Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
Міністерство освіти і науки України

Інститут математики
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Парфінович Наталія Вікторівна

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

Сплайни в екстремальних задачах теорії наближень, нерівності для похідних та їх застосування

01.01.01 – математичний аналіз
фізико-математичні науки

Подається на здобуття наукового ступеня доктора
фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень.
Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання
на відповідне джерело ______________ Н. В. Парфінович

Дніпро — 2018

АНОТАЦІЯ

Парфінович Н.В. Сплайни в екстремальних задачах теорії наближень, нерівності для похідних та їх застосування. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара Міністерства освіти і науки України, Дніпро, Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота пов'язана з класичними задачами дослідження найкращих наближень і поперечників за Колмогоровим функціональних класів, деякими питаннями відносної апроксимації, одержанням точних нерівностей типу Колмогорова для норм дробових похідних та інтегралів функцій однієї та багатьох змінних, а також застосуванням цих нерівностей в задачах теорії наближення.

Перший розділ присвячено задачам наближення класів диференційовних періодичних функцій W^rF, старша похідна яких належить довільній перестановочно-інваріантній множині F. Відзначимо, що до перестановочно-інваріантних множин належить достатньо велика кількість розглядуваних в теорії апроксимації множин, отже такий підхід дозволяє істотно збільшити запас наближуваних класів у порівнянні зі стандартними класами Соболєва. Крім того, в даному розділі розглянуто наближення класів функцій W^rH^ω, обмеження на старшу похідну яких задаються опуклим вгору модулем неперервності $\omega(t)$. В результаті проведених досліджень одержано точні значення найкращих наближень класів W^rF підпросторами $S^2_{2n,m}$ сплайнів порядку $m \ge r$ дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і підпросторами сплайнів $S^1_{2n,m}(h)$, $h \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}\right)$, порядку $m \ge r+1$ дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами, а також точні значення найкращих наближень класів

W^rH^ω такими сплайнами порядку $m \geq r+1$. Отримані результати дають можливість вказати нові підпростори, що реалізують поперечники за Колмогоровим класів W^rF і W^rH^ω в просторі L_1, а саме, з них випливає, що такими підпросторами є $S^2_{2n,m}$ і $S^1_{2n,m}(h)$, $h \neq \dfrac{\pi}{n}$ (випадок $h = \dfrac{\pi}{n}$ – відомий). Крім того, отримані результати, а також деякі ідеї, використані для їх доведення, дали можливість одержати точні нерівності типу Бернштейна для сплайнів $S^2_{2n,m}$ і нерівності типу Джексона для сплайнів $S^2_{2n,m}$ і $S^1_{2n,m}(h)$.

Другий розділ присвячено дослідженню питань наближення класів згорток 2π–періодичних функцій з довільної перестановочно-інваріантної множини F з ядрами K, що не збільшують кількість змін знаку на періоді. Такий підхід дозволяє значно розширити набір наближуваних класів у порівнянні з класами згорток з ядрами Бернуллі (класи диференційовних функцій). Крім того, разом зі звичайними наближеннями ми розглядаємо односторонні наближення і (α, β)–наближення. Зокрема, використання (α, β)–наближень дозволяє охопити одночасно великий клас задач від симетричних до односторонніх наближень, розглядаючи їх з єдиної точки зору. Як апарат наближення використано підпростори згорток з ядрами K сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами. В результаті цих досліджень знайдено точні значення найкращих L_1–наближень класів згорток $K * F$ такими підпросторами, показано, що ці підпростори є екстремальними для поперечників за Колмогоровим класів $K * F$ в просторі L_1.

Третій розділ присвячено дослідженню питань наближення функціональних класів за наявності обмежень на апарат наближення. В цьому розділі отримано порядкові рівності при $n \to \infty$ для найкращих L_q–наближень класів W^r_p $(1 \leq p \leq q \leq 2)$ диференційовних періодичних функцій сплайнами $S^1_{2n,r}$ порядку r дефекту 1 рівномірно розподіленими вузлами з цих класів. З'ясовано, що у випадку $p = q = 2$ для $r = 3, 4, \ldots$

порядок цих наближень істотно відрізняється від порядку відповідних поперечників за Колмогоровим, отже послідовність підпросторів $\{S^1_{2n,r}\}$ не є екстремальною за порядком для поперечників $d_n(W^r_2, L_2, W^r_2)$ при $r = 3, 4, ...$. Крім того, отримано порядкові рівності для відносних слабких поперечників класів згорток функцій з одиничної кулі простору істотно обмежених за нормою банаховозначних функцій з дійсним ядром в рівномірній метриці. Цей результат поширює відомі результати В. М. Коновалова, В. М. Коновалова і А. В. Павлика, В. Ф. Бабенка і Л. Е. Азара.

Четвертий розділ присвячено дослідженню нерівностей типу Колмогорова з непокращуваними константами для норм дробових похідних функцій, означених на дійсній осі або півосі. В результаті цих досліджень отримано нові точні нерівності для норм дробових похідних за Маршо функцій, визначених на дійсній осі, що оцінюють L_∞–норми цих похідних через L_∞–норму самої функції і L_s–норму її другої похідної, аналогічні результати одержано також для норм дробових похідних за Адамаром функцій, визначених на дійсній півосі. Крім того, встановлено точні нерівності, що оцінюють норми узагальнених потенціалів Феллера першої похідної заданої на дійсній осі функції через L_∞–норму цієї функції і L_s–норму її першої похідної.

У п'ятому розділі ми досліджуємо нерівності Колмогорова для функцій багатьох змінних, а також застосування цих нерівностей до розв'язання споріднених задач. Результати цих досліджень полягають у такому.

Отримано нові точні нерівності типу Колмогорова для норм мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів, одержані результати застосовані до розв'язку задачі наближення необмеженого оператора дробового диференціювання за Маршо обмеженими на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності.

Одержано точні нерівності, що оцінюють L_∞–норму похідної Рісса D^α функції багатьох змінних через L_∞–норму самої функції і L_s–норму

$(1 \leq s \leq \infty)$ її градієнта, розв'язано задачі найкращого наближення оператора D^α на класі функцій f таких, що $\|\nabla f\|_s \leq 1$, і задачі оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Розглянуто також більш загальну ситуацію, коли градієнти функцій f обмежені в ідеальній структурі і досліджене питання оцінки норми похідної Рісса функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, отримано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^{\nabla}_{p,p}(\mathbb{R}^m)$. Крім того, встановлено точні нерівності, що оцінюють L_∞–норми гіперсингулярних інтегралів з однорідною характеристикою функцій, заданих на $\mathbb{R}^m$, через L_∞–норми самих функцій і вагові L_s–норми їх градієнтів.

Доведено точну нерівність типу Колмогорова для функцій $f \in L^{\Delta}_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq s \leq \infty$, що оцінює норму D^α $(0 < \alpha < 2)$ через $\|f\|_\infty$ і $\|\Delta f\|_s$, а також розв'язано задачу найкращого наближення оператора D^α на класі $W^{\Delta}_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$ і задачу оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Розглянуто також більш загальну ситуацію, коли лапласіани функцій f обмежені в ідеальній структурі. Здобуто оцінки норм функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, одержано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^{\Delta}_{p,p}(\mathbb{R}^m)$.

Одержано точні нерівності для норм одновимірних потенціалів Рісса функцій багатьох змінних з обмеженим в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leq s \leq \infty)$ лапласіаном.

Ключові слова: найкраще наближення, найкраще несиметричне наближення, найкраще відносне наближення, наближення необмеженого оператора, поперечник за Колмогоровим, відносний поперечник, екстремальний підпростір, сплайн, згортка, ядро згортки, нерівності для норм похідних, дробова похідна.

Parfinovych N. V. Splines in extremal problems of approximation theory, inequalities for the derivatives and their applications. — Qualifying scientific work on the rights of manuscripts.

Thesis for the degree of Doctor of Sciences in Physics and Mathematics in Speciality 01.01.01. — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Oles Honchar Dnipro National University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Dnipro, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The Thesis is related to the classical problems of studying of the best approximations and Kolmogorov widths of the functional classes, to some questions of relative approximation, to the obtaining of exact Kolmogorov type inequalities for the norms of fractional derivatives and integrals of functions of one and many variables, and to application of these inequalities in the problems of the approximation theory.

The first chapter is devoted to the problems of approximation of classes of differentiable periodic functions W^rF, the highest derivative of which belongs to an arbitrary rearrangement–invariant set F. We note that there is sufficiently large number of sets considered in the theory of approximation that belongs to the rearrangement-invariant sets, therefore this approach allows us to substantially increase the number of approximated classes in comparison with the standard Sobolev classes. In addition, in this chapter we consider the approximation of classes of functions W^rH^ω, the restrictions on the highest derivative of which are given with concave modulus of continuity $\omega(t)$. As a result of the conducted researches we obtained the exact values of the best approximations of the classes W^rF by the subspaces $S^2_{2n,m}$ of splines of order $m \geq r$ of the defect 2 with uniformly distributed nodes and by the subspaces of the splines $S^1_{2n,m}(h)$, $h \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}\right)$ of the order $m \geq r+1$ of the defect 1 with non-uniformly distributed nodes, and the exact values of the best approximations of classes W^rH^ω by such splines of order $m \geq r+1$. The obtained results make it possible to specify new subspaces that implement the Kolmogorov widths of classes W^rF and W^rH^ω in the space L_1, namely, these results imply that such subspaces are $S^2_{2n,m}$ and $S^1_{2n,m}(h)$, $h \neq \frac{\pi}{n}$ (case $h = \frac{\pi}{n}$ was known). In addition, obtained results, as well as some ideas used to prove them, give an opportunity to obtain sharp Bernstein–type inequalities for splines $S^2_{2n,m}$ and Jackson–type inequalities for splines $S^2_{2n,m}$ and $S^1_{2n,m}(h)$.

The second chapter is devoted to the study of the questions of the approximation of the classes of convolutios of 2π–periodic functions from an arbitrary rearrangement–invariant set F with kernels K that do not increase the number of sign changes over the period. This approach allows us to considerably extend the set of approximated classes in comparison with the classes of convolutions with Bernoulli kernel (classes of differentiable functions). In addition, together with usual approximations, we consider one-sided approximations and (α, β)–approximations. In particular, the use of (α, β)–approximations allows to simultaneously cover a large class of problems from symmetric to one-sided approximations, considering them from a single point of view. As an approximation apparatus, we used the subspaces of the convolutions of K with splines of defect 2 having uniformly distributed nodes and splines of defect 1 having non–uniformly distributed nodes. As a result of these studies, the exact values of the best L_1-approximations of the classes $K * F$ by such subspaces are found, it is shown that these subspaces are extremal for the Kolmogorov widths of the classes $K * F$ in the space L_1.

The third chapter is devoted to the study of the questions of the approximation of the functional classes under restrictions on approximating functions. In this chapter we obtained the order equalities as $n \to \infty$ for the best L_q–approximations of classes W^r_p $(1 \leq p \leq q \leq 2)$ of differentiable periodic functions by splines $S^1_{2n,r}$ of the order r and of the defect 1 with uniformly distributed nodes from these classes. It is found that in the case $p = q = 2$ for $r = 3, 4, ...$ the order of these approximations differs significantly from the order of the corresponding Kolmogorov widths, hence the sequence of subspaces $\{S^1_{2n,r}\}$ is not extremal in order for the widths $d_n(W^r_2, L_2, W^r_2)$ for

$r = 3, 4, ...$ In addition, we obtain order equality for relative weak widths of the classes of convolutions of a real kernel with functions from the unit ball of the space essentially bounded in the norm Banach-valued functions in uniform metric. This result generalizes well-known results of V. M. Konovalov, V. M. Konovalov and A. V. Pavlik, V. F. Babenko and L. E. Azar.

The fourth chapter is devoted to the study of Kolmogorov-type inequalities with sharp constants for the norms of fractional derivatives of functions defined on the real axis or semi–axis. As a result of these investigation, we obtain new exact inequalities for the norms of the fractional Marchaud derivatives of functions defined on the real axis, that estimate the L_∞–norms of these derivatives through L_∞–norm of the function itself and L_s–norm of its second derivative; similar results are also obtained for the norms of the Hadamard fractional derivatives of functions defined on the real semi–axis. In addition, we establish exact inequalities that estimate the norms of the generalized Feller potentials of the first derivative of the function defined on the real axis through L_∞–norm of this function and L_s–norm of its first derivative.

In the fifth chapter, we investigate Kolmogorov's inequalities for functions of many variables, as well as the applications of these inequalities to solving related problems. The results of these studies are as follows.

New exact Kolmogorov-type inequalities for the norms of mixed fractional Marchaud derivatives of functions of several variables in Holder spaces are obtained . Obtained results are applied to solving the problem of the approximation of an unbounded Marchaud fractional differentiation operator by bounded ones on the classes of functions given by the majorant of the module of continuity.

We obtain sharp inequalities that estimate L_∞–norm of the Riesz derivative D^α of the function of many variables through L_∞–norm of the function itself and the L_s–norm $(1 \le s \le \infty)$ of its gradient, we solve the problem of the best approximation of the operator D^α on the class of functions f

such that $\|\nabla f\|_s \leq 1$ and the problem of optimal recovery of the operator D^α on the elements of this class, given with an error. We consider also a more general situation in which gradients of functions f are bounded in an ideal structure and investigate the question of estimation of the norm of the Riesz derivative of function f in an ideal structure and, as a result, we obtain Kolmogorov type inequalities that estimate the L_p–norms of the functions $f \in L^{\nabla}_{p,p}(\mathbb{R}^m)$. In addition, we establish exact inequalities that estimate L_∞–norms of hypersingual integrals with a homogeneous characteristic of functions defined on $\mathbb{R}^m$, through L_∞–norms of the functions themselves and weighted L_s–norms of their gradients.

We prove an exact Kolmogorov-type inequality for the functions $f \in L^{\Delta}_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq s \leq \infty$, which estimates the norm D^α $(0 < \alpha < 2)$ through $\|f\|_\infty$ and $\|\Delta f\|_s$, we also solve the problem of the best approximation of the operator D^α on the class $W^{\Delta}_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$ and the problem of optimal recovery of the operator D^α on elements of this class, given with an error. We also consider a more general situation in which the Laplacian of functions f are bounded in an ideal structure. Estimates of the norms of the functions f in the ideal structure are obtained and as a consequence we obtain Kolmogorov type inequalities that evaluate the L_p–norms of the functions $f \in L^{\Delta}_{p,p}(\mathbb{R}^m)$

We obtain the exact inequalities for the norms of the one-dimensional Riesz potentials for the functions of several variables with a Laplacian bounded in $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leq s \leq \infty)$.

Key words: best approximation, best non-symmetric approximation, best relative approximation, approximation of an unbounded operator, Kolmogorov width, relative width, extremal subspace, spline, convolution, kernel of convolution, inequalities for norms of derivatives, fractional derivative.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

1. Громик Н. П., Парфинович Н. В. О порядке относительных поперечников некоторых классов векторнозначных функций // Вiсник Днiпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2005. Вип. 10. С. 33–39.

2. Губанова В. В., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших относительных несимметричных приближений классов дифференцируемых периодических функций // Вiсник Днiпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2006. Вип. 11. С. 21–28.

3. Карпова Е. Н., Парфинович Н. В. О наилучших относительных несимметричных приближениях классов периодических функций сплайнами // Вiсник Днiпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2008. Вип. 13. С. 91–98.

4. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Точные значения наилучших приближений классов периодических функций сплайнами дефекта 2 // Матем. заметки. 2009. Т 85, № 4. С. 538–551.

5. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Бернштейна для сплайнов дефекта 2 // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 7. С. 995–999.

6. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Несимметричные приближения классов периодических функций сплайнами дефекта 2 и неравенства типа Джексона // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 11. С. 1443–1454.

7. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, заданных на полуоси // Вiсник Днiпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2009. Вип. 14. С. 31–35.

8. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О порядке относительных приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 2. С. 147–157.

9. Babenko V. F., Parfinovych N. V., Pichugov S. A. Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 3. С. 301–314.

10. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 5. С. 669–683.

11. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Точные неравенства типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, заданных на полуоси // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2010. Вип. 15. С. 38–48.

12. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения // Труды института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 60–70.

13. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Семиренко А. А. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, определенных на полуоси, и их приложения // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2012. Вип. 17. С. 49–59.

14. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения // Український математичний вісник. 2012. Т. 9, № 2. С. 157–174.

15. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих пере-

менных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи // Матем. заметки. 2014. Т. 95, № 1. С. 3–17.

16. Babenko V. F., Churilova M. S., Parfinovych N. V., Skorokhodov D. S. Kolmogorov type inequalities for the Marchaud fractional derivatives on the real line and the half-line // Journal of Inequalities and Applications. 2014-504. P. 1–31. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-504 (дата звернення: 25.12.2017).

17. Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для норм гиперсингулярных интегралов с однородной знакопостоянной характеристикой // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2015. Вип. 20. С. 58–69.

18. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Оценка равномерной нормы одномерного потенциала Рисса частной производной функции с ограниченным лапласианом // Укр. мат. журн. 2016. Т. 68, № 7. С. 867–878.

19. Парфінович Н. В. Про екстремальні підпростори для поперечників класів згорток // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2017. Вип. 22. С. 68–79.

20. Парфінович Н. В. Оцінки норм похідних за Ріссом функцій багатьох змінних // Дослідження в математиці і механіці. 2017. Т. 22, вип. 1(29). С. 46–61.

21. Парфінович Н. В. Точні значення найкращих (α, β)–наближень класів згорток з ядрами, що не збільшують число змін знака // Укр. мат. журн. 2017. Т. 69, № 8. С. 1073–1083.

22. Парфінович Н. В. Нерівності Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних // Український математичний вісник. 2017. Т. 14, № 2. С. 265–178.

23. Gromyk N. P., Parfinovich N. V. The relative widths of some classes of periodic Banach-valued functions // Conference "Functional Methods in

Approximation Theory, Stochastic Analysis and Statistics II": international conference. Kyiv: KNU, 2004. P. 34.

24. Карпова О. М., Парфінович Н. В. Про найкращі відносні несиметричні наближення класів періодичних функцій сплайнами // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Соробогатька. Львів: ІППММ НАНУ, 2007. С. 121.

25. Карпова Е. Н., Парфинович Н. В. Об односторонних приближениях классов дифференцируемых периодических функций сплайнами при наличии ограничений на их производные // Проблеми математичного моделювання: міждержавна науково-методична конференція. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2007. С. 26.

26. Babenko V. F., Parfinovych N. V. On some problems of shape preserving and class preserving approximation // Tenth SIAM Conference on Geometric Design and Computing: international conference. San Antonio: Vanderbilt University, 2007. P. 37.

27. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О порядке относительных приближений некоторых функциональных классов сплайнами // Современные проблемы теории функций и их приложения: 14-ая Саратовская зимняя школа. Саратов: СГУ, 2008. С. 17–18.

28. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Наилучшие приближения классов периодических функций сплайнами дефекта 2 // Проблеми математичного моделювання: міждержавна науково-методична конференція. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2008. С. 9–10.

29. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами дефекта 2 // Боголюбівські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнародна конференція. Мелітополь: ІМ НАНУ, 2008. С. 11–12.

30. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А. Точные неравенства для норм дробных производных функций многих переменных // Боголюбівські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнародна конференція. Мелітополь: ІМ НАНУ, 2008. С. 12.

31. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами // Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III: international conference. – Svityaz: IM NASU, 2009. P. 16–17.

32. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных // Approximation Theory and Applications: international conference. Dnipropetrovsk: DNU, 2010. P. 15.

33. Babenko V. F., Parfinovych N. V. The best approximation of periodic functions by splines // Thirteenth International Conference in Approximation Theory: international conference. San Antonio: Vanderbilt University, 2010. P. 31–32.

34. Babenko V. F., Parfinovych N. V., Pichugov S. A. Exact inequalities of Kolmogorov type for fractional derivatives of multivariate functions // International symposium in approximation theory: international conference. Nashville: Vanderbilt University, 2011. P. 27.

35. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных Рисса функций многих переменных // Modern Analysis: international conference. Donetsk: DonNU, 2011. С. 20.

36. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Скороходов Д. С., Чурілова М. С. О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных произво-

дных функций, заданных на оси и полуоси // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнародна конференція. Кам'янець-Подільський: ІМ НАНУ, 2012. С. 18.

