НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПАРФІНОВИЧ Наталія Вікторівна

УДК 517.5

СПЛАЙНИ В ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ, НЕРІВНОСТІ ДЛЯ ПОХІДНИХ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис

Роботу виконано у Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ВАКАРЧУК Сергій Борисович,
ВНЗ "Університет імені Альфреда Нобеля", МОН України, м. Дніпро, професор кафедри економіки та моделювання бізнес-процесів;

доктор фізико-математичних наук, професор
КРОТОВ Веніамін Григорович,
Білоруський державний університет,
завідувач кафедри теорії функцій;

доктор фізико-математичних наук, професор
ШЕВЧУК Ігор Олександрович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка МОН України,
завідувач кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться "*22*" *травня 2018 р.* о *15* годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "*14*" *квітня* 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. До найбільш розвинутих напрямів теорії наближення відноситься напрям, пов'язаний з найкращим наближенням класів дійсних функцій однієї змінної. На теперішній час одержано багато важливих результатів як щодо наближення таких класів фіксованими просторами, так і в напрямі, пов'язаному з вибором для даного функціонального класу найкращого апарату наближення (задача про поперечники).

Перші точні результати щодо наближення класів диференційовних періодичних функцій тригонометричними поліномами були отримані Ж. Фаваром, Н. І. Ахієзером, М. Г. Крейном. Згодом ці дослідження були продовжені і розвинені у роботах Б. Надя, С. М. Нікольського, В. К. Дзядика, С. Б. Стєчкіна, Сунь Юншена, К. І. Бабенка, М. П. Корнєйчука, Л. В. Тайкова та ін.

Задачу про поперечники сформулював у 1936 р. А. М. Колмогоров. Йому належать і перші точні результати щодо обчислення поперечників класів W_2^r у просторі L_2. У подальшому задача про поперечники Колмогорова функціональних класів вивчалась У. Рудіним, С. Б. Стєчкіним, В. М. Тихомировим. У різних ситуаціях точні значення поперечників за Колмогоровим соболєвських класів періодичних функцій встановлювали В. М. Тихомиров, Ю. М. Субботін, Ю. І. Маковоз, В. І. Рубан, А. О. Лігун, А. Пінкус та ін. Для класів $W^r H^\omega$ точні значення поперечників за Колмогоровим були знайдені М. П. Корнєйчуком, В. П. Моторним, В. І. Рубаном та ін.

Після появи сплайнів набув розвитку напрям, пов'язаний з наближенням класів функцій за допомогою цього апарату. Точні результати щодо таких наближень були одержані В. М. Тихомировим, М. П. Корнєйчуком, Ю. М. Субботіним, В. Л. Великіним, А. А. Женсикбаєвим, А. О. Лігуном та ін. Великий інтерес до використання сплайнів у теорії наближень був викликаний їхніми апроксимативними властивостями. А саме, підпростори сплайнів мінімального дефекту з рівномірно розподіленими вузлами, як і підпростори тригонометричних поліномів, в багатьох ситуаціях виявились екстремальними (у сенсі точних значень) для парних колмогоровських поперечників класів диференційовних періодичних функцій.

Низка робіт була присвячена поширенню результатів щодо найкращих наближень і поперечників, відомих для класів диференційовних періодичних функцій, на класи згорток з довільними ядрами, що не збільшують осциляцію. Такі задачі розглядались у роботах А. Пінкуса, В. Т. Шевалдіна, В. Ф. Бабенка та ін.

Незважаючи на значні досягнення у напрямі дослідження поперечників і найкращих наближень функціональних класів, ця тематика залишається однією з найважливіших у теорії наближення і такою, що має ще дуже багато відкритих питань. Зокрема, у даній роботі було поставлено за мету (і реалізовано) відшукання нових екстремальних підпросторів для поперечників за Колмогоровим класів Соболєва, їх узагальнень на класи згорток з

CVD−ядрами, класів $W^r H^\omega$.

Починаючи з робіт Е. Ландау, Ж. Адамара, Г. Г. Гарді, Дж. І. Літлвуда набув потужного розвитку напрям, пов'язаний з питаннями оцінки норм похідних функції через її норму і норму старшої похідної в певних нормованих просторах. Такі нерівності називають нерівностями типу Колмогорова з огляду на велику значущість одержаного А. М. Колмогоровим результату.

Найбільш важливими є нерівності такого типу з непокращуваними константами, оскільки саме вони, а також методи їх дослідження мають найбільш цікаві застосування. Слід відзначити, що нерівності типу Колмогорова для функцій однієї та багатьох змінних є вельми важливими у задачах аналізу, звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь з частинними похідними, теорії інтерполяції операторів, теоремах вкладення та ін.

У багатьох питаннях аналізу і його застосувань, інших напрямах математики, а також в інших галузях науки, таких як: фізика, хімія, біологія, виникає необхідність разом з інтегралами і похідними цілих порядків розглядати також інтеграли і похідні дробових порядків. Проте точне розв'язання задач аналізу і, зокрема, теорії апроксимації, пов'язаних з дробовими похідними та інтегралами, зустрічається зі значними труднощами. З огляду на це сьогодні відомо зовсім небагато результатів щодо точних нерівностей типу Колмогорова для дробових похідних, особливо в багатовимірному випадку. Отже, цей напрямок досліджень дисертаційної роботи є актуальним і обґрунтованим.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась згідно з загальними планами досліджень кафедри математичного аналізу та кафедри математичного аналізу і теорії функцій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, а також згідно з держбюджетними темами № 1–147–07 "Оптимізація методів відновлення математичних об'єктів за неповною інформацією" (номер державної реєстрації 0107U000523), № 1-221-10 "Оптимальне відновлення операторів на класах функцій однієї та багатьох змінних" (номер державної реєстрації 0110U001282), № 1–326–17 "Екстремальні проблеми теорії наближень функцій дійсного змінного і нерівності типу Колмогорова" (номер державної реєстрації 0117U001208) і з науково-дослідною темою ММФ–78–13 "Нерівності для похідних і екстремальні задачі в різних нормованих просторах" (номер державної реєстрації 0114U000193).

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є одержання нових результатів щодо точних значень найкращих наближень класів диференційовних періодичних функцій сплайнами, знаходження нових екстремальних підпросторів для поперечників цих класів у просторі L_1, одержання нових точних нерівностей типу Колмогорова для функцій однієї та багатьох змінних, а також деякі застосування цих нерівностей до розв'язання екстремальних задач теорії апроксимації.

Об'єктом дослідження є функціональні класи: класи диференційовних періодичних функцій; класи згорток функцій з довільної перестановочно-інваріантної множини з ядрами, що не збільшують кількість змін знаку на періоді; класи функцій, означених на осі та півосі зі старшою похідною, що належить певним нормованим просторам; класи функцій багатьох змінних з градієнтом або лапласіаном, що належать певним нормованим просторам.

Предметом дослідження є: найкращі наближення класів диференційовних періодичних функцій підпросторами сплайнів і класів згорток функцій з довільної перестановочно-інваріантної множини з ядрами, що не збільшують кількість змін знаку на періоді, підпросторами узагальнених сплайнів; оцінки норм похідних та інтегралів дробового порядку функцій однієї та багатьох змінних через норми самих функцій та їх старших похідних у різних нормованих просторах; задача Стєчкіна про наближення необмеженого оператора обмеженими; задача відновлення оператора дробового диференціювання на класах функцій, заданих із похибкою.

Для реалізації поставленої мети у роботі визначені такі *завдання*:

– дослідити найкращі наближення класів r разів диференційовних періодичних функцій з обмеженою в L_p r–ю похідною і класів r разів диференційовних періодичних функцій, обмеження на r–у похідну яких задаються мажорантою модуля неперервності, сплайнами дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнами дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами у метриці простору L_1;

– перевірити гіпотезу про те, що підпростори сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами є екстремальними підпросторами для поперечників за Колмогоровим згаданих вище класів у просторі L_1;

– одержати нові точні нерівності типу Джексона і типу Бернштейна для сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів мінімального дефекту з нерівномірно розподіленими вузлами;

– дослідити найкращі L_1–наближення класів згорток функцій з довільної перестановочно-інваріантної множини з ядрами, що не збільшують кількість змін знаку на періоді, підпросторами згорток з цими ядрами сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами; перевірити гіпотезу про те, що такі апроксимуючі агрегати є екстремальними для поперечників за Колмогоровим у просторі L_1 вказаних класів;

– знайти порядкові рівності для найкращих наближень класів r разів диференційовних періодичних функцій з обмеженою в L_p r–ю похідною сплайнами з цих класів у метриці просторів L_q $(1 \leq p \leq q \leq 2)$; перевірити гіпотезу про те, що послідовності таких сплайнів є екстремальними за порядком для одного виду відносних поперечників класів W_2^r у просторі L_2;

– оцінити норми дробових похідних за Маршо двічі диференційовних функцій, визначених на дійсній осі, через норми функцій та їх других похідних; оцінити норми похідних за Адамаром функцій, визначених на дійсній півосі, з різних класів;

– оцінити норми мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів, похідних Рісса функцій багатьох змінних через норми самих функцій і норми градієнта або лапласіана в різних нормованих просторах;

– одержати розв’язки задач наближення необмеженого оператора дробового диференціювання (за Маршо і за Ріссом) обмеженими на різних класах функцій і оптимального відновлення оператора дробового диференціювання на заданих з похибкою функціях з цих класів;

– оцінити рівномірну норму одновимірного потенціалу Рісса частинної похідної функції з обмеженим в L_∞ лапласіаном;

– у всіх задачах про оцінки норм похідних перевірити непокращуваність цих оцінок, побудувати (за можливості) екстремальні функції.

Методи дослідження. У роботі використано сучасні методи теорії функцій, функціонального аналізу і теорії наближень, зокрема, загальні методи розв'язування екстремальних задач теорії наближення, методи доведення нерівностей для норм "проміжних" похідних, методи оцінювання найкращого наближення необмеженого оператора лінійними обмеженими операторами.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертаційної роботи є новими і полягають у такому:

– знайдено точні значення найкращих наближень класів r разів диференційовних періодичних функцій з обмеженою в L_p r–ю похідною сплайнами дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнами дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами в метриці простору L_1;

– знайдено точні значення найкращих наближень класів r разів диференційовних періодичних функцій з обмеженнями на r–у похідну, що задаються опуклою вгору мажорантою модуля неперервності, сплайнами дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнами дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами в метриці простору L_1;

– вказано нові екстремальні підпростори для поперечників за Колмогоровим вказаних вище класів у просторі L_1, а саме: доведено, що підпростори сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами реалізують ці поперечники у сенсі точного значення;

– одержано нові точні нерівності типу Джексона і типу Бернштейна для сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів мінімального дефекту з нерівномірно розподіленими вузлами;

– знайдено точні значення найкращих L_1–наближень класів згорток функцій з довільної перестановочно-інваріантної множини з ядрами, що не збільшують кількість змін знаку на періоді, підпросторами згорток з цими ядрами сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами, з’ясовано, що такі апроксимуючі агрегати є екстремальними для поперечників за Колмогоровим вказаних класів у просторі L_1;

– знайдено порядкові рівності для найкращих наближень класів r разів диференційовних періодичних функцій з обмеженою в L_p r–ю похідною сплайнами з цих класів у метриці просторів L_q $(1 \leq p \leq q \leq 2)$, спростовано гіпотезу про те, що послідовності таких сплайнів є екстремальними за порядком для одного виду відносних поперечників класів W_2^r у просторі L_2;

– отримано нові точні мультиплікативні нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних за Маршо функцій, визначених на дійсній осі, що оцінюють вказані норми через норми функцій та їх других похідних;

– одержано нові точні нерівності типу Колмогорова для похідних за Адамаром функцій, визначених на дійсній півосі;

– отримано точні нерівності типу Колмогорова для норм мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів, одержані результати застосовано до розв'язання задачі наближення необмеженого оператора дробового диференціювання обмеженими на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності;

– встановлено точні нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса порядку $0 < \alpha < 1$ функцій багатьох змінних з обмеженим в L_s градієнтом і порядку $0 < \alpha < 2$ функцій багатьох змінних з обмеженим в L_s лапласіаном;

– розв'язано задачу Стєчкіна про наближення необмежених операторів дробового диференціювання обмеженими на класах функцій багатьох змінних, які задаються обмеженнями на L_s–норму градієнта або лапласіана відповідно, а також розв'язано задачу оптимального відновлення оператора дробового диференціювання на заданих з похибкою функціях з цих класів;

– одержано точні нерівності, що оцінюють рівномірну норму одновимірного потенціалу Рісса частинної похідної функції з обмеженим в L_∞ лапласіаном.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Одержані результати і розвинені методи можуть знайти застосування у подальших дослідженнях екстремальних задач теорії наближення, зокрема, задач наближення функціональних класів фіксованими просторами, задач оцінок поперечників, задач знаходження точних нерівностей типу Колмогорова для функцій однієї та багатьох змінних і споріднених задач.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно.

