НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Сембер Дмитро Андрійович

УДК 519.6

ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИСКРЕТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Спеціальність 01.01.07 — обчислювальна математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фізико-математичних наук,
професор, академік НАН України
Макаров Володимир Леонідович

Київ - 2015

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Функціонально-дискретний метод (FD-метод) вперше був запропонований в [18] В. Л. Макаровим (1991) як метод наближеного розв'язування задачі Штурма–Ліувілля на власні значення. В [18] відзначається, що хоч для розв'язування задачі Штурма–Ліувілля використовуються такі загальновідомі методи, як варіаційні методи і метод скінченних елементів зокрема, а також різницеві методи, проте вони мають один спільний недолік: чим вищим є порядковий номер шуканого власного значення, тим гіршою є точність відповідного наближення. Запропонований FD-метод позбавлений цього недоліку, і, більш того, точність відшукання власного значення за допомогою FD-мтеоду тим вища, чим чим більший порядковий номер цього власного значення. В наступних роботах було запропоновано і обґрунтовано алгоритм FD-методу розв'язування нелінійних задач на власні значення, зокрема в роботах [21], [22], [48], [49], [66].

В подальших дослідженнях Макарова В. Л., Винокур В. В., Лазурчака І. І., Гаврилюка І. П., Василика В. Б., Драгунова Д. В., Ситника Д. О. та інших FD-метод було успішно поширено на класи крайових задач та задач Коші для лінійних та квазілінійних звичайних диференціальних рівняннь та їх систем [47], [20], а також на лінійні диференціальні рівняння в частинних похідних першого та другого порядків [4, 6, 19, 53]. Згодом було показано, що FD-метод може бути застосований до розв'язування операторних рівнянь загального вигляду [47], зокрема до диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами в банахових просторах [5, 7, 51, 52].

Застосування функціональних (аналітичних) методів до наближеного розв'язування операторних рівнянь дозволяє використовувати одержані наближені розв'язки для аналізу точних розв'язків цих рівнянь. Однак ефективність та економічність, з точки зору обчислювальних ресурсів, функціональних методів, в більшості випадків, значно менша, ніж у дискретних методів. FD-метод, завдяки тому, що він є симбіозом скінченно-різницевого методу та методу гомотопій (методу продовження за параметром) має основні властивості як функціональних, так і дискретних методів одночасно. Зокрема, він зберігає аналітичні характеристики точного розв'язку задачі, а завдяки дискретній складовій FD-методу, він має вбудований параметр, варіюванням якого на практиці вдається досягти його збіжності. Крім того, дискретна складова FD-методу забезпечує його лінійність, тобто навіть для розв'язування нелінійних задач, алгоритм FD-методу, з метою пошуку наближення до точного розв'язку задачі, використовує виключно задачі з кускво-сталими коефіцієнтами. Наявність дискретної складової також дає можливість застосувати стратегію розпаралелювання розв'язування задачі з застосуванням багатопроцесорних систем. Більш того, для певних класів задач строго доведено, що швидкість збіжності FD-методу є суперекспоненціальною.

Разом з тим, на даний момент, практично поза увагою залишаються питання обґрунтування збіжності та алгоритмізації FD-методу розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних вищих порядків, систем таких рівнянь, та, зокрема, нелінійних рівнянь в частинних похідних, серед яких важливе місце займає й нелінійне рівняння Клейна-Гордона, яке є релятивістською версією рівняння Шредінгера. Рівняння Клейна-Гордона має й ряд самостійних застосувань в сучасній фізиці та інженерії, зокрема, в квантовій механіці [43], у фізиці плазми [70], в геометрії [72], тощо.

Все це, разом із стрімким розвитком комп'ютерної алгебри та зростанням потужностей обчислювальної техніки, робить FD-метод актуальним і перспективним об'єктом подальших математичних досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, що проводяться у відділі обчислювальної математики Інституту математики НАН України. Її результати було використано при виконанні науково-дослідної роботи І–16–11: "Високоточні методи розв'язування задач для операторних рівнянь у некласичній постановці", термін виконання з 01.01.2010 по 31.12.2015, номер державної реєстрації — 0111U000020.

Мета і завдання дослідження. *Метою дослідження* є розробка, обґрунтування та алгоритмічна реалізація експоненціально збіжного чисельно-аналітичного методу розв'язування нелінійного рівняння Клейна-Гордона.

Основними завданнями дослідження є:

1) розробка та обґрунтування чисельно-аналітичного методу наближеного розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з необмеженою нелінійністю;

2) розробка та обґрунтування чисельно-аналітичного методу наближеного розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона як з обмеженою, так і з необмеженою нелінійністю.

Об'єкт дослідження — нелінійне рівняння Клейна-Гордона з початковими умовами та умовами на характеристиках.

Предмет дослідження — чисельно-аналітичний метод розв'язування нелінійного рівняння Клейна-Гордона з умовами Коші та умовами Гурса.

Методи дослідження. В ході дослідження було використано методи функціонального аналізу, метод Рімана, метод твірних функцій, FD-метод розв'язування операторних рівнянь загального вигляду.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дослідження, що визначають його наукову новизну:

1) Доведено теореми про існування і єдиність локального розв'язку задачі Коші та задачі Гурса для нелінійного хвильового рівняння (теореми 2.1, 3.1);

2) На основі загальної ідеї FD-методу розв'язування операторних рівнянь розроблено чисельно-аналітичний метод (FD-метод) розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з необмеженою нелінійністю; доведено теорему, що містить достатні умови суперекспоненціальної швидкості збіжності FD-методу(теорема 2.3);

3) Запропоновано програмну імплементацію FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з необмеженою нелінійністю з використанням чисельних методів інтегрування;

4) На основі загальної ідеї FD-методу розв'язування операторних рівнянь розроблено чисельно-аналітичний метод (FD-метод) розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з обмеженою та з необмеженою нелінійністю відповідно; доведено теореми, що містить достатні умови суперекспоненціальної швидкості збіжності FD-методу (теореми 3.2, 3.4);

5) Запропоновано алгоритм FD-методу розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона на основі його явної та неявної схем з використанням чисельних методів інтегрування; знайдено оцінку складності запропонованого алгоритму FD-методу з точки зору кількості основних операцій (додавання, множення, ділення);

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Одержані результати, разом з алгоритмами, розробленими дисертантом, можуть бути використані при моделюванні реальних прикладних проблем, а також при розробці систем комп'ютерної алгебри та програмних пакетів чисельно-аналітичного розв'язування задач Коші та Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямків дослідження та постановки задач, розв'язаних в дисертації, належать В. Л. Макарову. В публікаціях [11], [64], [12], [13], [14], написаних Д. А. Сембером у співавторстві з В. Л. Макаровим та Д. В. Драгуновим, внесок кожного з співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких наукових конференціях та семінарах:

- Міжнародна конференція молодих вчених, присвячена 70-річчю механіко-математичного факультету КНУ ім. Тараса Шевченка, 13-15 грудня 2010 р., Київ.

- Internatio nal Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics", February 21-25, 2011, Kyiv, Ukraine.

- Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, 19-23 вересня 2011 р., м. Дрогобич, Україна.

- Чотирнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-21 квітня 2012 р., Київ.

- The 2nd International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics", November 12-16, 2012, Kyiv, Ukraine.

- VI Міжнародна конференція імені академіка І. І. Ляшка, 5-6 вересня 2013 р., Київ.

- Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23-24 квітня 2014 р., Київ.

- П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 15-17 травня 2014 р., Київ.

- Семінар "Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики" відділів Динаміки та стійкості багатовимірних систем і Обчислювальної математики Інституту математики НАН України (керівники семінару — академік НАН України Луковський І. О., академік НАН України Макаров В. Л.)

Публікації. Основні результати роботи викладено в 5 статтях ([11], [64], [12], [13], [14]), опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, а також відображено в 8 тезах доповідей на міжнародних конференціях ([15], [16], [27], [75], [76], [28], [17], [29]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел із 86 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 141 сторінку друкованого тексту. Загальний обсяг дисертації – 130 сторінок.

Дисертант висловлює щиру і глибоку вдячність своєму науковому керівникові, академіку НАН України В. Л. Макарову, за підтримку, постійну увагу та допомогу за час роботи над дисертацією.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД СТАНУ ДОСЛІДЖЕНЬ

1.1 Рівняння Клейна–Гордона та його застосуваня.

Вперше рівняння Клейна – Гордона запропонував Ервін Шредінґер, однак відмовився від нього, так і не опублікувавши його, тому, що він не зміг включити спін електрону в це рівняння. Шредінгер зробив спрощення в рівнянні Клейна – Гордона і отримав рівняння, яке тепер носить його ім'я. Таким чином, рівняння Клейна – Гордона є релятивістською версією рівняння Шредінґера. Згодом, незалежно від Шредінгера, шведський фізик Оскар Клейн, радянський фізик Володимир Фок та німецький фізик Вальтер Гордон узагальнили рівняння Шредінгера на випадок магнітних полів, в яких сили залежать від швидкості (через це іноді таке рівняння називають рівнянням Клейна – Гордона – Фока) [61].

В даній роботі розглядатиметься нелінійне рівняння Клейна – Гордона, яке в залежності від вигляду нелінійності, яка в нього входить, описує фізичні процеси різної природи, а саме рівняння:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \mathbb{N}(u(x,y)) = f(x,y). \tag{1.1}$$

Наприклад, при $\mathbb{N}(u(x,y)) = \pm\big(u(x,y) - u^3(x,y)\big)$ в теорії поля рівняння (1.1) описує рух системи елементарних частинок - адронів [44]. Якщо $\mathbb{N}(u(x,y)) = \sin(u(x,y))$, то (1.1) стає добре відомим рівнянням синус-Гордона (sine-Gordon equation), яке, зокрема, описує рух жорсткого маятника, прикріпленого до еластичної струни [79], або ж рух рідини, що швидко обертається [54]. Рівняння синус-Гордона зустрічається також при вивченні поширення магнітного потоку в переходах Джозефсона, а також динаміки доменної стінки в магнітних кристалах [38]. Крім того, в теорії сильних взаємодій рівняння синус Гордона фігурує, як спрощення класичної моделі цієї теорії [71, 80]. Рівняння (1.1) є моделлю, яка описує хвильову функцію нейтрально зарядженої елементарної частинки. Також рівняння Клейна–Гордона має важливі застосування у фізиці плазми. Зокрема, в поєднанні з рівнянням Захарова воно описує взаємодію хвиль Ленгмюра та іонно-звукових хвиль у плазмі [70]. В астрофізиці в поєднанні з рівнянням Максвелла рівняння Клейна–Гордона описує мінімально зв'язане заряджене поле бозона в сферично-симетричному просторі-часі [43]. Окрім того, в поєднанні з самим рівнянням Шредінґера воно описує систему скалярних консервативних нуклонів, які пов'язані взаємодією Юкави з нейтральними скалярними мезонами [46]. Рівняння (1.1) виникає й при вивченні скалярного масивного поля в просторах де-Сіттера та анти де-Сіттера [84, 85], при вивченні розповсюдження інтенсивних ультракоротких оптичних імпульсів з низькою щільністю діелектриків [55], піонних атомів [69] і т.д.

В реальних моделях фізичних явищ рівняння Клейна – Гордона (1.1) розглядається разом з певними початковими і/або крайовими умовами, які залежать від умов в яких відбувається явище, що моделюється. Тому в цій роботі буде розглянуто задачу Коші для нелінійного рівняння Клейна – Гордона

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \mathbb{N}(u(x,y)) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u'_y(x,y)|_{y=0} = \psi(x),$$

де $\Omega = \big\{(x,y)| - \infty < x < +\infty,\ y > 0\big\}$ та задачу Гурса для рівняння Клейна – Гордона, записаного в трохи модифікованому вигляді, більш зручному для застосування до нього запропонованого чисельно-аналітичного методу:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \mathbb{N}(u(x,y)) = f(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

$$u(x,0) = \psi(x), \quad u(0,y) = \phi(y), \quad \psi(0) = \phi(0),$$

де $D = \big\{(x,y) : 0 < x < X,\ 0 < y < Y\big\}$.

Відзначимо, що до задачі Гурса приводять проблеми процесу сушки повітряним потоком, прогрівання трубки потоком води або ж задача про поглинання (сорбцію) газу [26]. Крім того, наприклад, в геометрії задачі Гурса та Коші для рівняння синус-Гордона пов'язані з існуванням спеціальних сіток на поверхнях у просторі E^3, які називаються чебишевськими сітками [72].

1.2 Методи розв'язування рівняння Клейна – Гордона.

1.2.1 Чисельні методи. Серед чисельних методів розв'язування рівняння Клейна – Гордона найбільшу кількість складають скінченно-різницеві методи або методи сіток [40, 41, 63, 86]. Наприклад в роботі [63] розглядаються різницеві схеми для квазілінійних хвильових рівнянь, і доводиться збіжність цих схем з другим порядком точності для чотири рази неперервно-диференційованого розв'язку початкової задачі. Певна частина методів (симплектичні та мультисимплектичні скінченно-різницеві схеми, спектральні методи і т.д.) присвячено однорідним нелінійним рівнянням Клейна – Гордона [45, 78, 82]. Зокрема в [82] автори пропонують спектральний метод з використанням в якості базису функцій Лежандра. Для рівняння Клейна – Гордона з кубічною нелінійністю доводиться збіжність методу з точністю порядку $O(N^{-2})$, де через N позначено максимальну степінь поліномів Лежандра.

Розглянемо, наприклад, більш детально чотириточкову скінченно-різницеву схему для часткового випадку рівняння Клейна – Гордона, запропоновану в [23]. В області $\overline{\Omega} = [0, l_1] \times [0, l_2]$ розглядається задача Гурса

$$u''_{xy} + c(x, y)u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$u(0, y) = \phi_1(y), \quad u(x, 0) = \phi_2(x), \quad \phi_1(0) = \phi_2(0). \tag{1.3}$$

Далі, в [23] пропонується замінити область Ω сіткою, рівномірною по обох напрямках з кроками h і τ :

$$\overline{\omega}_{h,\tau} = \{(x_i, y_j) |\, x_i = ih,\, y_j = j\tau,\, i = \overline{0, n_1},\, j = \overline{0, n_2},\ n_1 h = l_1,\, n_2\tau = l_2\}. \tag{1.4}$$

Далі, задачі (1.2)–(1.3) ставиться у відповідність такий різницевий аналог

$$V_{xy} + aV_x + bV_y + dV = \phi, \quad (x, y) \in \omega_{h,\tau}, \tag{1.5}$$

$$V(0, y) = \phi_1(y), \quad V(x, 0) = \phi_2(x), \tag{1.6}$$

де

$$a_{i,j} = \frac{1}{h\tau} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} (x - x_i)c(x, y)dxdy, \quad d_{i,j} = \frac{1}{h\tau} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} c(x, y)dxdy,$$

$$b_{i,j} = \frac{1}{h\tau} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} (y - y_j) c(x,y) dxdy, \quad \phi_{i,j} = \frac{1}{h\tau} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y) dxdy.$$

Для похибки розв'язку $z = V - u$ різницевої схеми (1.5)–(1.6), за допомогою тотожності

$$u_{xy} + \frac{1}{h\tau} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} c(x,y) u(x,y) dxdy = \frac{1}{h\tau} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y) dxdy,$$

яка є наслідком рівняння (1.2), одержується задача

$$z_{xy} + a z_x + b z_y + dz = \psi, \quad (x,y) \in \omega_{h,\tau}, \tag{1.7}$$

$$z(0,y) = z(x,0) = 0, \tag{1.8}$$

де

$$\psi_{ij} = \frac{1}{h\tau} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} c(x,y) [u(x,y) - u_{ij} - (x - x_i) u_x - (y - y_j) u_y] dxdy.$$

Вводяться в розгляд наступні позначення:

$$[u,v)_h = \sum_{i=0}^{n_1-1} u_{ij} v_{ij} h, \ [u,v)_\tau = \sum_{j=0}^{n_2-1} u_{ij} v_{ij} h, \ [[u,v)_h)_\tau = \sum_{j=0}^{n_2-1} [u,v)_h \cdot \tau = [[u,v)_\tau)_h,$$

$$\|u\|^2 = [[u^2,1)_\tau)_h, \quad \|\nabla u\|^2 = \|u_x\|^2 + \|u_y\|^2.$$

Припускаючи, що $l_1 = l_2$ і $h \geq \tau$, в [23] доводиться справедливість наступної леми.

Лема 1.1. *При достатньо малому h для розв'язку задачі* (1.7)–(1.8) *справедлива апріорна оцінка*

$$\|\nabla z\| \leq M \|\psi\|, \tag{1.9}$$

де M – деяка константа, яка не залежить від h і τ.

В [23] зауважується, що оцінку (1.9) можна одержати й у випадку прямокутної області, тобто, коли $l_1 \neq l_2$.

Далі, для виведення оцінки швидкості збіжності розв'язку задачі (1.5)–(1.6) до точного розв'язку задачі (1.2)–(1.3), в [23] припускається, що для задачі (1.2)–(1.3) виконуються такі умови:

$$c(x,y),\ f(x,y) \in C_{0,\lambda}(\overline{\Omega}), \quad \phi_1,\, \phi_2 \in C_{1,\lambda},$$

$$0 \le c(x, y+\delta) \le c(x,y) \ge c(x+\delta, y), \quad \delta > 0, \tag{1.10}$$

$$(x,y),\ (x+\delta, y),\ (x, y+\delta) \in \overline{\Omega}, \quad c(x,y) \le K < \infty.$$

Тоді стверджується, що розв'язок задачі (1.2)–(1.3) $u \in C_{1,\lambda}(\overline{\Omega})$, $0 < \lambda \le 1$, і більш того він неперервно залежить від вхідних даних f, ϕ_1, ϕ_2 (цей результат доводиться за допомогою невеликих видозмін міркувань з [8] для випадку класу $C_1(\overline{\Omega})$).

І, зрештою, в [23] доводиться

Теорема 1.1. *Нехай виконуються умови* (1.10)*. Тоді при достатньо малому h розв'язок задачі* (1.5)–(1.6) *збігається до розв'язку задачі* (1.2)–(1.3) *зі швидкістю $\mathcal{O}((h+\tau)^{1+\lambda})$, де* $0 < \lambda \le 1$.

В [23] також зауважується, що викладені в цій публікації результати поширюються і на рівняння виду

$$u''_{xy} + a(y)u'_x + c(x,y)u(x,y) = f(x,y), \quad u''_{xy} + b(x)u'_y + c(x,y)u(x,y) = f(x,y).$$

В роботі [24] узагальнено результати, одержані в [23], при цьому вдалось повністю позбутись обмежень, пов'язаних з малістю розмірів прямокутників $\overline{\Omega}$, які було введено в [23].

Таким чином в [24] розглядається наступна задача Гурса

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x,y,u), \quad (x,y) \in \Omega, \tag{1.11}$$

$$u(x,0) = \phi_1(x), \quad u(0,y) = \phi_2(y), \quad \phi_1(0) = \phi_2(0). \tag{1.12}$$

$f : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$,

$$\widetilde{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y) \in \Omega,\ g(x,y) \le z \le h(x,y),\ h(x,y), g(x,y) \in C(\Omega)\}, \tag{1.13}$$

$$f(x,y,z),\ f'_z(x,y,z),\ \phi_1(x)\in C_1[0,l_1],\ \phi_2(y)\in C_1[0,l_2]. \tag{1.14}$$

В [24] відзначається, що умови (1.13)–(1.14) забезпечують існування єдиного розв'язку задачі (1.11)–(1.12) (див. перелік посилань в [24]). Далі, в [24] вводиться в розгляд рівномірна по обох напрямках сітка (1.4) (хоча, автори зауважують, що всі наведені результати залишаються вірними і у випадку нерівномірної сітки по обом напрямкам), і на цій сітці будується різницева схема

$$v_{xy}=F(x,y,v),\quad (x,y)\in\omega_{h\tau}, \tag{1.15}$$

$$v(x,0)=\phi_1(x),\quad v(0,y)=\phi_2(y),\quad \phi_1(0)=\phi_2(0), \tag{1.16}$$

де

$$F(x,y,v)_{ij}=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y,v_{ij})dxdy.$$

Для похибки $z=v-u$ розв'язку задачі (1.15)–(1.16) за допомогою тотожності

$$u_{xy}=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y,u)dxdy,$$

яке випливає з рівняння(1.11), одержується задача

$$z_{xy}=\psi(x,y,z+u),\quad (x,y)\in\omega_{h\tau}, \tag{1.17}$$

$$z(0,y)=z(x,0)=0, \tag{1.18}$$

де

$$\psi(x,y,z+u)_{ij}=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} [f(x,y,z_{ij}+u_{ij})-f(x,y,u)]dxdy.$$

В [24] доводиться наступна

Теорема 1.2. *Розв'язок $v(x,y)$ задачі* (1.17)–(1.18) *рівномірно збігається до розв'язку задачі* (1.11)–(1.12) *зі швидкстю $\mathcal{O}(h+\tau)$, тобто*

$$\|z\|_C=\|v-u\|_C=\mathcal{O}(h+\tau).$$

Нехай розв'язок $u(x,y)$ задачі (1.11)–(1.12) належить класу функцій $C_{1,\lambda}(\overline{\Omega})$, $0<\lambda\le 1$. Тоді цій здачі ставиться у відповідність наступний різницевий аналог:

$$v_{xy} = \Phi(x,y,\Lambda v), \quad (x,y)\in\omega_{h\tau},$$

$$v(x,0)=\phi_1(x), \quad v(0,y)=\phi_2(y), \quad \phi_1(0)=\phi_2(0),$$

де

$$\Phi(x,y,\Lambda v)_{ij} = \frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y,\Lambda v_{ij})dxdy,$$

$$(\Lambda v)_{ij} = v_{ij} + (x-x_i)v_x + (y-y_j)v_y.$$

Має місце така теорема [24]:

Теорема 1.3. *Якщо розв'язок* $u(x,y)$ *задачі* (1.11)–(1.12) *належить класу функцій* $C_{1,\lambda}(\overline{\Omega})$, $0<\lambda\le 1$, *то для достатньо малих* h *і* τ *є справедливою апріорна оцінка*

$$\|z\|_C = \|v-u\|_C \le K(h+\tau)^{1+\lambda},$$

де K *— стала, не залежна від* h *і* τ.

Крім того, в праці [24], одержані вище результати узагальнюються на систему рівнянь виду

$$\frac{\partial^2\overrightarrow{u}}{\partial x\partial y} = \overrightarrow{f}(x,y,\overrightarrow{u}), \quad (x,y)\in\Omega$$

з умовами Гурса

$$\overrightarrow{u}(x,0)=\overrightarrow{\phi_1}(x), \quad \overrightarrow{u}(0,y)=\overrightarrow{\phi_2}(y), \quad \overrightarrow{\phi_1}(0)=\overrightarrow{\phi_2}(0).$$

де $\overrightarrow{u}(x,y) = (u^1,u^2,\dots,u^n)$.

Припускається, що $\overrightarrow{u}(x,y)\in C_{1,\lambda}(\Omega)$, $0<\lambda\le 1$. За аналогією до скалярного випадку будується наступна різницева схема

$$\overrightarrow{v}_{xy} = \overrightarrow{\Phi}(x,y,(\Lambda\overrightarrow{v})), \quad (x,y)\in\omega_{h\tau}, \tag{1.19}$$

$$\overrightarrow{v}(x,0)=\overrightarrow{\phi_1}(x), \quad \overrightarrow{v}(0,y)=\overrightarrow{\phi_2}(y), \quad \overrightarrow{\phi_1}(0)=\overrightarrow{\phi_2}(0), \tag{1.20}$$

де

$$\overrightarrow{\Phi}(x,y,(\Lambda\overrightarrow{v}))_{ij}=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\overrightarrow{f}(x,y,(\Lambda\overrightarrow{v})_{ij})dxdy,$$

$$(\Lambda\overrightarrow{v})_{ij}=\overrightarrow{v}_{ij}+(x-x_i)\overrightarrow{v}_x+(y-y_j)\overrightarrow{v}_y.$$

Для похибки $\overrightarrow{z}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$ різницевої схеми (1.19)–(1.20) одержується задача

$$\overrightarrow{z}_{xy}=\overrightarrow{\psi}(x,y,\Lambda(z+u)),\quad (x,y)\in\omega_{h\tau}, \tag{1.21}$$

$$\overrightarrow{z}(0,y)=\overrightarrow{z}(x,0)=0, \tag{1.22}$$

де $\overrightarrow{\psi}(x,y,\Lambda(\overrightarrow{z}+\overrightarrow{u}))_{ij}=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}[\overrightarrow{f}(x,y,\Lambda(\overrightarrow{z}+\overrightarrow{u})_{ij})-\overrightarrow{f}(x,y,\overrightarrow{u})]dxdy.$
В [24] доводиться справедливість такої теореми:

Теорема 1.4. *При достатньо малих h і τ для розв'язку $\overrightarrow{z}$ задачі* (1.21)–(1.22) *справедлива апріорна оцінка*

$$\|\overrightarrow{z}\|_C\le M(h+\tau)^{1+\lambda},$$

де M — стала, не залежна від h і τ, $\|\overrightarrow{W}\|_C=\max\limits_{1\le k\le n}|W^k|$.

1.2.2 Аналітичні методи. Серед аналітичних методів розв'язування рівняння Клейна–Гордона можна виділити, зокрема, метод поліноміальної апроксимації [67], sine-cosine метод [83], розширений tanh-метод [68] та ін. Однак, серед усіх аналітичних методів розв'язування рівняння Клейна–Гордона найбільш спорідненими до FD-методу, який буде запропоновано в даній роботі, є метод гомотопій [37] та метод декомпозиції Адомяна (Adomian decomposition method - ADM) [34], тому звернемо більш детальну увагу саме на них.

Розглянемо загальну ідею методу гомотопій на прикладі наступного нелінійного рівняння [60]:

$$L(u)=0, \tag{1.23}$$

де L може бути диференціальним чи інтегральним оператором. Припускається, що розв'зок u^* рівняння (1.23) існує. Згідно загальної ідеї методу гомотопій, визначимо так звану випуклу гомотопію $H(u,p)$ наступним чином:

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0, \quad p \in [0,1], \tag{1.24}$$

де $F(u)$ є таким оператором, що розв'язок рівняння $F(u) = 0$ наперед відомий або ж легко обчислюється. З (1.24), очевидно, випливає, що $H(u,0) = F(u)$ і $H(u,1) = L(u)$. Таким чином, змінюючи неперервно в (1.24) параметр p від 0 до 1, ми будемо неперервно переходити від розв'язку рівняння $F(u) = 0$, розв'язок якого ми знаємо, до розв'язку рівняння (1.23). Припустимо, що розв'язок рівняння (1.24) може бути знайдений у вигляді ряду:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} p^k u_k, \tag{1.25}$$

де $u_1, u_2, \ldots$ – поправки до точного розв'язку рівняння (1.23), які одержуються з (1.23) при зміні параметра $p \in [0,1]$, і u_0 є розв'язком рівняння $H(u_0, 0) = F(u_0) = 0$. Тоді при $p \to 1$ рівнянням (1.23) відповідають рівняння (1.24) і ряд (1.25) апроксимує розв'язок рівняння (1.23):

$$u^* = \lim_{p \to 1} \sum_{k=0}^{\infty} p^k u_k. \tag{1.26}$$

Ряд (1.26) для більшості конкретних нелінійних операторів $L(u)$ збігається. Однак, швидкість збіжності такого ряду дуже суттєво залежить від вхідних даних задачі, які накладає сам оператор $L(u)$.

Наприклад, якщо $L(u) = Au - b$, де A –невироджена матриця порядку n, $x, b \in \mathbb{R}^n$, v_0 – початкове наближення до розв'язку системи лінійних рівнянь $L(u) = 0$, а M – допоміжна невироджена матриця (яка, взагалі кажучи, може залежати від матриці A), тоді можна побудувати випуклу гомотопію виду:

$$H(u,p) = (1-p)M(u - v_0) + p(Au - b), \quad p \in [0,1],$$

тобто це гомотопія між точкою v_0 і точним розв'язком системи $L(u) = 0$.

В [74] доводиться наступна теорема про збіжність методу гомотопій для описаної вище системи лінійних рівнянь $L(u) = 0$:

Теорема 1.5. *Якщо допоміжна матриця M вибрана таким чином, що спектральний радіус матриці $(I - M^{-1}A)$ не перевищує одиниці, тобто $\rho(I - M^{-1}A) < 1$, тоді ряд, що виражає наближений розв'язок системи лінійних рівнянь $L(u) = 0$, члени якого побудовані методом гомотопій, збігається до точного розв'язку цієї системи рівнянь.*

В своїй монографії [34], яка присвячена методу Адомяна, його автор – американський фізик Джордж Адомян підкреслив, що надзвичайно важливою проблемою передової науки і техніки є фізично коректне розв'язування нелінійних і/або стохастичних систем звичайних диференціальних рівнянь і/або диференціальних рівнянь з частинними похідними для загальних початкових/крайових умов. Зазначаючи, що сучасні процедури аналізу, які включають в себе техніку лінеаризації, метод збурень, а також, обмеження на природу і значення стохастичних процесів, суттєво змінюють ці задачі, щоб вони були придатними для застосування до них математичних методів, Дж. Адомян вважає, що основним здобутком його методу є те, що він дозволяє одержувати фізично коректні розв'язки складних систем без компромісів моделювання та розв'язування, на які зазвичай ідуть, щоб досягти застосовності багатьох сучасних методів [34, с. 6].

Розглянемо операторне диференціальне рівняння виду

$$\mathbf{F}\left(u\left(t,x\right)\right) = \psi\left(t,x\right), \quad (t,x) \in \Omega, \tag{1.27}$$

де $\mathbf{F}$ — нелінійний диференціальний оператор, який може залежати від змінних t, x, а $\psi\left(t,x\right)$ — деяка відома функція, $u\left(t,x\right)$ — невідома функція. Нехай оператор $\mathbf{F}$ може бути представлений у вигляді

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} + \mathbf{R} + \mathbf{N},$$

де $\mathbf{L}$ — лінійний диференціальний оператор, що містить оператор диференціювання найвищого порядку і який легко обертається (дію оператора $\mathbf{L}^{-1}$ досить легко обчислити аналітично), $\mathbf{R}$, — те що залишилося від лінійної складової оператора $\mathbf{F}$ після виділення оператора $\mathbf{L}$, а $\mathbf{N}$ — суттєво нелінійний оператор. Тоді маємо

$$\mathbf{L}u\left(t,x\right)=\psi\left(t,x\right)-\mathbf{R}u\left(t,x\right)-\mathbf{N}\left(u\left(t,x\right)\right),$$

звідси, очевидно, отримаємо:

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L}u\left(t,x\right)=\mathbf{L}^{-1}\psi\left(t,x\right)-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}u\left(t,x\right)-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{N}\left(u\left(t,x\right)\right). \tag{1.28}$$

Для випадку, коли розглядається рівняння Клейна-Гордона

$$\mathbf{L}_{tt}u-\mathbf{L}_{xx}u+\mathbf{N}(u)=0,$$

де $\mathbf{L}_{tt}u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \mathbf{L}_{xx}u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, очевидно, що для обидвох операторів L_{tt} та L_{xx} можна легко побудувати відповідні обернені оператори, дія яких визначатиметься наступним чином: $\mathbf{L}_{tt}^{-1}(\cdot)=\int\limits_0^t\int\limits_0^\eta(\cdot)$, $\mathbf{L}_{xx}^{-1}(\cdot)=\int\limits_0^x\int\limits_0^\xi(\cdot)$.

Дж. Адомян пропонує шукати невідому функцію $u\left(t,x\right)$ у вигляді ряду $u\left(t,x\right)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}u^{(i)}$. При цьому, він припускає, що оператор $\mathbf{N}\left(\cdot\right)$ аналітичний, тобто, вираз $\mathbf{N}\left(u\right)$ може бути представлений у вигляді

$$\mathbf{N}\left(u\right)=\mathbf{N}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\overrightarrow{u}^{(i)}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i\left(\mathbf{N}\left(\cdot\right);\ u^{(0)},u^{(1)},\ldots,u^{(i)}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}A_i, \tag{1.29}$$

де $A_n=A_n\left(\mathbf{N}\left(\cdot\right);\ u^{(0)},u^{(1)},\ldots,u^{(n)}\right)$, — так званий, *поліном Адомяна* степеня n для оператора $\mathbf{N}\left(\cdot\right)$ відносно змінних $u^{(0)},u^{(1)},\ldots,u^{(i)}$, який може бути формально обчислений за формулою (див., наприклад, [42])

$$A_n\left(\mathbf{N}\left(\cdot\right);\ u^{(0)},u^{(1)},\ldots,u^{(i)}\right)=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(\mathbf{N}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u^{(i)}\right)\right)_{\lambda=0}. \tag{1.30}$$

З іншого боку, в монографії [34] автор не наводить строгих тверджень про умови, які забезпечують збіжність ADM, посилаючись на відповідні результати французької школи математиків на чолі з Yves Cherrault (Ів Черо). Питанню збіжності ADM Дж. Адомян та його школа приділили увагу лише в двох статтях [35], [36] і зауваженнях в монографії [39].

Таким чином, в роботах [42], [31], [32], [57] французької школи математиків, на чолі з Ів Черо, розглядається питання збіжності ADM при розв'язуванні функціонального рівняння виду

$$u-\mathbf{N}\left(u\right)=\mathbf{f}, \tag{1.31}$$

де $\mathbf{N}(\cdot)$ — нелінійний оператор, що діє з гільбертового простору $\mathbf{H}$ в $\mathbf{H}$, $\mathbf{f}$ — заданий, а u — шуканий, елементи простору $\mathbf{H}$. Припускається, що рівняння (1.31) має єдиний розв'язок, а також, що має місце розклад (1.29) нелінійного оператора $\mathbf{N}(\cdot)$. Ґрунтуючись на ідеї ADM, розв'язок рівняння (1.31) шукається у вигляді ряду $u = \sum_{i=0}^{\infty} u^{(i)}$, невідомі доданки якого знаходяться як такі вирази:

$$
\begin{gathered}
u^{(0)} = \mathbf{f}, \\
u^{(1)} = A_0\left(\mathbf{N}(\cdot); u^{(0)}\right) = \mathbf{N}\left(u^{(0)}\right) = \mathbf{N}(\mathbf{f}), \\
u^{(2)} = A_1\left(\mathbf{N}(\cdot); u^{(0)}, u^{(1)}\right) = \mathbf{N}'\left(u^{(0)}\right) u^{(1)} = \mathbf{N}'(\mathbf{f})\, \mathbf{N}(\mathbf{f}), \\
\ldots .
\end{gathered}
\tag{1.32}
$$

Слід зауважити, що в загальному випадку, коли $\mathbf{N}(\cdot)$ — нелінійний оператор $\mathbf{H} \to \mathbf{H}$, похідні в формулах (1.32) слід розуміти в сенсі Фреше (див., наприклад, [25, с. 28–30]).

З формул (1.32) випливає, що збіжність ADM при розв'язуванні рівняння (1.31) еквівалентна збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\mathbf{N}(\cdot);\ u^{(0)}, \ldots, u^{(n)}\right)$. Наведемо декілька теорем, що пропонують достатні умови збіжності ADM при розв'язуванні рівняння (1.31).

Теорема 1.6. (див. [31, с. 107]) *Нехай виконуються умови*

1) *оператор* $\mathbf{N}(\cdot)$ *нескінченну кількість разів диференційовний за Фреше в околі точки* $u^{(0)} \in \mathbf{H}$, *і* $\left\|\mathbf{N}^{(n)}\left(u^{(0)}\right)\right\| \le M'$, *для всіх* $n \ge 0$;

2) $\left\|u^{(i)}\right\| \le M < 1,\ i = 1, 2, \ldots,$ *де* $\|\cdot\|$ — *норма простору* $\mathbf{H}$.

Тоді ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n\left(\mathbf{N}(\cdot);\ u^{(0)}, \ldots, u^{(n)}\right)$ *є збіжним за нормою і має місце оцінка*

$$
\left\|A_n\left(\mathbf{N}(\cdot);\ u^{(0)}, \ldots, u^{(n)}\right)\right\| \le \left(\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\right)\right) M' M^n.
$$

В докторській дисертації Abbaoui [33] була доведена наступна

Теорема 1.7. (див. [57, с. 424]) *Нехай нелінійний оператор* $\mathbf{N}(\cdot)$ *задовольняє умови:*

$$
\left\|\mathbf{N}^{(n)}\left(u^{(0)}\right)\right\| \le M,\ \forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},
$$

тоді умова

$$M \le \mathbf{e}^{-1}$$

достатня для збіжності ADM при розв'язуванні рівняння (1.31).

Дана теорема була узагальнена в [57]:

Теорема 1.8. (див. [57, с. 425]) *Нехай нелінійний оператор* $\mathbf{N}(\cdot)$ *задовольняє умови:*

$$\left\| \mathbf{N}^{(n)} \left(u^{(0)} \right) \right\| \le M\beta^n, \ \forall n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\},$$

тоді умова

$$M\beta \le \mathbf{e}^{-1}$$

достатня для збіжності ADM при розв'язуванні рівняння (1.31).

Наведемо ще ряд відомих результатів щодо достатніх умов збіжності ADM і оцінок поліномів Адомяна.

Теорема 1.9. (див. [32, с. 1187]) *Нехай оператор* $\mathbf{N}(\cdot)$ *аналітичний в* R *– околі елемента* $u^{(0)}$, $\forall\ u$: $\left\| u - u^{(0)} \right\| < R$, $R > \alpha$, *і нехай для послідовності* $\left\{ u^{(n)} \right\}$ (1.32) *мають місце нерівності* $\left\| u^{(n)} \right\| \le \dfrac{\alpha}{(1+\varepsilon)^n}$, $\forall n \ge 0$, $\varepsilon \ge \dfrac{\alpha}{R-\alpha} > 0$ (*для деякого* $\alpha > 0$). *Тоді ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \lambda^n = \mathbf{N}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} u^{(n)} \lambda^n \right)$ *є збіжним* $\forall \lambda$: $|\lambda| \le \rho$ $(\rho \ge 1)$. *А отже, при розв'язуванні рівняння* (1.31), *ADM збігається.*

Теорема 1.10. (див. [32, с. 1188]) *Нехай оператор* $\mathbf{N}(\cdot)$ *аналітичний по* u *в крузі* $\left\| u - u^{(0)} \right\| < R$; *і* $\forall n \ge 0$ *має місце оцінка* $\left\| \mathbf{N}^{(n)} \left(u^{(0)} \right) \right\| \le n! M \alpha^n$, *для деяких* $M > 0$, $\alpha > 0$. *Тоді поліноми Адомяна* (*обчислені для задачі* (1.31)) *задовольняють нерівності*

$$\|A_n\| \le \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} M^{n+1} \alpha^n.$$

Теорема 1.11. (див. [32, с. 1189]) *Нехай* $\mathbf{N}(\cdot)$ *аналітичний в точці* u_0 $\forall u\colon \left\|u - u^{(0)}\right\| < R$; *і* $\forall n \geq 0$ *має місце оцінка* $\left\|\mathbf{N}^{(n)}(u_0)\right\| \leq n! M\alpha^n$, *для деяких* $M > 0$, $\alpha > 0$. *Тоді достатніми умовами збіжності ADM при розв'язуванні рівняння* (1.31) *є:* $4M\alpha < 1$, *якщо* R *нескінченне;* $5M\alpha < 1$, *якщо* R *скінченне.*

В роботі [59] наведено наступний результат щодо збіжності ADM при його застосуванні до розв'язування операторного рівняння (1.31).

Теорема 1.12. (див. [59, с. 537]) *Нехай* $\mathbf{N}(\cdot)$ *оператор, що діє в гільбертовому просторі* $\mathbf{H}$, *а* u *— точний розв'язок рівняння* (1.31). *Тоді ряд* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} u^{(i)}$ *збігається до* u, *якщо існує таке* α, *що* $0 < \alpha < 1$, $\left\|u^{(k+1)}\right\| \leq \alpha \left\|u^{(k)}\right\|$, $\forall k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Зауважимо, що остання теорема носить з точки зору теорії тривіальний характер і не дає жодної користі для практики.

