НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Сембер Дмитро Андрійович

УДК 519.6

ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИСКРЕТНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

01.01.07 — обчислювальна математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2015

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України
Макаров Володимир Леонідович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу обчислювальної математики.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор
Кутнів Мирослав Володимирович,
Інститут прикладної математики та
фундаментальних наук Національного
університету «Львівська політехніка»,
професор кафедри прикладної математики;

кандидат фізико-математичних наук,
Біленко Валентин Іванович,
Фізико-математичний інститут Національного
педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова,
професор кафедри вищої математики.

Захист відбудеться 1 грудня 2015 року о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 28 жовтня 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради ПЕЛЮХ Г.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Функціонально-дискретний метод (FD-метод) вперше був запропонований В. Л. Макаровим (1991) як метод наближеного розв'язування задачі Штурма-Ліувілля на власні значення. В подальших дослідженнях Макарова В. Л., Винокур В. В., Лазурчака І. І., Василика В. Б., Драгунова Д. В., Ситника Д. О. та інших FD-метод було успішно поширено на класи крайових задач та задач Коші для лінійних та квазілінійних звичайних диференціальних рівнянь та їх систем, а також на лінійні диференціальні рівняння в частинних похідних першого та другого порядків. Згодом було показано, що FD-метод може бути ефективно застосований до розв'язування операторних рівнянь загального вигляду.

Застосування функціональних (аналітичних) методів до наближеного розв'язування операторних рівнянь дозволяє використовувати одержані наближені розв'язки як для якісного, так і кількісного аналізу розв'язків цих рівнянь. Однак ефективність та економічність, з точки зору обчислювальних ресурсів, функціональних методів у більшості випадків значно менша, ніж у дискретних методів. FD-метод, завдяки тому, що він є поєднанням скінченно-різницевого методу та методу гомотопій (методу продовження за параметром), має основні властивості як функціональних, так і дискретних методів одночасно. Зокрема, він зберігає аналітичні характеристики точного розв'язку задачі, а завдяки дискретній складовій FD-методу він має вбудований параметр, варіюванням якого на практиці вдається досягти його збіжності. Наявність дискретної складової також дає можливість застосувати стратегію розпаралелювання розв'язування задачі з застосуванням багатопроцесорних систем. Більш того, для ряду конкретних випадків строго доведено, що швидкість збіжності FD-методу є суперекспоненціальною.

Разом з тим, на даний момент, практично поза увагою залишаються питання обґрунтування збіжності та алгоритмізації FD-методу розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних вищих порядків, систем таких рівнянь та, зокрема, нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних, серед яких важливе місце займає й нелінійне рівняння Клейна-Гордона, яке є релятивістською версією рівняння Шредінгера. Рівняння Клейна-Гордона має й ряд самостійних застосувань в сучасній фізиці та інженерії. Зокрема, воно являється моделлю, яка описує хвильову функцію нейтрально зарядженої елементарної частинки, має важливі застосування у фізиці плазми або ж, в поєднанні з рівнянням Максвелла, рівняння Клейна-Гордона описує мінімально зв'язане заряджене поле бозона в сферично-симетричному просторі-часі та ін.

Все це, разом із стрімким розвитком комп'ютерної алгебри та зростанням потужностей обчислювальної техніки, робить FD-метод актуальним і перспективним об'єктом подальших математичних досліджень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з науковими дослідженнями, що проводяться у відділі обчислювальної математики Інституту математики НАН України. Її результати було використано при виконанні науково-дослідної роботи І–16–11: "Високоточні методи розв'язування задач для операторних рівнянь у некласичній постановці", термін виконання з 01.01.2010 по 31.12.2015, номер державної реєстрації — 0111U000020.

Мета і завдання дослідження. *Метою дослідження* є розробка, обґрунтування та алгоритмічна реалізація експоненціально збіжного чисельно-аналітичного методу розв'язування нелінійного рівняння Клейна-Гордона.

Основними завданнями дослідження є:

1) розробка та обґрунтування чисельно-аналітичного методу наближеного розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з необмеженою нелінійністю;

2) розробка та обґрунтування чисельно-аналітичного методу наближеного розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона як з обмеженою, так і з необмеженою нелінійністю.

Об'єкт дослідження — нелінійне рівняння Клейна-Гордона з початковими умовами та умовами на характеристиках.

Предмет дослідження — чисельно-аналітичний метод розв'язування нелінійного рівняння Клейна-Гордона з умовами Коші та умовами Гурса.

Методи дослідження. В ході дослідження було використано методи функціонального аналізу, метод Рімана, метод твірних функцій, FD-метод розв'язування операторних рівнянь загального вигляду.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дослідження, що визначають його наукову новизну:

1) доведено теореми про існування і єдиність локального розв'язку задачі Коші та задачі Гурса для нелінійного хвильового рівняння (теореми 2.1, 3.3);

2) на основі загальної ідеї FD-методу розв'язування операторних рівнянь розроблено функціонально-дискретний метод (FD-метод)

розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з необмеженою нелінійністю; доведено теорему, що містить достатні умови суперекспоненціальної швидкості збіжності FD-методу (теорема 2.2);

3) запропоновано програмну імплементацію FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з необмеженою нелінійністю з використанням чисельних методів інтегрування;

4) на основі загальної ідеї FD-методу розв'язування операторних рівнянь розроблено функціонально-дискретний метод (FD-метод) розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з обмеженою та з необмеженою нелінійністю відповідно; доведено теореми, що містять достатні умови суперекспоненціальної швидкості збіжності FD-методу (теореми 3.4, 3.5);

5) розроблено алгоритм FD-методу розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона на основі його явної та неявної схем з використанням чисельних методів інтегрування; знайдено оцінку складності запропонованого алгоритму FD-методу з точки зору кількості основних операцій (додавання, множення, ділення).

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Одержані результати разом з алгоритмами, розробленими дисертантом, можуть бути використані при моделюванні реальних прикладних проблем, а також при розробці систем комп'ютерної алгебри та програмних пакетів чисельно-аналітичного розв'язування задач Коші та Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямків дослідження та постановки задач, розв'язаних у дисертації, належать науковому керівникові здобувача, доктору фізико-математичних наук, професору, академіку НАН України В. Л. Макарову. В публікаціях [1 – 5], написаних здобувачем у співавторстві з В. Л. Макаровим та Д. В. Драгуновим, внесок кожного з співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на таких наукових конференціях та семінарах:

- Міжнародна конференція молодих вчених, присвячена 70-річчю механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, 13-15 грудня 2010 р., Київ.