У статтях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача такий: в роботах [1–3] – здобувачеві належить постановка задач, формулювання основних гіпотез, ідеї доведень, побудова схем доведень, контроль за правильністю викладення матеріалу, співавтори брали участь у перевірці робочих гіпотез; у роботах [4, 10] – визначення напрямку досліджень, обговорення результатів, контроль якості викладення результатів належить В. Ф. Бабенку, перевірка основних гіпотез і докладне доведення всіх тверджень належить здобувачеві; у роботі [5] – здобувачеві належить докладне доведення основних результатів; у роботі [6] – перевірка точності нерівностей у теоремах 2 і 3 належить В. Ф. Бабенку, решта результатів отримана здобувачем; у роботах [7, 11] – здобувачеві належить докладне доведення всіх основних результатів; у роботі [8] – здобувачеві належить перевірка гіпотези В. Ф. Бабенка щодо порядкової поведінки відносних поперечників класів Соболєва, докладне доведення основного результату; у роботах [9, 15] – визначення напрямку досліджень, ідеї щодо узагальнення вже існуючих нерівностей і застосування певних методів доведення, гіпотези щодо конструкції екстремальних функцій належать співавторам, докладне доведення всіх результатів, удосконалення схем і методів доведення нерівностей, результати щодо застосувань нерівностей належать здобувачеві; у роботах [12, 14] – В. Ф. Бабенку належить ідея розповсюдження вже існуючих результатів щодо нерівностей типу Колмогорова на випадок L_s–норм і гіпотези щодо конструкції екстремальних функцій, решта досліджень виконана здобувачем; у роботі [13] – В. Ф. Бабенку належить ідея одночасного розгляду нерівностей для похідних за Маршо і за Адамаром з огляду на взаємозв’язок між цими похідними, А. О. Семиренко брала участь у перевірці робочих гіпотез, здобувачеві належить доведення основних результатів, удосконалення і контроль якості викладення матеріалу; у роботі [16] – здобувачеві належить доведення точних нерівностей типу Колмогорова, що оцінюють норму дробової похідної за Маршо функцій, означених на дійсній осі, через норму самої функції та норму її похідної другого порядку, а також результати щодо оцінок норм похідних за Адамаром; у роботі [18] – здобувачеві належить докладне доведення всіх основних результатів.

Апробація результатів дисертації. За результатами дисертаційної роботи було зроблено доповіді на:

– Міжнародній конференції "Functional Methods in Approximation Theory, Stochastic Analysis and Statistics II", присвяченій пам’яті А. Я. Дороговцева (01.10.2004 – 05.10.2004, Київ, Україна);

– Міжнародних математичних конференціях ім. В. Я. Скоробогатька (24.09.2007 – 28.09.2007, 25.08.2015 – 28.08.2015, Дрогобич, Україна);

– Міждержавних науково-методичних конференціях "Проблеми математичного моделювання" (23.05.2007 – 25.05.2007, 28.05.2008 – 30.05.2008, Дніпродзержинськ, Україна);

– Міжнародних конференціях з теорії наближення (04.03.2007 – 08.03.2007, 07.03.2010 – 10.03.2010, 07.04.2013 – 10.04.2013, Сан Антоніо, США);

– Міжнародній конференції з математичного моделювання і обчислень (04.11.2007 – 08.11.2007, Сан Антоніо, США);

– Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка (16.06.2008 – 21.06.2008, Мелітополь, Україна);

– Міжнародній конференції "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III", присвяченій пам’яті В. К. Дзядика (22.08.2009 – 26.08.2009, Світязь, Україна);

– Міжнародній конференції "Теорія наближень та її застосування", присвяченій 90-річчю з дня народження М. П. Корнєйчука (14.06.2010 – 17.06.2010, Дніпропетровськ, Україна);

– Міжнародному симпозіумі з теорії наближення, присвяченому 70–річчю з дня народження професора Л. Шумейкера (17.05.2011 – 20.05.2011, Нешвіл, США);

– Міжнародній конференції з сучасного аналізу (20.06.2011 – 23.06.2011, Донецьк, Україна);

– Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70-річчю з дня народження чл.-кор. НАН України О. І. Степанця (28.05.2012 – 03.06.2012, Кам'янець-Подільський, Україна);

– Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", присвяченій 75-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка (23.06.2013 – 30.06.2013, Севастополь, Україна);

– Кримській міжнародній математичній конференції (22.09.2013 – 04.10.2013, Судак, Україна);

– Міжнародній конференції "Теорія наближень та її застосування", присвяченій 75-річному ювілею В. П. Моторного (08.10.2015 – 11.10.2015, Дніпропетровськ, Україна);

– Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 75-річчю з дня народження чл.-кор. НАН України О. І. Степанця (28.05.2017 – 03.06.2017, Слов'янськ, Україна).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідались і обговорювались на міжвузівському семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу і теорії функцій ДНУ імені Олеся Гончара (Дніпропетровськ, 2010 – 2014, керівники семінару: чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. В. П. Моторний і д.ф.-м.н., проф. В. Ф. Бабенко та Дніпро, 01.11.2017, керівник семінару – чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. В. П. Моторний), а також на:

– семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (Київ, 10.03.2017, 30.06.2017, керівник семінару – д. ф.- м. н., проф. А. С. Романюк);

– семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечнікова (Одеса, 03.07.2017, керівник семінару, – д.ф.-м.н., проф. А. О. Кореновський);

– науково-методичному семінарі при кафедрі теорії функцій Білоруського державного університету (Мінськ, 25.09.2017, керівник семінару – д.ф.-м.н., проф. Е. І. Зверович);

– семінарі "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (Київ, 04.10.2017, керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. О. О. Курченко, д.ф.-м.н., проф. В. М. Радченко, д.ф.-м.н., проф. І. О. Шевчук).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у роботах [1–42], 8 з них опубліковано без співавторів, роботи [1–22] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук, [23–42] – тези доповідей; роботи [4–6, 8–10, 12, 14–16, 18, 21, 22] надруковано у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз.

Структура і обсяг роботи. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, змісту, вступу, п'яти розділів, висновків, додатку та списку використаних джерел, що містить 303 найменування. Повний обсяг роботи становить 330 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

У *вступі* визначено об'єкт і предмет дослідження, обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і завдання, охарактеризовано методи дослідження, його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, прокоментовано повноту викладення матеріалу в працях та його ступінь апробації, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

Основну частину роботи складають п'ять розділів. На початку кожного розділу (у перших підрозділах) подано стислий огляд літератури, висвітлено основні питання, які відповідають напрямку досліджень даного розділу, зазначено питання, які залишились нерозв’язаними, анонсовано нові результати, що виносяться на захист.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню задач наближення класів диференційовних періодичних функцій підпросторами сплайнів, а також пов'язаним з цією проблематикою питанням про нерівності типу Бернштейна і Джексона для сплайнів.

Нехай $L_p,\ 1 \le p \le \infty,$ – простори 2π–періодичних функцій $f: R \to R$ з відповідними нормами $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p;\ p' = \frac{p}{p-1}$.

Нехай H – підпростір простору L_p і $g \in L_{p'}$. Якщо для всіх $h \in H$

$$\int_0^{2\pi} g(x)h(x)\,dx = 0,$$

то будемо писати $g \perp H$. Якщо H – підпростір констант, то замість $g \perp H$ будемо використовувати позначення $g \perp 1$.

Нехай множина $F \subset L_1$ така, що $\{f \in F: f \perp 1\} \neq \emptyset$. Для $r = 1,2,\ldots$ позначимо через W^rF клас функцій $f \in L_1$, у яких $(r-1)$–а похідна $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} = f)$ локально абсолютно неперервна і $f^{(r)} \in F$. Відзначимо, що, якщо F – одинична куля простору L_p, то множина $W^rF = W_p^r$ – це стандартний соболєвський клас функцій, у яких $(r-1)$–а похідна локально абсолютно неперервна і $\left\|f^{(r)}\right\|_p \le 1$.

Для невід'ємної функції $f \in L_1$ позначимо через $r(f,t)$ неспадну перестановку звуження функції f на проміжок $[0,2\pi]$. Якщо g – довільна функція із L_1, то покладемо

$$\Pi(g,t) := r(g_+,t) - r(g_-,2\pi - t),$$

де $g_\pm := \max\{\pm g(t),0\}$.

Множину $F \in L_1$ назвемо Π – інваріантною, якщо із $f \in F$ і $\Pi(g,\cdot) = \Pi(f,\cdot)$, випливає, що $g \in F$.

Нехай C^r $(r = 0, 1, \ldots, \ C^0 := C)$ – простір r разів неперервно диференційовних (неперервних для $r = 0$) 2π–періодичних функцій, $\omega\,(t)$ – довільний фіксований модуль неперервності. Клас функцій $f \in C^r$, у яких при всіх t

$$\left|f^{(r)}\,(t) - f^{(r)}\,(t+\delta)\right| \le \omega\,(\delta), \qquad \delta \ge 0,$$

будемо позначати через $W^r H^\omega$.

Найкращим наближенням класу $M \subset L_p$ множиною H із L_p у метриці L_p називається величина

$$E(M,H)_p = \sup_{f\in M} \inf_{h\in H} \|f-h\|_p .$$

Величини

$$d_n\big(M,L_p\big) = \inf_{H_n} E(M,H)_p, \tag{1}$$

де точна нижня межа береться по всіх підпросторах H_n простору L_p, розмірність яких не перевищує n, називаються поперечниками Колмогорова класу M у просторі L_p.

Підпростори H_n, які реалізують точну нижню межу у правій частині (1), називаються екстремальними підпросторами.

Для кожного натурального n і $m = 0,1,\ldots$ через T_{2n-1} позначимо простір тригонометричних поліномів порядку не вище $n-1$, а через $S^1_{2n,m}$ – простір 2π–періодичних поліноміальних сплайнів порядку m дефекту 1 з вузлами у точках $j\pi/n$, $j \in Z$.

Нехай $\varphi_{n,m}(t)$ $(n,m \in N)$ – m–й $\frac{2\pi}{n}$–періодичний інтеграл з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_{n,0}(t) = \operatorname{sign}\sin n\,t$.