1.3 Функціонально-дискретний метод (FD-метод) розв'язування операторних рівнянь

Функціонально-дискретний метод (FD-метод) був вперше запропонований В. Л. Макаровим в роботі [18]. В цій роботі розглядається задача Штурма – Ліувілля

$$u''(t) + (\lambda - q(t))\, u(t) = 0, \quad t \in (0,\ 1), \tag{1.33}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad q(t) \geq 0$$

з кусково-гладким коефіцієнтом $q(t)$. При застосуванні цього методу до розв'язування задачі (1.33) виявилось, як показано в [18], що він має значну перевагу перед іншими відомими методами розв'язування задачі на власні значення – варіаційними та скінченно-різницевими. А саме, точність відшукання власного значення за допомогою FD-методу тим вища, чим більший порядковий номер власного значення. В той час як точність наближення власного значення варіаційними чи скінченно-різницевими методами, навпаки, тим гірше, чим вище порядковий номер відповідного власного значення. Саме цією перевагаю FD-методу зумовлений значний інтерес щодо розробки та обґрунтування техніки FD-методу розв'язування нелінійних задач Штурма – Ліувілля (див., наприклад, [21, 22, 48, 49, 66]).

В праці [47] представлено загальну схему застосування FD-методу при розв'язуванні операторного рівняння

$$\mathbf{A}_0 u + \mathbf{N}(u)\, u = \mathbf{f} \tag{1.34}$$

в банаховому просторі $\mathbb{B}$, де $\mathbf{A}_0$ є, взагалі кажучи, необмеженим лінійним оператором з областю визначення $D(\mathbf{A}_0)$, при цьому $\mathbf{N}(u)$ для кожного фіксованого $\mathbf{u} \in \mathbb{B}$ є лінійним оператором в $\mathbb{B}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{B}$. В [47] припускається, що асоційована лінійна задача

$$\mathbf{A}_0 v + \mathbf{N}(u)\, v = \mathbf{f}$$

має єдиний розв'язок v, який належить банаховому простору $\mathbb{B}$. Застосовуючи ідею FD-методу, що пов'язана з ідеєю гомотопій та теорії збурень, в [47] пропонується занурити задачу (1.34) в параметричне сімейство задач (з параметром τ)

$$\mathbf{A}_0 u(\tau) + \mathbf{N}(P_M u(\tau))\, u(\tau) + \tau \left(\mathbf{N}(u(\tau)) - \mathbf{N}(P_M u(\tau))\right) u(\tau) = \mathbf{f}, \tag{1.35}$$

$\tau \in [0,\ 1]$, де $P_M : \mathbb{B} \to \mathbb{B}_M$ — проектор, що діє з банахового простору $\mathbb{B}$ на $M-$вимірний підпростір цього самого банахового простору $\mathbb{B}$. Припускається, що розвязок параметричної задачі (1.35) існує і може бути знайдений у вигляді ряду за степенями τ :

$$u(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j u^{(j)}. \tag{1.36}$$

Крім того, припускається, що має місце розклад нелінійного оператора $\mathbf{N}(\cdot)$ за степенями τ :

$$\mathbf{N}(u(\tau)) = \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j A_j \left(\mathbf{N}; u^{(0)}, \ldots, u^{(j)}\right), \tag{1.37}$$

де $A_j\left(\mathbf{N}\left(\cdot\right);v_1,v_2,\ldots,v_j\right)$ — поліном Адомяна степеня j для оператора $\mathbf{N}\left(\cdot\right)$, відносно $v_0,v_1,\ldots,v_j$ (докладніше про поліноми Адомяна для операторів див. [77]). Якщо (1.36) має місце $\forall\tau\in[0,\ 1]$, тобто, радіус збіжності ряду (1.36) $R\geq 1$, то враховуючи, що задача (1.35) при $\tau=1$ перетворюється в задачу (1.34), одержимо розв'язок задачі (1.34) у вигляді

$$u=u\left(1\right)=\sum_{j=0}^{\infty}u^{(j)}. \tag{1.38}$$

Умова (1.37) є достатньою для того, щоб ряд (1.38) збігався саме до розв'язку задачі (1.34).

З (1.35) при $\tau=0$ одержуємо *базову задачу* для визначення $u^{(0)}$:

$$\mathbf{A}_0u^{(0)}+\mathbf{N}\left(P_Mu^{(0)}\right)u^{(0)}=\mathbf{f}, \tag{1.39}$$

Невідомі коефіцієнти $u^{(j)}\in\mathbb{B},\ j=1,2,\ldots$ ряду (1.36) знаходяться рекурсивно з послідовності лінійних задач

$$\begin{gathered}\mathbf{A}_0u^{(j+1)}+\mathbf{N}\left(P_Mu^{(0)}\right)u^{(j+1)}=\\=-A_{j+1}\Bigg(\mathbf{N}\left(\cdot\right);P_Mu^{(0)},\underbrace{0,\ldots,0}_{j},P_Mu^{(j+1)}\Bigg)u^{(0)}-F^{(j+1)},\end{gathered} \tag{1.40}$$

де

$$\begin{gathered}F^{(j+1)}=\sum_{p=1}^{j}A_{j+1-p}\left(\mathbf{N}\left(\cdot\right);P_Mu^{(0)},P_Mu^{(1)},\ldots,P_Mu^{(j+1-p)},\right)u^{(p)}+\\+\sum_{p=0}^{j}\left(A_{j-p}\left(\mathbf{N}\left(\cdot\right);u^{(0)},\ldots,u^{(j-p)}\right)-A_{j-p}\left(\mathbf{N}\left(\cdot\right);P_Mu^{(0)},\ldots,P_Mu^{(j-p)}\right)\right)u^{(p)}+\\+A_{j+1}\left(\mathbf{N}\left(\cdot\right);P_Mu^{(0)},P_Mu^{(1)},\ldots,P_Mu^{(j)},0\right)u^{(0)},\ j=0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{1.41}$$

В роботі [4] запропоновано алгоритм застосування FD-методу до розв'язування задачі Гурса для лінійного гіперболічного рівняння другого порядку та для абстрактної задачі Гурса в гільбертовому просторі. А саме, в [4] розглядається наступна задача:

$$\frac{\partial^2u(t,x)}{\partial t\partial x}+b(t,x)u(t,x)=f(t,x)\quad(t,x)\in\Omega, \tag{1.42}$$

$$u(0,x) = \phi(x),\;\; u(t,0) = \psi(t),\;\; \phi(0) = \psi(0), \tag{1.43}$$

де $\Omega = (0,T]\times(0,X]$, $\phi(x), \psi(t), b(t,x), f(t,x) \in Q^{m+1}(\overline{\Omega})$ — кусково-неперервні разом зі своїми похідними до $(m+1)$-го порядку включно. Лінії розривів $b(t,x), f(t,x)$ є прямими, паралельними координатним осям.

Згідно із загальною схемою FD-методу розв'язування операторних рівнянь загального вигляду, область Ω покривається сіткою $\omega = \omega_1 \times \omega_2$, де

$$\omega_1 = \{t_i = i\tau : i = \overline{0, N_1}, \tau = T/N_1\}, \quad \omega_2 = \{x_j = jh : j = \overline{0, N_2}, \tau = X/N_2\}.$$

Припускається, що сталі N_1 та N_2 можна вибрати таким чином, зоб лінії розривів функцій $\phi(x), \psi(t), f(t,x)$ належали ω

Дія проектора P_M визначається наступним чином: $\forall b\left(t,x\right) \in Q^{m+1}\left(\overline{\Omega}\right)$

$$P_M\left(b\left(t,x\right)\right) = b\left(t_{i-1}, x_{j-1}\right), \quad t \in \left[t_{i-1}, t_i\right),\; x \in \left[x_{i-1}, x_i\right)\; i \in \overline{1, N_1}, j\; j \in \overline{1, N_2}.$$

Наближений розв'язок задачі (1.42), (1.43) шукається у вигляді суми

$$u^m\left(t,x\right) = \sum_{i=0}^{m} u^{(i)}\left(t,x\right), \tag{1.44}$$

де $u^{(0)}\left(t,x\right)$ знаходиться з базової задачі, що є лінійною задачею Гурса з кусково-сталим аргументом

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}(t,x)}{\partial t \partial x} + P_M\left(b\left(t,x\right)\right) u^{(0)}(t,x) = f(t,x),$$

$$u^{(0)}(0,x) = \phi(x),\;\; u^{(0)}(t,0) = \psi(t),\;\; \phi(0) = \psi(0),$$

а невідомі функції $u^{(k)}\left(t\right)$ знаходяться з рекурентної послідовності лінійних задач Гурса з кусково-сталим коефіцієнтом:

$$\frac{\partial^2 u^{(k)}(t,x)}{\partial t \partial x} + P_M\left(b\left(t,x\right)\right) u^{(k)}(t,x) = \left(P_M\left(b\left(t,x\right)\right) - b(t,x)\right) u^{(k-1)}(t,x),$$

$$u^{(k)}(0,x) = \phi(x),\;\; u^{(k)}(t,0) = \psi(t), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

В [4] доведено наступну теорему щодо збіжності FD-методу для задачі (1.42), (1.43).

Теорема 1.13. *Нехай* $\phi(x) \in Q^{(1)}([0,X]), \psi(t) \in Q^{(1)}([0,T]), f(t,x) \in Q^{(1)}(\Omega)$ *і виконується нерівність*

$$\frac{\|b(t,x) - P_M(b(t,x))\|_{0,\infty,\Omega}}{\sqrt{XTM}} \leq 1.$$

Тоді FD-метод для задачі (1.42), (1.43) *є збіжним і для наближення* (1.44) *справедлива оцінка*

$$\|u(t,x) - u^m(t,x)\|_{1,2,\Omega} \leq M_1 h_1^{m+1},$$

де M_1 =const, $h_1 = \max\{h, \tau\}$, а

$$M = (T + X + XT)\exp\{(1 + 2\|P_M(b(t,x))\|_{0,\infty,\Omega})(X + T + XT)\max(X,T)\}.$$

В роботах [5] та [3] також було запропоновано алгоритм FD-методу розв'язування задачі Гурса для абстрактного гіперболічного рівняння з обмеженим операторним коефіцієнтом, алгоритм FD-методу розв'язування задачі Коші для абстрактного гіперболічного рівняння першого порядку зі змінним необмеженим операторним коефіцієнтом в гільбертовому просторі, і в усіх цих випадках було доведено теореми, які гарантують експоненціальну швидкість збіжності FD-методу.

Більш того, у ряді робіт строго доведена суперекспоненціальна швидкість збіжності FD-методу. Зокрема, це стосується застосування FD-методу до розв'язування крайової задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку [47]:

$$\begin{gathered} u''(t) - N(u(t))\,u(t) = -f(t), \quad t \in (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{gathered} \tag{1.45}$$

з нелінійною функцією $N(u) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, яка задовольняє умови

$$N(u) \geq 0,\ (uN(u))' \geq 0,\ N''(u) \geq 0,\ \forall u \in \mathbb{R}.$$

В [47] доведено наступну теорему.

Теорема 1.14. *Нехай функція* $N(u)$ *може бути представлена у вигляді ряду* $N(u) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u^{2i} a_i,\ a_i \geq 0,$ *тоді функціонально-дискретний метод збігається суперекспоненціально до точного розв'язку* $u(t)$ *задачі* (1.45) *і мають* *місце такі оцінки похибки*

$$\max_{t\in[0,1]}\left|u\left(t\right)-\sum_{i=0}^{m}u^{(i)}\left(t\right)\right|\leq\frac{C}{\left(1+m\right)^{1+\varepsilon}}\frac{\left(h/R\right)^{m+1}}{1-h/R}\quad\left(\leq C\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{\left(j+1\right)^{1+\varepsilon}}\right),\tag{1.46}$$

якщо $h<R,\quad\left(h=R\right)$, *де* ε,R,C *— сталі, що залежать лише від вхідних даних задачі.*

Достатні умови суперекспоненціальної швидкості збіжності встановлено і у випадку застосування FD-методу до розв'язування задачі Коші для системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку [20].

Характерною особливістю FD-методу є те, що завдяки вбудованому в нього параметру, в ролі якого виступає крок сітки, з одного боку, FD-метод за своєю природою є лінійним, тобто, хоч задача, наближений розв'язок якої шукається є нелінійною, але сам алгоритм FD-методу передбачає розв'язування виключно задач з кусково-сталими коефіцієнтами, а з іншого боку, наявність вбудованого параметра, як видно, зокрема з (1.46), дозволяє варіюючи його, досягти режиму збіжності методу, а також регулювати точність, тобто швидкість збіжності.

РОЗДІЛ 2
ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИСКРЕТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

2.1 Постановка задачі. Теорема про існування і єдиність локального розв'язку задачі Коші для нелінійного хвильового рівняння

Розглянемо задачу Коші для рівняння Клейна–Гордона вигляду

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \mathbb{N}(u(x,y)) = f(x,y), \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u'_y(x,y)|_{y=0} = \psi(x), \tag{2.2}$$

$(x,y) \in \Omega$, де $\Omega = \big\{(x,y)| -\infty < x < +\infty,\, y > 0\big\}$.

Позначимо через $C^k(\mathbb{R}^m)$ простір функцій, неперервно-диференційованих на $\mathbb{R}^m$ до k-го порядку включно. Через $C_b^k(\mathbb{R}^m)$ позначимо підмножину простору $C^k(\mathbb{R}^m)$, до якої входять функції $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^m)$, що задовольняють нерівність

$$\|f\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)} \overset{def}{=} \max_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |\partial^\alpha f(x)| < \infty, \tag{2.3}$$

де $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультиіндекс, $\alpha_i \ge 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ – частинна похідна порядку $|\alpha|$. Неважко показати, що лінійний простір $C_b^k(\mathbb{R}^m)$, оснащений нормою $\|\cdot\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)}$, є банаховим простором (див.[73]).

Має місце теорема, що є певним доповненням відповідних результатів з [81], де розглядається випадок $f(x,y) \equiv 0$.

Теорема 2.1. *(про локальне існування і єдиність розв'язку задачі Коші для квазілінійного хвильового рівняння). Нехай* $\mathbb{N}(u) \in C^2(\mathbb{R}), \phi(x) \in C_b^2(\mathbb{R}), \psi(x) \in C_b^1(\mathbb{R}), f(x,y) \in C_b^1(D_\varepsilon)$. *Тоді двічі неперервно-диференційований розв'язок* $u(x,y)$ *задачі Коші* (2.1), (2.2) *існує принаймні на множині*

$$D_\varepsilon = \{\mathbb{R} \times (0;\varepsilon)\}, \tag{2.4}$$

де

$$\varepsilon = \min\left\{1; \sqrt{2}\left(\max_{|u|\le M_1}\left|\mathbb{N}(u)\right|\right)^{-\frac{1}{2}}; \sqrt{2q_1}\left(\max_{|u|\le M_1}\left|\mathbb{N}'(u)\right|\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}, \tag{2.5}$$

$$M_1 = \|u_1(x,y)\|_{C(\mathbb{R}\times[0,1])} + 1, \tag{2.6}$$

$u_1(x,y)$ *– розв'язок задачі Коші* (2.1), (2.2) *при* $\mathbb{N}(u) \equiv 0$, $0 < q_1 < 1$, *і на цій множині він єдиний.*

Доведення. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $\mathbb{N}(0) = 0$ (цього завжди можна досягти, змінивши відповідним чином функцію $f(x,y)$).

Розглянемо послідовність функцій $u_n(x,y)$, які є розв'язками рекурентної системи задач Коші:

$$\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2} = \mathbb{N}(u_{n-1}(x,y)) + f(x,y),$$

$$u_n(x,0) = \phi(x),$$
$$\left.\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x), \quad n = 1,2,\ldots,$$

де $u_0(x,y) = 0$.

Використовуючи формулу Д'Аламбера, знаходимо

$$u_1(x,y) = \frac{1}{2}\big(\phi(x+y) + \phi(x-y)\big) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$u_n(x,y) = \frac{1}{2}\big(\phi(x+y) + \phi(x-y)\big) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} \mathbb{N}(u_{n-1}(\xi,\eta))d\xi d\eta, \quad n = 2,3,\ldots,$$

звідси

$$u_n(x,y) = u_1(x,y) + \frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} \mathbb{N}(u_{n-1}(\xi,\eta))d\xi d\eta. \tag{2.7}$$

Диференціюючи (2.7), одержуємо

$$\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^y \Big[\mathbb{N}\big(u_{n-1}(x+(y-\eta),\eta)\big) - \mathbb{N}\big(u_{n-1}(x-(y-\eta),\eta)\big)\Big] d\eta, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^y \Big[\mathbb{N}\big(u_{n-1}(x+(y-\eta),\eta)\big) + \mathbb{N}\big(u_{n-1}(x-(y-\eta),\eta)\big)\Big] d\eta. \tag{2.9}$$

Продовжуючи диференціювання, з (2.8), (2.9) отримуємо такі рівності:

$$\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,y)}{\partial y^2} + \mathbb{N}(u_{n-1}(x,y)) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^y \Big[\mathbb{N}'\big(u_{n-1}(\xi,\eta)\big)\big(u_{n-1}(\xi,\eta)\big)'_\xi\Big]\Big|_{\xi=x-(y-\eta)}^{\xi=x+(y-\eta)} d\eta; \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,y)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^y \Big[\mathbb{N}'\big(u_{n-1}(\xi,\eta)\big)\big(u_{n-1}(\xi,\eta)\big)'_\xi\Big]\Big|_{\xi=x-(y-\eta)}^{\xi=x+(y-\eta)} d\eta; \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x \partial y} +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^y \Big[\mathbb{N}'\big(u_{n-1}(\xi,\eta)\big)\big(u_{n-1}(\xi,\eta)\big)'_\xi\Big]\Big|_{\xi=x+(y-\eta)} +$$

$$+ \mathbb{N}'\big(u_{n-1}(\xi,\eta)\big)\big(u_{n-1}(\xi,\eta)\big)'_\xi\Big]\Big|_{\xi=x-(y-\eta)} d\eta. \tag{2.12}$$

З формули (2.7), враховуючи (2.4), (2.5), (2.6), одержуємо оцінку

$$\big\|u_n(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} \le \big\|u_1(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{2}\big\|\mathbb{N}(u_{n-1}(x,y))\big\|_{C(D_\varepsilon)} \le$$

$$\le \|u_1(x,y)\|_{C(D_1)} + 1 = M_1, \tag{2.13}$$

тобто послідовність $\{u_n(x,y)\}$ є рівномірно обмеженою на множині D_ε.

Доведемо, що вона є рівномірно збіжною в просторі $C(D_\varepsilon)$, оснащеному чебишовською метрикою. Для цього розглянемо допоміжну послідовність функцій $\{\widehat{u}_n(x,y)\}$, визначену таким чином:

$$\widehat{u}_n(x,y) \stackrel{def}{=} u_{n+1}(x,y) - u_n(x,y).$$

З формули (2.7) випливає, що

$$\big\|\widehat{u}_n(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} \le \frac{\varepsilon^2}{2}L_1\big\|u_n(x,y) - u_{n-1}(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} = \frac{\varepsilon^2}{2}L_1\big\|\widehat{u}_{n-1}(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)}, \tag{2.14}$$

де $L_1 = \max\limits_{|u|\le M_1}\big|\mathbb{N}'(u)\big|$.

Очевидно, що для вибраного нами ε (2.5), з формули (2.14) легко одержати нерівність

$$\big\|\widehat{u}_n(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} \le q\big\|\widehat{u}_{n-1}(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} \le \ldots \le q^{n-1}\big\|\widehat{u}_1(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} =$$

$$= q^{n-1}\big\|u_1(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)},$$

де $q = \dfrac{\varepsilon^2 L_1}{2}$. Для збіжності ітераційного процесу потрібно, щоб q було меншим ніж 1. Візьмемо, наприклад, $q = q_1$, тоді $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{2q_1}{L_1}}$.

Тоді

$$\big\|u_n(x,y) - u_m(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} \le \big(q^m + q^{m+1} + \ldots + q^{n-1}\big)\big\|u_1(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} =$$

$$= \frac{q^m - q^{n-1}}{1-q}\,\big\|u_1(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} \le \frac{q^m}{1-q}\,\big\|u_1(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)}, \quad \text{при } m < n.$$

З цієї нерівності випливає, що послідовність функцій $\{u_n(x,y)\}$ є рівномірно збіжною в просторі $C(D_\varepsilon)$ до деякої неперервної функції $u(x,y) \in C(D_\varepsilon)$.

Враховуючи (2.13) з рівностей (2.8)–(2.12), неважко одержати наступні оцінки:

$$\left\|\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u_m(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}, \left\|\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial u_m(x,y)}{\partial y}\right\|_{C(D_\varepsilon)} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon L_1}{2}\big\|u_{n-1}(x,y) - u_{m-1}(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)}, \tag{2.15}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_m(x,y)}{\partial y^2}\right\|_{C(D_\varepsilon)},\quad \left\|\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_m(x,y)}{\partial x^2}\right\|_{C(D_\varepsilon)},$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_m(x,y)}{\partial x\partial y}\right\|_{C(D_\varepsilon)}\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\left[L_1\left\|\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u_m(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}+\right.$$

$$\left.+\max_{|u|<M_1}\left|\mathbb{N}''(u)\right|\left\|\frac{\partial u_{m-1}(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}\left\|u_{n-1}(x,y)-u_{m-1}(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)}\right]. \qquad (2.16)$$

Оцінимо множник $\left\|\frac{\partial u_{m-1}(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}$ з нерівності (2.16). З (2.8) отримуємо:

$$\left\|\frac{\partial u_{m-1}(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}\leq\left\|\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}+$$

$$+\frac{L_1}{2}\int\limits_0^y\max_{(x,y)\in D_\varepsilon}|u_{m-2}(x+y-\eta,\eta)-u_{m-2}(x-y+\eta,\eta)|d\eta=$$

$$=\left\|\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}+\frac{L_1}{2}\int\limits_0^y\max_{(x,y)\in D_\varepsilon}\left|\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\frac{\partial u_{m-2}(t,\eta)}{\partial t}dt\right|d\eta\leq$$

$$\leq\left\|\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^2 L_1}{2}\left\|\frac{\partial u_{m-2}(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}. \qquad (2.17)$$

З нерівності (2.17) одержимо

$$\left\|\frac{\partial u_{m-1}(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}\leq\frac{1}{1-\frac{\varepsilon^2 L_1}{2}}\left\|\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}+$$

$$+\left(\frac{\varepsilon^2 L_1}{2}\right)^{m-2}\left\|\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}=\left(\frac{1}{1-q}+q^{m-2}\right)\left\|\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}. \qquad (2.18)$$

Отже, з формули (2.16), враховуючи оцінки (2.15) та (2.18), отримуємо:

$$\left\|\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 u_m(x,y)}{\partial y^2}\right\|_{C(D_\varepsilon)},\ \left\|\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_m(x,y)}{\partial x^2}\right\|_{C(D_\varepsilon)},$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u_m(x,y)}{\partial x\partial y}\right\|_{C(D_\varepsilon)}\leq\left[\frac{\varepsilon^2L_1^2}{4}+\frac{\varepsilon}{2}\max_{|u|<M_1}\left|\mathbb{N}''(u)\right|\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{1-q}+q^{m-2}\right)\left\|\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}\right]\left\|u_{n-1}(x,y)-u_{m-1}(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)}. \qquad (2.19)$$

Нерівності (2.15) та (2.19), з урахуванням вже доведеної нами фундаментальності послідовності $\{u_n(x,y)\}$ у просторі $C(D_\varepsilon)$, доводять фундаментальність послідовностей $\left\{\dfrac{\partial u_n(x,y)}{\partial x}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial u_n(x,y)}{\partial y}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x\partial y}\right\}$ у тому самому просторі $C(D_\varepsilon)$. Отже, нами доведено, що функція $u(x,y)$, яка є границею послідовності $\{u_n(x,y)\}$ у просторі $C(D_\varepsilon)$, належить простору $C^2(D_\varepsilon)$. Крім того, очевидно, що функція $u(x,y)$ задовольняє задачу Коші (2.1), (2.2) принаймні на множині D_ε.

Нехай в D_ε є два розв'язки задачі Коші (2.1), (2.2), $u(x,y), v(x,y)$ з $\|u-v\|_{C(D_\varepsilon)}\neq 0$, тоді

$$u(x,y)-v(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_0^y\int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Big[\mathbb{N}(u(\xi,\eta))-\mathbb{N}(v(\xi,\eta))\Big]d\xi d\eta,$$

звідки одержуємо нерівність

$$\|u-v\|_{C(D_\varepsilon)}\leq q\|u-v\|_{C(D_\epsilon)},$$

яка призводить до протиріччя. Теорему доведено.

Зауваження 2.1. *Доведену теорему можна узагальнити на багатовимірний випадок, коли замість* $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ *у рівнянні* (2.1) *стоїть оператор Лапласа* $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\dfrac{\partial^2}{\partial x_m^2}$. *У випадках* $m=2,3$ *замість формули Д'Аламбера слід використовувати формулу Кірхгофа.*

2.2 Загальний опис алгоритму FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона

Нехай умови теореми 2.1 є виконаними і, більш того, $N(u) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Надалі будемо розглядати задачу Коші (2.1), (2.2) в області $D \subseteq \Omega$:

$$D = \big\{(x,y)|\, 0 < y \le Y_M, X_M - (Y_M - y) < x < X_M + (Y_M - y),$$
$$- \infty < X_M < +\infty, Y_M > 0, Y_M < \varepsilon\big\},$$

де стала ε визначається теоремою 2.1 (див. рис.1).

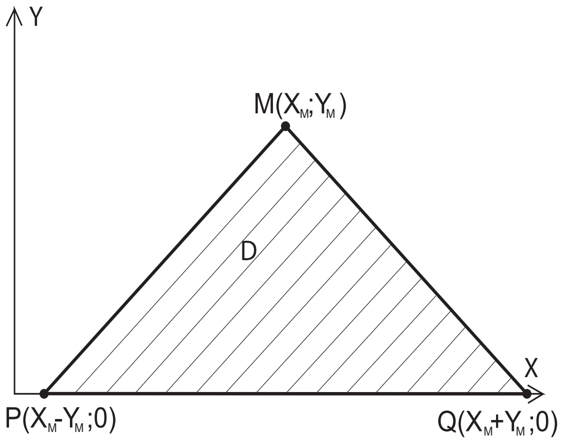

Рис 1. Область D

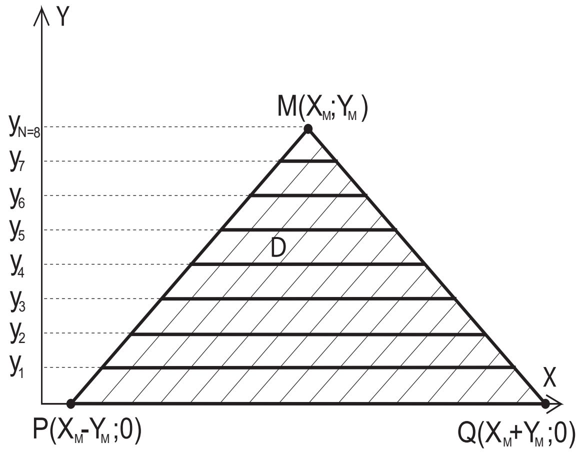

Рис 2. Розбиття області D

Згідно із загальною схемою FD-методу розв'язування операторних рівнянь, викладеною в [47], будемо наближати точний розв'язок $u(x,y)$ задачі функцією $\overset{m}{u}(x,y)$, яку можна подати у вигляді суми

$$\overset{m}{u}(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \overset{(k)}{u}(x,y), \quad m \in \mathbf{N}.$$

Для визначення функцій $\overset{(k)}{u}(x,y)$ введемо таке розбиття області D (див. рис.2):

$$y_j = y_0 + jh,\, y_0 = 0,\, h = Y_M/N,\, j = \overline{1,N} \tag{2.20}$$

для деякого фіксованого натурального N.

Далі розглянемо наступне узагальнення задачі Коші (2.1), (2.2):

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u(x,y,\tau)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x,y,\tau)}{\partial x^2} - \mathbb{N}\big(u_\perp(x,y,\tau)\big) - \\ - \tau\big[\mathbb{N}\big(u(x,y,\tau)\big) - \mathbb{N}\big(u_\perp(x,y,\tau)\big)\big] = f(x,y), \quad (x,y,\tau) \in D_\tau, \end{gathered} \tag{2.21}$$

$$u(x,0,\tau) = \phi(x),\ \ u'_y(x,y,\tau)\big|_{y=0} = \psi(x),$$
$$\forall x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M],\ \forall\tau \in [0,1],$$
$$\big(u(x,y_j+0,\tau) - u(x,y_j-0,\tau)\big) \equiv \big[u(x,y,\tau)\big]_{y=y_j} = 0, \tag{2.22}$$
$$\big[u'_y(x,y,\tau)\big]_{y=y_j} = 0,\ \forall x \in [X_M - (Y_M - y_j); X_M + (Y_M - y_j)],$$
$$\forall j \in \overline{1, N-1}.$$

де $u(x,y,\tau) \in C^2(D_\tau)$,

$$D_\tau = \big\{(x,y,\tau) \in [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (0, Y_M] \times [0,1]\big\},$$

$$u_\perp(x,y,\tau) \equiv\ u(x,y_j,\tau),\ \forall j \in \overline{0, N-1},$$
$$\forall(x,y,\tau) \in [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (y_j, y_{j+1}] \times [0,1].$$

Нехай мають місце такі припущення:

a) розв'язок $u(x,y,\tau)$ задачі (2.21), (2.22) існує для будь-якого $\tau \in [0,1]$;

b) розв'язок $u(x,y,\tau)$ можна знайти у вигляді ряду

$$u(x,y,\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \overset{(i)}{u}(x,y)\tau^i; \tag{2.23}$$

крім того,

$$\frac{\partial u(x,y,\tau)}{\partial x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial \overset{(i)}{u}(x,y)}{\partial x}\tau^i, \quad \frac{\partial u(x,y,\tau)}{\partial y} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial \overset{(i)}{u}(x,y)}{\partial y}\tau^i,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,\tau)}{\partial x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^2 \overset{(i)}{u}(x,y)}{\partial x^2}\tau^i, \quad \frac{\partial^2 u(x,y,\tau)}{\partial y^2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^2 \overset{(i)}{u}(x,y)}{\partial y^2}\tau^i$$
$$\forall (x,y,\tau) \in D_\tau,$$

де функції $\overset{(i)}{u}(x,y)$ не залежать від τ.

З припущень "a" та "b" випливає, що $u(x,y) = u(x,y,1) \overset{def}{\equiv} \overset{(\infty)}{u}(x,y)$, тобто розв'язок $u(x,y)$ задачі Коші (2.1), (2.2) можна з довільною точністю знайти за допомогою функції $\overset{m}{u}(x,y)$. Підставляючи ряд (2.23) у задачу (2.21), (2.22) та прирівнюючи функціональні коефіцієнти при однакових степенях

τ, одержимо задачу Коші відносно невідомої функції $\overset{(0)}{u}(x,y)$, яку будемо називати *базовою задачею:*

$$\frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x^2} = f(x,y) + \mathbb{N}\big(\overset{(0)}{u}(x,y_{j-1})\big), \tag{2.24}$$

$$(x,y) \in D_j = [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (y_{j-1}, y_j],\ j = \overline{1,N},$$

$$\big(\overset{(0)}{u}(x,y_j+0) - \overset{(0)}{u}(x,y_j-0)\big) \equiv \big[\overset{(0)}{u}(x,y)\big]_{y=y_j} = 0, \tag{2.25}$$

$$\big[\overset{(0)}{u'}_y(x,y)\big]_{y=y_j} = 0, \quad \forall x \in [X_M - (Y_M - y_j), X_M + (Y_M - y_j)],$$

$$\forall j \in \overline{1, N-1},$$

$$\overset{(0)}{u}(x,0) = \phi(x), \quad \overset{(0)}{u'}_y(x,0) = \psi(x), \quad \forall x \in [X_M - Y_M; X_M + Y_M],$$

і рекурентну послідовність задач Коші відносно функцій $\overset{(k)}{u}(x,y)$, $k = 1,2,\ldots$:

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x^2} = \mathbb{N}'(\overset{(0)}{u}_\perp(x,y))\,\overset{(k)}{u}_\perp(x,y) - F_k(x,y)\,\forall (x,y) \in D, \tag{2.26}$$

$$\Big[\overset{(k)}{u}(x,y)\Big]_{y=y_j} = 0, \quad \left[\frac{\partial \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial y}\right]_{y=y_j} = 0,$$

$$\forall x \in [X_M - (Y_M - y_j), X_M + (Y_M - y_j)] \quad \forall j \in \overline{1, N-1}, \tag{2.27}$$

$$\overset{(k)}{u}(x,0) = 0,\ \left.\frac{\partial \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M], k = 1,2,\ldots,$$

де

$$u_\perp(x,y) = u(x,y_j)\,\forall (x,y) \in D_{j+1}\,\forall j \in \overline{0, N-1},$$

$$\begin{gathered} F_k(x,y) = A_k(\mathbb{N}; \overset{(0)}{u}_\perp(x,y); \overset{(1)}{u}_\perp(x,y); \ldots; \overset{(k-1)}{u}_\perp(x,y); 0) + \\ + A_{k-1}(\mathbb{N}; \overset{(0)}{u}(x,y); \overset{(1)}{u}(x,y); \ldots; \overset{(k-1)}{u}(x,y)) - \\ - A_{k-1}(\mathbb{N}; \overset{(0)}{u}_\perp(x,y); \overset{(1)}{u}_\perp(x,y); \ldots; \overset{(k-1)}{u}_\perp(x,y)), (x,y) \in D,\ k = 1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Тут $A_n\big(N; v_0, v_1, \ldots, v_n\big)$ – поліноми Адомяна n-го порядку для функції $N(\cdot)$ (див., наприклад, [77, 30]), які можна обчислити за формулою

$$A_n\big(N; v_0, v_1, \ldots, v_n\big) = \frac{1}{n!}\,\frac{d^n}{d\tau^n} N\Big(\sum_{s=0}^{\infty} v_s \tau^s\Big)\Big|_{\tau=0} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=n \\ \alpha_1\geq\ldots\geq\alpha_{n+1}=0 \\ \alpha_i\in\mathbf{N}\cup\{0\}}} N^{(\alpha_1)}(v_0)\frac{v_1^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!}\cdots\frac{v_n^{\alpha_n-\alpha_{n+1}}}{(\alpha_n-\alpha_{n+1})!}. \tag{2.29}$$

2.3 Обґрунтування збіжності FD-методу для задачі Коші

Перш ніж сформулювати та довести теорему про збіжність FD-методу для задачі Коші, доведемо допоміжне твердження про апроксимаційні властивості базової задачі (2.24), (2.25) FD-методу. Воно грає ключову роль в доведенні теореми, яка забезпечує достатні умови збіжності цього методу.

Точний розв'язок $\overset{(0)}{u}(x,y)$ базової задачі (2.24), (2.25) з використанням формули Д'Аламбера, можна подати у вигляді (див., наприклад, [10]):

$$\overset{(0)}{u}(x,y) = \frac{1}{2}\Big(\overset{(0)}{u}(x-(y-y_{j-1}),y_{j-1}) + \overset{(0)}{u}(x+(y-y_{j-1}),y_{j-1})\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-(y-y_{j-1})}^{x+(y-y_{j-1})} \left.\frac{\partial\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=y_{j-1}} d\xi \; + \tag{2.30}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{y_{j-1}}^{y}\int\limits_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)}\Big[f(\xi,\eta)-\mathbb{N}\big(\overset{(0)}{u}(\xi,y_{j-1})\big)\Big]d\xi d\eta\,\forall(x,y)\in D_j,\;\; j=\overline{1,N},$$

$$\Big[\overset{(0)}{u}(x,y)\Big]_{y=y_j} = 0,\;\; \left[\frac{\partial\overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial y}\right]_{y=y_j} = 0,$$

$$\forall x\in[X_M-(Y_M-y_j),X_M+(Y_M-y_j)],\;\; \forall j=\overline{1,N-1},$$

$$\overset{(0)}{u}(x,0)=\phi(x),\; \left.\frac{\partial\overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \psi(x) \quad \forall x\in[X_M-Y_M;X_M+Y_M].$$

Доведемо справедливість наступної теореми.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови теореми 2.1, а* $u(x,y)$ *та* $\overset{(0)}{u}(x,y)$[1)] *розв'язки задач відповідно* (2.1), (2.2) *та* (2.24), (2.25)*. Тоді для достатньо*

[1)]Не виключається існування глобального розв'язку.

малого h виконується оцінка:

$$\big\|u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y)\big\|_{\infty,\overline{D}} \le hK_1 \left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\infty,\overline{D}},$$

де $\big\|u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y)\big\|_{\infty,\overline{D}} = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y)|$, *стала* K_1 *не залежить від* h.