- International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics", February 21-25, 2011, Kyiv, Ukraine.
- Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, 19-23 вересня 2011 р., м. Дрогобич, Україна.
- Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, 19-21 квітня 2012 р., Київ.
- The 2nd International Scientific Conference of Students and Young Scientists "Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics", November 12-16, 2012, Kyiv, Ukraine.
- VI Міжнародна конференція імені академіка Івана Івановича Ляшка, 5-6 вересня 2013 р., Київ.
- Міжнародна математична конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23-24 квітня 2014 р., Київ.
- П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня 2014 р., Київ.
- Семінар "Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика" відділів "Динаміки та стійкості багатовимірних систем" і "Обчислювальної математики" Інституту математики НАН України (керівники семінару — академік НАН України Луковський І. О., академік НАН України Макаров В. Л.).

Публікації. Основні результати роботи викладено в 5 статтях [1 – 5], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, а також відображено в 8 тезах доповідей на міжнародних конференціях [6 – 13].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів та списку використаних джерел із 86 найменувань. Обсяг дисертації становить 141 сторінку друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження та виділено основні результати.

У **першому розділі** проведено огляд наукових робіт, тематика яких тісно пов'язана з тематикою дисертаційної роботи.

Другий розділ присвячено розробці та обґрунтуванню чисельно-аналітичного методу (FD-методу) розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона.

Існування і єдиність локального розв'язку задачі Коші для нелінійного хвильового рівняння. Розглядається задача Коші для рівняння Клейна–Гордона вигляду

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \mathbb{N}(u(x,y)) = f(x,y), \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u'_y(x,y)|_{y=0} = \psi(x), \qquad (2)$$

$(x,y) \in \Omega$, де $\Omega = \big\{(x,y)| -\infty < x < +\infty,\ y > 0\big\}$.

Нехай $C^k(\mathbb{R}^m)$ – простір функцій, неперервно-диференційованих на $\mathbb{R}^m$ до k-го порядку включно, а $C_b^k(\mathbb{R}^m)$ – підмножина простору $C^k(\mathbb{R}^m)$, до якої входять функції $f(x) \in C^k(\mathbb{R}^m)$, що задовольняють нерівність

$$\|f\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)} \stackrel{def}{=} \max_{|\alpha|\le k} \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |\partial^\alpha f(x)| < \infty,$$

де $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультиіндекс, $\alpha_i \ge 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ – частинна похідна порядку $|\alpha|$. Неважко показати, що лінійний простір $C_b^k(\mathbb{R}^m)$, оснащений нормою $\|\cdot\|_{C_b^k(\mathbb{R}^m)}$, є банаховим простором.

Теорема 2.1 *Нехай* $\mathbb{N}(u) \in C^2(\mathbb{R}), \phi(x) \in C_b^2(\mathbb{R}), \psi(x) \in C_b^1(\mathbb{R}), f(x,y) \in$ $\in C_b^1(D_\varepsilon)$. *Тоді двічі неперервно-диференційований розв'язок* $u(x,y)$ *задачі Коші* (1), (2) *існує принаймні на множині*

$$D_\varepsilon = \{\mathbb{R} \times (0;\varepsilon)\},$$

де

$$\varepsilon = \min\left\{1; \sqrt{2}\left(\max_{|u|\le M_1} \big|\mathbb{N}(u)\big|\right)^{-\frac{1}{2}}; \sqrt{2q_1}\left(\max_{|u|\le M_1} \big|\mathbb{N}'(u)\big|\right)^{-\frac{1}{2}}\right\},$$

$$M_1 = \|u_1(x,y)\|_{C(\mathbb{R}\times[0,1])} + 1,$$

$u_1(x,y)$ *– розв'язок задачі Коші* (1), (2) *при* $\mathbb{N}(u) \equiv 0$, $0 < q_1 < 1$, *і на цій множині він єдиний.*

Схема FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона. Нехай умови теореми 2.1 є виконаними і, більш того, $N(u) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Надалі будемо розглядати задачу Коші (1), (2) в області $D \subseteq \Omega$:

$$D = \big\{(x,y)|\, 0 < y \le Y_M, X_M - (Y_M - y) < x < X_M + (Y_M - y),$$
$$-\infty < X_M < +\infty, Y_M > 0, Y_M < \varepsilon\big\},$$

де стала ε визначається теоремою 2.1.

Застосування FD-методу до розв'язування задачі Коші (1), (2) полягає у знаходженні наближення точного розв'язку $\overset{m}{u}(x,y)$, у вигляді частинної суми

$$\overset{m}{u}(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \overset{(k)}{u}(x,y), \quad m \in \mathbf{N}, \tag{3}$$

при цьому будемо говорити про FD-метод m-го рангу. Введемо в розгляд розбиття області $D : \omega = \{y_j = y_0 + jh,\, y_0 = 0,\, h = Y_M/N,\, j = \overline{1,N}\}$, для деякого фіксованого натурального N. Невідомі доданки суми (3) $\overset{m}{u}(x,y)$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ знайдемо з рекурентної системи задач Коші:

$$\frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x^2} = f(x,y) + \mathbb{N}\big(\overset{(0)}{u}(x,y_{j-1})\big), \tag{4}$$

$$(x,y) \in D_j = [X_M - (Y_M - y), X_M + (Y_M - y)] \times (y_{j-1}, y_j],\ j = \overline{1,N},$$

$$\big(\overset{(0)}{u}(x,y_j+0) - \overset{(0)}{u}(x,y_j-0)\big) \equiv \big[\overset{(0)}{u}(x,y)\big]_{y=y_j} = 0, \tag{5}$$

$$\big[\overset{(0)}{u}{}'_y(x,y)\big]_{y=y_j} = 0,\ \forall x \in [X_M - (Y_M - y_j), X_M + (Y_M - y_j)], \forall j \in \overline{1,N-1},$$

$$\overset{(0)}{u}(x,0) = \phi(x), \quad \overset{(0)}{u}{}'_y(x,0) = \psi(x), \quad \forall x \in [X_M - Y_M; X_M + Y_M],$$

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x^2} = \mathbb{N}'\big(\overset{(0)}{u}_{\perp}(x,y)\big)\, \overset{(k)}{u}_{\perp}(x,y) - F_k(x,y), \tag{6}$$

$$\left[\overset{(k)}{u}(x,y)\right]_{y=y_j} = 0, \quad \left[\frac{\partial \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial y}\right]_{y=y_j} = 0,$$

$$\forall x \in [X_M - (Y_M - y_j), X_M + (Y_M - y_j)] \quad \forall j \in \overline{1,N-1}, \tag{7}$$

$$\overset{(k)}{u}(x,0) = 0,\ \left.\frac{\partial \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, x \in [X_M - Y_M, X_M + Y_M], k = 1,2,\ldots,$$