При фіксованих $\omega\,(\cdot)$ і $n \in N$ покладемо

$$f_{n,0}(\omega;\ t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\,\omega\left(\dfrac{\pi}{n} - 2t\right), & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2n}, \\ \dfrac{1}{2}\,\omega\left(2t - \dfrac{\pi}{n}\right), & \dfrac{\pi}{2n} \le t \le \dfrac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Через $f_{n,r}(\omega;\ t)$ $(r = 1,2,\ldots)$ позначимо r–й $\frac{2\pi}{n}$–періодичний інтеграл від $f_{n,0}(\omega;\ t)$ з нульовим середнім значенням на періоді.

Добре відомо, що для всіх $n,r = 1,2,\ldots$, $1 \le p \le \infty$ виконуються рівності

$$E\big(W^r_p, T_{2n-1}\big)_1 = \left\|\varphi_{n,r}\right\|_{p'}; \tag{2}$$

$$E\big(W^r_p, S^1_{2n,m}\big)_1 = \left\|\varphi_{n,r}\right\|_{p'} \quad m = r-1, r, \ldots; \tag{3}$$

$$d_{2n-1}\big(W^r_p, L_1\big) = d_{2n}\big(W^r_p, L_1\big) = \left\|\varphi_{n,r}\right\|_{p'}. \tag{4}$$

Простори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}\big(W^r_p, L_1\big)$ і $d_{2n}(W^r_p, L_1)$, а простори $S^1_{2n,m}$, при всіх $m \ge r-1$ – для поперечників $d_{2n}(W^r_p, L_1)$.

Рівність (2) для $p = 1$ отримана С. М. Нікольским (1946), для $p > 1$ її встановив Л. В. Тайков (1967), для $p=\infty$ незалежно та іншим методом цей результат одержала С. П. Туровець (1968). Співвідношення (3) доведене А. О. Лігуном (1976). Оцінку знизу для непарних поперечників при $p=1$ отримали незалежно Ю. І. Маковоз (1969) і Ю. М. Субботін (1970), а при $p=\infty$ — Ю. І. Маковоз (1972). Оцінка знизу для парних поперечників при $p=1,\infty$ належить В. І. Рубану. Для $1<p<\infty$ співвідношення (4) незалежно і різними методами отримали А. О. Лігун (1980), Ю. І. Маковоз (1979), А. Пінкус (1979).

В. Ф. Бабенко (1983) встановив, що для довільної П–інваріантної множини F і будь-яких $n,r=1,2,\ldots,\ m\geq r$ виконуються такі рівності

$$E(W^rF,T_{2n-1})_1=E\left(W^rF,S^1_{2n,m}\right)_1=\sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt$$

і

$$d_{2n-1}(W^rF,L_1)=d_{2n}(W^rF,L_1)=\sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(f,t)\Pi\left(\varphi_{n,r},t\right)dt. \qquad (5)$$

Простори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W^rF,L_1)$ і $d_{2n}(W^rF,L_1)$, а простори $S^1_{2n,m}$ при всіх $m\geq r$ — для поперечників $d_{2n}(W^rF,L_1)$.

М. П. Корнєйчук (1970, 1976) довів, що для будь-якого опуклого вгору модуля неперервності $\omega\,(t)$, при всіх $n=1,2,\ldots,\ r=0,1,\ldots,\ m\geq r$ виконується співвідношення

$$E(W^rH^\omega,T_{2n-1})_1=E\left(W^rH^\omega,S^1_{2n,m}\right)_1=\left\|f_{n,r}(\omega;\cdot)\right\|_1. \qquad (6)$$

Відомо також, що

$$d_{2n-1}(W^rH^\omega,L_1)=d_{2n}(W^rH^\omega,L_1)=\left\|f_{n,r}(\omega;\cdot)\right\|_1, \qquad (7)$$

причому поперечники $d_{2n-1}(W^rH^\omega,L_1)$ і $d_{2n}(W^rH^\omega,L_1)$ реалізують підпростори T_{2n-1}, а поперечники $d_{2n}(W^rH^\omega,L_1)$ – підпростори $S^1_{2n,m}$, $m\geq r$. Оцінки знизу для непарних поперечників (7) отримані В. П. Моторним і В. І. Рубаном (1975), а для парних — В. І. Рубаном (1980).

У *підрозділі 1.2* розглядаються наближення класів W^rF і W^rH^ω підпросторами $S^2_{2n,m}$, $n,m\in N$, поліноміальних сплайнів порядку m дефекту 2 з вузлами у точках $t_j=\frac{2j\pi}{n}$, $j\in Z$. Відзначимо, що розмірність цих підпросторів для довільного m дорівнює $2n$. Основними результатами цього підрозділу є такі теореми:

Теорема 1.2.2. *Нехай* $n,r=1,2,\ldots,\ m=r,r+1,\ldots\ 1\leq p\leq\infty$, F *– довільна П–інваріантна множина* 2π*–періодичних функцій. Тоді*

$$E\left(W^rF,S^2_{2n,m}\right)_1=\mathop{sup}_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt\,.$$

Зокрема,

$$E\left(W^r_p,S^2_{2n,m}\right)_1=\left\|\varphi_{n,r}\right\|_{p'}.$$

Теорема 1.2.3. *Нехай* $n, r = 1,2,\ldots,$ $m = r+1, r+2,\ldots$ $\omega(t)$ *– опуклий вгору модуль неперервності, тоді*

$$E\left(W^r H^\omega, S^2_{2n,m}\right)_1 = \left\|f_{n,r}(\omega,\cdot)\right\|_1.$$

Результати теорем 1.2.2 і 1.2.3 разом зі співвідношеннями (5) і (7) показують, що $S^2_{2n,m}$, як T_{2n-1} і $S^1_{2n,m}$, є екстремальними підпросторами для поперечників $d_{2n}(W^r F, L_1)$ (при $m \geq r$) і $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ (при $m \geq r+1$).

У *підрозділі 1.3* ми показуємо, що, крім названих вище, існують інші підпростори, екстремальні для поперечників $d_{2n}(W^r F, L_1)$ і $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$. Для цього ми розглядаємо наближення класів $W^r F$ і $W^r H^\omega$ підпросторами $S^1_{2n,m}(h)$, $n, m \in N$, $h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$, поліноміальних сплайнів порядку m дефекту 1 з вузлами у точках

$$t_j = \frac{2\pi\left[\frac{j}{2}\right]}{n} + \left(1-(-1)^j\right)\frac{h}{2}, \qquad j \in Z,$$

де $[\cdot]$ – ціла частина числа. Відзначимо, що розмірність цих підпросторів при будь-якому m дорівнює $2n$.

Основними результатами цього підрозділу є такі теореми:

Теорема 1.3.2. *Нехай* $n, m, r \in N$, $m \geq r+1$, $0 < h < \frac{2\pi}{n}$, $1 \leq p \leq \infty$, F *– довільна П–інваріантна множина* 2π*–періодичних функцій. Тоді*

$$E\left(W^r F, S^1_{2n,m}(h)\right)_1 = \sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt\,.$$

Зокрема,

$$E\left(W^r_p, S^1_{2n,m}(h)\right)_1 = \left\|\varphi_{n,r}\right\|_{p'}.$$

При $p = 1$ *останнє співвідношення правильне і для* $m = r$.

Теорема 1.3.3. *Нехай* $n, m, r \in N$, $m \geq r+1$, $0 < h < \frac{2\pi}{n}$, $\omega(t)$ *– опуклий вгору модуль неперервності, тоді*

$$E\left(W^r H^\omega, S^1_{2n,m}(h)\right)_1 = \left\|f_{n,r}(\omega,\cdot)\right\|_1.$$

Результати теорем 1.3.2 і 1.3.3 разом зі співвідношеннями (5) і (7) показують, що $S^1_{2n,m}(h)$ є екстремальними підпросторами для поперечників $d_{2n}(W^r F, L_1)$ і $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ (при $m \geq r+1$) для кожного $h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$.

У *підрозділах 1.4 і 1.5* ми, застосовуючи результати підрозділів 1.2 і 1.3, а також деякі ідеї, використані для їх доведення, одержуємо точні нерівності типу Джексона для сплайнів $S^2_{2n,m}$ і $S^1_{2n,m}(h)$ і точні нерівності типу Бернштейна для сплайнів $S^2_{2n,m}$.

В *другому розділі* продовжуються дослідження щодо найкращих наближень достатньо загальних класів $W^r F$, елементи яких є згортками з ядрами Бернуллі функцій з довільної П–інваріантної множини. Відзначимо, що можна істотно доповнити наявні класи функцій, розглядаючи замість згорток з ядрами Бернуллі згортки з іншими (більш загальними) ядрами.

Згортку $K * \varphi$ функції $K \in L_1$ і $\varphi \in L_1$ означимо рівністю

$$(K * \varphi)(x) = \int_0^{2\pi} K(x-t)\varphi\,(t)\,dt.$$

Для ядра K покладемо

$$M(K) = \{m \in Z: \widehat{K}_m = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} K(t)e^{-imt}\,dt = 0\},$$

і будемо надалі вважати, що $M(K)$ порожня або скінченна множина. Якщо $M \in Z$ – скінченна центрально-симетрична множина, то через $T(M)$ позначимо лінійний простір тригонометричних поліномів вигляду

$$T(x) = \sum_{m \in M} c_m\, e^{imx}\,, \qquad c_{-m} = \bar{c}_m$$

(якщо $M = \emptyset$, то $T(x) \equiv 0$). Якщо $M = \{-(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1\}$, то $T(M) = T_{2n-1}$.

Нехай задане ядро K і множина $F \subset L_1$. Через $K * F$ позначимо клас функцій вигляду

$$f(x) = T(x) + (K * \varphi)(x), \quad T \in T\big(M(K)\big), \quad \varphi \in F, \qquad \varphi \perp T(M(K)).$$

Для ядра K покладемо $\mu = \mu(K) = 0$, якщо $0 \notin M(K)$, і $\mu = \mu(K) = 1$, якщо $0 \in M(K)$.

Неперервне на $(0,2\pi)$ і таке, що не є тригонометричним поліномом ядро K, будемо називати CVD–ядром (і писати $K \in CVD$), якщо $\nu\,(a\mu + K * \varphi) \leq \nu\,(\varphi)$ $\forall \varphi \in C,\ \varphi \perp \mu,\ a \in R$ ($\nu(g)$ – число змін знаку на періоді у 2π-періодичної функції g).

Нехай $\Delta \in (0,2\pi]$. Якщо для будь-яких $\varphi \in C$, $\varphi \perp T(M)$ і $T \in T(M)$ таких, що $T + K * \varphi$ має нулі у кожному інтервалі довжини Δ, справедлива нерівність $\nu\,(T + K * \varphi) \leq \nu\,(\varphi)$, то ядро K будемо називати $CVD[\Delta]$–ядром і писати $K \in CVD[\Delta]$. Зауважимо, що, якщо $K \in CVD$, то $K \in CVD[\Delta]$ для будь-якого $\Delta \in (0,2\pi]$.

У другому розділі вивчаються найкращі наближення класів згорток з такими ядрами функцій з довільної П–інваріантної множини, причому разом із симетричними наближеннями розглядаються також і несиметричні. Наведемо необхідні означення.

Для $f \in L_p$ і чисел $\alpha, \beta \geq 0$ покладемо

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p.$$

Для $\alpha, \beta > 0$ задача найкращого (α,β)–наближення класу функцій $M \subset L_p$ множиною $H \subset L_p$ полягає в тому, щоб знайти величину

$$E(M,H)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f \in M}\ \inf_{h \in H} \|f-h\|_{p;\alpha,\beta}\,. \tag{8}$$

Нехай $H \subset L_p$. – деяка фіксована множина. Функції $f \in L_p$ поставимо у відповідність підмножини:

$$H_f^+ = \{u(t): u \in H, u(t) \leq f(t), 0 \leq t \leq 2\pi\},$$
$$H_f^- = \{u(t): u \in H, u(t) \geq f(t), 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Величини

$$E^{\pm}(f,H)_p := \begin{cases} \inf\{\|f-u\|_p : u \in H_f^{\pm}\}, & H_f^{\pm} \neq \emptyset, \\ \infty, & H_f^{\pm} = \emptyset \end{cases}$$

і

$$E^{\pm}(M,H)_p := \sup_{f \in M} E^{\pm}(f,H)_p$$

називаються найкращим наближенням знизу $(+)$ і зверху $(-)$ функції $f \in L_p$ і класу $M \subset L_p$ відповідно.