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$Z(x,y) = u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y).$$

Очевидно, що вона є неперервною в області D і задовольняє допоміжну задачу Коші:

$$\frac{\partial^2 Z(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Z(x,y)}{\partial x^2} = \mathbb{N}\big(\overset{(0)}{u}(x,y_{j-1})\big) - \mathbb{N}\big(u(x,y)\big), \tag{2.31}$$

$$\big(Z(x,y_j+0) - Z(x,y_j-0)\big) \equiv \big[Z(x,y)\big]_{y=y_j} = 0, \tag{2.32}$$

$$\left[\frac{\partial Z(x,y)}{\partial y}\right]_{y=y_j} = 0 \quad \forall x \in [X_M - (Y_M - y_j), X_M + (Y_M - y_j)],$$

$$\forall j \in \overline{1, N-1},$$

$$Z(x,0) = \left.\frac{\partial Z(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \quad \forall x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M].$$

Для доведення теореми достатньо показати, що для досить малого значення h існує незалежна від нього стала γ така, що має місце оцінка

$$\|Z(x,y)\|_{\overline{D}_j} \le h\gamma, \quad \forall j \in \overline{1, N-1}, \tag{2.33}$$

де $\|Z(x,y)\|_{\overline{D}_j} = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}_j} |Z(x,y)|$. Дійсно, оскільки $\big\|Z(x,y)\big\|_{\infty,\overline{D}} = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} |Z(x,y)|$, то

$$\big\|Z(x,y)\big\|_{\infty,\overline{D}} = \max_{(x,y)\in\bigcup\limits_{j=1}^{N}\overline{D}_j} |Z(x,y)| = \max_{j=\overline{1,N}} \max_{(x,y)\in\overline{D}_j} |Z(x,y)| = \max_{j=\overline{1,N}} \|Z(x,y)\|_{\overline{D}_j}.$$

Припустимо, що для функції $\mathbb{N}(u)$ існує стала $L > 0$ така, що виконується нерівність

$$\big|\mathbb{N}(u_1) - \mathbb{N}(u_2)\big| \le L|u_1 - u_2| \tag{2.34}$$

$\forall u_1, u_2 \in R$ таких, що

$$\begin{cases} \|u(x,y) - u_1\|_{\overline{D}} \leq 1, \\ \|u(x,y) - u_2\|_{\overline{D}} \leq 1. \end{cases} \tag{2.35}$$

Введемо такі позначення:

$$Z(x,y) \equiv Z_j(x,y), (x,y) \in D_j,\ j = \overline{1,N},$$

$$W_n^{\pm} = \frac{\partial Z_n(x,y)}{\partial x} \pm \frac{\partial Z_n(x,y)}{\partial x}.$$

З рівняння (2.31), використовуючи формулу Д'Аламбера, отримуємо

$$Z_n(x,y) = \frac{1}{2}\Big(Z_{n-1}(x-(y-y_{n-1}), y_{n-1}) + Z_{n-1}(x+(y-y_{n-1}), y_{n-1})\Big) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-(y-y_{n-1})}^{x+(y-y_{n-1})} \frac{\partial Z_{n-1}(\xi,\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=y_{n-1}} d\xi + \tag{2.36}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{y_{n-1}}^{y}\int\limits_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} \Big[\mathbb{N}\big(\overset{(0)}{u}(\xi, y_{n-1}) - \mathbb{N}\big(u(\xi,\eta)\big)\Big] d\xi d\eta.$$

Тоді

$$\frac{\partial Z_n(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial Z_{n-1}(\xi,y_{n-1})}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=x+(y-y_{n-1})} - \frac{\partial Z_{n-1}(\xi,y_{n-1})}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=x-(y-y_{n-1})}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial Z_{n-1}(x+(y-y_{n-1}),\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=y_{n-1}} + \frac{\partial Z_{n-1}(x-(y-y_{n-1}),\eta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=y_{n-1}}\right] + \tag{2.37}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{y_{n-1}}^{y}\Bigg[\mathbb{N}\Big(\overset{(0)}{u}\ (x+(y-\eta), y_{n-1})\Big) - \mathbb{N}\Big(u(x+(y-\eta),\eta)\Big) +$$

$$+\mathbb{N}\Big(\overset{(0)}{u}\ (x-(y-\eta), y_{n-1})\Big) - \mathbb{N}\Big(u(x-(y-\eta),\eta)\Big)\Bigg] d\eta;$$

$$\frac{\partial Z_n(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial Z_{n-1}(\xi,y_{n-1})}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=x+(y-y_{n-1})} + \frac{\partial Z_{n-1}(\xi,y_{n-1})}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=x-(y-y_{n-1})}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial Z_{n-1}(x+(y-y_{n-1}),\eta)}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=y_{n-1}}+\frac{\partial Z_{n-1}(x-(y-y_{n-1}),\eta)}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=y_{n-1}}\right]+ \tag{2.38}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{y_{n-1}}^{y}\left[\mathbb{N}\Big(\overset{(0)}{u}(x+(y-\eta),y_{n-1})\Big)-\mathbb{N}\Big(u(x+(y-\eta),\eta)\Big)-\right.$$

$$\left.-\mathbb{N}\Big(\overset{(0)}{u}(x-(y-\eta),y_{n-1})\Big)+\mathbb{N}\Big(u(x-(y-\eta),\eta)\Big)\right]d\eta.$$

Підсумовуючи формули (2.37), (2.38), одержуємо

$$W_n^{\pm}(x,y)=W_{n-1}^{\pm}(x\pm(y-y_{n-1}),y_{n-1})\pm$$

$$\pm\int\limits_{y_{n-1}}^{y}\left[\mathbb{N}\Big(\overset{(0)}{u}(x\pm(y-\eta),y_{n-1})\Big)-\mathbb{N}\Big(u(x\pm(y-\eta),\eta)\Big)\right]d\eta, \tag{2.39}$$

звідси приходимо до оцінки

$$\Big\|W_n^{\pm}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_n}\leq\Big\|W_{n-1}^{\pm}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-1}}+Lh\Big\|Z_{n-1}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-1}}+\frac{Lh^2}{2}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}_n}. \tag{2.40}$$

З рівностей (2.36) та (2.37) маємо:

$$\Big\|Z_n(x,y)\Big\|_{\overline{D}_n}\leq\left(1+\frac{h^2L}{2}\right)\Big\|Z_{n-1}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-1}}+\frac{h}{2}\left\|\frac{\partial Z_{n-1}(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}_{n-1}}+$$

$$+\frac{Lh^3}{6}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}_n}, \tag{2.41}$$

$$\left\|\frac{\partial Z_{n-1}(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}\leq\frac{1}{2}\left(\Big\|W_{n-2}^{+}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-2}}+\Big\|W_{n-2}^{-}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-2}}\right)+$$

$$+Lh\Big\|Z_{n-2}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-2}}+\frac{Lh^2}{2}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}_{n-1}}. \tag{2.42}$$

Підставивши (2.42) у праву частину (2.41), отримаємо

$$\Big\|Z_n(x,y)\Big\|_{\overline{D}_n}\leq\left(1+\frac{h^2L}{2}\right)\Big\|Z_{n-1}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-1}}+\frac{Lh^2}{2}\Big\|Z_{n-2}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-2}}+$$

$$+\frac{h}{4}\left(\left\|W_{n-2}^{+}(x,y)\right\|_{\overline{D}_{n-2}}+\left\|W_{n-2}^{-}(x,y)\right\|_{\overline{D}_{n-2}}\right)+$$

$$+\frac{Lh^3}{2}\left(\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}_{n-1}}+\frac{1}{3}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}_{n}}\right). \qquad (2.43)$$

Збільшимо праві частини (2.36) та (2.43), замінивши тут і далі $\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}_p}, p=\overline{1,N}$ на $\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}$, а потім знак нерівності $\leq$ на знак рівності $=$. Як наслідок, одержимо мажорантну рекурентну систему рівнянь:

$$a_n=\left(1+\frac{Lh^2}{2}\right)a_{n-1}+\frac{Lh^2}{2}a_{n-2}+\frac{h}{4}\left(b_{n-2}^{+}+b_{n-2}^{-}\right)+\frac{Lh^3}{2}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}},$$

$$b_n^{\pm}=b_{n-1}^{\pm}+Lha_{n-1}+\frac{Lh^2}{2}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}, \quad n=3,4,\ldots, \qquad (2.44)$$

у тому сенсі, що

$$\left\|Z_n(x,y)\right\|_{\overline{D}_n}\leq a_n,\ \left\|W_n^{\pm}(x,y)\right\|_{\overline{D}_n}\leq b_n^{\pm}.$$

Доповнимо систему (2.44) початковими умовами

$$a_1=\frac{Lh^3}{6}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}\geq\left\|Z_1(x,y)\right\|_{\overline{D}_1},$$

$$b_1^{\pm}=\frac{Lh^2}{4}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}\geq\left\|\frac{\partial Z_1(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial Z_1(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}_1},$$

$$a_2=Lh^3\left(\frac{7}{6}+\frac{Lh^2}{2}\right)\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}\geq\left\|Z_2(x,y)\right\|_{\overline{D}_2}, \qquad (2.45)$$

$$b_2^{\pm}=\frac{Lh^2}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{Lh^2}{3}\right)\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}\geq\left\|W_2^{\pm}(x,y)\right\|_{\overline{D}_2}.$$

Перейдемо від (2.44) (2.45) до векторно-матричної форми запису:

$$\overrightarrow{c}_n=\begin{bmatrix}1+\frac{Lh^2}{2} & 0 & 0\\ Lh & 1 & 0\\ Lh & 0 & 1\end{bmatrix}\overrightarrow{c}_{n-1}+\begin{bmatrix}\frac{Lh^2}{2} & \frac{h}{4} & \frac{h}{4}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\overrightarrow{c}_{n-2}+$$

$$+\frac{Lh^2}{2}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}\begin{bmatrix}h\\1\\1\end{bmatrix},\quad n=3,4,\ldots,$$

$$\overrightarrow{c}_1=\frac{Lh^2}{2}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}\begin{bmatrix}h/3\\1/2\\1/2\end{bmatrix},\tag{2.46}$$

$$\overrightarrow{c}_2=\frac{Lh^2}{2}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}\begin{bmatrix}h\Big(7/3+Lh^2/2\Big)\\3/2+Lh^2/3\\3/2+Lh^2/3\end{bmatrix},$$

де

$$\overrightarrow{c}_n=\begin{bmatrix}a_n\\b_n^+\\b_n^-\end{bmatrix}.$$

Виконаємо оцінку (2.46), використовуючи першу векторну і матричну норми. Отримуємо:

$$\|\overrightarrow{c}_n\|_{\mathbb{R}^3}\le\big(1+Lh\big)\|\overrightarrow{c}_{n-1}\|_{\mathbb{R}^3}+\frac{h}{2}\big(1+Lh\big)\|\overrightarrow{c}_{n-2}\|_{\mathbb{R}^3}+\frac{Lh^2}{2}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}},$$

$$n=3,4,\ldots,$$

$$\|\overrightarrow{c}_1\|_{\mathbb{R}^3}\le\frac{Lh^2}{4}\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}=c_1,\tag{2.47}$$

$$\|\overrightarrow{c}_2\|_{\mathbb{R}^3}\le\frac{Lh^2}{2}\big(3/2+Lh^2/3\big)\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}=c_2.$$

Розв'язок (2.47), одержаний стандартним способом розв'язування різницевих рівнянь, має вигляд

$$\|\overrightarrow{c}_n\|_{\mathbb{R}^3}\le s\lambda_1^{n-1}+t\lambda_2^{n-1}+g,\quad n=1,2,\ldots,$$

де

$$\lambda_i=\frac{1}{2}\left(1+Lh+(-1)^{i+1}\sqrt{\big(1+Lh\big)^2+2h(1+Lh)}\right),\quad i=1,2,$$

$$s = \frac{c_1\lambda_2 - c_2 + g(1-\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1},\ t = \frac{c_1\lambda_1 - c_2 + g(1-\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$g = \frac{-Lh\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}}}{1 + L(2+h)}.$$

Враховуючи оцінки

$$|s|, |t|, |g| \leq hL\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}},$$

$$(\lambda_1)^{n-1} \leq (\lambda_1)^N \leq \left[1 + (1+L)\frac{\varepsilon}{N}\right]^N \leq \exp\left(\varepsilon(1+L)\right),$$

$$|\lambda_2| \leq \frac{h}{2}$$

переконуємося у справедливості твердження теореми.

Згідно з теоремою 2.2, розв'язок $\overset{(0)}{u}(x,y)$ базової задачі (2.24), (2.25) наближає розв'язок $u(x,y)$ вихідної задачі (2.1), (2.2) з порядком h, де h – крок розбиття (2.20). Крім того, оскільки розв'язок базової задачі при кожному фіксованому розбитті області D є єдиним, то з теореми 2.2, як наслідок, випливає той факт, що якщо задача (2.1), (2.2) має розв'язок $u(x,y) \in C^2(D)$, то такий розв'язок також є єдиним. З іншого боку, теорема 2.2 показує, що початкові дані $\phi(x), \psi(x)$, задачі на відрізку $[X_M - Y_M, X_M + Y_M]$ єдиним чином визначають розв'язок $u(x,y)$ рівняння (2.1) в характеристичному трикутнику D (на відміну від лінійного випадку, коли цей факт майже очевидний, для нелінійного випадку він потребує окремого обґрунтування (див. [73])).

Перейдемо безпосередньо до встановлення достатніх умов збіжності FD-методу розв'язування задачі Коші (2.1), (2.2). Для цього використаємо техніку, що була застосована при доведенні теореми 2.2.

Застосовуючи формулу Д'Аламбера до k-го рівняння системи (2.26), (2.27), отримуємо рівність

$$\overset{(k)}{u}_n(x,y) = \frac{1}{2}\left(\overset{(k)}{u}_{n-1}(x-(y-y_{n-1}), y_{n-1}) + \overset{(k)}{u}_{n-1}(x+(y-y_{n-1}), y_{n-1}))\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-(y-y_{n-1})}^{x+(y-y_{n-1})} \left.\frac{\partial \overset{(k)}{u}_{n-1}(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=y_{n-1}} d\xi + \tag{2.48}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{y_{n-1}}^{y}\int\limits_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)}\Big[-F_k(\xi,\eta)+\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}_{n-1}(\xi,y_{n-1})\Big)\overset{(k)}{u}_{n-1}(\xi,y_{n-1})\Big]d\xi d\eta.$$

З (2.48) неважко одержати такі рівності:

$$\frac{\partial \overset{(k)}{u}_{n-1}(x,y)}{\partial y}=\frac{1}{2}\Bigg(-\overset{(k)}{\Phi}{}^{-}_{n-2}(x,y)+\overset{(k)}{\Phi}{}^{+}_{n-2}(x,y)\Bigg)+$$

$$\begin{gathered}+\frac{1}{2}\int\limits_{y_{n-2}}^{y}\Bigg[-F_k(x+(y-\eta),\eta)+\\ +\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}_{n-1}(x+(y-\eta),y_{n-2})\Big)\overset{(k)}{u}_{n-2}(x+(y-\eta),y_{n-2})\Bigg]d\eta+\\ +\frac{1}{2}\int\limits_{y_{n-2}}^{y}\Bigg[-F_k(x-(y-\eta),\eta)+\\ +\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}_{n-1}(x-(y-\eta),y_{n-2})\Big)\overset{(k)}{u}_{n-2}(x-(y-\eta),y_{n-2})\Bigg]d\eta,\end{gathered}\tag{2.49}$$

де

$$\overset{(k)}{\Phi}{}^{\pm}_{n}(x,y)\equiv\frac{\partial \overset{(k)}{u}_{n}(x,y)}{\partial x}\pm\frac{\partial \overset{(k)}{u}_{n}(x,y)}{\partial y}=\overset{(k)}{\Phi}{}^{\pm}_{n}(x+y-y_{n-1},y)\pm$$

$$\begin{gathered}\pm\int\limits_{y_{n-1}}^{y}\Bigg[-F_k(x\pm(y-\eta),\eta)+\\ +\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}_{n-1}(x\pm(y-\eta),y_{n-1})\Big)\overset{(k)}{u}_{n-1}(x\pm(y-\eta),y_{n-1})\Bigg]d\eta.\end{gathered}\tag{2.50}$$

З формул (2.48)–(2.50) одержимо наступну рекурентну систему нерівностей:

$$\begin{gathered}\Big\|\overset{(k)}{u}_{n}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_n}\le\Bigg(1+\frac{h^2}{2}\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\Bigg)\Big\|\overset{(k)}{u}_{n-1}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-1}}+\\ +\frac{h}{2}\Bigg(\Big\|\overset{(k)}{\Phi}{}^{+}_{n-2}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-2}}+\Big\|\overset{(k)}{\Phi}{}^{-}_{n-2}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-2}}\Bigg)+\\ +h^2\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\Big\|\overset{(k)}{u}_{n-2}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-2}}+\frac{3h^2}{2}\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}},\end{gathered}\tag{2.51}$$

$$\Big\|\overset{(k)}{\Phi}{}^{\pm}_{n}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_n} \le \Big\|\overset{(k)}{\Phi}{}^{\pm}_{n-1}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-1}} +$$

$$+h\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\Big\|\overset{(k)}{u}_{n-1}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_{n-1}} + h\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}}, n=3,4,\ldots,$$

яку доповнюємо початковими умовами

$$\Big\|\overset{(k)}{u}_1(x,y)\Big\|_{\overline{D}_1} \le \frac{h^2}{2}\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}} = \alpha_1,$$

$$\Big\|\overset{(k)}{u}_2(x,y)\Big\|_{\overline{D}_2} \le \frac{h^2}{2}\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}}\left(4+\frac{h^2}{2}\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\right) = \alpha_2, \qquad (2.52)$$

$$\Big\|\overset{(k)}{\Phi}{}^{\pm}_{1}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_1} \le h\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}} = \beta_1^{\pm},$$

$$\Big\|\overset{(k)}{\Phi}{}^{\pm}_{2}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_2} \le h\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}}\left(2+\frac{h^2}{2}\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\right) = \beta_2^{\pm}.$$

Запишемо у векторно-матричному вигляді систему рівнянь, розв'язок якої мажорує розв'язок (2.51), (2.52):

$$\overrightarrow{\gamma}_n = \begin{bmatrix} \left(1+\frac{h^2}{2}\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\right. & 0 & 0 \\ h\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}} & 1 & 0 \\ h\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}} & 0 & 1 \end{bmatrix}\overrightarrow{\gamma}_{n-1} +$$

$$+\begin{bmatrix} h^2\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}} & \frac{h}{2} & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\overrightarrow{\gamma}_{n-2} + h\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}}\begin{bmatrix} \frac{3}{2}h \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad n=3,4,\ldots, \qquad (2.53)$$

$$\overrightarrow{\gamma}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1^+ \\ \beta_1^- \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{\gamma}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2^+ \\ \beta_2^- \end{bmatrix},$$

де

$$\overrightarrow{\gamma}_n = \begin{bmatrix} \Big\|\overset{(k)}{u}_n(x,y)\Big\|_{\overline{D}_n} \\ \Big\|\overset{(k)}{\Phi}{}^{+}_{n}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_n} \\ \Big\|\overset{(k)}{\Phi}{}^{-}_{n}(x,y)\Big\|_{\overline{D}_n} \end{bmatrix}.$$

Оцінимо ліву і праву частини (2.53), використовуючи першу векторну і матричну норми. Матимемо

$$\big\|\gamma_n\big\|_{\mathbb{R}^3} \le \left(1+\frac{h^2}{2}\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\right)\big\|\gamma_{n-1}\big\|_{\mathbb{R}^3}+$$

$$+h\left(1+\frac{h^2}{2}\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\right)\big\|\gamma_{n-2}\big\|_{\mathbb{R}^3}+h\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}},\ n=3,4,\ldots, \quad (2.54)$$

$$\big\|\gamma_1\big\|_{\mathbb{R}^3} \le h\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}},$$

$$\big\|\gamma_2\big\|_{\mathbb{R}^3} \le h\left(1+\frac{h^2}{2}\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\right)\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}}.$$

Розв'язок (2.54), одержаний стандартним способом розв'язування різницевих рівнянь, має вигляд

$$\big\|\overrightarrow{\gamma}_n\big\|_{\mathbb{R}^3} \le s\lambda_1^{n-1}+t\lambda_2^{n-1}+g=\sigma_n\Big(h,\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\Big),\ n=1,2,\ldots,$$

де

$$\lambda_i=\frac{1}{2}\Big(\mu+(-1)^i\sqrt{\mu^2+4h\mu}\Big),\quad i=1,2, \quad (2.55)$$

$$\mu=1+h\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}},\ g=\frac{h\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}}}{1-\mu-h\mu},$$

$$s=\frac{\big\|\gamma_1\big\|_{\mathbb{R}^3}\lambda_2-\big\|\gamma_2\big\|_{\mathbb{R}^3}+g(1-\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1},$$

$$t=\frac{\big\|\gamma_1\big\|_{\mathbb{R}^3}\lambda_1-\big\|\gamma_2\big\|_{\mathbb{R}^3}+g(1-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Враховуючи оцінки

$$(\lambda_1)^{n-1}\le(\lambda_1)^N\le\left[1+\Big(2+\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\Big)\frac{\varepsilon}{N}\right]^N\le$$

$$\le\exp\left(\varepsilon\Big(2+\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\Big)\right),$$

$$|\lambda_2|\le h,$$

$$0<s\le\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}},\ 0\le t\le h-\frac{h^2}{2},$$

$$\forall t \in [0,1],\ \Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}} \in [0,\infty),$$
$$|g| \le \Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}},$$

одержуємо нерівності

$$\Big\|\overset{(k)}{u}_n(x,y)\Big\|_{\overline{D}_n},\ \Big\|\overset{(k)}{\Phi}{}^{\pm}_n(x,y)\Big\|_{\overline{D}_n} =$$

$$= \left\|\frac{\partial \overset{(k)}{u}_n(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \overset{(k)}{u}_n(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}_n},\ \left\|\frac{\partial \overset{(k)}{u}_n(x,y)}{\partial x}\right\|_{\overline{D}_n},\ \left\|\frac{\partial \overset{(k)}{u}_n(x,y)}{\partial y}\right\|_{\overline{D}_n} \le \qquad (2.56)$$
$$\le K_2\Big\|F_k(x,y)\Big\|_{\overline{D}},$$

де K_2 – стала, яка залежить тільки від $\Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}$ та ε. Більш тонкий аналіз функції $\sigma_n\Big(h, \Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}}\Big)$ показує, що сталу K_2 можна замінити на вираз

$$K_2 = 0.3(1+2h)^{n-1} \le 0.3\exp(2\varepsilon) = \sigma$$
$$\forall h \in [0,1], \forall \Big\|\mathbb{N}'\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\Big\|_{\overline{D}} \in [0,\infty), \qquad (2.57)$$

що є принциповим для подальшого. Зауважимо, щоб нерівність $K_2 \le 1$, була правильною достатньо, щоб $\varepsilon \le 0.6019864022$.

Отже, з (2.56) та (2.57) одержимо оцінку

$$\Big\|\overset{(k)}{u}(x,y)\Big\|_{1,\infty,\overline{D}} \le \sigma\big\|F_k(x,y)\big\|_{\overline{D}}, \qquad (2.58)$$

де $\big\|f(x,y)\big\|_{1,\infty,D} = \max\big\{\big\|f(x,y)\big\|_{\infty,D}, \big\|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\big\|_{\infty,D}, \big\|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\big\|_{\infty,D}\big\}$.

На підставі рівностей (2.26), (2.28) запишемо нерівність (2.58) у такому вигляді:

$$\Big\|\overset{(k)}{u}(x,y)\Big\|_{1,\infty,\overline{D}} \le$$

$$\le \sigma\Big[A_k(\mathbb{N}; \|\overset{(0)}{u}_\perp(x,y)\|_{\overline{D}}; \|\overset{(1)}{u}_\perp(x,y)\|_{\overline{D}}; \ldots; \|\overset{(k)}{u}_\perp(x,y)\|_{\overline{D}})+$$
$$+\Big\|A_{k-1}(\mathbb{N}; \overset{(0)}{u}(x,y); \overset{(1)}{u}(x,y); \ldots; \overset{(k-1)}{u}(x,y))- \qquad (2.59)$$

$$-A_{k-1}(\mathbb{N};\overset{(0)}{u}_{\perp}(x,y);\overset{(1)}{u}_{\perp}(x,y);\ldots;\overset{(k-1)}{u}_{\perp}(x,y))\Big\|_{\overline{D}}-\widetilde{\mathbb{N}}'(\|\overset{(0)}{u}\|_{\overline{D}})\|\overset{(k)}{u}\|_{\overline{D}}\Bigg],$$

де

$$\widetilde{\mathbb{N}}(u)=\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|u^i,\quad \mathbb{N}(u)=\sum_{i=0}^{\infty}a_iu^i.$$

Для оцінки другого доданка в правій частині цього виразу скористаємось наступною лемою.

Лема 2.1.

$$\Big\|A_s\big(\mathbb{N};\overset{(0)}{u}_{\perp}(x,y),\ldots,\overset{(s)}{u}_{\perp}(x,y)\big)-A_s\big(\mathbb{N};\overset{(0)}{u}(x,y),\ldots,\overset{(s)}{u}(x,y)\big)\Big\|_{\overline{D}}\leq$$

$$\leq hA_s\big(\tilde{\mathbb{N}}_1;\|\overset{(0)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}},\ldots,\|\overset{(s)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}}\big),\quad \tilde{\mathbb{N}}_1(u)=\tilde{\mathbb{N}}'(u)u,$$

Лема 2.1 є частинним випадком леми 1 з [9].

Застосовуючи лему 2.1, одержуємо оцінку для (2.59):

$$\Big\|\overset{(k)}{u}(x,y)\Big\|_{1,\infty,\overline{D}}\leq\sigma\Bigg[A_k\Big(\widetilde{\mathbb{N}}(u);\|\overset{(0)}{u}_{\perp}\|_{1,\infty,\overline{D}};\|\overset{(1)}{u}_{\perp}\|_{1,\infty,\overline{D}};\ldots;\|\overset{(k)}{u}_{\perp}\|_{1,\infty,\overline{D}}\Big)+$$

$$+hA_{k-1}\Big(\widetilde{\mathbb{N}}_1(u);\|\overset{(0)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}};\|\overset{(1)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}};\ldots;\|\overset{(k-1)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}}\Big)-$$

$$-\widetilde{\mathbb{N}}'(\|\overset{(0)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}})\|\overset{(k)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}}\Bigg].$$

Розглянемо послідовність дійсних чисел $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$, яка визначається так:

$$v_0=\|\overset{(0)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}},$$

$$v_k=\sigma\Big[A_k\Big(\widetilde{\mathbb{N}};v_0;v_1;\ldots;v_k\Big)+A_{k-1}\Big(\widetilde{\mathbb{N}}_1;v_0;v_1;\ldots;v_{k-1}\Big)-\widetilde{\mathbb{N}}'(v_0)v_k\Big].\quad (2.60)$$

Легко бачити, що для послідовності $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце нерівність

$$\|\overset{(k)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}}\leq v_kh^k,\quad k=0,1,2,\ldots\quad (2.61)$$

Доведемо, використовуючи метод твірних функцій, що для досить малих значень h ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\|\overset{(k)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}}$ збіжний. Для цього достатньо показати, що степеневий ряд

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}v_kz^k\quad (2.62)$$

має ненульовий радіус збіжності.

Враховуючи рівності (2.60), приходимо до висновку, що функція $g(z)$ задовольняє нелінійне функціональне рівняння

$$g(z) - v_0 = \sigma\Big[\widetilde{\mathbb{N}}(g(z)) - \widetilde{\mathbb{N}}(v_0) - \widetilde{\mathbb{N}}'(v_0)(g(z) - v_0) + z\widetilde{\mathbb{N}}_1(g(z))\Big]. \tag{2.63}$$

Розглянемо обернену функцію $z = g^{-1}$. З рівності (2.63) можемо легко отримати явну формулу для $z = z(g)$:

$$z(g) = \frac{g(z) - v_0 - \sigma\Big(\widetilde{\mathbb{N}}(g(z)) - \widetilde{\mathbb{N}}(v_0) + \sigma\widetilde{\mathbb{N}}'(v_0)(g(z) - v_0)\Big)}{\sigma\widetilde{\mathbb{N}}_1(g(z))}. \tag{2.64}$$

Враховуючи, що $z(v_0) = 0$, отримуємо значення $z'(v_0)$:

$$z'(v_0) = \frac{1}{\sigma\widetilde{\mathbb{N}}_1(v_0)}[1 - \sigma(1 + \sigma)\widetilde{\mathbb{N}}'(v_0)]. \tag{2.65}$$

З (2.65) неважко встановити, що $z'(v_0)$ є додатнім, якщо виконується нерівність

$$\sigma < \frac{2}{\widetilde{\mathbb{N}}\,'(v_0)\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4}{\widetilde{\mathbb{N}}\,'(v_0)}}\right)}. \tag{2.66}$$

Далі, з (2.64) одержуємо

$$\lim_{g\to\infty} z(g) = -\lim_{g\to\infty} \frac{\widetilde{\mathbb{N}}(g)}{g\widetilde{\mathbb{N}}'(g)} \le 0.$$

Ця нерівність за умови, що виконується (2.66) (тобто, що $z'(v_0) > 0$), гарантує існування такого $g_{\max} > 0$, найближчого до v_0, для якого

$$z_{\max} = \max_{g\in[v_0,\infty)} z(g) = z(g_{\max})$$

(якщо таких локальних максимумів є декілька), і це $z_{\max}$ є радіусом збіжності ряду (2.62) (див. [56]).

Звідси дійшли висновку, що існують такі додатні сталі c, δ, для яких має місце нерівність

$$v_k R^k \le \frac{c}{k^{1+\delta}}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де $R = g_{\max}$, і які залежать лише від $\mathbb{N}(u)$ та v_0. Або, враховуючи (2.61), маємо

$$\|\overset{(k)}{u}\|_{1,\infty,\overline{D}} \leq v_k \left(\frac{h}{R}\right)^k R^k \leq \frac{c}{k^{1+\delta}} \left(\frac{h}{R}\right)^k.$$

Остання нерівність дає змогу сформулювати наступне твердження

Твердження 2.1. *Для того щоб ряд* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \overset{(j)}{u}(x,y)$ *збігався супер-експоненціально в нормі* $\|\cdot\|_{1,\infty,\overline{D}}$, *достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\frac{h}{R} = q < 1. \tag{2.67}$$

Нехай умова (2.67) виконується. Введемо позначення:

$$\overline{u}(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \overset{(j)}{u}(x,y).$$

Покажемо, що $\overline{u}(x,y)$ співпадає з розв'язком $u(x,y)$ вихідної задачі (2.1), (2.2). З цією метою запишемо FD-метод у такій формі:

$$\begin{aligned}\overset{(j+1)}{u}(x,y) =& \frac{1}{2(j+1)!}\int\limits_0^y \int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \frac{\partial^{j+1}}{\partial\tau^{j+1}}\Big\{\mathbb{N}\big(u_\perp(\xi,\eta,\tau)\big)+ \\ &+\tau\big[\mathbb{N}\big(u(\xi,\eta,\tau)\big)-\mathbb{N}\big(u_\perp(\xi,\eta,\tau)\big)\big]\Big\}_{\tau=0} d\xi d\eta,\ j=0,1,\ldots,\end{aligned} \tag{2.68}$$

$$\begin{aligned}\overset{(0)}{u}(x,y) =& \frac{1}{2}\Big(\phi(x+y)+\phi(x-y)\Big)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\psi(\xi)d\xi+ \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_0^y \int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Big\{\mathbb{N}\big(\overset{(0)}{u}_\perp(\xi,\eta)\big)+f(\xi,\eta)\Big\}d\xi d\eta.\end{aligned} \tag{2.69}$$

Просумуємо обидві частини (2.68) за j від 0 до ∞ і додамо (2.69). Одержимо рівняння

$$\begin{aligned}\overline{u}(x,y) =& \frac{1}{2}\Big(\phi(x+y)+\phi(x-y)\Big)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\psi(\xi)d\xi+ \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_0^y \int\limits_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Big\{\mathbb{N}\big(\overline{u}(\xi,\eta)\big)+f(\xi,\eta)\Big\}d\xi d\eta.\end{aligned}$$

З нього випливає, що $\overline{u}(x,y)$ є розв'язком задачі Коші (2.1), (2.2), а оскільки він єдиний, то $\overline{u}(x,y) = u(x,y)$.

Отже, нами доведено теорему.

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови теореми 2.1 і функція $\mathbb{N}(u)$ є аналітичною на всій числовій осі, тобто*

$$\mathbb{N}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i u^i, \quad \forall u \in \mathbf{R}.$$

Тоді виконуються припущення "а" , "б" і єдиний розв'язок $u(x,y) \in C^2(\overline{D})$ задачі Коші (2.1)*,* (2.2) *можна як завгодно точно знайти за допомогою FD-методу* (2.24)–(2.28)*. Крім того, мають місце наступні оцінки швидкості збіжності методу:*

$$\left\| u(x,y) - \overset{m}{u}(x,y) \right\|_{1,\infty,D} \leq \frac{cR}{(m+1)^{1+\delta}(R-h)} \left(\frac{h}{R}\right)^{m+1}, \quad m \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \tag{2.70}$$

де $\left\| f(x,y) \right\|_{1,\infty,D} = \max\left\{ \left\| f(x,y) \right\|_{\infty,D}, \left\| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right\|_{\infty,D}, \left\| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right\|_{\infty,D} \right\}$, *$h$ – крок сітки FD-методу, $h < R$, а додатні дійсні сталі c, R, δ залежать лише від вхідних даних задачі*[2)]*.*

Теорема 2.3 показує, що крок розбиття h завжди може бути вибраний таким чином, щоб FD-метод розв'язування задачі Коші (2.1), (2.2) в області D збігався з суперекспоненціальною швидкістю, тобто швидше, ніж ряд, утворений членами геометричної прогресії зі знаменником $q = \frac{h}{R} < 1$.

2.4 Чисельна реалізація FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна–Гордона

Легко бачити, що обчислення поправок $\overset{(k)}{u}(x,y)$ FD-методу, що є розв'язками системи задач (2.24)–(2.28), пов'язане з обчисленням одинарних та подвійних інтегралів зі змінними межами інтегрування (див. формули (2.30),

[2)] Детальніше про походження сталої R див. [64].

(2.48)). Враховуючи рекурсивний характер системи (2.24)–(2.28), можна дійти висновку, що виключно аналітична алгоритмічна реалізація FD-методу високого рангу (з використанням сучасних систем компютерної алгебри, таких як Maple, Mathematica, Maxima тощо) є практично неможливою (головним чином через складність аналітичного знаходження таких інтегралів), так само як, наприклад, у випадку задачі Гурса для рівняння Клейна–Гордона (2.1) (див. [12]). Очевидо подолати такі труднощі можна використовуючи чисельні методи розв'язання системи задач (2.24)–(2.28). Наведемо один з можливих практичних підходів алгоритмічної реалізації FD-методу з використанням чисельних схем інтегрування.

Насамперед зазначимо, що перетворенням $\Phi : D \stackrel{\Phi}{\to} D_\Phi$

$$\Phi = \begin{cases} x = \xi + \eta, \\ y = \xi - \eta, \end{cases} \qquad \Phi^{-1} = \begin{cases} \xi = \frac{1}{2}(x+y), \\ \eta = \frac{1}{2}(x-y) \end{cases} \tag{2.71}$$

задачі (2.24)–(2.28) можна подати у вигляді

$$-\frac{\partial^2 \overset{(0)}{v}(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = f(\xi+\eta,\xi-\eta) + \mathbb{N}(\overset{(0)}{v}_\perp(\xi,\eta)), \tag{2.72}$$

$$\overset{(0)}{v}(\xi,\xi) = \phi(2\xi),\ \ \overset{(0)}{v}_\eta(\xi,\xi) = \phi'(2\xi) - \psi(2\xi), \tag{2.73}$$
$$\forall\xi \in \left[\frac{X_M - Y_M}{2}, \frac{X_M + Y_M}{2}\right],$$

$$\overset{(0)}{v}(\xi,\eta) \in C(\Phi(\overline{D})) = C(\overline{D}_\Phi),\ \ \overset{(0)}{v}_\eta(\xi,\eta) \in C(\overline{D}_\Phi), \tag{2.74}$$

$$-\frac{\partial^2 \overset{(k)}{v}(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = -\mathbb{N}'(\overset{(0)}{v}_\perp(\xi,\eta))\ \overset{(0)}{v}_\perp(\xi,\eta) - F_k(\xi+\eta,\xi-\eta),\ \ (\xi,\eta) \in \overline{D}_\Phi, \tag{2.75}$$

$$\overset{(k)}{v}(\xi,\eta) \in C(\overline{D}_\Phi,),\ \ \overset{(k)}{v}_\eta(\xi,\eta) \in C(\overline{D}_\Phi), \tag{2.76}$$

$$\overset{(k)}{v}(\xi,\xi) = 0,\ \ \overset{(k)}{v}_\eta(\xi,\xi) = 0,\ \forall\xi \in \left[\frac{X_M - Y_M}{2}, \frac{X_M + X_M}{2}\right], k = 1,2,\ldots, \tag{2.77}$$

де $\overset{(k)}{v}(\xi,\eta) = \overset{(k)}{u}(\xi+\eta,\xi-\eta)$, $\overset{(k)}{v}_\perp(\xi,\eta) = \overset{(k)}{u}_\perp(\xi+\eta,\xi-\eta)$, а $F_k(\xi+\eta,\xi-\eta), k = 0,1,2,\ldots$ визначаються згідно з (2.28).

Умови (2.74) та (2.76) є аналогами відповідних умов зшивки в системі (2.24)–(2.28). Умови (2.74) випливають з того, що розв'язок $\overset{(0)}{u}(x,y)$ базової задачі (2.24), (2.25) є неперервно–диференційованою функцією на замкненій області $\overline{D}$. Звідси відразу випливає умова неперервності функції $\overset{(0)}{v}(\xi,\eta)$ на $\overline{D}_\Phi$. Крім того, враховуючи очевидні співвідношення

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right|_{\substack{\xi=\frac{1}{2}(x+y)\\ \eta=\frac{1}{2}(x-y)}} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\substack{\xi=\frac{1}{2}(x+y)\\ \eta=\frac{1}{2}(x-y)}},$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right|_{\substack{\xi=\frac{1}{2}(x+y)\\ \eta=\frac{1}{2}(x-y)}} - \frac{1}{2}\left.\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right|_{\substack{\xi=\frac{1}{2}(x+y)\\ \eta=\frac{1}{2}(x-y)}},$$

можна дійти висновку, що

$$v_\xi(\xi,\eta) \in C(\overline{D}_\Phi), \quad v_\eta(\xi,\eta) \in C(\overline{D}_\Phi),$$

де $v(\xi,\eta) = u(\xi+\eta,\xi-\eta)$.

Неважко переконатися, що функція $\overset{(0)}{v}(\xi,\eta)$, що є розв'язком рівняння (2.72) та задовольняє умови (2.73), (2.74), автоматично задовольняє і умову $v'_\xi(\xi,\eta) \in C(\overline{D}_\Phi)$. Звідси, зокрема, випливає, що задачі (2.24), (2.25) та (2.72)–(2.74) є еквівалентними, тобто, якщо $\overset{(0)}{u}(x,y)$ – розв'язок задачі (2.24), (2.25), то функція $\overset{(0)}{v}(\xi,\eta) = \overset{(0)}{u}(\xi+\eta,\xi-\eta)$ – розв'язок задачі (2.72)–(2.74) і навпаки. Аналогічні міркування справедливі і стосовно задач (2.26), (2.27) та (2.75)–(2.77).

Легко бачити, що розв'язок $\overset{(0)}{v}(\xi,\eta)$ базової задачі (2.72)–(2.74) можна записати так:

$$\overset{(0)}{v}(\xi,\eta) = \phi(2\xi) + \int\limits_\xi^\eta \Big(\phi'(2t) - \psi(2t) + \int\limits_\eta^\xi R_0(s,t)ds\Big)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\phi(2\xi) + \frac{1}{2}\phi(2\eta) - \int\limits_\xi^\eta \psi(2t)dt + \int\limits_\xi^\eta \int\limits_t^\xi R_0(s,t)dsdt \quad \forall (s,t) \in D_\Phi, \qquad (2.78)$$

де $R_0(\xi,\eta) \equiv -f(\xi+\eta,\xi-\eta) + \mathbb{N}(\overset{(0)}{v}_\perp(\xi,\eta))$.

Аналогічну формулу маємо і для поправок $\overset{(k)}{v}\ (\xi,\eta)$, що є розв'язками системи задач (2.75)–(2.77) :

$$\overset{(k)}{v}(\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{\eta}\int\limits_{t}^{\xi}R_k(s,t)dsdt,\quad \forall(s,t)\in D_\Phi, k=1,2,\ldots, \tag{2.79}$$

де $R_k(\xi,\eta)=-\mathbb{N}'(\overset{(0)}{v}_\perp(\xi,\eta))\overset{(0)}{v}_\perp(\xi,\eta)-F_k(\xi+\eta,\xi-\eta)$.

Формули (2.78), (2.79) можна також одержати з формули Д'Аламбера, виконавши заміну змінних (2.71).

Водночас, з точки зору програмної реалізації, формули (2.78) та (2.79) є зручнішими, ніж формула Д'Аламбера в чистому вигляді (зокрема, це стосується більш зручної форми меж інтегрування). Тому приймемо позначення $p=i+j, q=i-j$ і зосередимо увагу надалі на функціях $\overset{(k)}{v}(\xi,\eta)$, а точніше на їх сіткових проекціях:

$$\overset{(k)}{V}[p,q]\equiv\overset{(k)}{V}[i+j,i-j]=\overset{(k)}{v}\left(\frac{1}{2}(x_i+y_j),\frac{1}{2}(x_i-y_j)\right)=\overset{(k)}{u}(x_i,y_j)=\overset{(k)}{U}[i,j], \tag{2.80}$$

де $x_i=X_M-Y_M+ih_1, y_j=jh_1, h_1=h/n_I, n_I\in\mathbb{N}, n_I\geq 9,\quad h$ – крок дискретизації FD-методу, $p,q\in\mathbb{Z}$ (див. рис.2).

Областю визначення визначених вище сіткових функцій $\overset{(k)}{U}[i,j]$ (2.80) буде множина $\omega_I=\{(i,j)|\,(x_i,y_j)\in\overline{D}\}$ (див. рис. 3). При цьому, легко перевірити, що область визначення сіткових функцій $\overset{(k)}{V}\ [p,q]$ згідно з означення (2.80) співпадає з множиною $\Phi^{-1}(\omega_I)=\{(i+j,i-j)|\,i,j\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},(x_i,y_j)\in\overline{D}\}$ (див. рис. 4).