37. Babenko V. F., Parfinovych N. V. Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of multivariate functions // Fourteenth International Conference in Approximation Theory: international conference. San Antonio: Vanderbilt University, 2013. P. 39.

38. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных // Боголюбівські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнародна конференція. Київ: ІМ НАНУ, 2013. С. 215–216.

39. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Точные неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных // Крымская международная математическая конференция. Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. С. 84.

40. Parfinovych N. V. Kolmogorov type inequalities for norms of the hypersingular integrals with homogeneous characteristic // International V. Skorobohatko mathematical conference. Lviv: IAPMM NASU, 2015. P. 119.

41. Парфінович Н. В. Найкращі наближення класів диференційовних функцій сплайнами // Approximation Theory and Applications: international conference. Dnipropetrovsk: DNU, 2015. P. 48.

42. Парфінович Н. В. Найкращі наближення класів згорток узагальненими сплайнами // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнародна конференція. Слов'янськ: ДДПУ, 2017. С. 77.

ЗМІСТ

Перелік умовних позначень

$\forall$ – квантор загальності: "для кожного" або "для будь-якого"

$\exists$ – квантор існування "існує"

$:=$ – дорівнює за означенням

$\asymp$ – дорівнює за порядком

$x \in G$ – елемент x належить множині G

$x \notin G$ – елемент x не належить множині G

$A \cup B$ – об'єднання множин A та B

$A \cap B$ – перетин множин A та B

$A \subset B$ – множина A міститься в множині B

$\emptyset$ – порожня множина

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел

$\mathbb{R}_+$ – множина додатних дійсних чисел

$\mathbb{R}_-$ – множина від'ємних дійсних чисел

$\mathbb{R}^m$ – простір точок $t = (t_1, ..., t_m)$, $t_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$

$\operatorname{mes} A$ – міра вимірної за Лебегом множини A

$\sup\limits_{x \in A} f(x)$ – точна верхня межа функції $f(x)$ на множині A

$\inf\limits_{x \in A} f(x)$ – точна нижня межа функції $f(x)$ на множині A

$\operatorname{ess\,sup}$ – істотна верхня межа

$\operatorname{sign}\alpha$ – величина, що дорівнює 1, якщо $\alpha > 0$, дорівнює -1, якщо $\alpha < 0$, і нулю, якщо $\alpha = 0$

$\nu(f)$ – число змін знаку на періоді у 2π–періодичної функції f

$\omega(t)$ – модуль неперервності

$\omega(f;t)$ – модуль неперервності функції f

$r(f;t)$ – незростаюча перестановка звуження на період функції $f \in L_1$, $f \geq 0$

$K * \varphi$ – згортка функцій $K \in L_1$ і $\varphi \in L_1$

$\varphi_{\lambda,r}$ – r–й $2\pi/\lambda$–періодичний інтеграл від функції $\varphi_{\lambda,0} := \operatorname{sign}\sin\lambda t$ з нульовим середнім значенням на періоді

$\dim X$ – розмірність лінійного простору X

$C(G)$ – простір неперервних на G функцій f з нормою $\|f\|_{C(G)}$

C – простір неперервних на всій осі 2π–періодичних функцій f з нормою $\|f\|_C$

$L_p(G)$ $(1 \leq p < \infty)$ – простір інтегровних на G у p–у степені функцій f з нормою $\|f\|_{L_p(G)}$

L_p $(1 \leq p < \infty)$ – простір 2π–періодичних інтегровних на періоді p–у степені функцій f з нормою $\|f\|_p$

$L_\infty(G)$ – простір істотно обмежених на G функцій f з нормою $\|f\|_{L_\infty(G)}$

L_∞ – простір 2π–періодичних істотно обмежених на осі функцій f з нормою $\|f\|_\infty$

$C^r(G)$ – множина функцій f таких, що $f^{(r)} \in C(G)$

C^r – множина 2π–періодичних функцій f таких, що $f^{(r)} \in C$

$L_p^r(G)$ – множина функцій f таких, що $f^{(r-1)}$ існує та локально абсолютно неперервна на G, і $f^{(r)} \in L_p(G)$

L_p^r – множина 2π–періодичних функцій f таких, що $f^{(r-1)}$ існує та абсолютно неперервна на періоді, і $f^{(r)} \in L_p$

$L_{p,s}^r(G)$ – множина функцій $f \in L_p(G)$ таких, що $f^{(r)} \in L_s(G)$

W_p^r – клас функцій $f \in L_p^r$, для яких $\|f^{(r)}\|_p \le 1$

$L_{p,s}^{\nabla}(G)$ – множина функцій $f \in L_p(G)$, у яких $\||\nabla f|\|_{L_s(G)}$ скінченна

$L_{p,s}^{\Delta}(G)$ – множина функцій $f \in L_p(G)$, у яких $\|\Delta f\|_{L_s(G)}$ скінченна

T_{2n-1} – простір тригонометричних поліномів порядку не вище $n-1$

$S_{2n,r}^k$ $(k = 1, 2)$ – простір 2π–періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту k з вузлами в точках $\dfrac{kj\pi}{n}$, $j \in \mathbb{Z}$

$S_{2n,r}^1(h),\ h \in (0, 2\pi/n)$, – простір 2π–періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами в точках $\dfrac{2j\pi}{n}$ і $\dfrac{2j\pi}{n} + h$, $j \in \mathbb{Z}$

$E(f, H)_X$ – найкраще наближення функції f множиною H в метриці простору X

$E(f, H)_{p;\alpha,\beta}$ – найкраще (α, β)–наближення функції f множиною H в метриці простору L_p

$E(M, H)_X$ – найкраще наближення класу M множиною H в метриці простору X

$E(M, H)_{p;\alpha,\beta}$ – найкраще (α, β)–наближення класу M множиною H в метриці простору X

$d_n(M, X)$ – поперечник за Колмогоровим класу M в просторі X

$d_n(M, X, M')$ – відносний поперечник класу M в просторі X

ВСТУП

Актуальність теми. До найбільш розвинутих в теорії наближення відноситься напрям, пов'язаний з найкращим наближенням класів дійсних функцій одного змінного. На даний час здобуто багато важливих результатів як по наближенню таких класів фіксованими просторами, так і в напрямі, пов'язаному з вибором для даного функціонального класу найкращого апарату наближення (задача про поперечники).

Перші точні результати по наближенню класів диференційовних періодичних функцій тригонометричними поліномами отримані Ж. Фаваром, Н. І. Ахієзером, М. Г. Крейном, потім ці дослідження були подовжені і розвинені в роботах Б. Надя, С. М. Нікольського, В. К. Дзядика, С. Б. Стєчкіна, Сунь Юншена, К. І. Бабенка, М. П. Корнєйчука, Л. В. Тайкова та ін.

Задачу про поперечники сформулював в 1936 р. А. М. Колмогоров. Йому належать і перші точні результати щодо обчислення поперечників класів W_2^r в просторі L_2. У подальшому задача про поперечники Колмогорова функціональних класів вивчалась У. Рудіним, С. Б. Стєчкіним, В. М. Тихомировим. В різних ситуаціях точні значення поперечників за Колмогоровим соболєвських класів періодичних функцій знаходили В. М. Тихомиров, Ю. М. Субботін, Ю. І. Маковоз, В. І. Рубан, А. О. Лігун, А. Пінкус та ін. Для класів $W^r H^\omega$ точні значення поперечників за Колмогоровим знайдені М. П. Корнєйчуком, В. П. Моторним, В. І. Рубаном та ін.

Після виникнення сплайнів набув розвитку напрям, пов'язаний з наближенням класів функцій за допомогою цього апарату. Точні результати щодо таких наближень були одержані В. М. Тихомировим, М. П. Корнєйчуком, Ю. М. Субботіним, В. Л. Великіним, А. А. Женсикбаєвим, А. О. Лігуном та ін. Таку увагу сплайни привернули через гарні апроксимативні властивості, а саме, підпростори сплайнів мінімального дефекту з рівномірно розподіленими вузлами, як і підпростори тригонометричних поліномів, виявились екстремальними (у сенсі точних значень) для парних колмогорівських поперечників класів диференційовних періодичних функцій в багатьох ситуаціях.

Низка робіт була присвячена поширенню результатів щодо найкращих наближень і поперечників, відомих для класів диференційовних періодичних функцій, на класи згорток з довільними ядрами, що не збільшують осциляцію. Такі задачі розглядались в роботах А. Пінкуса, В. Т. Шевалдіна, В. Ф. Бабенка та ін.

Незважаючи на значні досягнення в напрямі вивчення поперечників і найкращих наближень функціональних класів, ця тематика залишається однією з найважливіших в теорії наближення і такою, що має ще дуже багато відкритих питань. Зокрема, в данній роботі було поставлено за мету (і реалізовано) відшукання нових екстремальних підпросторів для поперечників за Колмогоровим класів Соболєва, їх узагальнень на класи згорток з CVD–ядрами, класів W^rH^ω.

Починаючи з робіт Е. Ландау, Ж. Адамара, Г. Харді, Дж. Літлвуда набуває активного розвитку напрям, пов'язаний з питаннями оцінки норм похідних функції через її норму і норму старшої похідної в певних нормованих просторах. Такі нерівності називають нерівностями типу Колмогорова з огляду на велику значущість одержаного А. М. Колмогоровим результату.

Найбільш важливими є нерівності такого типу з непокращуваними константами, оскільки саме вони, а також методи їх дослідження мають найбільш цікаві застосування. Слід відзначити, що нерівності типу Колмогорова для функцій одного і багатьох змінних є вельми важливими в задачах аналізу, звичайних диференціальних рівнянь з частинними похідними, теорії інтерполяції операторів, теоремах вкладення та ін.

В багатьох питаннях аналізу і його застосувань, інших напрямах математики, а також в інших галузях науки, таких як: фізика, хімія, біологія, виникає необхідність разом з інтегралами і похідними цілих порядків розглядати також інтеграли і похідні дробових порядків. Проте, точне розв'язання задач аналізу і, зокрема, теорії апроксимації, пов'язаних з дробовими похідними та інтегралами, зустрічається зі значними труднощами. З огляду на це сьогодні відомо зовсім небагато результатів щодо точних нерівностей типу Колмогорова для дробових похідних, особливо в багатовимірному випадку. Отже, цей напрямок досліджень дисертаційної роботи є актуальним і обгрунтованим.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась згідно з загальними планами досліджень кафедри математичного аналізу та кафедри математичного аналізу і теорії функцій Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара, а також згідно з держбюджетними темами № 1-147-07 "Оптимізація методів відновлення математичних об'єктів за неповною інформацією"(номер державної реєстрації 0107U000523), № 1-221-10 "Оптимальне відновлення операторів на класах функцій однієї та багатьох змінних"(номер державної реєстрації 0110U001282), № 1-326-17 "Екстремальні проблеми теорії наближень функцій дійсного змінного і нерівності типу Колмогорова"(номер державної реєстрації 0117U001208) і з науково-дослідною темою ММФ–78–13 "Нерівності для похідних і екстремальні задачі в різних нормованих просторах"(номер державної реєстрації 0114U000193).

Мета і завдання дослідження. *Метою* роботи є одержання нових результатів щодо точних значень найкращих наближень класів диференційовних періодичних функцій сплайнами, знаходження нових екстремальних підпросторів для поперечників цих класів в просторі L_1, одержання нових точних нерівностей типу Колмогорова для функцій однієї та багатьох змінних, а також деякі застосування цих нерівностей до розв'язку екстремальних задач теорії апроксимації.

Об'єктом дослідження є функціональні класи, серед яких класи диференційовних періодичних функцій, класи згорток функцій з довільної перестановочно-інваріантної множини з ядрами, що не збільшують кількість змін знаку на періоді, класи функцій, означених на осі та півосі зі старшою похідною, що належить певним нормованим просторам, класи функцій багатьох змінних з градієнтом або лапласіаном, що належать певним нормованим просторам.

Предметом дослідження є найкращі наближення класів диференційовних періодичних функцій підпросторами сплайнів і класів згорток функцій з довільної перестановочно-інваріантної множини з ядрами, що не збільшують кількість змін знаку на періоді, підпросторами узагальнених сплайнів, оцінки норм похідних та інтегралів дробового порядку функцій однієї та багатьох змінних через норми самих функцій та їх старших похідних у різних нормованих просторах, задача Стєчкіна про наближення необмеженого оператора обмеженими та задача відновлення оператора дробового диференціювання на класах функцій, заданих із похибкою.

Для реалізації поставленої мети в роботі визначені такі *завдання*:

– дослідити найкращі наближення класів r разів диференційованих періодичних функцій з обмеженою в L_p r – ю похідною і класів r разів диференційованих періодичних функцій, обмеження на r – у похідну яких задаються мажорантою модуля неперервності, сплайнами дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнами дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами в метриці простору L_1;

– перевірити гіпотезу про те, що підпростори сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами є екстремальними підпросторами для поперечників за Колмогоровим названих вище класів в просторі L_1;

– одержати нові точні нерівності типу Джексона і типу Бернштейна для сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів мінімального дефекту з нерівномірно розподіленими вузлами;

– дослідити найкращі L_1–наближення класів згорток функцій з довільної перестановочно-інваріантної множини з ядрами, що не збільшують кількість змін знаку на періоді, підпросторами згорток з цими ядрами сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами, перевірити гіпотезу про те, що такі апроксимуючі агрегати є екстремальними для поперечників за Колмогоровим в просторі L_1 вказаних класів;

– знайти порядкові рівності для найкращих наближень класів r разів диференційовних періодичних функцій з обмеженою в L_p r – ю похідною сплайнами з цих класів в метриці просторів L_q $(1 \le p \le q \le 2)$, перевірити гіпотезу про те, що послідовності таких сплайнів є екстремальними за порядком для відносних класзберігаючих поперечників класів W_2^r в просторі L_2;

– оцінити норми дробових похідних за Маршо двічі диференційовних функцій, визначених на дійсній осі через норми функцій та їх других похідних, оцінити норми похідних за Адамаром функцій, визначених на дійсній півосі, з різних класів;

– оцінити норми мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів, похідних Рісса функцій багатьох змінних через норми самих функцій і норми градієнта або лапласіана в різних нормованих просторах;

– здобути розв'язки задач наближення необмеженого оператора дробового диференціювання (за Маршо і за Ріссом) обмеженими на різних класах функцій і оптимального відновлення оператора дробового диференціювання на заданих з похибкою функціях з цих класів;

– оцінити рівномірну норму одновимірного потенціалу Рісса частинної похідної функції з обмеженим в L_∞ лапласіаном;

– в усіх задачах про оцінки норм похідних перевірити непокращуваність цих оцінок, побудувати (за можливості) екстремальні функції.

Методи дослідження. В роботі використано сучасні методи теорії функцій, функціонального аналізу і теорії наближень, зокрема, загальні методи розв'язування екстремальних задач теорії наближення, методи доведення нерівностей для норм "проміжних" похідних, методи оцінювання найкращого наближення необмеженого оператора лінійними обмеженими операторами.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертаційної роботи є новими і полягають у такому:

– знайдено точні значення найкращих наближень класів r разів диференційовних періодичних функцій з обмеженою в L_p r – ю похідною сплайнами дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнами дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами в метриці простору L_1;

– знайдено точні значення найкращих наближень класів r разів диференційовних періодичних функцій з обмеженнями на r – у похідну, що задаються опуклою вгору мажорантою модуля неперервності, сплайнами дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнами дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами в метриці простору L_1;

– вказано нові екстремальні підпростори для поперечників за Колмогоровим названих вище класів в просторі L_1, а саме, доведено, що підпростори сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами реалізують ці поперечники у сенсі точного значення;

– одержано нові точні нерівності типу Джексона і типу Бернштейна для сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів мінімального дефекту з нерівномірно розподіленими вузлами;

– знайдено точні значення найкращих L_1–наближень класів згорток функцій з довільної перестановочно-інваріантної множини з ядрами, що не збільшують кількість змін знаку на періоді, підпросторами згорток з цими ядрами сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами і сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами, з'ясовано, що такі апроксимуючі агрегати є екстремальними для поперечників за

Колмогоровим в просторі L_1 вказаних класів;

– знайдено порядкові рівності для найкращих наближень класів r разів диференційовних періодичних функцій з обмеженою в L_p r – ю похідною сплайнами з цих класів в метриці просторів L_q $(1 \le p \le q \le 2)$, спростовано гіпотезу про те, що послідовності таких сплайнів є екстремальними за порядком для відносних класзберігаючих поперечників класів W_2^r в просторі L_2;

– отримано нові точні мультиплікативні нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних за Маршо функцій, визначених на дійсній осі, що оцінюють вказані норми через норми функцій та їх других похідних;

– одержано нові точні нерівності типу Колмогорова для похідних за Адамаром функцій, визначених на дійсній півосі;

– отримано точні нерівності типу Колмогорова для норм мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів, одержані результати застосовані до розв'язку задачі наближення необмеженого оператора дробового диференціювання обмеженими на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності;

– отримано точні нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса порядку $0 < \alpha < 1$ функцій багатьох змінних з обмеженим в L_s градієнтом і порядку $0 < \alpha < 2$ функцій багатьох змінних з обмеженим в L_s лапласіаном;

– як застосування вказаних нерівностей одержано розв'язок задачі Стєчкіна про наближення необмежених операторів дробового диференціювання обмеженими на класах функцій багатьох змінних, які задаються обмеженнями на L_s – норму градієнта або лапласіана відповідно, а також розв'язок задачі оптимального відновлення оператора дробового диференціювання на заданих з похибкою функціях з цих класів;

– одержано точні нерівності, що оцінюють рівномірну норму одновимірного потенціалу Рісса частинної похідної функції з обмеженим в L_∞

лапласіаном.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Одержані результати і розвинені методи можуть знайти застосування у подальших дослідженнях екстремальних задач теорії наближення, зокрема, задач наближення функціональних класів фіксованими просторами, задач оцінок поперечників, задач знаходження точних нерівностей типу Колмогорова для функцій однієї та багатьох змінних і споріднених задач.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. В статтях, що опубліковані у співавторстві, особистий внесок здобувача такий: в роботах [81, 82, 109] – здобувачеві належить постановка задач, формулювання основних гіпотез, ідеї доведень, побудова схем доведень, контроль за правильністю викладення матеріалу, співавтори брали участь у перевірці робочих гіпотез; в роботах [36, 42] – визначення напрямку досліджень, обговорення результатів, контроль якості викладення результатів належить В. Ф. Бабенку, перевірка основних гіпотез і докладне доведення всіх тверджень належить здобувачеві; в роботі [37] – здобувачеві належить докладне доведення основних результатів; в роботі [39] – перевірка точності нерівностей в теоремах 2 і 3 належить В. Ф. Бабенку, решта результатів отримана здобувачем; в роботах [38, 43]– здобувачеві належить докладне доведення всіх основних результатів; в роботі [41] – здобувачеві належить перевірка гіпотези В. Ф. Бабенка щодо порядкової поведінки відносних поперечників класів Соболєва, докладне доведення основного результату; в роботах [259, 53] – визначення напрямку досліджень, ідеї щодо узагальнення вже існуючих нерівностей і застосування певних методів доведення, гіпотези щодо конструкції екстремальних функцій належать співавторам, докладне доведення всіх результатів, удосконалення схем і методів доведення нерівностей, результати щодо застосувань нерівностей належать здобувачеві; в роботах [44, 47] – В. Ф. Бабенку належить ідея розповсюдження вже існуючих результатів щодо нерівностей типу Колмогорова на випадок L_s –норм і гіпотези щодо конструкції екстремальних функцій, решта досліджень виконана здобувачем; в роботі [46] – В. Ф. Бабенку належить ідея одночасного розгляду нерівностей для похідних за Маршо і за Адамаром з огляду на взаємозв'язок між цими похідними, А. О. Семиренко брала участь в перевірці робочих гіпотез, здобувачеві належить доведення основних результатів, удосконалення і контроль якості викладення матеріалу; в роботі [252] – здобувачеві належить доведення точних нерівностей типу Колмогорова, що оцінюють норму дробової похідної за Маршо функцій, означених на дійсній осі, через норму самої функції та норму її похідної другого порядку, а також результати щодо оцінок норм похідних за Адамаром; в роботі [50] – здобувачеві належить докладне доведення всіх основних результатів.

