z \in Z \setminus S. \end{cases}$$

Отримаємо, що $H_0 = \text{id}_{\ker(\eta)}$, $H_t(Q_S) \subset Q_S$ для всіх $t \in [0, 1]$, і також $H(h, 1) \in Q_S$.

Отже, H є деформацією $\ker(\eta)$ в Q_S , і тому включення $Q_S \subset \ker(\eta)$ є гомотопічною еквівалентністю.

Тепер покажемо, що перше включення також є гомотопічною еквівалентністю. Нехай $h \in Q_S$, тоді

$$h(x, y) = (\alpha(x, y), y)$$

для всіх $(x, y) \in S$. Зауважимо, що $h \in H^+(\Delta, S)$ тоді і лише тоді, коли $\alpha(x, y) = x$ і $\beta(y) = y$ для всіх $(x, y) \in S$.

Нехай

$$h(x, y) = (\alpha_i(x, y), \beta_i(y))$$

звуження відображення h на кореневу смугу S_i поверхні Z_i у відповідній карті S_i . Оскільки $\partial_- S_i = J \times \{-1\}$, ми бачимо, що якщо $h \in H^+(\Delta, S)$, то $\alpha_i(x, -1) = x$ для всіх $x \in J$ і $i \in \mathbf{A}$.

Зафіксуємо неперервну функцію $\varepsilon : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ таку, що

$$\varepsilon(y) = \begin{cases} 1, & y \in (-1, -0.8), \\ 0, & y \in (0, 1); \end{cases}$$

і визначимо гомотопію $G : Q_S \times [0, 1] \rightarrow Q_S$ за допомогою формули

$$G(h, t)(z) = \begin{cases} ((1-t)\alpha(x, y) + tx, y), & z = (x, y) \in S, \\ ((1-t\varepsilon(y))\alpha_i(x, y) + t\varepsilon(y)x, \beta(y)), & z = (x, y) \in S_i, \\ z & z \notin S \cup (\cup_{i \in \mathbf{A}} S_i). \end{cases}$$

Оскільки $\partial_- S_i$ склеєна з межевою компонентою $J_i \times \{1\}$ за допомогою афінного гомеоморфізму, а формули для G є афінними для деяких фіксованих t і y , то ці формули узгоджені на $J_i \times \{1\}$ і $\partial_- S_i$, див. [24]. Це означає, що G неперервне відображення.

Крім того, легко бачити, що $G_0 = \text{id}_{Q_S}$, $G_t(H^+(\Delta, S)) \subset H^+(\Delta, S)$ для всіх $t \in [0, 1]$, та $G_1(Q_S) \subset H^+(\Delta, S)$. Звідси G є деформацією Q_S в $H^+(\Delta, S)$. Тому включення $H^+(\Delta, S) \subset Q_S$ є також гомотопічною еквівалентністю. \square

Припустимо Z_i непорожня для деякого $i \in \mathbf{A}$. Нехай Δ_i канонічне шарування на Z_i і S_i коренева смуга Z_i . Позначимо через $H^+(\Delta_i, \partial_- S_i)$ підгрупу $H^+(\Delta_i)$, що складається з гомеоморфізмів нерухомих на $\partial_- S_i$.

Якщо $Z_i = \emptyset$, то покладемо, що $H^+(\Delta_i, \partial_- S_i) = \{1\}$.

Наслідок 3.4.3.2. *Має місце ізоморфізм:*

$$\pi_0 \ker \eta \cong \prod_{i \in \mathbf{A}} \pi_0 H^+(\Delta_i, \partial_- S_i).$$

Доведення. Очевидно, матимемо канонічний ізоморфізм:

$$\alpha : H^+(\Delta, S) \rightarrow \prod_{i \in \mathbf{A}} H^+(\Delta_i, \partial_- S_i), \quad \alpha(h) = (h|_{Z_i})_{i \in \mathbf{A}}.$$

Тоді з Лема 3.4.3.1 отримаємо таку послідовність ізоморфізмів:

$$\pi_0 \ker \eta \cong \pi_0 H^+(\Delta, S) \cong \pi_0 \prod_{i \in \mathbf{A}} H^+(\Delta_i, \partial_- S_i) = \prod_{i \in \mathbf{A}} \pi_0 H^+(\Delta_i, \partial_- S_i).$$

Лема доведена. \square

Теорема 3.4.3.3. 1) *Якщо η нульовий гомоморфізм, то група $\pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta)$ є ізоморфною $\prod_{i \in \mathbf{A}} \pi_0 H^+(\Delta_i, \partial_- S_i)$.*

2) *Припустимо образ η є $k\mathbb{Z}$ для деякого $k \geq 1$, тоді $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$. Тоді група $\pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta)$ є ізоморфною $\left(\prod_{i=0}^{k-1} \pi_0 H^+(\Delta_i, \partial_- S_i) \right) \wr \mathbb{Z}$.*

Доведення. 1) Припустимо, що η нульовий гомоморфізм, тобто $\mathcal{H}^+(\Delta) = \ker(\eta)$.

Тоді з Лема 3.4.3.2 отримаємо, що

$$\pi_0\mathcal{H}^+(\Delta) \cong \prod_{i \in \mathbf{A}} \pi_0 H^+(\Delta_i, \partial_- S_i).$$

2) Припустимо, що $\text{Im}\eta = k\mathbb{Z}$. Тоді матимемо епіморфізм $\hat{\eta} : \mathcal{H}^+(\Delta) \rightarrow \mathbb{Z}$ визначений за допомогою формули $\hat{\eta}(h) = \eta(h)/k$ і такий, що

$$h(Z_r) = Z_{r+k\hat{\eta}(h)}, \quad r = 0, 1, \dots, k-1.$$

Нехай

$$X = \bigcup_{i=0}^{k-1} Z_i, \quad \partial_- X = \bigcup_{i=0}^{k-1} \partial_- S_i,$$

і Δ_X — орієнтоване шарування на X індуковане шаруванням Δ . Позначимо через $H^+(\Delta_X, \partial_- X)$ групу гомеоморфізмів X нерухомих на $\partial_- X$, які відображають шари шарування Δ_X на шари, зберігаючи їх орієнтацію. Тоді отримаємо природний ізоморфізм:

$$\prod_{i=0}^{k-1} H^+(\Delta_i, \partial_- S_i) \cong H^+(\Delta_X, \partial_- X)$$

що дає ізоморфізм

$$\prod_{i=0}^{k-1} \pi_0 H^+(\Delta_i, \partial_- S_i) \cong \pi_0 H^+(\Delta_X, \partial_- X).$$

Таким чином для доведення Теорема 3.4.3.3 ми повинні побудувати ізоморфізм:

$$\beta : \pi_0\mathcal{H}^+(\Delta) \longrightarrow \pi_0 H^+(\Delta_X, \partial_- X) \wr \mathbb{Z} \equiv \text{Map}\left(\mathbb{Z}, \pi_0 H^+(\Delta_X, \partial_- X)\right) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Зафіксуємо будь-який гомеоморфізм $g \in \mathcal{H}^+(\Delta)$ для якого $\hat{\eta}(g) = 1$, а тому

$$g^{-\hat{\eta}(h)} \circ h(Z_i) = Z_i,$$

для всіх $h \in \mathcal{H}^+(\Delta)$ та $i \in \mathbb{Z}$. Тоді $g^{-\hat{\eta}(h)} \circ h \in \ker(\eta)$. Отже, отримуємо коректно визначену функцію:

$$\varphi_h : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_0 H^+(\Delta_X, \partial_- X), \quad \varphi_h(j) = \left[g^{-j-\hat{\eta}(h)} \circ h \circ g^j \Big|_X \right].$$

Задамо наступне відображення:

$$\beta : \pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta) \longrightarrow \pi_0 H^+(\Delta_X, \partial_- X) \wr \mathbb{Z}$$

за допомогою формули

$$\beta(h) = (\varphi_h, \widehat{\eta}(h)), \quad h \in \pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta).$$

Покажемо, що відображення β є ізоморфізмом. Спершу зауважимо, що композиція операцій в $H^+(\Delta_X, \partial_- X) \wr \mathbb{Z}$ визначена за допомогою правила:

$$(\varphi_{h_1}, n) \cdot (\varphi_{h_2}, m) = (\varphi_{h_1}^m \cdot \varphi_{h_2}, n + m),$$

де $\varphi_h^m(j) = \varphi_h(j + m)$.

Доведемо, що β — гомоморфізм. Нехай $h_1, h_2 \in \mathcal{H}^+(\Delta)$. Тоді

$$\begin{aligned} \beta(h_1) \circ \beta(h_2) &= (\varphi_{h_1}, \widehat{\eta}(h_1)) \cdot (\varphi_{h_2}, \widehat{\eta}(h_2)) \\ &= (\varphi_{h_1}^{\widehat{\eta}(h_2)} \cdot \varphi_{h_2}, \widehat{\eta}(h_1) + \widehat{\eta}(h_2)) \\ &= \left([g^{-j-\widehat{\eta}(h_1)-\widehat{\eta}(h_2)} \circ h_1 \circ g^{j+\widehat{\eta}(h_2)} \circ g^{-j-\widehat{\eta}(h_2)} \circ h_2 \circ g^j|_X], \widehat{\eta}(h_1 \circ h_2) \right) \\ &= \left([g^{-j-\widehat{\eta}(h_1 \circ h_2)} \circ h_1 \circ h_2 \circ g^j|_X], \widehat{\eta}(h_1 \circ h_2) \right) \\ &= (\varphi_{h_1 \circ h_2}, \widehat{\eta}(h_1 \circ h_2)) = \beta(h_1 \circ h_2). \end{aligned}$$

Доведемо, що β — ін'єктивне відображення.

Нехай гомеоморфізм $h \in \mathcal{H}^+(\Delta)$ такий, що $[h] \in \ker \beta$. Потрібно показати, що h ізотопний id_Z в $\mathcal{H}^+(\Delta)$.

Оскільки $[h] \in \ker \beta$, то $\beta(h) = (\varphi_h, \widehat{\eta}(h)) = (\varepsilon, 0)$, де $\varepsilon : \mathbb{Z} \rightarrow [\text{id}_X]$ — стале відображення, що є одиницею в $\pi_0 H^+(\Delta_X, \partial_- X)$. Оскільки $\eta(h) = 0$, то з Лемми 3.4.3.1 отримуємо, що h ізотопний в $\mathcal{H}^+(\Delta)$ до гомеоморфізму нерухомого на S . Таким чином, можемо вважати, що h є нерухомим на S , тобто $h \in H^+(\Delta, S)$.

Тоді

$$\varphi_h(j) = [g^{-j} \circ h \circ g^j|_X] = \varepsilon(j) = [\text{id}_X] \in \pi_0 H^+(\Delta_X, \partial_- X) \quad (3.8)$$

для кожного $j \in \mathbb{Z}$. Іншими словами, $g^{-j} \circ h \circ g^j|_X$ ізотопний id_X відносно $\partial_- X$.

Достатньо довести, що для кожного $i \in \mathbb{Z}$ звуження $h|_{Z_i}$ ізотопні $H^+(\Delta_i, \partial_- S_i)$ до id_{Z_i} відносно $\partial_- S_i$.

Відмітимо, що існує єдине $r \in \{0, k-1\}$ таке, що $i = r + jk$. Тоді матимемо таку комутативну діаграму:

$$\begin{array}{ccc} Z_i = Z_{r+jk} & \xrightarrow{g^{-j}} & Z_r \\ h \downarrow & & \downarrow g^{-j} \circ h \circ g^j \\ Z_i = Z_{r+jk} & \xrightarrow{g^{-j}} & Z_r \end{array}$$

Таким чином, з (3.8) отримуємо, що $[h|_{Z_i}] = [\text{id}_{Z_i}] \in H^+(\Delta_i, \partial_- S_i)$. Звідси h ізотопний id_Z в $\mathcal{H}^+(\Delta)$.

Доведемо, що β сюр'єкція. Нехай $(\varphi, n) \in \pi_0 H^+(\Delta_X, \partial_- X) \wr \mathbb{Z}$. Для кожного $j \in \mathbb{Z}$ зафіксуємо гомеоморфізм $h_j \in H^+(\Delta_X, \partial_- X)$ такий, що

$$[h_j] = \varphi(j) \in \pi_0 H^+(\Delta_X, \partial_- X),$$

і визначимо гомеоморфізм \widehat{h} поверхні Z за допомогою формули:

$$\widehat{h} = \begin{cases} \text{id}_S, & \text{на } S, \\ [g^j \circ h_j \circ g^{-j}] & \text{на } g^j(X), \end{cases}$$

і покладемо $h = g^n \circ \widehat{h}$. Тоді легко показати, що $\beta([h]) = (\varphi, n)$, а тому β сюр'єкція. Отже, β є ізоморфізмом. \square

3.4.4 Доведення Теорема 3.4.2.3

Доведемо, що $\mathfrak{P} = \mathfrak{G}'$.

1. Спершу покажемо, що $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{P}$.

Нехай $G \in \mathfrak{G}'$, тоді G має представлення α в алфавіті A скінченної висоти $k = h(\alpha)$. Покажемо, що існує смугаста поверхня $Z \in \mathfrak{F}$ з канонічним шаруванням Δ така, що $G \cong \pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta)$.

Якщо $k = h(\alpha) = 0$, то G єдинична група та $\alpha = 1$.

Нехай S — модельна смуга з $\partial_- S = J_1 \times \{-1\}$ і $\partial_+ S = \emptyset$. Тоді $S \in \mathfrak{F}$. Нехай також Δ — канонічне шарування на S . Таким чином, $\pi_0 H^+(\Delta) = 1$, тобто $G = 1 \in \mathfrak{P}$.

Припустимо, що ми показали справедливість нашого твердження для всіх k , що менші ніж деяке $\bar{k} > 0$. Доведемо твердження для $k = \bar{k}$. З означення висоти слідує, що

(i) або $\alpha = \prod_{i \in \mathbb{N}} G_i$, де кожна група G_i має представлення α_i в алфавіті A висоти $h(\alpha_i) < k$,

(ii) або $\alpha = G \wr \mathbb{Z}$, і G має представлення α' в алфавіті A висоти $h(\alpha') < k$.

У випадку (i) згідно індуктивного припущення для кожного $i \in \mathbb{N}$ існує смугаста поверхня $Z_i \in \mathfrak{F}$ з шаруваннями Δ_i такими, що $G_i = \pi_0 H^+(\Delta_i)$.

Нехай S — модельна смуга з $\partial_- S = J_1 \times \{-1\}$ і $\partial_+ S = \cup_{i \in \mathbb{N}} J_i \times \{1\}$, і S_i — коренева смуга Z_i , $i \in \mathbb{N}$. Визначимо смугасту поверхню

$$Z = S \cup_{\partial_+ S} \left(\cup_{i \in \mathbb{N}} Z_i \right)$$

одержану за допомогою приклеювання кожної Z_i до S ототожненням $\partial_- S_i \subset Z_i$ з $J_i \times \{1\} \subset \partial_+ S$. Тоді за Теоремою 3.4.3.3 η — тривіальний гомоморфізм, і $\pi_0 H^+(\Delta) \cong \prod_{i \in \mathbb{N}} \pi_0 H^+(\Delta_i)$.

У випадку (ii) також згідно індуктивного припущення існує смугаста поверхня $\widehat{Z} \in \mathfrak{F}$ з канонічним шаруванням $\widehat{\Delta}$ така, що $G = \pi_0 H^+(\widehat{\Delta})$.

Візьмемо зліченне число копій \widehat{Z}_i , $i \in \mathbb{Z}$, поверхні \widehat{Z} . Нехай \widehat{S}_i — коренева смуга \widehat{Z}_i і $\widehat{\Delta}_i$ — канонічне шарування на \widehat{Z}_i .

Нехай також S — модельна смуга $\partial_- S = J_1 \times \{-1\}$ і $\partial_+ S = \cup_{i \in \mathbb{Z}} J_i \times \{1\}$. Розглянемо наступну смугасту поверхню

$$Z = S \cup_{\partial_+ S} \left(\cup_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{Z}_i \right)$$

одержану ототожненням $\partial_- \widehat{S}_i \subset \widehat{Z}_i$ з $J_i \times \{1\} \subset \partial_+ S$, $i \in \mathbb{Z}$.

Тоді для кожної пари $i, j \in \mathbb{Z}$ існує $h \in H^+(\Delta)$ такий, що $h(\widehat{Z}_i) = \widehat{Z}_j$. Тому гомоморфізм η (див (3.6)) є епіморфізмом. Отже, за Теоремою 3.4.3.3

$$\pi_0 H^+(\Delta) \cong \prod_{i \in \mathbb{Z}} \pi_0 H^+(\widehat{\Delta}_i) \in \mathfrak{P},$$

а тому $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{P}$.

2. Покажемо, що $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{G}'$.

Нехай $Z \in \mathfrak{F}$ — смугаста поверхня зі смугастим атласом (3.5), канонічним шаруванням Δ та графом смугастого атласу $G(Z)$ для якого $\text{diam } G(Z) = k$. Доведемо, що $\pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta)$ має скінченне представлення в алфавіті A , що означає, що $\pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta) \in \mathfrak{G}'$.

Якщо $k = 0$, то Z стандартна модельна смуга з

$$\partial_- Z = J_1 \times \{-1\}, \quad \partial_+ Z = \bigcup_{i \in \mathbf{A}} J_i \times \{1\}, \quad \mathbf{A} \in \{[0], [1], \dots, \mathbb{N}, -\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}.$$

З Теорема 3.4.3.3 випливає, що $\pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta) \cong \mathbb{Z}$, якщо $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$, і $\pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta) \cong 1$ в протилежному випадку. В обох випадках $\pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta) \in \mathfrak{G}$.

Припустимо, що ми показали, що наше твердження справедливе для всіх k , які менші ніж деяке $\bar{k} > 0$. Доведемо твердження для $k = \bar{k}$. Нехай

$$Z = S \cup_{\partial_+ S} \left(\bigcup_{i \in \mathbf{A}} Z_i \right) \in \mathfrak{F}$$

так, що $G(Z)$ має діаметр k . Тоді $G(Z_i)$ має діаметр менший ніж k , і тому згідно індуктивного припущення $\pi_0 H^+(\Delta_i, \partial_- S_i) \in \mathfrak{G}$. Крім того, відповідно до Теорема 3.4.3.3 матимемо, що

$$(i) \text{ якщо } \text{Im}(\eta) = 0, \text{ то } \pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta) \cong \prod_{i \in \mathbf{A}} \pi_0 H^+(\Delta_i, \partial_- S_i) \in \mathfrak{G},$$

$$(ii) \text{ якщо } \text{Im}(\eta) = k\mathbb{Z}, \text{ то } \pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta) \cong \left(\prod_{i=0}^{k-1} \pi_0 H^+(\Delta_i, \partial_- S_i) \right) \wr \mathbb{Z} \in \mathfrak{G}.$$

Отже, $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{G}'$, і тому $\mathfrak{P} = \mathfrak{G}'$. Теорема 3.4.3.3 доведена повністю.