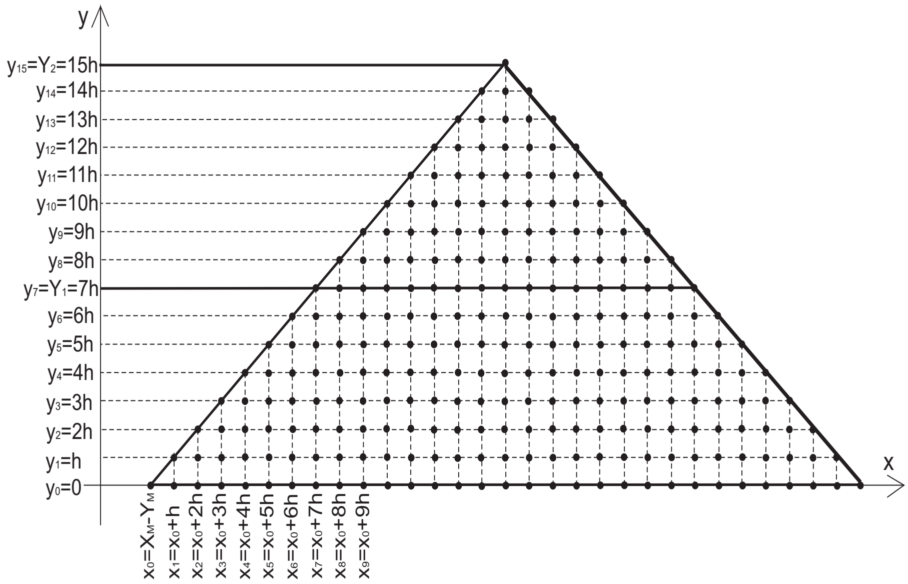

Рис. 3 Область ω_I

Рівності (2.80) очевидним чином задають відображення множини $\Phi^{-1}(\omega_I)$ на $\overline{D}_\Phi$, яке діє за законом (див. рис. 4):

$$\Phi^{-1}(\omega_I) \ni (p,q) = (i+j, i-j) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}(x_i + y_j), \frac{1}{2}(x_i - y_j)\right) = (\xi_p, \eta_q).$$

Аналогічно визначається відображення

$$\omega_I \to \overline{D} : \omega_I \ni (i,j) \longrightarrow (x_i, y_j) \in \overline{D}.$$

Означення 2.1. *Для будь-якої функції* $f(\xi,\eta)$*, визначеної на* $\overline{D}_\Phi$*, через* $f[p,q]$ *будемо позначати функцію двох дискретних аргументів* p *та* q*, визначену на* $\Phi^{-1}(\omega_I)$*, яка діє за законом*

$$f[p,q] = f(\xi_p, \eta_q), \quad (\xi_p, \eta_q) \in \Phi^{-1}(\omega_I).$$

З огляду на наведені вище міркування стає очевидно, що алгоритм FD-методу m–го рангу розв'язування задачі Коші для нелінійного хвильового рівняння в області $\overline{D}$ можна звести до розв'язування $(m+1)\cdot N$ лінійних задач вигляду[3)]

[3)] N – кількість смуг розбиття FD-методу (див. (2.20)).

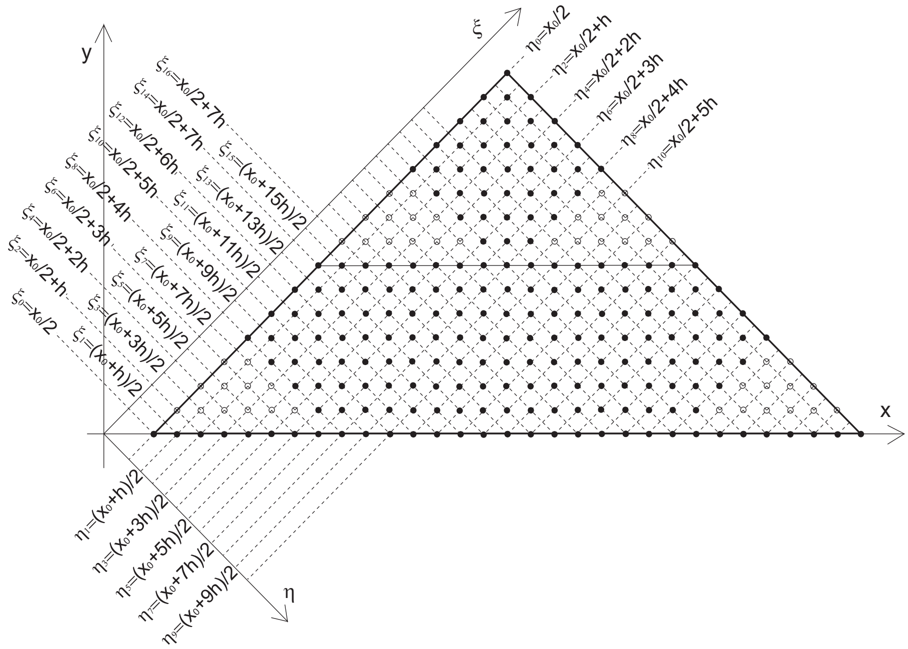

Рис. 4 Область $\Phi^{-1}(\omega_I)$

$$\frac{\partial^2 w(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = R(\xi,\eta),$$
$$w(ph_1+\eta,\eta) = \phi_1(\eta), \tag{2.81}$$
$$w'_\xi(\xi,\xi-ph_1) = \psi_1(\xi), \quad p\in\mathbb{N}$$

на області $\widetilde{D}$ (рис.5). Область $\widetilde{D}$ має форму рівнобічної трапеції і являє собою одну зі смуг розбиття FD-методу. Як бачимо, початкові умови задачі Коші (2.81) задано на нижній основі трапеції $\widetilde{D}$.

З алгоритмічної токи зору задачу (2.81) доцільно розв'язувати в два етапи, кожен з яких полягає в обчисленні одинарного інтеграла зі змінною верхньою межею на області $\widetilde{D}$:

$$w'_\xi(\xi,\eta) = \psi_1(\xi) - \int\limits_{\xi-ph_1}^{\eta} R(\xi,\eta_1)d\eta_1,$$

$$w(\xi,\eta) = \phi_1(\eta) + \int\limits_{ph_1+\eta}^{\xi} w'_\xi(\xi_1,\eta)d\xi_1.$$

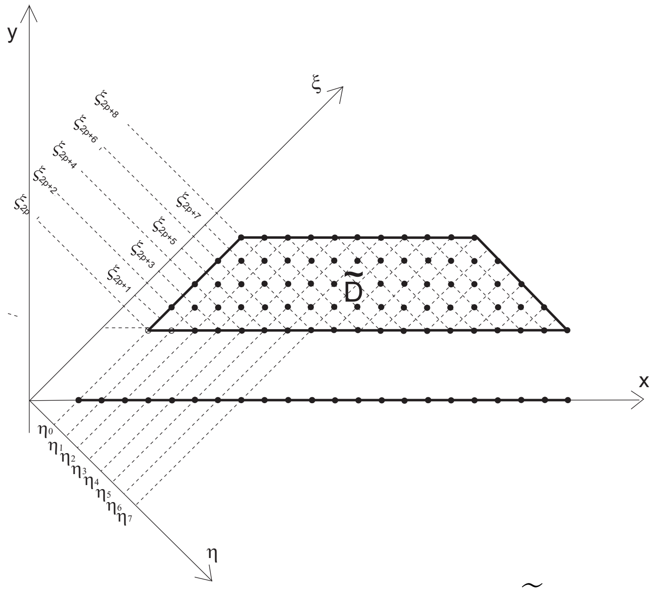

Рис. 5 Область $\widetilde{D}$.

Щоб знайти проекції $w'_\xi[i,j]$, $w[i,j]$ функцій $w'_\xi(\xi,\eta)$ і $w(\xi,\eta)$ відповідно, на сітку $\Phi^{-1}(\omega_I)\bigcap\widetilde{D}$, використаємо наступний алгоритм:

Алгоритм 1. Обчислення $w'_\xi[i,j]$:

for $i := 2p+8$ **to** $2p+K-1$ **do**

begin

$j := i-2p;$

$w'_\xi[i,j] := \psi_1(\xi_i);$

$w'_\xi[i,j-2] := w'_\xi[i,j]-$

$$-\int\limits_0^{h_1} I\big(R[i,j],R[i,j-2],R[i,j-4],R[i,j-6],R[i,j-8];h_1;t\big)dt;$$

$a := 4;$

repeat

$w'_\xi[i,j-a] := w'_\xi[i,j-a+4]-$

$$-\int\limits_0^{2h_1} I\big(R[i,j-a+4],R[i,j-a+2],R[i,j-a];h_1;t\big)dt;$$

$a := a+2;$

until $(i,j-a)\notin\Phi^{-1}(\omega_I)\bigcap\widetilde{D};$

end.

Алгоритм 2. Обчислення $w[i,j]$:

for $j := 0$ **to** $K-9$ **do**

begin

$i := j + 2p;$

$w[i, j] := \phi_1(\eta_j);$

$w[i+2, j] := w[i, j]+$

$+\int\limits_0^{h_1} I\big(R[i, j], R[i+2, j], R[i+4, j], R[i+6, j], R[i+8, j]; h_1; t\big)\,dt;$

$a := 4;$

repeat

$w[i+a, j] := w[i+a-4, j]+$

$+\int\limits_0^{2h_1} I\big(R[i+a-4, j], R[i+a-2, j], R[i+a, j]; h_1; t\big)\,dt;$

$a := a + 2;$

until $(i+a, j) \notin \Phi^{-1}(\omega_I) \bigcap \widetilde{D};$

end.

Тут літерою K позначено кількість точок множини $\Phi^{-1}(\omega_I)$, що лежать на нижній основі трапеції $\widetilde{D}$, а $I(r_1, r_2, \ldots, r_n; h_1; t)$ – інтерполяційний поліном від змінної t степеня $n-1$, побудований за точками $(r_1; 0), (r_2; h_1), (r_3; 2h_1), \ldots, (r_n; (n-1)h_1)$.

Неважко перевірити, що в такому разі вираз $\int\limits_0^{2h_1} I\big(r_1, r_2, r_3; h_1; t\big)\,dt$ – це добре відома формулу Сімпсона $\dfrac{h_1}{3}(r_1 + 4r_2 + r_3)$, порядок наближення якої на кроці становить $\mathcal{O}(h_1^5)$.

Формула $\int\limits_0^{h_1} I\big(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5; h_1; t\big)\,dt$, яку також використано в алгоритмі, є різновидом формул Ньютона–Котеса і забезпечує обчислення значення відповідного інтеграла з точністю порядку $\mathcal{O}(h_1^5)$.

Наведений вище алгоритм дає змогу обчислити значення сіткових функцій $w'_\xi[\cdot,\cdot]$ та $w[\cdot,\cdot]$ в усіх точках множини $\Phi^{-1}(\omega_I) \bigcap \widetilde{D}$, окрім фіксованої (незалежної від h_1) кількості точок, що знаходяться в кутах при основі трапеції $\widetilde{D}$. Ці точки знаходяться на прямих

$$\xi = \xi_i, \quad i = 2p+1, \ldots, 2p+7, \tag{2.82}$$

та

$$\eta = \eta_j, \quad j = K-8, K-7, \ldots, K-2. \tag{2.83}$$

Очевидно, що кількість вузлів інтегрування на кожній такій прямій в перетині з множиною $\widetilde{D}$ не перевищує чотирьох, що є недостатнім для забезпечення точності порядку $\mathcal{O}(h_1^5)$ з використанням формул Ньютона–Котеса. Проте знайти значення функцій $w'_\xi[\cdot,\cdot]$ та $w[\cdot,\cdot]$ у цих точках з точністю $\mathcal{O}(h_1^5)$ можливо: для цього достатньо використати інтерполювання по 5-ти точках в напрямку, перпендикулярному до напрямку прямих (2.82), (2.83).

Варто зазначити, що наведений тут алгоритм буде ефективним лише у випадку неперервної диференційованості правої частини $R(\xi,\eta)$ (2.81) до 4–го порядку включно. Це випливає з відомих теорем про точність квадратурних формул Ньютона–Котеса. У термінах вихідної задачі Коші (2.1), (2.2) маємо, що для застосування викладеного алгоритму необхідно, щоб виконувалися такі умови (додатково до умов теореми 2.3):
$\phi(x) \in C^4\Big([X_M - Y_M, X_M + Y_M]\Big), \psi(x) \in C^3\Big([X_M - Y_M, X_M + Y_M]\Big),$

$$f(x,y) \in C^4(\overline{D}).$$

2.5 Чисельні приклади

Приклад 1.

Розглянемо задачу Коші для рівняння Клейна–Гордона (2.1) з функцією $N(u) = u^3$, тобто в області $D = \{(x,y)|0 < y \le \varepsilon, y-\varepsilon < x < \varepsilon - y\}$ будемо шукати наближений розв'язок задачі Коші:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - u^3(x,y) = -\frac{6x^2y - 2y + y^3}{(1+x^2)^3}, \quad (x,y) \in D, \tag{2.84}$$

$$u(x,0) = 0, \; u'_y(x,0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-1,1]. \tag{2.85}$$

Точним розв'язком цієї задачі є функція

$$u^*(x,y) = \frac{y}{1+x^2}.$$

Перевіримо для задачі (2.84), (2.85) виконання умов теореми 2.1, і знайдемо значення сталої ε (3.4).

Очевидно, що $\mathbb{N}(u) = u^3 \in C^2(\mathbb{R})$, $\phi(x) \equiv 0 \in C_b^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \in C_b^1(\mathbb{R})$, а права частина рівняння (2.84) належить класу функцій $C_b^1(D_\varepsilon)$ (див. (2.3)). Знайдемо значення сталої M_1 згідно з (2.6). Неважко переконатися, що

$$M_1 = \|u_1(x,y)\|_{C(\mathbb{R}\times[0,1])} + 1 = 0,95547 + 1 < 2,$$

де

$$u_1(x,y) = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{arctg}(x+y) - \mathrm{arctg}(x-y)\Big] + \frac{1}{64}\Bigg[\Big(3x^6 - 12yx^5 +$$

$$+(9+18y^2)x^4 - (24y+12y^3)x^3 + (41+24y^2+3y^4)x^2 - (12y+12y^3)x +$$

$$+35 + 6y^2 + 3y^3\Big)\,\mathrm{arctg}(x-y) - \Big(3x^6 + 12yx^5 + (9+18y^2)x^4 + (24y+12y^3)x^3 +$$

$$+(41+24y^2+3y^4)x^2 + (12y+12y^3)x + 35 + 6y^2 + 3y^3\Big)\,\mathrm{arctg}(x+y) +$$

$$+\Big(24yx^5 + (48y+24y^3)x^3 + (24y+24y^3)x\Big)\,\mathrm{arctg}\,x +$$

$$+6yx^4 + (12y+18y^3)x^2 + 70y + 10y^3\Bigg]\Big/(1+x^2).$$

Тоді

$$\varepsilon = \min\left\{1; \sqrt{2}\left(\max_{|u|\le 2}|u^3|\right)^{-\frac{1}{2}}; \sqrt{2q_1}\left(\max_{|u|\le 2}|3u^2|\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}.$$

Нехай стала $q_1 = 1/2$. Тоді одержимо

$$\varepsilon = \min\left\{1; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}; \frac{1}{\sqrt{12}}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{6}. \tag{2.86}$$

Отже, шукатимемо наближений розв'язок задачі Коші (2.84), (2.85) в області $D = \left\{(x,y)|0 < y \le \sqrt{3}/6, y - \sqrt{3}/6 < x < \sqrt{3}/6 - y\right\}$.

Застосовуючи до задачі (2.84), (2.85) FD-метод, одержуємо наступну систему рекурентних задач Коші:

$$\frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x^2} = \frac{2y - 6x^2y - y^3}{(1+x^2)^3} + \overset{(0)}{u^3}(x, y_{j-1}),$$

$$(x,y) \in D_j = [y + \sqrt{3}/6; \sqrt{3}/6 - y] \times (y_{j-1}, y_j],\ \ j = \overline{1,N},$$

$$\left(\overset{(0)}{u}(x, y_j+0) - \overset{(0)}{u}(x, y_j-0)\right) \overset{def}{\equiv} \left[\overset{(0)}{u}(x,y)\right]_{y=y_j} = 0, \tag{2.87}$$

$$\left[\overset{(0)}{u'}_y(x,y)\right]_{y=y_j} = 0 \quad \forall x \in [y_{j-1} - \sqrt{3}/6; \sqrt{3}/6 - y_{j-1}] \, \forall j \in \overline{1, N-1},$$

$$\overset{(0)}{u}(x,0) = 0, \quad \overset{(0)}{u'}_y(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in [-1;1],$$

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x^2} = 3 \overset{(0)}{u}{}^2(x, y_{j-1}) \overset{(k)}{u}(x, y_{j-1}) - F_k(x,y) \forall (x,y) \in D,$$

$$\left[\overset{(k)}{u}(x,y)\right]_{y=y_j} = 0, \quad \left[\frac{\partial \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial y}\right]_{y=y_j} = 0$$

$$\forall x \in [y_{j-1} - \sqrt{3}/6; \sqrt{3}/6 - y_{j-1}] \quad \forall j \in \overline{1, N-1}, \tag{2.88}$$

$$\overset{(k)}{u}(x,0) = 0, \ \left.\frac{\partial \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad x \in [-1,1], \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де функцію $F_k(x,y)$ визначено згідно з (2.28).

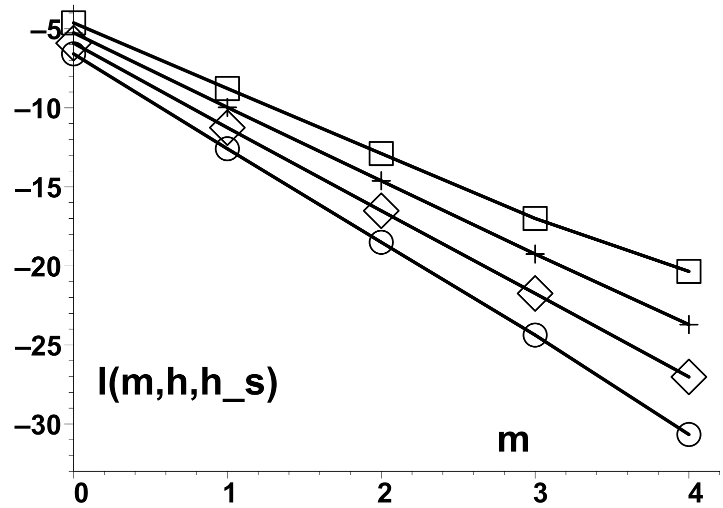

Рис. 2.1. Графік залежності швидкості збіжності FD-методу від рангу m та кроків дискретизації h, h_s : $\square - l(0,01; 0,001; m)$; $+ - l(0,007; 0,0004; m)$; $\diamondsuit - l(0,005; 0,0002; m)$; $\bigcirc - l(0,003; 0,0001; m)$.

Для оцінки похибки методу використовуватимемо функцію

$$\delta(h; h_s; m) = \left\| \overset{(m)}{u}(x, y, h, h_s) - u^*(x,y) \right\|_{\overline{D}}, \tag{2.89}$$

де h – крок дискретизації FD-методу, h_s – крок квадратурної формули[4].

В табл. 2.1, наведено результати застосування FD-методу до задачі Коші (2.84), (2.85) в області

$$D = \left\{(x,y) | 0 < y < \sqrt{3}/6, y - \sqrt{3}/6 < x < \sqrt{3}/6 - y\right\}$$

з кроками дискретизації квадратурної формули $h_s = 0,001; 0,0004; 0,0002; 0,0001$ та кроками дискретизації FD-методу $h = 0,01; 0,007; 0,005; 0,003$ відповідно.

Для ілюстрації експоненціальної швидкості збіжності методу зручно розглянути функцію

$$l(m,h,h_s) = \ln(\delta(h;h_s;m)) = \ln\left(\left\| \overset{(m)}{u}(x,y,h,h_s) - u^*(x,y) \right\|_{\overline{D}}\right),$$

графіки якої при різних значеннях параметрів m, h, та h_s подано на рис. 2.1. Майже прямолінійний характер графіків свідчить про експоненціальну швидкість спадання похибки FD-методу при збільшенні рангу методу, що підтверджує одержані теоретичні результати.

[4]Тут для наближеного обчислення інтегралів було використано формулу Сімпсона.

Таблиця 2.1

Похибка FD-методу як функція від рангу (m) і кроків (h, h_s)

m	Значення $\delta(h; h_s; m)$	
	$\delta(0.01; 0.001; m)$	$\delta(0.007; 0.0004; m)$
0	0.00482008737297868	0.00247476450143269
1	4.20259567426333e-05	1.13911037650655e-05
2	3.95111377071091e-07	5.75286142525985e-08
3	3.7958256405744e-09	3.00014080324208e-10
4	4.33937223627304e-11	2.10684693653788e-12
	$\delta(0.005; 0.0002; m)$	$\delta(0.003; 0.0001; m)$
0	0.00166433055655046	0.00125369326763414
1	5.19962629886347e-06	2.9639016211557e-06
2	1.79291471227014e-08	7.75676964050381e-09
3	6.4082143283881e-11	2.10828729150418e-11
4	3.42312053358461e-13	4.46870093332802e-14

Приклад 2.

Нехай потрібно знайти наближений розв'язок задачі Коші (2.84), (2.85) в області $T = \{(x, y)|0 < y \leq 3, y - 3 < x < 3 - y\}$. Застосуємо спочатку до цієї задачі метод декомпозиції Адомяна (Adomian Decomposition method (ADM)). Він полягає у відшуканні p–го наближення точного розв'язку у вигляді суми

$$\overset{p}{u}(x, y) = \sum_{n=0}^{p} u_k(x, y),$$

де невідомі функції $u_k(x, y)$, враховуючи загальну ідею методу Адомяна [34], а також, що роз'звязок $u(x, y)$ задачі Коші (2.1), (2.2) можна представити у вигляді:

$$u(x, y) = u(x, 0) + yu'_y(x, 0) + \int_0^y \int_0^\eta \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dt d\eta +$$

$$+\int\limits_0^y\int\limits_0^\eta \mathbb{N}(u(x,t))dtd\eta+\int\limits_0^y\int\limits_0^\eta f(x,t)dtd\eta,$$

шукаються з рекурентної послідовності

$$u_0(x,y)=u(x,0)+yu_y'(x,0)+\int\limits_0^y\int\limits_0^\eta f(x,t)dtd\eta,$$

$$u_n(x,y)=\int\limits_0^y\int\limits_0^\eta \frac{\partial^2 u_{n-1}(x,t)}{\partial x^2}dtd\eta+\int\limits_0^y\int\limits_0^\eta A_{n-1}(\mathbb{N}(u);u_0(x,t),\ldots,u_{n-1}(x,t))dtd\eta,$$
$$n=1,2,\ldots.$$

Для оцінки похибки методу для n–ї поправки використовуватимемо величину

$$\Delta(n)=\left\|u_n(x,y)-u^*(x,y)\right\|_{\overline{T}}$$

В табл. 2.2 наведено значення $\Delta(n), n=0,1,2,\ldots,$ одержані в результаті застосування методу розкладу Адомяна до задачі (2.84), (2.85) в області D_1, які підтверджують фактичну розбіжність цього методу.

Таблиця 2.2

Похибка n–ї поправки ADM для задачі (2.84), (2.85) в області T

n	Значення $\Delta(n)$
0	7,20982334631531
1	58,3816586782342
2	452,439243328715
3	3439,12578887853
4	26046,9063162019

В силу того, що $\mathbb{N}(u(x,0))=0$, то якщо в FD-методі (2.87)–(2.88) для задачі Коші (2.84), (2.85) крок методу $h=1$, він співпадає з ADM. Тому, як випливає з табл. 2.2 при $h=1$ FD-метод також буде розбіжним в T.

Однак, застосувавши до задачі (2.84), (2.85) FD-метод з іншими кроками розбиття області T та взявши в якості оцінки похибки методу значення функції (2.89), одержимо результати, які представлені в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Похибка FD-методу як функція від рангу (m) і кроків (h, h_s)

m	Значення $\delta(h; h_s; m)$	
	$\delta(0.05; 0.005; m)$	$\delta(0.03; 0.003; m)$
0	0.0310114081200106	0.0184217467290586
1	0.00152105670576216	0.000483074544493563
2	0.000281103778923219	5.37817311016845e-05
3	3.54724841293716e-05	3.98776842795765e-06
4	4.03935022096392e-06	2.65184539280688e-07
	$\delta(0.02; 0.002; m)$	$\delta(0.015; 0.0015; m)$
0	0.0131021366856539	0.00914357195072935
1	0.000240576253001562	0.000116734951964527
2	1.86080198120121e-05	6.13899234751751e-06
3	9.76700318849097e-07	2.2404740133938e-07
4	4.58731138681366e-08	7.3084565346857e-09

2.6 Висновки до розділу 2

В даному розділі побудовано та обґрунтовано FD-метод чисельно-аналітичного розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона в деякій області $D \subseteq \Omega$, де $\Omega = \big\{(x, y)| -\infty < x < +\infty,\ y > 0\big\}$, що базується на ідеї FD-методу розв'язування операторних рівнянь загального вигляду (див. [47]). Також запропоновано підхід до програмної імплементації FD-методу з використанням чисельних схем інтегрування.

Основними результатами розділу є:

1) Доведено теорему, яка забезпечує існування і єдиність локального розв'язку задачі Коші для нелінійного хвильового рівняння (теорема 2.1);

2) розроблено загальну схему FD-методу розв'язування задачі Коші для

нелінійного рівняння Клейна-Гордона (2.1)–(2.2) (підрозділ 2.2);

3) доведено теорему, що містить достатні умови збіжності FD-методу розв'язування задачі Коші (2.1)–(2.2) до її точного розв'язку в області D з суперекспоненціальною швидкістю (теорема 2.3);

4) запропоновано підхід до програмної імплементації FD-методу розв'язування задачі Коші для рівняння Клейна-Гордона (2.1)–(2.2) з використанням чисельних методів інтегрування (підрозділ 2.4);

5) запропоновано алгоритм програмної реалізації FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного хвильового рівняння (алгоритм 1 та алгоритм 2);

Основні результати даного розділу опубліковані в 2 статтях [13], [14] та доповідалися на трьох міжнародних конференціях :

1) VI Міжнародна конференція імені академіка Івана Івановича Ляшка, 5-6 вересня 2013 р., Київ.

2) Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23-24 квітня 2014 р., Київ.

3) П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня 2014 р., Київ.

РОЗДІЛ 3
ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИСКРЕТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ГУРСА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

3.1 Постановка задачі. Теорема про існування і єдиність локального розв'язку задачі Гурса для нелінійного хвильового рівняння

Розглянемо задачу Гурса для рівняння Клейна – Гордона, записаного в трохи модифікованому вигляді

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \mathbb{N}(u(x,y)) = f(x,y), \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = \psi(x), \quad u(0,y) = \phi(y), \quad \psi(0) = \phi(0), \tag{3.2}$$

де $(x,y) \in \Omega$, $\Omega = \big\{(x,y) : 0 < x < X,\, 0 < y < Y\big\}$.

Рівняння (3.1) одержується з рівняння Клейна – Гордона

$$\frac{\partial^2 v(\xi,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(\xi,t)}{\partial \xi^2} - \mathbb{N}(v(\xi,t)) = \Phi(\xi,t)$$

за допомогою перетворення змінних, аналогічного до перетворення (2.71). А саме:

$$\Phi = \begin{cases} \xi = x + y, \\ t = x - y, \end{cases} \qquad \Phi^{-1} = \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\xi + t), \\ y = \frac{1}{2}(\xi - t) \end{cases}$$

Тоді, очевидно, $u(x,y) = v(x+y, x-y), \quad f(x,y) = -\Phi(x+y, x-y)$.

Так само, як і у випадку задачі Коші, позначимо через $C^k(\mathbb{R}^m)$ простір функцій неперервно-диференційованих на $\mathbb{R}^m$ до k - го порядку включно. Через $C_b^k(\mathbb{R}^m)$ позначимо підмножину простору $C^k(\mathbb{R}^m)$ до якої входять функції $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^m)$, що задовольняють нерівність (2.3). Як і раніше, лінійний простір $C_b^k(\mathbb{R}^m)$, оснащений нормою $\|\cdot\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)}$ є банаховим простором (див.[73]).

Має місце наступна теорема про про локальне існування і єдиність розв'язку задачі Гурса для рівняння (3.1).

Теорема 3.1. *Нехай* $\mathbb{N}(u) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $\phi(y) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $f(x,y) \in C_b^1(D_\varepsilon)$. *Тоді двічі неперервно-диференційований розв'язок* $u(x,y)$ *задачі Гурса* (3.1), (3.2) *існує принаймні на множині*

$$D_\varepsilon = \{(0;\varepsilon) \times (0;\varepsilon)\}, \tag{3.3}$$

де

$$\varepsilon = \min\left\{1; \left(\max_{|u|\le M_1}\left|\mathbb{N}(u)\right|\right)^{-\frac{1}{2}}; \sqrt{q_1}\left(\max_{|u|\le M_1}\left|\mathbb{N}'(u)\right|\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}, \tag{3.4}$$

$$M_1 = \|u_1(x,y)\|_{C([0,1]\times[0,1])} + 1, \tag{3.5}$$

$u_1(x,y)$ *– розв'язок задачі Гурса* (3.1), (3.2) *при* $\mathbb{N}(u) \equiv 0$, $0 < q_1 < 1$, *і на цій множині він єдиний.*

Доведення. Для доведення теореми використаємо техніку, що була застосована при доведені теореми 2.1.

Не порушуючи загальності вважатимемо, що $\mathbb{N}(0) = 0$ (цього завжди можна досягти, змінивши відповідним чином функцію $f(x,y)$).

Розглянемо послідовність функцій $u_n(x,y)$, які є розв'язками наступної рекурентної системи задач Гурса:

$$\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x \partial y} = \mathbb{N}(u_{n-1}(x,y)) + f(x,y), \tag{3.6}$$

$$u_n(x,0) = \psi(x), \quad u_n(0,y) = \phi(y), \quad \psi(0) = \phi(0), \quad n = 1,2,\ldots, \tag{3.7}$$

де $u_0(x,y) = 0$.

Двічі інтегруючи (3.6), враховуючи (3.7), знайдемо:

$$u_1(x,y) = \psi(x) - \psi(0) + \phi(y) + \int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

$$u_n(x,y) = \psi(x) - \psi(0) + \phi(y) + \int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta)d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^x\int_0^y \mathbb{N}(u_{n-1}(\xi,\eta))d\xi d\eta, \quad n = 2,3,\ldots$$

звідки

$$u_n(x,y) = u_1(x,y) + \int_0^x \int_0^y \mathbb{N}(u_{n-1}(\xi,\eta))d\xi d\eta. \tag{3.8}$$

Диференціюючи (3.8), одержимо

$$\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x} + \int_0^y \mathbb{N}\big(u_{n-1}(x,\eta)\big)d\eta, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} + \int_0^x \mathbb{N}\big(u_{n-1}(\xi,y)\big)d\xi. \tag{3.10}$$

Продовжуючи диференціювання, з (3.9), (3.10) одержимо наступні рівності:

$$\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,y)}{\partial y^2} + \int_0^x \mathbb{N}'\big(u_{n-1}(\xi,y)\big)\frac{\partial u_{n-1}(\xi,y)}{\partial y}\,d\xi; \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_1(x,y)}{\partial x^2} + \int_0^y \mathbb{N}'\big(u_{n-1}(x,\eta)\big)\frac{\partial u_{n-1}(x,\eta)}{\partial x}\,d\eta; \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial x\partial y} + \mathbb{N}(u_{n-1}(x,y)). \tag{3.13}$$

З формули (3.8), беручи до уваги (3.3), (3.4), (3.5), одержимо наступну оцінку

$$\big\|u_n(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} \le \big\|u_1(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} + \varepsilon^2\big\|\mathbb{N}(u_{n-1}(x,y))\big\|_{C(D_\varepsilon)} \le$$

$$\le \|u_1(x,y)\|_{C(D_1)} + 1 = M_1, \tag{3.14}$$

тобто послідовність $\{u_n(x,y)\}$ є рівномірно обмеженою на множині D_ε.

Доведемо, що вона є рівномірно збіжною в просторі $C(D_\varepsilon)$, оснащеному чебишовською метрикою. Для цього розглянемо допоміжну послідовність функцій $\{\widehat{u}_n(x,y)\}$, визначену наступним чином

$$\widehat{u}_n(x,y) \overset{def}{=} u_{n+1}(x,y) - u_n(x,y).$$

З формули (3.8) випливає, що

$$\big\|\widehat{u}_n(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} \le \varepsilon^2 L_1\big\|u_n(x,y) - u_{n-1}(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)} = \varepsilon^2 L_1\big\|\widehat{u}_{n-1}(x,y)\big\|_{C(D_\varepsilon)}, \tag{3.15}$$

де $L_1 = \max\limits_{|u|\leq M_1} \left|\mathbb{N}'(u)\right|$.

Очевидно, що для вибраного нами ε (3.4), з формули (3.15), легко одержати

$$\left\|\widehat{u}_n(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)} \leq q\left\|\widehat{u}_{n-1}(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)} \leq \ldots \leq q^{n-1}\left\|\widehat{u}_1(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)} =$$

$$= q^{n-1}\left\|u_1(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)}, \tag{3.16}$$

де $q = \varepsilon^2 L_1$. Для збіжності ітераційного процесу потрібно, щоб q було меншим ніж 1. Візьмемо, наприклад, $q = q_1$, тоді $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{q_1}{L_1}}$.

Тоді

$$\left\|u_n(x,y) - u_m(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)} \leq \left(q^m + q^{m+1} + \ldots + q^{n-1}\right)\left\|u_1(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)} =$$

$$= \frac{q^m - q^{n-1}}{1-q}\left\|u_1(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)} \leq \frac{q^m}{1-q}\left\|u_1(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)}, \quad \text{при } m < n.$$

З цієї нерівності випливає, що послідовність функцій $\{u_n(x,y)\}$ є рівномірно збіжною в просторі $C(D_\varepsilon)$ до деякої неперервної функції $u(x,y) \in C(D_\varepsilon)$. Враховуючи (3.14) з рівностей (3.9) – (3.13) неважко одержати наступні оцінки:

$$\left\|\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u_m(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}, \left\|\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial u_m(x,y)}{\partial y}\right\|_{C(D_\varepsilon)} \leq$$

$$\leq \varepsilon L_1\left\|u_{n-1}(x,y) - u_{m-1}(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)}, \tag{3.17}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u_m(x,y)}{\partial x\partial y}\right\|_{C(D_\varepsilon)} \leq L_1\left\|u_{n-1}(x,y) - u_{m-1}(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)}, \tag{3.18}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_m(x,y)}{\partial y^2}\right\|_{C(D_\varepsilon)}, \quad \left\|\frac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_m(x,y)}{\partial x^2}\right\|_{C(D_\varepsilon)} \leq$$

$$\leq \varepsilon\left[L_1\left\|\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u_m(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)} +\right.$$

$$\left. + \max_{|u|<M_1}\left|\mathbb{N}''(u)\right|\left\|\frac{\partial u_{m-1}(x,y)}{\partial x}\right\|_{C(D_\varepsilon)}\left\|u_{n-1}(x,y) - u_{m-1}(x,y)\right\|_{C(D_\varepsilon)}\right]. \tag{3.19}$$

Нерівності (3.17), (3.18) та (3.19), враховуючи вже доведену нами фундаментальність послідовності $\{u_n(x,y)\}$ в просторі $C(D_\varepsilon)$, доводять фундаментальність послідовностей $\left\{\dfrac{\partial u_n(x,y)}{\partial x}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial u_n(x,y)}{\partial y}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x^2}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial y^2}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial^2 u_n(x,y)}{\partial x \partial y}\right\}$ в тому самому просторі $C(D_\varepsilon)$. Отже, нами доведено, що функція $u(x,y)$, яка є границею послідовності $\{u_n(x,y)\}$ в просторі $C(D_\varepsilon)$, належить простору $C^2(D_\varepsilon)$. Крім того, очевидно, що функція $u(x,y)$ задовольняє задачу Гурса (3.1), (3.2) принаймні на множині D_ε.

Нехай в D_ε є два розв'язки задачі Гурса (3.1), (3.2), $u(x,y)$ та $v(x,y)$ з $\left\|u-v\right\|_{C(D_\varepsilon)} \neq 0$, тоді

$$u(x,y) - v(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y \Big[\mathbb{N}(u(\xi,\eta)) - \mathbb{N}(v(\xi,\eta))\Big] d\xi d\eta$$

звідки одержуємо нерівність

$$\left\|u-v\right\|_{C(D_\varepsilon)} \leq q \left\|u-v\right\|_{C(D_\epsilon)},$$

яка призводить до протиріччя. Теорему доведено.

3.2 Загальний опис алгоритму FD-методу розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна–Гордона

Нехай умови теореми 3.1 є виконаними і, більш того, нелінійну функцію $\mathbb{N}(u)$, з рівняння (3.1), можна представити у вигляді

$$\mathbb{N}(u) = N(u)u, \quad N(u) = \sum_{s=0}^{\infty} \nu_s u^s,\ \nu_s \in \mathbf{R},\ \forall u \in \mathbf{R}. \tag{3.20}$$

Надалі будемо розглядати задачу Гурса (3.1), (3.2) в області $D \subseteq \Omega:$

$$D = \{(x,y) : 0 < x < X < \varepsilon, 0 < y < Y < \varepsilon\},$$

де стала ε визначається теоремою 3.1.

Згідно із загальною схемою FD-методу розв'язування операторних рівнянь, викладеною в [47], будемо наближати точний розв'язок $u(x,y)$ задачі функцією $\overset{m}{u}(x,y)$, яку можна подати у вигляді суми

$$\overset{m}{u}(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \overset{(k)}{u}(x,y), \quad m \in \mathbf{N}. \tag{3.21}$$

Для визначення функцій $\overset{(k)}{u}(x,y)$ покриємо область D сіткою $\omega = \omega_1 \times \omega_2$, де

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \{x_i = ih_1, i = \overline{1, N_1}, h_1 = X/N_1\}, \\ \omega_2 &= \{y_j = jh_2, j = \overline{1, N_2}, h_2 = Y/N_2\} \end{aligned} \tag{3.22}$$

для деяких фіксованих натуральних N_1 та N_2.

Далі розглянемо наступне узагальнення задачі Гурса (3.1), (3.2):

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u(x,y,\tau)}{\partial x \partial y} + N\big(u_\perp(x,y,\tau)\big)u(x,y,\tau) + \\ + \tau\big[N\big(u(x,y,\tau)\big) - N\big(u_\perp(x,y,\tau)\big)\big]u(x,y,\tau) = f(x,y), \quad (x,y,\tau) \in D_\tau, \end{gathered} \tag{3.23}$$

$$\begin{gathered} u(x,0,\tau) = \psi(x), \quad u(0,y,\tau) = \phi(y), \forall x \in [0,X], \forall y \in [0,Y], \forall \tau \in [0,1], \\ u(x_i+0,y,\tau) = u(x_i-0,y,\tau), \quad \forall y \in [0,Y], \forall \tau \in [0,1], \forall i = \overline{1,N_1}, \\ u(x,y_j+0,\tau) = u(x,y_j-0,\tau), \quad \forall x \in [0,X], \forall \tau \in [0,1], \forall j = \overline{1,N_2}, \end{gathered} \tag{3.24}$$

де $u(x,y,\tau) \in C^2(D_\tau)$, $D_\tau = \big\{(x,y,\tau) \in [0,X] \times [0,Y] \times [0,1]\big\}$,

$$\begin{gathered} u_\perp(x,y,\tau) \equiv u(x_{i-1}, y_{j-1}, \tau), \forall i \in \overline{1,N_1}, j \in \overline{1,N_2}, \\ \forall (x,y,\tau) \in [x_{i-1}, x_i] \times (y_{j-1}, y_j] \times [0,1]. \end{gathered}$$

Нехай мають місце наступні припущення:

1) розв'язок $u(x,y,\tau)$ задачі (3.23), (3.24) існує для будь-якого $\tau \in [0,1]$;

2) розв'язок $u(x,y,\tau)$ може бути знайдений у вигляді ряду

$$u(x,y,\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \overset{(i)}{u}(x,y)\tau^i, \tag{3.25}$$

що задовольняє рівності

$$\frac{\partial u(x,y,\tau)}{\partial x}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial \overset{(i)}{u}(x,y)}{\partial x}\tau^i,\quad \frac{\partial u(x,y,\tau)}{\partial y}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial \overset{(i)}{u}(x,y)}{\partial y}\tau^i,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y,\tau)}{\partial x\partial y}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\partial^2 \overset{(i)}{u}(x,y)}{\partial x\partial y}\tau^i,\quad \forall (x,y,\tau)\in D_\tau,$$

де функції $\overset{(i)}{u}(x,y)$ не залежать від τ.