Апробація результатів дисертації. За результатами дисертаційної роботи було зроблено доповіді на:

– Міжнародній конференції "Functional Methods in Approximation Theory, Stochastic Analysis and Statistics II присвяченій пам'яті А. Я. Дороговцева (01.10.2004–05.10.2004, Київ, Україна);

– Міжнародних математичних конференціях ім. В. Я. Соробогатька (24.09.2007–28.09.2007, 25.08.2015–28.08.2015, Дрогобич, Україна);

– Міждержавних науково-методичних конференціях "Проблеми математичного моделювання"(23.05.2007–25.05.2007, 28.05.2008–30.05.2008, Дніпродзержинськ, Україна);

– Міжнародних конференціях з теорії наближення (04.03.2007–08.03.2007, 07.03.2010–10.03.2010, 07.04.2013–10.04.2013, Сан Антоніо, США);

– Міжнародній конференції з математичного моделювання і обчислень (04.11.2007–08.11.2007, Сан Антоніо, США);

– Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" , присвяченій 70-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка (16.06.2008–21.06.2008, Мелітополь, Україна);

– Міжнародній конференції "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III" , присвяченій пам'яті В. К. Дзядика (22.08.2009–26.08.2009, Світязь, Україна);

–Міжнародній конференції "Теорія наближень та її застосування" , присвяченій 80-річчю з дня народження М. П. Корнєйчука (14.06.2010–17.06.2010, Дніпропетровськ, Україна);

– Міжнародному симпозіумі з теорії наближення, присвяченому 70–річчю з дня народження професора Л. Шумейкера (17.05.2011–20.05.2011, Нешвіл, США);

– Міжнародній конференції з сучасного аналізу (20.06.2011–23.06.2011, Донецьк, Україна);

– Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування" , присвяченій 70-річчю з дня народження чл.-кор. НАНУ О. І. Степанця (28.05.2012–03.06.2012, Кам'янець-Подільський, Україна);

– Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" , присвяченій 75-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка (23.06.2013–30.06.2013, Севастополь, Україна);

– Кримській міжнародній математичній конференції (22.09.2013–04.10.2013, Судак, Україна);

– Міжнародній конференції "Теорія наближень та її застосування" , присвяченій 75-річному ювілею В. П. Моторного (08.10.2015–11.10.2015, Дніпропетровськ, Україна);

– Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування" , присвяченій 75-річчю з дня народження чл.-кор. НАНУ О. І. Степанця (28.05.2017–03.06.2017, Слов'янськ, Україна).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідались і обговорювались на міжвузівському семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу і теорії функцій ДНУ імені Олеся Гончара (Дніпропетровськ, 2010–2014, керівники семінару: член-кореспондент НАН

України, д.ф.-м.н., проф. В. П. Моторний і д.ф.-м.н., проф. В. Ф. Бабенко та Дніпро, 01.11.2017, керівник семінару член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. В. П. Моторний), а також на

– семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (Київ, 10.03.2017, 30.06.2017, керівник семінару д.ф.м.н., проф. А. С. Романюк);

– семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечнікова (Одеса, 03.07.2017, керівник семінару, д.ф.-м.н., проф. А. О. Кореновський);

– науково-методичному семінарі при кафедрі теорії функцій Білоруського державного університету (Мінськ, 25.09.2017, керівник семінару д.ф.м-н., проф. Е. І. Зверович);

– семінарі "Сучасний аналіз"у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (Київ, 04.10.2017, керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. О. О. Курченко, д.ф.-м.н., проф. В. М. Радченко, д.ф.-м.н., проф. І. О. Шевчук).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в роботах [1–42] (див. список публікацій здобувача на с. 10–15), 8 з них опубліковано без співавторів, роботи [1–22] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук, [23–42] – тези доповідей; роботи [4–6, 8–10, 12, 14–16, 18, 21, 22] надруковано у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, переліку умовних позначень, змісту, вступу, п'яти розділів, висновків, додатку та списку використаних джерел, що містить 303 найменування. Повний обсяг роботи становить 330 сторінок друкованого тексту.

Зміст дисертації. У *вступі* визначено об'єкт і предмет дослідження, обгрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовані мета і задачі, охарактерізовані методи дослідження, його наукова новизна, теоретичне і практичне значення, прокоментовано повноту викладення матеріалу в працях та його ступінь апробації, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

Основну частину роботи складають п'ять розділів. На початку кожного розділу (в перших підрозділах) подано стислий огляд літератури, висвітлено основні питання, які відповідають напрямку досліджень даного розділу, зазначаються питання, які залишились невирішеними, анонсуються нові результати, що виносяться на захист.

Перший розділ дисертаційної роботи присвячений дослідженню задач наближення класів диференційовних періодичних функцій підпросторами сплайнів, а також пов'язаним з цією проблематикою питанням про нерівності типу Бернштейна і типу Джексона для сплайнів.

Нехай L_p, $1 \le p \le \infty$, – простори 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з відповідними нормами $\|\cdot\|_{L_p} = \|\cdot\|_p$; $p' = p/(p-1)$.

Нехай H– підпростір простору L_p і $g \in L_{p'}$. Якщо для всіх $h \in H$

$$\int_0^{2\pi} g(x)h(x)\,dx = 0,$$

то будемо писати $g \perp H$. Якщо H– підпростір констант, то замість $g \perp H$ будемо використовувати позначення $g \perp 1$.

Нехай множина $F \subset L_1$ така, що $\{f \in F : f \perp 1\} \ne \emptyset$. Для $r = 1, 2, ...,$ позначимо через $W^r F$ клас функцій $f \in L_1$, у яких $(r-1)$-а похідна $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} = f)$ локально абсолютно неперервна і $f^{(r)} \in F$. Відзначимо, що, якщо F – одинична куля простору L_p, то множина $W^r F = W_p^r$ – це стандартний соболєвський клас функцій, у яких $(r-1)$ – а похідна локально абсолютно неперервна і $\|f^{(r)}\|_p \le 1$.

Для невід'ємної функції $f \in L_1$ позначимо через $r(f,t)$ неспадну перестановку звуження функції f на проміжок $[0, 2\pi]$. Якщо g – довільна функція із L_1, то покладемо

$$\Pi(g,t) := r(g_+, t) - r(g_-, 2\pi - t),$$

де $g_{\pm} := \max\{\pm g(t), 0\}$.

Множину $F \in L_1$ назвемо Π–інваріантною, якщо із того, що $f \in F$ і $\Pi(g) = \Pi(f)$, випливає, що $g \in F$.

Нехай C^r ($r = 0, 1, ...,$ $C^0 := C$)– простір r разів неперервно диференційовних (неперервних для $r = 0$) 2π- періодичних функцій, $\omega(t)$ – довільний фіксований модуль неперервності. Клас функцій $f \in C^r$, у яких при всіх t

$$|f^{(r)}(t) - f^{(r)}(t + \delta)| \leq \omega(\delta), \quad \delta \geq 0,$$

будемо позначати через $W^r H^\omega$.

Найкращим наближенням класу $M \subset L_p$ множиною H із L_p в метриці L_p називається величина

$$E(M, H)_p = \sup_{f \in M} \inf_{h \in H} \|f - h\|_p.$$

Величини

$$d_n(M, L_p) = \inf_{H_n} E(M, H)_p, \tag{1}$$

де точна нижня межа береться за всіма підпросторами H_n простору L_p, розмірність яких не перевищує n, називаються поперечниками Колмогорова класу M в просторі L_p. Підпростори H_n, які реалізують точну нижню межу в правій частині (1), називаються екстремальними підпросторами.

Для кожного натурального n і $m = 0, 1, ...$ через T_{2n-1} позначимо простір тригонометричних поліномів порядку не вище $n - 1$, а через $S^1_{2n,m}$ – простір 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку m дефекту 1 с вузлами в точках $j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$.

Нехай $\varphi_{n,m}(t)$ $(n, m \in \mathbb{N})$– m-й $\dfrac{2\pi}{n}$–періодичний інтеграл з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_{n,0}(t) = \operatorname{sign} \sin \mathrm{nt}$.

При фіксованих $\omega(\cdot)$ і $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$f_{n,0}(\omega; t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n} - 2t\right), & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2n}, \\ \frac{1}{2}\omega\left(2t - \frac{\pi}{n}\right), & \frac{\pi}{2n} \leq t \leq \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Через $f_{n,r}(\omega;t)$ $(r=1,2,...)$ позначимо r-й $\dfrac{2\pi}{n}$–періодичний інтеграл від $f_{n,0}(\omega;t)$ з нульовим середнім значенням на періоді.

Добре відомо (див., наприклад, [133, теореми 4.2.4, 5.4.8, 8.1.13]), що для всіх $n,r=1,2,...$, $1\le p\le\infty$ виконуються рівності

$$E(W_p^r,T_{2n-1})_1=\|\varphi_{n,r}\|_{p'}; \tag{2}$$

$$E(W_p^r,S_{2n,m}^1)_1=\|\varphi_{n,r}\|_{p'},\ \ m=r-1,r,...; \tag{3}$$

$$d_{2n-1}(W_p^r,L_1)=d_{2n}(W_p^r,L_1)=\|\varphi_{n,r}\|_{p'}. \tag{4}$$

До того ж простори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W_p^r,L_1)$ і $d_{2n}(W_p^r,L_1)$, а простори $S_{2n,m}^1$, при всіх $m\ge r-1$ – для поперечників $d_{2n}(W_p^r,L_1)$.

Рівність (2) для $p=1$ отримана С. М. Нікольским [163], для $p>1$ її встановив Л. В. Тайков [215], для $p=\infty$ незалежно і іншим методом цей результат здобула С. П. Туровец [231]. Співвідношення (3) доведене А. О. Лігуном [283]. Оцінку знизу для непарних поперечників при $p=1$ отримали незалежно Ю. І. Маковоз [156] і Ю. М. Суботін [201, 202], а при $p=\infty$ Ю. І. Маковоз [157]. Оцінка знизу для парних поперечників при $p=1,\infty$ належить В. І. Рубану (див., напр. [131, розд. 10]). Для $1<p<\infty$ співвідношення (4) незалежно і різними методами отримали А. О. Лігун [147], Ю.І. Маковоз [158], А. Пінкус [291].

В [15] встановлено, що для довільної П–інваріантної множини F і будь-яких $n,r=1,2,...;$ $m\ge r$ виконуються такі рівності

$$E(W^rF,T_{2n-1})_1=E(W^rF,S_{2n,m}^1)_1=\sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt,$$

і

$$d_{2n-1}(W^rF,L_1)=d_{2n}(W^rF,L_1)=\sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}}\int\limits_0^{2\pi}\Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt. \tag{5}$$

До того ж простори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W^rF,L_1)$ і $d_{2n}(W^rF,L_1)$, а простори $S_{2n,m}^1$ при всіх $m\ge r$ – для поперечників $d_{2n}(W^rF,L_1)$.

М. П. Корнєйчук [122, 123, 126] (див. також [133, теореми 7.2.2, 7.2.5]) довів, що для будь-якого опуклого вгору модуля неперервності $\omega(t)$, при всіх $n = 1, 2, ..., r = 0, 1, ..., m \geq r$ виконується співвідношення

$$E(W^r H^\omega, T_{2n-1})_1 = E(W^r H^\omega, S^1_{2n,m})_1 = \|f_{n,r}(\omega; \cdot)\|_1. \tag{6}$$

Відомо також, що

$$d_{2n-1}(W^r H^\omega, L_1) = d_{2n}(W^r H^\omega, L_1) = \|f_{n,r}(\omega; \cdot)\|_1, \tag{7}$$

причому поперечники $d_{2n-1}(W^r H^\omega, L_1)$ і $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ реалізують підпростори T_{2n-1}, а поперечники $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ – підпростори $S^1_{2n,m}$, $m \geq r$. Оцінки знизу для непарних поперечників отримані В. П. Моторним і В. І. Рубаном [162], а для парних В. І. Рубаном [183].

В *підрозділі 1.2* ми розглядаємо наближення класів $W^r F$ і $W^r H^\omega$ підпросторами $S^2_{2n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, поліноміальних сплайнів порядку m дефекту 2 з вузлами в точках $t_j = \dfrac{2j\pi}{n}$, $j \in \mathbb{Z}$. Відзначимо, що розмірність цих підпросторів для довільного m дорівнює $2n$. Основними результатами цього підрозділу є такі теореми:

Теорема 1.2.2. *Нехай* $n, r = 1, 2, ..., m = r, r+1, ...$ $1 \leq p \leq \infty$, F – *довільна* Π-*інваріантна множина* 2π-*періодичних функцій. Тоді*

$$E(W^r F, S^2_{2n,m})_1 = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f, t) \Pi(\varphi_{n,r}, t)\, dt.$$

Зокрема,

$$E(W^r_p, S^2_{2n,m})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}.$$

Теорема 1.2.3. *Нехай* $n, r = 1, 2, ..., m = r+1, r+2, ...$ $\omega(t)$ – *опуклий вгору модуль неперервності, тоді*

$$E(W^r H^\omega, S^2_{2n,m})_1 = \|f_{n,r}(\omega, \cdot)\|_1.$$

Результати теорем 1.2.2 і 1.2.3 разом зі співвідношеннями (5) і (7) показують, що $S^2_{2n,m}$, як T_{2n-1} і $S^1_{2n,m}$, є екстремальними підпросторами для поперечників $d_{2n}(W^r F, L_1)$ (при $m \geq r$) і $d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$ (при $m \geq r+1$).

В *підрозділі 1.3* ми показуємо, що, крім названих вище, існують інші підпростори, екстремальні для поперечників $d_{2n}(W^rF, L_1)$ і $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$. Для цього ми розглядаємо наближення класів W^rF і W^rH^ω підпросторами $S^1_{2n,m}(h)$, $n, m \in \mathbb{N}$, $h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$, поліноміальних сплайнів порядку m дефекту 1 з вузлами в точках

$$t_j = \frac{2\pi\left[\frac{j}{2}\right]}{n} + (1-(-1)^j)\frac{h}{2}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

де $[\cdot]$ – ціла частина числа. Відзначимо, що розмірність цих підпросторів при будь-якому m дорівнює $2n$.

Основними результатами цього підрозділу є такі теореми:

Теорема 1.3.2. *Нехай* $n, m, r \in \mathbb{N}$, $m \geq r+1$, $0 < h < \frac{2\pi}{n}$, $1 \leq p \leq \infty$, F *– довільна* Π*-інваріантна множина* 2π*-періодичних функцій. Тоді*

$$E(W^rF, S^1_{2n,m}(h))_1 = \sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt.$$

Зокрема,

$$E(W^r_p, S^1_{2n,m}(h))_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}.$$

При $p = 1$ *останнє співвідношення правильне і для* $m = r$.

Теорема 1.3.3. *Нехай* $n, m, r \in \mathbb{N}$, $m \geq r+1$, $0 < h < \frac{2\pi}{n}$, $\omega(t)$ *– опуклий вгору модуль неперервності, тоді*

$$E(W^rH^\omega, S^1_{2n,m}(h))_1 = \|f_{n,r}(\omega,\cdot)\|_1.$$

Результати теорем 1.3.2 і 1.3.3 разом зі співвідношеннями (5) і (7) показують, що $S^1_{2n,m}(h)$ є екстремальними підпросторами для поперечників $d_{2n}(W^rF, L_1)$ і $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$ (при $m \geq r+1$) для кожного $h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$.

В *підрозділах 1.4 і 1.5* ми, застосовуючи результати підрозділів 1.2 і 1.3, а також деякі ідеї, використані для їх доведення, одержуємо точні нерівності типу Джексона для сплайнів $S^2_{2n,m}$ і $S^1_{2n,m}(h)$ і точні нерівності типу Бернштейна для сплайнів $S^2_{2n,m}$.

В *розділі 2* ми продовжуємо розпочаті в першому розділі дослідження щодо найкращих наближень достатньо загальних класів W^rF, елементи яких є згортками з ядрами Бернуллі функцій з довільної П–інваріантної множини. Відзначимо, що істотно доповнити запас класів функцій ми можемо, розглядаючи замість згорток з ядрами Бернуллі згортки з іншими (більш загальними) ядрами.

Згортку $K*\varphi$ функції $K\in L_1$ і $\varphi\in L_1$ означимо рівністю

$$(K*\varphi)(x)=\int\limits_0^{2\pi} K(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Для ядра K покладемо

$$M(K)=\{m\in\mathbb{Z}:\hat{K}_m=(2\pi)^{-1}\int\limits_0^{2\pi}K(t)e^{-imt}\,dt=0\},$$

і будемо надалі вважати, що $M(K)$ порожня або скінченна множина. Якщо $M\in\mathbb{Z}$ – скінченна центрально-симетрична множина, то через $T(M)$ позначимо лінійний простір тригонометричних поліномів виду

$$T(x)=\sum_{m\in M}c_m e^{imx},\quad c_{-m}=\bar{c}_m$$

(якщо $M=\emptyset$, то $T(x)\equiv 0$). Якщо $M=\{-(n-1),...,-1,0,1,...,n-1\}$, то $T(M)=T_{2n-1}$.

Нехай задане ядро K і множина $F\subset L_1$. Через $K*F$ позначимо клас функцій виду

$$f(x)=T(x)+(K*\varphi)(x),\ \ T\in T(M(K)),\varphi\in F,\ \varphi\perp T(M(K)).$$

Для ядра K покладемо $\mu=\mu(K)=0$, якщо $0\notin M(K)$ $\mu=\mu(K)=1$, якщо $0\in M(K)$.

Неперервне на $(0,2\pi)$ і таке, що не є тригонометричним поліномом ядро K будемо називати CVD-ядром (і писати $K\in CVD$), якщо $\nu(a\mu+K*\varphi)\le\nu(\varphi)$ $\forall\varphi\in C$, $\varphi\perp\mu$, $a\in\mathbb{R}$ ($\nu(g)$ – число змін знаку на періоді у 2π-періодичної функції g).

Нехай $\Delta\in(0,2\pi]$. Якщо для будь-яких $\varphi\in C$, $\varphi\perp T(M)$ і $T\in T(M)$ таких, що $T+K*\varphi$ має нулі в кожному інтервалі довжини Δ, справедлива нерівність $\nu(T+K*\varphi)\le\nu(\varphi)$, то ядро K будемо називати

$CVD[\Delta]$-ядром і писати $K \in CVD[\Delta]$. Зауважимо, що, якщо $K \in CVD$, то $K \in CVD[\Delta]$ для будь-якого $\Delta \in (0, 2\pi]$.

В другому розділі ми вивчаємо найкращі наближення класів згорток з такими ядрами функцій з довільної Π–інваріантної множини, причому разом з симетричними наближеннями ми розглядаємо також і несиметричні. Дамо необхідні означення.

Для $f \in L_p$ і чисел $\alpha, \beta \geq 0$ покладемо

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p.$$

Для $\alpha, \beta > 0$ задача найкращого (α, β)-наближення класу функцій $M \subset L_p$ множиною $H \subset L_p$ полягає в тому, щоб знайти величину

$$E(M, H)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f \in M} \inf_{h \in H} \|f - h\|_{p;\alpha,\beta}. \tag{8}$$

Нехай фіксовано множину $H \subset L_p$. Функції $f \in L_p$ поставимо у відповідність підмножини:

$$H_f^+ = \{u(t) : u \in H, u(t) \leq f(t), 0 \leq t \leq 2\pi\},$$

$$H_f^- = \{u(t) : u \in H, u(t) \geq f(t), 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Величини

$$E^{\pm}(f, H)_p := \begin{cases} \inf\{\|f - u\|_p : u \in H_f^{\pm}\}, & H_f^{\pm} \neq \emptyset, \\ \infty, & H_f^{\pm} = \emptyset \end{cases}$$

і

$$E^{\pm}(M, H)_p := \sup_{f \in M} E^{\pm}(f, H)_p$$

називаються найкращим наближенням знизу $(+)$ і зверху $(-)$ функції $f \in L_p$ і класу $M \subset L_p$ відповідно.

Покладаючи в формулі (8) $\alpha = \beta = 1$, отримаємо звичайні найкращі L_p–наближення, а спрямовуючи α або β до $+\infty$ найкраще наближення зверху або знизу (див. [14, теорема 2]) класу M. Отже, сім'я задач найкращого (α, β)–наближення "інтерполює" задачі найкращого і найкращого одностороннього наближень і дозволяє розглядати їх з загальної точки зору. У зв'язку з цією властивістю нижче будемо припускати для α або β значення $+\infty$, тобто будемо ототожнювати в цих випадках найкращі (α,β)–наближення з найкращими односторонніми наближеннями. Відзначимо, що вивчення задач найкращого (α,β)–наближення при $\alpha,\beta<\infty$ має, звичайно, і самостійний інтерес.