3.5 Зв'язок груп гомеотопій шарувань смугастих поверхонь класу \mathfrak{F} та їх просторів шарів

3.5.1 Простір шарів смугастої поверхні

Нехай $q : Z_0 = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow Z$ редукований смугастий атлас на поверхні Z і Δ — відповідне канонічне шарування. Позначимо через $L = Z/\Delta$ простір шарів і нехай $\pi : Z \rightarrow L$ — фактор-відображення. Наділимо L фактор-топологією, тобто множину U в L вважатимемо відкритою тоді і тільки тоді, коли її прообраз $\pi^{-1}(U)$ є відкритим в Z . В загальному випадку L є негаусдорфовим топологічним простором.

Множину $e_\lambda = \pi \circ q_\lambda(\text{Int}(S_\lambda))$ називатимемо ребром. Очевидно, що e_λ є відкритою в L і гомеоморфною відкритому інтервалу. Таким чином, L можна розглядати як «негаусдорфовий» граф, у якого «розщеплені» вершини. Ці вершини відповідають граничним інтервалам модельних смуг.

Нехай V — множина вершин і $E = \{e_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ — множина ребер графа L . Покладемо $\partial_+ e_\lambda = \pi(\partial_+ S_\lambda)$ і $\partial_- e_\lambda = \pi(\partial_- S_\lambda)$. Введемо орієнтацію на графі L , орієнтувавши кожне ребро від $\partial_- e_\lambda$ до $\partial_+ e_\lambda$. Також для кожного ребра e_λ зафіксуємо зберігаючий орієнтацію гомеоморфізм:

$$\psi_\lambda : (-1, 1) \rightarrow e_\lambda. \quad (3.9)$$



Рис. 3.5.1.1: Смугаста поверхня Z та граф L

Зауважимо, що лінійний порядок на інтервалах з $\partial_+ S_\lambda$ ($\partial_- S_\lambda$) визначає і лінійний порядок вершин в образі $\partial_+ e_\lambda$ ($\partial_- e_\lambda$).

Точку $x \in L$ називатимемо *спеціальною*, якщо $\{x\} \neq \cap \bar{V}$, де V — пробігає базу відкритих околів точки x . Очевидно, що L є гаусдорфовим тоді і лише тоді, коли L не має спеціальних точок. Якщо точка x належить ребру, то x є неспеціальною вершиною. З результатів [24, Лема 3.2] слідує, що вершина v є *неспеціальною* тоді і лише тоді, коли $v = \partial_- e_\nu = \partial_+ e_\mu$, $\nu, \mu \in \Lambda$. Оскільки атлас q редукований, то простір шарів не містить неспеціальних вершин, які відповідають шарам, що лежать у внутрішності поверхні.

Під *спеціальними шарами* шарування розумітимемо шари ω , для яких виконується умова $\omega \neq \bigcap_{N(\omega)} \overline{Sat(N(\omega))}$, де $N(\omega)$ пробігає множину всіх відкритих околів ω .

Згідно [25, Лема 3.5], шар спеціальний тоді і лише тоді, коли спеціальною є відповідна точка в просторі шарів.

3.5.2 Групи гомеотопій просторів шарів

Нехай $\mathcal{H}(L)$ — група гомеоморфізмів графа L . За означенням групи $\mathcal{H}^+(\Delta)$ гомеоморфізм $h \in \mathcal{H}^+(\Delta)$ зберігає відношення еквівалентності. Тому згідно леми 1.1.2.1 відповідне факторне відображення $\hat{\rho}(h) : L \rightarrow L$ є гомеоморфізмом. Тобто, кожен гомеоморфізм смугастої поверхні $h : Z \rightarrow Z$ з $\mathcal{H}^+(\Delta)$ індукує гомеоморфізм графа $\hat{\rho}(h) : L \rightarrow L$.

Зауважимо, що відповідність $h \mapsto \hat{\rho}(h)$ є гомоморфізмом груп

$$\hat{\rho} : \mathcal{H}^+(\Delta) \rightarrow H(L).$$

Нехай \mathcal{K} — це група гомеоморфізмів графа L , що переводять ребра в ребра зі збереженням орієнтації та лінійного порядку вершин на ∂_+ , тобто, якщо $g \in \mathcal{K}$ і $g(e_\lambda) = e_\mu$, то обмеження відображення $g : \partial_+ e_\lambda \rightarrow \partial_+ e_\mu$ зберігає лінійний порядок вершин. Позначимо також через \mathcal{K}_0 групу гомеоморфізмів графа L з \mathcal{K} , що ізотопні тотожному відображенню в \mathcal{K} .

Лема 3.5.2.1. $\mathcal{K} = \hat{\rho}(\mathcal{H}^+(\Delta))$.

Доведення. 1. Спочатку встановимо справедливність включення

$$\hat{\rho}(\mathcal{H}^+(\Delta)) \subset \mathcal{K}.$$

Нехай $h \in \mathcal{H}^+(\Delta)$ та h індукує гомеоморфізм $\hat{\rho}(h) = g$. Згідно теореми 3.4.3.3 гомеоморфізм $h \in \mathcal{H}^+(\Delta)$ переставляє спеціальні шари кожної модельної смуги S_λ з атласу смугастої поверхні Z . Тому існує таке ціле число k , що для будь-якого спеціального шару $\omega_s \in \partial_+ S_\lambda, s \in \mathbf{A}_\lambda$ виконується умова $h(\omega_s) = \omega_{s+k}$, де $\mathbf{A}_\lambda \in \{[0], [1], \dots, \mathbb{N}, -\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$ — множина індексів інтервалів $\partial_- S_\lambda$ модельної смуги S_λ . Нехай e_λ — ребро, що відповідає S_λ і $v_k = \pi(\omega_k)$ — відповідна вершина в $\partial_+ e_\lambda$. Тоді $g(v_s) = v_{s+k}$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Тому гомеоморфізми групи \mathcal{K} дійсно зберігають лінійний порядок вершин на $\partial_+ e_\lambda$ для кожного ребра $e_\lambda \in L$.

2. Доведемо включення $\mathcal{K} \subset \hat{\rho}(\mathcal{H}^+(\Delta))$. Нехай $g \in \mathcal{K}$. Покажемо, що існує гомеоморфізм $q \in \mathcal{H}^+(\Delta)$ такий, що $g = \hat{\rho}(q)$.

(a) Спочатку доведемо, що існує гомеоморфізм h визначений на $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ такий, що діаграма 3.10 комутативна:

$$\begin{array}{ccccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda & \xrightarrow{q} & Z & \xrightarrow{\pi} & L \\ \downarrow h & & & & \downarrow g \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda & \xrightarrow{q} & Z & \xrightarrow{\pi} & L \end{array} \quad (3.10)$$

Нехай e_λ, e_μ — два ребра для яких виконується умова: $g(e_\lambda) = e_\mu$. Зафіксуємо гомеоморфізми $\psi_\lambda : (-1, 1) \rightarrow e_\lambda, \psi_\mu : (-1, 1) \rightarrow e_\mu$, див. (3.9), тоді гомеоморфізм g індукує гомеоморфізм відрізків $\psi_\lambda^g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, що визначається формулою:

$$\psi_\lambda^g(t) = \begin{cases} \psi_\mu^{-1} \circ g \circ \psi_\lambda(t), & \text{якщо } t \in (-1, 1), \\ t, & \text{якщо } t \in \{-1, 1\}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Іншими словами, ми маємо таку комутативну діаграму

$$\begin{array}{ccc} [-1, 1] \supset (-1, 1) & \xrightarrow{\psi_\lambda} & e_\lambda \\ \widehat{\psi}_\lambda \downarrow & & \downarrow g \\ [-1, 1] \supset (-1, 1) & \xrightarrow{\psi_\mu} & e_\mu \end{array}$$

Відмітимо, що гомеоморфізм g відображає множину $\partial_+ e_\lambda$ в $\partial_+ e_\mu$ зі збереженням лінійного порядку. Тому стандартні модельні смуги S_λ та S_μ , що відповідають ребрам e_λ і e_μ збігаються, тобто $\partial_+ S_\lambda = \partial_+ S_\mu = \bigcup_{i \in \mathbf{A}} J_i \times \{1\}$, де \mathbf{A} одна з множин $[n]$, \mathbb{N} , $-\mathbb{N}$, \mathbb{Z} .

Нехай $v_s = \pi(J_s \times \{1\})$, $s \in \mathbf{A}$. Тоді g індукує монотонну бієкцію \mathbf{A} на себе. Якщо $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$, то існує ціле число $k = k_\lambda(g)$ таке, що $g(v_s) = v_{s+k}$. У всіх інших випадках $g(v_s) = v_s$ і ми покладемо $k = 0$.

Тому гомеоморфізм h_λ можна задати наступним чином:

$$h_\lambda(x, y) = (x + 2ky, \psi_\lambda^g(y)), (x, y) \in S_\lambda \quad (3.12)$$

При цьому має місце така комутативна діаграма:

$$\begin{array}{ccccc} S_\lambda & \xrightarrow{q_\lambda} & q(S_\lambda) & \xrightarrow{\pi} & e_\lambda \\ \downarrow h_\lambda & & & & \downarrow g \\ S_\mu & \xrightarrow{q_\mu} & q(S_\mu) & \xrightarrow{\pi} & e_\mu \end{array}$$

Визначивши h_λ для кожної модельної смуги смугастої поверхні Z , отримаємо шуканий гомеоморфізм h .

(б) Доведемо, що всі гомеоморфізми h_λ узгоджені на межі ∂e_λ , тобто, що гомеоморфізм h індукує гомеоморфізм q для якого комутативною є така діаграма:

$$\begin{array}{ccccc} \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda & \xrightarrow{q} & Z & \xrightarrow{\pi} & L \\ \downarrow h & & \downarrow q & & \downarrow g \\ \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda & \xrightarrow{q} & Z & \xrightarrow{\pi} & L \end{array} \quad (3.13)$$

Нехай $a, b \in \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$, $a \neq b$ і $q(a) = q(b)$. Оскільки образи точок a, b при факторному відображенні q тотожні, то ці точки лежать на межі стандартних модельних смуг. Нехай, для визначеності, $a = (x_1, -1) \in J_1 = (1, 2) \subset \partial_- S_{\lambda_1}$ і $b = (x_2, 1) \in J_j = (2j - 1, 2j) \subset \partial_+ S_{\lambda_2}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Тоді з формули (3.12), отримуємо, що:

$$\begin{aligned} h_{\lambda_1}(x_1, -1) &= (x_1, -1), \\ h_{\lambda_2}(x_2, 1) &= (x_2 + 2k, 1). \end{aligned}$$

Згідно наших позначень афінні гомеоморфізми, що приклеюють модельні смуги $\varphi_1 : J_1 \rightarrow J_j$ і $\varphi_2 : h_{\lambda_1}(J_1) \rightarrow h_{\lambda_2}(J_j)$, визначаються формулами:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= t + 2j, \quad t \in J_1, \\ \varphi_2(t) &= t + 2j + 2k, \quad t \in h(J_1). \end{aligned}$$

Тоді $h_{\lambda_2} \circ \varphi_1 \circ h_{\lambda_1}^{-1}(t) = \varphi_2(t)$, $t \in h(J_1)$. Отже, $q(h(a)) = q(h(b))$ і діаграма (3.13) є комутативною.

□

Наступні леми дають характеристику груп \mathcal{K}_0 та H_0 .

Лема 3.5.2.2. *Гомеоморфізм $g \in H(L)$ належить групі \mathcal{K}_0 тоді і лише тоді, коли виконуються умови:*

- 1) $g(e) = e$, де e - довільне ребро графа;
- 2) g зберігає орієнтацію ребер;
- 3) $g(v) = v$ для кожної вершини v .

Доведення. Достатність. Нехай $g \in H(L)$ і виконуються умови 1) – 3) леми. Завдяки умовам 2) та 3) гомеоморфізм g належить групі \mathcal{K} . Крім того з умов 1) та 2) випливає, що для кожного ребра e_λ графа L функція $g|_{e_\lambda}$ — строго зростаюча. Тому, ізотопію $\Psi(z, t) : L \times [0, 1] \rightarrow L$ між id_L та g можна визначити

формулою:

$$\psi_t(z) = \begin{cases} \psi_\lambda \left((1-t)\psi_\lambda^{-1}(z) + t\psi_\lambda^{-1}(g(z)) \right), & \text{якщо } z \in e_\lambda, e_\lambda \subset E, \\ z, & \text{якщо } z \in V; \end{cases}$$

де $t \in [0, 1]$. Отже, $g \in \mathcal{K}_0$.

Необхідність. Нехай $g \in \mathcal{K}_0$. Тоді існує ізоtopія $g_t : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$, $t \in [0, 1]$ та $g_0 = \text{id}_L, g_1 = g$, то виконується рівність

$$g_t(E) = E, \quad g_t(V) = V. \quad (3.14)$$

Так, як $g_0 = \text{id}$, то g_t залишає інваріантною кожну компоненту зв'язності множин E та V , тобто кожне ребро та кожну вершину. Це доводить властивості 1) та 3).

Крім того, для довільного ребра e обмеження $g_t|_e : e \rightarrow e$, $t \in [0, 1]$ є ізоtopією $g_0|_e = \text{id}_G$ і $g_1|_e = g$, тому $g_t|_e$ — зберігає орієнтацію ребра. \square

Лема 3.5.2.3. $\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta) = \hat{\rho}^{-1}(\mathcal{K}_0)$ і $\hat{\rho}(\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)) = \mathcal{K}_0$.

Доведення. Якщо $h \in \mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)$, то згідно [24, Теорема 4.4.], для $\hat{\rho}(h)$ виконуються всі умови леми 3.5.2.2 і $\hat{\rho}(h) \in \mathcal{K}_0$, тобто $\hat{\rho}(\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)) \subset \mathcal{K}_0$.

Тому для того, щоб показати справедливість леми, достатньо довести, що $\hat{\rho}^{-1}(\mathcal{K}_0) \subset \mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)$, тобто, що кожен гомеоморфізм $g \in \mathcal{K}_0$ є образом деякого відображення h з $\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)$. Нехай $g \in \mathcal{K}_0$. Тоді на смuzі S_λ гомеоморфізм h можна визначити за допомогою формули (3.12), де $k_\lambda(g) = 0$.

Таким чином, $h \in H_0^+(F)$ і $\mathcal{K}_0 \subset \hat{\rho}(\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta))$.

Оскільки $\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta) = \hat{\rho}^{-1}(\mathcal{K}_0)$ і $\hat{\rho}$ — сюр'єктивне відображення, то отримуємо, що $\hat{\rho}(\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)) = \mathcal{K}_0$. \square

Теорема 3.5.2.4. Нехай $Z \in \mathfrak{F}$ і Δ - канонічне шарування. Тоді гомоморфізм $\hat{\rho} : \mathcal{H}^+(\Delta) \rightarrow \mathcal{K}$ індукує ізоморфізм груп $\pi_0 \mathcal{H}^+(\Delta)$ та $\pi_0 \mathcal{K}$.

Доведення. Групи $\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta)$ та \mathcal{K}_0 є нормальними підгрупами відповідно в групах $\mathcal{H}^+(\Delta)$ та \mathcal{K} . Більше того, згідно Лема 3.5.2.3, $\mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta) = \hat{\rho}^{-1}(\mathcal{K}_0)$, а тому $\hat{\rho}$ індукує ізоморфізм фактор-груп:

$$\mathcal{H}^+(\Delta) / \mathcal{H}_{\text{id}}^+(\Delta) \cong \mathcal{H}^+(\Delta) / \hat{\rho}^{-1}(\mathcal{K}_0) = \frac{\mathcal{H}^+(\Delta) / \ker \hat{\rho}}{\hat{\rho}^{-1}(\mathcal{K}_0) / \ker \hat{\rho}} = \mathcal{K} / \mathcal{K}_0.$$

Теорему доведено. □

3.6 Висновки

В даному розділі, ми обчислили гомотопічний тип груп шарових гомеоморфізмів канонічних шарувань смугастих поверхонь та описали алгебраїчну структуру груп гомеотопій гомеоморфізмів кореневоподібних смугастих поверхонь. Результати цього розділу також пов'язують групу гомеотопій $\pi_0\mathcal{H}(\Delta)$ канонічного шарування Δ з групою автоморфізмів $\text{Aut}(G)$ графа G редукованого смугастого атласу.

Розділ 4. Топологічна еквівалентність псевдогармонічних функцій загального положення на площині

Даний розділ присвячений топологічній еквівалентності функцій. Розглянуто псевдогармонічні функції загального положення, множини лінії рівня яких визначають несингулярні та сингулярні шарування площини.

4.1 Топологічна еквівалентність функцій до проєкції \mathbb{R}^2 на пряму

Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна функція у якій компоненти зв'язності ліній рівня утворюють несингулярні шарування Δ . Властивості таких шарувань розглядалися в попередніх розділах.

Таким чином, лінії рівня функції f обов'язково «локально паралельні», однак їх глобальна поведінка може бути складнішою.

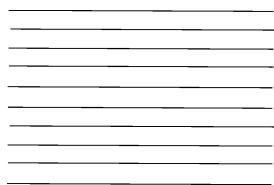


Рис. 4.1.0.1: Лінії рівня

$$g(x, y) = y$$

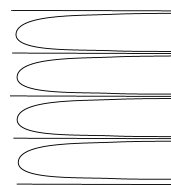


Рис. 4.1.0.2: Лінії рівня

$$f(x, y) = \arctan(x - \operatorname{tg}^2(y))$$

Одним з основних прикладів несингулярних шарування площини є проєкція $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задана формулою $g(x, y) = y$, її лінії рівня є паралельними прямими

$y = \text{const.}$ (Рис. 4.1.0.1)

З іншого боку, розглянемо функцію $f(x, y) = \arctan(x - \text{tg}^2(y))$ (Рис. 4.1.0.2). Її лінії рівня не є зв'язними, однак розбиття на зв'язні компоненти ліній рівня функції f також утворюють несингулярне шарування площини.

Теорема 4.1.0.1 показує, що зв'язність ліній рівня є характерною властивістю проєкції.