З припущень 1) та 2) випливає, що $u(x,y)=u(x,y,1)\overset{def}{\equiv}\overset{(\infty)}{u}(x,y)$, тобто розв'язок $u(x,y)$ задачі Гурса (3.1), (3.2) можна з довільною точністю знайти за допомогою функції $\overset{m}{u}(x,y)$. Підставляючи ряд (3.25) у задачу (3.23), (3.24) та прирівнюючи функціональні коефіцієнти при однакових степенях τ, одержимо задачу Гурса відносно невідомої функції $\overset{(0)}{u}(x,y)$, яку будемо називати *базовою задачею:*

$$\frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x\partial y}+N\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\right)\overset{(0)}{u}(x,y)=f(x,y), \tag{3.26}$$

$$x\in(x_{i-1},x_i),\ y\in(y_{j-1},y_j),\ \forall i=\overline{1,N_1},\ \forall j=\overline{1,N_2},$$

$$\overset{(0)}{u}(x_i+0,y)=\overset{(0)}{u}(x_i-0,y),\ \overset{(0)}{u}(x,y_j+0)=\overset{(0)}{u}(x,y_j-0),\forall i=\overline{1,N_1-1},\ \forall j=\overline{1,N_2-1},$$

$$\overset{(0)}{u}(x,0)=\psi(x),\ \overset{(0)}{u}(0,y)=\varphi(y),\psi(0)=\varphi(0), \tag{3.27}$$

і рекурентну послідовність задач Гурса відносно функцій $\overset{(k)}{u}(x,y), k=1,2,\ldots$:

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x\partial y}+N\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\right)\overset{(k)}{u}(x,y)=$$

$$=-N'\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\right)\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\ \overset{(0)}{u}(x,y)-\overset{(k)}{F}(x,y), \tag{3.28}$$

$$x\in(x_{i-1},x_i),y\in(y_{j-1},y_j),$$

$$\overset{(k)}{u}(x_{i-1}+0,y)=\overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0,y),\quad y\in[0,Y],$$

$$\overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}+0)=\overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}-0),\quad x\in[0,X],$$

$$\overset{(k)}{u}(x,0)=0,\ \overset{(k)}{u}(0,y)=0,\ i=\overline{1,N_1},j=\overline{1,N_2},k=1,2,\ldots, \tag{3.29}$$

де

$$\overset{(k)}{F}(x,y) = \sum_{p=1}^{k-1} A_{k-p}\Big(N; \overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}),\dots,\overset{(k-p)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\Big)\overset{(p)}{u}(x,y)+$$

$$+\sum_{p=0}^{k-1}\Big[A_{k-1-p}(N; \overset{(0)}{u}(x,y),\dots,\overset{(k-1-p)}{u}(x,y))- \tag{3.30}$$

$$-A_{k-1-p}(N; \overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}),\dots,\overset{(k-1-p)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}))\Big]\overset{(p)}{u}(x,y)+$$

$$+A_k(N; \overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}),\dots,\overset{(k-1)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}),0)\,\overset{(0)}{u}(x,y), \quad k=1,2\dots.$$

Тут $A_n\big(N; v_0, v_1,\dots,v_n\big)$ – пліноми Адомяна n-го порядку для функції $N(\cdot)$ (див., наприклад, [77, 30]), які можна обчислити за формулою (2.29).

Відомо, що розв'язки задач (3.28) та (3.26) можна записати в явному вигляді за допомогою розв'язуючого оператора, в ролі якого виступає функція Рімана $R_{i,j}(x,y;\xi,\eta)$ (див., наприклад, [10, с.447]). А саме:

$$\overset{(k)}{u}(x,y) = \overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0,y)+\overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}-0)-$$

$$-\overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0,y_{j-1}-0)R_{i,j}(x,y;x_{i-1},y_{j-1})-$$

$$-\int_{x_{i-1}}^{x}\overset{(k)}{u}(\xi,y_{j-1}-0)\frac{\partial}{\partial\xi}R_{i,j}(x,y;\xi,y_{j-1})\,d\xi-$$

$$-\int_{y_{j-1}}^{y}\overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0,\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}R_{i,j}(x,y;x_{i-1},\eta)\,d\eta+$$

$$+\int_{x_{i-1}}^{x}\int_{y_{j-1}}^{y} g_k(\xi,\eta)\,R_{i,j}(x,y;\xi,\eta)\,d\eta d\xi, \tag{3.31}$$

де $R_{i,j}(x,y;\xi,\eta) = \mathcal{J}_0\left(\sqrt{4c_{ij}(x-\xi)(y-\eta)}\right)$, $c_{i,j} = N(u^{(0)}(x_{i-1},y_{j-1}))$, $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$, $\mathcal{J}_0(t)$ — функція Бесселя першого роду нульового порядку (див. [1]),

$$g_k(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & k=0;\\ -N'\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\right)\overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0,y_{j-1}-0)\times & \\ \times\,\overset{(0)}{u}(x,y)-\overset{(k)}{F}(x,y), & k>0.\end{cases}$$

3.3 Обґрунтування збіжності FD-методу для рівняння Клейна–Гордона з нелінійністю, обмеженою в $\mathbb{R}^1$

Перш ніж переходити до обґрунтування збіжності FD-методу розв'язування задачі Гурса (3.1), (3.2), доведемо кілька допоміжних тверджень, які стосуються локальних властивостей поліномів Адомяна для скалярних функцій, і які гратимуть важливу роль в обґрунтуванні збіжності FD-методу.

Введемо, для зручності, наступні позначення:

$$\|u\|_{0,\overline{\Omega}} = \max_{(x,y)\in\overline{D}} |u(x,y)|\,, \quad \|u\|_{1,\overline{D}} = \max_{(x,y)\in\overline{D}} \left\{ \left|\frac{\partial}{\partial x} u(x,y)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)\right| \right\},$$

$$\|\cdot\| = \max\{\|\cdot\|_{0,\overline{D}}, \|\cdot\|_{1,\overline{D}}\} \tag{3.32}$$

Зафіксуємо в області D сітку $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ (3.22) і введемо в розгляд функцію (проектор): $\mathbf{P}_h : C\left(\overline{D}\right) \to Q\left(\overline{D}\right)$, який діє таким чином:

$$\forall x, y \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\,, \forall\ u\,(x,y) \in C\left(\overline{D}\right),$$

$$\mathbf{P}_h\,(u\,(x,y)) = u\,(x_{i-1}, y_{j-1})\,,\ i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, \tag{3.33}$$

де $Q\left(\overline{D}\right)$ — простір кусково-сталих на $\overline{D}$ функцій.

Лема 3.1. *Нехай для деякого $\Theta^* > 0$ виконується нерівність*

$$\langle \mathbf{u} + \Theta^* \mathbf{v}, \mathbf{u} + \Theta^* \mathbf{v} \rangle \geq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle\,, \tag{3.34}$$

де $\mathbf{u}$ та $\mathbf{v}$ є елементами деякого гільбертового простору H, зі скалярним добутком $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тоді $\forall\ \Theta', \Theta'' :\ \Theta' \geq \Theta'' \geq \frac{1}{2}\Theta^*$ має місце нерівність

$$\langle \mathbf{u} + \Theta' \mathbf{v}, \mathbf{u} + \Theta' \mathbf{v} \rangle \geq \langle \mathbf{u} + \Theta'' \mathbf{v}, \mathbf{u} + \Theta'' \mathbf{v} \rangle\,. \tag{3.35}$$

Доведення. З нерівності (3.34) одержимо

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\Theta^* \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + (\Theta^*)^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle\,.$$

Оскільки $\Theta^* > 0$, то звідси випливає нерівність

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \geq -\frac{\Theta^*}{2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle\,. \tag{3.36}$$

Розглянемо похідну по Θ такої функції :

$$F(\Theta) = \langle \mathbf{u} + \Theta \mathbf{v}, \mathbf{u} + \Theta \mathbf{v} \rangle .$$

Маємо:

$$F'(\Theta) = \langle \mathbf{u} + \Theta \mathbf{v}, \mathbf{u} + \Theta \mathbf{v} \rangle'_{\Theta} = 2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + 2\Theta \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle . \tag{3.37}$$

Далі, доведемо, що для $\forall\ \Theta \geq \frac{1}{2}\Theta^*$ вираз (3.37) є невід'ємним.

Справді, враховуючи нерівність (3.36), із (3.37) одержимо

$$F'(\Theta) \geq -\Theta^* \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2\Theta \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = (2\Theta - \Theta^*) \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0.$$

Отже, на проміжку $\left[\frac{1}{2}\Theta^*, +\infty\right)$ функція $F(\Theta)$ не спадає, а тому $\forall\ \Theta', \Theta''$: $\Theta' \geq \Theta'' \geq \frac{1}{2}\Theta^*$ має місце нерівність $F(\Theta') \geq F(\Theta'')$, що й потрібно було довести.

Лема 3.2. *Для кожної функції* $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right)$ *і будь-яких* Θ_1, Θ_2, *таких що* $\Theta_1 \geq \Theta_2$, *має місце нерівність*

$$\|\boldsymbol{P}_h(u(x,y)) - \Theta_1 (\boldsymbol{P}_h(u(x,y)) - u(x,y))\|_{0,\overline{D}} \geq$$

$$\geq \|\boldsymbol{P}_h(u(x,y)) - \Theta_2 (\boldsymbol{P}_h(u(x,y)) - u(x,y))\|_{0,\overline{D}} \tag{3.38}$$

Доведення. Покажемо, що для довільних $n, m \in \mathbb{N}, n \leq N_1, m \leq N_2$ має місце нерівність

$$\|\mathbf{P}_h(u(x,y)) - \Theta_1 (\mathbf{P}_h(u(x,y)) - u(x,y))\|_{0,[x_0,x_n]\times[y_0,y_m]} \geq$$

$$\geq \|\mathbf{P}_h(u(x,y)) - \Theta_2 (\mathbf{P}_h(u(x,y)) - u(x,y))\|_{0,[x_0,x_n]\times[y_0,y_m]}, \tag{3.39}$$

де $\|\cdot\|_{[x_0,x_n]\times[y_0,y_m]} = \max\limits_{(x,y)\in[x_0,x_n]\times[y_0,y_m]} |\cdot|$.

Нехай точка $(x^\star, y^\star) \in [x_0, x_n] \times [y_0, y_m]$ — така, що

$$\|\mathbf{P}_h(u(x,y)) - \Theta_2 (\mathbf{P}_h(u(x,y)) - u(x,y))\|_{0,[x_0,x_n]\times[y_0,y_m]} =$$

$$= |\mathbf{P}_h(u(x^*,y^*)) - \Theta_2 (\mathbf{P}_h(u(x^*,y^*)) - u(x^*,y^*))| = A.$$

Не порушуючи загальності будемо вважати, що $(x^*, y^*) \in [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$. Легко бачити, що $A \geq |u(x_0, y_0)|$. Умови леми 3.1 є виконаними, якщо покласти $\Theta^* = \Theta' = \Theta_1$, а $\Theta'' = \Theta_2$. З леми 3.1 випливає

$$\|\mathbf{P}_h(u(x,y)) - \Theta_2 \left(\mathbf{P}_h(u(x,y)) - u(x,y)\right)\|_{0,[x_0,x_n]\times[y_0,y_m]} \leq$$

$$\leq |\mathbf{P}_h(u(x^*,y^*)) - \Theta_2 \left(\mathbf{P}_h(u(x^*,y^*)) - u(x^*,y^*)\right)| =$$

$$= |\mathbf{P}_h(u(x^*,y^*)) - \Theta_1 \left(\mathbf{P}_h(u(x^*,y^*)) - u(x^*,y^*)\right)| \leq$$

$$\leq \|\mathbf{P}_h(u(x,y)) - \Theta_1 \left(\mathbf{P}_h(u(x,y)) - u(x,y)\right)\|_{0,[x_0,x_n]\times[y_0,y_m]}.$$

Отже, нами доведено справедливість нерівності (3.39).
Оскільки $n, m \in \mathbb{N}, n \leq N_1, m \leq N_2,$ — довільні, то з (3.39) випливає нерівність (3.38). Таким чином, доведення леми завершено.

Лема 3.3. *Нехай* $N(u) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^1)$ *і існує скалярна функція* $\widetilde{N}(u) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ *така, що* $\forall\ u \in \mathbb{R}$ *мають місце нерівності*

$$\left|\frac{d^k N(u)}{du^k}\right| \leq \frac{d^k}{du^k}\widetilde{N}(u)\bigg|_{u=|u|} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}, \tag{3.40}$$

тоді

$$\left\|A_k\left(N(\cdot); [u_i(x,y)]_{i=0}^k\right)\right\|_{0,\overline{D}} \leq$$

$$\leq A_k\left(\widetilde{N}(\cdot); \left[\|u_i(x,y)\|_{0,\overline{\Omega}}\right]_{i=0}^k\right) \ \forall\ k \in \mathbb{N}, \forall u_i(x,y) \in C(\overline{D}), \tag{3.41}$$

$$\left\|A_k\left(N(\cdot); [u_i(x,y)]_{i=0}^k\right) - A_k\left(N(\cdot); [\mathbf{P}_h(u_i(x,y))]_{i=0}^k\right)\right\|_0 \leq$$

$$\leq hA_k\left(\widetilde{N}^{(1)}(\cdot) \times (\cdot); \|u_0(x,y)\|, \ldots, \|u_k(x,y)\|\right) \tag{3.42}$$

$$\forall\ k \in \mathbb{N}, \forall u_i(x,y) \in C^1(\overline{D}).$$

Доведення. Дійсно, з леми 3.2 випливає, що для довільної неперервної скалярної функції $u(x,y)$, оператора $\mathbf{P}_h$ (3.33), і $\forall\ \Theta', \Theta'' :\ \Theta' \geq \Theta'' \geq 0$ виконується нерівність

$$\|\mathbf{P}_h(u(x,y)) - \Theta' \left(\mathbf{P}_h(u(x,y)) - u(x,y)\right)\|_{0,\overline{D}} \geq$$

$$\geq \|\mathbf{P}_h(u(x,y)) - \Theta'' \left(\mathbf{P}_h(u(x,y)) - u(x,y)\right)\|_{0,\overline{D}}. \tag{3.43}$$

Також неважко встановити, використовуючи теорему про скінченні прирости, що $\forall \; u_i(x,y) \in C^1(\overline{D})$ має місце така оцінка

$$\|u_i(x,y) - \mathbf{P}_h(u_i(x,y))\|_{0,\overline{D}} = \left\| \frac{\partial u_i(x',y')}{\partial x}(x - x_{i-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u_i(x',y')}{\partial y}(y - y_{j-1}) \right\|_{0,\overline{D}} \le h \left(\left| \frac{\partial u_i(x',y')}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial u_i(x',y')}{\partial y} \right| \right) \le$$

$$\le h||u_i(x,y)||_{1,\overline{D}}, \; i = \overline{0,k}. \tag{3.44}$$

Для подальших міркувань використаємо наступну оцінку:

$$\left| N_u^{(k)}(u(x,y)) u_1(x,y) \dots u_k(x,y) \right| = \left| u_1(x,y) \dots u_k(x,y) \frac{d^k N(u)}{du^k} \Big|_{u=u(x,y)} \right| \le$$

$$\le |u_1(x,y)| \dots |u_k(x,y)| \left| \frac{d^k N(u)}{du^k} \Big|_{u=u(x,y)} \right| \le$$

$$\le \|u_1(x,y)\|_{0,\overline{D}} \dots \|u_k(x,y)\|_{0,\overline{D}} \left| \frac{d^k N(u)}{du^k} \Big|_{u=u(x,y)} \right| \le$$

$$\le \left(\prod_{i=1}^{k} \|u_i(x,y)\|_{0,\overline{D}} \right) \left| \frac{d^k N(u)}{du^k} \Big|_{u=u(x,y)} \right| \le$$

$$\le \left(\prod_{i=1}^{k} \|u_i(x,y)\|_{0,\overline{D}} \right) \frac{d^k}{du^k} \widetilde{N}(u) \Big|_{u=\|u(x,y)\|_{0,\overline{D}}}. \tag{3.45}$$

Враховуючи означення k-лінійного оператора (див., наприклад, означення 3.3 з [9, с.83]), із нерівностей (3.40) при застосуванні (3.45) отримуємо, що виконуються умови леми 3.1 з [9], і зважаючи на її твердження, за допомогою (3.32) та (3.44) неважко одержати оцінки (3.41),(3.42). На цьому доведення леми завершено.

Твердження наступної леми безпосередньо випливає з означення полінома Адомяна.

Лема 3.4. (див. [9]) *Для довільної скалярної функції* $\widetilde{N}(u) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, $\forall \; u_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0,j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$, *справедливі рівності*

$$A_{j+1}\left(\widetilde{N}(\cdot); u_0, u_1, \dots, u_j, 0\right) =$$

$$= \frac{1}{(j+1)!}\left\{\frac{d^{j+1}}{d\tau^{j+1}}\left[\widetilde{N}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\tau^i u_i\right) - \left.\frac{d\widetilde{N}(u)}{du}\right|_{u=u_0}\sum_{i=1}^{\infty}\tau^i u_i\right]\right\}_{\tau=0} \tag{3.46}$$

Сформулюємо теорему, яка забезпечує достатні умови збіжності FD-методу (3.21)–(3.30) для задачі Гурса (3.1), (3.2).

Теорема 3.2. *Нехай для задачі Гурса* (3.1) – (3.2) *виконуються умови теореми 3.1 та:*

1) $\varphi(y) \in C^1[0, Y], \psi(x) \in C^1[0, X], \varphi(0) = \psi(0), f(x, y) \in C\left(\overline{D}\right);$

2) $|N(u)| < \alpha < +\infty,$

і має місце представлення:

$$N(u) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u^i, \ \ a_i \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Тоді виконують припущення 1), 2) і розв'язок задачі (3.1) – (3.2) *існує і є єдиним на прямокутнику* $\overline{D}$. *FD-метод для задачі* (3.1) – (3.2) *збігається до її точного розв'язку. Мають місце оцінки абсолютної похибки методу:*

$$\left\| u(x,y) - \overset{p}{u}(x,y) \right\|_{0,\overline{D}} \leq \frac{C}{(p+1)^{1+\delta}} \frac{(h/R)^{p+1}}{1-h/R}, \tag{3.47}$$

де $h = \max\{h_1, h_2\}$, $h < R$ *і дійсні сталі* C, R, δ *залежать лише від вхідних даних задачі* (3.1) – (3.2).

Для доведення теореми 3.2 нам знадобиться наступне допоміжне твердження про апроксимаційні властивості базової задачі.

Лема 3.5. *Нехай* $\varphi(y) \in C^1[0, Y], \psi(x) \in C^1[0, X], \varphi(0) = \psi(0),\ f(x, y) \in C\left(\overline{D}\right)$, *і функція* $N(u)$ *задовольняє умову:*

$$N(u) \in C(\mathbb{R}),\ |N(u)| < \alpha < +\infty,\ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Тоді розв'язок задачі (3.26) - (3.27) *існує, є єдиним та має місце оцінка:*

$$\|\overset{(0)}{u}(x,y)\|_{0,\overline{D}} \leq \Big(\|\varphi(y)\|_{[0,Y]} + \|\psi(x)\|_{[0,X]} + |\varphi(0)| +$$

$$+XY\|f(x,y)\|_{0,\overline{D}}\Big)\exp(\alpha XY). \tag{3.48}$$

Доведення. Оскільки при кожному фіксованому $x \in [x_{i-1}, x_i], y \in [y_{j-1}, y_j]$ коефіцієнт $N\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1}, y_{j-1})\right)$ у рівнянні в задачі (3.26) - (3.27) є сталим, то, як відомо (див., наприклад [10, с.447]), розв'язок цієї задачі ми можемо записати у явному вигляді за допомогою рекурентного співвідношення (3.31) при $k = 0$.

Таким чином, пробігаючи в (3.31) послідовно всі значення $i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}$, ми, крок за кроком, розв'яжемо задачу (3.26) - (3.27) у всій області $\overline{D}$.

Із побудови розв'язку задачі і випливає його єдиність.

Покажемо справедливість оцінки (3.48). Для цього проінтегруємо рівняння (3.26) в межах від 0 до x і від 0 до y:

$$\int_0^y \int_0^x \frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta + \int_0^y \int_0^x N\left(\mathbf{P}_h\left(\overset{(0)}{u}(\xi, \eta)\right)\right) \overset{(0)}{u}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{3.49}$$

Врахувавши умови на характеристиках в (3.26) - (3.27), а також те, що $\psi(0) = \varphi(0)$, з (3.49) одержимо:

$$\overset{(0)}{u}(x, y) = \varphi(y) - \psi(x) - \varphi(0) - \int_0^y \int_0^x N\left(\mathbf{P}_h\left(\overset{(0)}{u}(\xi, \eta)\right)\right) \overset{(0)}{u}(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \tag{3.50}$$

Тоді з умов леми та (3.50) отримується оцінка:

$$|\overset{(0)}{u}(x, y)| \leq \|\varphi(y)\|_{[0,Y]} + \|\psi(x)\|_{[0,X]} + |\varphi(0)| + XY \|f(x, y)\|_{0,\overline{D}} +$$

$$+ \alpha \int_0^y \int_0^x |\overset{(0)}{u}(\xi, \eta)| \, d\xi d\eta. \tag{3.51}$$

Далі, з оцінки (3.51), використавши нерівність Вендроффа (див. [2, с.215]), отримуємо:

$$\|\overset{(0)}{u}(x, y)\|_{0,\overline{D}} \leq \left(\|\varphi(y)\|_{[0,Y]} + \|\psi(x)\|_{[0,X]} + |\varphi(0)| + XY \|f(x, y)\|_{0,\overline{D}}\right) \exp(\alpha XY),$$

що й потрібно було довести.

Доведення (теореми 3.2). Нехай виконуються умови теореми. Тоді з теореми 3.1 випливає, що локальний розв'язок задачі Гурса (3.1)–(3.2) в області $\overline{D}$ існує і є єдиним.

Доведемо справедливість оцінки (3.47). Для цього перепишемо задачу (3.28) – (3.29) наступним чином :

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + q(x,y) \overset{(k)}{u}(x,y) =$$

$$= -N'\Big(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\Big)\Big(\overset{(k)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\, \overset{(0)}{u}(x,y) - \overset{(k)}{u}(x,y)\, \overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\Big) -$$

$$- \overset{(k)}{F}(x,y),\ x \in (x_{i-1},x_i),\ y \in (y_{j-1},y_j), \tag{3.52}$$

$$\overset{(k)}{u}(x_{i-1}+0,y) = \overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0,y),\ \overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}+0) = \overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}-0).$$

$$\overset{(k)}{u}(x,0) = 0,\ \overset{(k)}{u}(0,y) = 0,\ k = 1,2,\dots,$$

де

$$q(x,y) = N\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\right) + N'\Big(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\Big)\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}). \tag{3.53}$$

Проінтегруємо рівняння (3.52) в межах від 0 до x і від 0 до y.

$$\int\limits_0^y \int\limits_0^x \frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(\xi,\eta)}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta + \int\limits_0^y \int\limits_0^x q(\xi,\eta)\, \overset{(k)}{u}(\xi,\eta) d\xi d\eta =$$

$$= \int\limits_0^y \int\limits_0^x \Big[-N'\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big)\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big)\, \overset{(0)}{u}(\xi,\eta) -$$

$$- \overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big) - \overset{(k)}{F}(\xi,\eta)\Big] d\xi d\eta\,. \tag{3.54}$$

При інтегруванні (3.54) врахуємо умови на характеристиках $x = 0$ та $y = 0$ із (3.52). Таким чином, з (3.54) отримуємо

$$\overset{(k)}{u}(x,y) = \int\limits_0^y \int\limits_0^x \Big[-N'\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big)\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big)u^{(0)}(\xi,\eta) -$$

$$- \overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big) - \overset{(k)}{F}(\xi,\eta)\Big]d\xi d\eta - \int\limits_0^y\int\limits_0^x q(\xi,\eta)\,\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (3.55)$$

З (3.55) випливає нерівність

$$\Big|\overset{(k)}{u}(x,y)\Big| \le \int\limits_0^y\int\limits_0^x \Big[\Big|N'\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big)\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big)\,\overset{(0)}{u}(\xi,\eta) -$$

$$- \overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big)\Big| + \Big|\overset{(k)}{F}(\xi,\eta)\Big|\Big]d\xi d\eta + \int\limits_0^y\int\limits_0^x \Big|q(\xi,\eta)\Big|\cdot\Big|u^{(k)}(\xi,\eta)\Big|d\xi d\eta. \qquad (3.56)$$

Оцінимо вираз, що фігурує в правій частині нерівності (3.56):

$$\Big|N'\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big)\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big)\overset{(0)}{u}(\xi,\eta) - \overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big)\Big| +$$

$$+\Big|\overset{(k)}{F}(\xi,\eta)\Big| =$$

$$= \Big|N'\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big)\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big)\,\overset{(0)}{u}(\xi,\eta) - \overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\,\overset{(0)}{u}(\xi,\eta) +$$

$$+ \overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\,\overset{(0)}{u}(\xi,\eta) - \overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big)\Big| + \Big|\overset{(k)}{F}(x,y)\Big| \le$$

$$\le \Big|N'\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big)\Big|\Big(\Big|\mathbf{P}_h\Big(\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big) - \overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big|\cdot\Big|\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big| +$$

$$+\Big|\overset{(0)}{u}(\xi,\eta) - \mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\Big|\cdot\Big|\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big|\Big) + \Big|\overset{(k)}{F}(\xi,\eta)\Big|. \qquad (3.57)$$

Далі, використовуючи теорему Лагранжа про скінченні прирости, оцінимо по модулю наступний вираз вже з (3.57)

$$\Big|\mathbf{P}_h\Big(\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big) - \overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big| = \Big|\frac{\partial}{\partial\xi}\overset{(k)}{u}(\xi',\eta')(\xi - x_{i-1}) + \frac{\partial}{\partial\eta}\overset{(k)}{u}(\xi',\eta')(\eta - y_{j-1})\Big| \le$$

$$\le h\left(\Big|\frac{\partial}{\partial\xi}\,\overset{(k)}{u}(\xi',\eta')\Big| + \Big|\frac{\partial}{\partial\eta}\,\overset{(k)}{u}(\xi',\eta')\Big|\right) \le h\,\Big\|\overset{(k)}{u}(x,y)\Big\|_{1,\overline{D}}, \qquad (3.58)$$

де $\xi' = x_{i-1} + \Theta(x_{i-1} + \xi), \eta' = y_{j-1} + \Theta(y_{j-1} + \eta), \Theta \in [0,1]$.

Оцінимо тепер по модулю кожну з похідних у формулі (3.58). Щоб зробити такі оцінки проінтегруємо рівняння (3.28) в межах від 0 до y. Отримуємо:

$$\int\limits_0^y \left[\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,\eta)}{\partial x \partial \eta} + N\left(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,\eta)\Big)\right) \overset{(k)}{u}(x,\eta) \right] d\eta =$$

$$-\int\limits_0^y \left[N'\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,\eta)\Big)\Big) \mathbf{P}_h\Big(\overset{(k)}{u}(x,\eta)\Big) \overset{(0)}{u}(x,\eta) \right] d\eta - \int\limits_0^y \overset{(k)}{F}(x,\eta) d\eta,$$

звідки

$$\frac{\partial \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial \overset{(k)}{u}(x,0)}{\partial x} = -\int\limits_0^y N\left(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,\eta)\Big)\right) \overset{(k)}{u}(x,\eta) d\eta -$$

$$-\int\limits_0^y \left[N'\Big(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,\eta)\Big)\Big) \mathbf{P}_h\Big(\overset{(k)}{u}(x,\eta)\Big) \overset{(0)}{u}(x,\eta) \right] d\eta - \int\limits_0^y \overset{(k)}{F}(x,\eta) d\eta. \qquad (3.59)$$

З рівності (3.59), враховуючи умову на характеристиці $y = 0$ в (3.28) – (3.29), остаточно одержимо

$$\left| \frac{\partial \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x} \right| \le Y \left[\widetilde{N}\left(\Big\| \overset{(0)}{u}(x,y) \Big\|_{0,\overline{D}} \right) + \right.$$

$$\left. +\widetilde{N'}\left(\Big\| \overset{(0)}{u}(x,y) \Big\|_{0,\overline{D}} \right) \Big\| \overset{(0)}{u}(x,y) \Big\|_{0,\overline{D}} \right] \Big\| \overset{(k)}{u}(x,y) \Big\|_{0,\overline{D}} + Y \Big\| \overset{(k)}{F}(x,y) \Big\|_{0,\overline{D}}, \qquad (3.60)$$

де

$$\widetilde{N}(u) = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i| u^i \ \forall u \in \mathbb{R}. \qquad (3.61)$$

Аналогічним чином, проінтегрувавши рівняння в задачі (3.28) в межах від 0 до x та врахувавши умову на характеристиці $x = 0$ в (3.28), одержимо

$$\left| \frac{\partial \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial y} \right| \le X \left[\widetilde{N}\left(\Big\| \overset{(0)}{u}(x,y) \Big\|_{0,\overline{D}} \right) + \right.$$

$$\left. +\widetilde{N'}\left(\Big\| \overset{(0)}{u}(x,y) \Big\|_{0,\overline{D}} \right) \Big\| \overset{(0)}{u}(x,y) \Big\|_{0,\overline{D}} \right] \Big\| \overset{(k)}{u}(x,y) \Big\|_{0,\overline{D}} + X \Big\| \overset{(k)}{F}(x,y) \Big\|_{0,\overline{D}}. \qquad (3.62)$$

Таким чином, з нерівності (3.58), враховуючи нерівності (3.60) та (3.62), одержимо:

$$\left|\mathbf{P}_h\Big(\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\Big)-\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\right| \le h\Bigg[(X+Y)\left(\widetilde{N}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(\xi',\eta')\right\|_{0,\overline{D}}\right)+\right.$$

$$\left.+\widetilde{N'}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(\xi',\eta')\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(\xi',\eta')\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(k)}{u}(\xi',\eta')\right\|_{0,\overline{D}}+(X+Y)\left\|\overset{(k)}{F}(\xi',\eta')\right\|_{0,\overline{D}}\Bigg], \tag{3.63}$$

де $h=\max\{h_1,h_1\}$.

Використовуючи теорему Лагранжа про скінченні прирости, аналогічно до попереднього, оцінимо наступний вираз з нерівності (3.57):

$$\left|\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)-\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial x}\overset{(0)}{u}(\xi'',\eta'')(x-x_{i-1})+\frac{\partial}{\partial y}\overset{(0)}{u}(\xi'',\eta'')(y-y_{j-1})\right|, \tag{3.64}$$

де $\xi''=x_{i-1}+\Theta(x_{i-1}+x), \eta''=y_{j-1}+\Theta(y_{j-1}+y), \Theta\in[0,1]$.

Оцінимо по модулю відповідні похідні у формулі (3.64). Щоб зробити такі оцінки проінтегруємо рівняння (3.28) в межах від 0 до y. Отримуємо:

$$\int\limits_0^y \frac{\partial^2\overset{(0)}{u}(x,\eta)}{\partial x\partial\eta}d\eta = -\int\limits_0^y N\left(\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,\eta)\Big)\right)\overset{(0)}{u}(x,\eta)d\eta+\int\limits_0^y f(x,\eta)d\eta \tag{3.65}$$

З рівності (3.65), враховуючи умову на характеристиці $y=0$ з (3.26), одержимо

$$\left|\frac{\partial\overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x}\right| \le \left\|\psi'(x)\right\|_{[0,X]}+Y\widetilde{N}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+Y\left\|f(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}. \tag{3.66}$$

Аналогічно, проінтегрувавши рівняння в задачі (3.26) в межах від 0 до x та врахувавши умову на характеристиці $x=0$ з (3.26), одержимо

$$\left|\frac{\partial\overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial y}\right| \le \left\|\varphi'(y)\right\|_{[0,Y]}+X\widetilde{N}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+X\left\|f(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}. \tag{3.67}$$

Таким чином, з формули (3.64), враховуючи (3.66) та (3.67), отримуємо

$$\left|\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)-\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\Big)\right| \le h\Big[\left\|\varphi'(\eta'')\right\|_{[0,Y]}+\left\|\psi'(\xi'')\right\|_{[0,X]}+$$

$$+\,(X+Y)\,\widetilde{N}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(\xi'',\eta'')\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(\xi'',\eta'')\right\|_{0,\overline{D}}+(X+Y)\left\|f(\xi'',\eta'')\right\|_{0,\overline{D}}\Bigg],\tag{3.68}$$

де $h=\max\{h_1,h_1\}$.

Отже, повертаючись до нерівності (3.56) та враховуючи (3.57), (3.63) і (3.68), будемо мати

$$\left|\overset{(k)}{u}(x,y)\right|\leq\int\limits_0^y\int\limits_0^x\Bigg\{\left|N'\left(\mathbf{P}_h\left(\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\right)\right)\right|\Bigg[\Bigg(h\,(X+Y)\Bigg(\widetilde{N}\left(\|\overset{(0)}{u}(x,y)\|_{0,\overline{D}}\right)+$$

$$+\widetilde{N'}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\Bigg)\left\|\overset{(k)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+$$

$$+h\,(X+Y)\left\|\overset{(k)}{F}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\Bigg)\left|\overset{(0)}{u}(\xi,\eta)\right|+h\Bigg(\|\varphi'(y)\|_{[0,Y]}+$$

$$+\|\psi'(x)\|_{[0,X]}+(X+Y)\Bigg(\widetilde{N}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+$$

$$+\|f(x,y)\|_{0,\overline{D}}\Bigg)\Bigg)\left|\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\right|\Bigg]+\left|\overset{(k)}{F}(\xi,\eta)\right|\Bigg\}d\xi d\eta+\int\limits_0^y\int\limits_0^x\left|q(\xi,\eta)\right|\cdot\left|\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta.\tag{3.69}$$

З нерівності (3.69) випливає

$$\left|\overset{(k)}{u}(x,y)\right|\leq hXY\widetilde{N'}\left(\left\|\mathbf{P}_h\left(\overset{(0)}{u}(x,y)\right)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\Bigg[(X+Y)\Bigg(\widetilde{N}\left(\|\overset{(0)}{u}(x,y)\|_{0,\overline{D}}\right)+$$

$$+\widetilde{N'}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\Bigg)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+\|\varphi'(y)\|_{[0,Y]}+\|\psi'(x)\|_{[0,X]}+$$

$$+\,(X+Y)\widetilde{N}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+(X+Y)\|f(x,y)\|_{0,\overline{D}}\Bigg]\left\|\overset{(k)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+$$

$$+\Bigg[XYh\,(X+Y)\,\widetilde{N'}\left(\left\|\mathbf{P}_h\left(\overset{(0)}{u}(x,y)\right)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+XY\Bigg]\left\|\overset{(k)}{F}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+$$

$$+\int\limits_0^y\int\limits_0^x\left|q(\xi,\eta)\right|\cdot\left|\overset{(k)}{u}(\xi,\eta)\right|d\xi d\eta.\tag{3.70}$$

Скориставшись нерівністю Вендроффа (див. [2, с.215]), з (3.70) отримуємо:

$$\left|\overset{(k)}{u}(x,y)\right| \leq \Bigg\{ hXY\widetilde{N'}\left(\left\|\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\Bigg[(X+Y)\left(\widetilde{N}\left(\|\overset{(0)}{u}(\xi',\eta')\|_{0,\overline{D}}\right)+\right.$$

$$\left.+\widetilde{N'}\Big(\left\|\overset{(0)}{u}(\xi',\eta')\right\|_{0,\overline{D}}\Big)\left\|\overset{(0)}{u}(\xi',\eta')\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+\|\varphi(y)\|_{[0,Y]}+\|\psi(x)\|_{[0,X]}+$$

$$+(X+Y)\,\widetilde{N}\Big(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\Big)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+(X+Y)\|f(x,y)\|_{0,\overline{D}}\Bigg]\left\|\overset{(k)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+$$

$$+\Bigg[XYh\,(X+Y)\,\widetilde{N'}\left(\left\|\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+$$

$$+XY\Bigg]\left\|\overset{(k)}{F}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\Bigg\}\exp\left[\int\limits_0^y\int\limits_0^x\Big|q(\xi,\eta)\Big|d\xi d\eta\right]. \tag{3.71}$$

З леми 3.5 і з того, що $N\,(u)\in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$, випливає, що функція $q(x,y)$ із (3.53) є обмеженою, якщо $(x,y)\in\overline{D}$. Таким чином, з (3.71) одержимо:

$$\left|\overset{(k)}{u}(x,y)\right| \leq hXY\widetilde{N'}\left(\left\|\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\Bigg[(X+Y)\left(\widetilde{N}\left(\|\overset{(0)}{u}(x,y)\|_{0,\overline{D}}\right)+\right.$$

$$\left.+\widetilde{N'}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+\|\varphi'(y)\|_{[0,Y]}+$$

$$+\|\psi'(x)\|_{[0,X]}+(X+Y)\,\widetilde{N}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+$$

$$+(X+Y)\,\|f(x,y)\|_{0,\overline{D}}\Bigg]\exp[XY\widetilde{q}]\left\|\overset{(k)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+$$

$$+\Bigg[XYh\,(X+Y)\,\widetilde{N'}\left(\left\|\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+$$

$$+XY\Bigg]\exp[XY\widetilde{q}]\left\|\overset{(k)}{F}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}, \tag{3.72}$$

де

$$\widetilde{q}=\max_{(x,y)\in D}|q(x,y)|\leq\widetilde{N}\left(\left\|\overset{(k)}{F}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)+\widetilde{N'}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}.$$

Введемо в нерівності (3.72) позначення:

$$\sigma_1 = XY\widetilde{N'}\left(\left\|\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left[(X+Y)\left(\widetilde{N}\left(\|\overset{(0)}{u}(x,y)\|_{0,\overline{D}}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\widetilde{N'}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+\|\varphi'(y)\|_{[0,Y]}+$$

$$+\left\|\psi'(x)\right\|_{[0,X]}+(X+Y)\,\widetilde{N}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+$$

$$\left.+\,(X+Y)\,\|f(x,y)\|_{0,\overline{D}}\right]\exp\big[XY\widetilde{q}\big],$$

$$\sigma_2=\left[XYh\,(X+Y)\,\widetilde{N'}\left(\left\|\mathbf{P}_h\Big(\overset{(0)}{u}(x,y)\Big)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+XY\right]\exp\big[XY\widetilde{q}\big].$$

І таким чином, з (3.72) ми отримаємо:

$$\left|\overset{(k)}{u}(x,y)\right|\le h\sigma_1\left\|\overset{(k)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+\sigma_2\left\|\overset{(k)}{F}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}. \tag{3.73}$$

Враховуючи незалежність правої частини нерівності (3.73) від змінних x та y, її можна переписати наступним чином:

$$\left\|\overset{(k)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\le h\sigma_1\left\|\overset{(k)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}+\sigma_2\left\|\overset{(k)}{F}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}$$

або

$$(1-h\sigma_1)\left\|\overset{(k)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\le\sigma_2\left\|\overset{(k)}{F}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}$$

Для всіх h таких, що $h<1/\sigma_1$, остання нерівність може бути представлена у вигляді

$$\left\|\overset{(k)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\le\sigma_3\left\|\overset{(k)}{F}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}, \tag{3.74}$$

якщо $\sigma_3=\dfrac{\sigma_2}{1-h\sigma_1}$.

З (3.58), (3.63) та (3.74) випливає оцінка

$$\left\|\overset{(k)}{u}(x,y)\right\|_{1,\overline{D}}\le\sigma_4\left\|\overset{(k)}{F}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}, \tag{3.75}$$

де

$$\sigma_4=(X+Y)\left(\widetilde{N}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)+\widetilde{N'}\left(\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\left\|\overset{(0)}{u}(x,y)\right\|_{0,\overline{D}}\right)\sigma_3+$$

$$+\left(X+Y\right).$$

З (3.74) та (3.75) випливає нерівність

$$\Big\|\overset{(k)}{u}(x,y)\Big\| = \max\Big\{\Big\|\overset{(k)}{u}(x,y)\Big\|_{0,\overline{D}}, \Big\|\overset{(k)}{u}(x,y)\Big\|_{1,\overline{D}}\Big\} \leq$$

$$\leq \max\{\sigma_3,\sigma_4\}\Big\|\overset{(k)}{F}(x,y)\Big\|_{0,\overline{D}} = \sigma\Big\|\overset{(k)}{F}(x,y)\Big\|_{0,\overline{D}}, \qquad (3.76)$$

де $\sigma = \max\{\sigma_3,\sigma_4\}$.