Нехай $\varphi_{\lambda,m}(\alpha,\beta;t)$ $(\alpha,\beta>0,\ \lambda>0,\ m\in\mathbb{N})$ – $2\pi/\lambda$-періодичний інтеграл порядку m з нульовим середнім значенням на періоді від парної $2\pi/\lambda$-періодичної функції $\varphi_{\lambda,0}(\alpha,\beta;t)$, яка для $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{\lambda}\right)$ визначається в такий спосіб

$$\varphi_{\lambda,0}(\alpha,\beta;t)=\begin{cases}\alpha, & 0\le t\le \dfrac{\pi\beta}{\lambda(\alpha+\beta)},\\ -\beta, & \dfrac{\pi\beta}{\lambda(\alpha+\beta)}<t\le\dfrac{\pi}{\lambda}.\end{cases}$$

Для $\alpha=\beta=1$ замість $\varphi_{\lambda,m}(\alpha,\beta;t)$ будемо писати $\varphi_{\lambda,m}(t)$.

У випадку $\max\{\alpha,\beta\}=\infty$ Покладаємо

$$(K*\varphi_{n,0}(1,\infty))(x)=\int\limits_0^{2\pi}K(t)\,dt-\frac{2\pi}{n}\sum_{m=0}^{n-1}K(x-2m\pi/n).$$

Зрозуміло, що при $\beta\to\infty$ буде

$$\|K*\varphi_{n,0}(1,\beta)_{\pm}\|_\infty\to\|K*\varphi_{n,0}(1,\infty)_{\pm}\|_\infty.$$

Загальну теорію найкращих наближень тригонометричними поліномами класів $K*W^0_\infty$ і $K*W^0_1$ в метриках C і L_1 відповідно побудував С. М. Нікольський [163]. Для важливих сукупностей ядер найкращі наближення класів $K*W^0_\infty$ і $K*W^0_1$ в метриках C і L_1 були знайдені В. К. Дзядиком [83]–[87], С. Б. Стєчкіним [193], Сунь Юншеном [212, 213], К. І. Бабенком [59, 62] (див. також [63, розд. 3, §1]). Задача обчислення поперечників класів згорток з CVD-ядрами і класів, що задаються за допомогою диференціальних операторів зі сталими коефіцієнтами, розглядалась в роботах А. Пінкуса [292], В. Т. Шевалдіна [237, 238].

Найбільш загальні результати в цьому напрямі полягають у такому. Нехай $n=1,2,...,$ $r=0,1,...,$ $\Delta\in(0,2\pi]$, $\alpha,\beta\in(0,\infty]$. Нехай також K є $CVD[\Delta]$-ядром, F – перестановочно-інваріантною підмножиною в

L_1 і H є T_{2n-1} або $K * S^1_{2n,r}$. Тоді, якщо $n \geq \dfrac{2\pi}{\Delta}$ настільки велике, що $H \supset T(M(K))$, то

$$E(K * F, H)_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi, t)\Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot); t)\, dt. \qquad (9)$$

Зокрема, якщо $K \in CVD$, то рівність (9) правильна при всіх n. Результат (9) отримав В. Ф. Бабенко [16].

Для $K \in CVD$ справедлива також рівність

$$d_{2n-1}(K * F, L_1) = d_{2n}(K * F, L_1) =$$
$$= \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi, t)\Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(t))\, dt. \qquad (10)$$

При цьому підпростори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(K * F, L_1)$ і $d_{2n}(K * F, L_1)$, а підпростори $K * S^1_{2n,r}$ $(r = 0, 1, ...)$ – для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

У випадку $F = W^0_p$ результат (10) належить А. Пінкусу [292], а у випадку довільної Π - інваріантної множини F – В. Ф. Бабенку [17].

В *підрозділі 2.2* ми знаходимо точні значення найкращих наближень класів згорток $K * F$ ($K \in CVD$, F–довільна Π–інваріантна множина) підпросторами $K * S^2_{2n,r}$, а в *підрозділі 2.3* – точні значення найкращих несиметричних наближень класів згорток $K * F$ ($K \in CVD[\Delta]$, F–довільна Π–інваріантна множина) підпросторами $K * S^1_{2n,r}(h)$ $\left(0 < h < \dfrac{2\pi}{n}\right)$.

Основним результатом підрозділу 2.2 є

Теорема 2.2.1. *Нехай $n, k \in \mathbb{N}$, $K \in CVD$, F – Π-інваріантна підмножина в L_1. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність*

$$E(K * F, K * S^2_{2n,k})_1 = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp \mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(f, t)\Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}; t)\, dt.$$

Результат теореми 2.2.1 разом з рівністю (10) показують, що підпростори $K * S^2_{2n,k}$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

Основний результат підрозділу 2.3 складає

Теорема 2.3.1. *Нехай* $n, r \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi/n)$, $\Delta \in (0, 2\pi]$, $\alpha, \beta \in (0; \infty]$. *Нехай також* $K \in CVD[\Delta]$, F*-*Π*-інваріантна підмножина в* L_1. *Тоді якщо* $n \geq 2\pi/\Delta$ *настільки велике, що* $K * S^1_{2n,r}(h) \supset T(M(K))$, *то*

$$E(K * F; K * S^1_{2n,r}(h))_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\substack{f \in F \\ f \perp \mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; t)\Pi(f; t))\, dt$$

Зокрема, якщо $K \in CVD$, *то рівність правильна для всіх* n.

Зіставляючи рівність (10) і результат теореми (2.3.1) при $K \in CVD$, $\alpha = \beta = 1$, бачимо, що підпростори $K * S^1_{2n,r}(h)$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено вивченню поведінки відносних поперечників та найкращих відносних наближень функціональних класів за наявності обмежень на похідні наближаючих функцій.

Нехай H – множина в L_p; $M, M' \subset L_p$ – деякі класи функцій. Для $M \subset L_p$ величину

$$E(M, H \cap M')_p := \sup_{f \in M} E(f, H \cap M')_p$$

називають найкращим відносним (відносно класу M') наближенням класу M множиною H в просторі L_p.

Величини

$$d_n(M, L_p, M') := \inf_{H_n} E(M, H_n \cap M')_p,$$

де точна нижня межа береться за всіма підпросторами простору L_p, розмірність яких не перевищує n, були введені до розгляду В. М. Коноваловим [117] і називаються відносними поперечниками (або поперечниками за Коноваловим).

Як і для поперечників за Колмогоровим, підпростори, що реалізують інфімум в правій частині останньої рівності, називаються екстремальними підпросторами для відносних поперечників, а послідовність підпросторів $\{H_n\}$, для якої

$$d_n(M, L_p, M') \asymp E(M, H_n \cap M')_p, \quad n \to \infty,$$

називається екстремальною за порядком.

Добре відомо (див. [12]), що для всіх $r \in \mathbb{N}$ і $1 \le p \le \infty$

$$d_n(W_p^r, L_p) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Крім того, для будь-якого $r \in \mathbb{N}$

$$d_n(W_2^r, L_2, W_2^r) = d_n(W_2^r, L_2) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty.$$

Проте, порядкова поведінка відносних поперечників $d_n(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r)$ і $d_n(W_1^r, L_1, W_1^r)$ при $n \to \infty$ істотно відрізняється від поведінки колмогорівських поперечників (11).

В. М. Коноваловим [117] було доведено, що для всіх $r = 2, 3, ...$

$$d_n(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty. \tag{12}$$

Пізніше В. Ф. Бабенко [18] встановив, що для $r = 3, 4...$

$$d_n(W_1^r, L_1, W_1^r) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Така різниця в поведінці відносних та колмогорівських поперечників викликала інтерес до дослідження поведінки при $n \to \infty$ величин $d_n(W_p^r, L_q, W_s^r)$ для різних значень $1 \le p, q, s \le \infty$. При цьому питання про поведінку величин $d_n(W_p^r, L_p, W_p^r)$ для $p \ne 1, 2, \infty$ залишається відкритим.

Відзначимо, що для $p = 1$ і $p = \infty$ разом з підпросторами тригонометричних поліномів порядку не вище $n - 1$, які є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W_p^r, L_p)$ і $d_{2n}(W_p^r, L_p)$, екстремальними для поперечників $d_{2n}(W_p^r, L_p)$ є також підпростори сплайнів $S_{2n,m}^1$, $m \ge r - 1$ (див. [133, теорема 5.4.8]).

Відомо також (див. [18, 19, 21]), що підпростори $S_{2n,r}^1$ є екстремальними за порядком у співвідношеннях (12) і (13). Крім того, як випливає із результата Ю. М. Субботіна [204], підпростори $S_{2n,2r-1}^1$ реалізують поперечники $d_{2n}(W_2^r, L_2, W_2^r)$. Наявність таких гарних апроксимативних властивостей у просторів $S_{2n,m}^1$ наводить на думку про застосування їх до розв'язання задач про поведінку поперечників $d_n(W_p^r, L_p, W_p^r)$ і для $p \neq 1, \infty$, а також до інших задач відносної апроксимації. Питанням порядкової поведінки найкращих відносних наближень класів Соболєва підросторами сплайнів мінімального дефекту присвячено *підрозділ 3.2.* В даному підрозділі ми вивчаємо порядкову поведінку при $n \to \infty$ послідовності величин $E(W_p^r, S_{2n,r}^1 \cap W_p^r)_q$ для $1 \le q \le p \le 2$, $p \neq 1$, і показуємо, що насправді послідовність підпросторів $\{S_{2n,r}^1\}$ не є екстремальною за порядком принаймні для поперечників $d_n(W_2^r, L_2, W_2^r)$ при $r \ge 3$. Основний результат цього підрозділу складає

Теорема 3.2.1 *Для всіх $r = 3, 4, \ldots$ і $1 \le q \le p \le 2$ виконуються порядкові рівності*

$$E(W_p^r, S_{2n,r} \cap W_p^r)_q \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty.$$

Деякі питання щодо точних і асимптотично точних значень найкращих відносних наближень соболєвських класів сплайнами обговорюються в *підрозділі 3.3.*

В *четвертому підрозділі* третього розділу наводиться означення слабкого поперечника за Колмогоровим, який є аналогом звичайного колмогорівського поперечника в просторі функцій, що мають значення в довільному банаховому просторі. Такі поперечники введені до розгляду В. Ф. Бабенком і С. О. Пічуговим [55]. Нами вивчається порядкова поведінка при $n \to \infty$ (для випадку L_∞–наближень) послідовності відносних слабких поперечників (ці характеристики введені в [32]) класів згорток банаховозначних функцій з дісним ядром.

Четвертий і п'ятий розділи дисертаційної роботи присвячено дослідженню нерівностей типу Колмогорова з непокращуваними константами для норм дробових похідних та інтегралів функцій однієї та багатьох змінних.

Нехай $G = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{T}, \mathbb{R}^m\}$, де $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{R}_+$ – множина додатних чисел, $\mathbb{R}_-$ – множина від'ємних чисел, $\mathbb{T}$ – відрізок $[0, 2\pi]$ з ототожненими кінцями, $\mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$ – евклідів простір точок

$x=(x_1,...,x_m)$, $|x|=(\sum\limits_{i=1}^{m}x_i^2)^{1/2}$.

Через $L_p(G)$, $1\le p\le\infty$, позначимо простір вимірних на G функцій $f: G\to\mathbb{R}$ зі стандартними нормами.

В *розділі 4* ми досліджуємо нерівності типу Колмогорова для функцій однієї змінної.

Нехай $k,r\in\mathbb{N}$, $k<r$, $1\le q,p,s\le\infty$, $G=\{\mathbb{R},\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_-,\mathbb{T}\}$.

Нерівність

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(G)}\le K\|f\|^{\mu}_{L_p(G)}\|f^{(r)}\|^{\lambda}_{L_s(G)},\qquad f\in L^r_{p,s}(G).$$

$$\lambda=\frac{k-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}{r-\frac{1}{s}+\frac{1}{p}},\qquad \mu=1-\lambda,$$

називають мультиплікативною нерівністю типу Колмогорова.

Перші точні результати щодо нерівностей такого типу належать Е. Ландау, Ж. Адамару, Г. Г. Гарді, Дж. І. Літтлвуду, Г. Поліа. Після фундаментальної роботи А. М. Колмогорова важливі результати в цьому напрямі отримані І. М. Стейном, Л. В. Тайковим, А. П. Маторіним, І. Дж. Шонбергом, А. Каваретта, Ю. І. Любічем, А. М. Купцовим, В. М. Габушиним, а також В. В. Арестовим, А. О. Лігуном, В. Ф. Бабенком, С. О. Пічуговим, В. О. Кофановим та багатьма іншими математиками.

Точних нерівностей типу Колмогорова для норм похідних дробового порядку здобуто значно менше. Відомі в цьому напрямі нерівності складають результати досліджень С. П. Гейсберга, В. В. Арестова, В. М. Тихомирова, А. П. Буслаєва, Г. Г. Магаріл-Ільяєва, В. Ф. Бабенка, М. С. Чурілової та ін.

Введемо до розгляду дробову похідну за Маршо порядку $\alpha>0$ (див. [184, §5.6], що для функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ і $x\in\mathbb{R}$ означається в такий спосіб:

$$D^{\alpha}_{\pm}f(x)=\frac{1}{\varkappa(\alpha,n)}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(\Delta^n_{\pm t}f)(x)}{t^{1+\alpha}}\,dt,\quad n\in\mathbb{N},n>\alpha,$$

де

$$(\Delta_{\pm t}^{n})(x) := \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \mathbf{C}_n^m f(x \mp mt),$$
$$\varkappa(\alpha, n) := \Gamma(-\alpha) \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \mathbf{C}_n^m m^\alpha,$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера.

Зазначимо, що в означенні дробової похідної Маршо довільного порядку $\alpha > 0$ нормуючий коефіцієнт побудовано таким чином, щоб значення похідної не залежало від порядку n скінченної різниці $\Delta_{\pm t}^n$.

Через $L_{p,s}^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p, s \le \infty$, позначимо простір функцій $f \in L_p(\mathbb{R})$, для яких $f^{(r)} \in L_s(\mathbb{R})$, а через $\bigvee(\mathbb{R})$ – простір функцій $f \in L_1(\mathbb{R})$ з обмеженою на $\mathbb{R}$ варіацією.

В *підрозділі 4.2* одержані нові точні нерівності для дробових похідних за Маршо функцій $f \in L_{p,s}^r(\mathbb{R})$ у випадку $p = q = \infty$, $1 \le s < \infty$, $\alpha \in (0, 1)$, $r = 2$ та $p = q = \infty$, $1 < s \le \infty$, $\alpha \in (1, 2 - \frac{1}{s})$, $r = 2$.

Для кожного $x \in \mathbb{R}$ і $f \in L_1(\mathbb{R})$ позначимо через $f^{[m]}$ $(m \in \mathbb{N})$ – m-й інтеграл від функції f:

$$f^{[m]} := \frac{1}{(m-1)!} \int_{\mathbb{R}} (x - t)_+^{m-1} f(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Для $\tau > 0$ означимо функцію $\mathcal{R}_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в такий спосіб:

$$\mathcal{R}_\tau(x) = \begin{cases} \frac{x^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Нехай $\alpha \in (0, 1)$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ і $s' = s/(s-1)$. Для $p \in [0, \alpha/(1-\alpha)]$, розглянемо функцію

$$\omega(p; x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -p, \\ -\dfrac{1}{1+p}, & x \in (-p, 1], \\ (1-\alpha)x^{-\alpha}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Для $x \in \mathbb{R}$, розглянемо функцію $\tau(p; x) := \Gamma(2-\alpha)\mathcal{R}_{2-\alpha}(x) - \omega^{[1]}(p; x)$ і означимо для $s > 1$

$$\phi_s(p; x) := \frac{1}{2} \int_{-p}^{1} t \cdot \tau_{(s')}(p; t)\, dt + \int_{-p}^{x} (x - t) \cdot \tau_{(s')}(p; t)\, dt, \quad s > 1,$$

а для $s = 1$

$$\phi_1(p;x) := \begin{cases} (1+p)/4, & x \leqslant -p, \\ (1+p-2x)/4, & x \in (-p,1), \\ -(1+p)/4, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Тут ми використовуємо позначення $g_{(s')} := |g|^{s'-1} \operatorname{sign} g$.

Теорема 4.2.3. *Нехай $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$, $\alpha \in (0,1)$ і $h > 0$. Тоді для кожної функції $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$, виконується точна нерівність*

$$\|D^\alpha_- f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\|D^\alpha_- \Phi_{\alpha,s}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\|\Phi_{\alpha,s}\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \|f\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\mathbb{R})} \|f''\|^{\lambda}_{L_s(\mathbb{R})}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2-1/s},$$

де $\Phi_{\alpha,s} := \|\phi''_s(p_{\alpha,s};\cdot)\|^{-1}_{L_s(\mathbb{R})} \cdot \phi_s(p_{\alpha,s};\cdot)$, $s > 1$, і $\Phi_{\alpha,1} := \phi_1(p_{\alpha,1};\cdot)$, а числа $p_{\alpha,s}$ визначаються однозначно для кожного $\alpha \in (0,1)$ і $1 \leq s \leq \infty$.

Крім того, якщо $s > 1$, то функція $\Phi_{\alpha,s}(x/h)$, $x \in \mathbb{R}$, перетворює нерівність на рівність.

Нехай $1 < s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$ і $\alpha \in (1, 2-1/s)$. Розглянемо множину $S := \{(a,b) \in (0,1)^2 : a \leq b\} \times [0,+\infty)$. Для кожного $(a,b,p) \in S$, означимо

$$\omega(a,b,p;x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -p, \\ \dfrac{1-b+\left(1-b^{1-\alpha}\right)(a-1)}{(1-b)(a+p)} & x \in [-p,a], \\ \dfrac{b^{1-\alpha}-1}{1-b}, & x \in [a,1], \\ (1-\alpha)x^{-\alpha}, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Для $x \in \mathbb{R}$, розглянемо функцію $\tau(a,b,p;x) := \Gamma(2-\alpha)\mathcal{R}_{2-\alpha}(x) - \omega^{[1]}(a,b,p;x)$ і

$$\phi(a,b,p;x) := \frac{1}{2}\int_{-p}^{a} t \cdot \tau_{(s')}(a,b,p;t)\,dt + \int_{-p}^{x} (x-t)\cdot \tau_{(s')}(a,b,p;t)\,dt.$$

Нехай $\Phi_{\alpha,s} := \|\varphi''(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s};\cdot)\|^{-1}_{L_s(\mathbb{R})} \cdot \varphi(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s};\cdot)$, де трійки $(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s})$ визначені для кожного $1 < s \leq \infty$ і $\alpha \in \left(1, 2-\dfrac{1}{s}\right)$.

Теорема 4.2.4. *Нехай* $1 < s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$, $\alpha \in (1, 2-1/s)$ *і* $h > 0$. *Тоді для кожної функції* $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$, *виконується точна нерівність*

$$\|D^\alpha_- f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\|D^\alpha_- \Phi_{\alpha,s}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\|\Phi_{\alpha,s}\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \|f\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\mathbb{R})} \|f''\|^{\lambda}_{L_s(\mathbb{R})}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2-1/s}.$$

При цьому функція $\Phi_{\alpha,s}(x/h)$, $x \in \mathbb{R}$, *перетворює нерівність на рівність.*

У *підрозділі 4.3* одержано точні нерівності для норм дробових похідних за Адамаром функцій, визначених на дійсній півосі, які у випадку $1 \leq s \leq \infty$ оцінюють L_∞–норми похідних порядку $0 < \alpha < 1$, а у випадку $1 < s \leq \infty$ – порядку $1 < \alpha < 2 - \dfrac{1}{s}$ через L_∞–норму самої функції і L_s–норму оператора $\mathfrak{D}^2$ $\left(\mathfrak{D} = x \cdot \dfrac{d}{dx}\right)$. Для похідних за Адамаром порядку $0 < \alpha < 1$ одержано деякі точні поточкові оцінки через L_∞–норму самої функції і L_∞–норму її другої похідної або оператора $\mathfrak{D}$, а також нерівності, що оцінюють L_p–норми похідних за Адамаром через L_p–норму та гельдорову норму самої функції.