де $u_{\perp}(x,y) = u(x,y_j)$, $\forall (x,y) \in D_{j+1}$, $\forall j \in \overline{0,N-1}$,

$$\begin{aligned} F_k(x,y) = A_k(\mathbb{N}; \overset{(0)}{u}_{\perp}(x,y); \overset{(1)}{u}_{\perp}(x,y); \ldots; \overset{(k-1)}{u}_{\perp}(x,y); 0) + \\ + A_{k-1}(\mathbb{N}; \overset{(0)}{u}(x,y); \overset{(1)}{u}(x,y); \ldots; \overset{(k-1)}{u}(x,y)) - \\ - A_{k-1}(\mathbb{N}; \overset{(0)}{u}_{\perp}(x,y); \overset{(1)}{u}_{\perp}(x,y); \ldots; \overset{(k-1)}{u}_{\perp}(x,y)), (x,y) \in D,\ k = 1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{8}$$

Тут $A_n\big(N; v_0, v_1, \ldots, v_n\big)$ – поліноми Адомяна n-го порядку для функції $N(\cdot)$, які можна обчислити за формулою

$$A_n\big(N; v_0, v_1, \ldots, v_n\big) = \frac{1}{n!}\, \frac{d^n}{d\tau^n} N\Big(\sum_{s=0}^{\infty} v_s \tau^s\Big)\Big|_{\tau=0} =$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=n\\ \alpha_1\geq\ldots\geq\alpha_{n+1}=0\\ \alpha_i\in\mathbf{N}\cup\{0\}}} N^{(\alpha_1)}(v_0)\frac{v_1^{\alpha_1-\alpha_2}}{(\alpha_1-\alpha_2)!}\cdots\frac{v_n^{\alpha_n-\alpha_{n+1}}}{(\alpha_n-\alpha_{n+1})!}. \qquad (9)$$

Обґрунтування збіжності FD-методу для задачі Коші. Має місце теорема про збіжність FD-методу для задачі Коші (1), (2).

Теорема 2.2 *Нехай виконуються умови теореми 2.1 і $N(u)\in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$. Тоді єдиний розв'язок $u(x,y)\in C^2(\overline{D})$ задачі Коші (1), (2) можна як завгодно точно знайти за допомогою FD-методу (4)–(8). Крім того, мають місце наступні оцінки швидкості збіжності методу:*

$$\left\|u(x,y)-\overset{m}{u}(x,y)\right\|_{1,\infty,\overline{D}}\leq\frac{cR}{(m+1)^{1+\delta}(R-h)}\left(\frac{h}{R}\right)^{m+1}, \quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

де $\left\|f(x,y)\right\|_{1,\infty,\overline{D}} = \max\{\left\|f(x,y)\right\|_{\infty,\overline{D}}, \left\|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right\|_{\infty,\overline{D}}, \left\|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\|_{\infty,\overline{D}}\}$, $\left\|f(x,y)\right\|_{\infty,\overline{D}} = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}}|f(x,y)|$, *$h$ – крок сітки FD-методу, $h<R$, а додатні дійсні сталі c, R, δ залежать лише від вхідних даних задачі.*

Чисельна реалізація FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна – Гордона. Оскільки розв'язки системи задач (4)–(8) можна представити в явному вигляді за допомогою формули Д'Аламбера, то, очевидно, обчислення поправок $\overset{(k)}{u}(x,y)$ FD-методу пов'язане з обчисленням одинарних та подвійних інтегралів зі змінними межами інтегрування. Враховуючи рекурсивний характер системи (4)–(8), можна дійти висновку, що виключно аналітична алгоритмічна реалізація FD-методу високого рангу (з використанням сучасних систем комп'ютерної алгебри, таких як Maple, Mathematica, Maxima тощо) є практично неможливою (головним чином через складність аналітичного знаходження таких інтегралів). Подолати такі труднощі можна, використовуючи чисельні методи розв'язання системи задач (4)–(8). Один з можливих практичних підходів алгоритмічної реалізації FD-методу з використанням чисельних схем інтегрування полягає в наступному. Перетворенням $\Phi: D\xrightarrow{\Phi} D_\Phi$

$$\Phi=\begin{cases}x=\xi+\eta,\\ y=\xi-\eta,\end{cases}\qquad \Phi^{-1}=\begin{cases}\xi=\frac{1}{2}(x+y),\\ \eta=\frac{1}{2}(x-y)\end{cases} \qquad (10)$$

задачі (4)–(8) можна подати у вигляді

$$-\frac{\partial^2\overset{(0)}{v}(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}=f(\xi+\eta,\xi-\eta)+\mathbb{N}(\overset{(0)}{v}_{\perp}(\xi,\eta)),$$

$$\overset{(0)}{v}(\xi,\xi)=\phi(2\xi),\ \overset{(0)}{v}_{\eta}(\xi,\xi)=\phi'(2\xi)-\psi(2\xi), \forall\xi\in\left[\frac{X_M-Y_M}{2},\frac{X_M+Y_M}{2}\right],$$

$$-\frac{\partial^2 \overset{(k)}{v}(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = -\mathbb{N}'(\overset{(0)}{v}_\perp(\xi,\eta))\, \overset{(0)}{v}_\perp(\xi,\eta) - F_k(\xi+\eta,\xi-\eta),\ \ (\xi,\eta)\in\overline{D}_\Phi,$$

$$\overset{(k)}{v}(\xi,\xi)=0,\ \ \overset{(k)}{v}_\eta(\xi,\xi)=0,\ \forall\xi\in\left[\frac{X_M-Y_M}{2},\frac{X_M+X_M}{2}\right], k=1,2,\dots,$$

де $\overset{(k)}{v}(\xi,\eta)\in C(\Phi(\overline{D}))=C(\overline{D}_\Phi)$, $\overset{(k)}{v}_\eta(\xi,\eta)\in C(\overline{D}_\Phi), k=0,1,2,\dots,$ $\overset{(k)}{v}(\xi,\eta)=\overset{(k)}{u}(\xi+\eta,\xi-\eta)$, $\overset{(k)}{v}_\perp(\xi,\eta)=\overset{(k)}{u}_\perp(\xi+\eta,\xi-\eta)$, а $F_k(\xi+\eta,\xi-\eta), k=0,1,2,\dots$ визначаються згідно з (8).