Для подальшої оцінки нерівності (3.76) використовуємо твердження лем 3.2 та 3.3, умови яких, очевидно, є виконаними, якщо $\widetilde{N}(u)$ визначається формулою (3.61). Отже, (3.76) можемо переписати :

$$\|\overset{(k)}{u}(x,y)\| \leq \sigma\left\{\sum_{p=1}^{k-1} A_{k-p}\left(\widetilde{N}(\cdot);[\|\overset{(i)}{u}(x,y)\|]_{i=0}^{k-p}\right)\|\overset{(p)}{u}(x,y)\|+\right.$$

$$+h\sum_{p=0}^{k-1} A_{k-1-p}\left(\widetilde{N'}(\cdot)\times(\cdot);[\|\overset{(i)}{u}(x,y)\|]_{i=0}^{k-1-p}\right)\|\overset{(p)}{u}(x,y)\|+$$

$$+\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\tau^k}\left[\widetilde{N}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\tau^i\|\overset{(i)}{u}(x,y)\|\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{d\widetilde{N}(u)}{du}\right|_{u=\|\overset{(0)}{u}(x,y)\|}\tau^{k-1}\|\overset{(k-1)}{u}(x,y)\|\right]_{\tau=0}\|\overset{(0)}{u}(x,y)\|\Bigg\},\ k\in\mathbb{N}. \qquad (3.77)$$

Далі, введемо в (3.77) нові змінні за формулою

$$h^{-k}\|\overset{(k)}{u}(x,y)\| = v_k,\ k\in\mathbb{N}. \qquad (3.78)$$

Визначимо послідовність додатних дійсних чисел $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ таким рекурентним співвідношенням :

$$V_k = \sigma\left\{\sum_{p=0}^{k-1} A_{k-p}\left(\widetilde{N}(\cdot);[V_i]_{i=0}^{k-p}\right)V_p+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{k-1} A_{k-1-p}\left(\widetilde{N}'(\cdot)\times(\cdot);[V_i]_{i=0}^{k-1-p}\right)V_p - V_k\widetilde{N'}(V_0)V_0\right\},\ k\in\mathbb{N}, \qquad (3.79)$$

де $V_0 = v_0 = \| \overset{(0)}{u} \|$, або

$$V_k = \frac{\sigma}{1+\sigma\widetilde{N}'(V_0)V_0}\left\{\sum_{p=0}^{k-1} A_{k-p}\left(\widetilde{N}(\cdot);[V_i]_{i=0}^{j-p}\right)V_p + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^{k-1} A_{k-1-p}\left(\widetilde{N}'(\cdot)\times(\cdot);[V_i]_{i=0}^{k-1-p}\right)V_p\right\},\ j\in\mathbb{N}. \tag{3.80}$$

Легко бачити, що $V_k \geq v_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. Доведемо, використовуючи метод твірних функцій, що для досить малих значень h ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \| \overset{(k)}{u}(x,y)\|$ збіжний. Для цього достатньо показати, що степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k V_k \tag{3.81}$$

має ненульовий радіус збіжності. З (3.80) одержимо

$$f(z) - V_0 = \frac{\sigma}{1+\sigma\widetilde{N}'(V_0)V_0}\left\{f(z)\left(\widetilde{N}(f(z)) - \widetilde{N}(V_0)\right) + zf^2(z)\widetilde{N}'(f(z))\right\}. \tag{3.82}$$

Доведемо, що існує функція $f(z)$, яка є розв'язком рівняння (3.82). Для цього достатньо показати, що вона має непорожню область визначення, яка містить деякий окіл точки $z = 0$. Щоб довести останнє, виразимо з (3.82) z через f:

$$z(f) = \frac{1}{\widetilde{C}f^2\widetilde{N}'(f)}(f - V_0) - \frac{1}{f\widetilde{N}'(f)}(\widetilde{N}(f) - \widetilde{N}(V_0)),$$
$$V_0 \leq f,\ \widetilde{C} = \frac{\sigma}{1+\sigma\widetilde{N}'(V_0)V_0}. \tag{3.83}$$

Неважко переконатися, що функція $z(f)$ є аналітичною в деякому околі точки $f = V_0$. Для доведення існування оберненої до неї функції $f = f(z)$, аналітичної в деякому околі точки $z = 0$, достатньо показати, що $z'(V_0) > 0$. Останнє безпосередньо випливає з виразу для $z(f)$ (3.83):

$$z'(V_0) = \lim_{f\to V_0}\frac{z(f) - z(V_0)}{f - V_0} =$$

$$= \lim_{f\to V_0}\left(\frac{1}{\widetilde{C}f^2\widetilde{N}'(f)} - \frac{1}{f\widetilde{N}'(f)}\frac{\widetilde{N}(f) - \widetilde{N}(V_0)}{f - V_0}\right) = \frac{1}{\widetilde{C}V_0^2\widetilde{N}'(V_0)} - \frac{1}{V_0} =$$

$$= \frac{1+\sigma\widetilde{N}'(V_0)V_0}{\sigma V_0^2\widetilde{N}'(V_0)} - \frac{1}{V_0} = \frac{1}{\sigma V_0^2\widetilde{N}'(V_0)} > 0. \tag{3.84}$$

Далі, з виразу (3.61) для функції $\widetilde{N}(u)$ випливає, що $\widetilde{N}(u) \to +\infty$ при $u \to +\infty$, а тому з (3.83) маємо:

$$\lim_{f\to+\infty} z(f) \leq 0.$$

Остання нерівність в поєднанні з (3.84) гарантує існування такої точки $f_{\max}$, що $f_{\max} > V_0,\ z'(f_{\max}) = 0$ і $z'(f) > 0,\ \forall f \in (V_0, f_{\max})$, причому $R_1 = z_{\max} = z(f_{\max})$ — радіус збіжності ряду (3.81). Тобто має місце співвідношення

$$R_1^k V_k = \frac{C}{k^{1+\delta}}$$

для деяких додатних сталих δ та C, що не залежать від h. Повертаючись до старих позначень (3.78), одержимо

$$\|\overset{(k)}{u}(x,y)\| \leq \frac{C}{k^{1+\delta}}\left(\frac{h}{R_1}\right)^k,\ j \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{3.85}$$

з чого випливає наступна достатня умова збіжності ряду (3.81)

$$h \leq R \leq R_1, \tag{3.86}$$

де $R = \min\{1/\sigma_1, R_1\}$. Оцінка швидкості збіжності (3.47) може бути безпосередньо одержана з (3.85), (3.86). Теорему доведено.

3.4 Обґрунтування збіжності FD-методу для рівняння Клейна–Гордона з нелінійністю, необмеженою в $\mathbb{R}^1$

В даному розділі, як і раніше, припускаємо, що виконуються умови теореми 3.1, і будемо розглядати задачу Гурса (3.1), (3.2) в області $D \subseteq \Omega$: $D = \{(x,y) : 0 < x < X < \varepsilon, 0 < y < Y < \varepsilon\}$, де стала ε визначається теоремою 3.1. Однак, на відміну від попереднього розділу, відносно нелінійної функції $\mathbb{N}(u)$, не будемо вимагати її обмеженості в $\mathbb{R}^1$. Припускаємо лише, що для неї виконується (3.20).

Для визначення функцій $\overset{(k)}{u}(x,y)$ $k=0,1,2,\ldots$ введемо в розгляд наступну сітку:

$$x_i = h_1 i, \quad y_j = h_2 j, \quad h_1 = \frac{X}{N_1}, \quad h_2 = \frac{Y}{N_2}, \tag{3.87}$$
$$i \in \overline{0, N_1}, \quad j \in \overline{0, N_2}, \quad N_1, N_2 \geq 1.$$

На даному етапі, вважатимемо, що додатні цілі числа N_1 та N_2 вибрані довільним чином. Однак, пізніше буде показано, що зменшуючи значення параметру $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ (тобто збільшуючи як N_1 так і N_2) можна підвищити точність FD-методу.

Введемо також позначення:

$$P_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)\,, \quad i \in \overline{1, N_1},\ j \in \overline{1, N_2}.$$

Аналогічно до випадку задачі Гурса з обмеженою нелінійністю, розглянувши її узагальнення (3.23), (3.24), одержимо базову задачу (3.26) – (3.27) та рекурентну послідовність задач Гурса (3.28) – (3.29).

Доведемо теорему про апроксимаційні властивості базової задачі FD-методу (3.26) – (3.27) у випадку необмеженої в $\mathbb{R}^1$ нелінійності.

Відомо (див., наприклад, [10, с.447]), що задача (3.26) – (3.27) має єдиний розв'язок, який можна представити у наступному явному вигляді:

$$\overset{(0)}{u}(x,y) = R\left(x, y_{j-1}, x, y\right) \overset{(0)}{u}(x, y_{j-1}) +$$
$$+ R(x_{i-1}, y, x, y) \overset{(0)}{u}(x_{i-1}, y) - R(x_{i-1}, y_{j-1}, x, y) \overset{(0)}{u}(x_{i-1}, y_{j-1}) -$$
$$- \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi, y_{j-1}, x, y)\right] \overset{(0)}{u}(\xi, y_{j-1}) d\xi - \int\limits_{y_{j-1}}^{y} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} R(x_{i-1}, \eta, x, y)\right] \overset{(0)}{u}(x_{i-1}, \eta) d\eta +$$
$$+ \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \int\limits_{y_{j-1}}^{y} R(\xi, \eta, x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \forall (x,y) \in \bar{P}_{i,j}, \tag{3.88}$$

де

$$R(x, y; \xi, \eta) = J_0\left(\sqrt{4N_{i,j}(x-\xi)(y-\eta)}\right) = {}_0F_1\left(1; -(x-\xi)(y-\eta)N_{i,j}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} R(x, y; \xi, \eta) = {}_0F_1\left(2; -(x-\xi)(y-\eta)N_{i,j}\right) N_{i,j}(\eta - y), \tag{3.89}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}R(x,y;\xi,\eta) = {}_0F_1\left(2; -(x-\xi)(y-\eta)N_{i,j}\right) N_{i,j}(\xi - x),$$

$$N_{i,j} = \left| N\left(\overset{(0)}{u}_{i,j}\right) \right|, \quad \forall (x,y),(\xi,\eta) \in \bar{P}_{i,j} \quad i \in \overline{1,N_1},\ j \in \overline{1,N_2}.$$

Тут через J_0 та ${}_0F_1$ позначено відповідно функцію Бесселя першого роду нульового порядку та вироджену гіпергеометричну функцію (див. [62]).

Застосувавши інтегрування частинами, можна переписати формулу (3.88) наступним чином:

$$\overset{(0)}{u}(x,y) = \overset{(0)}{u}(x_{i-1},y) + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} R(\xi, y_{j-1}, x, y) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \overset{(0)}{u}(\xi, y_{j-1})\right] d\xi -$$

$$- \int\limits_{y_{j-1}}^{y} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} R(x_{i-1}, \eta, x, y)\right] \overset{(0)}{u}(x_{i-1}, \eta) d\eta +$$

$$+ \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \int\limits_{y_{j-1}}^{y} R(\xi, \eta, x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \forall (x,y) \in \bar{P}_{i,j}. \tag{3.90}$$

Має місце наступна теорема про апроксимаційні властивості базової задачі FD-методу.

Теорема 3.3. *Припустимо, що* $u(x,y)$ *та* $\overset{(0)}{u}(x,y)$ *– розв'язки задач* (3.1), (3.2) *та* (3.26)–(3.27)*, відповідно. Тоді для довільних як завгодно малих значень* h_1 *та* h_2 *існує стала* κ*, незалежна від* h_1 *та* h_2*, така, що має мсце наступна оцінка:*

$$\left\| u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y) \right\|_{\bar{D}} \le h\kappa, \quad h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}, \tag{3.91}$$

де $\left\| u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y) \right\|_{\bar{D}} = \max\limits_{(x,y)\in \overline{D}} \left| u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y) \right|.$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію

$$z(x,y) = u(x,y) - \overset{(0)}{u}(x,y).$$

Легко бачити, що ця функція є неперервною в області $\bar{D}$ та задовольняє наступне рівняння

$$\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} + N(\overset{(0)}{u}(x_{i-1}, y_{j-1})) z(x,y) + \tag{3.92}$$

$$+\left[N(u(x,y)) - N(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}))\right]u(x,y) = 0, \quad \forall (x,y)\in \bar{P}_{i,j},$$

а також крайові умови

$$z(x,0)=0, \quad z(0,y)=0, \quad \forall x\in \bar{D}_1,\ y\in\bar{D}_2.$$

Для доведення теореми достатньо знайти додатну дійсну сталу κ, яка не залежить від h, і таку, що виконується умова

$$\|z(x,y)\|_{\bar{P}_{i,j}} \le h\kappa, \tag{3.93}$$

$\forall i\in\overline{1,N_1},\ \ \forall j\in\overline{1,N_2}$, де $\|z(x,y)\|_{\bar{P}_{i,j}} = \max\limits_{(x,y)\in\bar{P}_{i,j}} |z(x,y)|$.

Введемо, для зручності, наступні позначення:

$$\overset{(0)}{u}_{i,j}=\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}),\ u_{i,s}=u(x_{i-1,y_{j-1}}),\ N'_{i,j}=\left|N'(\overset{(0)}{u}_{i,j})\right|, \tag{3.94}$$

$$L_{i,j}=\max_{\substack{(x,y)\in\bar{P}_{i,j}\\ \theta\in[0,1]}}\left|\mathbb{N}'(\overset{(0)}{u}_{i,j}-\theta(\overset{(0)}{u}_{i,j}-u(x,y)))\right|, \tag{3.95}$$

$$z_{i,j}=z(x_{i-1},y_{j-1}),\ \|z\|_{i,j}=\|z(x,y)\|_{\bar{P}_{i,j}}, \tag{3.96}$$

$$R_{i,j}={}_0F_1(1;N_{i,j}h_1h_2), \quad R'_{i,j}={}_0F_1(2;N_{i,j}h_1h_2)N_{i,j}, \tag{3.97}$$

$$\|u\|=\|u(x,y)\|_{\bar{D}},\|\psi'\|=\|\psi'(x)\|_{[0,X]},\|\phi'\|=\|\phi'(y)\|_{[0,Y]}. \tag{3.98}$$

Варто підкреслити, що принципова роль в доведенні теореми 3.3 належить сталим N_α та L_α, які визначаються наступним чином:

$$N_\alpha=\max_{u\in(\rho_1,\rho_2)}|N(u)|, \quad L_\alpha=\max_{u\in(\rho_1,\rho_2)}|\mathbb{N}'(u)|, \tag{3.99}$$

$$\rho_1=\min_{(x,y)\in\bar{D}}u(x,y)-\alpha,\ \rho_2=\max_{(x,y)\in\bar{D}}u(x,y)+\alpha.$$

Тут через α позначено довільну додатну дійсну сталу, яка є незмінною протягом усього доведення теореми. Легко бачити, що згідно з означенням сталої N_α (3.99) є вірною нерівність $\|N(u((x,y))\|_{\bar{D}}\le N_\alpha$.

Для доведення теореми 3.3 нам знадобиться наступне допоміжне твердження.

Лема 3.6. *Припустимо, що* $u(x,y)$ *та* $\overset{(0)}{u}(x,y)$ *– розв'язки задач* (3.1), (3.2) *та* (3.26)–(3.27) *відповідно. Тоді мають місце наступні нерівності*

$$\|z\|_{i,j} \le \|z\|_{i-1,j}\left(1+h_1h_2R'_{i,j}\right)+ +h_1R_{i,j}\left\{h_2\sum_{s=1}^{j-1}\Big[(2N_{i,s}+L_{i,s})\|z\|_{i,s}+h\left(N_{i,s}+L_{i,s}\right)A\Big]\right\}+ +h_1h_2R_{i,j}\left(L_{i,j}+N_{i,j}\right)\|z\|_{i,j-1}+h_1h_2hR_{i,j}\left(N_{i,j}+L_{i,j}\right)A, \tag{3.100}$$

$$\|z\|_{i,j} \le \|z\|_{i,j-1}\left(1+h_1h_2R'_{i,j}\right)+ +h_2R_{i,j}\left\{h_1\sum_{s=1}^{i-1}\Big[(2N_{s,j}+L_{s,j})\|z\|_{s,j}+h\left(N_{s,j}+L_{s,j}\right)A\Big]\right\}+ +h_1h_2R_{i,j}\left(L_{i,j}+N_{i,j}\right)\|z\|_{i-1,j}+h_1h_2hR_{i,j}\left(N_{i,j}+L_{i,j}\right)A, \tag{3.101}$$

для довільних $(x,y)\in \bar{P}_{i,j}$, $i\in\overline{1,N_1}$,$j\in\overline{1,N_2}$, *де*

$$A=\left\{\Big[\|\psi'\|+Y\left(\|f\|+N_\alpha\|u\|\right)\Big]^2+\Big[\|\phi'\|+X\left(\|f\|+N_\alpha\|u\|\right)\Big]^2\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.102}$$

$$\|z\|_{0,j}=\|z\|_{i,0}=0,\quad \forall i\in\overline{1,N_1},\ \forall j\in\overline{1,N_2}.$$

Доведення. (леми 3.6). Якщо не вказано інше, ми припускаємо, що $(x,y)\in P_{i,j}$ для довільни фіксованих значень сталих $i\in\overline{1,N_1}$ та $j\in\overline{1,N_2}$.

Доведемо справедливість нерівності (3.100). Як вже відмічалось раніше, функція $z(x,y)$ може бути представлена, за допомогою функції Рімана, наступним чином:

$$z(x,y)=z(x_{i-1},y)+\int\limits_{x_{i-1}}^{x}R(\xi,y_{j-1},x,y)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}z(\xi,y_{j-1})\right]d\xi- \tag{3.103}$$

$$-\int\limits_{y_{j-1}}^{y}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}R(x_{i-1},\eta,x,y)\right]z(x_{i-1},\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\int\limits_{y_{j-1}}^{y}R(\xi,\eta,x,y)\left[N(u(\xi,\eta))-N(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}))\right]u(\xi,\eta)d\xi d\eta. \tag{3.104}$$

З рівності (3.104) випливає наступна оцінка (див. позначення (3.94) – (3.97))

$$\|z\|_{i,j} \leq \|z\|_{i-1,j} + h_1 R_{i,j} \left\| \frac{\partial z(x, y_{j-1})}{\partial x} \right\|_{i,j-1} + h_1 h_2 R'_{i,j} \|z\|_{i-1,j} +$$

$$+ h_1 h_2 R_{i,j} \left\| \mathbb{N}(u(\xi,\eta)) - \mathbb{N}(\overset{(0)}{u}_{i,j}) \right\|_{i,j} + \tag{3.105}$$

$$+ h_1 h_2 R_{i,j} \left\| N\big(\overset{(0)}{u}_{i,j}\big) \overset{(0)}{u}_{i,j} - N\big(\overset{(0)}{u}_{i,j}\big) u(\xi,\eta) \right\|_{i,j} \leq$$

$$\leq \|z\|_{i-1,j} \left(1 + h_1 h_2 R'_{i,j}\right) + h_1 R_{i,j} \left\| \frac{\partial z(x, y_{j-1})}{\partial x} \right\|_{i,j-1} +$$

$$+ h_1 h_2 R_{i,j} \left(L_{i,j} + N_{i,j}\right) \left\| u(x,y) - \overset{(0)}{u}_{i,j} \right\|_{i,j} \leq$$

$$\leq \|z\|_{i-1,j} \left(1 + h_1 h_2 R'_{i,j}\right) + h_1 R_{i,j} \left\| \frac{\partial z(x, y_{j-1})}{\partial x} \right\|_{i,j-1} +$$

$$+ h_1 h_2 R_{i,j} \left(L_{i,j} + N_{i,j}\right) \Big[\|u(x,y) - u_{i,j}\|_{i,j} + |z_{i,j}| \Big].$$

Враховуючи очевидну нерівність $|z_{i,j}| \leq \|z\|_{i,j-1}$, [1)] ми можемо узагальнити нерівності (3.105) наступним чином

$$\|z\|_{i,j} \leq \|z\|_{i-1,j} \left(1 + h_1 h_2 R'_{i,j}\right) + h_1 R_{i,j} \left\| \frac{\partial z(x, y_{j-1})}{\partial x} \right\|_{i,j-1} +$$

$$+ h_1 h_2 R_{i,j} \left(L_{i,j} + N_{i,j}\right) \|z\|_{i,j-1} + h_1 h_2 R_{i,j} \left(L_{i,j} + N_{i,j}\right) \|u(x,y) - u_{i,j}\|_{i,j}. \tag{3.106}$$

Оцінимо вирази $\left\| \frac{\partial z(x,y_{j-1})}{\partial x} \right\|_{i,j-1}$ та $\|u(x,y) - u\left(x_{i-1}, y_{j-1}\right)\|_{i,j}$ які фігурують в правій частині inequality (3.106). Почнемо з другого з них. З теореми Лагранжа про скінченні прирости одержимо

$$|u(\xi,\eta) - u(x_{i-1}, y_{j-1})| \leq |u(x,y) - u(x_{i-1}, y)| + |u(x_{i-1}, y) - u(x_{i-1}, y_{j-1})| \leq$$

$$\leq |x - x_{i-1}| \left\| \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right\|_{\bar{D}} + |y - y_{j-1}| \left\| \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right\|_{\bar{D}}. \tag{3.107}$$

[1)]Нерівність $|z_{i,j}| \leq \|z\|_{i-1,j}$ також є вірною, і її буде використано для доведення нерівності (3.101).

Крім того, з рівняння (3.1) одержимо наступні нерівності

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \psi'(x) + \int\limits_0^y \left[f(x,\eta) - N(u(x,\eta))u(x,\eta)\right] d\eta, \tag{3.108}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \phi'(y) + \int\limits_0^x \left[f(\xi,y) - N(u(\xi,y))u(\xi,y)\right] d\xi. \tag{3.109}$$

Отже, з (3.107), враховуючи оцінки (3.108) та (3.109), отримаємо наступну нерівність

$$|u(x,y) - u(x_{i-1},y_{j-1})| \leq$$

$$\leq h_1 \Big(\|\psi'(x)\|_{[0,X]} + Y\big[\|f(x,y)\|_{\bar{D}} + \|N(u(x,y))\|_{\bar{D}} \|u(x,y)\|_{\bar{D}}\big]\Big) + \tag{3.110}$$

$$+h_2 \Big(\|\phi'(y)\|_{[0,Y]} + X\big[\|f(x,y)\|_{\bar{D}} + \|N(u(x,y))\|_{\bar{D}} \|u(x,y)\|_{\bar{D}}\big]\Big) \leq$$

$$\leq A\sqrt{h_1^2 + h_2^2} = Ah.$$

Тепер перейдемо до оцінки величини $\left|\frac{\partial z(x,y_{j-1})}{\partial x}\right|$. З рівняння (3.92) випливає рівність

$$\frac{\partial z(x,y_{j-1})}{\partial x} =$$

$$= -\sum_{s=1}^{j-1} \int\limits_{y_{s-1}}^{y_s} \Big(N(\overset{(0)}{u}_{i,s}) z(x,\eta) + \Big[N(u(x,\eta)) - N(\overset{(0)}{u}_{i,s})\Big] u(x,\eta)\Big) d\eta. \tag{3.111}$$

Враховуючи позначення (3.95) з рівності (3.111) не важко одержати оцінку ($\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$)

$$\left|\frac{\partial z(x,y_{j-1})}{\partial x}\right| \leq \sum_{s=1}^{j-1} N_{i,s} \int\limits_{y_{s-1}}^{y_s} |z(x,\eta)|\, d\eta + \tag{3.112}$$

$$+\sum_{s=1}^{j-1} \int\limits_{y_{s-1}}^{y_s} \Big[(L_{i,s} + N_{i,s}) \left\{ |u(x,\eta) - u_{i,s}| + |z_{i,s}| \right\} \Big] d\eta.$$

Комбінуючи нерівності (3.110) та (3.112), одержимо

$$\left|\frac{\partial z(x,y_{j-1})}{\partial x}\right| \leq h_2 \sum_{s=1}^{j-1} (2N_{i,s} + L_{i,s}) \|z\|_{i,s} + h_2 h A \sum_{s=1}^{j-1} (N_{i,s} + L_{i,s}). \tag{3.113}$$

І, нарешті, враховуючи нерівності (3.110) та (3.113) з (3.106) одержимо шукану оцінку (3.100).

Доведення нерівності (3.101) в основному аналогічне до доведення нерівності (3.100). Однак, при доведенні нерівності (3.101), замість формули (3.104), ми повнні скористатись формулою

$$\begin{gathered} z(x,y)=z(x,y_{j-1})+ \\ +\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,y_{j-1},x,y)\right]z(\xi,y_{j-1})d\xi- \\ -\int\limits_{y_{j-1}}^{y}R(x_{i-1},\eta,x,y)\left[\frac{\partial}{\partial\eta}z(x_{i-1},\eta)\right]d\eta+ \\ +\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\int\limits_{y_{j-1}}^{y}R(\xi,\eta,x,y)\left[N(u(\xi,\eta))-N(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}))\right]u(\xi,\eta)d\xi d\eta. \end{gathered} \tag{3.114}$$

Аналогічно до того як це було показано для формули (3.104), з рівності (3.114) приходимо до наступної оцінки:

$$\begin{gathered} \|z\|_{i,j}\le\|z\|_{i,j-1}\left(1+h_1h_2R'_{i,j}\right)+h_2R_{i,j}\left\|\frac{\partial z(x_{i-1},y)}{\partial y}\right\|_{i-1,j}+ \\ +h_1h_2R_{i,j}\left(L_{i,j}+N_{i,j}\right)\|z\|_{i-1,j}+h_1h_2R_{i,j}\left(L_{i,j}+N_{i,j}\right)\|u(x,y)-u_{i,j}\|_{i,j}. \end{gathered} \tag{3.115}$$

А замість нерівності (3.113) ми повинні скористатись наступною оцінкою $(\forall y\in[y_{j-1},y_j])$:

$$\left|\frac{\partial z(x_{i-1},y)}{\partial y}\right|\le h_1\sum_{s=1}^{i-1}\left(2N_{s,j}+L_{s,j}\right)\|z\|_{s,j}+h_1hA\sum_{s=1}^{i-1}\left(N_{s,j}+L_{s,j}\right), \tag{3.116}$$

яка одержується аналогічним чином. Нарешті, з нерівності (3.115), підставивши в неї оцінки (3.110) та (3.116), одержимо шукану нерівність (3.101). На цьому доведення леми 3.6 завершене.

Для того, щоб скористатись результатами леми 3.6 ми повинні зробити припущення стосовно кореляції між величинами h_1 та h_2. Саме це припущення буде визначальним в тому, яка з оцінок, (3.100) чи (3.101), буде використовуватись у подальших міркуваннях. Не порушуючи загальності, припустимо, що[2)]

$$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow N_2 \leq \frac{YN_1}{X}. \tag{3.117}$$

Приймаючи до уваги оцінку (3.100) а також означення констант N_α та L_α (3.99), дійдемо висновку, що з нерівностей

$$\rho_1 \leq \overset{(0)}{u}_{k,l} \leq \rho_2, \quad \forall k \in \overline{0, N_1 - 1},\ \forall l \in \overline{0, j},\ j < N_2 \tag{3.118}$$

випливають такі оцінки

$$N_{k,l} \leq N_\alpha, \quad L_{k,l} \leq L_\alpha,$$

$$\begin{gathered} \|z\|_{k,l} \leq (1 + h_1 h_2 R'_\alpha)\, \|z\|_{k-1,l} + \\ + h_1 R_\alpha (2N_\alpha + L_\alpha) h_2 \sum_{s=1}^{l-1} \|z\|_{i,s} + h_1 h_2 R_\alpha (L_\alpha + N_\alpha)\, \|z\|_{k,l-1} + \\ + h_1 h R_\alpha A (N_\alpha + L_\alpha)(Y + h_2), \quad k \in \overline{1, N_1},\ \forall l \in \overline{1, j+1}, \end{gathered} \tag{3.119}$$

де

$$R_\alpha = {}_0F_1\left(1; N_\alpha h_2^2\right), \quad R'_\alpha = {}_0F_1\left(2; N_\alpha h_2^2\right) N_\alpha. \tag{3.120}$$

Однак, взагалі кажучи, умови (3.118) не можуть бути виконаними для всіх $l \in \overline{1, N_2}$, якщо не накладено певне обмеження на величину кроку h_2. Щоб з'ясувати, яке саме обмеження потрібно накласти на h_2, дослідимо властивості послідовності дійсних чисел $\mu_{i,j}$ $\forall i \in \overline{0, N_1}$, $\forall j \in \overline{0, N_2}$, яка визначається наступним чином:

$$\mu_{i,j} = a\mu_{i-1,j} + b\mu_{i,j-1} + c, \quad \mu_{0,j} = \mu_{i,0} = 0 \tag{3.121}$$

де

$$\begin{gathered} a = 1 + h_1 a_1(h_2) = 1 + h_1 h_2 R'_\alpha, \\ b = h_1 b_1(h_2) = h_1 \Big[R_\alpha Y\left(2N_\alpha + L_\alpha\right) + h_2 R_\alpha \left(N_\alpha + L_\alpha\right) \Big], \\ c = h_1 h c_1(h_2) = h_1 h \Big[R_\alpha A\left(N_\alpha + L_\alpha\right)\left(Y + h_2\right) \Big]. \end{gathered} \tag{3.122}$$

[2)]При цьому припущенні нерівність (3.101) не є корисною для нас, тому замість неї ми повинні використовувати нерівність (3.100). Тим не менш, якби ми припускали, що $h_1 > h_2$, тоді для доведення теореми ми були б змушені використовувати нерівність (3.101).

Лема 3.7. *Припустимо, що дійсні числа* $\mu_{i,j}$ $\forall i \in \overline{0, N_1}$, $\forall j \in \overline{0, N_2}$ *визначаються за формулами* (3.121), *де*

$$a = 1 + h_1 a_1, \quad b = h_1 b_1, \quad c = h_1 h c_1$$

і виконується припущення (3.117). *Тоді*

$$\mu_{i,j} \le hXc_1 \exp\Big((X+Y)b_1 + Xa_1\Big), \quad \forall i \in \overline{1, N_1},\ j \in \overline{1, N_2}. \tag{3.123}$$

Доведення. (леми 3.7). Покажемо спочатку, використовуючи метод математичної індукції, що явна формула для обчислення $\mu_{i,j}$ має вигляд.

$$\mu_{i,j} = \begin{cases} 0 & i = 0, j \in \overline{1, N_2} \text{ або } j = 0, i \in \overline{1, N_1}, \\ c\sum\limits_{k=0}^{j-1}\sum\limits_{p=0}^{i-1} \frac{(k+p)!}{k!p!} a^p b^k & \forall i \in \overline{1, N_1},\ j \in \overline{1, N_2}. \end{cases} \tag{3.124}$$

Будемо проводити індукцію за індексом j.

Базове припущення, $j = 1$.

Відзначимо, що з означення послідовності $\mu_{i,j}$ (3.121) випливає, що справді $\mu_{i,j} = 0$, якщо $i = 0, j \in \overline{1, N_2}$ або ж, коли $j = 0, i \in \overline{1, N_1}$.

Покажемо, що

$$\mu_{i,1} = c\sum_{k=0}^{0}\sum_{p=0}^{i-1} \frac{(k+p)!}{k!p!} a^p b^k = c\sum_{p=0}^{i-1} a^p, \quad \forall i \in \overline{1, N_1}. \tag{3.125}$$

Дійсно, з (3.121) одержимо:

$$\mu_{1,1} = a\mu_{0,1} + b\mu_{i,0} + c = c,$$

$$\mu_{2,1} = a\mu_{1,1} + c = ac + c = c\sum_{p=0}^{1} a^p.$$

Припустимо, що рівність (3.125) справедлива для деякого $i = r,\ 1 < r < N_1$. Покажемо, що вона є вірною і при $i = r + 1$. З (3.121) маємо:

$$\mu_{r+1,1} = a\mu_{r,1} + b\mu_{r+1,0} + c = ac\sum_{p=0}^{r-1} a^p + c = c\sum_{p=0}^{r} a^p.$$

Таким чином (3.125) є вірною $\forall i \in \overline{1, N_1}$.

Крок індукції.

Припустимо, що (3.124) виконується $\forall i \in \overline{1, N_1}$, $j \in \overline{1, m-1}, 1 < m-1 < N_2$. Покажемо справедливість цієї рівності при $j = m$.

$$\mu_{i,m} = a\mu_{i-1,m}+b\mu_{i,m-1}+c = ac\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{i-2}\frac{(k+p)!}{k!p!}a^p b^k+bc\sum_{k=0}^{m-2}\sum_{p=0}^{i-2}\frac{(k+p)!}{k!p\,!}a^p b^k+c =$$

$$= c\left(\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=1}^{i-1}\frac{(k+p-1)!}{k!(p-1)!}a^p b^k + 1 + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=0}^{i-1}\frac{(k+p-1)!}{(k-1)!p\,!}a^p b^k\right) =$$

$$= c\left(\sum_{p=1}^{i-1}a^p+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{i-1}\frac{(k+p-1)!}{k!(p-1)!}a^p b^k+1+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{i-1}\frac{(k+p-1)!}{(k-1)!p\,!}a^p b^k+\sum_{k=1}^{m-1}b^k\right) =$$

$$= c\left(\sum_{p=0}^{i-1}a^p + \sum_{k=1}^{m-1}b^k + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{i-1}\left[\frac{(k+p-1)!}{k!(p-1)!} + \frac{(k+p-1)!}{(k-1)!p\,!}\right]a^p b^k\right) =$$

$$= c\left(\sum_{p=0}^{i-1}a^p + \sum_{k=1}^{m-1}b^k + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{i-1}\left[\frac{(k+p-1)!\,p + (k+p-1)!\,k}{(k-1)!(p-1)!\,k\,p}\right]a^p b^k\right) =$$

$$= c\left(\sum_{p=0}^{i-1}a^p + \sum_{k=1}^{m-1}b^k + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{i-1}\frac{(k+p-1)!(p+k)}{k!p\,!}a^p b^k\right) =$$

$$= c\left(\sum_{p=0}^{i-1}a^p + \sum_{k=1}^{m-1}b^k + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{i-1}\frac{(k+p)!}{k!p\,!}\,a^p b^k\right) =$$

$$= c\left(\sum_{p=0}^{i-1}a^p + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=0}^{i-1}\frac{(k+p)!}{k!p\,!}\,a^p b^k\right) = c\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{i-1}\frac{(k+p)!}{k!p\,!}\,a^p b^k.$$

Таким чином, згідно з принципом математичної індукції, формула (3.124) справді є вірною.

З формули (3.124) та припущення (3.117) одержимо

$$\mu_{i,j} \le \mu_{N_1,N_2} = c\sum_{p=0}^{N_1-1}a^p\sum_{k=0}^{N_2-1}\frac{(k+p)!}{k!p!}b^k =$$

$$= c\sum_{p=0}^{N_1-1}a^p\sum_{k=0}^{N_2-1}\frac{1}{k!}(p+1)(p+2)\dots(p+k)h_1^k\left(\frac{b}{h_1}\right)^k \le$$

$$\le c\sum_{p=0}^{N_1-1}a^p\sum_{k=0}^{N_2-1}\frac{1}{k!}(N_1+N_2)^k h_1^k\left(\frac{b}{h_1}\right)^k \le$$

$$\leq c \sum_{p=0}^{N_1-1} a^p \sum_{k=0}^{N_2-1} \frac{1}{k!} \left(N_1 + \frac{YN_1}{X} \right)^k \left(\frac{X}{N_1} \right)^k \left(\frac{b}{h_1} \right)^k =$$

$$= c \sum_{p=0}^{N_1-1} a^p \sum_{k=0}^{N_2-1} \frac{\left(\left(X+Y \right) b_1 \right)^k}{k!} \leq hXc_1 a^{N_1-1} \exp\Big((X+Y) b_1 \Big) =$$

$$= hXc_1 \left(1 + \frac{X}{N_1} a_1 \right)^{N_1-1} \exp\Big((X+Y) b_1 \Big) \leq hXc_1 \exp\Big((X+Y) b_1 + Xa_1 \Big).$$

Таким чином, доведення леми 3.7 завершене. Для того, щоб отримати необхідне обмеження на максимальну величину кроку h_2, про яке йшла мова вище, розглянемо допоміжну функцію

$$E(h_1, h_2) = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} c_1(h_2) X \exp\Big((X+Y) b_1(h_2) + Xa_1(h_2) \Big).$$

Приймаючи до уваги припущення (3.117), ми прихоимо до нерівності

$$E(h_1, h_2) \leq E(h_2, h_2) = \mathcal{E}(h_2).$$

Функція $\mathcal{E}(h_2)$ є строго зростаючою функцією на $[0, +\infty]$, $\lim\limits_{h_2 \to +\infty} \mathcal{E}(h_2) = +\infty$, $\mathcal{E}(0) = 0$. З цього факту випливає існування і єдиність сталої $H_\alpha > 0$, такої, що

$$\mathcal{E}(H_\alpha) = \alpha, \quad \text{i} \quad \mathcal{E}(h_2) < \alpha, \forall h_2 \in [0, H_\alpha) .$$

В подальшому ми припускаємо, що

$$h_2 \leq H_\alpha. \tag{3.126}$$

Тоді, за виконання припущення (3.126), з леми 3.7 випливає справедливість нерівності

$$\mu_{i,j} \leq hK \leq \alpha, \quad K = c_1(H_\alpha) X \exp\Big((X+Y) b_1(H_\alpha) + Xa_1(H_\alpha) \Big), \tag{3.127}$$

$$i \in \overline{1, N_1}, \ j \in \overline{1, N_2}.$$

Тепер ми можемо довести нерівність (3.93) зі сталою $\kappa = K$ (дивись позначення (3.127)) за допомогою методу математичної індукції. Будемо проводити індукцію по інексу j.

Базове припущення, j=1.

Приймаючи до уваги, що $u(x,0) = \overset{(0)}{u}(x,0)\ \forall\ x \in [0,X]$ дійдемо висновку, що нерівності (3.118) є вірними при $j = 0$. З цього факту випливають нерівності (3.119) при $j = 1$, які, використовуючи позначення (3.120) та (3.122), можуть бути подані у вигляді

$$\|z(x,y)\|_{i,1} \le \|z\|_{i-1,1}\, a + c, \quad \forall i, \in \overline{1, N_1}. \tag{3.128}$$

Приймаючи до уваги (3.121), легко бачити, що

$$\|z(x,y)\|_{i,1} \le \mu_{i,1}, \quad \forall i \in \overline{1, N_1} \tag{3.129}$$

і, як наслідок, з (3.127) випливає, що

$$\|z(x,y)\|_{i,1} \le hK, \quad \forall i \in \overline{1, N_1}. \tag{3.130}$$

Нерівності (3.130) доводять істинність нерівності (3.93) зі сталою $\kappa = K$ при $j = 1$ і для довільних $i \in \overline{1, N_1}$.

Крок індукції.