Поклавши у формулі (8) $\alpha = \beta = 1$, отримаємо звичайні найкращі L_p–наближення класу M, а спрямовуючи α або β до $+\infty$ — найкраще наближення зверху або знизу класу M. Отже, сім'я задач найкращого (α,β)–наближення "інтерполює" задачі найкращого і найкращого одностороннього наближень та дозволяє розглядати їх із загальної точки зору. У зв'язку з цією властивістю нижче будемо припускати для α або β значення $+\infty$, тобто будемо ототожнювати у цих випадках найкращі (α,β)–наближення з найкращими односторонніми наближеннями. Відзначимо, що дослідження задач найкращого (α,β)–наближення при $\alpha,\beta < \infty$ має, звичайно, і самостійний інтерес.

Нехай $\varphi_{\lambda,m}(\alpha,\beta;\,t)$ $(\alpha,\beta > 0,\ \lambda > 0,\ m \in N)$ — $2\pi/\lambda$–періодичний інтеграл порядку m з нульовим середнім значенням на періоді від парної $2\pi/\lambda$–періодичної функції $\varphi_{\lambda,0}(\alpha,\beta;t)$, яка для $t \in \left[0,\frac{\pi}{\lambda}\right)$ визначається в такий спосіб

$$\varphi_{\lambda,0}(\alpha,\beta;t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \le t \le \dfrac{\pi\beta}{\lambda(\alpha+\beta)}, \\ -\beta, & \dfrac{\pi\beta}{\lambda(\alpha+\beta)} < t \le \dfrac{\pi}{\lambda}. \end{cases}$$

Для $\alpha = \beta = 1$ замість $\varphi_{\lambda,m}(\alpha,\beta;\,t)$ будемо писати $\varphi_{\lambda,m}(t)$.

У випадку $\max\{\alpha,\beta\} = \infty$ покладемо

$$\left(K * \varphi_{n,0}(1,\infty;\cdot)\right)(x) = \int_0^{2\pi} K(t)\,dt - \frac{2\pi}{n}\sum_{m=0}^{n-1} K\left(x - \frac{2m\pi}{n}\right).$$

Зрозуміло, що при $\beta \to \infty$ отримаємо

$$\left\|K * \varphi_{n,0}(1,\beta;\cdot)_{\pm}\right\|_{\infty} \to \left\|K * \varphi_{n,0}(1,\infty;\cdot)_{\pm}\right\|_{\infty}.$$

Загальну теорію найкращих наближень тригонометричними поліномами класів $K * W_{\infty}^{0}$ і $K * W_{1}^{0}$ у метриках C і L_1 відповідно побудував С. М. Нікольський (1946). Для важливих сукупностей ядер найкращі наближення класів $K * W_{\infty}^{0}$ і $K * W_{1}^{0}$ у метриках C і L_1 були знайдені В. К. Дзядиком (1953–1974), С. Б. Стєчкіним (1956), Сунь Юншеном (1959, 1961), К. І. Бабенком (1958, 1970). Задача обчислення поперечників класів згорток з CVD-ядрами і класів, що задаються за допомогою диференціальних операторів зі сталими коефіцієнтами, розглядалась у роботах А. Пінкуса (1985), В. Т. Шевалдіна (1982, 1983).

Найбільш загальні результати у цьому напрямі полягають у наступному.

Нехай $n = 1,2,\ldots, r = 0,1,\ldots, \Delta \in (0,2\pi]$, $\alpha,\beta \in (0,\infty]$, K є $CVD[\Delta]$–ядром, F – перестановочно-інваріантною підмножиною в L_1 і H є T_{2n-1} або $K * S^1_{2n,r}$. Тоді якщо $n \geq \frac{2\pi}{\Delta}$ настільки велике, що $H \supset T(M(K))$, то

$$E(K * F, H)_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\substack{\varphi\in F\\ \varphi\perp\mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi,t)\Pi\big(K(-\,\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot);t\big)\,dt. \qquad (9)$$

Зокрема, якщо $K \in CVD$, то рівність (9) правильна при всіх n. Результат (9) отримав В. Ф. Бабенко (1987).

Для $K \in CVD$ справедлива також рівність

$$d_{2n-1}(K * F, L_1) = d_{2n}(K * F, L_1) = \sup_{\substack{\varphi\in F\\ \varphi\perp\mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi,t)\Pi(K(-\,\cdot) * \varphi_{n,0},t)\,dt. \qquad (10)$$

При цьому підпростори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(K * F, L_1)$ і $d_{2n}(K * F, L_1)$, а підпростори $K * S^1_{2n,r}$ $(r = 0,1,\ldots)$ – для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

У випадку $F = W^0_p$ результат (10) належить А. Пінкусу (1985), а у випадку довільної П–інваріантної множини F – В. Ф. Бабенку (1987).

У *підрозділі 2.2* знайдено точні значення найкращих наближень класів згорток $K * F$ ($K \in CVD$, F – довільна П–інваріантна множина) підпросторами $K * S^2_{2n,r}$, а у *підрозділі 2.3* – точні значення найкращих несиметричних наближень класів згорток $K * F$ ($K \in CVD[\Delta]$, F – довільна П–інваріантна множина) підпросторами $K * S^1_{2n,r}(h)$ $\left(0 < h < \frac{2\pi}{n}\right)$.

Основним результатом підрозділу 2.2 є

Теорема 2.2.1. *Нехай $n,k \in N$, $K \in CVD$, F – П–інваріантна підмножина в L_1. Тоді для будь-якого $n \in N$ виконується рівність*

$$E\big(K * F, K * S^2_{2n,k}\big)_1 = \sup_{\substack{\varphi\in F\\ \varphi\perp\mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi,t)\Pi(K(-\,\cdot) * \varphi_{n,0},t)\,dt.$$

Результат теореми 2.2.1 разом з рівністю (10) показують, що підпростори $K * S^2_{2n,k}$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

Основний результат підрозділу 2.3 складає

Теорема 2.3.1. *Нехай $n,r \in N$, $h \in (0,2\pi/n)$, $\Delta \in (0,2\pi]$, $\alpha,\beta \in (0;\infty]$, $K \in CVD[\Delta]$, F – П–інваріантна підмножина в L_1. Тоді якщо $n \geq 2\pi/\Delta$ настільки велике, що $K * S^1_{2n,r}(h) \supset T(M(K))$, то*

$$E\left(K * F;\ K * S^1_{2n,r}(h)\right)_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\substack{\varphi\in F\\ \varphi\perp\mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi,t)\Pi\big(K(-\,\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot);t\big)\,dt\,.$$

Зокрема, якщо $K \in CVD$, то рівність правильна для всіх n.

Співставляючи рівність (10) і результат теореми 2.3.1 при $K \in CVD$, $\alpha = \beta = 1$, бачимо, що підпростори $K * S^1_{2n,r}(h)$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено вивченню поведінки відносних поперечників та найкращих наближень функціональних класів за наявності обмежень на похідні наближаючих функцій.

Нехай H – множина в L_p, $M, M' \subset L_p$ – деякі класи функцій. Для $M \subset L_p$ величину

$$E\,(M, H \cap M')_p := \sup_{f \in M} E(f, H \cap M')_p$$

називають найкращим відносним (відносно класу M') наближенням класу M множиною H у просторі L_p.

Величини

$$d_n\,(M, L_p, M') := \inf_{H_n} E(M, H_n \cap M')_p\,,$$

де точна нижня межа береться по всіх підпросторах простору L_p, розмірність яких не перевищує n, були введені до розгляду В. М. Коноваловим (1984) і називаються відносними поперечниками (або поперечниками за Коноваловим).

Як і для поперечників за Колмогоровим, підпростори, що реалізують інфімум у правій частині останньої рівності, називаються екстремальними підпросторами для відносних поперечників, а послідовність підпросторів $\{H_n\}$, для якої

$$d_n\left(M, L_p, M'\right) \asymp E(M, H_n \cap M')_p, \qquad n \to \infty,$$

називається екстремальною за порядком.

Добре відомо, що для всіх $r \in N$ і $1 \le p \le \infty$

$$d_n\left(W_p^r, L_p\right) \asymp n^{-r},\ n \to \infty. \tag{11}$$

Крім того, для будь-якого $r \in N$

$$d_n(W_2^r, L_2, W_2^r) = d_n(W_2^r, L_2) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty.$$

Проте, порядкова поведінка відносних поперечників $d_n(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r)$ і $d_n(W_1^r, L_1, W_1^r)$ при $n \to \infty$ істотно відрізняється від поведінки колмогоровських поперечників (11).

В. М. Коноваловим (1984) було доведено, що для всіх $r = 2,3, \ldots$

$$d_n(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r) \asymp n^{-2},\ n \to \infty. \tag{12}$$

Пізніше В. Ф. Бабенко (1989) встановив, що для $r = 3,4 \ldots$

$$d_n(W_1^r, L_1, W_1^r) \asymp n^{-2},\ n \to \infty. \tag{13}$$

Така різниця в поведінці відносних та колмогоровських поперечників викликала інтерес до дослідження поведінки при $n \to \infty$ величин $d_n(W_p^r, L_q, W_s^r)$ для різних значень $1 \le p, q, s \le \infty$. При цьому питання про поведінку величин $d_n(W_p^r, L_p, W_p^r)$ для $p \ne 1,2, \infty$ залишається відкритим.

Відзначимо, що для $p = 1$ і $p = \infty$ разом з підпросторами тригонометричних поліномів порядку не вище $n - 1$, які є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W_p^r, L_p)$ і $d_{2n}(W_p^r, L_p)$, екстремальними для поперечників $d_{2n}(W_p^r, L_p)$ є також підпростори сплайнів $S_{2\mathrm{n,m}}^1$, $m \ge r - 1$.

Із результатів В. Ф. Бабенка (1989–1994) відомо також, що підпростори $S_{2n,r}^1$ є екстремальними за порядком у співвідношеннях (12) і (13). Крім того, як випливає із результата Ю. М. Субботіна (1980), підпростори $S^1_{2n,2r-1}$ реалізують поперечники $d_{2n}(W^r_2, L_2, W^r_2)$.

Наявність таких гарних апроксимативних властивостей у просторів $S^1_{2n,m}$ наводить на думку про застосування їх до розв'язання задач про поведінку поперечників $d_n(W^r_p, L_p, W^r_p)$ і при $p \neq 1, \infty$, а також до інших задач відносної апроксимації.

Питанням порядкової поведінки найкращих відносних наближень класів Соболєва підросторами сплайнів мінімального дефекту присвячено *підрозділ 3.2*. Тут ми вивчаємо порядкову поведінку при $n \to \infty$ послідовності величин $E\left(W^r_p, S^1_{2n,r} \cap W^r_p\right)_q$ для $1 \leq q \leq p \leq 2$, $p \neq 1$, і показуємо, що насправді послідовність підпросторів $\{S^1_{2n,r}\}$ не є екстремальною за порядком принаймні для поперечників $d_n(W^r_2, L_2, W^r_2)$ при $r \geq 3$. Основний результат цього підрозділу складає

Теорема 3.2.1. *Для всіх* $r = 3,4,\ldots$ *і* $1 \leq q \leq p \leq 2$ *виконуються порядкові рівності*

$$E\left(W^r_p, S^1_{2n,r} \cap W^r_p\right)_q \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty.$$

Деякі питання щодо точних і асимптотично точних значень найкращих відносних наближень соболєвських класів сплайнами обговорюються у *підрозділі 3.3*.