Приймемо позначення $p=i+j$, $q=i-j$ і зосередимо увагу на функціях $\overset{(k)}{v}(\xi,\eta)$, а точніше на їх сіткових проекціях:

$$\overset{(k)}{V}[p,q]\equiv\overset{(k)}{V}[i+j,i-j]=\overset{(k)}{v}\left(\frac{1}{2}(x_i+y_j),\frac{1}{2}(x_i-y_j)\right)=\overset{(k)}{u}(x_i,y_j)=\overset{(k)}{U}[i,j], \tag{11}$$

де $x_i=X_M-Y_M+ih_1, y_j=jh_1, h_1=h/n_I, n_I\in\mathbb{N}, n_I\geq 9$, h – крок дискретизації FD-методу, $p,q\in\mathbb{Z}$. Областю визначення сіткових функцій $\overset{(k)}{U}[i,j]$ (11) буде множина $\omega_I=\{(i,j)|\,(x_i,y_j)\in\overline{D}\}$. При цьому область визначення сіткових функцій $\overset{(k)}{V}[p,q]$ згідно з (11) співпадає з множиною $\Phi^{-1}(\omega_I)=\{(i+j,i-j)|\,i,j\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},(x_i,y_j)\in\overline{D}\}$. Рівності (11) задають відображення множини $\Phi^{-1}(\omega_I)$ на $\overline{D}_\Phi$, яке діє за законом:

$$\Phi^{-1}(\omega_I)\ni(p,q)=(i+j,i-j)\longrightarrow\left(\frac{1}{2}(x_i+y_j),\frac{1}{2}(x_i-y_j)\right)=(\xi_p,\eta_q).$$

Означення 2.1 *Для будь-якої функції $f(\xi,\eta)$, визначеної на $\overline{D}_\Phi$, через $f[p,q]$ будемо позначати функцію двох дискретних аргументів p та q, визначену на $\Phi^{-1}(\omega_I)$, яка діє за законом*

$$f[p,q]=f(\xi_p,\eta_q),\quad (\xi_p,\eta_q)\in\Phi^{-1}(\omega_I).$$

Таким чином, алгоритм FD-методу m–го рангу розв'язування задачі Коші для нелінійного хвильового рівняння в області $\overline{D}$ можна звести до розв'язування $(m+1)\cdot N$ лінійних задач вигляду (тут N – кількість смуг розбиття FD-методу):

$$\frac{\partial^2 w(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}=R(\xi,\eta),$$
$$w(ph_1+\eta,\eta)=\phi_1(\eta),\quad w'_\xi(\xi,\xi-ph_1)=\psi_1(\xi),\quad p\in\mathbb{N} \tag{12}$$

на області $\widetilde{D}$, яка має форму рівнобічної трапеції і являє собою одну зі смуг розбиття FD-методу. Початкові умови задачі Коші (12) задано на нижній основі трапеції $\widetilde{D}$. З алгоритмічної токи зору задачу (12) доцільно розв'язувати в два етапи, кожен з яких полягає в обчисленні одинарного інтеграла зі змінною верхньою межею на області $\widetilde{D}$:

$$w'_\xi(\xi,\eta)=\psi_1(\xi)-\int\limits_{\xi-ph_1}^{\eta} R(\xi,\eta_1)d\eta_1;\quad w(\xi,\eta)=\phi_1(\eta)+\int\limits_{ph_1+\eta}^{\xi} w'_\xi(\xi_1,\eta)d\xi_1.$$

Щоб знайти проекції $w'_\xi[i,j]$, $w[i,j]$ функцій $w'_\xi(\xi,\eta)$ і $w(\xi,\eta)$ відповідно, на сітку $\Phi^{-1}(\omega_I)\bigcap\widetilde{D}$, використаємо наступний алгоритм:

Алгоритм 1. Обчислення $w'_\xi[i,j]$:

for $i:=2p+8$ **to** $2p+K-1$ **do**
begin
$j:=i-2p;\ w'_\xi[i,j]:=\psi_1(\xi_i);$
$w'_\xi[i,j-2]:=w'_\xi[i,j]-$
$$-\int\limits_0^{h_1} I\big(R[i,j],R[i,j-2],R[i,j-4],R[i,j-6],R[i,j-8];h_1;t\big)dt;$$
$a:=4;$
repeat
$w'_\xi[i,j-a]:=w'_\xi[i,j-a+4]-$
$$-\int\limits_0^{2h_1} I\big(R[i,j-a+4],R[i,j-a+2],R[i,j-a];h_1;t\big)dt;$$
$a:=a+2;$
until $(i,j-a)\notin\Phi^{-1}(\omega_I)\bigcap\widetilde{D};$
end.

Алгоритм 2. Обчислення $w[i,j]$:

for $j:=0$ **to** $K-9$ **do**
begin
$i:=j+2p;\ \ w[i,j]:=\phi_1(\eta_j);$
$w[i+2,j]:=w[i,j]+$
$$+\int\limits_0^{h_1} I\big(R[i,j],R[i+2,j],R[i+4,j],R[i+6,j],R[i+8,j];h_1;t\big)dt;$$
$a:=4;$
repeat
$w[i+a,j]:=w[i+a-4,j]+$
$$+\int\limits_0^{2h_1} I\big(R[i+a-4,j],R[i+a-2,j],R[i+a,j];h_1;t\big)dt;$$
$a:=a+2;$
until $(i+a,j)\notin\Phi^{-1}(\omega_I)\bigcap\widetilde{D};$
end.

Тут K – кількість точок множини $\Phi^{-1}(\omega_I)$, що лежать на нижній основі трапеції $\widetilde{D}$, а $I(r_1, r_2, \ldots, r_n; h_1; t)$ – інтерполяційний поліном від змінної t степеня $n-1$, побудований за точками $(r_1; 0), (r_2; h_1), (r_3; 2h_1), \ldots, (r_n; (n-1)h_1)$. В такому разі вираз $\int\limits_0^{2h_1} I\big(r_1, r_2, r_3; h_1; t\big)dt$ – формула Сімпсона, порядок наближення якої на кроці становить $\mathcal{O}(h_1^5)$. Формула $\int\limits_0^{h_1} I\big(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5; h_1; t\big)dt$ є різновидом формул Ньютона–Котеса і забезпечує точність обчислення інтеграла $\mathcal{O}(h_1^5)$. Таким чином ми обчислимо значення сіткових функцій $w'_\xi[\cdot,\cdot]$ та $w[\cdot,\cdot]$ в усіх точках множини $\Phi^{-1}(\omega_I)\bigcap\widetilde{D}$, окрім фіксованої (незалежної від h_1) кількості точок, що знаходяться в кутах при основі трапеції $\widetilde{D}$. Ці точки знаходяться на прямих

$$\xi = \xi_i,\ i = 2p+1, \ldots, 2p+7; \quad \eta = \eta_j,\ j = K-8, K-7, \ldots, K-2. \tag{13}$$

Для знаходження значень функцій $w'_\xi[\cdot,\cdot]$ та $w[\cdot,\cdot]$ у цих точках з точністю $\mathcal{O}(h_1^5)$ достатньо використати інтерполювання по 5-ти точках в напрямку, перпендикулярному до напрямку прямих (13).

Третій розділ присвячено розробці та обґрунтуванню чисельно-аналітичного методу (FD-методу) розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона.