Припустимо, що нерівність (3.93) та допоміжна неріність

$$\|z(x,y)\|_{i,j} \le \mu_{i,j} \tag{3.131}$$

доведені для $j \in \overline{1, n},\ i \in \overline{1, N_1},\ 1 < n < N_2$. З цього припущення випливає справедливість нерівностей (3.118) при $j = n$ і, як наслідок, одержимо нерівності (3.119) при $j = n$. Комбінуючи допоміжну нерівність (3.131) з очевидною нерівністю

$$\mu_{k,l-1} \le \mu_{k,l}, \quad \forall k \in \overline{1, N_1}, l \in \overline{1, N_2}$$

та з нерівностями (3.119) при $j = n$, ми прийдемо до наступної оцінки для величини $z_{i,n+1}$:

$$\begin{gathered}\|z\|_{i,n+1} \le a\mu_{i-1,n+1} + c + \\ + h_1 R_\alpha (2N_\alpha + L_\alpha) h_2 \sum_{s=1}^{n} \mu_{i,s} + h_1 h_2 R_\alpha (L_\alpha + N_\alpha) \mu_{i,n} \le \\ \le a\mu_{i-1,n+1} + b\mu_{i,n} + c = \mu_{i,n+1}.\end{gathered} \tag{3.132}$$

Оцінка (3.132) виконується для довільних $i \in \overline{1, N_1}$ і доводить справедливість нерівності (3.131) при $j = n+1$. Крім того, приймаючи до уваги оцінки (3.127) та оцінку (3.132), негайно одержуємо справедливість нерівності (3.93) зі сталою $\kappa = K$ при $j = n+1$ і для довільних $i \in \overline{1, N_1}$, що й потрібно було довести:

$$\|z(x,y)\|_{i,n+1} \le \mu_{i,n+1} \le hK \le \alpha, \quad \forall i \in \overline{1, N_1}.$$

Таким чином, з принципу математичної індукції випливає, що нерівність (3.93) виконується для довільних $i \in \overline{1, N_1}$, $j \in \overline{1, N_2}$. Тим самим, доведення теореми 3.3 завершене.

Тепер ми можемо перейти до вивчення питання про достатні умови, які забезпечують збіжність FD-методу (3.21), (3.87), (3.26), (3.28) до точного розв'язку задачі Гурса (3.1), (3.2). Інакше кажучи, враховуючи, що параметри h_1 та h_2 є достатньо малими, [3)] доведемо, що

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \|\overset{(k)}{u}(x,y)\|_{1,\bar{D}} < \infty, \tag{3.133}$$

і

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{(k)}{u}(x,y), \tag{3.134}$$

де

$$\|f(x,y)\|_{1,\bar{D}} = \max\left\{\|f(x,y)\|_{\bar{D}}, \max_{\substack{i\in\overline{1,N_1},\\ j\in\overline{1,N_2}}} \left[\left\|\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right\|^2_{P_{i,j}} + \left\|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right\|^2_{P_{i,j}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\},$$

для довільних $f(x,y)$, таких, що $f(x,y) \in C(\overline{D})$ і $f(x,y) \in C^{1,1}(P_{i,j}), i \in \overline{1, N_1}, j \in \overline{1, N_2}$. Для доведення (3.133) та (3.134) будемо використовувати метод твірних функцій.

Спочатку знайдемо оцінку для величини $\|\overset{(k)}{u}(x,y)\|_{1,\bar{D}}$.

Використовуючи кусково-сталу функцію $\overset{(s)}{u}_{\perp}(x,y)$, $(x,y) \in \bar{D}$, яка визначається наступним чином

$$\overset{(s)}{u}_{\perp}(x,y) = \overset{(s)}{u}(x_{i-1}, y_{j-1}), \quad (x,y) \in [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j), \ \forall i \in \overline{1, N_1}, \forall j \in \overline{1, N_2}$$

[3)]Ми припускаємо, що $h_1 \le h_2 \le 1$ і виконується нерівність (3.126).

можна подати рівняння (3.168) у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + N\big(\overset{(0)}{u_\perp}(x,y)\big)\ \overset{(k)}{u}(x,y) = -N'\big(\overset{(0)}{u_\perp}(x,y)\big)\ \overset{(0)}{u}(x,y)\ \overset{(k)}{u_\perp}(x,y) -$$
$$-\sum_{s=1}^{k-1} A_{k-s}\big(N; \overset{(0)}{u_\perp}(x,y), \ldots \overset{(k-s)}{u_\perp}(x,y)\big)\ \overset{(s)}{u}(x,y) + \tag{3.135}$$
$$+\sum_{s=0}^{k-1} \Big[A_{k-1-s}\big(N, \overset{(0)}{u_\perp}(x,y), \ldots, \overset{(k-1-s)}{u_\perp}(x,y)\big) -$$
$$-A_{k-1-s}\big(N, \overset{(0)}{u}(x,y), \ldots, \overset{(k-1-s)}{u}(x,y)\big)\Big]\ \overset{(s)}{u}(x,y) -$$
$$-A_k\big(N, \overset{(0)}{u_\perp}(x,y), \ldots, \overset{(k-1)}{u_\perp}(x,y), 0\big)\ \overset{(0)}{u}(x,y) = \overset{(k)}{F}(x,y),\ \ (x,y) \in \bar{D},$$

Як вже відзначалось вище, розв'язок k-го рівняння системи (3.168) ($k > 1$) або, що те саме, (3.135) в області $\bar{P}_{i,j}$ можна представити в явному вигляді наступним чином [10]:

$$\overset{(k)}{u}(x,y) = \overset{(k)}{u}(x_{i-1},y) + \int\limits_{x_{i-1}}^{x} R(\xi, y_{j-1}; x, y) \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\ \overset{(k)}{u}(\xi, y_{j-1})\right] d\xi - \tag{3.136}$$
$$-\int\limits_{y_{j-1}}^{y} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} R(x_{i-1}, \eta; x, y)\right] \overset{(k)}{u}(x_{i-1}, \eta) d\eta +$$
$$+N'\big(\overset{(0)}{u}_{i,j}\big)\ \overset{(k)}{u}_{i,j} \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \int\limits_{y_{j-1}}^{y} R(\xi, \eta; x, y)\ \overset{(0)}{u}(\xi, \eta) d\xi d\eta +$$
$$+\int\limits_{x_{i-1}}^{x} \int\limits_{y_{j-1}}^{y} R(\xi, \eta; x, y)\ \overset{(k)}{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Як випливає з теореми 3.3, функція $\overset{(0)}{u}(x,y) = \overset{(0)}{u}(h,x,y)$ рівномірно прямує до $u(x,y)$ в області $\bar{D}$ як тільки $h \to 0$. Отже, приймаючи до уваги існування і єдиність неперервного в області $\bar{D}$ розв'язку $u(x,y)$ задачі Гурса (3.1), (3.2), можемо констатувати, що існує незалежна від h_1 та h_2 стала M_u, така, що

$$\left\| \overset{(0)}{u}(x,y) \right\|_{\bar{D}} \le M_u. \tag{3.137}$$

Останній факт забезпечує існування незалежних від h_1 та h_2 сталих $M_N, M'_N, M_R, M'_R > 0$, таких, що

$$\Big\|N\big(\overset{(0)}{u}(x,y)\big)\Big\|_{\bar D} \le M_N,\ \Big\|N'\big(\overset{(0)}{u}(x,y)\big)\Big\|_{\bar D} \le M'_N, \tag{3.138}$$

$$\Big\|{}_0F_1\Big(1, \big|N\big(\overset{(0)}{u}(x,y)\big)\big|\Big)\Big\|_{\bar D} \le M_R,$$

$$\Big\|{}_0F_1\Big(2, \big|N\big(\overset{(0)}{u}(x,y)\big)\big|\Big)\big|N\big(\overset{(0)}{u}(x,y)\big)\big|\Big\|_{\bar D} \le M'_R.$$

З рівняння (3.135), враховуючи нерівності (3.137), (3.138) та позначення (3.94), (3.95), (3.96), одержимо оцінку ($\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$)

$$\Big|\frac{\partial \overset{(k)}{u}(x, y_{j-1})}{\partial x}\Big| \le \sum_{s=1}^{j-1}\int\limits_{y_{s-1}}^{y_s} N_{i,s}\big|\overset{(k)}{u}(x,y)\big|dy+$$

$$+\sum_{s=1}^{j-1}\int\limits_{y_{s-1}}^{y_s} N'_{i,s}\big|\overset{(k)}{u}_{i,s}\big|\big|\overset{(0)}{u}(x,y)\big|dy + \int\limits_0^{y_{j-1}}\big|\overset{(k)}{F}(x,y)\big|dy \le \tag{3.139}$$

$$\le h_2\sum_{s=1}^{j-1} N_{i,s}\big\|\overset{(k)}{u}\big\|_{i,s} + h_2\sum_{s=1}^{j-1} N'_{i,s}\big\|\overset{(k)}{u}\big\|_{i,s}\big\|\overset{(0)}{u}\big\|_{i,s} + Y\big\|\overset{(k)}{F}\big\| \le$$

$$\le \left(M_N + M'_N M_u\right) h_2 \sum_{s=1}^{j-1}\big\|\overset{(k)}{u}\big\|_{i,s} + Y\big\|\overset{(k)}{F}\big\|,$$

де

$$\big\|\overset{(k)}{u}\big\|_{i,s} = \big\|\overset{(k)}{u}\ (x,y)\big\|_{\bar P_{i,s}},\ \big\|\overset{(k)}{F}\big\| = \big\|\overset{(k)}{F}\ (x,y)\big\|_{\bar D}.$$

З рівності (3.136), підставивши в неї оцінку (3.139), одержимо нерівність

$$\big\|\overset{(k)}{u}\big\|_{i,j} \le \left(1 + h_1 h_2 M'_R\right)\big\|\overset{(k)}{u}\big\|_{i-1,j} + h_1 h_2 M'_N M_R M_u \big\|\overset{(k)}{u}\big\|_{i,j-1} + \tag{3.140}$$

$$+h_1 M_R\left\{\left(M_N + M'_N M_u\right) h_2 \sum_{s=1}^{j-1}\big\|\overset{(k)}{u}\big\|_{i,s} + Y\big\|\overset{(k)}{F}\big\|\right\} + h_1 h_2 M_R\big\|\overset{(k)}{F}\big\|.$$

Позначивши вираз $\big\|\overset{(k)}{u}\big\|_{i,j}\big\|\overset{(k)}{F}\big\|^{-1}$ як $\overset{(k)}{U}_{i,j}$, перепишемо (3.140) наступним чином:

$$\overset{(k)}{U}_{i,j} \le \left(1 + h_1 h_2 M'_R\right)\overset{(k)}{U}_{i-1,j} + h_1 h_2 M'_N M_R M_u \overset{(k)}{U}_{i,j-1} + \tag{3.141}$$

$$+h_1 M_R \left\{ h_2 \left(M_N + M'_N M_u \right) \sum_{s=1}^{j-1} \overset{(k)}{U}_{i,s} + Y \right\} + h_1 h_2 M_R.$$

Використавши метод математичної індукції не складно показати (див. доведення теореми 3.3), що

$$U_{i,j} \leq \mu_{i,j}, \quad \forall i \in \overline{1, N_1},\ j \in \overline{1, N_2}, \tag{3.142}$$

де дійсні сталі $\mu_{i,j}$ визначаються згідно формули (3.121) в якій

$$b = h_1 b_1(h_2) = h_1 M_R \left(h_2 M'_N M_u + Y \left(M_N + M'_N M_u \right) \right), \tag{3.143}$$

$$a = 1 + h_1 h_2 M'_R,\ c = h_1 M_R (h_2 + Y).$$

З леми 3.7, враховуючи нерівність (3.142), випливають оцінки

$$U_{i,j} \leq \mu_{i,j} \leq M_R X (h_2 + Y) \exp\Big((X+Y) b_1(h_2) + X h_2 M'_R \Big) = \tag{3.144}$$

$$= E(h_2) \leq E(1) = \sigma_1, \quad \forall i \in \overline{1, N_1},\ \forall j \in \overline{1, N_2}.$$

Повертаючись до оцінки $\overset{(k)}{u}(x, y)$, одержимо

$$\big\| \overset{(k)}{u} \big\| \overset{def}{=} \big\| \overset{(k)}{u}(x, y) \big\|_{\bar{D}} = \max_{\substack{i \in \overline{1, N_1} \\ j \in \overline{1, N_2}}} \big\| \overset{(k)}{u} \big\|_{i,j} \leq \sigma_1 \big\| \overset{(k)}{F} \big\|. \tag{3.145}$$

З рівняння (3.135) та оцінки (3.145) не важко одержати нерівності

$$\Big\| \frac{\partial \overset{(k)}{u}(x, y)}{\partial x} \Big\|_{\bar{D}} \leq Y \sigma_2 \big\| \overset{(k)}{F} \big\|, \quad \Big\| \frac{\partial \overset{(k)}{u}(x, y)}{\partial y} \Big\|_{\bar{D}} \leq X \sigma_2 \big\| \overset{(k)}{F} \big\|, \tag{3.146}$$

де

$$\sigma_2 = \sigma_1 (M_N + M'_N M_u) + 1.$$

Комбінуючи нерівності (3.145) та (3.146). одержимо наступну оцінку

$$\big\| \overset{(k)}{u} \big\|_1 = \big\| \overset{(k)}{u}(x, y) \big\|_{1,\bar{D}} \leq \sigma \big\| \overset{(k)}{F} \big\|, \quad \sigma = \max \left\{ \sigma_1, \sigma_2 \sqrt{X^2 + Y^2} \right\}. \tag{3.147}$$

На підставі явного представлення для $\overset{(k)}{F}(x, y)$ (див. (3.135)) можна переписати оцінку (3.147) наступним чином

$$\big\| \overset{(k)}{u} \big\|_1 \leq \sigma \Big(\sum_{s=1}^{k-1} A_{k-s} \big(\tilde{N}; \big\| \overset{(0)}{u} \big\|, \ldots, \big\| \overset{(k-s)}{u} \big\| \big) \big\| \overset{(s)}{u} \big\| +$$

$$+\left\|\sum_{s=0}^{k-1}\Big[A_{k-s-1}\big(N;\overset{(0)}{u}_{\perp}(x,y),\ldots,\overset{(k-s-1)}{u}_{\perp}(x,y)\big)-\right.$$

$$\left.-A_{k-s-1}\big(N;\overset{(0)}{u}(x,y),\ldots,\overset{(k-s-1)}{u}(x,y)\big)\Big]\overset{(s)}{u}(x,y)\right\|_{\bar{D}}+$$

$$+A_k\big(\tilde{N};\|\overset{(0)}{u}\|,\ldots,\|\overset{(k)}{u}\|\big)\|\overset{(0)}{u}\|-\|\overset{(0)}{u}\|\|\overset{(k)}{u}\|\tilde{N}'(\|\overset{(0)}{u}\|)\Big), \qquad (3.148)$$

де

$$\tilde{N}(u)=\sum_{s=0}^{\infty}|\nu_s|u^s.$$

Для оцінки другого доданку в нерівності (3.148) скористаємось лемою 2.1. Тоді (3.148) набуде вигляду:

$$\|\overset{(k)}{u}\|_1\le\sigma\Big(\sum_{s=0}^{k-1}A_{k-s}\big(\tilde{N};\|\overset{(0)}{u}\|_1,\ldots,\|\overset{(k-s)}{u}\|_1\big)\|\overset{(s)}{u}\|_1+$$

$$+h\sum_{s=0}^{k-1}A_{k-s-1}\big(\tilde{N}_1;\|\overset{(0)}{u}\|_1,\ldots,\|\overset{(k-s-1)}{u}\|_1\big)\|\overset{(s)}{u}\|_1-\|\overset{(0)}{u}\|_1\|\overset{(k)}{u}\|_1\tilde{N}'\big(\|\overset{(0)}{u}\|_1\big)\Big). \qquad (3.149)$$

Розглянемо послідовність дійсних чисел $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$, визначену за формулою

$$v_0=\|\overset{(0)}{u}\|_1,\quad v_k=\sigma\Big(\sum_{s=0}^{k-1}A_{k-s}\big(\tilde{N};v_0,\ldots,v_{k-s}\big)v_s+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-1}A_{k-s-1}\big(\tilde{N}_1;v_0,\ldots,v_{k-s-1}\big)v_s-v_k\tilde{N}'\big(v_0\big)v_0\Big),\quad k=1,2,\ldots. \qquad (3.150)$$

Легко бачити, що для такої послідовності $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$ виконуються нерівності

$$\|\overset{(k)}{u}\|_1\le v_kh^k,\quad k=0,1,\ldots \qquad (3.151)$$

Припускаючи, що ряд

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}v_kz^k \qquad (3.152)$$

має ненульовий радіус збіжності, який ми позначимо через $R>0$, а також, що $g(R)<\infty$, ми негайно прийдемо до нерівності

$$v_kR^k\le\frac{c}{k^{1+\delta}} \qquad (3.153)$$

де c та δ – деякі додатні сталі. З нерівності (3.153) випливає, що умова $h \le R$ є достатньою, щоб ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \big\| \overset{(k)}{u} \big\|_1$ був збіжним, а значить, щою був збіжним і FD-метод. Таким чином, щоб довести, що нерівність (3.133) виконується для деякої достатньо малої сталої h, потрібно дослідити збіжність степеневого ряду (3.152).

Приймаючи до уваги нерівності (3.150), приходимо до висновку, що функція $g(z)$ задовольняє нелінійне функціональне рівняння

$$\big(g(z) - v_0\big)\Big(1 + \sigma \tilde{N}'(v_0) v_0\Big) = \sigma\Big[\Big(\tilde{N}\big(g(z)\big) - \tilde{N}\big(v_0\big)\Big)g(z) + z\tilde{N}'\big(g(z)\big)\big(g(z)\big)^2\Big] \tag{3.154}$$

для довільних $z \in (-R, R)$.

Щоб довести, що степеневий ряд (3.152) має ненульовий радіус збіжності, тобто, що $R > 0$, потрібно розглянути обернену функцію $z = g^{-1}$. З рівняння (3.154) не складно одержати явне представлення для $z = z(g)$:

$$z(g) = \frac{(g - v_0)\Big(1 + \sigma \tilde{N}'(v_0) v_0\Big) - \Big(\tilde{N}(g) - \tilde{N}(v_0)\Big) g\sigma}{\sigma \tilde{N}'(g) g^2}. \tag{3.155}$$

Враховуючи, що $z(v_0) = 0$ легко одержати значення $z'(v_0)$:

$$z'(v_0) = \lim_{g \to v_0} \frac{z(g) - z(v_0)}{g - v_0} = \frac{1}{\sigma \tilde{N}'(v_0) v_0^2}. \tag{3.156}$$

Оскільки функція $z(g)$ (3.155) є голоморфною в деякому відкритому околі точки $g = v_0$ і $z'(v_0) > 0$, то можна зробити висновок, що існує обернена функція $z^{-1} = g$, яка в свою чергу є голоморфною в деякому відкритому інтервалі $(-R, R)$ (див. [56]). Припускаючи, що $g(R) = \infty$ ми прийдемо до протиріччя (див. (3.154))

$$1 + \tilde{N}'(v_0) v_0 = \lim_{z \to +\infty} \Bigg(\frac{v_0(1 + \sigma \tilde{N}'(v_0) v_0)}{g(z)} + \sigma\Big[\Big(\tilde{N}\big(g(z)\big) - \tilde{N}\big(v_0\big)\Big) + $$

$$+ z\tilde{N}'\big(g(z)\big) g(z)\Big]\Bigg) = +\infty. \tag{3.157}$$

Це протиріччя доводить справедливість нерівності (3.153) для деяких додатних сталих c та δ, які залежать тільки від $\tilde{N}(u)$ та v_0. Таким чином, умова

$h \le R$ забезпечує виконання нерівностей (3.133) та

$$\big\|\overset{(k)}{u}\big\|_1 \le \frac{c}{k^{1+\delta}}\left(\frac{h}{R}\right)^k. \tag{3.158}$$

Припустимо, що $h \le R$. Тоді, на підставі нерівності (3.133) ми можемо розглянути функцію

$$\overset{\infty}{u}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{(k)}{u}(x,y) \in C(\bar{D}).$$

Крім того, з рівняння (3.28) випливає, що $\overset{(k)}{u}(x,y) \in C^{1,1}(P_{i,j})$ і

$$\left\|\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y}\right\|_{P_{i,j}} \le \big(M_N + M_N' M_u\big)\big\|\overset{(k)}{u}\big\|_1 + \big\|\overset{(k)}{F}\big\|, \quad i \in \overline{1,N_1}, j \in \overline{1,N_2}. \tag{3.159}$$

З нерівності (3.159), враховуючи (3.158) випливає, що $\overset{\infty}{u}(x,y) \in C^{1,1}(P_{i,j})$ та

$$\frac{\partial^2 \overset{\infty}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} \quad \forall (x,y) \in P_{i,j}, \quad i \in \overline{1,N_1}, j \in \overline{1,N_2}.$$

Остання рівність дозволяє нам просумувати рівняння (3.26) та (3.28) по всім k від 1 до ∞, і тоді, врахувавши очевидну рівність

$$\mathbb{N}\big(\overset{\infty}{u}(x,y)\big) = N\big(\overset{\infty}{u}(x,y)\big)\ \overset{\infty}{u}(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{k} A_{k-s}\big(N; \overset{(0)}{u}(x,y), \ldots, \overset{(k-s)}{u}(x,y)\big)\ \overset{(s)}{u}(x,y),$$

одержимо:

$$\frac{\partial^2 \overset{\infty}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + \mathbb{N}(\overset{\infty}{u}(x,y)) = f(x,y), \tag{3.160}$$
$$\forall (x,y) \in \bar{D} \cap \left\{(x,y)\ |x \ne x_i, y \ne y_j,\ i \in \overline{0,N_1}, j \in \overline{0,N_2}\right\}.$$

Таким чином, ми бачимо, що рівність (3.160) формально співпадає з рівнянням (3.1). Для того, щоб одержати тотожність

$$\overset{\infty}{u}(x,y) \equiv u(x,y), \quad (x,y) \in \bar{D}$$

достатньо врахувати, що $\overset{\infty}{u}(0,y) \equiv u(0,y) \equiv \phi(y)$, $\overset{\infty}{u}(x,0) \equiv u(x,0) \equiv \psi(y)$ та відмітити той факт, що розв'язок $u(x,y)$ задачі (3.1), (3.2) є єдиним в області D.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 3.4. *Припустимо, що для задачі Гурса* (3.1), (3.2) *виконуються умови:*

1) $\mathbb{N}(u) = u\sum\limits_{k=0}^{\infty}\nu_k u^k$, $\nu_k \in \mathbf{R}$, $\forall u \in \mathbf{R}$;

2) $\psi(x) \in C^{(1)}(D_1) \cap C\left(\bar{D}_1\right), \phi(y) \in C^{(1)}(D_2) \cap C\left(\bar{D}_2\right), \quad f(x,y) \in C(\bar{D})$.

Тоді виконують припущення 1), 2) і розв'язок $u(x,y)$ задачі (3.1) – (3.2) *існує і є єдиним на прямокутнику $\overline{D}$. FD-метод* (3.21) – (3.30) *для задачі* (3.1) – (3.2) *збігається до її точного розв'язку. Мають місце оцінки абсолютної похибки методу:*

$$\left\|u(x,y) - \overset{m}{u}(x,y)\right\|_{1,\bar{D}} \leq \frac{cR}{(m+1)^{1+\varepsilon}(R-h)}\left(\frac{h}{R}\right)^{m+1}, \quad m \in \mathbf{N}\cup\{0\} \quad (3.161)$$

де h – крок FD-методу, $h < R$ і дійсні сталі C, R, δ залежать лише від вхідних даних задачі (3.1) – (3.2).

3.5 Алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна–Гордона

Перш ніж розглянути питання алгоритмічної реалізації FD-методу розв'язування задачі Гурса (3.1) – (3.2) та оцінки складності запропонованого алгоритму з точки зору кількості необхідних *основних операцій* (додавання, множення, ділення), розглянемо наступне узагальнення явної схеми FD-методу.

Використовуючи ідею, викладену в [3, 47] розглянемо наступне узагальнення задачі (3.1)-(3.2):

$$\frac{\partial^2 u(x,y,\tau)}{\partial x \partial y} + N(u_{\alpha,\perp}(x,y,\tau))u(x,y,\tau) - \\ -\tau\big[N(u_{\alpha,\perp}(x,y,\tau)) - N(u(x,y,\tau))\big]u(x,y,\tau) = f(x,y), \quad (3.162)$$

$$u(x,0,\tau) = \psi(x), \quad u(0,y,\tau) = \phi(y), \quad \psi(0) = \phi(0), \ \tau \in [0;1], \quad (3.163)$$

де

$$u_{\alpha,\perp}(x,y,\tau) = u(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}),$$
$$(x,y) \in [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j),\ \forall \alpha \in [0;1],\ \forall i \in \overline{1, N_1}, \forall j \in \overline{1, N_2}.$$

Припускаючи, що розв'язок $u(x,y,\tau)$ задачі (3.162),(3.163) існує $\forall \tau \in [0;1]$, неважко зробити висновок, що $u(x,y) = u(x,y,1)$. Крім того, припускаючи, що розв'язок $u(x,y,\tau)$ може бути знайдений у вигляді ряду

$$u(x,y,\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \overset{(i)}{u}(x,y)\tau^i, \tag{3.164}$$

де $\overset{(i)}{u}(x,y)$ – функції, що не залежать від τ, ми приходимо до висновку, що розв'язок $u(x,y)$ задачі (3.1),(3.2) може бути з довільною точністю наближений за допомогою функції $\overset{m}{u}(x,y)$ (3.21). Підставляючи ряд (3.164) в задачу (3.162),(3.163) та прирівнюючи функціональні коефіцієнти при однакових степенях τ, знаходимо, що невідома функція $\overset{(0)}{u}(x,y) \in C(\bar{D})$ може бути знайдена як розв'язок наступної нелінійної задачі Гурса з кусково сталим коефіцієнтом, яка називається *базовою задачею:*

$$\frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + N\big(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\big)\overset{(0)}{u}(x,y) = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \bar{P}_{i,j}, \tag{3.165}$$

$$\overset{(0)}{u}(x,0) = \psi(x), \quad \overset{(0)}{u}(0,y) = \phi(y), \quad \psi(0) = \phi(0), \quad \forall (x,y), \in \bar{D}, \tag{3.166}$$

де

$$P_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), \quad i \in \overline{1, N_1},\ j \in \overline{1, N_2}. \tag{3.167}$$

Функції $\overset{(k)}{u}(x,y) \in C(\bar{D})$, $k \in \overline{1,m}$ шукаються як розв'язки наступної послідовності лінійних задач Гурса:

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + N(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))\overset{(k)}{u}(x,y) =$$
$$= -N'\big(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\big)\overset{(0)}{u}(x,y)\overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}) - \tag{3.168}$$

$$-\sum_{s=1}^{k-1} A_{k-s}\big(N; \overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}), \ldots \overset{(k-s)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\big)\overset{(s)}{u}(x,y) -$$

$$-A_k\big(N;\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha}),\dots,\overset{(k-1)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha}),0\big)\overset{(0)}{u}(x,y)+$$

$$+\sum_{s=0}^{k-1}\Big[A_{k-1-s}\big(N;\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha}),\dots,\overset{(k-1-s)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha})\big)-$$

$$-A_{k-1-s}\big(N;\overset{(0)}{u}(x,y),\dots,\overset{(k-1-s)}{u}(x,y)\big)\Big]\overset{(s)}{u}(x,y)=\overset{(k)}{F}(x,y), \tag{3.169}$$

$$\overset{(k)}{u}(x_{i-1}+0,y)=\overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0,y),\ \overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}+0)=\overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}-0),$$

$$\forall(x,y)\in\bar{P}_{i,j},\forall i\in\overline{1,N_1},\ \forall j\in\overline{1,N_2},$$

$$\overset{(k)}{u}(0,y)=\overset{(k)}{u}(x,0)=0,\quad \forall x\in[0,X],\forall y\in[0,Y]. \tag{3.170}$$

Розв'язки задач (3.165)–(3.170) можна записати в явному вигляді за допомогою розв'язуючого оператора, в ролі якого виступає функція Рімана ([10]):

$$\overset{(k)}{u}(x,y)=R(x,y_{j-1},x,y)\overset{(k)}{u}(x,y_{j-1})+$$

$$+R(x_{i-1},y,x,y)\overset{(k)}{u}(x_{i-1},y)-R(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha},x,y)\overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha})-$$

$$-\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}R(\xi,y_{j-1},x,y)\right]\overset{(k)}{u}(\xi,y_{j-1})d\xi-\int\limits_{y_{j-1}}^{y}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}R(x_{i-1},\eta,x,y)\right]\overset{(k)}{u}(x_{i-1},\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\int\limits_{y_{j-1}}^{y}R(\xi,\eta,x,y)g_k(\xi,\eta)d\xi d\eta,\quad\forall(x,y)\in\bar{P}_{i,j}, \tag{3.171}$$

де

$$g_k(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & k=0;\\ -N'\big(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha})\big)\overset{(0)}{u}(x,y)\overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha})-\overset{(k)}{F}(x,y), & k>0,\end{cases}$$

$$R(x,y;\xi,\eta)=J_0\left(\sqrt{4N_{i,j}(x-\xi)(y-\eta)}\right)={}_0F_1\left(1;-(x-\xi)(y-\eta)N_{i,j}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}R(x,y;\xi,\eta)={}_0F_1\left(2;-(x-\xi)(y-\eta)N_{i,j}\right)N_{i,j}(\eta-y), \tag{3.172}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}R(x,y;\xi,\eta)={}_0F_1\left(2;-(x-\xi)(y-\eta)N_{i,j}\right)N_{i,j}(\xi-x),$$

$$N_{i,j}=\left|N\big(\overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha})\big)\right|,\quad\forall(x,y),(\xi,\eta)\in\bar{P}_{i,j}\quad i\in\overline{1,N_1},\ j\in\overline{1,N_2},$$

а через J_0, ${}_0F_1$ позначено функцію Бесселя першого роду нульового порядку та вироджену гіпергеометричну функцію відповідно (див. [62]).

При $\alpha = 0$ описаний вище алгоритм являє собою *явну схему* FD-методу, при $\alpha > 0$ – *неявну схему* FD-методу. Взагалі кажучи, α може приймати довільні значення $0 \le \alpha \le 1$, але, в даній роботі під *неявною схемою* FD-методу ми розумітимемо таку схему в якій $\alpha = 1$.

Перейдемо безпосередньо до питань алгоритмічної реалізації FD-методу (3.165)–(3.170).

Очевидно, що інтеграли у формулі (3.171) не можуть бути виражені через елементарні функції. Тому для обчислення функцій $\overset{(k)}{u}(x, y)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ необхідно використовувати чисельні методи інтегрування. Однак, безпосереднє застосування квадратурних формул таких, наприклад, як формули Ньютона-Котеса чи Sink-квадратурні формули, не є виправданим з точки зору обчислювальної складності. Причиною цьому є той факт, що функція Рімана $R(x, y; \xi, \eta)$ (3.172) не може бути розщеплена на мультиплікативні частини (множники) кожна з яких залежить або лише від (x, y), або лише від (ξ, η). Іншими словами, застосовуючи квадратурні формули до інтергралу

$$\int\limits_{x_i}^{x} \int\limits_{y_j}^{y} R(\xi, \eta, x, y) g_k(\xi, \eta) d\xi d\eta, \tag{3.173}$$

ми не можемо використати адитивну властивість інтегралу.

Так, використовуючи, наприклад, квадратурну формулу Сімпсона, нам потрібно (як буде показано нижче) виконати порядку $O(n^4)$ основних операцій, де через n позначено дискретизацію прямокутника $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. На противагу до цього, метод послідовних наближень є значно більш ефективним при обчисленні функцій $\overset{(k)}{u}(x, y)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для того, щоб проілюструвати цей факт розглянемо прямокутник $P_{i,j} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$, $i \in \in \overline{1, N_1}$, $j \in \overline{1, N_2}$. Для обчислення наближеного значення інтегралу (3.173) розіб'ємо прямокутник $P_{i,j}$ деякою сіткою з рівномірними кроками по обом координатним осям $(x_i - x_{i-1})/p$ та $(y_j - y_{j-1})/p$ відповідно. Позначимо вузли цієї квадратурної сітки (ξ_k, η_l), $k, l \in \overline{1, p}$. Якби подвійний інтеграл (3.173) володів адитивною властивістю, то для його обчислення за допомогою деякої квадратурної формули Ньютона-Котеса на сітці (ξ_k, η_l), $k, l \in \overline{1, p}$ нам потрібно було б виконати порядку p^2 основних операцій. Справді, двічі застосувавши до подвійного інтегралу, що володіє адитивною властивістю, деяку квадратурну формулу Ньютона-Котеса з рівномірним розбиттям області інтегрування по обом координатам, одержимо:

$$\int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \int_0^x \sum_{j=0}^{p} A_j f(\xi, y_j) d\xi = \sum_{j=0}^{p} A_j \int_0^x f(\xi, y_j) d\xi \approx$$

$$\approx \sum_{j=0}^{p} A_j \sum_{i=0}^{p} B_i f(x_i, y_j) = \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{p} A_j B_i f(x_i, y_j), \tag{3.174}$$

де A_j та B_i – деякі сталі, які залежать від коефіцієнтів застосованих квадратурних формул.

Підрахуємо скільки операцій додавання потрібно виконати, щоб обчислити інтеграл (3.173) в точках (ξ_k, η_l), $k, l \in \overline{1, p}$, за допомогою частинного випадку формули (3.174) – формули прямокутників. Позначимо через $r_{k,l}$ кількість операцій додавання[4)], необхідних для обчислення інтегралу в точці (ξ_k, η_l). Тоді, очевидно, що

$$r_{1,1} = 1, r_{1,2} = 2, r_{1,3} = 3, r_{1,4} = 4, \ldots, r_{1,p} = p,$$

а

$$\sum_{s=1}^{p} r_{1,s} = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}.$$

$$r_{2,1} = 2, r_{2,2} = 4, r_{2,3} = 6, r_{2,4} = 8, \ldots, r_{2,p} = 2p,$$

а

$$\sum_{s=1}^{p} r_{2,s} = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2p = \frac{2p(p+1)}{2}.$$

$$r_{3,1} = 3, r_{3,2} = 6, r_{3,3} = 9, r_{3,4} = 12, \ldots, r_{3,p} = 3p,$$

[4)] В формулі прямокутників операцій додавання значно більше, ніж множення, тому останніми в даному випадку ми можемо знехтувати.

а

$$\sum_{s=1}^{p} r_{3,s} = 3 + 6 + 9 + 12 + \ldots + 3p = \frac{3p(p+1)}{2}.$$

І в загальному,

$$\sum_{s=1}^{p} r_{p,s} = p + 2p + 3p + 4p + \ldots + p^2 = p\frac{p(p+1)}{2}.$$

Тепер ми можемо підрахувати кількість S додавань, необхідних для наближеного обчислення згадуваного інтегралу в усіх вузлах сітки $(\xi_k, \eta_l),\ k, l \in \overline{1, p}$:

$$S = \frac{p(p+1)}{2} + \frac{2p(p+1)}{2} + \frac{3p(p+1)}{2} + \ldots + p\frac{p(p+1)}{2} =$$

$$= \frac{p(p+1)}{2}(1 + 2 + 3 + \ldots + p) = \frac{p(p+1)}{2}\frac{p(p+1)}{2} = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 = O(p^4). \tag{3.175}$$

Підрахуємо тепер кількість основних операцій необхідних для безпосереднього знаходження функцій $\overset{(k)}{u}(x, y), k = 0, 1, 2\ldots$ з рівнянь (3.165),(3.168), використовуючи метод послідовних наближень:

$$\overset{(r)}{u}_n(\xi_k, \eta_l) =$$

$$= -\int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_k}\int\limits_{y_{j-1}}^{\eta_l}\left[N\Big(\overset{(r)}{u}_{n-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\Big)\ \overset{(r)}{u}_{n-1}(x, y) - g_r\Big(x, y, \overset{(r)}{u}_{n-1}(x, y)\Big)\right]dydx +$$

$$+ \overset{(r)}{u}_n(x_{i-1}, \eta_l) + \overset{(r)}{u}_n(\xi_k, y_{j-1}) - \overset{(r)}{u}_n(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}), \tag{3.176}$$

де

$$g_r(x, y, \overset{(r)}{u}_{n-1}(x, y)) =$$

$$= \begin{cases} f(x, y), & r = 0; \\ -N'\big(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\big)\ \overset{(0)}{u}(x, y)\ \overset{(r)}{u}_{n-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}) - \overset{(r)}{F}(x, y), & r > 0, \end{cases}$$

$\overset{(r)}{u}_0(x, y) \equiv 0,\ \forall (x, y) \in P_{i,j},\ r = \overline{0, k},\ l \in \overline{1, p},\ i \in \overline{1, N_1},\ j \in \overline{1, N_2}, n = 1, 2, \ldots.$

Отже, як було показано вище, в цьому випадку (див. формулу (3.174)), в кожному прямокутнику $P_{i,j}$ потрібно виконати порядку p^2 основних операцій. Оскільки таких клітин-прямокутників сітки ω є $N_1 \times N_2$, то на кожному кроці методу матимемо порядку $p^2N_1N_2$ основних операцій. А для m задач FD-методу (3.165)–(3.170) будемо мати порядку $mp^2N_1N_2$ основних операцій. Для знаходження наближення (3.21) потрібно ще виконати $(m+1)p^2N_1N_2$ операцію додавання. Отже, всього потрібно виконати порядку $mp^2N_1N_2 + (m+1)p^2N_1N_2 = (2m+1)p^2N_1N_2$ основних операцій.

Тепер, аналогічним чином, підрахуємо кількість основних операцій, які необхідно виконати для обчислення функцій $\overset{(k)}{u}(x,y)$, $k = 0,1,2,\ldots$, за формулами (3.171) - (3.172). Оскільки в кожному прямокутнику $P_{i,j}$ розв'язок $\overset{(k)}{u}(x,y)$, $k = 0,1,2,\ldots$, представляється за допомогою формули (3.171), то враховуючи (3.175) матимемо порядку $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2$ основних операцій в кожному з таких прямокутників. Оскільки таких клітин-прямокутників сітки ω є $N_1 \times N_2$, то на кожному кроці методу матимемо порядку $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 N_1N_2$ основних операцій. А для m задач FD-методу будемо мати порядку $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 mN_1N_2$ основних операцій. Для знаходження наближення (3.21) потрібно ще виконати $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2(m+1)N_1N_2$ операцію додавання. Отже, всього потрібно виконати порядку $(2m+1)\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 N_1N_2$ основних операцій.

Отже, як випливає з наведених міркувань, безпосереднє знаходження функцій $\overset{(k)}{u}(x,y), k = 0,1,2\ldots$ з рівнянь (3.165),(3.167), використовуючи метод послідовних наближень, є ефективнішим з точки зору кількості виконання основних операцій, ніж їх обчислення за формулами (3.171) - (3.172).