У *четвертому підрозділі* третього розділу наводиться означення слабкого поперечника за Колмогоровим, який є аналогом звичайного колмогоровського поперечника у просторі функцій, що мають значення в довільному банаховому просторі. Такі поперечники введені до розгляду В. Ф. Бабенком і С. О. Пічуговим. Нами досліджено порядкову поведінку при $n \to \infty$ (для випадку L_∞–наближень) послідовності відносних слабких поперечників класів згорток банаховозначних функцій з дійсним ядром.

Четвертий і п'ятий розділи дисертаційної роботи присвячено дослідженню нерівностей типу Колмогорова з непокращуваними константами для норм дробових похідних та інтегралів функцій однієї та багатьох змінних.

Нехай $G \in \{R, R_+, R_-, T, R^m\}$, де R – множина дійсних чисел, R_+ – множина додатних чисел, R_- – множина від'ємних чисел, T – відрізок $[0,2\pi]$ з ототожненими кінцями, R^m $(m \in N)$ – евклідів простір точок $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $|x| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$.

Через $C(G)$ позначимо простір неперервних на G функцій, а через $L_p(G)$, $1 \leq p \leq \infty$, – простір вимірних на G функцій $f: G \to R$ зі стандартними нормами.

У *розділі 4* досліджуються нерівності типу Колмогорова для функцій однієї змінної. Нехай $k, r \in N$, $k < r$, $\lambda \in (0,1)$, $1 \leq q, p, s \leq \infty$, $G \in \{R, R_+, R_-, T\}$. Через $L^r_{p,s}(G)$ позначимо клас функцій $f \in L_p$, таких що $f^{(r)} \in L_s(G)$.

Нерівність

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{L_q(G)} \leq K\|f\|_{L_p(G)}^{1-\lambda}\left\|f^{(r)}\right\|_{L_s(G)}^{\lambda}, \qquad f \in L_{p,s}^r(G),$$

з константою $K = K_{k,r}(q,p,s;G;\lambda)$, не залежною від f, називають мультиплікативною нерівністю типу Колмогорова.

Перші точні результати щодо нерівностей такого типу належать Е. Ландау, Ж. Адамару, Г. Г. Гарді, Дж. І. Літлвуду, Г. Поліа. Після фундаментальної роботи А. М. Колмогорова важливі результати у цьому напрямі отримані І. М. Стейном, Л. В. Тайковим, А. П. Маторіним, І. Дж. Шонбергом, А. Каваретта, Ю. І. Любічем, А. М. Купцовим, В. М. Габушиним, В. В. Арестовим, А. О. Лігуном, В. Ф. Бабенком, С. О. Пічуговим, В. О. Кофановим та багатьма іншими математиками.

Точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних дробового порядку одержано значно менше. Відомі у цьому напрямі нерівності складають результати досліджень С. П. Гейсберга, В. В. Арестова, В. М. Тихомирова, А. П. Буслаєва, Г. Г. Магаріл-Ільяєва, В. Ф. Бабенка, С. О. Пічугова, М. С. Чурілової та ін.

Введемо до розгляду дробову похідну за Маршо порядку $\alpha > 0$, що для функції $f\colon R \to R$ і $x \in R$ означається в такий спосіб:

$$D_{\pm}^{\alpha} f\,(x) = \frac{1}{\varkappa(\alpha,n)} \int_0^{+\infty} \frac{\left(\Delta_{\pm t}^n f\right)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \qquad n \in N, \qquad n > \alpha,$$

де

$$\left(\Delta_{\pm t}^n f\right)(x) := \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m f(x \mp mt)\ ,$$

$$\varkappa(\alpha,n) := \Gamma\,(-\alpha) \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m\, m^{\alpha},$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера.

Зазначимо, що в означенні дробової похідної Маршо довільного порядку $\alpha > 0$ нормуючий коефіцієнт побудовано таким чином, щоб значення похідної не залежало від порядку n скінченної різниці $\Delta_{\pm t}^n$.

Через $\bigvee(R)$ позначимо простір функцій $f \in L_1(R)$ з обмеженою на R варіацією.

У *підрозділі 4.2* одержані нові точні нерівності для дробових похідних за Маршо функцій $f \in L_{p,s}^r(R)$ у випадку $p = q = \infty$, $1 \leq s < \infty$, $\alpha \in (0,1)$, $r = 2$ та $p = q = \infty$, $1 < s \leq \infty$, $\alpha \in (1, 2 - \frac{1}{s})$, $r = 2$.

Для кожного $x \in R$ і $f \in L_1(R)$ позначимо через $f^{[m]}$ $(m \in N)$ — m–й інтеграл від функції f вигляду

$$f^{[m]} := \frac{1}{(m-1)!} \int_R (x-t)_+^{m-1} f(t)\, dt, \qquad x \in R.$$

Для $\tau > 0$ означимо функцію $\mathcal{R}_{\tau} : R \to R$ у такий спосіб:

$$\mathcal{R}_\tau(x) = \begin{cases} \frac{x^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Нехай $\alpha \in (0,1)$, $1 \le s \le \infty$ і $s' = s/(s-1)$. Для $p \in [0, \alpha/(1-\alpha)]$, розглянемо функцію

$$\omega(p;x) = \begin{cases} 0, & x \le -p, \\ -\frac{1}{1+p}, & x \in (-p,1), \\ (1-\alpha)x^{-\alpha} & x \ge 1. \end{cases}$$

Для $x \in R$ розглянемо функцію $\tau(p;x) := \Gamma(2-\alpha)\mathcal{R}_{2-\alpha}(x) - \omega^{[1]}(p;x)$ і означимо для $s > 1$

$$\phi_s(p;x) := \frac{1}{2}\int_{-p}^{1} t \cdot \tau_{(s')}(p;t)\,dt + \int_{-p}^{x} (x-t)\cdot \tau_{(s')}(p;t)\,dt,$$

а для $s = 1$

$$\phi_1(p;x) := \begin{cases} \frac{1+p}{4}, & x \le -p, \\ \frac{1+p-2x}{4}, & x \in (-p,1), \\ -\frac{1+p}{4}, & x \ge 1. \end{cases}$$

Тут використовується позначення $g_{(s')} := |g|^{s'-1}\operatorname{sign} g$.

Теорема 4.2.3. *Нехай* $1 \le s \le \infty$, $s' = s/(s-1)$, $\alpha \in (0,1)$ *і* $h > 0$. *Тоді для кожної функції* $f \in L^2_{\infty,s}(R)$ *виконується точна нерівність*

$$\|D_-^\alpha f\|_{L_\infty(R)} \le \frac{\left\|D_-^\alpha \Phi_{\alpha,s}\right\|_{L_\infty(R)}}{\left\|\Phi_{\alpha,s}\right\|_{L_\infty(R)}} \|f\|_{L_\infty(R)}^{1-\lambda}\|f''\|_{L_s(R)}^{\lambda}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2-1/s},$$

де $\Phi_{\alpha,s} := \left\|\phi_s''(p_{\alpha,s};\cdot)\right\|_{L_s(R)}^{-1} \cdot \phi_s(p_{\alpha,s};\cdot)$, $s > 1$, *і* $\Phi_{\alpha,1} := \phi_1(p_{\alpha,1};\cdot)$, *а числа* $p_{\alpha,s}$ *визначаються однозначно для кожного* $\alpha \in (0,1)$ *і* $1 \le s \le \infty$.

Крім того, якщо $s > 1$, *то функція* $\Phi_{\alpha,s}(x/h)$, $x \in R$, *перетворює нерівність на рівність.*

Нехай $1 < s \le \infty$, $s' = s/(s-1)$ і $\alpha \in (1, 2-1/s)$. Розглянемо множину $S := \{(a,b) \in (0,1)^2 : a \le b\} \times [0,+\infty)$. Для кожного $(a,b,p) \in S$, означимо

$$\omega(a,b,p;x) = \begin{cases} 0, & x \le -p, \\ \frac{1-b+(1-b^{1-\alpha})(a-1)}{(1-b)(a+p)}, & x \in (-p,a], \\ \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-b}, & x \in (a,1), \\ (1-\alpha)x^{-\alpha}, & x \ge 1. \end{cases}$$

Для $x \in R$, розглянемо функцію $\tau(a,b,p;x) := \Gamma(2-\alpha)\mathcal{R}_{2-\alpha}(x) - \omega^{[1]}(a,b,p;x)$ і

$$\phi(a,b,p;x) := \frac{1}{2}\int_{-p}^{a} t\cdot\tau_{(s')}(a,b,p;t)\,dt \;+\; \int_{-p}^{x}(x-t)\cdot\tau_{(s')}(a,b,p;t)\,dt.$$

Нехай $\Phi_{\alpha,s} := \left\|\varphi''\left(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s};\cdot\right)\right\|_{L_s(R)}^{-1}\cdot\varphi\left(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s};\cdot\right)$, де трійки $(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s})$ визначені для кожного $1 < s \le \infty$ і $\alpha \in \left(1, 2-\frac{1}{s}\right)$.

Теорема 4.2.4. *Нехай* $1 < s \le \infty$, $s' = s/(s-1)$, $\alpha \in (1{,}2 - 1/s)$ *і* $h > 0$. *Тоді для кожної функції* $f \in L^2_{\infty,s}(R)$ *виконується точна нерівність*

$$\|D_-^{\alpha} f\|_{L_\infty(R)} \le \frac{\left\|D_-^{\alpha}\Phi_{\alpha,s}\right\|_{L_\infty(R)}}{\left\|\Phi_{\alpha,s}\right\|_{L_\infty(R)}^{1-\lambda}}\|f\|_{L_\infty(R)}^{1-\lambda}\|f''\|_{L_s(R)}^{\lambda}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2-1/s}.$$

При цьому функція $\Phi_{\alpha,s}(x/h)$, $x \in R$, *перетворює нерівність на рівність.*

У підрозділі 4.3 одержано точні нерівності для норм дробових похідних за Адамаром функцій, визначених на дійсній півосі, які у випадку $1 \le s \le \infty$ оцінюють L_∞–норми похідних порядку $0 < \alpha < 1$, а у випадку $1 < s \le \infty$ – порядку $1 < \alpha < 2 - \frac{1}{s}$ через L_∞–норму самої функції і L_s–норму оператора $\mathfrak{D}^2$ ($\mathfrak{D} = x\cdot\frac{d}{dx}$). Крім того, для похідних за Адамаром порядку $0 < \alpha < 1$ одержано деякі точні поточкові оцінки через L_∞–норму самої функції і L_∞–норму її другої похідної або оператора $\mathfrak{D}$, а також нерівності, що оцінюють L_p–норми похідних за Адамаром через L_p–норму та гельдорову норму самої функції.

У підрозділі 4.4 встановлено точні нерівності, що оцінюють норми узагальнених потенціалів Феллера першої похідної заданої на дійсній осі функції через L_∞–норму цієї функції і L_s–норму її першої похідної.

У *п'ятому розділі* продовжено дослідження нерівностей Колмогорова і зосереджено увагу на таких нерівностях для функцій багатьох змінних, а також на питаннях застосування цих нерівностей до розв'язання деяких споріднених задач, таких як: задача наближення необмеженого оператора дробового диференціювання обмеженими на різних класах функцій, задача відновлення оператора на класах функцій, заданих із похибкою, задача Колмогорова.

У *підрозділі 5.2* досліджуються точні нерівності типу Колмогорова для норм мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів, а також деякі застосування цих нерівностей.