Теорема 4.1.0.1. *Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна функція і $\Delta = \{f^{-1}(p) \mid p \in \mathbb{R}\}$ розбиття \mathbb{R}^2 на лінії рівня функції f . Припустимо, що виконані дві такі умови.*

1. *Для кожного $p \in f(\mathbb{R}^2)$, що належить образу f , відповідна лінія рівня $f^{-1}(p)$ є гомеоморфною образу відкритого інтервалу. Зокрема, $f^{-1}(p)$ є лінійно зв'язною множиною.*

2. *Δ є несингулярним шаруванням площини \mathbb{R}^2 .*

Тоді образ $f(\mathbb{R}^2)$ є відкритим інтервалом (a, b) , $a, b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$, та існує гомеоморфізм $\varphi : \mathbb{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ такий, що $f \circ \varphi(x, y) = y$. Іншими словами, f топологічно еквівалентна до проєкції \mathbb{R}^2 на пряму.

Доведення використовує результати [16], які наведені в підрозділі 1.2.

Доведення. Спочатку покажемо справедливість такої леми.

Лема 4.1.0.2. *Нехай $[p, q]$ — локальний переріз Δ . Тоді звуження f на $[p, q]$ є строго монотонним. Зокрема, $[p, q]$ перетинає кожен шар з Δ щонайбільше в одній точці.*

Доведення. Припустимо, що існує точка $x \in [p, q]$ відмінна від p і q , яка є локальним екстремумом функції $f|_{[p, q]}$. Нехай $c = f(x)$. Вкладення $f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^2$ є власним, тобто

(i) $f^{-1}(c)$ розбиває \mathbb{R}^2 на дві зв'язні компоненти, позначимо їх R_1 та R_2 , і

(ii) існує r -окіл U точки x відносно Δ такий, що $U \cap f^{-1}(c)$ є зв'язною кривою, що розбиває U на дві компоненти, позначимо їх U_1 і U_2 , такі, що $U_1 \subset R_1$ і $U_2 \subset R_2$.

Не втрачаючи загальності, припустимо $[p, q] \subset U$ такий, що $[p, q] \setminus \{x\}$ складається з двох піввідкритих дуг $[p, x) \subset U_1$ і $(x, q] \subset U_2$. Отже, x є *ізолюваним* локальним екстремумом звуження $f|_{[p, q]}$, звідки існує точка $y \in [p, x) \subset R_1$ і $z \in (x, q] \subset R_2$ така, що $f(y) = f(z) \neq f(c)$. Таким чином,

$$y, z \in f^{-1}(f(y)) \subset \mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(c) = R_1 \cup R_2.$$

Згідно умови (1) Теорема 4.1.0.1 $f^{-1}(f(y))$ є зв'язною, і обидві точки y та z належать або до R_1 або до R_2 . Отримуємо суперечність, звідси x не є локальним екстремумом функції f . \square

Для $[c, d] \subset \mathbb{R}$ покладемо $D_{c,d} = f^{-1}[c, d]$. Тоді з Лема 4.1.0.2 та Теорема 1.2.0.5 слідує, що для кожного локального перерізу $[p, q]$ існує гомеоморфізм

$$\varphi : \mathbb{R} \times [f(p), f(q)] \longrightarrow f^{-1}[f(p), f(q)] = D_{f(p), f(q)}$$

такий, що $f \circ \varphi(x, y) = y$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R} \times [f(p), f(q)]$.

Це також означає, що образ $f(\mathbb{R}^2)$ є відкритою і лінійно зв'язною підмножиною \mathbb{R} , тобто відкритим інтервалом (a, b) , де a і b можуть бути нескінченними. Отже, ми можемо знайти двосторонню строго зростаючу послідовність $\{c_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ таку, що $\lim_{k \rightarrow -\infty} c_k = a$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k = b$, і для кожного $k \in \mathbb{Z}$ гомеоморфізм

$$\varphi_k : \mathbb{R} \times [c_k, c_{k+1}] \longrightarrow f^{-1}[c_k, c_{k+1}] = D_{c_k, c_{k+1}},$$

що задовольняє умову $f \circ \varphi_k(x, y) = y$.

Визначимо гомеоморфізм $\varphi : \mathbb{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ таким чином.

Покладемо

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [c_0, c_1].$$

Тепер, якщо φ визначений на $\mathbb{R} \times [c_{k-1}, c_k]$ для деякого $k \geq 1$, тоді продовжимо його до $\mathbb{R} \times [c_k, c_{k+1}]$ за допомогою формули

$$\varphi(x, y) = \varphi_k(\varphi_k^{-1} \circ \varphi(x, c_k), y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [c_k, c_{k+1}].$$

Аналогічно, продовжимо φ на $\mathbb{R} \times (a, c_0]$. Легко бачити, що φ гомеоморфізм для якого виконується умова $f \circ \varphi(x, y) = y$, $(x, y) \in \mathbb{R} \times (a, b)$. \square

4.2 Псевдогармонічні функції загального положення на площині

Нагадаємо, що функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ називається *псевдогармонічною*, якщо для кожної точки $x \in \mathbb{R}^2$ паросток f в точці x топологічно еквівалентний до паростка функції $\operatorname{Re} z^n$ в точці $z \in \mathbb{C}$, де $n \in \mathbb{N}$ залежить від x . При $n = 1$ точку x називатимемо *регулярною*, а при $n > 1$ — *сингулярною*.

Означення 4.2.0.1. Скажемо, що псевдогармонічна функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ є *функцією загального положення*, якщо на кожній множині рівня міститься не більше однієї сингулярної точки.

4.2.1 Умова \mathcal{N}

Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ псевдогармонічна функція загального положення, яка задовольняє наступним умовам, введеним в роботі [75], і які позначимо \mathcal{N} .

- а) Число сингулярних точок функції f є скінченним.
- б) Нехай для $a \in \mathbb{R}$, точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ належать різним компонентам множини рівня $f^{-1}(a)$. Тоді знайдуться відкриті околи $U_1 \ni x_1$ і $U_2 \ni x_2$, такі що для кожного $b \in \mathbb{R}$ і компоненти F_b множини рівня $f^{-1}(b)$ виконується співвідношення $F_b \cap U_1 = \emptyset$ або $F_b \cap U_2 = \emptyset$.

4.2.2 Простір Кронрода-Ріба псевдогармонічних функцій на площині

Означення 4.2.2.1. Нехай G — топологічний граф, V_0 — підмножина множини листів V_l графа G (випадок $V_0 = \emptyset$ ми не виключаємо).

Нехай також $e \subset G$ — (замкнене) ребро G , інцидентне деякому листу з V_0 . Множину $e \setminus V_0$ назовемо черешком. Простір $G_0 = G \setminus V_0$ називається топологічним графом з черешками.

Нехай $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ псевдогармонічна функція загального положення, яка задовольняє умові \mathcal{N} , $\Gamma_{K-R}(f)$ — її простір Кронрода-Ріба, а $\pi_f : X \rightarrow \Gamma_{K-R}(f)$ — відображення проєкції.

Позначимо через Σ_f і K_f множину сингулярних точок і об'єднання сингулярних компонент множин рівня f відповідно. Число $a \in f(\mathbb{R}^2)$ називається сингулярним значенням функції f , якщо $f^{-1}(a) \cap \Sigma_f \neq \emptyset$.

Теорема 4.2.2.2. [75, Теорема 1] Простір Кронрода-Ріба псевдогармонічної функції $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняє умови \mathcal{N} є графом з черешками. Множина його вершин збігається з множиною $\pi_f(K_f)$, замкнені ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ є образами замикання компонент множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, а черешки є образами замикання компонент $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, що мають зв'язну межу.

Лема 4.2.2.3. Нехай f є псевдогармонічною функцією загального положення, що задовольняє умові \mathcal{N} . Тоді її простір Кронрода-Ріба є скінченним деревом з черешками.

Справедливість даної лема буде наведена нижче, див. підрозділ 4.2.6.

4.2.3 Орієнтація ребер графа Кронрода-Ріба і відношення порядку на його вершинах, індуковані f

Нехай f є функцією загального положення, що задовольняє умову \mathcal{N} . Зауважимо, що на ребрах графу $\Gamma_{K-R}(f)$ функція f_{K-R} є строго монотонною. Дійсно, у протилежному випадку на деякому відкритому ребрі e функція f_{K-R} мала б (нестрогий) локальний екстремум. Внаслідок цього обмеження $f|_{\pi_f^{-1}(e)}$ у деякій точці x відкритої множини $\pi_f^{-1}(e)$ повинне мати локальний екстремум. Отже, f теж мала б локальний екстремум у точці x . А це неможливо, оскільки за умовою \mathcal{N} у деякому околі точки x функція f топологічно еквівалентна до $\operatorname{Re} z^n$ в околі початку координат для певного $n \in \mathbb{N}$. А точка 0 , очевидно, не є локальним екстремумом $\operatorname{Re} z^n$ ні при якому $n \in \mathbb{N}$.

Отже, на кожному ребрі графу $\Gamma_{K-R}(f)$ визначений напрямок зростання f_{K-R} і функція f індукує орієнтацію на $\Gamma_{K-R}(f)$.

На множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ можна ввести декілька різних відношень строго часткового порядку, пов'язаних з f .

Порядок $P_1(f)$.

Визначимо порядок $P_1(f)$, поклавши $v_1 < v_2$, якщо $f_{K-R}(v_1) < f_{K-R}(v_2)$, де v_1, v_2 – вершини на графі. З означення 4.2.0.1 слідує, що $f_{K-R}(v_1) \neq f_{K-R}(v_2)$ при $v_1 \neq v_2$. Тому для функцій загального положення порядок $P_1(f)$ є лінійним.

Зрозуміло, що порядок $P_1(f)$ узгоджений з орієнтацією на $\Gamma_{K-R}(f)$ у наступному сенсі. Якщо вершини v_1 та v_2 є відповідно початком і кінцем орієнтованого ребра e , то $v_1 < v_2$.

Порядок $P_2(f)$.

Частковий порядок $P_2(f)$ на множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ визначимо наступним чином. Скажемо, що вершина v_1 передує v_2 , якщо існує орієнтований шлях, для якого вершина v_1 є початком, а v_2 – кінцем.

Відмітимо, що порядок $P_2(f)$ є слабшим за $P_1(f)$, оскільки $\Gamma_{K-R}(f)$ може

містити вершини, які не можна з'єднати за допомогою орієнтованого шляху.

4.2.4 Спін у вершинах графа Кронрода-Ріба

Для того, щоб означити додаткову структуру на графах Кронрода-Ріба, нам буде потрібне поняття циклу елементів множини.

Отже, нехай A — деяка множина, A^∞ — множина всіх скінчених послідовностей елементів A . Нехай \mathfrak{h} — розбиття множини A^∞ , породжене відношенням

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle \sim \langle a_2, \dots, a_r, a_1 \rangle, \quad \langle a_1, \dots, a_r \rangle \in A^\infty.$$

Елементи фактор-множини $\hat{A} = A/\mathfrak{h}$ будемо називати *циклами* на A .

Нехай $p : A \rightarrow \hat{A}$ — проекція. Введемо позначення

$$(a_1, \dots, a_r) = p(\langle a_1, \dots, a_r \rangle), \quad \langle a_1, \dots, a_r \rangle \in A^\infty.$$

Назвемо послідовність $\langle b_1, \dots, b_r \rangle$ *представником* циклу (a_1, \dots, a_r) , якщо $p(\langle b_1, \dots, b_r \rangle) = (a_1, \dots, a_r)$.

Елементи $a_i, a_{i+1} \in A$ послідовності $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ будемо називати *сусідніми*, $i \in \{1, \dots, r-1\}$.

Назвемо *сусідніми* елементи $a_i, a_{i+1} \in A$ циклу (a_1, \dots, a_r) , $i \in \{1, \dots, r-1\}$, а також елементи a_r та a_1 .

Нехай $x \in \mathbb{R}^2$ є сингулярною точкою функції f загального положення. Зафіксуємо її оточення $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$ та гомеоморфізми $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$, $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які зберігають орієнтацію і такі, що виконуються рівності $h' \circ f = \operatorname{Re} z^n \circ h$ для деякого $n \geq 2$ та $h(x) = 0$. Нехай $V = h(U)$.

Позначимо

$$Z_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z = \frac{\pi k}{n}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Існує $\varepsilon > 0$, для якого $U_\varepsilon(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\} \subset V$. Множина $U_\varepsilon(0) \setminus Z_n$ розпадається на $2n$ областей V_1, \dots, V_{2n} . Прообраз $\hat{V}_s = h^{-1}(V_s)$ кожної з них

очевидно є зв'язною підмножиною доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$. Тому згідно з Теоремою 4.2.2.2 для кожного $s = 1, \dots, 2n$ існує ребро e_s графа $\Gamma_{K-R}(f)$, таке, що $\hat{V}_s \subset \pi^{-1}(e_s)$.

Отже, послідовності $\langle V_1, \dots, V_{2n} \rangle$ відповідає послідовність ребер $\langle e_1, \dots, e_{2n} \rangle$ графа Кронрода-Ріба, а тому і цикл ребер (e_1, \dots, e_{2n}) .

Означення 4.2.4.1. *Нехай індекси областей V_1, \dots, V_{2n} збільшуються від 1 до $2n$ при обході навколо початку координат у додатному напрямі, який визначається орієнтацією площини \mathbb{C} .*

Назвемо відповідний їм цикл спіном у вершині $v = \pi_f(x)$ графа Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ і позначимо його $\triangleleft v$.

4.2.5 Властивості спіна графа Кронрода-Ріба

Твердження 4.2.5.1. *Нехай f є псевдогармонічною функцією загального положення, що задовольняє умові \mathcal{N} . Тоді кожна сингулярна компонента множини рівня функції f є об'єднанням сингулярної точки f кратності $n - 1$, ($n > 1$ — деяке число, яке залежить від компоненти), і $2n$ дуг, які виходять з сингулярної точки і прямують до нескінченності.*

Доведення. Нехай F — сингулярна компонента зв'язності множини рівня f . З означення функції загального положення слідує, що існує єдина сингулярна точка $x_0 \in F$.

Розглянемо множину $F_0 = F \setminus \{x_0\}$. Нехай H — компонента зв'язності цієї множини.

Перевіримо, що $x_0 \in \overline{H}$. За означенням H є відкрито-замкненою підмножиною простору F_0 в індукованій з \mathbb{R}^2 топології. Нехай $x_0 \notin \overline{H}$. З одного боку, $H = \overline{H} \cap F_0 = \overline{H} \cap F$ і H замкнена в F . З іншого боку, множина F_0 відкрита в F і H відкрита в F_0 за припущенням. Тому множина H відкрита в F . Отже, H є відкрито-замкненою в F , що неможливо, оскільки за означенням F є зв'язною

множиною і H — її власна підмножина.

Отже, для кожної компоненти зв'язності H множини F_0 точка x_0 міститься в її замиканні.

Згідно Лема 1 з [75], H є або вкладеним в \mathbb{R}^2 відкритим інтервалом, або колом. Якщо H гомеоморфна колу, то H є компактом і $\overline{H} = H \not\ni x_0$, що неможливо. Отже, кожна компонента зв'язності H множини F_0 є гомеоморфним образом інтервалу.

Справедливе включення $\overline{H} \subset H \cup \{x_0\}$ згідно [75] (Зауваження 3 і Лема 1). Оскільки $x_0 \in \overline{H}$, то $\overline{H} = H \cup \{x_0\}$.

Нехай $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — вкладення, таке що $\alpha(\mathbb{R}) = H$. Розглянемо (див. [75]) множини

$$L' = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t < -\tau\})}, \quad L'' = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\alpha(\{t \in \mathbb{R} \mid t > \tau\})}.$$

Лема 3 з [75] стверджує, що кожна з цих множин або порожня, або співпадає з $\{x_0\}$.

Випадок $L' = L'' = \emptyset$ неможливий. Дійсно, з одного боку $H \cup L' \cup L'' = \overline{H}$ згідно [75]. З іншого боку ми довели, що $x_0 \in \overline{H} \setminus H$.

Припустимо, що $L' = L'' = \{x_0\}$. Тоді, як легко бачити, множина \overline{H} гомеоморфна колу. За теоремою Жордана, (див. [20]), це коло є межею відкритого диску W . Нехай $D = \overline{W}$. Оскільки D є компактом, то функція $f|_D$ набуває в деяких точках мінімальне і максимальне значення m та M , відповідно. З умов \mathcal{N} слідує, що функція f не є постійною на відкритій множині W , тому $m \neq M$ і одне з цих двох значень відрізняється від $f(x_0)$. Нехай $m \neq f(x_0)$. Оскільки $\overline{H} \subset F \subset f^{-1}(f(x_0))$, то існує точка $x \in W$, така що $f(x) = m$. Тоді, очевидно, x є локальним мінімумом функції f . А це суперечить умовам \mathcal{N} .

Отже, одна з множин L', L'' порожня, а інша співпадає з $\{x_0\}$. Внаслідок цього множина H є променем, який виходить з точки x_0 і прямує до нескінченності.

Нехай $n - 1$ — кратність особливої точки x_0 . Тоді у деякому околі U точки x_0 функція f топологічно еквівалентна до $g(z) = \operatorname{Re} z^n$ в околі нуля. Нехай $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$ та $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі гомеоморфізми, що $h(x_0) = 0$ та $h' \circ f = g \circ h$. Зменшуючи при необхідності окіл U , можна вважати, що

$$h(U) = U_a(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < a\} \quad \text{для деякого } a > 0.$$

Не обмежуючи загальності, покладемо $h(U) = U_1(0)$.

Розглянемо множину

$$F_0 \cap U = (F \cap U) \setminus \{x_0\} = h^{-1}((Z_n \cap U_1(0)) \setminus \{0\}).$$

Очевидно, вона має $2n$ компонент зв'язності.

Нехай знову H є компонентою зв'язності множини F_0 . Оскільки $x_0 \in \overline{H}$, то H перетинається принаймні з однією компонентою зв'язності множини $F_0 \cap U$. Припустимо, що H перетинається з двома різними компонентами цієї множини у точках x' та x'' , відповідно.

З вибору околу U слідує, що множина $F \cap U$ лінійно зв'язна, тому існує дуга $R_0 \subset F \cap U$ з кінцями у точках x' і x'' . Зрозуміло, що $x_0 \in R_0$.

З іншого боку, існує дуга $R_1 \subset H$, яка з'єднує точки x' і x'' . Очевидно, $x_0 \notin R_1$. Легко бачити, що разом дуги R_0 і R_1 утворюють коло $S \subset F \subset f^{-1}(f(x_0))$. Як було показано вище, у внутрішності диску, межею якого є S , має міститись локальний екстремум функції f . Але це суперечить умовам \mathcal{N} .