Існування і єдиність локального розв'язку задачі Гурса для нелінійного хвильового рівняння. Розглянемо задачу Гурса для рівняння Клейна – Гордона, записаного в трохи модифікованому вигляді

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} + \mathbb{N}(u(x,y)) = f(x,y), \tag{14}$$

$$u(x,0) = \psi(x), \quad u(0,y) = \phi(y), \quad \psi(0) = \phi(0), \tag{15}$$

де $(x,y) \in \Omega$, $\Omega = \big\{(x,y) : 0 < x < X,\ 0 < y < Y\big\}$. Рівняння (14) одержується з рівняння Клейна – Гордона

$$\frac{\partial^2 v(\xi,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v(\xi,t)}{\partial \xi^2} - \mathbb{N}(v(\xi,t)) = \Phi(\xi,t)$$

за допомогою перетворення змінних, аналогічного до перетворення (10):

$$\Phi = \begin{cases} \xi = x+y, \\ t = x-y, \end{cases} \qquad \Phi^{-1} = \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\xi+t), \\ y = \frac{1}{2}(\xi-t) \end{cases}$$

Тоді, очевидно, $u(x,y) = v(x+y, x-y)$, $\quad f(x,y) = -\Phi(x+y, x-y)$.

Теорема 3.3 *Нехай* $\mathbb{N}(u) \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi(x) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $\phi(y) \in C_b^1(\mathbb{R})$, $f(x,y) \in C_b^1(D_\varepsilon)$. *Тоді двічі неперервно-диференційований розв'язок* $u(x,y)$ *задачі Гурса* (14), (15) *існує принаймні на множині*

$$D_\varepsilon = \{(0;\varepsilon) \times (0;\varepsilon)\},$$

де

$$\varepsilon = \min\left\{1; \left(\max_{|u|\le M_1}\left|\mathbb{N}(u)\right|\right)^{-\frac{1}{2}}; \sqrt{q_1}\left(\max_{|u|\le M_1}\left|\mathbb{N}'(u)\right|\right)^{-\frac{1}{2}}\right\},$$

$$M_1 = \|u_1(x,y)\|_{C([0,1]\times[0,1])} + 1,$$

$u_1(x,y)$ *– розв'язок задачі Гурса* (14), (15) *при* $\mathbb{N}(u) \equiv 0,\ 0 < q_1 < 1$, *і на цій множині він єдиний.*

Схема FD-методу розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона. Нехай умови теореми 3.3 є виконаними і, більш того, нелінійну функцію $\mathbb{N}(u)$, з рівняння (14), можна представити у вигляді $\mathbb{N}(u) = N(u)u, \quad N(u) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \nu_s u^s,\ \nu_s \in \mathbf{R},\ \forall u \in \mathbf{R}$. Надалі будемо розглядати задачу Гурса (14), (15) в області $D \subseteq \Omega$:

$$D = \{(x,y) : 0 < x < X < \varepsilon, 0 < y < Y < \varepsilon\},$$

де стала ε визначається теоремою 3.3. Як і у випадку задачі Коші, будемо наближати точний розв'язок $u(x,y)$ задачі (14), (15) функцією $\overset{m}{u}(x,y)$ (3). Для визначення функцій $\overset{(k)}{u}(x,y)$ з (3) покриємо область D сіткою $\omega = \omega_1 \times \omega_2,\ \omega_1 = \{x_i = ih_1, i = \overline{1,N_1}, h_1 = X/N_1\}$, $\omega_2 = \{y_j = jh_2, j = \overline{1,N_2}, h_2 = Y/N_2\}$. Тоді $\overset{(k)}{u}(x,y),\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ знайдемо з рекурентної системи задач Гурса:

$$\frac{\partial^2 \overset{(0)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + N\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\right)\overset{(0)}{u}(x,y) = f(x,y), \tag{16}$$

$$x \in (x_{i-1},x_i),\ y \in (y_{j-1},y_j),\ \forall i = \overline{1,N_1},\ \forall j = \overline{1,N_2},$$

$$\overset{(0)}{u}(x_i+0,y) = \overset{(0)}{u}(x_i-0,y),\ \overset{(0)}{u}(x,y_j+0) = \overset{(0)}{u}(x,y_j-0), \tag{17}$$

$$\overset{(0)}{u}(x,0) = \psi(x),\ \overset{(0)}{u}(0,y) = \varphi(y), \psi(0) = \varphi(0), \forall i = \overline{1,N_1-1},\ \forall j = \overline{1,N_2-1},$$

$$\frac{\partial^2 \overset{(k)}{u}(x,y)}{\partial x \partial y} + N\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\right)\overset{(k)}{u}(x,y) = \tag{18}$$

$$= -N'\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\right)\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\ \overset{(0)}{u}(x,y) - \overset{(k)}{F}(x,y),$$

$$(x,y) \in P_{i,j} = (x_{i-1},x_i) \times (y_{j-1},y_j),$$

$$\overset{(k)}{u}(x_{i-1}+0,y) = \overset{(k)}{u}(x_{i-1}-0,y), \quad y \in [0,Y],$$

$$\overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}+0) = \overset{(k)}{u}(x,y_{j-1}-0), \quad x \in [0,X],$$

$$\overset{(k)}{u}(x,0) = 0,\ \overset{(k)}{u}(0,y) = 0,\ i = \overline{1,N_1}, j = \overline{1,N_2}, k = 1,2,\ldots, \tag{19}$$

де

$$\overset{(k)}{F}(x,y)=\sum_{p=1}^{k-1}A_{k-p}\Big(N;\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}),\ldots,\overset{(k-p)}{u}(x_{i-1},y_{j-1})\Big)\overset{(p)}{u}(x,y)+$$

$$+\sum_{p=0}^{k-1}\Big[A_{k-1-p}(N;\overset{(0)}{u}(x,y),\ldots,\overset{(k-1-p)}{u}(x,y))- \tag{20}$$

$$-A_{k-1-p}(N;\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}),\ldots,\overset{(k-1-p)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}))\Big]\overset{(p)}{u}(x,y)+$$

$$+A_k(N;\overset{(0)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}),\ldots,\overset{(k-1)}{u}(x_{i-1},y_{j-1}),0)\overset{(0)}{u}(x,y),\quad k=1,2\ldots.$$

Тут $A_n\big(N;v_0,v_1,\ldots,v_n\big)$ – поліноми Адомяна n-го порядку для функції $N(\cdot)$, які можна обчислити за формулою (9).

Обґрунтування збіжності FD-методу для задачі Гурса з нелінійністю, обмеженою в $\mathbb{R}^1$. Введемо, для зручності, наступні позначення:

$$\|u\|_{0,\overline{D}}=\max_{(x,y)\in\overline{D}}|u(x,y)|\,,\quad \|u\|_{1,\overline{D}}=\max_{(x,y)\in\overline{D}}\left\{\left|\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right|\right\},$$

$$\|\cdot\|=\max\{\|\cdot\|_{0,\overline{D}},\|\cdot\|_{1,\overline{D}}\}.$$

Має місце теорема.