В *підрозділі 4.4* встановлено точні нерівності, що оцінюють норми узагальнених потенціалів Феллера першої похідної заданої на дійсній осі функції через L_∞–норму цієї функції і L_s–норму її першої похідної.

В *п'ятому розділі* ми продовжуємо дослідження нерівностей Колмогорова і зосереджуємо увагу на таких нерівностях для функцій багатьох змінних, а також на питаннях застосування цих нерівностей до розв'язку деяких споріднених задач, таких як: задача наближення необмеженого оператора дробового диференціювання обмеженими на різних класах функцій, задача відновлення оператора на класах функцій, заданих з похибкою, задача Колмогорова.

В *підрозділі 5.2* ми досліджуємо точні нерівності типу Колмогорова для норм мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів, а також деякі застосування цих нерівностей.

Для заданого вектора $t = (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m$ через $\Delta_{t_j e_j} f(u)$ позначимо першу різницю функції $f(u)$ за змінною u_j з кроком t_j, $j = 1, ..., m$

$$\Delta_{t_j e_j} f(u) := f(u) - f(u + t_j e_j),$$

і означимо через

$$\Delta_t f(u) := \Delta_{t_1 e_1} \Delta_{t_2 e_2} ... \Delta_{t_m e_m} f(u)$$

мішану різницю функції $f(u)$ з кроком t.

Нехай $\omega_j(t_j)$, $t_j \geq 0$, $j = 1, ..., m$ – деякі модулі неперервності. Ми будемо розглядати такі простори:

$$H^{j,\omega_j} := H^{j,\omega_j}(\mathbb{R}^m) =$$

$$= \{f \in C(\mathbb{R}^m) : \|f\|_{\omega_j} = \|f\|_{H^{j,\omega_j}} = \sup_{t_j \neq 0} \frac{\|\Delta_{t_j e_j} f(\cdot)\|_C(\mathbb{R}^m)}{\omega_j(|t_j|)} < \infty\}.$$

Для функції $f(u)$, $u \in \mathbb{R}^m$, вектора гладкості $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $\alpha_j \in (0, 1)$, $j = 1, ..., m$, і вектора розподілу знаків $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \pm$, $j = 1, ..., m$, мішана похідна Маршо порядку α означається в такий спосіб (див. [184, с. 347]):

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(u) := A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \Delta_{\varepsilon t} f(u) \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} \, dt,$$

де $f \in C(\mathbb{R}^m)$, $A_\alpha = \prod\limits_{j=1}^m A_{\alpha_j}$, $A_{\alpha_j} = \dfrac{\alpha_j}{\Gamma(1 - \alpha_j)}$, $\varepsilon t := (\varepsilon_1 t_1, ..., \varepsilon_m t_m)$.

Основним результатом *підрозділу 5.2* є

Теорема 5.2.1. *Нехай модулі неперервності $\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)$ і числа $\alpha_j \in (0, 1)$, $j = 1, ..., m$, такі, що виконується умова*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{1, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1} \, dt < \infty.$$

Тоді для будь-якої функції $f \in \bigcap\limits_{j=1}^m H^{j,\omega_j}$ і будь-якого вектора ε розподілу знаків, правильна така точна нерівність

$$\|D_\varepsilon^\alpha f\|_C \leq$$

$$2^{m-1}A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\|f\|_C, \|f\|_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., \|f\|_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1}\, dt.$$

Відзначимо, що у випадку $\omega_j(t_j) = t_j^{\beta_j}$, $\beta_j \in (0,1]$, результати теореми 5.2.1 були відомі (одержані раніше В. Ф. Бабенком і С. О. Пічуговим [56]), а також отримана нерівність є багатовимірним аналогом одновимірної нерівності, отриманої В. Ф. Бабенком і М. С. Чуріловою [57, 235].

Підрозділ 5.3 присвячено встановленню нерівностей типу Колмогорова для норм похідних Рісса D^α, $0 < \alpha < 1$, функцій f, градієнти яких належать певним нормованим просторам.

Похідна Рісса порядку α, $0 < \alpha < 1$, функції $f:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ визначається рівністю (див. [184, § 25])

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$

де

$$d_{m,1}(\alpha) = \frac{\pi^{1+m/2}}{2^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$

– нормуючий множник [184, § 26].

Для функції $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$, локально абсолютно неперервної за кожною змінною при майже всіх фіксованих значеннях решти змінних, означені частинні похідні у змісті Соболєва $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ [164, розд. 4, п. 4.1, п. 4.4.4]. Покладемо

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right).$$

Для $1 \le p, s \le \infty$ через $L_{p,s}^\nabla = L_{p,s}^\nabla(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ таких, що $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L_s(\mathbb{R}^m)$ для кожного $i = 1, \ldots, m$. Відзначимо, що якщо $f \in L_{p,s}^\nabla$, то $|\nabla f| \in L_s(\mathbb{R}^m)$. Ми пишемо $\|\nabla f\|_{L_s(\mathbb{R}^m)}$ замість $\|\,|\nabla f|\,\|_{L_s(\mathbb{R}^m)}$.

Дослідження цього підрозділу полягають в оцінці L_∞–норми похідної Рісса D^α функцій багатьох змінних через L_∞–норму самої функції і L_s–норму ($1 \le s \le \infty$) її градієнта, а також у розв'язанні задачі найкращого наближення оператора D^α на класі $W^\nabla_{\infty,s}$ функцій f таких, що $\|\nabla f\|_s \le 1$, і задачі оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Ці результати складають зміст *пункту 5.3.1.* В *пункті 5.3.2* розглянуто більш загальну ситуацію, коли модулі градієнтів функцій f належать ідеальній структурі і, нарешті, в *пункті 5.3.3* досліджене питання оцінки норми похідної Рісса функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, отримано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^\nabla_{p,p}(\mathbb{R}^m)$.

Наведемо деякі результати цього підрозділу.

Для $s > m$, $0 < \alpha < 1 - m/s$ і $h > 0$ покладемо

$$\psi_h(t) = \psi_{h,s,\alpha}(t) =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^{|t|} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma - & \\ -\frac{1}{2} \int\limits_0^{h} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma, & |t| \le h, \\ \frac{1}{2} \int\limits_0^{h} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma, & \text{|t|>h}, \end{cases} \tag{14}$$

Теорема 5.3.4 *Нехай $s > m$ і α такі, що $0 < \alpha < 1 - m/s$. Тоді для довільної функції $f \in L^\nabla_{\infty,s}$ виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{\|D^\alpha \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

Нерівність перетворюється на рівність для функції ψ_h, $h > 0$ (функція ψ_h означена співвідношенням (14)).

Дослідженню нерівностей типу Колмогорова для гіперсингулярних інтегралів присвячено *підрозділ 5.4.* Такі інтеграли дозволяють, зокрема, розглядати з однієї точки зору похідні за напрямом і похідні за Ріссом функцій багатьох змінних. Встановлено точні нерівності, що оцінюють L_∞–норму гіперсингулярних інтегралів з однорідною характеристикою функцій, заданих на $\mathbb{R}^m$, через L_∞–норми самих функцій і вагові L_s–норми їх градієнтів.

В *підрозділі 5.5* ми досліджуємо нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса порядку $0 < \alpha < 2$ функцій, лапласіани яких належать тому чи іншому нормованому простору.

Через $L^\Delta_{p,s} = L^\Delta_{p,s}(\mathbb{R}^m)$ $1 \le p, s \le \infty$ позначимо сукупність функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ таких, що $\Delta f \in L_s(\mathbb{R}^m)$, причому Δf ми розуміємо у змісті Соболєва. Через $W^\Delta_{p,s} = W^\Delta_{p,s}(\mathbb{R}^m)$ позначимо клас функцій із $L^\Delta_{p,s}$ таких, що $\|\Delta f\|_s \le 1$.

Похідна Рісса порядку α $(0 < \alpha < 2)$ функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ означається рівністю (див. [184, § 25])

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}_m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$

де

$$d_{m,2}(\alpha) = \frac{2^{1-\alpha}\pi^{1+\frac{m}{2}}}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$

– нормуючий множник [184, § 26]. Зазначимо, що похідна Рісса D^α реалізує [184, § 25] дробовий степінь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

В *пункті 5.5.1* доведено точну нерівність типу Колмогорова для функцій $f \in L^\Delta_{\infty,s}$, $1 \le s \le \infty$, що оцінює норму D^α $(0 < \alpha < 2)$ через $\|f\|_\infty$ і $\|\Delta f\|_s$, а також розв'язано задачу найкращого наближення оператора D^α на класі $W^\Delta_{\infty,s}$ і задачу оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. В *пункті 5.5.2* розглянуто більш загальну ситуацію, коли лапласіани функцій f належать ідеальній структурі. В *пункті 5.5.3* здобуто оцінки норм функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, одержано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^\Delta_{p,p}(\mathbb{R}^m)$.

Наведемо деякі результати цього підрозділу.

Теорема 5.5.2. *Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для довільної функції $f \in L^{\Delta}_{\infty,s}$ має місце точна нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}} \|f\|_\infty^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}} \|\Delta f\|_s^{\frac{\alpha}{2-m/s}}.$$

Нерівність перетворюється на рівність для функцій вигляду $f(t) = a\varphi_{h,2}(t)$, $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$ (функція $\varphi_{h,2}$ означена на с. 251).

Ці результати тісно пов'язані з результатами В. Г. Тимофеєва [219, 220] щодо оцінки рівномірної норми частинної похідної першого порядку через рівномірну норму функції та рівномірну норму її лапласіана. Зауважимо, що результат Тимофеєва є багатовимірним аналогом відомої нерівності Ландау.

В *підрозділі 5.6* ми продовжуємо дослідження, пов'язані з нерівністю В. Г. Тимофеєва, розпочаті в підрозділі 5.5, в іншому напрямі, а саме, здобуваємо точну нерівність типу Колмогорова для рівномірних норм одновимірних потенціалів Рісса функцій багатьох змінних з лапласіаном із простору $L_s(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq s \leq \infty$.

Через $CL^{\Delta}_\infty = CL^{\Delta}_\infty(\mathbb{R}^m)$ позначимо клас функцій $u \in C(\mathbb{R}^m)$, для яких значення оператора Лапласа Δu належить $L_\infty(\mathbb{R}^m)$. У випадку $m = 1$ під Δu ми розуміємо u'', при цьому u'' і Δu ми розуміємо у сенсі Соболєва.

Нехай $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$ і $\alpha \in (0, 1)$. Одновимірним потенціалом Рісса (означення потенціала Рісса див. [184, с.173]) порядку α частинної похідної $\partial u/\partial x_i$ функції u назвемо

$$(I^\alpha_{x_i} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x - te_i)}{|t|^{1-\alpha}}\, dt,$$

де e_i – i-й орт простору $\mathbb{R}^m$.

Для $h > 0$ і $i = 1, ..., m$ означимо функцію $v_{h,i}$ в такий спосіб

$$v_{h,i}(x) = \begin{cases} \frac{x_i}{h^2}(h - x_i) + \frac{x_i}{h}, & x_i \in [0, h], \\ \frac{x_i}{h^2}(h + x_i) + \frac{x_i}{h}, & x_i \in [-h, 0], \\ \quad \mathrm{sign} x_i, & x_i \notin [-h, h]. \end{cases}$$

У випадку $m = 1$ замість $v_{h,i}$ будемо писати v_h, а замість x_i будемо писати x.

Основним результатом даного підрозділу є

Теорема 5.6.1. *Нехай* $0 < \alpha < 1$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in CL^{\Delta}_{\infty}$ *при кожному* $h > 0$ *та* $i = 1, ..., m$, *мають місце точні нерівності*

$$\|I^{\alpha}_{x_i} u'_{x_i}\|_C \le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{2}{h^{1-\alpha}} \|u\|_C + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} h^{1+\alpha} \|\Delta u\|_{\infty} \right),$$

які перетворюються на рівності для функцій $v_{h,i}$ *при всіх* $h > 0$.

Крім того, для будь-якої функції $f \in CL^{\Delta}_{\infty}$ *виконується точна нерівність*

$$\|I^{\alpha}_{x_i} u'_{x_i}\|_{\infty} \le \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} 2^{\frac{1+\alpha}{2}} \|u\|_C^{\frac{1+\alpha}{2}} \|\Delta u\|_{\infty}^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

яка перетворюється на рівність для функції $v_{h,i}$ *за будь-якого значення параметра* $h > 0$.

Висловлюю глибоку вдячність моєму вчителю професору Владиславу Федоровичу Бабенку за значний вплив на формування наукового світогляду і багаторічну підтримку в роботі, професору Сергію Олексійовичу Пічугову за ідеї та корисні обговорення матеріалів п'ятого розділу, а також всім співавторам за плідну співпрацю.

РОЗДІЛ 1

Найкращі наближення класів диференційовних періодичних функцій сплайнами

1.1. Постановки екстремальних задач теорії наближення для функціональних класів і огляд відомих результатів

Нехай L_p, $1 \leq p \leq \infty$, – простори 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з відповідними нормами $\| \cdot \|_{L_p} = \| \cdot \|_p$; $p' = p/(p-1)$.

Позначимо через C^r $(r = 0, 1, ..., C^0 := C)$– простір r разів неперервно диференційовних (неперервних для $r = 0$) 2π- періодичних функцій, а через L_p^r, $r = 1, 2, ...,$ — множину 2π-періодичних функцій, у яких $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} := f)$ локально абсолютно неперервна, а $f^{(r)} \in L_p$. Нехай також W_p^r – клас функцій $f \in L_p^r$, у яких $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$ (W_p^r називають класами Соболєва).

Найкращим наближенням класу $M \subset L_p$ множиною H із L_p в метриці L_p називається величина

$$E(M, H)_p = \sup_{f \in M} \inf_{h \in H} \|f - h\|_p.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ величина

$$d_n(M, L_p) = \inf_{H_n} E(M, H_n)_p, \tag{1.1}$$

де точна нижня межа обирається за всіма підпросторами H_n простору L_p, розмірність яких не перевищує n, називається n-поперечником за Колмогоровим класу M в просторі L_p.

Підпростори H_n, які реалізують точну нижню межу в правій частині (1.1), називаються екстремальними.

Класичним прикладом підпросторів скінченної розмірності є підпростори тригонометричних подіномів степеня не вище $n - 1$, які ми позначаємо T_{2n-1}.

Задачі найкращого наближення класів дійсних функцій одного змінного за допомогою конкретних апроксимуючих агрегатів та обчислення поперечників є одним з найбільш цікавих і розвинених напрямів теорії апроксимації.

Задачу про поперечники сформулював в 1936 році А. М. Колмогоров (див. статтю 28 в [114]). Він же отримав перші точні результати, а саме, знайшов точні значення поперечників класів W_2^r в просторі L_2 і вказав для них екстремальні підпростори:

$$d_n(W_2^r, L_2) = E(W_2^r, T_{2n-1})_2 = \frac{1}{n^r}, \quad n, r = 1, 2, ... \tag{1.2}$$

Ці дослідження виділили в теорії наближень напрямок, пов'язаний з вибором для даного класу функцій найкращого апарату наближення.

Перші точні результати щодо наближення в рівномірній метриці класів періодичних функцій тригонометричними поліномами були одержані в 1936–1937 роках Ж. Фаваром [263]–[265], а також Н. І. Ахієзером і М. Г. Крейном [10]. Ці результати полягають в наступному: для всіх $n, r = 1, 2, ...$ правильні рівності

$$E_n(W_\infty^r, T_{2n-1})_C = \|\varphi_{n,r}\|_\infty = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{n^r},$$

де функція $\varphi_{\lambda,r}(t)$ $(m \in \mathbb{N},\ \lambda > 0)$ означається як r-й $2\pi/\lambda$-періодичний інтеграл з нульовим середнім значенням на періоді від функції $\varphi_{\lambda,0}(t) = \operatorname{sign}\sin \lambda \mathrm{t}$ і називається ідеальним сплайном Ейлера.

Точні значення поперечників класів W_∞^r в просторі L_∞ були знайдені в 1960 році В. М. Тихомировим [224, 225], який вперше застосував в цьому колі питань методи, що виявились ефективними і для розв'язку інших задач.

Принципово нові ідеї внесла в проблематику фундаментальна робота С. М. Нікольського [163], де він, виходячи зі співвідношень двоїстості, отримав низку визначних результатів для класів згорток з ядрами загального вигляду і, зокрема, одержав рівність

$$E(W_1^r, T_{2n-1})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_\infty, \quad n, r = 1, 2, ...$$

Згодом аналогічний результат було встановлено для класів W_p^r $(1 \le p \le \infty)$, а саме доведено, що для всіх $n, r = 1, 2, ...$ виконується рівність

$$E(W_p^r, T_{2n-1})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}. \qquad (1.3)$$

Рівність (1.3) для $1 < p \le \infty$ встановлена Л. В. Тайковим [215], а для $p = \infty$ незалежно і іншим методом цей результат здобула С. П. Туровець [231].

В подальшому ми зосередимо увагу на дослідженнях вказаних екстремальних задач в просторі L_1. Стосовно точних значень поперечників класів W_p^r $(1 \le p \le \infty)$ відомі такі результати.

Нехай $n, r = 1, 2, ...,$ $1 \le p \le \infty$, тоді

$$d_{2n-1}(W_p^r, L_1) = d_{2n}(W_p^r, L_1) = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}, \qquad (1.4)$$

і, значить, підпростори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W_p^r, L_1)$ і $d_{2n}(W_p^r, L_1)$.

Зрозуміло, що оцінку зверху для величин (1.4) дає рівність (1.3). Що стосується оцінки знизу, то для непарних поперечників і $p = 1$ її отримали незалежно Ю. І. Маковоз [156] і Ю. М. Суботін [201, 202], а при $p = \infty$ Ю. І. Маковоз [157]. Оцінка знизу для парних поперечників при $p = 1, \infty$ належить В. І. Рубану (див., напр. [131, розд. 10]). Для $1 < p < \infty$ співвідношення (1.4) незалежно і різними методами отримали А. О. Лігун [147], Ю.І. Маковоз [158], А. Пінкус [291].

Після виникнення сплайнів набув значного розвитку напрямок, пов'язаний з наближенням класів функцій за допомогою цього апарату [3, 199]. Точні результати тут були отримані В. М. Тихомировим, М. П. Корнєйчуком, Ю. М. Субботіним, В. Л. Великіним, А. А. Женсикбаєвим, А. О. Лігуном, В. Ф. Бабенком та ін. Більшість відомих результатів в цьому напрямі викладено в [132, 133, 135] (див. також наведену там бібліографію). Ми зосередимо увагу лише на результатах, які щільно прилягають до змісту даної роботи.

Позначимо через $S^1_{2n,r}$ ($n \in \mathbb{N}$, $r = 0, 1, ...$) простори 2π-періодчних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами $j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$.

В [283] А. О. Лігун довів, що підпростори $S^1_{2n,m}$ $(m = r-1, r, ...)$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(W^r_p, L_1)$. Ним було встановлено, що для всіх $n, r = 1, 2, ..., m = r-1, r, ..., 1 \le p \le \infty$ виконується рівність

$$E(W^r_p, S^1_{2n,m})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}.$$

Розвинення цієї тематики продовжувалось також в напрямі розширення класів функцій, що наближаються. Так, М. П. Корнєйчук [119, 123] знайшов величину найкращого наближення поліномами, а згодом і сплайнами [126] в метриках C і L_1 класів W^rH^ω, а Л. В. Тайков [215] – найкращі L_1–наближення класів функцій, у яких старші похідні належать одиничній кулі довільного простору Орліча. В. Ф. Бабенком [15] такі результати були отримані для більш загальних класів.

Нехай H– підпростір простору L_p і $g \in L_{p'}$. Якщо для всіх $h \in H$

$$\int\limits_0^{2\pi} g(x)h(x)\,dx = 0,$$

то будемо писати $g \perp H$. Якщо H– підпростір констант, то замість $g \perp H$ будемо використовувати позначення $g \perp 1$.

Нехай множина $F \subset L_1$ така, що $\{f \in F : f \perp 1\} \ne \emptyset$. Для $r = 1, 2, ...,$ позначимо через W^rF клас функцій $f \in L_1$, у уких $(r-1)$-та похідна $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} = f)$ локально абсолютно неперервна і $f^{(r)} \in F$. Відзначимо, що якщо F– одинична куля простору L_p, то множина $W^rF = W^r_p$ – це стандартний соболєвський клас функцій, у яких $(r-1)$ – а похідна локально абсолютно неперервна і $\|f^{(r)}\|_p \le 1$.