Зрозуміло, що кожна компонента множини $F_0 \cap U$ має міститися у деякій компоненті більшої множини F_0 . Отже $H \cap U$ — компонента зв'язності множини $F_0 \cap U$ і F_0 має рівно $2n$ компонент. \square

Наслідок 4.2.5.2. [84] *Нехай x — сингулярна точка f , F_x — сингулярна компонента множини рівня f , яка містить x , Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$. Якщо $\overline{Q} \cap F_x \neq \emptyset$, то $x \in \overline{Q}$. Нехай також H — компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. Якщо $\overline{Q} \cap H \neq \emptyset$, то $H \subset \overline{Q}$.*

Зауваження 4.2.5.3. Нехай $x \in \mathbb{R}^2$, F_x — компонента множини рівня f , яка містить x . Оскільки множина $\overline{F_x} \subset f^{-1}(f(x))$ зв'язна (див. [20]), то $\overline{F_x} = F_x$.

З умов \mathcal{N} слідує, що множина K_f є незв'язним об'єднанням скінченної кількості замкнених сингулярних компонент множин рівня f . Тому множина $K_f \setminus F_x$ замкнена і x має окіл, який не перетинається з цією множиною.

Твердження 4.2.5.4. Нехай f є псевдогармонічною функцією загального положення, що задовольняє умові \mathcal{N} . Нехай сингулярна компонента F її множини рівня містить сингулярну точку x_0 кратності $n - 1$ для деякого $n > 1$.

Тоді множині F в $\Gamma_{K-R}(f)$ відповідає вершина, якій інцидентні рівно $2n$ ребер, $n > 1$. Причому для n з цих ребер вершина є початком, для інших n ребер — кінцем.

Доведення. Нехай U — окіл точки x_0 , в якому f топологічно еквівалентна до функції $\operatorname{Re} z^n$ в деякому околі 0 . Нехай $h : U \rightarrow h(U) \subset \mathbb{C}$ і $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — відповідні гомеоморфізми.

Не обмежуючи загальності (див. Зауваження 4.2.5.3), будемо вважати, що $U \cap K_f \subset F$ і $h(U) \supset \overline{U_1(0)}$.

Нехай $D = h^{-1}(\overline{U_1(0)})$. Позначимо через V_1, \dots, V_{2n} компоненти зв'язності множини

$$U_1(0) \setminus h(F) = U_1(0) \setminus Z_n.$$

Нехай $W_i = h^{-1}(V_i)$, $i = 1, \dots, 2n$. Зрозуміло, що всі W_i зв'язні, лежать у $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ і містять x_0 у межі. Також з властивостей $\operatorname{Re} z^n$ слідує, що для половини індексів виконується співвідношення $f(W_i) \subset (-\infty, f(x_0))$, а для іншої половини $f(W_i) \subset (f(x_0), +\infty)$.

Нехай Q_i — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, для якої $W_i \subset Q_i$. З Теорема 4.2.2.2, а також з монотонності f на ребрах $\Gamma_{K-R}(f)$ слідує, що вершина $v = \pi_f(F)$ є початком ребра $e_i = \pi_f(Q_i)$, якщо $f(W_i) \subset (f(x_0), +\infty)$. Також вершина v є кінцем e_i , якщо $f(W_i) \subset (-\infty, f(x_0))$.

Наслідок 4.2.5.2 стверджує, що для кожної компоненти зв'язності Q множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з множиною F , виконується співвідношення $x_0 \in \overline{Q}$. Оскільки $U \cap (\mathbb{R}^2 \setminus K_f) \subset \bigcup_{i=1}^{2n} Q_i$, то Q співпадає з однією з множин Q_1, \dots, Q_{2n} . Отже, вершині v графа Кронрода-Ріба функції f інцидентно не більше ніж $2n$ ребер.

Для завершення доведення достатньо перевірити, що $Q_i \neq Q_j$ при $i \neq j$.

Нехай це не так і $W_i \cup W_j \subset Q_i$ при деяких $i \neq j$. Зафіксуємо $x_i \in W_i$, $x_j \in W_j$, і з'єднаємо їх у Q_i простою неперервною кривою

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow Q_i \subset \mathbb{R}^2.$$

Це можливо, тому що відкрита зв'язна підмножина Q_i площини є лінійно зв'язною. Нехай $x_i = \gamma(0)$, $x_j = \gamma(1)$. Позначимо

$$t_i = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \in W_i\}, \quad t_j = \inf\{t \in [t_i, 1] \mid \gamma(t) \in W_j\}.$$

За побудовою $\overline{W_i} \cap \overline{W_j} \subset K_f$, тому $\overline{W_i} \cap \overline{W_j} \cap Q_i = \emptyset$ і $t_i < t_j$. Позначимо $y_i = \gamma(t_i)$, $y_j = \gamma(t_j)$.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\gamma(t) \notin D$ при $t \in (t_i, t_j)$. Дійсно, якщо $\gamma(\tau) \in D$ для деякого $\tau \in (t_i, t_j)$, то знайдеться $k \in \{1, \dots, 2n\}$, таке що $\gamma(\tau) \in \overline{W_k}$. Оскільки $\gamma(\tau) \in \overline{W_k} \cap Q_i$, то з відкритості множини Q_i слідує, що $W_k \cap Q_i \neq \emptyset$, внаслідок чого $W_k \subset Q_i$. За побудовою $k \notin \{i, j\}$ і замість пари областей $W_i \cup W_j \subset Q_i$ можемо розглянути $W_i \cup W_k \subset Q_i$.

Нехай

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t_i + (t_j - t_i)t), t \in [0, 1].$$

За побудовою $\tilde{\gamma}$ — проста неперервна крива, $\tilde{\gamma}(0) = y_i$, $\tilde{\gamma}(1) = y_j$ і $\tilde{\gamma}(t) \notin D$ при всіх $t \in (0, 1)$.

Нехай γ_i і γ_j — прямолінійні відрізки, що з'єднують в $U_1(0)$ точку 0 з $h(y_i)$ та $h(y_j)$, відповідно. Позначимо $\tilde{\gamma}_i = h^{-1} \circ \gamma_i$, $\tilde{\gamma}_j = h^{-1} \circ \gamma_j$.

Проходячи послідовно криві $\tilde{\gamma}_i$, $\tilde{\gamma}$ та $\tilde{\gamma}_j$, отримаємо просту замкнену криву μ , яка проходить через x_0 і лежить у Q_i за виключенням цієї точки. Нехай E — відкритий диск, межею якого є μ .

Позначимо

$$S = \text{Fr}(U_1(0)) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}, \quad \tilde{S} = h^{-1}(S) = \text{Fr } D.$$

Коло \tilde{S} розбивається точками y_i та y_j на дві дуги S' та S'' . Оскільки

$$x_0 \in \mu \cap \text{Int}D \neq \emptyset \quad \text{і} \quad \tilde{\gamma}(1/2) \in \mu \cap (\mathbb{R}^2 \setminus D) \neq \emptyset$$

за побудовою, то одна з цих дуг лежить в E , інша не перетинає E .

Нехай $S' \subset E$. Кінцями цієї дуги є точки $y_i \in \overline{W}_i \cap Q_i$ та $y_j \in \overline{W}_j \cap Q_j$. Точки $h(y_i)$ та $h(y_j)$ містяться в різних секторах множини $\overline{U_1(0)} \setminus Z_n$. З виду функції $\text{Re } z^n$ в околі 0 слідує, що дуга $h(S')$ містить точки множини $h(F) = h(U) \cap Z_n$. Відповідно, $S' \cap F \neq \emptyset$. Наприклад $F \cap \text{Fr } W_i \cap S' \neq \emptyset$ і $F \cap \text{Fr } W_j \cap S' \neq \emptyset$. Тому існує $x' \in F \cap E$. Очевидно, $x' \neq x_0$.

З Твердження 4.2.5.1 слідує, що існує промінь $\beta : [0, +\infty) \rightarrow F \subset \mathbb{R}^2$, який виходить з точки $x_0 = \beta(0)$, проходить через точку x' при деякому $t' > 0$ і прямує на нескінченність. За побудовою μ перетинається з F в єдиній точці x_0 , тому $\beta(t) \in E$ для кожного $t > 0$, що неможливо, оскільки множина \overline{E} компактна. Внаслідок отриманого протиріччя при $i \neq j$ виконується нерівність $Q_i \neq Q_j$. \square

Наслідок 4.2.5.5. [84] *Нехай v — вершина $\Gamma_{K-R}(f)$, $\triangleleft v = (e_1, \dots, e_{2n})$ — спін у вершині v . Тоді всі елементи циклу (e_1, \dots, e_{2n}) різні і у цьому циклі приймають участь усі ребра, інцидентні v у $\Gamma_{K-R}(f)$.*

В кожній парі сусідніх ребер циклу $\triangleleft v$ ребра мають різні орієнтації відносно v (для одного ребра v є початком, для іншого — кінцем).

Наслідок 4.2.5.6. [84] *Нехай x — сингулярна точка f , F_x — сингулярна компонента множини рівня f , $x \in F_x$.*

Нехай Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, яка межує з F_x . Тоді множина $\overline{Q} \cap F_x$ є об'єднанням сингулярної точки і двох променів, що виходять із цієї точки і прямують на нескінченність.

Нехай H — компонента зв'язності множини $F_x \setminus \{x\}$. Тоді є рівно дві компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, спільна межа яких містить H . Замикання будь якої іншої компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ не перетинається з H .

Припустимо, що H міститься у спільній межі компонент Q' і Q'' множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$. Нехай $e' = \pi_f(Q')$, $e'' = \pi_f(Q'')$ — відповідні їм ребра $\Gamma_{K-R}(f)$, $v = \pi_f(F_x)$ — вершина, що відповідає компоненті F_x множини рівня f , $\triangleleft v$ — спін у вершині v . Тоді ребра e' і e'' є сусідніми елементами циклу $\triangleleft v$.

Якщо ребра e' і e'' є сусідніми елементами циклу $\triangleleft v$, то у спільній межі відповідних їм областей Q' і Q'' міститься компонента множини $F_x \setminus \{x\}$, причому така компонента єдина.

4.2.6 Доведення Лема 4.2.6.1

Лема 4.2.6.1. *Нехай f є псевдогармонічною функцією загального положення, що задовольняє умові \mathcal{N} . Тоді її простір Кронрода-Ріба є деревом з черешками.*

Доведемо спочатку одне допоміжне твердження.

Твердження 4.2.6.2. *Нехай G є локально скінченним топологічним графом, V_0 — підмножина множини V_l листків G . Нехай $H = G \setminus V_0$ — граф з черешками.*

Якщо H не містить циклів, то G є деревом.

Доведення. Нехай існує цикл

$$C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = v_0)$$

в G . Тут v_i , $i = 0, \dots, n$, — вершини, e_j — ребра, v_{j-1} та v_j інцидентні ребру e_j , $j = 1, \dots, n$.

Тоді $v_i \notin V_l$ для кожного i . Отже, $v_i \notin V_0$ і $v_i \in H$, $i = 0, \dots, n$. Внаслідок цього цикл C міститься в H .

З наведених аргументів слідує, що якщо в H немає циклів, то й G не містить циклів. □

Доведення Лему 4.2.6.1. Припустимо, що в $\Gamma_{K-R}(f)$ існує простий (без самоперетинів) цикл

$$C = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = v_0).$$

Тут v_i — вершини, e_j — відкриті ребра простору $\Gamma_{K-R}(f)$, такі що $v_{j-1}, v_j \in \overline{e_j}$, $j = 1, \dots, n$.

Нагадаємо, що K_f — об'єднання сингулярних компонентів рівня функції f . Нехай $F_i = \pi_f^{-1}(v_i)$ — відповідні сингулярні компоненти рівнів f , $Q_j = \pi_f^{-1}(e_j)$ — компоненти зв'язності доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$.

З Теорему 4.2.2.2, Твердження 4.2.5.1 і Наслідку 4.2.5.5 слідує, що кожна компонента множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$ містить прообраз рівно одного відкритого ребра графа $\Gamma_{K-R}(f)$, яке інцидентне вершині v_0 .

Тому множини Q_1 і Q_n належать до різних компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$.

Розглянемо множину

$$C_0 = \bigcup_{i=1}^{n-1} v_i \cup \bigcup_{j=1}^n e_j$$

і її прообраз

$$\pi_f^{-1}(C_0) = \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i \cup \bigcup_{j=1}^n Q_j.$$

Очевидно, множина C_0 зв'язна. Перевіримо, що множина $\pi_f^{-1}(C_0)$ теж зв'язна.

Нехай $s \in \{1, \dots, n\}$. З Теорему 4.2.2.2 слідує, що існують точки $x_s \in \overline{Q_s} \cap F_s$ і $y_s \in \overline{Q_{s+1}} \cap F_s$. Множини Q_s, F_s, Q_{s+1} зв'язні, тому зв'язні також множини $Q_s \cup \{x_s\} \subset \overline{Q_s}$, $Q_{s+1} \cup \{y_s\} \subset \overline{Q_{s+1}}$. Отже, зв'язна і множина

$$W_s = Q_s \cup F_s \cup Q_{s+1} = (Q_s \cup \{x_s\}) \cup F_s \cup (Q_{s+1} \cup \{y_s\}).$$

Множина $\pi_f^{-1}(C_0) = \bigcup_{s=1}^{n-1} W_s$ теж зв'язна внаслідок того, що $W_s \cap W_{s+1} \supset Q_{s+1} \neq \emptyset$, $s = 1, \dots, n-2$.

Помітимо, що $\pi_f^{-1}(C_0) \cap F_0 = \emptyset$, оскільки $W_s \cap F_0 = \emptyset$ для кожного $s = 1, \dots, n-1$. Але $Q_1 \cup Q_n \subset \pi_f^{-1}(C_0)$ і зв'язна множина $\pi_f^{-1}(C_0)$ має перетинатись

принаймні з двома різними компонентами множини $\mathbb{R}^2 \setminus F_0$.

Отримане протиріччя доводить, що $\Gamma_{K-R}(f)$ не містить циклів. Отже, $\Gamma_{K-R}(f)$ є деревом з черешками внаслідок Твердження 4.2.6.2. \square

4.3 Навантажені і слабо навантажені графи Кронрода-Ріба

Означення 4.3.0.1. *Слабо навантаженим графом Кронрода-Ріба називається орієнтований граф $\Gamma_{K-R}(f)$, для якого в кожній вершині визначений спін.*

Виявляється, що орієнтації ребер і спіна у вершинах $\Gamma_{K-R}(f)$ не досить, щоб розрізнити функції загального положення, оскільки частковий порядок $P_2(f)$, що породжений орієнтацією ребер $\Gamma_{K-R}(f)$, не є лінійним, тобто, не кожну пару вершин можна порівняти відносно цього порядку.

Лінійний порядок $P_1(f)$ є топологічним інваріантом, але виявляється, що слабо навантажений граф Кронрода-Ріба з лінійним порядком $P_1(f)$ на множині вершин все ще не є повним інваріантом. Потрібно додатково відстежувати поведінку f «на нескінченності».

Граф з черешками не є справжнім графом у комбінаторному сенсі. Він отриманий зі «справжнього графа» шляхом вилучення деякої підмножини вершин порядку 1.

Зрозуміло, що маючи граф з черешками і його розбиття на вершини і ребра, можна однозначно відновити на ньому комбінаторну структуру графа, «додавши назад» вилучені вершини порядку 1. Будемо називати такі вершини *віртуальними*. Множину віртуальних вершин позначимо V_{virt} .

Зауважимо, що на $\Gamma_{K-R}(f)$ визначена функція f_{K-R} , така що $f_{K-R} \circ \pi_f = f$. Для кожного ребра e визначені дві величини

$$m(e) = \inf_{x \in e} f_{K-R}(x) \quad \text{і} \quad M(e) = \sup_{x \in e} f_{K-R}(x).$$

Кожна з цих величин може бути як скінченою, так і $\pm\infty$.

Нехай V — множина вершин $\Gamma_{K-R}(f)$. На множині $V \cup V_{virt}$ означимо функцію f_{lim} таким чином. Якщо v є початком ребра e , нехай $f_{lim}(v) = m(e)$; якщо v є кінцем e , нехай $f_{lim}(v) = M(e)$.

Оскільки f_{K-R} строго монотонна на ребрах, то $f_{lim} = f_{K-R}$ на множині V «справжніх» вершин $\Gamma_{K-R}(f)$. Також через те, що всі віртуальні вершини мають порядок 1, то f_{lim} коректно визначена також на V_{virt} .

Розглянемо не всю множину V_{virt} , а лише ті віртуальні вершини, на яких f_{lim} набуває скінченні значення. Позначимо

$$V_{fin} = \{v \in V_{virt} \mid f_{lim}(v) \neq \pm\infty\}.$$

Множину $V_{ext} = V \cup V_{fin}$ назвемо *розширеною множиною вершин графа* $\Gamma_{K-R}(f)$.

Функція f_{lim} породжує на V_{ext} відношення часткового порядку $P_{ext}(f)$, яке визначається наступним чином. Нехай $v_1, v_2 \in V_{ext}$. Якщо $f_{lim}(v_1) < f_{lim}(v_2)$, то $v_1 < v_2$. Якщо $f_{lim}(v_1) = f_{lim}(v_2)$, то v_1 і v_2 непорівнянні. Назвемо це відношення *розширеним відношенням порядку на* V_{ext} .

Зрозуміло, що $P_{ext}(f)$ співпадає з $P_1(f)$ на V . Також очевидно, що $P_{ext}(f)$ узгоджене з орієнтацією ребер $\Gamma_{K-R}(f)$ у тому сенсі, що кінець ребра завжди більше його початку.

Твердження 4.3.0.2. *Відношення «бути непорівнянними відносно $P_{ext}(f)$ » є транзитивним на множині V_{ext} .*

Доведення. Нехай v_1 і v_2 , а також v_2 і v_3 непорівнянні відносно $P_{ext}(f)$. Тоді $f_{lim}(v_1) = f_{lim}(v_2)$ і $f_{lim}(v_2) = f_{lim}(v_3)$. Внаслідок цього v_1 і v_3 непорівнянні. \square

Означення 4.3.0.3. *Нехай на множині A задане відношення ρ часткового порядку. Якщо відношення «бути непорівнянними відносно ρ » є транзитивним на A , то відношення ρ називається функцієподібним.*

Отже, відношення $P_{ext}(f)$ функцієподібне.

Означення 4.3.0.4. *Навантаженим графом Кронрода-Ріба називається слабо навантажений граф $\Gamma_{K-R}(f)$ разом із підмножиною V_{fin} множини віртуальних вершин і розширеним відношенням порядку $P_{ext}(f)$ на розширеній множині вершин $V_{ext} = V \cup V_{fin}$.*

Нехай $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ — орієнтовані графи з черешками. Розглянемо орієнтовані комбінаторні графи G_f і G_g , які їм відповідають. Множиною вершин G_f (G_g) є об'єднання звичайних і віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ ($\Gamma_{K-R}(g)$), елементами множини ребер G_f (G_g) є ребра $\Gamma_{K-R}(f)$ ($\Gamma_{K-R}(g)$). Інцидентність вершин до ребер і орієнтація ребер переноситься з відповідного графа з черешками.