Теорема 3.4 *Нехай для задачі Гурса* (14), (15) *виконуються умови теореми 3.3 та:*

1) $\varphi(y)\in C^1\left[0,Y\right],\psi(x)\in C^1\left[0,X\right],\varphi(0)=\psi(0),f(x,y)\in C\left(\overline{D}\right);$

2) $|N\left(u\right)|<\alpha<+\infty$, *і має місце представлення*

$$N(u)=\sum_{i=0}^{\infty}a_iu^i,\ \ a_i\in\mathbb{R},\forall u\in\mathbb{R}.$$

Тоді розв'язок задачі (14), (15) *існує і є єдиним на прямокутнику* $\overline{D}$. *FD-метод для задачі* (14), (15) *збігається до її точного розв'язку. Мають місце оцінки абсолютної похибки методу:*

$$\left\|u(x,y)-\overset{p}{u}(x,y)\right\|\le\frac{C}{(p+1)^{1+\delta}}\frac{(h/R)^{p+1}}{1-h/R},\quad p\in\mathbb{N}\cup\{0\},$$

де $h=\max\{h_1,h_2\}$, $h<R$ *і дійсні сталі* C,R,δ *залежать лише від вхідних даних задачі* (14), (15).

Обґрунтування збіжності FD-методу для задачі Гурса з нелінійністю, необмеженою в $\mathbb{R}^1$.

Теорема 3.5 *Припустимо, що для задачі Гурса* (14), (15) *виконуються умови теореми 3.3 та:*

1) $\mathbb{N}(u) = u \sum\limits_{k=0}^{\infty} \nu_k u^k$, $\nu_k \in \mathbf{R}$, $\forall u \in \mathbf{R}$;

2) $\psi(x) \in C^{(1)}(D_1) \cap C\left(\overline{D}_1\right)$, $\phi(y) \in C^{(1)}(D_2) \cap C\left(\overline{D}_2\right)$, $f(x,y) \in$ $\in C(\overline{D})$, $D_1 = (0, X)$, $D_2 = (0, Y)$.

Тоді розв'язок $u(x,y)$ *задачі* (14), (15) *існує і є єдиним на прямокутнику* $\overline{D}$. *FD-метод для задачі* (14), (15) *збігається до її точного розв'язку. Мають місце оцінки абсолютної похибки методу:*

$$\left\|u(x,y) - \overset{m}{u}(x,y)\right\|_{1,\overline{D}} \leq \frac{cR}{(m+1)^{1+\varepsilon}(R-h)} \left(\frac{h}{R}\right)^{m+1}, \quad m \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

де $\left\|f(x,y)\right\|_{1,\overline{D}} = \max\left\{\left\|f(x,y)\right\|_{\overline{D}}, \left[\left\|\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right\|^2_{\overline{D}} + \left\|\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right\|^2_{\overline{D}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$, $\left\|f(x,y)\right\|_{\overline{D}} = \max\limits_{(x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]} |f(x,y)|$, h *– крок FD-методу,* $h < R$ *і дійсні сталі* C, R, δ *залежать лише від вхідних даних задачі* (14), (15).

Алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування задачі Гурса. Розв'язки задач (16)–(20) можна записати в явному вигляді за допомогою розв'язуючого оператора, в ролі якого виступає функція Рімана:

$$\overset{(k)}{u}(x,y) = R\,(x, y_{j-1}, x, y)\overset{(k)}{u}(x, y_{j-1}) +$$
$$+ R(x_{i-1}, y, x, y)\overset{(k)}{u}(x_{i-1}, y) - R(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}, x, y)\overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}) -$$
$$- \int\limits_{x_{i-1}}^{x}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi, y_{j-1}, x, y)\right]\overset{(k)}{u}(\xi, y_{j-1})d\xi - \int\limits_{y_{j-1}}^{y}\left[\frac{\partial}{\partial \eta} R(x_{i-1}, \eta, x, y)\right]\overset{(k)}{u}(x_{i-1}, \eta)d\eta +$$
$$+ \int\limits_{x_{i-1}}^{x}\int\limits_{y_{j-1}}^{y} R(\xi, \eta, x, y) g_k(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad \forall (x,y) \in \bar{P}_{i,j}, \tag{21}$$

де $g_0(x,y) = f(x,y)$, а при $k > 0$

$$g_k(x,y) = -N'\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\right)\overset{(0)}{u}(x,y)\overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha}) - \overset{(k)}{F}(x,y);$$
$$R(x,y;\xi,\eta) = J_0\left(\sqrt{4N_{i,j}(x-\xi)(y-\eta)}\right) = {}_0F_1\left(1; -(x-\xi)(y-\eta)N_{i,j}\right),$$

$N_{i,j} = \left|N\left(\overset{(k)}{u}(x_{i-1+\alpha}, y_{j-1+\alpha})\right)\right|$, $\forall (x,y), (\xi,\eta) \in \overline{P}_{i,j}$ $i \in \overline{1, N_1}$, $j \in \overline{1, N_2}$, J_0, ${}_0F_1$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку та вироджена гіпергеометрична функція. При $\alpha = 0$ (21) є розв'язком *явної схеми* FD-методу (16)–(20), при $\alpha > 0$ – *неявної схеми* FD-методу. Взагалі кажучи, α може приймати довільні значення $0 \leq \alpha \leq 1$.

Оцінимо складність запропонованого алгоритму з точки зору кількості необхідних *основних операцій* (додавання, множення, ділення). Інтеграли в (21) не можуть бути виражені через елементарні функції, тому для обчислення $\overset{(k)}{u}(x,y)$, $k = 0,1,2,\ldots$ доцільно використовувати чисельні методи інтегрування. Але оскільки функція Рімана $R(x,y;\xi,\eta)$ не може бути розчеплена на мультиплікативні частини, кожна з яких залежить лише від (x,y), або лише від (ξ,η), тому безпосереднє застосування квадратурних формул (Ньютона-Котеса, Sink-квадратурних формул тощо) не є виправданим з точки зору обчислювальної складності. Дійсно, розбивши прямокутник $P_{i,j}$ деякою рівномірною по обох осях сіткою $(x_i - x_{i-1})/p$ та $(y_j - y_{j-1})/p$, ми б отримали, що для обчислення подвійного інтегралу з (21) в усіх вузлах цієї квадратурної сітки з застосування, наприклад, формули прямокутників, потрібно виконати порядку $O(p^4)$ основних операцій. Отже, з (21) випливає, що в кожному прямокутнику $P_{i,j}$ матимемо порядку $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2$ основних операцій. Всього в $N_1 \times N_2$ клітинах-прямокутниках сітки ω матимемо порядку $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 N_1N_2$ основних операцій. А для m задач FD-методу будемо мати порядку $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 mN_1N_2$ основних операцій. Для знаходження наближення (3) потрібно ще виконати $\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2(m+1)N_1N_2$ операцію додавання. І остаточно, загалом потрібно виконати порядку $(2m+1)\left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 N_1N_2$ основних операцій.