Для невід'ємної функції $f \in L_1$ через $r(f,t)$ позначимо незростаючу перестановку (див. [131, с. 130]) звуження f на $[0, 2\pi]$. Для довільної функції g із L_1 покладемо

$$\Pi(g,t) := r(g_+, t) - r(g_-, 2\pi - t).$$

П–перестановка введена до розгляду М. П. Корнєйчуком в роботі [125] (див. також [135, с. 99]).

Множину $F \subset L_1$ назвемо П- інваріантною, якщо з $f \in F$ і $\Pi(g) = \Pi(f)$ випиває, що $g \in F$.

Відзначимо, що П-інваріантною є одинична куля в довільному вкладеному в L_1 симетричному просторі 2π-періодичних функцій [138], зокрема, в просторах L_p $(1 \le p \le \infty)$ і Орліча [136], а також інші важливі множини (див., напр., [15]).

В 1983 р. В. Ф. Бабенко [15] (див. також [17]) довів, що для довільної П–інваріантної множини F і будь-яких $n, r = 1, 2, ...,$ $m = r, r+1, ...$ правильні рівності

$$E(W^rF, T_{2n-1})_1 = E(W^rF, S^1_{2n,m})_1 = \sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt \qquad (1.5)$$

і

$$d_{2n-1}(W^rF, L_1) = d_{2n}(W^rF, L_1) = \sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt. \qquad (1.6)$$

Результати (1.5) і (1.6), зокрема, показують, що підпростори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W^rF, L_1)$ і $d_{2n}(W^rF, L_1)$, а підпростори $S^1_{2n,m}$ $(m = r, r+1, ...)$ для поперечників $d_{2n}(W^rF, L_1)$.

В підрозділах 1.2 і 1.3 ми вкажемо інші підпростори, які реалізують поперечники $d_{2n}(W^rF, L_1)$ і знайдемо точні значення відповідних найкращих наближень класів W^rF.

Нехай X є C або L_p $(1 \le p \le \infty)$. Модулем неперервності функції $f \in X$ в просторі X (див. [133, §6.1]) називається функція

$$\omega(f,\delta)_X := \sup_{0\le h\le\delta} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_X, \quad \delta \ge 0.$$

Якщо $X = L_p$, $1 \le p \le \infty$, то замість $\omega(f,\delta)_{L_p}$ будемо писати $\omega(f,\delta)_p$, а замість $\omega(f,\delta)_C$ будемо писати $\omega(f,\delta)_\infty$.

Нехай $\omega(t)$ – довільний фіксований модуль неперервності, тобто неперервна на $[0, +\infty)$, неспадна, напівадитивна функція, яка в нулі дорівнює нулю. Клас функцій $f \in C^r$, у яких $\omega(f,\delta)_\infty \le \omega(t)$, будемо позначати через W^rH^ω.

При фіксованих $\omega(\cdot)$ і $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$f_{n,0}(\omega;t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n} - 2t\right), & 0 \le t \le \frac{\pi}{2n}, \\ \frac{1}{2}\omega\left(2t - \frac{\pi}{n}\right), & \frac{\pi}{2n} \le t \le \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Через $f_{n,r}(\omega;t)$ $(r = 1,2,...)$ позначимо r-й $2\pi/n$– періодичний інтеграл від $f_{n,0}(\omega;t)$ з нульовим середнім значенням на періоді.

Як зазначено вище, М. П. Корнєйчук [122, 123, 126] (див. також [133, теореми 7.2.2, 7.2.5]) довів, що для будь-якого опуклого вгору модуля неперервності $\omega(t)$, для всіх $n = 1,2,...$, $r = 0,1,...$, $m \ge r$ має місце співвідношення

$$E(W^rH^\omega, T_{2n-1})_1 = E(W^rH^\omega, S^1_{2n,m})_1 = \|f_{n,r}(\omega;\cdot)\|_1. \tag{1.7}$$

Відомо також, що

$$d_{2n-1}(W^rH^\omega, L_1) = d_{2n}(W^rH^\omega, L_1) = \|f_{n,r}(\omega;\cdot)\|_1, \tag{1.8}$$

причому поперечники $d_{2n-1}(W^rH^\omega, L_1)$ і $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$ реалізує підпростір T_{2n-1}, а поперечник $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$ – підпростір $S^1_{2n,m}$, $m \ge r$.

Оцінки знизу для непарних поперечників отримані В. П. Моторним і В. І. Рубаном [162], а для парних В. І. Рубаном [183].

В підрозділах 1.2 і 1.3 ми вкажемо інші підпростори, які реалізують поперечники $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$ і знайдемо точні значення відповідних найкращих наближень класів W^rH^ω.

1.2. Найкращі наближення класів диференційовних періодичних функцій підпросторами сплайнів дефекту 2

Нехай $S^2_{2n,m}$ $(n,m \in \mathbb{N})$– лінійний простір 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку m дефекту 2, з вузлами в точках $t_j = 2j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$.

Відзначимо, що розмірність цього простору при будь-якому m дорівнює $2n$ (див., напр., [133, наслідок 2.3.7]).

В даному підрозділі ми розглянемо питання про точні зачення найкращих L_1-наближень класів W^rF і W^rH^ω сплайнами із $S^2_{2n,m}$ при $m \geq r$ і $m \geq r+1$ відповідно.

Істотну роль при доведенні цих результатів відіграватимуть деякі допоміжні твердження: лема, що пояснює зміст ортогональності функції g підпростору $S^2_{2n,m}$, і нерівності типу нерівностей Бора-Фавара, які будуть встановлені в пункті 1.2.1. Відзначимо, що ці твердження мають самостійний інтерес і можуть бути застосованими до розв'язку інших задач.

1.2.1. Нерівності для функцій із заданими кратними нулями

Наступна лема є аналогом відомого твердження про функції, ортогональні $S^1_{2n,m}$ [132, лема 4.1.2].

Лема 1.2.1. *Для того, щоб 2π-періодична функція $f \in L_1$ була ортогональна простору $S^2_{2n,m}$ $(n, m \in \mathbb{N})$, необхідно і достатньо, щоб для $(m+1)$-ї 2π-періодичної первісної $f_{m+1}(t)$ функції $f(t)$ виконувались співвідношення*

$$f_{m+1}(t_1) = f_{m+1}(t_2) = ... = f_{m+1}(t_n)$$

і

$$f'_{m+1}(t_1) = f'_{m+1}(t_2) = ... = f'_{m+1}(t_n) = 0,$$

де $t_j = 2j\pi/n$ для $j = 1, 2, ..., n$.

Доведення. Відомо, (див. [133, наслідок 2.3.6]), що будь-який сплайн s із $S^2_{2n,m}$ в єдиний спосіб може бути зображеним у вигляді

$$s(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j B_{m+1}(t - t_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j B_m(t - t_j), \tag{1.9}$$

де

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} s(t)\,dt, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j = 0,$$

$$B_m(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(kt - \pi m/2)}{k^m}, \quad m = 1, 2, ... \; -$$

ядро Бернуллі. Нехай $f \perp S^2_{2n,m}$, тобто $\int\limits_0^{2\pi} f(t)s(t)\,dt = 0$ для довільного $s \in S^2_{2n,m}$. Насамперед відзначимо, що оскільки $S^2_{2n,m}$ містить константи, то $f \perp 1$. З урахуванням (1.9) отримаємо

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)\left(a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j B_{m+1}(t - t_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j B_m(t - t_j)\right) dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \int\limits_0^{2\pi} f(t) B_{m+1}(t - t_j)\,dt + \sum_{j=1}^{n} b_j \int\limits_0^{2\pi} f(t) B_m(t - t_j)\,dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j f_{m+1}(t_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j f'_{m+1}(t_j) = 0. \tag{1.10}$$

Нехай $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, тоді для виконання останньої рівності необхідно, щоб для будь-якого набору $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ було $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j f'_{m+1}(t_j) = 0$, а ця рівність можлива, тільки якщо $f'_{m+1}(t_j) = 0$ для всіх $j = 1, 2, ..., n$.

Нехай тепер $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$. Рівність $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j f_{m+1}(t_j) = 0$ рівносильна ортогональності векторів $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\overline{f}_{m+1} = (f_{m+1}(t_1), f_{m+1}(t_2), ..., f_{m+1}(t_n))$. Умова $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$ виділяє в просторі $\mathbb{R}^n$ гіперплощину з нормальним вектором $(1, 1, ..., 1)$, який в свою чергу, є паралельним вектору $\overline{f}_{m+1}$, а значить, $f_{m+1}(t_1) = f_{m+1}(t_2) = ... = f_{m+1}(t_n)$. Необхідність встановлена.

В силу співвідношення (1.10) і умови $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$ достатність очевидна.

Лема доведена.

Наступна теорема є аналогом результатів, пов'язаних з нерівністю Бора-Фавара [262]–[265] для функцій із W_∞^r, ортогональних тригонометричним поліномам. Відомі результати і подальші посилання див. також в [121, 124] і [132, § 4.1].

Теорема 1.2.1. *Нехай $n, l \in \mathbb{N}, l \geq 2$, $t_j = 2j\pi/n$ для $j = 1, 2, ..., n$. Нехай $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi_{n,l}(t + \alpha) + \|\varphi_{n,l}\|_\infty$, де α обране із умови $\widetilde{\varphi}(0) = 0$. Тоді для довільної функції $g \in W_\infty^l$ такої, що*

$$g(t_1) = g(t_2) = ... = g(t_n)$$

і

$$g'(t_1) = g'(t_2) = ... = g'(t_n) = 0,$$

мають місце твердження:
a) $\forall t \in \mathbb{R}$ $|g(t) - g(0)| \leq \widetilde{\varphi}(t)$, причому, якщо $|g(t) - g(0)|$ відмінна від $\widetilde{\varphi}(t)$, то знак рівності має місце лише в точках t_j, $j = 1, 2, ..., n$;
b) $\|g^{(k)}\|_\infty \leq \|\varphi_{n,l-k}\|_\infty$, $k = 1, 2, ..., l$.

Доведення. Нехай $\widetilde{g}(t) = g(t) - g(0)$. Функції $\widetilde{\varphi}(t)$ і $\widetilde{g}(t)$ мають нулі кратності 2 в точках t_j, $j \in \mathbb{Z}$.

Для доведення твердження a) припустимо, що знайдеться t_* таке, що $|\widetilde{g}(t_*)| > \widetilde{\varphi}(t_*)$. Для придатного $0 < |\lambda| < 1$ отримаємо $\lambda\widetilde{g}(t_*) = \widetilde{\varphi}(t_*)$. Нехай $\delta(t) = \widetilde{\varphi}(t) - \lambda\widetilde{g}(t)$. Оскільки $\|\lambda\widetilde{g}^{(l)}(t)\|_\infty < 1$, а $\|\widetilde{\varphi}^{(l)}(t)\|_\infty = 1$, то на жодному відрізку $[\alpha, \beta]$ додатної довжини функція $\delta^{(l)}(t)$, а значить, і $\delta(t)$ не обертається тотожньо в нуль, отже всі нулі $\delta(t)$ є ізольованими. Зрозуміло, що функція $\delta(t)$ має нуль в точці t_* і нулі кратності 2 в точках t_j, $j \in \mathbb{Z}$, тобто всього на періоді функція $\delta(t)$ має принаймні 2n+1 нуль з урахуванням кратності. Тоді у $\delta'(t)$ буде принаймні 2n+1 різних нулів, а у $\delta^{(l)}(t)$ ($l \geq 2$) буде не менше 2n+2 змін знаку на періоді. Проте, $\delta^{(l)}(t) = \varphi_{n,0}(t) - \lambda\widetilde{g}^{(l)}(t)$ має на періоді рівно 2n змін знаку, і ми отримали суперечність, яка доводить твердження a).

Доведемо твердження b). Нехай $t_{\max} \in (0, 2\pi)$ таке, що $|\widetilde{g}'(t_{\max})| = \|\widetilde{g}'\|_\infty$, і $j \in \mathbb{Z}$ обране з умови $t_{\max} \in (t_j, t_{j+1})$. Припустивши, що

$|\widetilde{g}'(t_{\max})| > \|\widetilde{\varphi}'\|_\infty$, ми зможемо вказати таке $0 < |\lambda| < 1$, що

$$\lambda\widetilde{g}'(t_{\max}) = \|\widetilde{\varphi}'\|_\infty = \widetilde{\varphi}'(t_j + \frac{\pi}{2n}) = \left|\widetilde{\varphi}'(t_j - \frac{\pi}{2n})\right|. \tag{1.11}$$

Крім того,

$$\lambda\widetilde{g}'(t_j) = \lambda\widetilde{g}'(t_{j+1}) = \widetilde{\varphi}'(t_j) = \widetilde{\varphi}'(t_{j+1}) = 0. \tag{1.12}$$

Зрозуміло, що функції $\lambda\widetilde{g}'(t)$ і $\widetilde{\varphi}'(t)$ задовольняють умови теореми Колмогорова про порівняння похідних [113] (див. також [133, теорема 3.3.2]). Враховуючи цю обставину і співвідношення (1.11), (1.12), неважко встановити (достатньо, наприклад, скористатись пропозицією 5.6.6 із [131]), що $t_{\max} \in \left[t_j + \frac{\pi}{2n}, t_{j+1} - \frac{\pi}{2n}\right]$. Зрозуміло, що знайдуться точки $t_j^1 \in [t_j, t_j + \pi/n]$, $t_j^2 \in [t_j + \pi/n, t_{j+1}]$ такі, що

$$\lambda\widetilde{g}'(t_j^1) = \lambda\widetilde{g}'(t_j^2) = 0;\ \ t_{\max} \in (t_j^1, t_j^2);\ \ \lambda\widetilde{g}'(t) > 0,\, t \in (t_j^1, t_j^2). \tag{1.13}$$

Знов використовуючи пропозицію 5.6.6 із [131], приходимо до висновку, що $t_{\max} - t_j^1 \geq \dfrac{\pi}{2n}$ і $t_j^2 - t_{\max} \geq \dfrac{\pi}{2n}$, і значить,

$$t_j^1 - t_j + t_{j+1} - t_j^2 \leq \frac{\pi}{n}. \tag{1.14}$$

В силу пропозиції 5.6.5 із [131] з урахуванням того, що

$$\lambda\widetilde{g}'(t) \geq \widetilde{\varphi}'(t + \pi/2n - t_{\max}),\quad t \in \left(t_{\max} - \frac{\pi}{2n}, t_{\max} + \frac{\pi}{2n}\right),$$

робимо висновок, що

$$\int\limits_{t_j^1}^{t_j^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt \geq \int\limits_{t_{\max}-\frac{\pi}{2n}}^{t_{\max}+\frac{\pi}{2n}} \widetilde{\varphi}'(t + \pi/2n - t_{\max})\,dt = \int\limits_{t_j}^{t_j+\frac{\pi}{n}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt,$$

і оскільки $\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt = 0$, то

$$\left|\int\limits_{[t_j,t_{j+1}]\setminus(t_j^1,t_j^2)} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt\right| \geq \int\limits_{t_j}^{t_j+\frac{\pi}{n}} \widetilde{\varphi}'(t), dt. \tag{1.15}$$

З іншого боку (тут ми знову використовуємо (1.12) і пропозицію 5.6.5 із [131]) для $t \in (t_j, t_j') \cup (t_j^2, t_{j+1})$ отримуємо $|\lambda\widetilde{g}'(t)| \le |\widetilde{\varphi}'(t)|$. Враховуючи цю нерівність і (1.14), встановлюємо, що

$$\left| \int\limits_{[t_j,t_{j+1}]\setminus(t_j^1,t_j^2)} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt \right| \le \int\limits_{[t_j,t_{j+1}]\setminus(t_j^1,t_j^2)} |\widetilde{\varphi}'(t)|\,dt \le \int\limits_{t_j}^{t_j+\frac{\pi}{n}} \widetilde{\varphi}'(t), dt. \tag{1.16}$$

Зіставляючи (1.15) і (1.16), бачимо, що

$$\left| \int\limits_{[t_j,t_{j+1}]\setminus(t_j^1,t_j^2)} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt \right| = \left| \int\limits_{t_j}^{t_j+\frac{\pi}{n}} \widetilde{\varphi}'(t), dt \right|,$$

але тоді і

$$\int\limits_{t_j^1}^{t_j^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt = \int\limits_{t_j}^{t_j+\frac{\pi}{n}} \widetilde{\varphi}'(t), dt. \tag{1.17}$$

Пригадуючи, що $\lambda\widetilde{g}'(t) \ge \widetilde{\varphi}'(t + \pi/2n - t_{\max})$ для всіх $t \in [t_{\max} - \dfrac{\pi}{2n}, t_{\max} + \dfrac{\pi}{2n}]$, бачимо, що рівність (1.17) може виконуватись лише у випадку $\lambda\widetilde{g}'(t) = \widetilde{\varphi}'(t + \pi/2n - t_{\max})$ для всіх $t \in [t_{\max} - \dfrac{\pi}{2n}, t_{\max} + \dfrac{\pi}{2n}]$, але це неможливо, оскільки $|\lambda\widetilde{g}^{(l)}(t)| < 1$ для майже всіх t.

Отже, нами доведена справедливість нерівності $\|g'\|_\infty \le \|\varphi_{n,l}'\|_\infty$, звідки, використовуючи теорему порівняння [133, теорема 3.3.2], отримаємо нерівності

$$\|g^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{n,l-k}\|_\infty, \quad k = 1, 2, ..., l.$$

Теорема доведена.

1.2.2. Наближення класів функцій з обмеженою старшою похідною

Основним результатом даного пункту є

Теорема 1.2.2. *Нехай* $n, r = 1, 2, ...,$ $m = r, r+1, ...$ $1 \le p \le \infty$, F *– довільна* Π*-інваріантна множина* 2π*-періодичних функцій. Тоді*

$$E(W^rF, S^2_{2n,m})_1 = \sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt. \tag{1.18}$$

Зокрема,

$$E(W^r_p, S^2_{2n,m})_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}. \tag{1.19}$$

Результати теореми 1.2.2 разом зі співвідношеннями (1.5) і (1.6) показують, що $S^2_{2n,m}$ разом з T_{2n-1} і $S^1_{2n,m}$ є екстремальними підпросторами для поперечників $d_{2n}(W^rF, L_1)$ при $m \ge r$.

Доведення теореми 1.2.2. Використовуючи теорему двоїстості С. М. Нікольского [163] для найкращого L_1–наближення підпростором (див. також [133, теорема 1.4.1]), отримаємо

$$E := E(W^rF, S^2_{2n,m})_1 = \sup_{f\in W^rF} \sup_{\substack{\|g\|_\infty\le 1,\\ g\perp S^2_{2n,m}}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

Після r-кратного інтегрування частинами з використанням леми 1.2.1 можемо написати

$$E = \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp 1}} \sup_{\substack{g\in W^r_\infty,\\ g^{(r)}\perp S^2_{2n,m}}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt = \sup_{\substack{g\in W^{m+1}_\infty,\\ g(t_1)=...=g(t_n),\\ g'(t_1)=...=g'(t_n)=0}} \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g^{(m-r+1)}(t)\,dt,$$

де $t_j = 2j\pi/n$, $j = 1, 2, ..., n$.

Враховуючи пропозицію 1.3.4 із [134], остаточно отримаємо

$$E = \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp 1}} \sup_{\substack{g\in W^r_\infty,\\ g^{(r)}\perp S^2_{2n,m}}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt =$$

$$= \sup_{\substack{g\in W^{m+1}_\infty,\\ g(t_1)=...=g(t_n),\\ g'(t_1)=...=g'(t_n)=0}} \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(g^{(m-r+1)},t)\,dt. \tag{1.20}$$

Покажемо, що для довільної функції $g \in W^{m+1}_\infty$ такої, що $g(t_1) = ...$ $= g(t_n)$ і $g'(t_1) = ... = g'(t_n) = 0$, має місце нерівність

$$\int\limits_0^t r((g^{(m-r+1)})_\pm, u)\,du \le \int\limits_0^t r((\varphi_{n,r})_\pm, u)\,du, \qquad 0 \le t \le 2\pi. \tag{1.21}$$

Якщо $m > r$, то використовуючи твердження b) теореми 3 при $l = m + 1$, отримаємо $\|g^{(m-r)}\|_\infty \leq \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$. Отже, виконуються умови теореми 3.3.4 із [133], в силу якої нерівність (1.21) має місце.