Означення 4.3.0.5. *Комбінаторним ізоморфізмом орієнтованих графів з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ називається ізоморфізм орієнтованих графів G_f і G_g , який відображає множини віртуальних вершин графа $\Gamma_{K-R}(f)$ на множини віртуальних вершин графа $\Gamma_{K-R}(g)$.*

Означення 4.3.0.6. *(Слабо) навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентні, якщо існує комбінаторний ізоморфізм ψ орієнтованих графів з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$, який зберігає (слабке) навантаження.*

Тобто ізоморфізм ψ кожному спіну на $\Gamma_{K-R}(f)$ ставить у відповідність спін на $\Gamma_{K-R}(g)$:

$$\langle v = (e_1, e_2, \dots, e_n) \mapsto \langle \psi(v) = (\psi(e_1), \psi(e_2), \dots, \psi(e_n)) .$$

Також у випадку, коли розглядаються навантажені графи Кронрода-Ріба, ψ індукує ізоморфізм розширених порядків на розширених множинах вершин.

4.4 Топологічна еквівалентність функцій загального положення, що задовольняють умовам \mathcal{N}

4.4.1 Компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$

Лема 4.4.1.1. *Нехай f — псевдогармонічна функція загального положення, що відповідає умовам \mathcal{N} , Q — компонента зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$. Тоді знайдеться гомеоморфізм $\phi : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times f(\overline{Q}) \subset \mathbb{R}^2$, такий що $f = \text{pr}_2 \circ \phi$ (тут $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — проекція на другу координату).*

Доведення. З умов \mathcal{N} , а також з [75] (Твердження 6 і Наслідок 4) слідує, що

$$f(Q) = \text{Int} f(\overline{Q}), \quad f(\text{Fr} Q) = f(\overline{Q}) \cap \text{Fr} f(Q). \quad (4.1)$$

Множина \overline{Q} , а разом з нею і множина $f(\overline{Q})$ зв'язні. Тому існують $a, b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ такі, що $f(Q) = (a, b)$, $f(\text{Fr} Q) \subset \{a, b\} \cap \mathbb{R}$.

Якщо $a \in f(\text{Fr} Q)$, то $|a| < \infty$ і згідно з Наслідком 4 з [75], існує сингулярна компонента F_a множини рівня $f^{-1}(a)$, така що $f^{-1}(a) \cap \overline{Q} \subset F_a$.

З Наслідку 4.2.5.6 слідує, що $H_a = \overline{Q} \cap f^{-1}(a)$ є об'єднанням сингулярної точки і двох променів, що виходять з цієї точки і прямують на нескінченність. З цього і з теореми Жордана про криву легко слідує, що множина H_a гомеоморфна \mathbb{R} і розбиває площину на дві компоненти зв'язності, замикання кожної з яких гомеоморфне замкненій півплощині. Зокрема, H_a є спільною межею цих двох компонент.

Аналогічно, якщо $b \in f(\text{Fr} Q)$, то $|b| < \infty$ і існує сингулярна компонента F_b рівня $f^{-1}(b)$, яка містить множину $H_b = f^{-1}(b) \cap \overline{Q}$. Множина H_b також гомеоморфна \mathbb{R} і розбиває \mathbb{R}^2 на дві півплощини, для яких H_b є спільною межею.

Таким чином, маємо три можливості.

1) $f(\text{Fr} Q) = \emptyset$. Тоді $\text{Fr} Q = \emptyset$ і Q є відкрито-замкненою підмножиною \mathbb{R}^2 . Тому $Q = \mathbb{R}^2$ і f не має сингулярних точок в \mathbb{R}^2 . Наслідок 3 з [75] стверджує,

що для кожного $x \in Q$ множина $f^{-1}(f(x)) \cap Q$ зв'язна. Внаслідок цього можемо застосувати Теорему 4.1.0.1, що й доводить лему у даному випадку.

2) Множина $f(\text{Fr } Q)$ непорожня і зв'язна. Тоді або $\text{Fr } Q = H_a$, або $\text{Fr } Q = H_b$.

Нехай $\text{Fr } Q = H_a$. У цьому випадку Q є одною з двох компонент зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus H_a$. Позначимо іншу компоненту Q_a , а через $x_0 \in H_a \subset F_a$ сингулярну точку функції f .

Зафіксуємо гомеоморфізм $\chi : \overline{Q_a} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, a]$ і розглянемо неперервну функцію $f_a = \text{pr}_2 \circ \chi : \overline{Q_a} \rightarrow \mathbb{R}$. За побудовою $f(x) = f_a(x)$ на множині $\overline{Q} \cap \overline{Q_a}$.

Означимо $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ за такою формулою

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q}, \\ f_a(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q_a}. \end{cases}$$

Ця функція неперервна на кожній із замкнених множин \overline{Q} і $\overline{Q_a}$, які утворюють скінченне покриття \mathbb{R}^2 . Тому g неперервна в \mathbb{R}^2 (див. [79]).

Зрозуміло, що для кожного $x \in \mathbb{R}^2 \setminus H_a$ у деякому околі точки x функція g топологічно еквівалентна до координатної проекції pr_2 .

Також для кожного $x \in H_a$ у деякому околі точки x у просторі $\overline{Q_a}$ функція f_a орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі точки 0 в $\mathbb{R} \times (-\infty, 0]$.

З першої умови \mathcal{N} слідує, що для кожного $x \in H_a \setminus \{x_0\}$ функція f у деякому околі точки x орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі 0 у \mathbb{R}^2 . Оскільки за побудовою $f(y) > f(x)$ для кожного $y \in Q$, то функція $f|_{\overline{Q}}$ у околі x орієнтовано топологічно еквівалентна до pr_2 у околі 0 у просторі $[0, +\infty)$.

Внаслідок цього для кожного $x \in H_a \setminus \{x_0\}$ функція g топологічно еквівалентна до pr_2 .

Існує окіл U_0 точки x_0 , в якому f топологічно еквівалентна до $g_n = \text{Re } z^n$ в околі 0 . Нехай $h : U_0 \rightarrow h(U_0) \subset \mathbb{C}$ і $h' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — відповідна пара гомеоморфізмів, для яких $g_n \circ h = h' \circ f$.

З Тверджень 4.2.5.1 і 4.2.5.4 слідує, що образ $h(U_0 \cap \overline{Q})$ співпадає з перетином

$h(U_0)$ і замикання одного з секторів V , що є компонентою зв'язності множини $\mathbb{C} \setminus Z_n = \mathbb{C} \setminus g_n^{-1}(0)$. Тому на множині $h(U_0 \cap \overline{Q})$ означене неперервне відображення $\hat{h}(z) = \sqrt[n]{z}$, яке відображає V на півплощину. Нехай іще $\hat{h}'(t) = \text{Sign } t \cdot \sqrt[n]{|t|}$.

Легко бачити, що пара відображень $\hat{h} \circ h$ і $\hat{h}' \circ h'$ реалізує орієнтовану топологічну еквівалентність функції $f|_{\overline{Q}}$ в околі $U_0 \cap \overline{Q}$ точки x_0 до функції pr_2 у деякому околі 0 в просторі $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$. Внаслідок цього в околі точки x_0 функція f також топологічно еквівалентна до pr_2 .

За побудовою $g^{-1}(t) = f^{-1}(t) \cap Q$ при $t \in (a, b)$. Тому множина $g^{-1}(t)$ зв'язна при $t > a$ (див. [75], Наслідок 3). Аналогічно, $g^{-1}(t) = \chi^{-1}(\mathbb{R} \times \{t\})$ при $t \leq a$, тому множина $g^{-1}(t)$ зв'язна також при $t \leq a$.

Отже, ми можемо застосувати Теорему 4.1.0.1 до функції g .

Отримаємо гомеоморфізм $\phi_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, b)$, такий що $g = \text{pr}_2 \circ \phi_0$. Тоді обмеження $\phi_1 = \phi_0|_{\overline{Q}} : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, b)$ є вкладенням і $\phi_1(\overline{Q}) = [a, b)$. Тому ϕ_1 індукує гомеоморфізм $\phi : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b)$, $\phi(x) = \phi_1(x)$, $x \in \overline{Q}$, який відповідає вимогам Лема.

3) $f(\text{Fr } Q) = \{a, b\}$. Тоді $\text{Fr } Q = H_a \cup H_b$, множини $H_a \subset F_a$ і $H_b \subset F_b$ гомеоморфні \mathbb{R} і кожна з них розбиває \mathbb{R}^2 на дві півплощини. Позначимо через Q_a і Q_b ті компоненти зв'язності множин $\mathbb{R}^2 \setminus H_a$ і $\mathbb{R}^2 \setminus H_b$ відповідно, які не перетинаються з Q . Оскільки $H_a \subset f^{-1}(a)$, $H_b \subset f^{-1}(b)$, то $H_a \cap H_b = \emptyset$ і $\mathbb{R}^2 = \overline{Q_a} \cup \overline{Q} \cup \overline{Q_b}$, причому $\overline{Q_a} \cap \overline{Q} = H_a$, $\overline{Q_b} \cap \overline{Q} = H_b$.

Зафіксуємо гомеоморфізми $\chi_a : \overline{Q_a} \rightarrow \mathbb{R} \times (-\infty, a]$ та $\chi_b : \overline{Q_b} \rightarrow [b, +\infty)$. Розглянемо неперервні функції $f_a = \text{pr}_2 \circ \chi_a : \overline{Q_a} \rightarrow \mathbb{R}$ і $f_b = \text{pr}_2 \circ \chi_b : \overline{Q_b} \rightarrow \mathbb{R}$. Очевидно,

$$f_a|_{H_a} = f|_{H_a} \quad \text{і} \quad f_b|_{H_b} = f|_{H_b},$$

тому коректно означена функція $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f_a(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q_a}, \\ f(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q}, \\ f_b(x), & \text{якщо } x \in \overline{Q_b}. \end{cases}$$

Оскільки замкнені множини $\overline{Q_a}$, \overline{Q} і $\overline{Q_b}$ утворюють скінчене замкнене покриття \mathbb{R}^2 і на кожній з них g неперервна, то g неперервна на \mathbb{R}^2 .

Міркування, аналогічні до наведених у попередньому випадку, доводять наступне. По перше, у деякому околі кожної точки площини функція g топологічно еквівалентна до координатної проєкції. По друге, всі множини рівня g зв'язні.

Отже, можемо застосувати Теорему 4.1.0.1 до g .

Як і раніше, отримаємо гомеоморфізм $\phi_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, такий що $g = \text{pr}_2 \circ \phi_0$. Тоді обмеження $\phi_1 = \phi_0|_{\overline{Q}} : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R}^2$ індукує гомеоморфізм

$$\phi : \overline{Q} \rightarrow [a, b] = \phi_1(\overline{Q}),$$

який відповідає вимогам Лема. □

Зауваження 4.4.1.2. *За рахунок додаткової підкрутки за допомогою відображення $\mathcal{I} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{I}(x, y) = (-x, y)$, завжди можна досягти того, щоб гомеоморфізм ϕ з Лема 4.4.1.1 зберігав орієнтацію.*

4.4.2 Гомеоморфізм Φ

Нехай $a < b$ і $c < d$ — деякі дійсні числа, $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $\chi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ — неперервні відображення. Нехай $\hat{\chi} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$,

$$\hat{\chi}(t) = \frac{\chi(t) - c}{d - c}, \quad t \in [a, b],$$

є композицією χ і лінійного відображення відрізка $[c, d]$ на $[0, 1]$.

Розглянемо відображення $\Phi : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d]$,

$$\Phi(x, y) = (\alpha(x)(1 - \hat{\chi}(y)) + \beta(x)\hat{\chi}(y), \chi(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b]. \quad (4.2)$$

З неперервності α , β і χ слідує, що Φ неперервне.

Лема 4.4.2.1. *Нехай відображення α , β і χ є сюр'єктивними і строго зростають. Тоді Φ є гомеоморфізмом, зберігає орієнтацію і відображає горизонтальні прямі на горизонтальні прямі.*

Доведення. Спочатку дослідимо, як Φ відображає вертикальні відрізки. Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $\hat{\chi}$ відображає $[a, b]$ на $[0, 1]$, то

$$\begin{aligned} \Phi(\{x\} \times [a, b]) &= \bigcup_{y \in [a, b]} (\alpha(x)(1 - \hat{\chi}(y)) + \beta(x)\hat{\chi}(y), (d - c)\hat{\chi}(y) + c) = \\ &= \bigcup_{\tau \in [0, 1]} (\alpha(x)(1 - \tau) + \beta(x)\tau, (d - c)\tau + c). \end{aligned}$$

Відмітимо, що $\Phi(\{x\} \times [a, b])$ — відрізок з кінцями у точках $(\alpha(x), c)$ і $(\beta(x), d)$.

Дослідимо, як діє Φ на горизонтальних прямих. Зафіксуємо $y \in [a, b]$. Зрозуміло, що $\Phi(\mathbb{R} \times \{y\}) \subset \mathbb{R} \times \chi(y)$. Оскільки обидва коефіцієнти $\hat{\chi}(y)$ і $(1 - \hat{\chi}(y))$ невід'ємні, то лінійна комбінація

$$\Phi_y(x) = \alpha(x)(1 - \hat{\chi}(y)) + \beta(x)\hat{\chi}(y)$$

функцій α і β , які зростають, сама буде неспадною. Зважаючи на те, що принаймні один з коефіцієнтів ненульовий, отримуємо, що функція Φ_y є строго зростаючою. За умовами леми

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \beta(x) = \pm\infty.$$

Внаслідок цього подібні співвідношення виконуються і для функції Φ_y .

Отже, Φ_y бієктивно відображає \mathbb{R} на \mathbb{R} , а Φ — бієктивно відображає $\mathbb{R} \times \{y\}$ на $\mathbb{R} \times \{\chi(y)\}$.

З бієктивності χ слідує, що Φ є бієктивним відображенням.

Зі сказаного вище випливає, що Φ відображає довільний прямокутник R з двома горизонтальними сторонами на трапецію $T = \Phi(R)$, паралельні сторони якої горизонтальні. Причому $\Phi(\text{Int}R) = \text{Int}T$ і $\Phi(\text{Fr}R) = \text{Fr}T$. Легка безпосередня перевірка показує, що додатній напрямок обходу Жорданової кривої $\text{Fr}R$ індукує додатній напрямок на $\text{Fr}T$.

Отже відображення Φ зберігає орієнтацію. Крім того, Φ є відкритим відображенням, оскільки прямокутники з двома горизонтальними сторонами породжують базу топології на площині. А неперервне бієктивне відкрите відображення є гомеоморфізмом. \square

4.4.3 Топологічна еквівалентність функцій загального положення, що задовольняють умовам \mathcal{N}

Теорема 4.4.3.1. *Нехай $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — псевдогармонічні функції загального положення, що задовольняють умовам \mathcal{N} .*

f і g є орієнтовано пошарово еквівалентними тоді і тільки тоді, коли слабо навантажений граф Кронрода-Ріба функції f еквівалентний слабо навантаженому графу однієї з функцій g або $-g$.

f і g є орієнтовано топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли їх навантажені графи Кронрода-Ріба є еквівалентними.

Доведення. Необхідність. Нехай існує гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, який відображає компоненти множин рівня f на компоненти множин рівня g . Відомо, що образ зв'язної множини під дією неперервного відображення зв'язний. Внаслідок того, що h і h^{-1} бієктивні та неперервні, образами різних компонент є різні компоненти.

Отже, коректно означене бієктивне неперервне фактор-відображення просторів Кронрода-Ріба $\psi : \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \Gamma_{K-R}(g)$. Зрозуміло, що гомеоморфізм h^{-1} породжує фактор-відображення, обернене до ψ . Тому ψ є гомеоморфізмом.

Нехай $x \in \mathbb{R}^2$, F_x — компонента множини рівня функції f , яка містить x . З умов \mathcal{N} слідує, що порядок $\text{ord}_x(F_x)$ топологічного простору F_x у точці x більше 2 тоді й тільки тоді, коли x є сингулярною точкою f (див. [20, С. 274]). Внаслідок цього множини Σ_g і K_g сингулярних точок і сингулярних компонент зв'язності множин рівня g є образами відповідних множин Σ_f і K_f , які відносяться до функції f .

Отже, що ψ відображає множини вершин графа з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ на множини вершин $\Gamma_{K-R}(g)$.

Зрозуміло, що h відображає компоненти зв'язності множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ на компоненти множини $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$. Тому з Теорема 4.2.2.2 слідує, що ψ є ізоморфізмом графів з черешками.

Нехай h зберігає орієнтацію на площині. За умовами Теорема f і g є функціями загального положення, тому кожна їх сингулярна компонента лінії рівня містить рівно одну сингулярну точку. Отже множини Σ_f і Σ_g знаходяться у бієктивній відповідності з множинами вершин графів з черешками $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$.

Оскільки h зберігає порядок обходу навколо точок площини, то ψ відображає спіни у кожній вершині $\Gamma_{K-R}(f)$ на спіни в образі цієї вершини, а отже ψ є еквівалентність графів зі спінами.

Застосуємо орієнтацію ребер. Нехай $\Gamma_{K-R}(g)$ — граф з черешками функції g , у кожній вершині якого задано спіни. Нехай e — деяке ребро цього графа. Тоді орієнтація всіх ребер $\Gamma_{K-R}(g)$, що породжена напрямком зростання функції g_{K-R} , однозначно відновлюється по орієнтації ребра e . Перевіримо це.

Якщо ребро e інцидентне деякій вершині v , ми можемо скористатися Наслідком 4.2.5.5 і маючи спіни $\langle v$ відновити орієнтацію всіх ребер, що інцидентні v .

Нехай e' — інше ребро графа $\Gamma_{K-R}(g)$. Зафіксуємо шлях

$$P(e, e') = (e = e_1, \dots, e_n = e'),$$

який з'єднує e і e' . Нехай шлях $P(e, e')$ послідовно проходить через вершини v_1, \dots, v_{n-1} (v_i є спільним кінцем ребер e_i та e_{i+1}). За допомогою спінів $\langle v_1, \dots, \langle v_{n-1}$ ми можемо послідовно відновити орієнтації ребер $e_2, \dots, e_n = e'$. Згідно Лема 4.2.6.1, $\Gamma_{K-R}(g)$ є деревом з черешками, тому шлях $P(e, e')$, який з'єднує e і e' визначений однозначно. Отже, орієнтація ребра e' залежить тільки від орієнтації ребра e .