Використаємо для обчислення $\overset{(k)}{u}(x,y), k = 0,1,2\ldots$ метод послідовних наближень: $\overset{(r)}{u}_0(x,y) \equiv 0$, $\forall(x,y) \in P_{i,j}$, $r = \overline{0,k}$, $i \in \overline{1,N_1}$, $j \in \overline{1,N_2}$,

$$\overset{(r)}{u}_n(\xi_k,\eta_l) = -\int\limits_{x_{i-1}}^{\xi_k}\int\limits_{y_{j-1}}^{\eta_l}\left[N\left(\overset{(r)}{u}_{n-1}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha})\right)\overset{(r)}{u}_{n-1}(x,y) -\right.$$

$$\left.-g_r\left(x,y,\overset{(r)}{u}_{n-1}(x,y)\right)\right]dydx+\overset{(r)}{u}_n(x_{i-1},\eta_l)+\overset{(r)}{u}_n(\xi_k,y_{j-1})-\overset{(r)}{u}_n(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha}),$$

де

$$g_r(x,y,\overset{(r)}{u}_{n-1}(x,y)) =$$

$$= \begin{cases} f(x,y), & r = 0; \\ -N'\left(\overset{(0)}{u}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha})\right)\overset{(0)}{u}(x,y)\overset{(r)}{u}_{n-1}(x_{i-1+\alpha},y_{j-1+\alpha}) - \overset{(r)}{F}(x,y), & r > 0, \end{cases}$$

$$\forall(x,y) \in P_{i,j},\ r = \overline{0,k},\ l \in \overline{1,p},\ i \in \overline{1,N_1},\ j \in \overline{1,N_2}, n = 1,2,\ldots.$$

Тоді, аналогічним чином, одержимо, що в кожному прямокутнику $P_{i,j}$ потрібно виконати порядку p^2 основних операцій. Всього в $N_1 \times N_2$ прямокутниках сітки ω матимемо порядку $p^2N_1N_2$ основних операцій. А для m задач FD-методу необхідно порядку $mp^2N_1N_2$ основних операцій. Для знаходження наближення (3) потрібно ще виконати $(m+1)p^2N_1N_2$ операцію додавання. Отже, всього потрібно виконати порядку $mp^2N_1N_2+(m+1)p^2N_1N_2=(2m+1)p^2N_1N_2$ основних операцій.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розробці та обґрунтуванню чисельно-аналітичного методу (FD-методу) наближеного розв'язування нелінійного рівняння Клейна-Гордона, що може бути ефективно застосований при моделюванні прикладних проблем з використанням систем комп'ютерної алгебри (Mathematica, Maple, Maxima тощо), а також при розробці програмних пакетів чисельно-аналітичного розв'язування задач Коші та Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона.

Зокрема, побудовано та обґрунтовано суперекспоненціально збіжний метод (FD-метод) чисельно-аналітичного розв'язування задачі Коші та задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона, що базується на ідеї FD-методу розв'язування операторних рівнянь загального вигляду. В якості допоміжних тверджень доведено теореми про існування і єдиність локальних розв'язків задач Коші та Гурса для нелінійного хвильового рівняння. Запропоновано програмну імплементацію FD-методу та алгоритм його реалізації з використанням чисельних методів інтегрування у випадку задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з необмеженою нелінійністю.

Крім того, у випадку задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з обмеженою та з необмеженою нелінійністю, запропоновано алгоритм програмної реалізації FD-методу з використанням чисельних методів інтегрування. На основі явної та неявної схем FD-методу знайдено оцінку складності запропонованого алгоритму реалізації FD-методу з точки зору кількості основних операцій (додавання, множення, ділення).

Основні результати.

1) Доведено теореми про існування і єдиність локального розв'язку задачі Коші та задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона (теореми 2.1, 3.3);

2) розроблено загальну схему FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона (1)–(2) з необмеженою в $\mathbb{R}^1$ нелінійністю; доведено теорему, що містить достатні умови збіжності FD-методу розв'язування задачі Коші (1)–(2) до її точного розв'язку з суперекспоненціальною швидкістю (теорема 2.2);

3) запропоновано алгоритмічну реалізацію FD-методу розв'язування задачі Коші для рівняння Клейна-Гордона (1)–(2) з використанням чисельних методів інтегрування;

4) розроблено загальну схему FD-методу розв'язування задачі Гурса (14)–(15) для нелінійного рівняння Клейна-Гордона; доведено теореми, що містять достатні умови збіжності FD-методу розв'язування задачі Гурса (14)–(15) з обмеженою та з необмеженою в $\mathbb{R}^1$ нелінійностями до точного її розв'язку з суперекспоненціальною швидкістю (теореми 3.4, 3.5);

5) запропоновано алгоритм FD-методу розв'язування задачі Гурса (14)–(15) на основі його явної та неявної схем з використанням чисельних методів інтегрування; зроблено оцінку складності алгоритму FD-методу розв'язування задачі Гурса з точки зору кількості основних операцій (додавання, множення, ділення), які необхідно виконати при реалізації алгоритму FD-методу з використанням чисельних методів інтегрування.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Макаров В. Л. Суперекспоненціально збіжний функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Гурса / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Проблеми аналітичної механіки: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України, 2010. — **7,** № 3. — С. 301–329.

2. Makarov V. L. FD-method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation / V. L. Makarov, D. V. Dragunov, D. A. Sember // Укр. мат. журн., 2012. — **64,** № 10. — С. 1394–1415.

3. Макаров В. Л. Алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування нелінійного рівняння Кляйна–Гордона / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Нелін. коливання, 2013. — **16,** № 1. — С. 75–89.

4. Макаров В. Л. Функціонально-дискретний метод (FD-метод) розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Доп. НАН України. — 2014. — №10. — С. 33-39.

5. Макаров В. Л. Умови збіжності та алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов,

Д. А. Сембер // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України, 2014. — **11,** № 4. — С. 198-238.

6. Макаров В. Л. Суперекспоненціально збіжний функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Гурса / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Міжнародна конференція молодих вчених, присвячена 70-річчю механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Тараса Шевченка, 13-15 грудня 2010 р., Київ: Матеріали конференції. – С. 13.

7. Макаров В. Л. Суперекспоненціально збіжний функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Гурса / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the International Scientific Conference of Students and Young Scientists, February 21-25, 2011, Kyiv: Матеріали конференції. — С. 246–249.

8. Сембер Д. А. Суперекспоненціально збіжний функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Гурса / Д. А. Сембер // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, 19-23 вересня 2011 р., Дрогобич, Україна: Матеріали конференції. — С. 126.