У випадку $m = r$ порівняємо інтеграли $\int\limits_0^t r(g'_\pm, u)\, du$ і $\int\limits_0^t r((\varphi_{n,r})_\pm, u)\, du$, $t \in [0, 2\pi]$ безпосередньо.

Нехай $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi_{n,r+1}(t + \mu) + \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$, де μ обране із умови $\widetilde{\varphi}(0) = 0$. Відзначимо, що $r((\widetilde{\varphi}')_+, t) = r((\varphi_{n,r})_+, t)$ для всіх $t \in [0, 2\pi]$.

Позначимо через g'_j і $\widetilde{\varphi}'_j$ звуження на $[t_j, t_{j+1}]$ $(j = 0, 1, ..., n-1)$ функцій g' і $\widetilde{\varphi}'$ відповідно.

Спочатку доведемо, що для всіх $j = 0, 1, ..., n-1$ має місце нерівність

$$\int\limits_0^t r((g'_j)_\pm, u)\, du \leq \int\limits_0^t r(\widetilde{\varphi}'_j)_\pm, u)\, du, \quad t \in [0, 2\pi/n]\,. \tag{1.22}$$

В першу чергу відзначимо, що для всіх $j = 0, 1, ..., n-1$ має місце співвідношення

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_\pm(t)\, dt \leq \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (\widetilde{\varphi}'_j)_\pm(t)\, dt. \tag{1.23}$$

Дійсно, в силу умови $\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} g'_j(t)\, dt = 0$ бачимо, що $\operatorname{supp}((g'_j)_\pm) \neq \emptyset$, якщо g'_j не тотожній нуль на $[t_j, t_{j+1}]$. Нехай, для визначеності, $\operatorname{mes}\operatorname{supp}((g'_j)_+) \geq \operatorname{mes}\operatorname{supp}(\widetilde{\varphi}'_j)_\pm)$, і $\operatorname{mes}\operatorname{supp}((g'_j)_-) \leq \operatorname{mes}\operatorname{supp}(\widetilde{\varphi}'_j)_\pm)$. Використовуючи твердження 5.6.5 із [131], неважко впевнитись в тому, що

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_-(t)\, dt \leq \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (\widetilde{\varphi}'_j)_\pm(t)\, dt, \tag{1.24}$$

і, більш того, що справедлива нерівність (1.22) для від'ємних частин. Враховуючи (1.24) і той факт, що

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_+(t)\, dt = \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_-(t)\, dt,$$

отримаємо (1.23). Доведемо, що (1.22) має місце і для додатних частин, тобто

$$\int_0^t r((g_j')_+, u)\, du \le \int_0^t r(\widetilde{\varphi}_j')_+, u)\, du, \quad t \in [0, 2\pi/n] \tag{1.25}$$

для кожного $j = 0, 1, ..., n-1$. При цьому будемо діяти за схемою доведення теореми 6.8.1 із [131].

Покладемо $\delta(t) = r((\widetilde{\varphi}_j')_+, t) - r((g_j')_+, t)$, $t \in [0, 2\pi/n]$. Якщо $\delta(t) \ge 0$ для всіх $t \in [0, 2\pi/n]$, то справедливість (1.25) очевидна. Відзначимо, що коли $\delta(t)$ змінює знак на проміжку $(0, 2\pi/n)$, справедливість (1.25) достатньо встановити лише в усіх точках проміжка $(0, 2\pi/n)$, що є нулями $\delta(t)$ і правими кінцями інтервалів, на яких $\delta(t) < 0$.

Нехай $\delta(\xi) = 0$ для деякого $\xi \in (0, 2\pi/n)$ і знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що $\delta(t) < 0$ для $0 < \xi - \varepsilon < t < \xi$.

Покладемо

$$z = r((g_j')_+, \xi) = r((\widetilde{\varphi}_j')_+, \xi).$$

Тоді

$$\int_0^{\xi} r((g_j')_+, t)\, dt = \int_{e_j(z)} (g_j')_+(t)\, dt,$$

де

$$e_j(z) = \{t \in (t_j, t_{j+1}) : (g_j')_+(t) > z\},$$

причому $\operatorname{mes} e_j(z) = \xi$.

Множина $e_j(z)$ складається з неперетинних інтервалів $(a_k, b_k) \subset (t_j, t_{j+1})$ таких, що

$$(g_j')_+(a_k) = (g_j')_+(b_k) = r((g_j')_+, x) = z, \quad (g_j')_+(t) > z, \tag{1.26}$$

$t \in (a_k, b_k)$.

Покажемо, що за зроблених припущень такий інтервал єдиний. Припустимо, що у множині $e_j(x)$ знайдеться принаймні два неперетинних інтервали (a_1, b_1) і (a_2, b_2), що задовольняють умови (1.26). Можна обрати h настільки малим, що для $k = 1, 2$ всередині (a_k, b_k) існує інтервал

$(a'_k, b'_k) \subset e_j(z+h)$, причому, якщо

$$z + h = (g'_j)_+(a'_k) = (g'_j)_+(b'_k) = r((g'_j)_+, \xi - \gamma_0),$$

то для $\xi - \gamma_0 < t < \xi$ буде $\delta(t) < 0$. В силу останньої умови, якщо $r((\widetilde{\varphi}'_j)_+, \xi - \gamma) = z + h$, то $\gamma > \gamma_0$. Очевидно,

$$\gamma_0 = b_1 - b'_1 + b_2 - b'_2 + a'_1 - a_1 + a'_2 - a_2.$$

Оберемо на проміжку монотонності $[t_j, t_j + \pi/2n]$ функції $(\widetilde{\varphi}'_j)_+$ точки α и α' в такий спосіб, щоб було

$$(\widetilde{\varphi}'_j)_+(\alpha) = (g'_j)_+(a_k) = (g'_j)_+(b_k) = z, \;\; k = 1, 2$$

і

$$(\widetilde{\varphi}'_j)_+(\alpha') = (g'_j)_+(a'_k) = (g'_j)_+(b'_k) = z + h, \;\; k = 1, 2.$$

Тоді в силу пропозиції 5.6.6 із [131] маємо

$$|a'_k - a_k| \geq |\alpha' - \alpha|, \;\; |b_k - b'_k| \geq |\alpha' - \alpha|, \;\; k = 1, 2$$

і, значить,

$$\gamma_0 \geq 4|\alpha' - \alpha| = 2\gamma > \gamma,$$

що суперечить умові $\gamma_0 < \gamma$.

Отже, множина $e_j(z)$ складається з одного інтервала (a, b), тому відрізок $[c, d] \subset [t_j, t_{j+1}]$, який містить цей інтервал і задовольняє умови

$$(g'_j)_+(c) = (g'_j)_+(d) = 0, \;\;\; (g'_j)_+(t) > 0 \;\; (c < t < d),$$

також єдиний. Застосовуючи пропозицію 5.6.5 із [131], отримаємо нерівність

$$\int_c^a (g'_j)_+(t)\,dt + \int_b^d (g'_j)_+(t)\,dt \geq 2\int_{t_j}^{\alpha} (\widetilde{\varphi}'_j)_+(t)\,dt,$$

на підставі якої, використовуючи (1.23), можемо написати

$$\int_0^{\xi} r((\widetilde{\varphi}'_j)_+, t)\,dt = \int_{t_j}^{t_j+\pi/n} (\widetilde{\varphi}'_j)_+(t)\,dt - 2\int_{t_j}^{\alpha} (\widetilde{\varphi}'_j)_+(t)\,dt \geq$$

$$\geq \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_+(t)\,dt - \int\limits_{c}^{a} (g'_j)_+(t)\,dt - \int\limits_{b}^{d} (g'_j)_+(t)\,dt = \int\limits_{0}^{\xi} r((g'_j)_+, t)\,dt,$$

звідки одразу випливає (1.25).

Таким чином, ми довели, що для довільного $j = 0, 1, ..., n-1$ має місце (1.22).

Теперь доведемо, що для будь-якої функції $g \in W^{r+1}_{\infty}$ такої, що $g(t_1) = = g(t_2) = ... = g(t_n)$, $g'(t_1) = g'(t_2) = ... = g'(t_n) = 0$, при всіх $t \in [0, 2\pi]$ має місце нерівність

$$\int\limits_0^t r((g')_\pm, u)\,du \leq \int\limits_0^t r((\widetilde{\varphi}')_\pm, u)\,du = \int\limits_0^t r((\varphi_{n,r})_\pm, u)\,du. \tag{1.27}$$

Доведення проведемо для додатних частин. Випадок від'ємних частин розбирається аналогічно.

Нехай $t \in [0, 2\pi]$, $j = 0, 1, ..., n-1$, позначимо

$$\sigma_j(t) = \mathrm{mes}\{u \in [t_j, t_{j+1}] : (g'_j)_+(u) \geq r((g')_+, t)\},$$

тоді $t = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \sigma_j(t)$.

Для $t \in [0, 2\pi]$, враховуючи нерівність (1.25), можемо написати

$$\int\limits_0^t r((g')_+, u)\,du = \sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_0^{\sigma_j(t)} r((g'_j)_+, u)\,du \leq \sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_0^{\sigma_j(t)} r((\widetilde{\varphi}'_j)_+, u)\,du =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_0^{\sigma_j(t)} r((\widetilde{\varphi}'_0)_+, u)\,du.$$

Відзначимо, що функція $F(t) = \int\limits_0^t r((\widetilde{\varphi}'_0)_+, u)\,du$ опукла вгору на $[0, 2\pi/n]$. Застосовуючи нерівність Йенсена, отримаємо

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_0^{\sigma_j(t)} r((\widetilde{\varphi}'_0)_+, u)\,du \leq n \int\limits_0^{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\sigma_j(t)} r((\widetilde{\varphi}'_0)_+, u)\,du =$$

$$= n \int\limits_0^{\frac{t}{n}} r((\widetilde{\varphi}_j')_+, u)\, du = \int\limits_0^t r((\widetilde{\varphi}')_+, u)\, du.$$

Таким чином, нерівність (1.27) встановлено, і, значить, (1.21) виконується також для $m = r$.

Із (1.21) випливає, що функції $g^{(m-r+1)}$ $(m \geq r)$ і $\varphi_{n,r}$ задовольняють умови теореми 1.3.13 (див. [134]), із якої випливає, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ і $t \in [0, 2\pi]$ виконуються нерівності

$$\int\limits_0^t r((g^{(m-r+1)} - \lambda)_\pm, u), du \leq \int\limits_0^t r((\varphi_{n,r} - \lambda)_\pm, u), du. \tag{1.28}$$

Використовуючи пропозицію 1.3.14 із [134], можемо написати

$$\int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(g^{(m-r+1)}, t)\, dt \leq \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r}, t)\, dt.$$

Із (1.20) і останньої нерівності одразу випливає оцінка зверху для E:

$$E \leq \sup_{\substack{f \in F, \\ f \perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r}, t)\, dt.$$

Оцінка знизу очевидно випливає з нерівності

$$d_{2n}(W^r F, L_1) \leq E(W^r F, S^2_{2n,m})_1$$

і співвідношення (1.6). Таким чином, співвідношення (1.18) доведене. Що стосується співвідношення (1.19), то воно випливає із рівності

$$\sup_{\substack{\|f\|_p \leq 1, \\ f \perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r}, t)\, dt = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}.$$

Теорема доведена.

Зауваження 1.2.1. *Нерівність (1.22), напевно, має і самостійний інтерес. Відзначимо, що подібні інтегральні зображення для перестановок функцій $f \in W^{r+1}_\infty$ таких, що $\|f\|_\infty \leq \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$, на відрізках довжини π/n були отримані в [105, теорема 2], а на довільних відрізках довжини, меньшої довжини періода в [160].*

1.2.3. Наближення класів функцій, що задаються за допомогою модуля неперервності

Даний пункт присвячено отриманню точних значень найкращих L_1-наближень класів W^rH^ω сплайнами із $S^2_{2n,m}$ при $m \geq r+1$. Основним результатом цього пункту є

Теорема 1.2.3. *Нехай $n, r = 1, 2, ...,$ $m = r+1, r+2, ...$ $\omega(t)$ – опуклий вгору модуль неперервності, тоді*

$$E(W^rH^\omega, S^2_{2n,m})_1 = \|f_{n,r}(\omega, \cdot)\|_1.$$

Результати теореми 1.2.3 разом із співвідношеннями (1.7) і (1.8) показують, що $S^2_{2n,m}$ разом з T_{2n-1} і $S^1_{2n,m}$ є екстремальними підпросторами для поперечників $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$ (при $m \geq r+1$).

Доведення теореми 1.2.3. Використовуючи теорему двоїстості для найкращого L_1–наближення підпростором [133, теорема 1.4.1], отримаємо

$$E := E(W^rH^\omega, S^2_{2n,m})_1 = \sup_{f \in W^rH^\omega} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \leq 1, \\ g \perp S^2_{2n,m}}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

Після r-кратного інтегрування частинами, з використанням леми 1.2.1, можемо написати

$$E = \sup_{\substack{f \in H^\omega, \\ f \perp 1}} \sup_{\substack{g \in W^r_\infty, \\ g^{(r)} \perp S^2_{2n,m}}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt =$$

$$= \sup_{\substack{f \in H^\omega, \\ f \perp 1}} \sup_{\substack{g \in W^{m+1}_\infty, \\ g(t_1) = ... = g(t_n), \\ g'(t_1) = ... = g'(t_n) = 0}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g^{(m-r+1)}(t)\,dt. \tag{1.29}$$

Через $R(f, t)$ будемо позначати Σ–перестановку 2π-періодичної функції f на проміжку довжини 2π [133, с. 294].

Із (1.29), застосовуючи теорему 7.5.1 із [131], отримаємо

$$E \leq \sup_{\substack{g \in W_\infty^{m+1}, \\ g(t_1)=...=g(t_n), \\ g'(t_1)=...=g'(t_n)=0}} \int\limits_0^{2\pi} R(g^{(m-r)}, t)\omega'(t)\, dt. \tag{1.30}$$

Оцінимо праву частину (1.30). Нехай спочатку $m \geq r+2$, $g \in W_\infty^{m+1}$ і

$$g(t_1) = g_{t_2} = ... = g(t_n), \quad g'(t_1) = g'(t_2) = ... = g'(t_n) = 0. \tag{1.31}$$

Тоді функція g задовольняє умови теореми 1.2.1, в силу якої

$$\|g^{(m-r)}\|_\infty \leq \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$$

і

$$\max_{a,b \in [0,2\pi]} \left| \int\limits_a^b g^{(m-r)}(t)\, dt \right| \leq 2\|g^{(m-r-1)}\|_\infty \leq 2\|\varphi_{n,r+2}\|_\infty.$$

Значить, для такої функції g виконуються умови теореми 6.8.5 із [131], в силу якої

$$\int\limits_0^{2\pi} R(g^{(m-r)}, t)\omega'(t)\, dt \leq \int\limits_0^{2\pi} R(\varphi_{n,r+1}, t)\omega'(t)\, dt. \tag{1.32}$$

Нехай тепер $m = r+1$. В цьому випадку нерівність (1.32) ми доведемо безпосередньо.

Оскільки $g \in W_\infty^{r+2}$ і задовольняє умову (1.31), то (теорема 1.2.1) $\|g'\|_\infty \leq \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$. Тепер, в силу теореми 6.8.4 із [131] робимо висновок, що для довільного $x \in (0, \pi/n)$ виконується принаймні одна з нерівностей

$$|R'(g', x)| \leq |R'(\varphi_{n,r+1}, x)| \tag{1.33}$$

або

$$R(g', x) \leq R(\varphi_{n,r+1}, x). \tag{1.34}$$

Це означає, что різниця $\delta(x) = R(\varphi_{n,r+1}, x) - R(g', x)$ на проміжку $[0, 2\pi]$ або невід'ємна або змінює знак з "+"на "−"в єдиній точці $t_0 \in [0, 2\pi]$. Відзначимо, що у випадку, коли $\delta(x) \geq 0$ для всіх $t_0 \in [0, 2\pi]$, виконання нерівності (1.32) очевидне. Розглянемо випадок, коли $\delta(x)$ змінює знак на $[0, 2\pi]$. Із отриманої при доведенні теореми 1.2.2 нерівності(1.27) при $t = 2\pi$ випливає, що

$$\int_0^{2\pi} r(g'_{\pm}, u)\, du \le \int_0^{2\pi} r((\varphi_{n,r+1})_{\pm}, u)\, du,$$

звідки

$$\int_0^{2\pi} r(g', u)\, du \le \int_0^{2\pi} r((\varphi_{n,r+1}), u)\, du. \tag{1.35}$$

Враховуючи той факт [131, с.131,141], що для $\psi \in L_1$

$$\|\psi\|_1 = \int_0^{2\pi} r(\psi, u)\, du = \int_0^{2\pi} R(\psi, u)\, du,$$

на підставі (1.35) можемо стверджувати, що $\int\limits_0^{2\pi} \delta(t)\, dt \ge 0$. Міркуючи далі, як при доведенні теореми 6.7.6 із [131], маємо (нижче через $\omega'_+(t)$ позначено праву похідну функції $\omega(t)$, яка в силу опуклості вгору функції $\omega(t)$ існує в кожній точці)

$$\int_0^{2\pi} \omega'(t) R(\varphi_{n,r+1}, t)\, dt - \int_0^{2\pi} \omega'(t) R(g', t)\, dt = \int_0^{2\pi} \omega'(t)\delta(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{t_0} \omega'(t)\delta(t)\, dt + \int_{t_0}^{2\pi} \omega'(t)\delta(t)\, dt \ge \omega'(t_0) \int_0^{t_0} \delta(t)\, dt + \omega'(t_0) \int_{t_0}^{2\pi} \delta(t)\, dt =$$

$$= \omega'(t_0) \int_0^{2\pi} \delta(t)\, dt \ge 0.$$

Справедливість (1.32) встановлена і при $m = r + 1$. Враховуючи (1.30), (1.32), а також рівність [133, с. 299]

$$\|f_{n,m}(\omega; \cdot)\|_1 = \int_0^{2\pi} R(\varphi_{n,m+1}, t)\omega'(t)\, dt,$$

отримуємо оцінку зверху для величин $E(W^r H^\omega, S^2_{2n,m})_1$:

$$E(W^r H^\omega, S^2_{2n,m})_1 = E \leq \int\limits_0^{2\pi} R(\varphi_{n,r+1}, t)\omega'(t)\,dt = \|f_{n,r}(\omega;\cdot)\|_1.$$

Оцінка знизу випливає із нерівності

$$E(W^r H^\omega, S^2_{2n,r})_1 \geq d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$$

і (1.8).

Теорема доведена.

1.3. Найкращі наближення класів диференційовних періодичних функцій сплайнами мінімального дефекту з нерівномірно розподіленими вузлами

Нехай $n, m \in \mathbb{N}$, $h \in (0, \dfrac{2\pi}{n})$. Через $S^1_{2n,m}(h)$ будемо позначати простір сплайнів порядку m дефекту 1 з вузлами в точках

$$t_j = \frac{2\pi\left[\frac{j}{2}\right]}{n} + (1 - (-1)^j)\frac{h}{2}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

де $[\cdot]$ – ціла частина числа. Відзначимо, що розмірність цього простору при будь-якому m дорівнює $2n$ (див., напр., [133, наслідок 2.3.7]) і $S^1_{2n,m}(\dfrac{\pi}{n}) = S^1_{2n,m}$.

В підрозділі 1.2 ми довели, що сплайни дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами є екстремальними підпросторами для поперечників $d_n(W^r F, L_1)$ і $d_n(W^r H^\omega, L_1)$. В цьому підрозділі ми пред'єявимо нову сім'ю екстремальних підпросторів для цих поперечників, а саме, покажемо, що для кожного $0 < h < \dfrac{2\pi}{n}$ підпростори $S^1_{2n,m}(h)$ реалізують у сенсі точного значення поперечники $d_n(W^r F, L_1)$ і $d_n(W^r H^\omega, L_1)$.