Очевидно, функція $-g$ відповідає умовам \mathcal{N} і є функцією загального положення. Слабо навантажені графи Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(g)$ і $\Gamma_{K-R}(-g)$ ізоморфні як графи з черешками, мають однакові спіни у відповідних вершинах і відрізняються тільки орієнтацією ребер. Оскільки ψ є еквівалентністю графів зі спінами, то це відображення індукує еквівалентність слабо навантаженого графа Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ до $\Gamma_{K-R}(g)$, або $\Gamma_{K-R}(-g)$.

Це доводить необхідність твердження даної теореми для орієнтовано пошарово еквівалентних функцій f і g .

Нехай функції f та g орієнтовано топологічно еквівалентні, тобто існують гомеоморфізми $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ та $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що зберігають орієнтацію і такі, що $k \circ f = g \circ h$. Тоді гомеоморфізм $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ відображає множини рівня функції f на множини рівня g . Зрозуміло, що будучи бієктивним, h відображає компоненти множин рівня f на компоненти множин рівня g . Отже f і g орієнтовано пошарово еквівалентні, внаслідок чого слабо навантажений граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ еквівалентний до $\Gamma_{K-R}(g)$, або $\Gamma_{K-R}(-g)$.

Нехай як і вище $\psi : \Gamma_{K-R}(f) \rightarrow \Gamma_{K-R}(g)$ є фактор-відображенням гомеоморфізму h відносно проєкцій π_f і π_g . Тоді виконується рівність

$$k \circ f_{K-R} = g_{K-R} \circ \psi. \quad (4.3)$$

Враховуючи що функція k монотонно зростає легко бачити, що ψ зберігає напрямок зростання індукованої функції на ребрах графа Кронрода-Ріба. Отже, слабо навантажений граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ еквівалентний до $\Gamma_{K-R}(g)$.

Зрозуміло, що ψ індукує бієктивне відображення множини $V_{virt}(f)$ віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину $V_{virt}(g)$ віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(g)$. Щоб не нагромаджувати позначень, ми його теж будемо позначати ψ .

Нехай e — ребро $\Gamma_{K-R}(f)$, $\tilde{e} = \psi(e)$ — відповідне йому ребро $\Gamma_{K-R}(g)$. Нехай як і раніше

$$m(e) = \inf_{x \in e} f_{K-R}(x), \quad M(e) = \sup_{x \in e} f_{K-R}(x),$$

$$m(\tilde{e}) = \inf_{x \in \tilde{e}} g_{K-R}(x), \quad M(\tilde{e}) = \sup_{x \in \tilde{e}} g_{K-R}(x).$$

Функція k монотонно зростає, тому

$$m(\tilde{e}) = k \circ m(e) \quad \text{і} \quad M(\tilde{e}) = k \circ M(e).$$

Отже на множині вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ (включаючи віртуальні) виконується рівність $k \circ f_{lim} = g_{lim} \circ \psi$.

Враховуючи те, що $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є гомеоморфізмом, маємо $\psi(V_{fin}(f)) = V_{fin}(g)$. Отже $\psi(V_{ext}(f)) = V_{ext}(g)$ і ψ індукує ізоморфізм розширених відношень порядку на розширених множинах вершин.

Це доводить необхідність твердження даної теореми для орієнтовано топологічно еквівалентних функцій f і g .

Достатність. Розглянемо дві функції $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ та $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Будемо вважати, що для слабо навантажених графів Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$, $\Gamma_{K-R}(g)$ цих функцій заданий комбінаторний ізоморфізм ψ , що зберігає спіни.

Нехай K_f і K_g - множини сингулярних компонент зв'язності рівнів функцій f та g відповідно.

Візьмемо вершину $v \in \Gamma_{K-R}(f)$ і відповідну вершину $w = \psi(v) \in \Gamma_{K-R}(g)$. Нехай $F_v = \pi_f^{-1}(v)$ і $\widetilde{F}_w = \pi_g^{-1}(w)$ — сингулярні компоненти множин рівня f і g , які відповідають вершинам v і w .

Побудуємо гомеоморфізм $h_v^0 : F_v \rightarrow \widetilde{F}_w$, такий, що для будь-якої компоненти доповнення $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus K_f$, якій відповідає ребро e графа $\Gamma_{K-R}(f)$, виконується

рівність

$$h_v^0(\text{Fr } U \cap F_v) = \text{Fr } \widetilde{U} \cap \widetilde{F}_w, \quad (4.4)$$

де \widetilde{U} — компонента доповнення $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$, якій відповідає ребро $\psi(e)$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$.

Оскільки f є функцією загального положення, то множина F_v містить єдину сингулярну точку x_v функції f . Аналогічно, \widetilde{F}_w містить єдину сингулярну точку \widetilde{x}_w функції g . З твердження 4.2.5.4 слідує, що кратності x_v і \widetilde{x}_w збігаються. Нехай вони дорівнюють $n - 1$ для деякого $n > 1$. Тоді з Твердження 4.2.5.1 випливає, що кожна з множин F_v і \widetilde{F}_w складається з сингулярної точки і $2n$ променів, що з неї виходять і прямують на нескінченність.

Нехай $\triangleleft v = (e_1, \dots, e_{2n})$. Позначимо $Q_i = \pi_f^{-1}(e_i)$, $i = 1, \dots, 2n$, — компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$, які межують з F_v . Скористаємось Наслідком 4.2.5.6 і оберемо нумерацію компонент зв'язності множини $F_v \setminus \{x_v\}$ так, щоб компонента H_i містилась у $\text{Fr } Q_i \cap \text{Fr } Q_{i+1}$ при $i = 1, \dots, 2n - 1$, а також $H_{2n} \subset \text{Fr } Q_{2n} \cap \text{Fr } Q_1$.

За попереднім припущенням $\triangleleft w = (\psi(e_1), \dots, \psi(e_{2n}))$. Позначимо

$$\widetilde{Q}_i = \pi_f^{-1}(\psi(e_i)), i = 1, \dots, 2n$$

— компоненти $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$, які межують з \widetilde{F}_w . Знову Наслідок 4.2.5.6 гарантує нам можливість обрати нумерацію компонент зв'язності множини $\widetilde{F}_w \setminus \{\widetilde{x}_w\}$ так, щоб компонента \widetilde{H}_i містилась у $\text{Fr } \widetilde{Q}_i \cap \text{Fr } \widetilde{Q}_{i+1}$ при $i = 1, \dots, 2n - 1$, а також $\widetilde{H}_{2n} \subset \text{Fr } \widetilde{Q}_{2n} \cap \text{Fr } \widetilde{Q}_1$.

Для кожного $i = 1, \dots, 2n$ зафіксуємо гомеоморфізм

$$h_{v,H_i}^0 : \{x_v\} \cup H_i \rightarrow \{\widetilde{x}_w\} \cup \widetilde{H}_i$$

променя $\overline{H}_i = \{x_v\} \cup H_i$ на промінь $\widetilde{\overline{H}}_i = \{\widetilde{x}_w\} \cup \widetilde{H}_i$.

Зрозуміло, що $h_{v,H_i}^0(x_v) = \widetilde{x}_w$, а також $\overline{H}_i \cap \overline{H}_j = \{x_v\}$ при $i \neq j$. Тому коректно означене відображення $h_v^0 : F_v \rightarrow \widetilde{F}_w$,

$$h_v^0(x) = h_{v,H_i}^0(x), \quad \text{якщо } x \in \overline{H}_i, \quad i \in \{1, \dots, 2n\}.$$

Набір множин $\{\overline{H_i}\}$ утворює скінченне замкнене покриття F_v , отже відображення h_v^0 неперервне. З того, що всі h_{v,H_i}^0 є гомеоморфізмами слідує, що означене і неперервне обернене відображення $(h_v^0)^{-1}$. Отже, h_v^0 є гомеоморфізмом.

За побудовою

$$H_{i-1} \cup H_i \cup \{x_v\} = \text{Fr } Q_i \quad \text{та} \quad H_{2n} \cup H_1 \cup \{x_v\} = \text{Fr } Q_{2n}, \quad i = 2, \dots, 2n$$

(див. Наслідки 4.2.5.2 і 4.2.5.6). Аналогічно,

$$\widetilde{H}_{i-1} \cup \widetilde{H}_i \cup \{\widetilde{x}_v\} = \text{Fr } \widetilde{Q}_i \quad \text{та} \quad \widetilde{H}_{2n} \cup \widetilde{H}_1 \cup \{\widetilde{x}_v\} = \text{Fr } \widetilde{Q}_{2n}, \quad i = 2, \dots, 2n.$$

Тому виконується співвідношення (4.4).

Нагадаємо, що за означенням множини K_f і K_g є прообразами множин вершин графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ відносно проєкцій π_f і π_g , відповідно. Тому означене відображення $h^0 : K_f \rightarrow K_g$,

$$h^0(x) = h_{\pi_f(x)}^0(x).$$

Множини F_v , $v \in \pi_f(K_v)$, попарно не перетинаються, є замкненими і їх скінченне число (див. Зауваження 4.2.5.3). Те ж стосується і їх образів відносно h^0 . Звуження h^0 на кожну з множин F_v є гомеоморфізмом на свій образ $\widetilde{F}_{\psi(v)}$. Тому відображення h^0 є гомеоморфізмом.

Зараз ми продовжимо h^0 до відображення $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, яке компонентам зв'язності множин рівня функції f ставить у відповідність компоненти множин рівня g .

Нехай \mathcal{Q}_f і \mathcal{Q}_g множини, елементами яких є компоненти зв'язності множин $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ і відповідно $\mathbb{R}^2 \setminus K_g$.

Нехай $Q \in \mathcal{Q}_f$, $e = \pi_f(Q)$ — відповідне ребро $\Gamma_{K-R}(f)$. Згідно до Лемми 4.4.1.1 і Зауваження 4.4.1.2 існує гомеоморфізм $\phi : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times f(\overline{Q})$, який зберігає орієнтацію і такий що $f = \text{pr}_2 \circ \phi$.

Нехай $\widetilde{Q} \in \mathcal{Q}_g$, для якої $\pi_g(\widetilde{Q}) = \psi(e)$. Тоді існує гомеоморфізм

$$\widetilde{\phi} : \widetilde{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times g(\widetilde{Q}),$$

який зберігає орієнтацію і такий, що $g = \text{pr}_2 \circ \tilde{\phi}$.

Множина $f(Q) = f_{K-R}(e)$ зв'язна. Зі співвідношень (4.1) слідує, що множина $f(\overline{Q})$ гомеоморфна інтервалу, півінтервалу або відрізьку, $f(Q) = \text{Int } f(\overline{Q})$ гомеоморфна відкритому інтервалу.

Нагадаємо, що f_{K-R} строго монотонна на ребрі e . Тому якщо $f(\overline{Q})$ містить кінець інтервала $f(Q)$, він відповідає вершині графа $\Gamma_{K-R}(f)$, яка інцидентна ребру e . Якщо не містить, то кінець інтервала відповідає віртуальній вершині.

Аналогічне справедливо і для множин $g(\tilde{Q})$ та $g(\overline{\tilde{Q}})$.

Оскільки ізоморфізм ψ зберігає орієнтації ребер і відображає множину віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(f)$ на множину віртуальних вершин $\Gamma_{K-R}(g)$, то зі сказаного вище слідує, що існує строго зростаюче бієктивне відображення

$$\chi : f(\overline{Q}) \rightarrow g(\overline{\tilde{Q}}).$$

Отже, нехай $a, b \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$, $a < b$, $f(Q) = (a, b)$, $f(\text{Fr } Q) \subset \{a, b\} \cap \mathbb{R}$. Нехай також $c, d \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$, $c < d$, $g(\tilde{Q}) = (c, d)$, $g(\text{Fr } \tilde{Q}) \subset \{c, d\} \cap \mathbb{R}$.

Множина $f(\text{Fr } Q)$ може мати не більше двох елементів. Розглянемо всі можливі випадки.

(а) Припустимо, що $\text{Fr } Q = \emptyset$. Тоді обидва кінці ребра $e = \pi_f(Q)$ віртуальні. Внаслідок цього $\text{Fr } \tilde{Q} = \emptyset$, $\Gamma_{K-R}(f) = e$, $\Gamma_{K-R}(g) = \psi(e)$, $Q = \tilde{Q} = \mathbb{R}^2$ (див. доведення Лема 4.4.1.1).

Розглянемо відображення

$$\Phi = id \times \chi : \mathbb{R} \times f(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \times g(\mathbb{R}^2).$$

Тут $id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — тотожне відображення. Зрозуміло, що Φ є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію. Тому і

$$h = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi$$

має подібні властивості.

Очевидно, ϕ відображає компоненти зв'язності множин рівня f на горизонтальні прямі, а $\tilde{\phi}^{-1}$ відображає горизонтальні прямі на компоненти множин рівня g . Тому h задає пошарову еквівалентність f і g .

(b) Нехай множина $f(\text{Fr } Q)$ містить рівно один елемент. Тоді з Наслідку 4 з [75] слідує, що множина $\text{Fr } Q$ зв'язна, отже існує єдина компонента зв'язності F_v множини K_f , така що $F_v \cap \overline{Q} \neq \emptyset$. Тут v — вершина графа $\Gamma_{K-R}(f)$, для якої $F_v = \pi_f^{-1}(v)$. Тоді множина $g(\text{Fr } \tilde{Q})$ теж містить один елемент. Отже, для вершини $w = \psi(v)$ і відповідної компоненти зв'язності $\tilde{F}_w = \pi_g^{-1}(w)$ множини K_g має виконуватись співвідношення $\tilde{Q} \cap K_g \subset \tilde{F}_w$.

Нехай $\triangleleft v$ — спін при вершині v графа $\Gamma_{K-R}(f)$. Позначимо через e' ребро, яке передує e у цьому циклі. Нехай e'' — ребро, яке слідує за e . Розглянемо відповідні елементи $Q' = \pi_f^{-1}(e')$ і $Q'' = \pi_f^{-1}(e'')$ множини Q_f .

Нехай $x_v \in F_v$ — сингулярна точка f . Позначимо H' та H'' компоненти множини $F_v \setminus \{x_v\}$, для яких виконуються співвідношення

$$H' \subset \overline{Q'} \cap \overline{Q}, \quad H'' \subset \overline{Q} \cap \overline{Q''}.$$

Аналогічно, нехай $\tilde{x}_w \in \tilde{F}_w$ — сингулярна точка g , $\triangleleft w$ — спін при вершині w графа $\Gamma_{K-R}(g)$. Нехай ребро $\tilde{e}' = \pi_g(\tilde{Q}')$ передує \tilde{e} у циклі $\triangleleft w$, $\tilde{e}'' = \pi_g(\tilde{Q}'')$ слідує за \tilde{e} . Позначимо через \tilde{H}' та \tilde{H}'' компоненти множини $\tilde{F}_w \setminus \{\tilde{x}_w\}$, такі що $\tilde{H}' \subset \tilde{Q}' \cap \tilde{Q}$, $\tilde{H}'' \subset \tilde{Q} \cap \tilde{Q}''$.

З Наслідка 4.2.5.6 випливає, що

$$\overline{Q} \cap F_v = H' \cup H'' \cup \{x_v\}, \quad \tilde{Q} \cap \tilde{F}_w = \tilde{H}' \cup \tilde{H}'' \cup \{\tilde{x}_w\}.$$

Оскільки ψ зберігає спіни, то $\tilde{e}' = \psi(e')$, $\tilde{e}'' = \psi(e'')$. Відображення h^0 побудовано таким чином, що $h^0(F_v) = h_v^0(F_v) = \tilde{F}_w$, $h^0(x_v) = \tilde{x}_w$, $h^0(H') = \tilde{H}'$, $h^0(H'') = \tilde{H}''$.

Отже, $h^0(\overline{Q} \cap F_v) = \tilde{Q} \cap \tilde{F}_w$. Очевидно, обмеження h^0 на $\overline{Q} \cap F_v$ індукує гомеоморфізм

$$h_{v,Q}^0 : \overline{Q} \cap F_v \rightarrow \tilde{Q} \cap \tilde{F}_w.$$

Припустимо, що $f(\text{Fr } Q) = \{a\}$. З існування χ слідує, що $g(\text{Fr } \tilde{Q}) = \{c\}$.

Нехай $q \in \mathbb{R}$. Введемо наступні позначення.

$$R_q^- = (-\infty, 0) \times \{q\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$R_q^+ = (0, +\infty) \times \{q\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Зі співвідношень (4.1) слідує, що $\phi(\overline{Q} \cap F_v) = \mathbb{R} \times \{a\}$.

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що $\phi(x_v) = (0, a)$, $\tilde{\phi}(\tilde{x}_w) = (0, c)$.

Будемо також вважати, що додатний напрямок обходу навколо точки на площині є напрямком проти годинникової стрілки.

При обході навколо точки x_v ми рухаємося у області Q від множини H' у напрямку множини H'' . Аналогічно, при обході навколо точки $(0, a) = \phi(x_v)$ ми рухаємося у області $\mathbb{R} \times (a, b) = \phi(Q)$ від R_a^+ у напрямку R_a^- . Оскільки ϕ зберігає орієнтацію, то $\phi(H') = R_a^+$, $\phi(H'') = R_a^-$.

Аналогічно, $\tilde{\phi}(\overline{Q} \cap \tilde{F}_w) = \mathbb{R} \times \{c\}$, $(0, c) = \tilde{\phi}(\tilde{x}_w)$, $\tilde{\phi}(\tilde{H}')$ і $\tilde{\phi}(\tilde{H}'') = R_c^-$.

Розглянемо відображення

$$\Phi_a = \tilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R} \times \{a\}} : \mathbb{R} \times \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Очевидно, Φ_a є гомеоморфізмом на свій образ $\mathbb{R} \times \{c\}$. Також справедливі рівності $\Phi_a(R_a^-) = \tilde{\phi} \circ h^0(H'') = \tilde{\phi}(\tilde{H}'') = R_c^-$ і $\Phi_a(R_a^+) = R_c^+$.

Нехай $i_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i_a(t) = (t, a)$, $t \in \mathbb{R}$. Означимо функцію

$$\alpha = \text{pr}_1 \circ \Phi_a \circ i_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Тут $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — проекція на першу координату.

Легко бачити, що α є гомеоморфізмом. Тому ця функція або строго зростає, або строго спадає. Оскільки для множини $R^- = \{t \in \mathbb{R} \mid t < 0\}$ виконуються співвідношення $i_a(R^-) = R_a^-$ і $\text{pr}_1(R_c^-) = R^-$, то за побудовою $\alpha(R^-) = R^-$ і функція α зростає.