Нехай $\{e_i\}_{i=1}^m$ – стандартний базис в R^m. Для заданого вектора $t = (t_1, \ldots, t_m) \in R^m$ через $\Delta_{t_j e_j} f(u)$ позначимо першу різницю функції $f(u)$ за змінною u_j з кроком t_j, $j = 1, \ldots, m$:

$$\Delta_{t_j e_j} f(u) := f(u) - f(u + t_j e_j),$$

і позначимо через

$$\Delta_t f(u) := \Delta_{t_1 e_1}\Delta_{t_2 e_2}\ldots\Delta_{t_m e_m} f(u)$$

мішану різницю функції $f(u)$ з кроком t.

Нехай $\omega_j(t_j)$, $t_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, m$ – деякі модулі неперервності.

Розглянемо такі простори:

$$H^{j,\omega_j} := H^{j,\omega_j}(R^m) =$$

$$= \left\{ f \in C(R^m) : \|f\|_{\omega_j} = \|f\|_{H^{j,\omega_j}} = \sup_{t_j \neq 0} \frac{\left\| \Delta_{t_j e_j} f(\cdot) \right\|_{C(R^m)}}{\omega_j\left(|t_j|\right)} < \infty \right\}.$$

Для функції $f(u)$, $u \in R^m$, вектора гладкості $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, \ldots, m$, і вектора розподілу знаків $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \pm$, $j = 1, \ldots, m$, мішана похідна Маршо порядку α означається у такий спосіб:

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(u) := A_\alpha \int_{R_+^m} \Delta_{\varepsilon t} f(u) \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} \, dt,$$

де $f \in C(R^m)$, $A_\alpha = \prod_{j=1}^m A_{\alpha_j}$, $A_{\alpha_j} = \frac{\alpha_j}{\Gamma(1-\alpha_j)}$, $\varepsilon t := (\varepsilon_1 t_1, \ldots, \varepsilon_m t_m)$.

Основним результатом підрозділу 5.2 є

Теорема 5.2.1. *Нехай модулі неперервності* $\omega_1(t_1), \ldots, \omega_m(t_m)$ *і числа* $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, \ldots, m$, *такі, що виконується умова*

$$\int_{R_+^m} \min\{1, \omega_1(t_1), \ldots, \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} \, dt < \infty.$$

Тоді для будь-якої функції $f \in \bigcap_{j=1}^m H^{j,\omega_j}$ *і будь-якого вектора* ε *розподілу знаків правильна така точна нерівність*

$$\|D_\varepsilon^\alpha f\|_C \leq 2^{m-1} A_\alpha \int_{R_+^m} \min\{2\|f\|_C, \|f\|_{\omega_1} \omega_1(t_1) \ldots \|f\|_{\omega_m} \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} \, dt.$$

Дана нерівність є багатовимірним аналогом одновимірної нерівності, отриманої В. Ф. Бабенком і М. С. Чуріловою. Відзначимо, що у випадку $\omega_j(t_j) = t_j^{\beta_j}$, $\beta_j \in (0,1]$, результати теореми 5.2.1 були одержані раніше В. Ф. Бабенком і С. О. Пічуговим.

Підрозділ 5.3 присвячено встановленню нерівностей типу Колмогорова для норм похідних Рісса D^α, $0 < \alpha < 1$, функцій f, градієнти яких належать певним нормованим просторам.

Похідна Рісса порядку α, $0 < \alpha < 1$, функції $f: R^m \to R$ визначається рівністю

$$(D^\alpha f)(x) \coloneqq \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int_{R^m} \frac{f(x) - f(x + t)}{|t|^{m+\alpha}} dt,$$

де

$$d_{m,1}(\alpha) = \frac{\pi^{1+\frac{m}{2}}}{2^\alpha \sin\frac{\alpha\pi}{2} \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$

— нормуючий множник.

Для функції $f \in L_\infty(R^m)$, локально абсолютно неперервної за кожною змінною при майже всіх фіксованих значеннях решти змінних, означені частинні похідні у сенсі Соболєва $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$. Покладемо

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right).$$

Для $1 \le p, s \le \infty$ через $L^{\nabla}_{p,s} = L^{\nabla}_{p,s}(R^m)$ позначимо простір функцій $f \in L_p(R^m)$ таких, що $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L_s(R^m)$ для кожного $i = 1, \dots, m$. Відзначимо, що якщо $f \in L^{\nabla}_{p,s}$, то $|\nabla f| \in L_s\,(R^m)$. Скрізь далі покладемо $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_{L_s(R^m)}$, $1 \le s \le \infty$, а також пишемо $\|\nabla f\|_s$ замість $\||\nabla f|\|_s$.

Дослідження цього підрозділу полягають в оцінці L_∞–норми похідної Рісса D^α функцій багатьох змінних через L_∞–норму самої функції і L_s–норму $(1 \le s \le \infty)$ її градієнта, а також у розв'язанні задачі найкращого наближення оператора D^α на класі $W^{\nabla}_{\infty,s}$ функцій $f \in L^{\nabla}_{p,s}$ таких, що $\|\nabla f\|_s \le 1$, і задачі оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Ці результати складають зміст *пункту 5.3.1*. У *пункті 5.3.2* розглянуто більш загальну ситуацію, коли модулі градієнтів функцій f належать ідеальній структурі. Нарешті, у *пункті 5.3.3* досліджено питання оцінки норми похідної Рісса функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, отримано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^{\nabla}_{p,p}$, $1 \le p \le \infty$.

Наведемо один з результатів цього підрозділу.

Для $s > m$, $0 < \alpha < 1 - m/s$ і $h > 0$ покладемо

$$\psi_h(t) = \psi_{h,s,\alpha}(t) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{|t|} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)\right)^{s'-1} d\gamma - \frac{1}{2}\int_0^{h} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)\right)^{s'-1} d\gamma, & |t| \le h, \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{h} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)\right)^{s'-1} d\gamma, & |\mathrm{t}| > h. \end{cases} \tag{14}$$

Теорема 5.3.4. *Нехай $s > m$ і α такі, що $0 < \alpha < 1 - m/s$. Тоді для довільної функції $f \in L^{\nabla}_{\infty,s}$ виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{\|D^\alpha \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}} \|\nabla\psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

Нерівність перетворюється на рівність для функції ψ_h, $h > 0$ (див. (14)).

Дослідженню нерівностей типу Колмогорова для гіперсингулярних інтегралів присвячено *підрозділ 5.4.* Такі інтеграли дозволяють, зокрема, розглядати з однієї точки зору похідні за напрямом і похідні за Ріссом функцій багатьох змінних. Встановлено точні нерівності, що оцінюють L_∞–норму гіперсингулярних інтегралів з однорідною характеристикою функцій, заданих на R^m, через L_∞–норми самих функцій і вагові L_s–норми їх градієнтів.

У *підрозділі 5.5* досліджуються нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса порядку $0 < \alpha < 2$ функцій, лапласіани яких належать тому чи іншому нормованому простору.

Через $L^\Delta_{p,s} = L^\Delta_{p,s}(R^m)$, $1 \le p, s \le \infty$, позначимо сукупність функцій $f \in L_p(R^m)$ таких, що $\Delta f \in L_s(R^m)$, причому Δf розуміється у сенсі Соболєва. Через $W^\Delta_{p,s} = W^\Delta_{p,s}(R^m)$ позначимо клас функцій f із $L^\Delta_{p,s}$ таких, що $\|\Delta f\|_s \le 1$.

Похідна Рісса порядку α $(0 < \alpha < 2)$ функції $f: R^m \to R$ означається рівністю

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{R^m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}} dt,$$

де

$$d_{\mathrm{m},2}(\alpha) = \frac{2^{1-\alpha}\pi^{1+\frac{m}{2}}}{\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$

— нормуючий множник. Зазначимо, що похідна Рісса D^α реалізує дробовий степінь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

У *пункті 5.5.1* доведено точну нерівність типу Колмогорова для функцій $f \in L^\Delta_{\infty,s}$, $1 \le s \le \infty$, що оцінює норму D^α $(0 < \alpha < 2)$ через $\|f\|_\infty$ і $\|\Delta f\|_s$, а також розв'язано задачу найкращого наближення оператора D^α на класі $W^\Delta_{\infty,s}$ і задачу оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. У *пункті 5.5.2* розглянуто більш загальну ситуацію, коли лапласіани функцій f належать ідеальній структурі. У *пункті 5.5.3* встановлено оцінки норм функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, одержано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^\Delta_{p,p}$.

Ці результати тісно пов'язані з результатами В. Г. Тимофєєва щодо оцінки рівномірної норми частинної похідної першого порядку через рівномірну норму функції та рівномірну норму її лапласіана. Зауважимо, що результат В. Г. Тимофєєва є багатовимірним аналогом відомої нерівності Ландау.

У *підрозділі 5.6* продовжено дослідження, пов'язані з нерівністю В. Г. Тимофєєва, які розпочато у підрозділі 5.5, але в іншому напрямі, а саме, встановлено точну нерівність типу Колмогорова для рівномірних норм одновимірних потенціалів Рісса функцій багатьох змінних з лапласіаном із простору $L_s(R^m)$, $1 \le s \le \infty$.

Через $CL^\Delta_\infty = CL^\Delta_\infty(R^m)$ позначимо клас функцій $u \in C(R^m)$, для яких значення оператора Лапласа Δu належить $L_\infty(R^m)$. У випадку $m = 1$ під Δu розуміємо u'', при цьому u'' і Δu розуміються у сенсі Соболєва.

Нехай $u: R^m \to R$, $i = 1,2,\ldots,m$ і $\alpha \in (0,1)$. Одновимірним потенціалом Рісса порядку α частинної похідної $\partial u/\partial x_i$ функції u назвемо

$$(I^{\alpha}_{x_i} u'_{x_i})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'_{x_i}(x - te_i)}{|t|^{1-\alpha}} dt,$$

де e_i – i-й орт простору R^m.

Для $h > 0$ і $i = 1, \dots, m$ означимо функцію $v_{h,i}$ у такий спосіб

$$v_{h,i}(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{h^2}(h - x_i) + \frac{x_i}{h}, & x_i \in [0, h], \\ \frac{x_i}{h^2}(h + x_i) + \frac{x_i}{h}, & x_i \in [-h, 0], \\ \operatorname{sign} x_i, & x_i \notin [-h, h], \end{cases}$$

У випадку $m = 1$ замість $v_{h,i}$ будемо писати v_h, а замість x_i будемо писати x.

Основним результатом даного підрозділу є

Теорема 5.6.1. *Нехай* $0 < \alpha < 1$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in CL^{\Delta}_{\infty}$ *при кожному* $h > 0$ *та* $i = 1, \dots, m$, *мають місце точні нерівності*

$$\left\| I^{\alpha}_{x_i} u'_{x_i} \right\|_C \le \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{2}{h^{1-\alpha}} \|u\|_C + \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} h^{1+\alpha} \|\Delta u\|_{\infty} \right),$$

які перетворюються на рівності для функцій $v_{h,i}$ *при всіх* $h > 0$.

Крім того, для будь-якої функції $f \in CL^{\Delta}_{\infty}$ *виконується точна нерівність*

$$\left\| I^{\alpha}_{x_i} u'_{x_i} \right\|_{\infty} \le \frac{2}{\Gamma(\alpha + 2)} 2^{\frac{1+\alpha}{2}} \|u\|_C^{\frac{1+\alpha}{2}} \|\Delta u\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

яка перетворюється на рівність для функції $v_{h,i}$ *за будь-якого значення параметра* $h > 0$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено класичним задачам дослідження найкращих наближень і поперечників за Колмогоровим функціональних класів, деяким питанням відносної апроксимації, одержанню точних нерівностей типу Колмогорова для норм дробових похідних та інтегралів функцій однієї та багатьох змінних, а також застосуванню цих нерівностей до задач теорії наближення. Основні результати роботи викладено у таких пунктах.