9. Sember D. A. FD-method for solving the nonlinear Klein-Gordon equation / D. A. Sember // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука, 19-21 квітня 2012 р., Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – К.: НТУУ "КПІ", 2012. – Укр., рос., англ. — С. 38.

10. Sember D. Algorithmic aspects of the software implementation of functional-discrete method for solving nonlinear Klein-Gordon equation / D. Sember // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 2nd International Scientific Conference of Students and Young Scientists, November 12-16, 2012, Kyiv: Матеріали конференції. — С. 141–144.

11. Сембер Д. Функціонально-дискретний метод (FD-метод) розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона / Д. Сембер // VI Міжнародна конференція імені академіка Івана Івановича Ляшка, 5-6 вересня 2013 р., Київ: Матеріали конференції. — С. 190–192.

12. Макаров В. Л. Функціонально-дискретний метод розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона / В. Л. Макаров, Д. В. Драгунов, Д. А. Сембер // Міжнародна математична

конференція "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, 23-24 квітня 2014 р., Київ, Україна: Матеріали конференції. — С. 85.

13. Сембер Д. А. Умови збіжності та алгоритмічні аспекти програмної реалізації FD-методу розв'язування нелінійного рівняння Клейна-Гордона / Д. А. Сембер // П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 15-17 травня 2014 р., Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. - К.: НТУУ "КПІ", 2014. - Укр., рос., англ. - С. 275-277.

АНОТАЦІЇ

Сембер Д. А. Функціонально-дискретний метод розв'язування нелінійного рівняння Клейна-Гордона. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.07 — обчислювальна математика. Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

Дисертаційна робота присвячена розробці та обґрунтуванню чисельно-аналітичного методу розв'язування нелінійного рівняння Клейна-Гордона.

Розроблено та обґрунтовано чисельно-аналітичний метод (FD-метод) наближеного розв'язування задачі Коші для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з необмеженою нелінійністю та FD-метод наближеного розв'язування задачі Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона як з обмеженою, так і з необмеженою нелінійністю, що базується на ідеї FD-методу розв'язування операторних рівнянь загального вигляду. Доведено теореми про існування і єдиність локальних розв'язків задачі Коші та задачі Гурса для нелінійного хвильового рівняння. Доведено теореми, що містять достатні умови збіжності FD-методу до точного розв'язку задач Коші та Гурса з суперекспоненціальною швидкістю. Теоретичні результати доповнено програмною імплементацією та алгоритмом FD-методу розв'язування задач Коші та Гурса для нелінійного рівняння Клейна-Гордона з використанням чисельних методів інтегрування.

Ключові слова: чисельно-аналітичний метод, диференціальні рівняння в частинних похідних, рівняння Клейна-Гордона, FD-метод, суперекспоненціальна швидкість збіжності, чисельний метод інтегрування.

Сембер Д. А. Функционально-дискретный метод решения нелинейного уравнения Клейна-Гордона. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 — вычислительная математика. Институт математики НАН Украины, Киев, 2015.

Диссертационная работа посвящена разработке и обоснованию численно-аналитического метода решения нелинейного уравнения Клейна-Гордона.

Разработан и обоснован численно-аналитический метод (FD-метод) приближённого решения задачи Коши для нелинейного уравнения Клейна-Гордона с неограниченной нелинейностью и FD-метод приближённого решения задачи Гурса для нелинейного уравнения Клейна-Гордона как с ограниченной, так и с неограниченной нелинейностью, который основан на идее FD-метода решения операторных уравнений общего вида. Доказаны теоремы о существовании и единственности локальных решений задачи Коши и задачи Гурса для нелинейного волнового уравнения. Доказаны теоремы, содержащие достаточные условия сходимости FD-метода к точному решению задач Коши и Гурса с суперэкспоненциальной скоростью. Теоретические результаты дополнены програмной имплементацией и алгоритмом FD-метода решения задач Коши и Гурса для нелинейного уравнения Клейна-Гордона с применением численных методов интегрирования.

Ключевые слова: численно-аналитический метод, дифференциальные уравнения в частных производных, уравнение Клейна-Гордона, FD-метод, суперэкспоненциальная скорость сходимости, численный метод интегрирования.

Sember D. A. A functional discrete method for solving a nonlinear Klein-Gordon equation. — Manuscript.

A thesis presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.01.07 — computational mathematics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2015.

The dissertation is devoted to the development and generalization of the numerical-analytical method for solving a nonlinear Klein-Gordon equation.

A new numerical-analytical method (FD-method) for solving a nonlinear Klein-Gordon equation was constructed and theoretically justified. The method is based on the idea of the FD-method for solving an operator equations of the general type, which was introduced by V.L. Makarov and takes its origins from the functional-discrete method for solving Sturm-Liouville problems. It allows to compute the solution in the form of rapi-

dly convergent functional series and preserves the analytical properties of the exact solution. Since the FD-method can be considered as a symbiosis of the finite-difference and homotopy methods, it possesses main features of both functional and discrete methods simultaneously. Owing to its discrete component, the FD-method contains an embedded parameter (which is related to a step of the method's discrete mesh) varying which it is possible to achieve the method's convergence domain. The discrete component allows also to benefit from using parallel computation strategies and multicore systems. Whereas thanks to its analytical component the FD-method converges convergence faster than a convergent geometric progression (i.e. superexponentialy).

Based on the main idea of the FD-method for solving operator equations of general type, a numerical-analytical method for solving nonlinear Klein-Gordon equation with bounded and unbounded nonlinearities was constructed. It was proved that for quite a wide range of input data (nonlinearity, initial conditions etc.) the FD-method has a superexponential convergence rate. As an auxiliary statements it was also proved a few theorems about existence and uniqueness of local solutions for both Cauchy and Goursat problems which are nontrivial generalizations of the known statements.

Besides strictly theoretical results, the thesis contains quite a deep investigation of algorithmic implementation approaches for the proposed methods. It was shown that to achieve the best performance of the algorithms their analytical parts have to be combined with well known techniques of numerical integration. Although the application of numerical integration inside the pure FD-method inevitably results in some additional numerical distortions of the approximated solution, the approach itself proved to be much more fast and reliable that with pure analytical integration. The algorithmic implementations of the FD-method for solving Goursat and Cauchy problems for the nonlinear Klein-Gordon equations are described and discussed in details. In case of the Goursat problem the difference between explicit and implicit FD-methods has been investigated in terms of implementation and practical results. The influence of the numerical integration on the overall accuracy of the FD-method was not studied in detail and will be a subject for further investigations.

Key words: numerical-analytical method, partial differential equation, Klein-Gordon equation, FD-method, superexponential convergence rate, numerical method of integration.

Підп. до друку 16.10.2015. Формат 60 х 84/16. Папір офс. Офс. друк
Фіз. друк. арк. 1,2. Ум. друк. арк. 1,6. Тираж 100 прим. Зам. 56

Інститут математики НАН України,
01601, Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3