Означимо відображення $\Phi : \mathbb{R} \times [a, b) \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d)$,

$$\Phi(x, y) = (\alpha(x), \chi(y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [a, b).$$

З властивостей α і χ слідує, що це гомеоморфізм, який зберігає орієнтацію. Також за побудовою $\Phi(x, y) = \Phi_a(x, y)$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{a\}$.

Нарешті, нехай

$$h_Q = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi : \overline{Q} \rightarrow \widetilde{Q}.$$

За побудовою h_Q є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію.

Оскільки $\phi(\text{Fr } Q) = \mathbb{R} \times \{a\}$, то

$$h_Q|_{\text{Fr } Q} = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi_a \circ \phi = h^0.$$

За означенням множина $\mathbb{R}^2 \setminus K_f$ є об'єднанням усіх регулярних компонент рівня функції f . Внаслідок цього кожна компонента рівня f , яка перетинається з Q , міститься в Q . Аналогічно, якщо компонента зв'язності рівня g має непорожній перетин з \widetilde{Q} , вона міститься в цій області.

Отже, з властивостей ϕ і $\tilde{\phi}^{-1}$ слідує, що для кожної точки $x \in Q$ h відображає компоненту зв'язності множини $f^{-1}(f(x))$, яка містить x , на компоненту множини рівня g , що містить точку $h(x)$.

Випадок $f(\text{Fr } Q) = \{b\}$ розглядається аналогічно.

(с) Нехай множина $f(\text{Fr } Q)$ містить два елементи. Тоді обидва кінця ребра e не віртуальні. Позначимо їх v' і v'' . Як і раніше, застосовуючи Наслідок 4 з [75], приходимо до висновку, що для компонент зв'язності $F_{v'} = \pi_f^{-1}(v')$ і $F_{v''} = \pi_f^{-1}(v'')$ множини K_f справедливі співвідношення $F_{v'} \cap \overline{Q} \neq \emptyset$, $F_{v''} \cap \overline{Q} \neq \emptyset$, $\overline{Q} \subset F_{v'} \cup F_{v''}$.

Вершини $w' = \psi(v')$ і $w'' = \psi(v'')$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$ є кінцями ребра $\psi(e)$, тому компоненти зв'язності $\widetilde{F}_{w'} = \pi_f^{-1}(w')$ і $\widetilde{F}_{w''} = \pi_f^{-1}(w'')$ множини K_g відповідають співвідношенням $\widetilde{F}_{w'} \cap \widetilde{Q} \neq \emptyset$, $\widetilde{F}_{w''} \cap \widetilde{Q} \neq \emptyset$, $\widetilde{Q} \subset \widetilde{F}_{w'} \cup \widetilde{F}_{w''}$.

Нехай як і вище гомеоморфізми $\phi : \overline{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [a, b]$ і $\tilde{\phi} : \widetilde{Q} \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d]$ зберігають орієнтацію і відповідають співвідношенням $f = \text{pr}_2 \circ \phi$ і $g = \text{pr}_2 \circ \tilde{\phi}$.

Не обмежуючи загальність міркувань, вважатимемо, що $\phi(F_{v'} \cap \overline{Q}) = \{a\}$, $\phi(F_{v''} \cap \overline{Q}) = \{b\}$.

Ізоморфізм ψ зберігає орієнтацію ребер. Оскільки вона визначається напрямком зростання функцій f і g , то

$$\tilde{\phi}(\widetilde{F_{w'}} \cap \overline{\widetilde{Q}}) = \{c\}, \quad \tilde{\phi}(\widetilde{F_{w''}} \cap \overline{\widetilde{Q}}) = \{d\}.$$

Як і у попередньому випадку, з Наслідка 4.2.5.6 слідує, що коректно визначені відображення

$$\Phi_a = \tilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R} \times \{a\}} : \mathbb{R} \times \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\Phi_b = \tilde{\phi} \circ h^0 \circ \phi^{-1}|_{\mathbb{R} \times \{b\}} : \mathbb{R} \times \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

які гомеоморфно відображають $\mathbb{R} \times \{a\}$ і $\mathbb{R} \times \{b\}$ на $\mathbb{R} \times \{c\}$ та $\mathbb{R} \times \{d\}$, відповідно.

Нехай $i_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i_a(t) = (t, a)$, $i_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i_b(t) = (t, b)$, $t \in \mathbb{R}$. Як і вище перевіряється що функції

$$\alpha = \text{pr}_1 \circ \Phi_a \circ i_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\beta = \text{pr}_1 \circ \Phi_b \circ i_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

є бієктивними і такими, що строго зростають.

Зафіксуємо також гомеоморфізм $\chi : [a, b] \rightarrow [c, d]$, такий що $\chi(a) = c$.

З Лема 4.4.2.1 слідує, що відображення $\Phi : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \times [c, d]$, означене за допомогою формули (4.2), є гомеоморфізмом, зберігає орієнтацію, а також відображає горизонтальні прямі на горизонтальні прямі.

Оскільки $\hat{\chi}(a) = 0$ і $\hat{\chi}(b) = 1$, то з (4.2) випливає, що $\Phi(x, y) = \Phi_a(x, y)$ для всіх $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{a\}$ і $\Phi(x, y) = \Phi_b(x, y)$ для кожного $(x, y) \in \mathbb{R} \times \{b\}$.

Означимо

$$h_Q = \tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi : \overline{Q} \rightarrow \overline{\widetilde{Q}}.$$

За побудовою h_Q є гомеоморфізмом і зберігає орієнтацію.

Оскільки $\phi(\text{Fr } Q) = \mathbb{R} \times \{a, b\}$, то аналогічно до попереднього випадку

$$h_Q|_{\text{Fr } Q} = h^0.$$

Як і вище перевіряється, що h відображає кожну компоненту зв'язності множини рівня f , яка перетинається з Q , на деяку компоненту множини рівня g .

Об'єднавши випадки **(a)** – **(c)**, для кожного $Q \in \mathcal{Q}_f$ ми отримали гомеоморфізм h_Q її замикання на замикання деякого $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_g$, який відображає компоненти зв'язності множин рівня f , що належать Q , на компоненти множин рівня g .

Нехай Q' і Q'' – два різні елементи \mathcal{Q}_f . Тоді за означенням

$$\overline{Q'} \cap \overline{Q''} = \text{Fr } Q' \cap \text{Fr } Q'' \subset K_f.$$

Отже, за побудовою для кожного $x \in \overline{Q'} \cap \overline{Q''}$ виконується рівність

$$h_{Q'}(x) = h_{Q''}(x) = h^0(x).$$

Крім того з Наслідка 4.2.5.2 випливає, що $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_f} \overline{Q}$.

Внаслідок цього коректно означене відображення $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$h(x) = h_Q(x), \quad \text{якщо } x \in \overline{Q}, \quad Q \in \mathcal{Q}_f. \quad (4.5)$$

Оскільки граф $\Gamma_{K-R}(f)$ скінченний (див. Лема 4.2.6.1), то набір множин

$$\{\overline{Q} \mid Q \in \mathcal{Q}\}$$

утворює скінченне замкнене покриття площини і на кожному елементі цього покриття h неперервне за означенням. Тому h неперервне на \mathbb{R}^2 (див. [79]).

За побудовою $h|_{K_f} = h^0$ і h бієктивно відображає K_f на K_g . Також h бієктивно відображає кожну множину $Q \in \mathcal{Q}_f$ на деякий елемент сім'ї \mathcal{Q}_g .

Нехай $Q', Q'' \in \mathcal{Q}_f$, $Q' \neq Q''$, $\tilde{Q}' = h(Q')$, $\tilde{Q}'' = h(Q'')$. Нехай $e' = \pi_f(Q')$, $e'' = \pi_f(Q'')$, $\tilde{e}' = \pi_g(\tilde{Q}')$, $\tilde{e}'' = \pi_g(\tilde{Q}'')$ – відповідні ребра графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$. Оскільки $\tilde{e}' = \psi(e')$, $\tilde{e}'' = \psi(e'')$ і ψ – комбінаторний ізоморфізм, то \tilde{Q}' і \tilde{Q}'' – різні елементи \mathcal{Q}_g . Отже, $\tilde{Q}' \cap \tilde{Q}'' = \emptyset$.

Очевидно, для кожного $Q \in \mathcal{Q}_f$ виконуються співвідношення

$$\mathbb{R}^2 \setminus Q = K_f \cup \bigcup_{Q' \in \mathcal{Q}_f, Q' \neq Q} Q'.$$

Зі сказаного вище слідує, що

$$h(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = K_g \cup \bigcup_{\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_g, \tilde{Q}' \neq h(Q)} \tilde{Q}'.$$

Внаслідок цього $h(Q) \cap h(\mathbb{R}^2 \setminus Q) = \emptyset$ для всіх $Q \in \mathcal{Q}_f$ і відображення h бієктивне.

Отже, означене відображення h^{-1} . Оскільки $h(Q) \in \mathcal{Q}_g$ і $h^{-1}|_{h(Q)} = h_Q^{-1}$ для кожного $Q \in \mathcal{Q}_f$, всі h_Q^{-1} неперервні за побудовою і сім'я $\{\tilde{Q} \mid \tilde{Q} \in \mathcal{Q}_g\}$ утворює скінченне замкнене покриття площини, то відображення h^{-1} неперервне і h є гомеоморфізмом.

Таким чином, всі відображення $h|_Q$, $Q \in \mathcal{Q}_f$ і h_0 ставлять у відповідність компонентам зв'язності множин рівня f компоненти множин рівня g . Отже, h є пошаровою еквівалентністю f і g .

Припустимо тепер, що навантажені графи Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ є еквівалентними. Це означає, що слабо навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентні і комбінаторний ізоморфізм ψ , який зберігає слабке навантаження, також індукує ізоморфізм $\hat{\psi}$ частково впорядкованих розширених множин вершин V_{ext} і \tilde{V}_{ext} графів $\Gamma_{K-R}(f)$ і $\Gamma_{K-R}(g)$ відносно порядків P_{ext} і \tilde{P}_{ext} , відповідно.

Нагадаємо, що частковий порядок P_{ext} (відповідно, \tilde{P}_{ext}) індукується на множині V_{ext} (відповідно, \tilde{V}_{ext}) зі стандартного лінійного порядку на прямій за допомогою відображення $f_{lim} : V_{ext} \rightarrow \mathbb{R}$ (відповідно, $g_{lim} : \tilde{V}_{ext} \rightarrow \mathbb{R}$).

Позначимо $A_f = f_{lim}(V_{ext})$, $A_g = g_{lim}(\tilde{V}_{ext})$. З Твердження 4.3.0.2 слідує, що існує бієктивне зростаюче відображення $\hat{k} : A_f \rightarrow A_g$, таке що комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} V_{ext} & \xrightarrow{\hat{\psi}} & \tilde{V}_{ext} \\ f_{lim} \downarrow & & \downarrow g_{lim} \\ A_f & \xrightarrow{\hat{k}} & A_g \end{array}$$

Множини A_f і A_g скінченні і мають однакову кількість елементів m . Нехай $A_f = \{a_1, \dots, a_m\}$, $a_1 < \dots < a_m$; $A_g = \{b_1, \dots, b_m\}$, $b_1 < \dots < b_m$. Очевидно, $b_i = \hat{k}(a_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Означимо відображення $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за допомогою співвідношення

$$k(t) = \begin{cases} t + (b_1 - a_1), & \text{якщо } t < a_1, \\ \frac{1}{a_{i+1} - a_i} [b_i(a_{i+1} - t) + b_{i+1}(t - a_i)], & \text{якщо } t \in [a_i, a_{i+1}], \\ t + (b_m - a_m), & \text{якщо } t > a_m. \end{cases}$$

Зрозуміло, що k є гомеоморфізмом і $k(a_i) = b_i = \hat{k}(a_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Оскільки слабо навантажені графи Кронрода-Ріба функцій f і g еквівалентні, то можемо побудувати гомеоморфізми $h^0 : K_f \rightarrow K_g$ і $h_Q : \bar{Q} \rightarrow \bar{Q}$, $Q \in \mathcal{Q}$, як це отримано при доведенні пошарової еквівалентності f і g .

При побудові відображень h_Q є певна неоднозначність. Виявляється, що ці відображення можна вибрати таким чином, що гомеоморфізм h , визначений за допомогою (4.5), дасть разом із k топологічну еквівалентність f і g .

Отже, нехай $Q \in \mathcal{Q}$, $e = \pi_f(Q)$ — відповідне ребро графа Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f)$, де v' і $v'' \in V \cup V_{virt}$ — вершини, які з'єднує ребро e . Тоді вершини $w' = \psi(e')$ і $w'' = \psi(e'')$ графа $\Gamma_{K-R}(g)$ з'єднані ребром $\psi(e)$. Нехай $\tilde{Q} = \pi_g^{-1}(\psi(e))$ — відповідний елемент $\tilde{\mathcal{Q}}$.

Вище ми побудували h_Q у вигляді $\tilde{\phi}^{-1} \circ \Phi \circ \phi$, де ϕ і $\tilde{\phi}$ — відображення з Лема 4.4.1.1, а Φ має вигляд

$$\Phi(x, y) = (\eta(x, y), \chi(y)), (x, y) \in \mathbb{R} \times f(\bar{Q})$$

(див. формулу (4.2)). Отже, комутативна наступна діаграма:

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{Q} & \xrightarrow{h_Q} & \widetilde{Q} \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \tilde{\phi} \\
 \mathbb{R} \times f(\overline{Q}) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R} \times g(\widetilde{Q}) \\
 \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \widetilde{\text{pr}}_2 \\
 f(\overline{Q}) & \xrightarrow{\chi} & g(\widetilde{Q})
 \end{array}$$

Лема 4.4.1.1 стверджує, що $f = \text{pr}_2 \circ \phi$ і $g = \text{pr}_2 \circ \tilde{\phi}$. Тому комутативна наступна діаграма:

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{Q} & \xrightarrow{h_Q} & \widetilde{Q} \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 f(\overline{Q}) & \xrightarrow{\chi} & g(\widetilde{Q})
 \end{array} \tag{4.6}$$

У цій конструкції в якості $\chi : \overline{Q} \rightarrow \widetilde{Q}$ можна взяти довільне неперервне бієктивне зростаюче відображення.

Функція f_{K-R} строго монотонна на ребрах $\Gamma_{K-R}(f)$. Отже, не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $f_{lim}(v') < f_{lim}(v'')$. Оскільки ψ зберігає орієнтацію ребер, то $g_{lim}(w') < g_{lim}(w'')$.

Нехай $v' \notin V_{ext}$. Тоді за означенням $f_{lim}(v') \in \pm\infty$.

Оскільки $f_{lim}(v') < f_{lim}(v'')$, то $f_{lim}(v') = -\infty$. За означенням $\psi(V_{ext}) = \widetilde{V}_{ext}$, тому $w' = \psi(v') \notin \widetilde{V}_{ext}$ і по аналогії з попереднім $g_{lim}(w') = -\infty$.

Якщо $v' \in V_{ext}$, то $f_{lim}(v') = a_r$ для деякого $r \in \{1, \dots, m\}$. Тоді

$$g_{lim}(w') = g_{lim} \circ \psi(v') = \hat{k} \circ f_{lim}(v') = k \circ f_{lim}(v') = b_r.$$

Аналогічно отримуємо, або $f_{lim}(v'') = g_{lim}(w'') = +\infty$, або $f_{lim}(v'') = a_s$ і $g_{lim}(w'') = k \circ f_{lim}(v'') = b_s$ для деякого $s \in \{1, \dots, m\}$.

Внаслідок сказаного виконується рівність $k(f(\overline{Q})) = g(\widetilde{Q})$. Отже, можемо взяти

$$\chi(t) = k(t), \quad t \in f(\overline{Q}).$$

Тоді зі співвідношень (4.5) і (4.6) слідує, що $k \circ f = g \circ h$. □

4.5 Висновки

В даному розділі, використовуючи граф Кронрода-Ріба з додатковою комбінаторною структурою дано необхідні та достатні умови, коли дві псевдогармонічні функції загального положення, які мають скінченну кількість сингулярних точок і відповідають певній додатковій умові, будуть топологічно еквівалентними, а також пошарово еквівалентними.

ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена дослідженню автоморфізмів несингулярних шарувань на двовимірних некомпактних поверхнях. В роботі отримані такі результати:

- отримано необхідні та достатні умови еквівалентності атласів смугастої поверхні;
- для атласу смугастої поверхні визначено граф, що описує інформацію про склеювання цієї поверхні зі смуг та встановлено ізоморфізм між групою гомеотопій її канонічного шарування та групою автоморфізмів графа атласу;
- описано алгебраїчну структуру класу груп гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь;
- встановлено зв'язок між групами гомеотопій канонічних шарувань кореневоподібних смугастих поверхонь та групами гомеотопій їх просторів шарів;
- отримано необхідні та достатні умови пошарової та топологічної еквівалентностей двох псевдогармонічних функцій загального положення на площині, множини ліній рівня яких утворюють сингулярне шарування зі скінченним числом особливостей і простір шарів яких є гаусдорфовим.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] *Abe, Kojun*. On the first homology of automorphism groups of manifolds with geometric structures / Kojun Abe, Kazuhiko Fukui // *Cent. Eur. J. Math.* — 2005. — Vol. 3, no. 3. — Pp. 516–528.
- [2] *Arraut, J. L.* A two-dimensional foliation on S^7 / J. L. Arraut // *Topology*. — 1973. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 243–245.
- [3] *Banyaga, Augustin*. On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms / Augustin Banyaga // *Topology*. — 1977. — Vol. 16, no. 3. — Pp. 279–283.
- [4] *Boothby, William M.* The topology of regular curve families with multiple saddle points / William M. Boothby // *Amer. J. Math.* — 1951. — Vol. 73. — Pp. 405–438.
- [5] *Boothby, William M.* The topology of the level curves of harmonic functions with critical points / William M. Boothby // *Amer. J. Math.* — 1951. — Vol. 73. — Pp. 512–538.
- [6] *Bronstein, I.* Peixoto graphs of Morse-Smale foliations on surfaces / I. Bronstein, I. Nikolaev // *Topology Appl.* — 1997. — Vol. 77, no. 1. — Pp. 19–36.
- [7] *Clebsch, Alfred*. Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen / Alfred Clebsch // *J. Reine Angew. Math.* — 1866. — Vol. 65. — Pp. 257–268.