1. Знайдено нові екстремальні підпростори для поперечників за Колмогоровим класів диференційовних періодичних функцій $W^r F$, старша похідна яких належить довільній перестановочно-інваріантній множині F та класів функцій $W^r H^{\omega}$, обмеження на старшу похідну яких задаються опуклим вгору модулем неперервності $\omega(t)$. При цьому одержано точні значення найкращих наближень у метриці L_1 класів $W^r F$ підпросторами сплайнів $S^2_{2n,m}$ порядку $m \ge r$ дефекту 2 з вузлами у точках $\frac{2k\pi}{n}$, $k \in Z$, і підпросторами сплайнів $S^1_{2n,m}(h)$ порядку $m \ge r + 1$ дефекту 1 з вузлами у точках $\frac{2k\pi}{n}$ і $\frac{2k\pi}{n} + h$, $k \in Z$, $h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$, а також точні значення найкращих наближень класів $W^r H^{\omega}$ такими сплайнами порядку $m \ge r + 1$. Показано, що саме ці

підпростори разом з тригонометричними поліномами порядку не вище $n-1$ і сплайнами мінімального дефекту з рівновіддаленими вузлами реалізують поперечники $d_{2n}(W^rF, L_1)$ і $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$. Отримані результати, а також деякі ідеї, використані для їх доведення дали можливість одержати точні нерівності типу Бернштейна для сплайнів $S_{2n,m}^2$ і нерівності типу Джексона для сплайнів $S_{2n,m}^2$ і $S_{2n,m}^1(h)$.

2. Знайдено точні значення найкращих наближень класів згорток функцій з довільної П–інваріантної множини з ядрами K, що не збільшують кількість змін знаку на періоді, підпросторами згорток $K * S_{2n,r}^2$ і $K * S_{2n,r}^1(h)$, $r \in N$, $h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$, $h \neq \frac{\pi}{n}$ (випадок $h = \frac{\pi}{n}$ був відомий). Такий підхід дозволяє значно розширити набір функціональних класів у порівнянні з класами згорток з ядрами Бернуллі (класи диференційовних функцій). Крім того, разом зі звичайними наближеннями розглядаються односторонні наближення і (α, β)–наближення. Використання (α, β)–наближеннь дозволяє охопити одночасно великий клас задач від симетричних до односторонніх наближень, розглядаючи їх з єдиної точки зору. Одержані результати, зокрема, показали, що підпростри $K * S_{2n,r}^2$ і $K * S_{2n,r}^1(h)$ у випадку $K \in CVD$ разом з підпросторами $K * S_{2n,r}^1$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

3. Отримано порядкові рівності при $n \to \infty$ для найкращих L_q–наближень класів W_p^r $(1 \leq p \leq q \leq 2)$ диференційовних періодичних функцій сплайнами порядку r з цих класів. З'ясовано, що у випадку $p = q = 2$ для $r = 3,4,\ldots$ порядок цих наближень істотно відрізняється від порядку відповідних поперечників за Колмогоровим, і, отже, послідовність підпросторів $S_{2n,r}^1$ не є екстремальною за порядком для поперечників $d_n(W_2^r, L_2, W_2^r)$ при $r = 3,4,\ldots$.

Встановлено порядкові рівності для відносних слабких поперечників класів згорток функцій з одиничної кулі простору істотно обмежених за нормою банаховозначних функцій з дійсним ядром у рівномірній метриці.

4. Одержано точні нерівності для норм дробових похідних за Маршо функцій $f \in L_{\infty,s}^2(R)$, $1 \leq s \leq \infty$, які у випадку $1 \leq s \leq \infty$ оцінюють L_∞–норми похідних порядку $0 < \alpha < 1$, а у випадку $1 < s \leq \infty$ – порядку $1 < \alpha < 2 - \frac{1}{s}$ через L_∞–норму самої функції і L_s–норму її другої похідної. Аналогічні результати одержано для норм дробових похідних за Адамаром функцій, визначених на дійсній півосі.

5. Отримано нові точні мультиплікативні нерівності типу Колмогорова для норм мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів, ці результати застосовано до розв'язання задачі наближення необмеженого оператора дробового диференціювання за Маршо обмеженими на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності.

6. Доведено точні нерівності, що оцінюють L_∞–норми похідної Рісса D^α функцій багатьох змінних через L_∞–норму самої функції і L_s–норму $(1 \leq s \leq \infty)$ її градієнта; розв'язано задачі найкращого наближення оператора D^α на

класі функцій f таких, що $\|\nabla f\|_s \le 1$, і задачі оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Розглянуто також більш загальну ситуацію, коли градієнти функцій f належать ідеальній структурі і досліджене питання оцінки норми похідної Рісса функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, отримано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^{\nabla}_{p,p}(R^m)$.

7. Встановлено точні нерівності, що оцінюють L_∞–норму гіперсингулярних інтегралів з однорідною характеристикою функцій, заданих на R^m, через L_∞–норми самих функцій і вагові L_s–норми їх градієнтів.

8. Доведено точну нерівність типу Колмогорова для функцій $f \in L^{\Delta}_{\infty,s}$, $1 \le s \le \infty$, що оцінює норму D^α $(0 < \alpha < 2)$ через $\|f\|_\infty$ і $\|\Delta f\|_s$, а також розв'язано задачу найкращого наближення оператора D^α на класі $W^{\Delta}_{\infty,s}$ і задачу оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Розглянуто також більш загальну ситуацію, коли лапласіани функцій f належать ідеальній структурі. Одержано оцінки норм функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, встановлено нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^{\Delta}_{p,p}(R^m)$.

9. Одержано точні нерівності для норм одновимірних потенціалів Рісса функцій багатьох змінних з обмеженим в $L_\infty(R^m)$ лапласіаном. Ці результати продовжують дослідження В. Г. Тимофєєва щодо точної нерівності, яка оцінює L_∞–норми перших частинних похідних функцій через їх L_∞–норми та L_∞–норми їх лапласіанів і є багатовимірним аналогом відомої нерівності Ландау.

Користуючись нагодою, висловлюю глибоку вдячність моєму вчителю професору Владиславу Федоровичу Бабенку за велику багаторічну підтримку в роботі, корисні поради та обговорення.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Громик Н. П.* О порядке относительных поперечников некоторых классов векторнозначных функций / Н. П. Громик, Н. В. Парфинович // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. — 2005. — Вип. 10. — С. 33–39.
2. *Губанова В. В.* О точных значениях наилучших относительных несимметричных приближений классов дифференцируемых периодических функций / В. В. Губанова, Н. В. Парфинович // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. — 2006. — Вип. 11. — С. 21–28.
3. *Карпова Е. Н.* О наилучших относительных несимметричных приближениях классов периодических функций сплайнами / Е. Н. Карпова, Н. В. Парфинович // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. — 2008. — Вип. 13. — С. 91–98.
4. *Бабенко В. Ф.* Точные значения наилучших приближений классов периодических функций сплайнами дефекта 2 / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Матем. заметки. — 2009. — **85**, № 4. — С. 538−551.

5. *Бабенко В. Ф.* Неравенства типа Бернштейна для сплайнов дефекта 2 / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 7. — С. 995−999.
6. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения классов периодических функций сплайнами дефекта 2 и неравенства типа Джексона / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 11. — С. 1443−1454.
7. *Бабенко В Ф.* О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, заданных на полуоси / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. — 2009. — Вип. 14. — С. 31−35.
8. *Бабенко В. Ф.* О порядке относительных приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Укр. мат. журн. — 2010.— **62**, № 2. — С. 147−157.
9. *Babenko V. F.* Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions / V. F. Babenko, N. V. Parfinovych, S. A. Pichugov // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 3. — С. 301−314.
10. *Бабенко В. Ф.* О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Матем. заметки. — 2010. — **87**, № 5. — С. 669−683.
11. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, заданных на полуоси / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. — 2010. — Вип. 15. — С. 38−48.
12. *Бабенко В. Ф.* Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2011. — **17**, № 3. — С. 60−70.
13. *Бабенко В. Ф.* Неравенства типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, определенных на полуоси, и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, А. А. Семиренко // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. — 2012. — Вип. 17. — С. 49−59.
14. *Бабенко В. Ф.* Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Український математичний вісник. — 2012. — **9**, №2. — С. 157−174.
15. *Бабенко В. Ф.* Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович, С. А. Пичугов // Матем. заметки. — 2014. — **95**, № 1. — С. 3−17.
16. *Babenko V. F.* Kolmogorov type inequalities for the Marchaud fractional derivatives on the real line and the half-line / V. F. Babenko, M. S. Churilova, N. V. Parfinovych, D. S. Skorokhodov // Journal of Inequalities and Applications. — 2014–504. — P. 1–31. — https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-504.

17. *Парфинович Н. В.* Неравенства типа Колмогорова для норм гиперсингулярных интегралов с однородной знакопостоянной характеристикой / Н. В. Парфинович // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. — 2015. — Вип. 20. — С. 58–69.
18. *Бабенко В. Ф.* Оценка равномерной нормы одномерного потенциала Рисса частной производной функции с ограниченным лапласианом / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Укр. мат. журн. — 2016. — **68**, № 7. — С. 867–878.
19. *Парфінович Н. В.* Про екстремальні підпростори для поперечників класів згорток / Н. В. Парфінович // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. — 2017. — Вип. 22. — С. 68–79.
20. *Парфінович Н. В.* Оцінки норм похідних за Ріссом функцій багатьох змінних / Н. В. Парфінович // Дослідження в математиці і механіці. — 2017. — **22**, вип. 1(29). — С. 46–61.
21. *Парфінович Н. В.* Точні значення найкращих (α,β)-наближень класів згорток з ядрами, що не збільшують число змін знака / Н. В. Парфінович // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, № 8. — С. 1073−1083.
22. *Парфінович Н. В.* Нерівності Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних / Н. В. Парфінович // Український математичний вісник. — 2017. — **14**, №2. — С. 265−178.
23. *Gromyk N. P.* The relative widths of some classes of periodic Banach-valued functions / N. P. Gromyk, N. V. Parfinovich // Conference “Functional Methods in Approximation Theory, Stochastic Analysis and Statistics II”: international conference. — Kyiv: KNU, 2004. — P. 34.
24. *Карпова О. М.* Про найкращі відносні несиметричні наближення класів періодичних функцій сплайнами / О. М. Карпова, Н. В. Парфінович // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька. — Львів: ІППММ НАНУ, 2007. — С. 121.
25. *Карпова Е. Н.* Об односторонних приближениях классов дифференцируемых периодических функций сплайнами при наличии ограничений на их производные / Е. Н. Карпова, Н. В. Парфинович // Проблеми математичного моделювання: міждержавна науково-методична конференція. — Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2007. — С. 26.
26. *Babenko V. F.* On some problems of shape preserving and class preserving approximation / V. F. Babenko, N. V. Parfinovych // Tenth SIAM Conference on Geometric Design and Computing: international conference. — San Antonio: Vanderbilt University, 2007. — P. 37.
27. *Бабенко В. Ф.* О порядке относительных приближений некоторых функциональных классов сплайнами / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Современные проблемы теории функций и их приложения: 14-ая Саратовская зимняя школа. — Саратов: СГУ, 2008. — С. 17–18.
28. *Бабенко В. Ф.* Наилучшие приближения классов периодических функций сплайнами дефекта 2 / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Проблеми мате-

матичного моделювання: міждержавна науково-методична конференція. — Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2008. — С. 9–10.