Розглянемо детально алгоритм FD-методу. Нижче наведено дві алгоритмічні схеми, перша з яких представляє алгоритм розв'язування базової задачі (3.165)-(3.167), а друга - алгоритм схеми FD-методу, розв'язування послідовності задач (3.168)-(3.170). Тут введено наступні позначення: $\overset{(0)}{u}_{p,k}(x,y)$ – розв'язок базової задачі методом послідовних наближень на k–му кроці цього методу у p–му прямокутнику сітки FD-методу ($p = \overline{1, N_1 \times N_2}$); $\overset{(r)}{u}_{p,k}(x,y)$ – відповідно розв'язок задачі r–го рангу FD-методу ($r = 1,2,\ldots$) методом послідовних наближень на k–му кроці цього методу у p–му прямокутнику сітки FD-методу; ε – машинний епсілон (наприклад, для типу double $\varepsilon \approx 1\cdot 10^{-16}$);

$$\overset{(r)}{V}_{p,k}(x,y) = N(\overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))\,\overset{(r)}{u}_{p,k-1}(x,y) - g_r(x,y,\overset{(r)}{u}_{p,k-1n-1}(x,y)).$$

Алгоритм 1. Алгоритм FD-методу розв'язування базової задачі.

input: дійсні сталі $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$; $\psi(x)$, $\phi(y)$, $f(x,y)$, $N(u)$.

output: функції $\overset{(0)}{u}_{p,k}(x,y)$, такі, що $\left\|\overset{(0)}{u}_{p,k}(x,y) - \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x,y)\right\|_{P_{i,j}} \leq \varepsilon$

begin
- $\Phi(y) := \varphi(y); \Psi(x) := \psi(x); p := 1; \overset{(0)}{u}_{p,0}(x,y) := 0; \overset{(0)}{u}_{p,1}(x,y) := 1;$
- **for** *j = 1 to* N_2 **do**
  - **for** *i=1 to* N_1 **do**
    - **if** *(i<>1) and (j<>1)* **then**
      - $\Phi(y) := \overset{(0)}{u}_{p-1,k-1}(x_{i-1}, y); \ \Psi(x) := \overset{(0)}{u}_{p-N_1,k-1}(x, y_{j-1});$
    - **else**
      - **if** *(i=1) and (j>=2)* **then**
        - $\Phi(y) := \varphi(y); \ \Psi(x) := \overset{(0)}{u}_{p-N_1,k-1}(x, y_{j-1});$
      - **else**
        - *//Виконується, коли (j=1) and (i>=2);*
        - $\Psi(x) := \psi(x); \ \Phi(y) := \overset{(0)}{u}_{p-1,k-1}(x_{i-1}, y);$
      - **end**
    - **end**
    - $k := 1; \overset{(0)}{u}_{p,0}(x,y) := 0; \overset{(0)}{u}_{p,1}(x,y) := 1;$
    - **while** $\left\|\overset{(0)}{u}_{p,k}(x,y) - \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x,y)\right\|_{P_{i,j}} > \varepsilon$ **do**
      - $\overset{(0)}{u}_{p,k}(x,y) := -\int\limits_{x_{i-1}}^{x}\int\limits_{y_{j-1}}^{y}\Big(N\big(\overset{(0)}{u}_{p,k-1}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\big)\times$
      - $\times \overset{(0)}{u}_{p,k-1}(\xi,\eta) + f(\xi,\eta)\Big)d\xi d\eta + \Phi(y) + \Psi(x) - \Phi(0);$
      - $k := k + 1;$
    - **end**
    - $p := p + 1;$
  - **end**
- **end**

end

Алгоритм 2. Алгоритм FD-методу розв'язування задач вищих рангів.

input: $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$; m-ранг FD-методу; $\psi(x), \phi(y), f(x,y), N(u)$.
output: функції $\overset{(r)}{u}_{p,k}(x,y)$, такі, що $\left\| \overset{(r)}{u}_{p,k}(x,y) - \overset{(r)}{u}_{p,k-1}(x,y) \right\|_{P_{i,j}} \leq \varepsilon$
begin
$\Phi(y) := 0; \Psi(x) := 0; r := 1; \overset{(r)}{u}_{1,0}(x,y) := 0; \overset{(r)}{u}_{1,1}(x,y) := 1;$
while *r>m* **do**
for *j = 1 to N_2* **do**
for *i=1 to N_1* **do**
if *(i<>1) and (j<>1)* **then**
$\Phi(y) := \overset{(r)}{u}_{p-1,k-1}(x_{i-1}, y);\ \ \Psi(x) := \overset{(r)}{u}_{p-N_1,k-1}(x, y_{j-1});$
else
if *(i=1) and (j>=2)* **then**
$\Phi(y) := 0;\ \ \Psi(x) := \overset{(r)}{u}_{p-N_1,k-1}(x, y_{j-1});$
else
//Виконуєтьcя, коли (j=1) and (i>=2);
$\Psi(x) := 0;\ \ \Phi(y) := \overset{(r)}{u}_{p-1,k-1}(x_{i-1}, y);$
end
end
$k := 1; \overset{(r)}{u}_{p,0}(x,y) := 0; \overset{(r)}{u}_{p,1}(x,y) := 1;$
while $\left\| \overset{(r)}{u}_{p,k}(x,y) - \overset{(r)}{u}_{p,k-1}(x,y) \right\|_{P_{i,j}} > \varepsilon$ **do**
Обчислення $\overset{(r)}{F}(x,y)$ за формулою (3.169);
$\overset{(r)}{u}_{p,k}(x,y) := -\int\limits_{x_{i-1}}^{x} \int\limits_{y_{j-1}}^{y} \overset{(r)}{V}_{p,k}(\xi,\eta) d\xi d\eta +$
$+\Phi(y) + \Psi(x) - \Phi(0);\ \ k := k+1;$
end
$p := p+1;$
end
end
$r := r+1;$
end
end

3.6 Чисельні приклади

Приклад 1.

Проведемо порівняння явної та невної схеми FD-методу за допомогою чисельного експерименту. Розглянемо наступну задачу Гурса:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = e^{2u(x,y)}, \quad (x,y) \in D,$$

$$u(x,0) = \frac{x}{2} - \ln(1+e^x), \quad u(0,y) = \frac{y}{2} - \ln(1+e^y), \tag{3.177}$$

де $D = \big\{(x,y) \mid 0 < x < X, 0 < y < Y\big\}$.

Точним розв'язком даної задачі є функція

$$u^*(x,y) = \frac{x+y}{2} - \ln(e^x + e^y).$$

Застосовуючи до цієї задачі явну та неявну схеми FD-методу, описану вище, апроксимуємо точний розв'язок задачі (3.177) частинною сумою ряду (3.21), доданки якого $\overset{(k)}{u}(x,y)$, задовольняють наступну систему лінійних задач Гурса:

$$\frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \exp(2\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))}{\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})} \overset{(0)}{u}(x,y) = 1,$$

$$\overset{(0)}{u}(x_{i-1}+0,y) = \overset{(0)}{u}(x_{i-1}-0,y),\ \overset{(0)}{u}(x,y_{j-1}+0) = \overset{(0)}{u}(x,y_{j-1}-0),$$

$$\overset{(0)}{u}(x,0) = \frac{x}{2} - \ln(1+e^x),\ \overset{(0)}{u}(0,y) = \frac{y}{2} - \ln(1+e^y),$$

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \exp(2\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))}{\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})} \overset{(k)}{u}(x,y) =$$

$$= \left(\frac{1 - \exp(2\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))}{\big(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\big)^2} + \frac{2\exp(2\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}))}{\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})}\right) \times$$

$$\times \overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha},\ y_{j-1+\alpha})\ \overset{(0)}{u}(x,y) + \overset{(k)}{F}(x,y),\ x \in (x_{i-1}, x_i),\ y \in (y_{j-1}, y_j),$$

$$\overset{(k)}{u}(x_{i-1}+0,y) = \overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0,y),\ \overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}+0) = \overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}-0),$$

$$i \in \overline{1, N_1},\ \ j \in \overline{1, N_2},$$

$$\overset{(k)}{u}(x,0) = 0,\ \ \overset{(k)}{u}(0,y) = 0,\ \ k = 1, 2, \ldots,$$

де функція $\overset{(k)}{F}(x,y)$ визначається згідно з (3.169), а значенням $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ відповідають явна та неявна схема FD-методу відповідно.

Для оцінки похибки методу, використовуватимемо наступні функції:

$$\delta_{ex}(h_1, h_2, h_1', h_2', m) = \left\| \overset{(m)}{u}(x, y, h_1, h_2, h_1', h_2') - u^*(x,y) \right\|_{\overline{D}}, \tag{3.178}$$

$$\delta_{im}(h_1, h_2, h_1', h_2', m) = \left\| \overset{(m)}{u}(x, y, h_1, h_2, h_1', h_2') - u^*(x,y) \right\|_{\overline{D}}, \tag{3.179}$$

де h_1, h_2- кроки сітки FD-методу; $h_1', h_2'-$ кроки сітки квадратурної формули[5)], (3.178) – оцінка похибки явної схеми FD-методу, (3.179) – оцінка похибки неявної схеми FD-методу.

В табл. 3.1 наведено результати застосування FD-методу до задачі Гурса (3.177) в області $D = \big\{(x,y)\ |\ 0 < x < 2,\ 0 < y < 2\big\}$, та в області $D = \big\{(x,y)\ |\ 0 < x < 6,\ 0 < y < 6\big\}$, з крокам сіток FD-методу та квадратурної формули $h_1 = h_2 = 0,1$ та $h_1' = h_2' = 0,01$ відповідно.

Таблиці 3.2 відповідає задача Гурса (3.177) в області $D = \big\{(x,y)\ |\ 0 < x < 8,\ 0 < y < 8\big\}$, з тими ж значеннями кроків h_1, h_2, h_1', h_2'.

Значення похибок $\delta_{ex}(h_1, h_2, h_1', h_2', m)$ та $\delta_{im}(h_1, h_2, h_1', h_2', m)$, наведених в табл. 3.1–3.2, показують, що неявна схема FD-методу при збільшенні розмірів області, в якій шукається розв'язок розглядуваної задачі Гурса та при збереженні кроків сітки методу, збігається краще, ніж явна схема FD-методу.

[5)]В даному прикладі для наближеного обчислення інтегралів використовувалась формула Сімпсона.

Таблиця 3.1

Похибка FD-методу як функція від рангу (m) і кроків сіток (h_1, h_2, h_1', h_2')

$X = Y = 2$		
	$\delta_{ex}(0.1, 0.1;0.01,0.01, m)$	$\delta_{im}(0.1, 0.1;0.01,0.01, m)$
$m = 0$	0.000446192099739173	0.000367283284495978
$m = 1$	0.000167706954512625	0.000233426857747632
$m = 2$	4.48894722493431e-6	8.51788157041344e-6
$m = 3$	8.36689053596018e-8	2.57477632104042e-7
$m = 4$	1.14462328504317e-9	6.9642438482731e-9
$m = 5$	7.21311899098964e-12	1.69383174153381e-10
$m = 6$	1.73194791841524e-13	3.71214170513667e-12
$m = 7$	7.66053886991358e-15	8.43769498715119e-14
$X = Y = 6$		
$m = 0$	0.00990099704793557	0.0166759460699123
$m = 1$	0.0427223772725684	0.0364800008223901
$m = 2$	0.00768326756163651	0.00556788648104944
$m = 3$	0.00154917762333551	0.00108472082240441
$m = 4$	0.000298257776059851	0.000175408476288719
$m = 5$	6.10327818401091e-5	3.38212358182988e-5
$m = 6$	1.23116236430132e-5	6.03698889534154e-6
$m = 7$	2.47648720252958e-6	1.17306679114915e-7

Разом з тим, результати, наведені в табл. 3.1 та 3.2 свідчать про те, що явна схема FD-методу збігається швидше за неявну схему у випадку малих областей D.

Відзначимо також наступне. Усі наведені числові експерименти для задачі Гурса (3.177) проводились в такій області D, в якій не виконувались умови теореми 3.1.

Таблиця 3.2

Похибка FD-методу як функція від рангу (m) і кроків сіток (h_1, h_2, h'_1, h'_2) (при $X = Y = 8$)

	$\delta_{ex}(0.1, 0.1; 0.01, 0.01, m)$	$\delta_{im}(0.1, 0.1; 0.01, 0.01, m)$
$m=0$	0.0923974325023775	0.125326818244121
$m=1$	0.411139985428395	0.27863153682922
$m=2$	0.207256544743765	0.0181579710170172
$m=3$	0.155366246421829	0.044569551541476
$m=4$	0.111449896596149	0.00673670254222669
$m=5$	0.0868443598360921	0.0104639209451075
$m=6$	0.0681606731257846	0.00354428978981047
$m=7$	0.0545617406466004	0.00317997251866142

Дійсно, згідно теореми 3.1, очевидно, отримаємо:

$$u_1(x,y) = \frac{x+y}{2} - \ln(1+e^x) - \ln(1+e^y) - \ln(2),$$

тоді

$$M_1 = \|u_1(x,y)\|_{C([0,1]\times[0,1])} + 1 = -1 + 2\ln(1+e) + \ln(2) + 1 < 3.5.$$

Звідси одержуємо (при умові, що стала $q_1 = 1/2$):

$$\varepsilon = \min\left\{1; \left(\max_{|u|\le 3.5}\left|e^{2u}\right|\right)^{-\frac{1}{2}}; \sqrt{q_1}\left(\max_{|u|\le 3.5}\left|2e^{2u}\right|\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} = \min\left\{1; \frac{1}{\sqrt{e^{3.5}}}; \frac{1}{2\sqrt{e^{3.5}}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{e^{3.5}}} < 0.0092.$$

Однак, не дивлячись на те, що не виконуються умови теореми 3.1, чисельні експерименти демонструють практичну збіжність як явної, так і неявної схем FD-методу до точного розв'язку задачі Гурса (3.177).

Приклад 2. Розглянемо в області $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ наступну задачу Гурса:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + u(x,y)\,\mathrm{sh}(u(x,y)) = 2 + (2xy+3y)\,\mathrm{sh}(2xy+3y), \quad (x,y) \in D,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 3y. \tag{3.180}$$

Очевидно, що точним розв'язком цієї задачі є функція $u^*(x,y) = 2xy + 3y$.

Для наближеного розв'язування задачі (3.180) було спочатку застосовано метод розкладу Адомяна (Adomiam decomposition method – ADM) в якому p–го наближення точного розв'язку у вигляді суми

$$\overset{p}{u}(x,y) = \sum_{n=0}^{p} u_k(x,y),$$

де невідомі функції $u_k(x,y)$ знаходяться рекурентно с системи задач Гурса:

$$\frac{\partial^2 u_0(x,y)}{\partial x \partial y} = 2 + (2xy+3y)\,\mathrm{sh}(2xy+3y), \quad (x,y) \in D,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 3y,$$

$$\frac{\partial^2 u_k(x,y)}{\partial x \partial y} = A_{k-1}(\mathbb{N}(\cdot); u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}), \quad (x,y) \in D, k \in \mathbb{N},$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(0,y) = 0.$$

де $\mathbb{N}(u) = u\,\mathrm{sh}(u)$, $A_k(N; v_0, v_1, \ldots, v_k)$ – поліноми Адомяна, які можуть бути обчислені за формулою (2.29). Похибку методу для k–ї поправки будемо позначати як

$$\Delta(k) = \left\| u_k(x,y) - u^*(x,y) \right\|_{\overline{D}}$$

В таблиці 3.3 наведено значення $\Delta(k), k = 0, 1, 2, \ldots$, одержані в результаті застосування методу розкладу Адомяна до задачі (3.180) в області D, які підтверджують фактичну розбіжність цього методу.

Застосувавши до задачі (3.180) FD-метод, одержимо наступну рекурентну послідовність задач Гурса:

$$\frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + \mathrm{sh}\Big(\overset{(0)}{u}(x_{i-1}, y_{j-1})\Big) \overset{(0)}{u}(x,y) = 2 + (2xy+3y)\,\mathrm{sh}(2xy+3y), \tag{3.181}$$

Таблиця 3.3

Похибка k–ї поправки ADM для задачі (3.180) в області D

k	Значення $\Delta(k)$
0	24,5337146891449
1	97203672202,313
2	9,62970403311321e21

$$x \in (x_{i-1}, x_i),\ \ y \in (y_{j-1}, y_j),\ \ \forall i = \overline{1, N_1},\ \ \forall j = \overline{1, N_2},$$

$$\overset{(0)}{u}(x_i{+}0, y){=}\overset{(0)}{u}(x_i{-}0, y),\ \overset{(0)}{u}(x, y_j{+}0){=}\overset{(0)}{u}(x, y_j{-}0), \forall i = \overline{1, N_1 - 1},\ \ \forall j = \overline{1, N_2 - 1},$$

$$\overset{(0)}{u}(x, 0) = 0,\ \overset{(0)}{u}(0, y) = 3y, \tag{3.182}$$

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x, y)}{\partial x \partial y} + \operatorname{sh}\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1}, y_{j-1})\right) \overset{(k)}{u}(x, y) =$$

$$= -\operatorname{ch}\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1}, y_{j-1})\right) \overset{(0)}{u}(x_{i-1}, y_{j-1})\ \overset{(0)}{u}(x, y) - \overset{(k)}{F}(x, y), \tag{3.183}$$

$$x \in (x_{i-1}, x_i), y \in (y_{j-1}, y_j),$$

$$\overset{(k)}{u}(x_{i-1} + 0, y) = \overset{(k)}{u}(x_{i-1} - 0, y), \quad y \in [0, Y],$$

$$\overset{(k)}{u}(x, y_{j-1} + 0) = \overset{(k)}{u}(x, y_{j-1} - 0), \quad x \in [0, X],$$

$$\overset{(k)}{u}(x, 0) = 0,\ \overset{(k)}{u}(0, y) = 0,\ \ i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, k = 1, 2, \ldots, \tag{3.184}$$

Для оцінки похибки FD-методу, використовуватимемо наступну функцію:

$$\delta(h_1, h_2, h_1', h_2', m) = \left\| \overset{(m)}{u}(x, y, h_1, h_2, h_1', h_2') - u^*(x, y) \right\|_{\overline{D}}, \tag{3.185}$$

де h_1, h_2– кроки сітки FD-методу; h_1', h_2'– кроки сітки квадратурної формули.

В табл. 3.4 наведено результати застосування FD-методу до задачі Гурса (3.180) в області $D = \left\{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\right\}$, з крокам сіток FD-методу h_1, h_2 та квадратурної формули h_1', h_2' відповідно.

Таким чином, на основі результатів чисельного експерименту можна зробити висновок, що зменшуючи кроки сітки FD-методу можливо досягти його збіжності, швидкість якої буде експоненціальною. Чого, як показано вище,

Таблиця 3.4

Похибка FD-методу як функція від рангу (m) і кроків сіток (h_1, h_2, h_1', h_2')

	$\delta(0.01, 0.01; 0.1, 0.1, m)$	$\delta(0.002, 0.002; 0.1, 0.1, m)$
$m = 0$	0.0345848009347529	0.00809516197832316
$m = 1$	0.00345817936819426	0.000222647931500397
$m = 2$	0,000374149624843056	5.34222559434028e-6
$m = 3$	0.0000612993882892466	3.12691684989375e-7
$m = 4$	2.61307908262509e-5	1.67607057122154e-8
$m = 5$	3.04395954486836e-6	4.99005281540121e-10
$m = 6$	2.02954199224337e-7	8.45723491238459e-12
$m = 7$	2.45463267489754e-8	9.83275616905121e-14

неможливо досягти, використовуючи метод розкладу Адомяна, у разі його розбіжності в області, в якій шукається розв'язок. Це значно звужує коло задач для наближеного розв'язування яких ADM можна застосувати.

3.7 Висновки до розділу 3

В даному розділі побудовано та обґрунтовано FD-метод чисельно-аналітичного розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона в прямокутній області $D = \{(x, y) : 0 < x < X,\ 0 < y < Y\}$, як з обмеженою, так і з необмеженою нелінійністю, що базується на ідеї FD-методу розв'язування операторних рівнянь загального вигляду (див. [47]). Також досліджено питання оцінки складності запропонованого алгоритму з точки зору кількості основних операцій (додавання, множення, ділення). Запропоновано алгоритм FD-методу на основі його явної та неявної схем з використанням чисельних методів інтегрування.

Основними результатами розділу є:

1) Доведено теорему, яка забезпечує існування і єдиність локального

розв'язку задачі Гурса для нелінійного хвильового рівняння (теорема 3.1);

2) розроблено загальну схему FD-методу розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона (3.1)–(3.2) (підрозділ 3.2);

3) доведено теорему, що містить достатні умови збіжності FD-методу розв'язування задачі Гурса (3.1)–(3.2) для рівняння Клейна-Гордона з нелінійністю, що є обмеженою функцією в $\mathbb{R}^1$, до її точного розв'язку в області D з суперекспоненціальною швидкістю (теорема 3.2);

4) доведено теорему, що забезпечує достатні умови збіжності FD-методу розв'язування задачі Гурса (3.1)–(3.2) для рівняння Клейна-Гордона з нелінійністю, що є необмеженою функцією в $\mathbb{R}^1$, до її точного розв'язку в області D з суперекспоненціальною швидкістю (теорема 3.4);

5) зроблено оцінку складності запропонованого алгоритму FD-методу з точки зору кількості основних операцій (додавання, множення, ділення) (підрозділ 3.5);

6) запропоновано алгоритм FD-методу розв'язування задачі Гурса (3.1)–(3.2) на основі його явної та неявної схем з використанням чисельних методів інтегрування (алгоритм 1 та алгоритм 2);

Основні результати даного розділу опубліковані в 3 статтях [11], [64], [12] та доповідалися на п'яти міжнародних конференціях :

1) Міжнародна конференція молодих вчених, присвячена 70-річчю механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, 13-15 грудня 2010 р., Київ.

2) Internatio nal Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics", February 21-25, 2011, Kyiv, Ukraine.

3) Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, 19-23 вересня 2011 р., м. Дрогобич, Україна.

4) Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 19-21 квітня 2012 р., Київ.

5) The 2nd International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics", November 12-16, 2012, Kyiv, Ukraine.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розробці та обґрунтуванню чисельно-аналітичного методу (FD-методу) наближеного розв'язування нелінійного рівняння Клейна-Гордона, що може бути ефективно застосований при моделюванні прикладних проблем з використанням систем комп'ютерної алгебри (Mathematica, Maple, Maxima тощо), а також при розробці програмних пакетів чисельно-аналітичного розв'язування задач Коші та Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона.

Зокрема, побудовано та обґрунтовано суперекспоненціально збіжний метод (FD-метод) чисельно-аналітичного розв'язування задачі Коші та задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона, що базується на ідеї FD-методу розв'язування операторних рівнянь загального вигляду. В якості допоміжних тверджень доведено теореми про існування і єдиність локальних розв'язків задач Коші та Гурса для нелінійного хвильового рівняння. Запропоновано програмну імплементацію FD-методу та алгоритм його реалізації з використанням чисельних методів інтегрування у випадку задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з необмеженою нелінійністю.

Крім того, у випадку задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з обмеженою та з необмеженою нелінійністю, запропоновано алгоритм програмної реалізації FD-методу з використанням чисельних методів інтегрування. На основі явної та неявної схем FD-методу знайдено оцінку складності запропонованого алгоритму реалізації FD-методу з точки зору кількості основних операцій (додавання, множення, ділення).

Основні результати.

1) Доведено теореми про існування і єдиність локального розв'язку задачі Коші та задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона (теореми 2.1, 3.1);

2) розроблено загальну схему FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона (2.1)–(2.2) з необмеженою в $\mathbb{R}^1$

нелінійністю; доведено теорему, що містить достатні умови збіжності FD-методу розв'язування задачі Коші (2.1)–(2.2) до її точного розв'язку з суперекспоненціальною швидкістю (теорема 2.3);

3) запропоновано алгоритмічну реалізацію FD-методу розв'язування задачі Коші для рівняння Клейна-Гордона (2.1)–(2.2) з використанням чисельних методів інтегрування;

4) розроблено загальну схему FD-методу розв'язування задачі Гурса (3.1)–(3.2) для нелінійного рівняння Клейна-Гордона; доведено теореми, що містять достатні умови збіжності FD-методу розв'язування задачі Гурса (3.1)–(3.2) з обмеженою та з необмеженою в $\mathbb{R}^1$ нелінійностями до точного її розв'язку з суперекспоненціальною швидкістю (теореми 3.2, 3.4);

5) запропоновано алгоритм FD-методу розв'язування задачі Гурса (3.1)–(3.2) на основі його явної та неявної схем з використанням чисельних методів інтегрування; зроблено оцінку складності алгоритму FD-методу розв'язування задачі Гурса з точки зору кількості основних операцій (додавання, множення, ділення), які необхідно виконати при реалізації алгоритму FD-методу з використанням чисельних методів інтегрування.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции : В 3-х т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М.: Наука, 1982. — Т.1. — 294 с.

2. Беккенбах Э. Неравенства / Э. Беккенбах, Р. Беллман. — М.: Мир, 1965. — 276 с.

3. Василик В. Б. Функціонально-дискретний метод розв'язування операторних рівнянь та його застосування / В. Б. Василик, Д. В. Драгунов, Д. О. Ситник. – Київ: Наукова думка, 2011. — 176 с.

4. Василик В. Б. FD-метод розв'язування задачі Гурса для гіперболічного рівняння другого порядку / В. Б. Василик // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. фізико-математичні науки. — 1999. — №1. — С. 151–156.

5. Василик В. Б. Рівномірний експоненційно збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом / В. Б. Василик // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2003. — **1.** — С. 99–104.

6. Василик В. Б. Про поліноміальні розв'язки гіперболічного рівняння першого порядку / В. Б. Василик // Вісник КНУ ім. Тараса Шевченка. Сер. Фізико-математичні науки. — 1996. — С.151–156.

7. Василик В. Б. Наближений розв'язок задачі Коші для диференціального рівняння з секторіалним оператором в банаховому просторі / В. Б. Василик // Вісник ЛНУ. Сер. Прикладна математика та інформатика. — 2004. — **9.** — С. 34–46.

8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1971. — 512 с.

9. Драгунов Д. В. Чисельний та якісний аналіз систем звичайних диференціальних рівнянь : дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.01.07 / Драгунов Денис

Вікторович : Інститут математики НАН України. —- Київ, 2010. —- 141 с.

10. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

11. Макаров В. Л. Суперекспоненціально збіжний функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Гурса / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Проблеми аналітичної механіки: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 3. — С. 301–329.

12. Макаров В. Л. Алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування нелінійного рівняння Кляйна–Гордона / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Нелін. коливання. — 2013. — **16,** № 1. — С. 75–89.

13. Макаров В. Л. Функціонально-дискретний метод (FD-метод) розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Доп. НАН України. — 2014, №10. — С. 33–39.

14. Макаров В. Л. Умови збіжності та алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 4. — С. 198–238.

15. Макаров В. Л. Суперекспоненціально збіжний функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Гурса / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Міжнародна конференція молодих вчених, присвячена 70-річчю механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, 13 - 15 грудня 2010 р., Київ: Збірник тез. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2010. - С. 13.

16. Макаров В. Л. Суперекспоненціально збіжний функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Гурса / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the International Scientific Conference of Students and Young Scientists, February 21 - 25, 2011, Kyiv: Матеріали конференції — С. 246–249.

17. Макаров В. Л. Функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23 - 24 квітня 2014 р., Київ, Україна: Матеріали конференції // Відповідальний за випуск Самойленко В.Г. – Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. — С. 85.

18. Макаров В. Л. О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма–Лиувилля с кусочно-гладкими коефициентами / В. Л. Макаров // Докл. АН СССР. — 1991. — **320,** № 1. — С. 34–39.

19. Макаров В. Л., Винокур В.В. FD-метод для лінійних гіперболічних диференціальних рівняннь першого порядку з кусково-гладкими коефіцієнтами / В. Л. Макаров, В. В. Винокур // Обчисл. та прикол. матем. — 1993. — **77.** — С. 1–11.

20. Макаров В. Л., Драгунов Д. В. Функціонально-дискретний метод наближеного розв'язування задачі Коші на нескінченному інтервалі / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов // Доп. НАН України. — 2010. — №2. — С. 17–23.

21. Макаров В.Л. Функціонально-дискретний метод розв'язування задач на власні значення / Макаров В.Л. // Доп. НАН України. — 2008. — № 8. — С. 16 – 22.

22. Макаров В. Л. A Review of Functional-Discrete Technique for Eigenvalue Problems / Макаров В. Л., Розсохата Н. О. // Журн. обчисл. та прикл. матем. — 2009. — №1 (97). — С. 79 – 102.

23. Макаров В. Л. Чотириточкова різницева схема для задачі Гурса / В. Л. Макаров, С. С. Са'дуллаев // Доп. Акад. наук Укр. РСР, Сер. А. — 1980, №8. — С. 20–23.

24. Макаров В. Л. О четырёхточечных разностных схемах для квазилинейного уравнения гиперболического типа с условиями Гурса / В. Л. Макаров, С. С. Саъдуллаев // Выч. и прикл. матем. — 1981, №43. — С. 133–139.

25. Макаров В. Л. Интерполирование операторов / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов, Л. А. Янович. — К.: Наукова думка, 2000. — 407 с.

26. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — М.: Наука, 1978. — 688 с.

27. Сембер Д. А. Суперекспоненціально збіжний функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Гурса / Д. А. Сембер // Міжнародна математична конференція ім. В.Я. Скоробогатька, 19 - 23 вересня 2011 р., Дрогобич, Україна: Тези доповідей. – С. 126.

28. Сембер Д. Функціонально-дискретний метод (FD-метод) розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона / Д. Сембер // VI Міжнародна конференція імені академіка Івана Івановича Ляшка, 5 - 6 вересня 2013 р., Київ: Матеріали конференції . – С. 190–192.

29. Сембер Д. А. Умови збіжності та алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування нелінійного рівняння Клейна-Гордона /

Д. А. Сембер // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15 - 17 травня 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. - К.: НТУУ "КПІ", 2014. - Укр., рос., англ. — С. 275-277.

30. Abbaoui K. Practical formulae for the calculus of multivariable Adomian polynomials / K. Abbaoui, Y. Cherruault, V. Seng // Math. Comput. Modelling. — 1995. — **22,** № 1. — P. 89–93.

31. Abbaoui K. New Ideas for Proving Convergence of Decomposition Methods / K. Abbaoui, Y. Cherrault // Computers Math. Applic. — 1995. — **29,** № 7. — P. 103–108.

32. Abbaoui K. A new formulation of Adomian method. Convergence result / K. Abbaoui, M. J. Pujol, Y. Cherrault, P. Grimmat // Kybernetes. — 2001. — **30,** № 1. — P. 1183–1191.

33. Abbaoui K. Les fondements mathématiques de la méthode décompositionnelle d'Adomian et application á la résolution des équations issues de la Biologie et de la Médecine / K. Abbaoui. — Thése de Doctorat de l'Université de Paris VI, October, 1995. — 247 p.

34. Adomian G. Solving Frontier Problems of Phisics: The Decomposition Method / G. Adomian. — Kluwer, Boston, MA, 1994. — 355 p.

35. Adomian G. Convergent Series Solution of Non-linear Equations / Adomian G. // Jornal of Computing and Applied Mathematics. — 1984. — **11.** — P. 225–230.

36. Adomian G. On the Convergence Region for Decomposition Solutions/ G. Adomian // Jornal of Computing and Applied Mathematics. — 1984. — **11.** — P. 379–380.

37. Alomari A. K. Aproximate analitical solutions of the Klein-Gordon equation by means of the homotopy analysys method / A. K. Alomari, M. S. Noorani,

R. M. Nazar // J. of Quality Measurement and Analysis. – 2008. – **4.** – P. 45–57.

38. Barone A. Theory and aplications of the sine-Gordon equation / A. Barone, F. Esposito, C. Magee // Riv. del Nuovo cim. — 1971. — **1.** — P. 227–267.

39. Bellman R. Partial Differential Equations. / R. Bellman, G. Adomian. — Reidel. — 1985. — 428 p.

40. Berikelashvili G. Finite difference solition of a nonlinear Klein-Gordon equation with an external source / G. Berikelashvili, O. Jokhadze, S. Kharibegashvili, B. Midodashvili // Math. Comp. — 2011. — **80,** N 274. — P. 847–862.

41. Cazenave T. Nonlinear effectin the wave equation with a cubic restiring force / T. Cazenave, A. Haraux, L. Vazquez, F. B. Weissler // Compput. Mech. — 1989. —**5**. — P. 49–72.

42. Cherrault Y. Convergence of Adomian's Method/ Yves Cherrault // Kybernetes. — 1988. — **18,** № 2. — P. 31–38.

43. Dariescu C. Transition and regeneration rates in charged boson stars via perturbative calculations / C. Dariescu, M. A. Dariescu // Int. Journal of Modern Phy. A. — 2005. — **20.** — P. 2326–2330.

44. Dashen R.F. Nonperturbative methods and extended hadron models in field theory II. Two dimensional model and extended hadrons / R. F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neuveu // Phys. Rev. D. — 1974. — **10.** — P. 4130–4138.

45. Duncan D. B. Symplectic finite difference approximations of the nonlinear Klein-Gordon equation / D. B. Duncan // SIAM J. Numer. Anal. — 1997. — **34,** №5. — P. 1742 – 1760.

46. Fukuda I. On coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations II / I. Fukuda, M. Tsutsumi // J. Math. Anal. Appl. – 1978. – **66.** — P. 358–378.

47. Gavrilyuk I. P. A method with a controlleble exponential convergence rate for nonlinear differential operator equations / I. P. Gavrilyuk, I. I. Lazurchak,

V. L. Makarov, D. Sytnyk // Comp. Methods Appl. Math. – 2009. – **9**, N 1. – P. 63–78.

48. Gavrilyuk I. Exponentially convergent parallel algorithm for nonlinear eigenvalue problems / I. Gavrilyuk, A. Klymenko, V. Makarov, N. Rossokhata // IMA J. Numer. Anal. — 2007. — **27,** № 4. — P. 818–838.

49. Gavrilyuk I. P. The FD-method for an eigenvalue problem with a nonlinear potential / I. P. Gavrilyuk, A. V. Klimenko, V. L. Makarov, N. O. Rossokhata // Укр. мат. журн. — 2007. — **59,** № 1. — С. 14–28.

50. Gavrilyuk I.P. Exsponentially convergent algorithms for the operator exsponential with applications to inhomogeneous problems in Banach spaces / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — **43,** N5. — P. 2144–2171.

51. Gavrilyuk I. P. Data-spase approximation of a class of operator-valued functions / I. P. Gavrilyuk, W. Hackbusch, B. N. Khoromskij // Math. Comp. — 2005. — **74.** — P. 681–708.

52. Gavrilyuk I. P. Algorithms without accuracy saturation for evolution equations in Hilbert and Banach spaces / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov // Math. Comp. — 2005. — **74.** — P. 555–583.

53. Gavrilyuk I. P., Makarov V.L. Explisit and Approximate Solutions of Second-Order Evolution Differential Equations in Hilbert Spase / I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov // Numer Meth. Partial Diff. Eq. — 1999. — N 15. — P. 111–131.

54. Gibbon J.D. The sine-Gordon equation as a model for a rapidly rotating baroclinic fluid / J. D. Gibbon, I. M. James, I. M. Mozov // Phys. Scripta. – 1979. – **20.** – P. 402–408.

55. Gibbon J. D. N-soliton solutions on some non-linear dispersive wave equations of physical significance / J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, R. K. Bullough, J.C. Eilbeck // Ordinary and partial differential equations (Proc. Conf.,

Univ. Dundee, Dundee, 1974): Lect. Notes in Math. – Berlin: Springer, 1974. — **415.** — P. 357–362.

56. Hille E. Analytic function theory / Einar Hille. — Boston: Ginn. and Co., 1959. — 308 p.

57. Himoun N. New results of convergence of Adomian's method / N. Himoun, K. Abbaoui, Y. Cherrault // Kybernetes. — 1999. — **28,** № 4. — P. 423–429.

58. Himoun N. New results of Adomian's method / N. Himoun, K. Abbaoui, Y. Cherrault // Kybernetes. — 2003. — **32,** № 4. — P. 523–539.

59. Hosseini M.M. On the convergence of Adomian decomposition method / M.M. Hosseini, H. Nasabzadeh // Applied Math. and Computation. — 2006. — **182.** — P. 536–543.

60. Jafari H. Convergence of homotopy perturbation method for solving integral equation / H. Jafari, M. Alipour, H. Tajadods // Thai J. Math. — 2010. — **8,** №3. — P. 511–520.

61. Klein O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie / O. Klein // Zeitschrift für Physik. — 1926. — **37**., № 12. — P. 895–906.

62. Kristensson G. Second ordre differentional equations – special functions and their classification / G. Kristensson. — New York: Springer, 2010. — 162 p.

63. Lu B. N. Convergence on finite difference solution of semilinear wave equation in one space variable / B. N. Lu, S. M. Fang // Chinese Q. J. Math. — 1997. — **12.** — P. 35–40.

64. Makarov V.L. FD-method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation / V. L. Makarov, D. V. Dragunov, D. A. Sember // Укр. мат. журн. — 2012. — **64,** № 10. — С. 1394–1415.

65. Makarov V. L. The Cayley Transform and Solution of an Initial Value Problem for a First Order Diffferential Equation with an Unbounded

Operator Coefficient in Hilbert Space / V. L. Makarov, I. P. Gavrilyuk // Numer. Func. Anal. Optimiz. — 1994. — **15**, N 586. — P. 583–598.

66. Makarov V. L. FD-method for a nonlinear eigenvalue problem with discontinuous eigenfunctions / V. L. Makarov, N. O. Rossokhata // Нелінійні коливання. — 2007. — **10,** №. 1. — С. 126–143.

67. Makhmudov A. P. Approximation by S. N. Bernstein-type polynomials of solutions of the Goursat problem for a hyperbolic-type nonlinear equation / A. P. Makhmudov, Le Dyk Kiem // Ukr. Mat. Zh. — 1992. — **44.** — P. 1116–1123.

68. Malfiet W. The tanh method: a tool for solving certain classes og non-linear PDEs / W. Malfiet // Math. Methods Appl. Sci. – 2005. — **28**, № 17. — P. 2031–2035.

69. Mohammadi S. Solvihg pionic atom with klein-gordon equation / S. Mohammadi // Research Journal of Physics. — 2010. — **4.** — P. 160-164.

70. Ozawa T. Well-posedness in energy space for the Cauchy problem of the Klein-Gordon-Zakharov equations with different propagation speeds in three space dimension / T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tsutsumi // Math. Ann. — 1999. — **313.** — P. 127–140.

71. Perring J. K. A model unified field equation / J. K. Perring, T. H. R. Skyrme // Nuclear Phys. — 1962. — **31.** – P. 550–555.

72. Popov A. G. Analitical approaches to the investigation of the sine-Gordon equation and pseudospherical surfaces / A. G. Popov, E. V. Maevskii // Sovrem. Mat. Prilozh. — 2005. — **31.** — P. 13–52.

73. Ringström H. Non-linear wave equations [Електронний ресурс] / Hans Ringström. — Режим доступу : `http://www.math.kth.se/~hansr/nlw.pdf` (дата звернення 08.10.2015). — Назва з екрана.

74. Saeidian J. On a homotopy based method for solving systems of linear equations / J. Saeidian, E. Babolian, A. Azizi // TWMS J. Pure Appl. Math. — 2015. — **6,** №1. — P. 15–26.

75. Sember D. A. FD-method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation / D. A. Sember // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука, 19 - 21 квітня 2012 р., Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — К.: НТУУ "КПІ", 2012. — Укр., рос., англ. — С. 38.

76. Sember D. Algorithmic aspects of the software implementation of functional-discrete method for solving nonlinear Klein-Gordon equation / Sember D. // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 2nd International Scientific Conference of Students and Young Scientists, November 12 - 15, 2012, Kyiv: Матеріали конференції — С. 141-144.

77. Seng V. Adomian's Polynomials for Nonlinear Operators / V. Seng, K. Abbaoui, Y. Cherruault // Math. Comput. Modelling. — 1996. — **24,** № 1. — P. 59–65.

78. Sha W. Applicationof the symplectic finite-difference time-domain scheme to electromagnetic simulation / W. Sha, Z. Huang, X. Wu, M. Chen // J. Comput. Phys. — 2007. — **225,** № 1. — P. 33–50.

79. Shankar R. Principles of quantum mechanics / R. Shankar. — New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 1978. — 521 p.

80. Skyrme T. H. R. Particle states of a quantized meson field / T. H. R. Skyrme // Proc. Roy. Soc. Ser. A. — 1961. — **262.** — P. 237–245.

81. Strauss W. A. Nonlinear wave equation. CBMS Regional Conference Series in Math. Vol. 73 / W. A. Strauss. — Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1989. — 91 p.

82. Wang Y. High-order multi-symplectic schemes for nonlinear Klein-Gordon equation / Y. Wang, B. Wang // Appl. Math. Comput.— 2006. — **166,** № 3. — P. 143–149.

83. Wazwaz A. M. A sine-cosine method for handling nonlinear wave equations / A. M. Wazwaz // Math. Comput. Modelling. – 2009. — **40,** № 5–6. — P. 499–508.

84. Yagdjian K. The Klein-Gordon equation in anti-de Sitter spacetime / K. Yagdjian, A. Galstian // Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino. — 2009. — **67.** — P. 271–292.

85. Yagdjian K. Fundamental solutions for the Klein-Gordon equation in de Sitter spacetime / K. Yagdjian, A. Galstian // Comm. Math. Phys. — 2009. — **285.** — P. 293–344.

86. Zhou Y. L. Applications of Discrete Functional Analysis to the Finite Difference Method / Y. L. Zhou. — Beijing: International Academic publishers, 1991. — 260 p.