- [8] *Deahna, Feodor*. Über die Bedingungen der Integrabilität linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen einer beliebigen Anzahl veränderlicher GroBen / Feodor Deahna // *J. Reine Angew. Math.* — 1840. — Vol. 20. — Pp. 340–350.
- [9] *Ehresmann, Charles*. Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrables dans une variété continuellement différentiable V_n / Charles Ehresmann, Georges Reeb // *C. R. Acad. Sci. Paris.* — 1944. — Vol. 218. — Pp. 955–957.
- [10] *Farber, Michael*. Topology of closed one-forms / Michael Farber. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 108. — Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004.
- [11] *Frobenius, Ferdinand Georg*. Über das Pfaffsche Problem / Ferdinand Georg Frobenius // *J. Reine Angew. Math.* — 1877. — Vol. 82. — Pp. 230–315.
- [12] *Fukui, Kazuhiko*. On commutators of foliation preserving Lipschitz homeomorphisms / Kazuhiko Fukui, Hideki Imanishi // *J. Math. Kyoto Univ.* — 2001. — Vol. 41, no. 3. — Pp. 507–515.
- [13] *Haefliger, André*. Feuilletages sur les variétés ouvertes / André Haefliger // *Topology.* — 1970. — Vol. 9, no. 2. — Pp. 183–194.
- [14] *Jenkins, James*. Contour equivalent pseudoharmonic functions and pseudoconjugates / James Jenkins, Marston Morse // *Amer. J. Math.* — 1952. — Vol. 74. — Pp. 23–51.
- [15] *Kamke, E.* Zur Theorie der Differentialgleichungen / E. Kamke // *Math. Ann.* — 1928. — Vol. 99, no. 1. — Pp. 602–615.

- [16] *Kaplan, Wilfred*. Regular curve-families filling the plane, I / Wilfred Kaplan // *Duke Math. J.* — 1940. — Vol. 7. — Pp. 154–185.
- [17] *Kaplan, Wilfred*. Regular curve-families filling the plane, II / Wilfred Kaplan // *Duke Math. J.* — 1941. — Vol. 8. — Pp. 11–46.
- [18] *Krouglov, Vladimir*. The curvature of contact structures on 3-manifolds / Vladimir Krouglov // *Algebr. Geom. Topol.* — 2008. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 1567–1579.
- [19] *Krouglov, V.* Parabolic foliations on three-manifolds / V. Krouglov // *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* — 2009. — Vol. 5, no. 2. — Pp. 170–191, 213.
- [20] *Kuratowski, K.* Topology. Vol. II / K. Kuratowski. New edition, revised and augmented. Translated from the French by A. Kirkor. — Academic Press, New York-London; Państwowe Wydawnictwo Naukowe Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1968. — Pp. xiv+608.
- [21] *Lech, Jacek*. Groups of $C^{r,s}$ - diffeomorphisms related to a foliation / Jacek Lech, Tomasz Rybicki // *Geometry and topology of manifolds.* — Warsaw: Polish Acad. Sci. — 2007. — Vol. 76. — Pp. 437–450.
- [22] *Lech, Jacek*. On the perfectness of $C^{\infty,s}$ - diffeomorphism groups on a foliated manifold / Jacek Lech, Tomasz Rybicki // *Opuscula Math.* — 2008. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 313–324.
- [23] *Ling, Wensor*. Factorizable groups of homeomorphisms / Wensor Ling // *Compositio Math.* — Vol. 51, no. 1.
- [24] *Maksymenko, Sergiy*. Foliations with non-compact leaves on surfaces / Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh // *Proceedings of Geometric Center.* — 2015. — Vol. 8, no. 3–4. — Pp. 17–30.
- [25] *Maksymenko, Sergiy*. Foliations with all nonclosed leaves on noncompact

- surfaces / Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2016. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 266–282.
- [26] *Maksymenko, Sergiy*. One-dimensional foliations on topological manifolds / Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh // *Proceedings of Geometric Center*. — 2016. — Vol. 9, no. 2. — Pp. 1–23.
- [27] *Maksymenko, Sergiy*. Characterization of striped surfaces / Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh // *Proceedings of the International Geometric Center*. — 2017. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 22–38.
- [28] *Maksymenko, Sergiy*. Homeotopy groups of one-dimensional foliations on surfaces / Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh, Yuliya Soroka // *Proceedings of the International Geometry Center*. — 2017. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 22–46.
- [29] *Mather, John N.* Commutators of diffeomorphisms / John N. Mather // *Comment. Math. Helv.* — 1974. — Vol. 49. — Pp. 512–528.
- [30] *Mather, John N.* Simplicity of certain groups of diffeomorphisms / John N. Mather // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1974. — Vol. 80. — Pp. 271–273.
- [31] *Mather, John N.* Commutators of diffeomorphisms. II / John N. Mather // *Comment. Math. Helv.* — 1975. — Vol. 50. — Pp. 33–40.
- [32] *Mather, John N.* Foliations and local homology of groups of diffeomorphisms / John N. Mather // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974)*, Vol. 2. — *Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975*. — Pp. 35–37.
- [33] *Mather, John N.* Loops and foliations / John N. Mather // *Manifolds—Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973)*. — Tokyo: Univ. Tokyo Press, 1975. — Pp. 175–180.

- [34] *Mather, John N.* Differentiable invariants / John N. Mather // *Topology*. — 1977. — Vol. 16, no. 2. — Pp. 145–155.
- [35] *Molino, Pierre.* Riemannian foliations / Pierre Molino. — Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1988. — Vol. 73 of *Progress in Mathematics*. — Pp. xii+339. — Translated from the French by Grant Cairns, With appendices by Cairns, Y. Carrière, É. Ghys, E. Salem and V. Sergiescu.
- [36] *Morse, Marston.* The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces / Marston Morse // *Fund. Math.* — 1952. — Vol. 39. — Pp. 269–287 (1953).
- [37] *Peixoto, M. M.* On the classification of flows on 2-manifolds / M. M. Peixoto. — 1973. — Pp. 389–419.
- [38] *Plachta, L. P.* The combinatorics of gradient-like flows and foliations on closed surfaces. III. The problem of realization and some estimates / L. P. Plachta // *Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya*. — 2001. — Vol. 44, no. 3. — Pp. 7–16.
- [39] *Plachta, L. P.* The combinatorics of gradient-like flows and foliations on closed surfaces. I. Topological classification / L. P. Plachta // *Topology Appl.* — 2003. — Vol. 128, no. 1. — Pp. 63–91.
- [40] *Polulyah, Ye. O.* Topological equivalence of pseudo-harmonic functions of general position in the plane / Ye. O. Polulyah, Yu. Yu. Soroka // International conference "Geometry and Topology in Odessa - 2016 (Odessa). — 2015. — P. 28.
- [41] *Polulyakh, E.* On the Pseudo-harmonic functions defined on the disk / E. Polulyakh, I. Yurchuk. Праці Інституту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2009. — С. 151.
- [42] *Prishlyak, A. O.* Conjugacy of Morse functions on surfaces with values on the

- line and circle / A. O. Prishlyak // *Ukrain. Mat. Zh.* — 2000. — Vol. 52, no. 10. — Pp. 1421–1425.
- [43] *Prishlyak, A. O.* Morse functions with finite number of singularities on a plane / A. O. Prishlyak // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2002. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 75–78.
- [44] *Reeb, Georges.* Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées / Georges Reeb. *Actualités Sci. Ind.*, no. 1183. — Hermann & Cie., Paris, 1952. — Pp. 5–89, 155–156.
- [45] *Rotman, Joseph J.* An Introduction to the Theory of Groups / Joseph J. Rotman. *Graduate Texts in Mathematics* 148. — New York, Inc.: Springer-Verlag New York, 1995.
- [46] *Rybicki, Tomasz.* Isomorphisms between leaf preserving diffeomorphism groups / Tomasz Rybicki // *Soochow J. Math.* — 1996. — Vol. 22, no. 4. — Pp. 525–542.
- [47] *Sharko, V. V.* Morse functions on noncompact surfaces / V. V. Sharko // *Ukrainian Mathematics Congress—2001 (Ukrainian).* — Kiev: Natsional. Akad. Nauk Ukraini Inst. Mat., 2003. — Pp. 91–102.
- [48] *Sharko, V. V.* Smooth and topological equivalence of functions on surfaces / V. V. Sharko // *Ukrain. Mat. Zh.* — 2003. — Vol. 55, no. 5. — Pp. 687–700.
- [49] *Sharko, V. V.* Topological equivalence to a projection / V. V. Sharko, Soroka Yu. Yu. // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2015. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 3–5.
- [50] *Soroka, Yu. Yu.* Non-singular foliations in the plane / Yu. Yu. Soroka // 3rd EUMLS Conference "Mathematics for Life Sciences (Rivne). — 2015. — P. 43.

- [51] *Soroka, Yu. Yu.* Homeotopy groups of non-singular foliations on the plane / Yu. Yu. Soroka // The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski, (Lviv). — 2016. — P. 49.
- [52] *Soroka, Yu. Yu.* Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations / Yu. Yu. Soroka // Book of Abstracts of International Conference «Modern Advances in Goemetry and Topology» in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday, (Kharkiv). — 2016. — Pp. 47–48.
- [53] *Soroka, Yu. Yu.* Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations on the plane / Yu. Yu. Soroka // *Methods Funct. Anal. Topology*. — 2016. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 283–294.
- [54] *Tamura, Itiro.* Every odd dimensional homotopy sphere has a foliation of codimension one / Itiro Tamura // *Comment. Math. Helv.* — 1972. — Vol. 47. — Pp. 164–170.
- [55] *Tamura, Itiro.* Foliations of total spaces of sphere bundles over spheres / Itiro Tamura // *J. Math. Soc. Japan*. — 1972. — Vol. 24. — Pp. 698–700.
- [56] *Tamura, Itiro.* Spinnable structures on differentiable manifolds / Itiro Tamura // *Proc. Japan Acad.* — 1972. — Vol. 48. — Pp. 293–296.
<http://projecteuclid.org/euclid.pja/1195519667>.
- [57] *Thurston, William.* Foliations and groups of diffeomorphisms / William Thurston // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1974. — Vol. 80. — Pp. 304–307.
- [58] *Whitney, Hassler.* On regular closed curves in the plane / Hassler Whitney // *Compositio Math.* — 1937. — Vol. 4. — Pp. 276–284.
- [59] *Арансон, С. Х.* Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях / С. Х. Арансон, В. З. Гринес // *УМН*. — 1986. — Т. 41, № 1(247). — С. 149–169.

- [60] *Болотов, Д.В.* Характеризация плоских слоений / Д.В. Болотов // *Доповіди НАН України*. — 2004. — Т. 12. — С. 12–17.
- [61] *Болотов, Д.В.* О структуре слоений коразмерности один неотрицательной кривизны / Д.В. Болотов // *Современные проблемы математики, механики и информатики*. — Харьков: Апостроф, 2011. — Т. 3:3. — С. 324–331.
- [62] *Болсинов, А. В.* Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем / А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. — Москва: Наука, 1997. — Р. 352.
- [63] *Борисенко, А.А.* Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий / А.А. Борисенко. — Москва: Экзамен, 2003. — С. 672.
- [64] *Будницька, Н. В.* Еквівалентність замкнених 1-форм на поверхнях з краєм / Н. В. Будницька, О. О. Пришляк // *Укр. мат. журн.* — 2009. — Т. 61, № 11. — С. 1455–1473.
- [65] *Будницька, Н. В.* Реалізація замкненої 1-форми на замкнених орієнтованих поверхнях / Н. В. Будницька, Т. В. Рибалкіна // *Укр. мат. журн.* — 2012. — Т. 64, № 6. — С. 739–751.
- [66] *Гирик, Е. А.* О существовании на двумерном замкнутом ориентируемом многообразии векторных полей с заданным набором особых точек / Е. А. Гирик // *Укр. мат. журн.* — 1937. — Т. 45, № 12. — С. 1706–1709.
- [67] *Кронрод, А. С.* О функциях двух переменных / А. С. Кронрод // *УМН*. — 1950. — Т. 5, № 1(35). — С. 24–134.
- [68] *Леонтович, Е.А.* О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории / Е.А. Леонтович, А.Г. Майер // *ДАН СССР*. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 251–254.
- [69] *Леонтович, Е.А.* О траекториях на ориентируемых поверхностях / Е.А. Леонтович, А.Г. Майер // *ДАН СССР*. — 1943. — Т. 12, № 1. — С. 71–84.

- [70] Максименко, С. И. Еквівалентність m -функцій на поверхнях / С. И. Максименко // Некоторые проблемы современной математики. *Праці Інституту математики НАН України*. — 1998. — Т. 25. — С. 128–134.
- [71] Максименко, С. И. Классификация m -функций на поверхностях / С. И. Максименко // *Укр. мат. журн.* — 1999. — Т. 51, № 8. — С. 1129–1135.
- [72] Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология: Начальный курс / Уоллес А. Милнор Дж. — Мир, 1972. — Р. 280.
- [73] Ошемков, А. А. Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особенностей / А. А. Ошемков // Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем, *Тр. МИАН*. — 1994. — Т. 205. — С. 131–140.
- [74] Полтавец, Д. Н. Полярные системы Морса-Смейла на двумерных многообразиях рода три / Д. Н. Полтавец // *Препр./НАН України. Ин-т математики.95.4*. — 1993. — С. 1–21.
- [75] Полулях, Е. А. Графы Кронрода – Рибба функций на некомпактных двумерных поверхностях. I / Е. А. Полулях // *Укр. мат. журн.* — 2015. — Vol. 67, no. 3. — Рр. 375–396.
- [76] Пришляк, А. О. Векторные поля с заданным набором особых точек / А. О. Пришляк // *Укр. мат. журн.* — 1997. — Т. 49, № 10. — С. 1373–1384.
- [77] Пришляк, О. О. Полярні градієнтно-подібні потоки на тривимірній сфері / О. О. Пришляк // *Вісник Київ. Універс. Математика. Механіка*. — 1998. — Т. 1. — С. 36–39.
- [78] Пришляк, О. О. Полярні градієнтно-подібні потоки на тривимірній сфері / О. О. Пришляк // *Вісник Київ. Універс. Математика. Механіка*. — 1998. — Т. 1. — С. 36–39.

- [79] *Рохлин, В.А.* Начальный курс топологии. Геометрические главы / В.А. Рохлин, Д.Б Фукс. — Москва: Наука, 1977. — С. 488.
- [80] *Сорока, Ю. Ю.* Группы симетрий несингулярних шарувань площини / Ю. Ю. Сорока // Тези доповідей 10-тої літньої школи «Алгебра, Топологія. Аналіз», (м. Одеса). — 2015. — С. 60–61.
- [81] *Сорока, Ю. Ю.* Группы гомеотопій несингулярних шарувань коренево подібних смугастих поверхонь / Ю. Ю. Сорока // Тези доповідей 11-тої літньої школи «Алгебра, Топологія. Аналіз», (м. Одеса). — 2016. — С. 55.
- [82] *Сорока, Ю. Ю.* Группы гомеотопій несингулярних шарувань площини / Ю. Ю. Сорока // *Український математичний журнал.* — 2017. — Vol. 21, no. 7. — Pp. 1000–1008.
- [83] *Шарко, В. В.* Smooth functions on non-compact surfaces / В. В. Шарко // *Pr. Inst. Mat. Nats.* — 2006. — Т. 3, № 2. — С. 443–473.
- [84] *Шарко, В.В.* Топологічна еквівалентність псевдогармонійних функцій загального положення на площині / В.В Шарко, Є.О. Полулях, Ю. Ю. Сорока // *Праці Інституту математики НАН України.* — 2015. — Т. 12, № 6. — С. 7–47.

Додаток

Основні результати дисертації опубліковано в п'яти статтях в наукових виданнях, які входять до переліку фахових видань МОН України. Серед них три статті опубліковано в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus) та семи збірниках тез конференцій.

1. Sharko V. V. Topological equivalence to a projection / V. V. Sharko and Yu. Yu. Soroka // *Methods Funct. Anal. Topology*.— 2015.—Vol.21, no. 1.— Pp. 3–5.
2. Шарко В. В. Топологічна еквівалентність псевдогармонічних функцій загального положення на площині / В. В. Шарко, Є. О. Полулях, Ю. Ю. Сорока // *Праці Інституту математики НАН України*.— 2015.— Том. 12, №. 6.— 7–47 с.
3. Сорока Ю. Ю. Групи симетрій несингулярних шарувань площини / Сорока Ю. Ю. // *Тези доповідей 10-тої літньої школи «Алгебра, Топологія. Аналіз» (Одеса)*.— 2015.— 60–61 с.
4. Soroka Yulya. Non-singular foliations in the plane / Yulya Soroka // *3rd EUMLS Conference «Mathematics for Life Sciences» (Rivne)*.— 2015.— P. 43.
5. Polulyakh Ye. O. Topological equivalence of pseudo-harmonic functions of general position in the plane / Ye. O. Polulyakh, Yu. Yu. Soroka // *International conference "Geometry and Topology in Odessa - 2016"*(Odessa).— 2016.— P. 28.
6. Сорока Ю. Ю. Групи гомеотопій несингулярних шарувань коренево поді-

- бних смугастих поверхонь / Ю. Ю. Сорока // Тези доповідей 11-тої літньої школи «Алгебра, Топологія. Аналіз» (Одеса).— 2016.—124–125 с.
7. Soroka Yu. Yu. Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations on the plane / Yu. Yu. Soroka // *Methods Funct. Anal. Topology*.— 2016.—Vol.22, no. 3.— Pp. 283–294.
 8. Soroka Yu. Yu. Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations / Yu. Yu. Soroka // *Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday, (Kharkiv)*.— 2016.—P. 47 – 48.
 9. Soroka Yuliia. Homeotopy groups of non-singular foliations on the plane / Yuliia Soroka // *The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv)*.—2016.— P. 49.
 10. Сорока Ю. Групи гомеотопій несингулярних шарувань площини / Ю. Сорока // *Український математичний журнал*. — 2017.— Том. 69, №. 7. — 1000–1008 с.
 11. Maksymenko Sergiy. Homeotopy groups of one-dimensional foliations on surfaces / Sergiy Maksymenko, Yugene Polulyakh, Yuliya Soroka // *Proceedings of the International Geometry Center*.— 2017.—Vol.10, no. 71.— Pp. 22–46.

Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких конференціях та семінарах:

- 3rd EUMLS Conference «Mathematics for Life Sciences» (Rivne, 2015);
- 10-та літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса, 2015);
- 11 Літня школа «Алгебра, Топологія, Аналіз» (м. Одеса, 2016);
- Міжнародна конференція «Геометрія та топологія в Одесі – 2016» (м. Одеса, 2016);

- Modern Advances in Geometry and Topology in honor of professor A. A. Borisenko for his 70th birthday (Kharkiv, 2016);
- The International Conference dedicated to the 120-th anniversary of Kazimierz Kuratowski (Lviv, 2016);
- Науковий семінар лабораторії топології відділу алгебри та топології Інституту математики НАН України (м. Київ);
- Семінар кафедри геометрії, топології та динамічних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, 2017).