29. *Бабенко В. Ф.* О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами дефекта 2 / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Боголюбівські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування: міжнародна конференція. — Мелітополь: ІМ НАНУ, 2008. — С. 11–12.
30. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства для норм дробных производных функций многих переменных / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович , С. А. Пичугов // Боголюбівські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнародна конференція. — Мелітополь: ІМ НАНУ, 2008. — С. 12.
31. *Бабенко В. Ф.* О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III: international conference. — Svityaz: IM NASU, 2009. — P. 16–17.
32. *Бабенко В. Ф.* Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович , С. А. Пичугов // Approximation Theory and Applications: international conference. — Dnipropetrovsk: DNU, 2010. — P. 15.
33. *Babenko V. F.* The best approximation of periodic functions by splines / V. F. Babenko, N. V. Parfinovych // Thirteenth International Conference in Approximation Theory: international conference. — San Antonio: Vanderbilt University, 2010. — P. 31–32.
34. *Babenko V. F.* Exact inequalities of Kolmogorov type for fractional derivatives of multivariate functions / V. F. Babenko, N. V. Parfinovych , S. A. Pichugov // International symposium in approximation theory: international conference. — Nashville: Vanderbilt University, 2011 —. P. 27.
35. *Бабенко В. Ф.* О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных Рисса функций многих переменных / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Modern Analysis: international conference. — Donetsk: DonNU, 2011. — С. 20.
36. *Бабенко В. Ф.* О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных производных функций, заданных на оси и полуоси / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович , Д. С. Скороходов, М. С. Чурилова // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнародна конференція. — Кам'янець-Подільський: ІМ НАНУ, 2012. — С. 18.
37. *Babenko V. F.* Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of multivariate functions / V. F. Babenko, N. V. Parfinovych // Fourteenth International Conference in Approximation Theory: international conference. — San Antonio: Vanderbilt University, 2013. — P. 39.
38. *Бабенко В. Ф.* Неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Боголюбівські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх

застосування: міжнародна конференція. — Київ: ІМ НАНУ, 2013. — С. 215–216.
39. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных / В. Ф. Бабенко, Н. В. Парфинович // Крымская международная математическая конференция. — Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. — С. 84.
40. *Parfinovych N. V.* Kolmogorov type inequalities for norms of the hypersingular integrals with homogeneous characteristic / N. V. Parfinovych // International V. Skorobohatko mathematical conference. — Lviv: IAPMM NASU, 2015. — P. 119.
41. *Парфінович Н. В*. Найкращі наближення класів диференційовних функцій сплайнами / Н. В. Парфинович // Approximation Theory and Applications: international conference. — Dnipropetrovsk: DNU, 2015. — P. 48.
42. *Парфінович Н. В*. Найкращі наближення класів згорток узагальненими сплайнами / Н. В. Парфинович // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнародна конференція. — Слов’янськ: ДДПУ, 2017. — С. 77.

АНОТАЦІЇ

Парфінович Н. В. Сплайни в екстремальних задачах теорії наближень, нерівності для похідних та їх застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – "Математичний аналіз" (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційну роботу присвячено класичним задачам дослідження найкращих наближень і поперечників за Колмогоровим функціональних класів, деяким питанням відносної апроксимації, точним нерівностям типу Колмогорова для норм дробових похідних функцій однієї та багатьох змінних, а також застосуванню цих нерівностей до задач теорії наближення.

Одержано точні значення найкращих наближень класів W^rF періодичних функцій, r–а похідна яких належить довільній перестановочно-інваріантній множині F, підпросторами $S^2_{2n,m}$ сплайнів порядку $m \geq r$ дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і підпросторами сплайнів $S^1_{2n,m}(h)$, $h \in (0, 2\pi/n\,)$, порядку $m \geq r+1$ дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами, а також точні значення найкращих наближень класів W^rH^ω r разів диференційовних періодичних функцій з обмеженнями на r–у похідну, що задаються опуклим вгору модулем неперервності, такими сплайнами порядку $m \geq r+1$. Показано, що зазначені підпростори є екстремальними для поперечників за Колмогоровим класів W^rF і W^rH^ω у просторі L_1.

Знайдено точні значення найкращих наближень класів згорток 2π–періодичних функцій з довільної перестановочно-інваріантної множини F з ядрами K, що не збільшують кількість змін знаку на періоді, підпросторами згорток з ядрами K сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і

сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами. Показано, що ці підпростори є екстремальними для поперечників за Колмогоровим класів $K * F$ у просторі L_1.

Отримано низку точних нерівностей типу Колмогорова для функцій однієї та багатьох змінних, зокрема, встановлено точні нерівності для норм похідних Рісса порядку $0< \alpha < 1$ функцій багатьох змінних зі скінченним в L_s модулем градієнта і порядку $0 < \alpha < 2$ функцій багатьох змінних зі скінченним в L_s лапласіаном.

Як застосування вказаних нерівностей одержано розв'язок задачі Стєчкіна про наближення необмежених операторів дробового диференціювання обмеженими на класах функцій багатьох змінних, які задаються обмеженнями на L_s–норму градієнта або лапласіана відповідно, а також розв'язок задачі оптимального відновлення оператора дробового диференціювання на заданих з похибкою функціях з цих класів.

Ключові слова: найкраще наближення, найкраще несиметричне наближення, найкраще відносне наближення, наближення необмеженого оператора, поперечник за Колмогоровим, відносний поперечник, екстремальний підпростір, сплайн, згортка, ядро згортки, нерівності для норм похідних, дробова похідна.

Парфинович Н. В. Сплайны в экстремальных задачах теории приближений, неравенства для производных и их приложения. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Математический анализ" (111 – Математика). – Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена классическим задачам исследования наилучших приближений и поперечников по Колмогорову функциональных классов, некоторым вопросам относительной аппроксимации, точным неравенствам типа Колмогорова для норм дробных производных функций одной и многих переменных, а также приложениям этих неравенств к задачам теории приближения.

Найдены точные значения наилучших приближений классов $W^r F$ периодических функций, r–я производная которых принадлежит произвольному перестановочно-инвариантному множеству F, подпространствами $S^2_{2n,m}$ сплайнов порядка $m \geq r$ дефекта 2 с равномерно распреденными узлами и подпространствами сплайнов $S^1_{2n,m}(h)$, $h \in (0, 2\pi/n)$, порядка $m \geq r+1$ дефекта 1 с неравномерно распределенными узлами, а также точные значения наилучших приближений классов $W^r H^\omega$ r раз дифференцируемых периодических функций с ограничениями на r–ю производную, которые задаются выпуклым вверх модулем непрерывности, такими сплайнами порядка $m \geq r+1$. Показано, что указанные подпространства являются экстремальными для поперечников по Колмогорову классов $W^r F$ и $W^r H^\omega$ в пространстве L_1.

Найдены точные значения наилучших приближений классов сверток 2π–

периодических функций из произвольного перестановочно-инвариантного множества F с ядрами K, не увеличивающими число перемен знака на периоде, подпространствами сверток с ядрами K сплайнов дефекта 2 с равномерно распределенными узлами и сплайнов дефекта 1 с неравномерно распределенными узлами. Показано, что эти подпространства являются экстремальными для поперечников по Колмогорову классов $K * F$ в пространстве L_1.

Получен ряд точных неравенств типа Колмогорова для функций одной и многих переменных, в частности, установлены точные неравенства для норм производных Рисса порядка $0 < \alpha < 1$ функций многих переменных с конечным в L_s модулем градиента и порядка $0 < \alpha < 2$ функций многих переменных с конечным в L_s лапласианом.

В качестве приложений указанных неравенств получено решение задачи Стечкина о приближении неограниченных операторов дробного дифференцирования ограниченными на классах функций многих переменных, которые задаются ограничениями на L_s–норму градиента или лапласиана соответственно, а также решение задачи оптимального восстановления оператора дробного дифференцирования на заданных с погрешностью функциях из этих классов.

Ключевые слова: наилучшее приближение, наилучшее несимметричное приближение, наилучшее относительное приближение, приближение неограниченного оператора, поперечник по Колмогорову, относительный поперечник, экстремальное подпространство, сплайн, свертка, ядро свертки, неравенства для норм производных, дробная производная.

Parfinovych N. V. Splines in extremal problems of Approximation Theory, inequalities for derivatives and their applications. – The Manuscript.

Thesis for obtaining the Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences in Speciality 01.01.01. – Mathematical Analysis (111 – Mathematics). – Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to classical problems of investigating the best approximations and Kolmogorov widths of functional classes, some problems of relative approximations, problems of obtaining sharp inequalities of Kolmogorov type between norms of fractional derivatives of univariate and multivariate functions, and applications of these inequalities in Approximation Theory problems.

We find exact values of the best approximations of classes W^rF of r times differentiable periodic functions, whose r–th order derivative belongs to an arbitrary rearrangement–invariant set F, by subspaces $S^2_{2n,m}$ of splines of order $m \geq r$ with defect 2 having uniformly distributed nodes and by subspaces $S^1_{2n,m}(h)$, $h \in (0, 2\pi/n)$, of splines of order $m \geq r + 1$ with defect 1 having non-uniformly distributed nodes. Also, we have found exact values of the best approximations of classes W^rH^ω of r times differentiable periodic functions with limitations on r–th order derivative provided by concave modulus of continuity by above subspaces of splines of order $m \geq r + 1$. We show that these subspaces are extremal for Kolmogorov widths of classes W^rF and W^rH^ω in the space L_1.

We find exact values of the best approximations of convolution classes of 2π–

periodic functions from an arbitrary rearrangement-invariant set F with variation diminishing kernels K by subspaces of convolusions with kernels K of splines with defect 2 having uniformly distributed nodes and splines with defect 1 having non-uniformly distributed nodes. We show that these subspaces are extremal for Kolmogorov widths of classes $K * F$ in the space L_1.

We obtain the order as $n \to \infty$ of the best L_q–approximations of classes W_p^r $(1 \leq p \leq q \leq 2)$ of differentiable periodic functions, whose r–th order derivative has a norm in L_p bounded by 1, by splines $S_{2n,r}^1$ of order r with defect 1 having uniformly distributed nodes from these classes. It is found that in the case when $p = q = 2$ for $r = 3,4, ...$ the order of such approximations is essentially different from the order of corresponding Kolmogorov widths and, hence, the sequence of subspaces $\{S_{2n,r}^1\}$ is not extremal by order for widths $d_n(W_2^r, L_2, W_2^r)$ for $r = 3,4, ...$.

We establish new sharp inequalities for norms of the Marchaud fractional derivatives of functions defined on the real line, that estimate L_∞–norms of these derivatives in terms of L_∞–norm of the function itself and L_s–norm of its second order derivative. We obtain similar results for the norms of the Hadamard fractional derivatives of functions that are defined on the real half-line.

We obtain the series of sharp Kolmogorov type inequalities for multivariate functions. In particular, we find new sharp inequalities of Kolmogorov type between the norms of mixed fractional derivatives of multivariate functions in the Hölder spaces and new inequalities between the norms of the Riesz derivatives of order $0< \alpha < 1$ of multivariate functions with bounded in L_s modulus of gradient and of order $0 < \alpha < 2$ of multivariate functions with bounded in L_s laplacian.

As application of the established inequalities we solve the Stechkin problem of the best approximation of unbounded fractional differentiation operators on the classes of multivariate functions defined by limitations on the L_s–norm of, respectively, gradient or laplacian, and the problem of the best recovery of fractional differentiation operator on functions from these classes given with an error.

Keywords: the best approximation, the best asymetric approximation, the best relative approximation, approximation of unbounded operator, Kolmogorov width, relative width, extremal subspace, spline, convolusion, convolusion kernel, inequalities for norms of derivatives, fractional derivative.