1.3.1. Допоміжні результати

Для доведення основних результатів цього підрозділу нами істотно буде використано наступна теорема, яка має і самостійний інтерес

Теорема 1.3.1. *Нехай* $n, l \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi_{n,l}(t+\mu) + \nu(h)$, *де* μ *і* $\nu(h)$ *обрані так, щоб* $\widetilde{\varphi}(t_j) = 0$, $j \in \mathbb{Z}$. *Тоді для довільної функції* $g \in W_\infty^l$ *такої, що*

$$g(t_1) = g(t_2) = ... = g(t_{2n}) = 0,$$

мають місце твердження:
a) $\forall t \in \mathbb{R}$ $|g(t)| \le |\widetilde{\varphi}(t)|$, *причому, якщо* $g(t)$ *відмінна від* $\pm\widetilde{\varphi}(t)$, *то знак рівності має місце лише в точках* t_j, $j \in \mathbb{Z}$;
b) $\|g^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{n,l-k}\|_\infty$, $k = 1, 2, ..., l-1$.

Ця теорема, як і теорема 1.2.1, є аналогом результатів, пов'язаних з нерівністю Бора-Фавара [262]–[265] для функцій із W_∞^r, ортогональних тригонометричним поліномам.

Доведення теореми 1.3.1. Функції $\widetilde{\varphi}(t)$ і $g(t)$ мають нулі в точках t_j, $j = 1, ..., 2n$.

Для доведення твердження a) припустимо, що знайдеться t_* таке, що $|g(t_*)| > |\widetilde{\varphi}(t_*)|$. Вважаючи для визначеності, що $\widetilde{\varphi}(t_*) > 0$, для придатного λ, $0 < |\lambda| < 1$, отримаємо $\lambda g(t_*) = \widetilde{\varphi}(t_*)$. Нехай $\delta(t) = \widetilde{\varphi}(t) - \lambda g(t)$. Оскільки $\|\lambda g^{(l)}\|_\infty < \|\widetilde{\varphi}^{(l)}\|_\infty$, то δ має лише ізольовані нулі. Кількість цих нулів не менша $2n+1$, і, значить, з урахуванням періодичності, δ має на періоді не менше $2n+2$ нулів з урахуванням кратності, причому не менше $2n+1$ із них різні, значить, δ', δ'', ..., $\delta^{(l)}$ мають на періоді не менше $2n+2$ змін знаку. Проте, $\delta^{(l)}(t) = \varphi_{n,0}(t) - \lambda g^{(l)}(t)$ має на періоді рівно 2n змін знаку, і ми отримали суперечність, яка доводить тведження a).

Доведемо твердження b). Для визначеності будемо вважати, що $\widetilde{\varphi}(t) < 0$ для $t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$. Нехай $t_{\max} \in (0, 2\pi)$ таке, що $|g'(t_{\max})| = \|g'\|_\infty$, і $i \in \mathbb{Z}$ обране з умови $t_{\max} \in (t_{2i}, t_{2i+2})$. Припустивши, що $|g'(t_{\max})| > \|\widetilde{\varphi}'\|_\infty$, ми зможемо вказати таке $0 < |\lambda| < 1$, що

$$\lambda g'(t_{\max}) = \|\widetilde{\varphi}'\|_\infty = \widetilde{\varphi}'(t_{\max}^1) = \left|\widetilde{\varphi}'(t_{\min}^1)\right|, \qquad (1.36)$$

де $t_{\max}^1 < t_{\min}^1$ – точки з проміжка $[t_{2i}, t_{2i+2}]$, в яких функція $\widetilde{\varphi}'(t)$ набуває відповідно максимального і мінімального значення. Зрозуміло, що точки $t^1_{\max}, t^1_{\min}$ належать проміжку (t_{2i+1}, t_{2i+2}).

Покажемо, що $t_{\max} \in (t^1_{\max}, t^1_{\min})$. Припустимо, що $t_{\max} \le t^1_{\max}$. Випадок $t_{\max} \ge t^1_{\min}$ розглядається аналогічно.

Відзначимо, що для функцій $\lambda g'(t)$ і $\widetilde{\varphi}'(t)$ виконуються умови теореми порівняння похідних [133, теорема 3.3.2], причому $\lambda g'(t) \ne \widetilde{\varphi}'(t)$ майже скрізь. Позначимо через t^1 найближчий зліва, а через t^2 найближчий справа до точки $t_{\max}$ нуль функції $\lambda g'(t)$, тоді за допомогою пропозиції 3.3.3 із [133, теорема 3.3.2] неважко переконатись в тому, що

$$t_{\max} - t^1 > \frac{\pi}{2n} = t^1_{\max} - \frac{t_{2i} + t_{2i+1}}{2},$$

отже

$$t^1 < t_{\max} - t^1_{\max} + \frac{t_{2i} + t_{2i+1}}{2} \le \frac{t_{2i} + t_{2i+1}}{2},$$

і, крім того, для довільного $t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$ буде $\lambda g'(t) > \widetilde{\varphi}'(t)$ Тоді

$$\int\limits_{t^1}^{t_{2i+1}} \lambda g'(t)\, dt > \int\limits_{\frac{t_{2i}+t_{2i+1}}{2}}^{t_{2i+1}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt$$

і

$$\left| \int\limits_{t_{2i}}^{t^1} \lambda g'(t)\, dt \right| < \left| \int\limits_{t_{2i}}^{\frac{t_{2i}+t_{2i+1}}{2}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt \right| = \int\limits_{\frac{t_{2i}+t_{2i+1}}{2}}^{t_{2i+1}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt,$$

що суперечить тому факту, що $\int\limits_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} \lambda g'(t)\, dt = 0$.

Покажемо, що функція $\lambda g'(t)$ має нуль на проміжку $(t_{2i+1}, t_{\max})$. Аналогічно попередньому встановлюємо, що

$$t_{\max} - t_{2i+1} > t^1_{\max} - t_{2i+1}, \quad t^2 - t_{\max} > \frac{t_{2i+1} + t_{2i+2}}{2} - t^1_{\max}$$

і

$$\int\limits_{t_{2i+1}}^{t_{\max}} \lambda g'(t)\, dt > \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^1_{\max}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt, \quad \int\limits_{t_{\max}}^{t^2} \lambda g'(t)\, dt > \int\limits_{t^1_{\max}}^{\frac{t_{2i+1}+t_{2i+2}}{2}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt.$$

Враховуючи ще той факт, що $g(t_{2i+1}) = \widetilde{\varphi}'(t_{2i+1}) = 0$, отримаємо

$$\lambda g(t^2) = \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^2} \lambda g'(t)\,dt = \int\limits_{t_{2i+1}}^{t_{\max}} \lambda g'(t)\,dt + \int\limits_{t_{\max}}^{t^2} \lambda g'(t)\,dt >$$

$$> \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^1_{\max}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt + \int\limits_{t^1_{\max}}^{\frac{t_{2i+1}+t_{2i+2}}{2}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt = \int\limits_{t_{2i+1}}^{\frac{t_{2i+1}+t_{2i+2}}{2}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt =$$

$$= \widetilde{\varphi}\left(\frac{t_{2i+1}+t_{2i+2}}{2}\right) = \|\widetilde{\varphi}\|_\infty,$$

значить, $\lambda g(t^2) > \|\widetilde{\varphi}\|_\infty$, і ми отримали суперечність.

Отже, $t^1 \in (t_{2i+1}, t_{\max})$, $t_{\max} - t^1 > \dfrac{\pi}{2n}$ і $t^2 - t_{\max} > \dfrac{\pi}{2n}$, так що

$$t^2 - t^1 > \frac{\pi}{n}, \tag{1.37}$$

і

$$\int\limits_{t^1}^{t^2} \lambda g'(t)\,dt > \int\limits_{\frac{t_{2i}+t_{2i+1}}{2}}^{\frac{t_{2i+1}+t_{2i+2}}{2}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt$$

(тут знову слід використати пропозицію 3.3.3 із [133]). Але тоді з урахуванням умови $\int\limits_{t_{2i+1}}^{t_{2i+3}} \lambda g'(t)\,dt = 0$ і $\int\limits_{t_{2i+1}}^{t_{2i+3}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt = 0$, має також виконуватись нерівність

$$\Big| \int\limits_{(t_{2i+1},t_{2i+3})\setminus(t^1,t^2)} \lambda g'(t)\,dt \Big| > \int\limits_{\frac{t_{2i}+t_{2i+1}}{2}}^{\frac{t_{2i+1}+t_{2i+2}}{2}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt. \tag{1.38}$$

Нехай (a_k, b_k) – складові інтервали множини

$$\{t \in (t_{2i+1}, t_{2i+3}) : g'(t) < 0\}.$$

Тоді в силу (1.37),

$$\sum_k (a_k, b_k) \le t_{2i+3} - t_{2i+1} - (t^2 - t^1) < \frac{\pi}{n} = \text{mes}\ \text{supp}\, \widetilde{\varphi}'_-\,|_{(2i+1,2i+3)}\,(t).$$

Нехай також для кожного k число $\gamma_k \ge 0$ таке, що $(a_k + \gamma_k, b_k + \gamma_k) \subset \text{supp}\ \widetilde{\varphi}'_-\,|_{(2i+1,2i+3)}\,(t)$. Використовуючи пропозицію

3.3.3 із [133] впевнюємось в тому, що

$$\left|\int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} g'(x-\gamma_k)\,dx\right| \le \left|\int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt\right|.$$

Очевидно, що числа γ_k можна обрати так, щоб інтервали $(a_k+\gamma_k, b_k+\gamma_k)$ попарно не перетинались. Тоді отримаємо

$$\left|\int\limits_{(t_{2i+1},t_{2i+3})\setminus(t^1,t^2)} \lambda g'(t)\,dt\right| = \left|\sum_k \int\limits_{a_k}^{b_k} \lambda g'(t)\,dt\right| = \left|\sum_k \int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \lambda g'(t-\gamma_k)\,dt\right| =$$

$$= \sum_k \left|\int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \lambda g'(t-\gamma_k)\,dt\right| \le \sum_k \left|\int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \widetilde{\varphi}'_-(t)\,dt\right| = \left|\sum_k \int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \widetilde{\varphi}'_-(t)\,dt\right| \le$$

$$\le -\int\limits_{\frac{t_{2i+1}+t_{2i+2}}{2}}^{\frac{t_{2i+2}+t_{2i+3}}{2}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt = \int\limits_{\frac{t_{2i}+t_{2i+1}}{2}}^{\frac{t_{2i+1}+t_{2i+2}}{2}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt.$$

Отже,

$$\left|\int\limits_{(t_{2i+1},t_{2i+3})\setminus(t^1,t^2)} \lambda g'(t)\,dt\right| \le \int\limits_{\frac{t_{2i}+t_{2i+1}}{2}}^{\frac{t_{2i+1}+t_{2i+2}}{2}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt, \qquad (1.39)$$

що суперечить (1.38)

Таким чином, нами доведена справедливість нерівності

$$\|g'\|_\infty \le \|\varphi_{n,l-1}\|_\infty,$$

звідки, використовуючи теорему порівняння [133, теорема 3.3.2], отримаємо нерівності

$$\|g^{(k)}\|_\infty \le \|\varphi_{n,l-k}\|_\infty, \quad k = 1, 2, ..., l-1.$$

Теорема доведена.

1.3.2. Найкращі наближення класів функцій з обмеженою старшою похідною

Основним результатом цього пункту є така теорема

Теорема 1.3.2. *Нехай* $n, m, r \in \mathbb{N}$, $m \ge r+1$, $0 < h < \dfrac{2\pi}{n}$, $1 \le p \le \infty$, F *– довільна* Π*-інваріантна множина* 2π*-періодичних функцій. Тоді*

$$E(W^r F, S^1_{2n,m}(h))_1 = \sup_{\substack{f\in F\\ f\perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt. \tag{1.40}$$

Зокрема,

$$E(W^r_p, S^1_{2n,m}(h))_1 = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}. \tag{1.41}$$

При $p = 1$ *співвідношення (1.41) правильне і для* $m = r$*.*

Результати теореми 1.3.2 разом із співвідношеннями (1.5),(1.6) і (1.18) показують, що $S^1_{2n,m}(h)$ разом з T_{2n-1}, $S^1_{2n,m}$ і $S^2_{2n,m}$ є екстремальними підпросторами для поперечників $d_{2n}(W^r F, L_1)$ (при $m \ge r+1$).

Доведення теореми 1.3.2. Використовуючи теорему двоїстості С. М. Нікольського [163] для найкращого L_1–наближення підпростором (див. також [133, теорема 1.4.1]), отримаємо

$$E := E(W^r F, S^1_{2n,m}(h))_1 = \sup_{f\in W^r F} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le 1,\\ g\perp S^1_{2n,m}(h)}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

Після r-кратного інтегрування частинами з урахуванням змісту ортогональності функцій підпростору $S^1_{2n,m}(h)$ (див. [133, §5.4]) можемо написати

$$E = \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp 1}} \sup_{\substack{g\in W^r_\infty,\\ g^{(r)}\perp S^1_{2n,m}(h)}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt =$$

$$= \sup_{\substack{g\in W^{m+1}_\infty,\\ g(t_1)=\ldots=g(t_{2n})=0}} \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp 1}} \int_0^{2\pi} f(t)g^{(m-r+1)}(t)\,dt. \tag{1.42}$$

Враховуючи пропозицію 1.3.4 із [134], остаточно отримаємо

$$E = \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp 1}} \sup_{\substack{g\in W^r_\infty,\\ g^{(r)}\perp S^1_{2n,m}(h)}} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt =$$

$$\sup_{\substack{g\in W_\infty^{m+1},\\ g(t_1)=...=g(t_{2n})=0}} \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(g^{(m-r+1)},t)\,dt. \tag{1.43}$$

У випадку, коли F є одиничною кулею простору L_1 із (1.43) отримаємо

$$E(W_1^r, S_{2n,m}^1(h))_1 = \sup_{\substack{g\in W_\infty^{m+1}\\ g(t_1)=...=g(t_{2n})=0}} E(g^{(m-r+1)})_\infty \le \sup_{\substack{g\in W_\infty^{m+1}\\ g(t_1)=...=g(t_{2n})=0}} \|g^{(m-r+1)}\|_\infty.$$

Застосовуючи теорему 1.3.1 при $m=r$, отримаємо

$$E(W_1^r, S_{2n,r}^1(h))_1 \le \|\varphi_{n,r}\|_\infty,$$

що у порівнянні зі співвідношенням (1.4) при $p=1$, дає рівність (1.41) при $p=1$ і $m=r$.

Для будь-якої функції $g\in W_\infty^{m+1}$ $(m\ge r+1)$ такої, що $g(t_1)=...=$ $=g(t_{2n})=0$, має місце нерівність

$$\int_0^t r((g^{(m-r+1)})_\pm,u)\,du \le \int_0^t r((\varphi_{n,r})_\pm,u)\,du, \qquad 0\le t\le 2\pi. \tag{1.44}$$

Дійсно, використовуючи твердження b) теореми 1.3.1 при $l=m+1$, отримаємо $\|g^{(m-r)}\|_\infty \le \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$. Отже, виконуються умови теореми 3.3.4 із [133], в силу якої (1.44) має місце.

Із (1.44) випливає, що функції $g^{(m-r+1)}$ $(m\ge r+1)$ і $\varphi_{n,r}$ задовольняють умови теореми 1.3.13 із [134], з якої випливає, що для всіх $\lambda\in\mathbb{R}$ і $t\in[0,2\pi]$ виконуються нерівності

$$\int_0^t r((g^{(m-r+1)}-\lambda)_\pm,u),du \le \int_0^t r((\varphi_{n,r}-\lambda)_\pm,u),du.$$

Тепер, використовуючи пропозицію 1.3.14 із [134], можемо написати

$$\int_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(g^{(m-r+1)},t)\,dt \le \int_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt.$$

Із (1.43) і останньої нерівності одразу отримаємо

$$E \le \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp 1}} \int_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt.$$

Отже оцінку зверху для E отримано. Відповідна оцінка знизу очевидно випливає із нерівності

$$d_{2n}(W^rF, L_1) \le E(W^rF, S^1_{2n,m}(h))_1$$

і співвідношення (1.6).

Таким чином, співвідношення (1.40) доведене. Що стосується співвідношення (1.41), то воно випливає з рівності

$$\sup_{\substack{\|f\|_p \le 1, \\ f \perp 1}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(\varphi_{n,r},t)\,dt = \|\varphi_{n,r}\|_{p'}.$$

Теорема доведена.

1.3.3. Найкращі наближення класів функцій, заданих за допомогою модуля неперервності

В даному пункті ми отримаємо точні значення найкращих L_1-наближень класів W^rH^ω сплайнами із $S^1_{2n,m}(h)$ $(0 < h < \dfrac{2\pi}{n})$ при $m \ge r+1$. Основним результатом цього пункту є

Теорема 1.3.3. *Нехай $n, m, r \in \mathbb{N}$, $m \ge r+1$, $0 < h < \dfrac{2\pi}{n}$, $\omega(t)$ – опуклий вгору модуль неперервності, тоді*

$$E(W^rH^\omega, S^1_{2n,m}(h))_1 = \|f_{n,r}(\omega,\cdot)\|_1.$$

Результати теореми 1.3.3 разом із співвідношеннями (1.7), (1.8) і теоремою 1.2.3 показують, що $S^1_{2n,m}(h)$ разом з T_{2n-1}, $S^1_{2n,m}$ і $S^2_{2n,m}$ є екстремальними підпросторами для поперечників $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$ (при $m \ge r+1$).

Доведення теореми 1.3.3. Використовуючи теорему двоїстості для найкращого L_1–наближення підпростором [133, теорема 1.4.1], отримаємо

$$E := E(W^rH^\omega, S^1_{2n,m}(h))_1 = \sup_{f \in W^rH^\omega} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \le 1, \\ g \perp S^1_{2n,m}(h)}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt.$$

Аналогічно (1.42), можемо написати

$$E = \sup_{\substack{f\in H^\omega,\\ f\perp 1}} \sup_{\substack{g\in W^r_\infty,\\ g^{(r)}\perp S^1_{2n,m}(h)}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt =$$

$$= \sup_{\substack{f\in H^\omega,\\ f\perp 1}} \sup_{\substack{g\in W^{m+1}_\infty,\\ g(t_1)=...=g(t_{2n})}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g^{(m-r+1)}(t)\,dt. \qquad (1.45)$$

Через $R(f,t)$ будемо позначати Σ–перестановку звуження 2π–періодичної функції f на проміжок довжини 2π [133, с. 294].

Із (1.45), застосовуючи теорему 7.5.1 із [131], отримаємо

$$E \le \sup_{\substack{g\in W^{m+1}_\infty,\\ g(t_1)=...=g(t_{2n})=0}} \int\limits_0^{2\pi} R(g^{(m-r)},t)\omega'(t)\,dt. \qquad (1.46)$$

Оцінимо праву частину (1.46). Нехай спочатку $m\ge r+2$, $g\in W^{m+1}_\infty$ і

$$g(t_1) = g(t_2) = ... = g(t_{2n}) = 0. \qquad (1.47)$$

Тоді функція g задовольняє умови теореми 3, в силу якої

$$\|g^{(m-r)}\|_\infty \le \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$$

і

$$\max_{a,b\in[0,2\pi]} \left| \int\limits_a^b g^{(m-r)}(t)\,dt \right| \le 2\|g^{(m-r-1)}\|_\infty \le 2\|\varphi_{n,r+2}\|_\infty.$$

Значить, для такої функції g виконуються умови теореми 6.8.5 із [131] (див. також теорему 7.1.11 із [133]), в силу якої

$$\int\limits_0^{2\pi} R(g^{(m-r)},t)\omega'(t)\,dt \le \int\limits_0^{2\pi} R(\varphi_{n,r+1},t)\omega'(t)\,dt. \qquad (1.48)$$

Нехай тепер $m=r+1$. В цьому випадку нерівність (1.48) ми доведемо безпосередньо.

Оскільки $g\in W^{r+2}_\infty$ і задовольняє умову (1.47), то (теорема 1.3.1) $\|g'\|_\infty \le \|\varphi_{n,r+1}\|_\infty$. Тепер, в силу теореми 6.8.4 із [131] отримаємо, що для будь-якого $x\in(0,\pi/n)$ виконується принаймні одна із нерівностей

$$|R'(g',x)| \le |R'(\varphi_{n,r+1},x)|$$

або

$$R(g', x) \le R(\varphi_{n,r+1}, x).$$

Це значить, що різниця $\delta(x) = R(\varphi_{n,r+1}, x) - R(g', x)$ на проміжку $[0, 2\pi]$ або невід'ємна або змінює знак з "+"на "−"в єдиній точці $t_0 \in (0, 2\pi)$. Відзначимо, що у випадку, коли $\delta(x) \ge 0$ для всіх $x \in [0, 2\pi]$, виконання нерівності (1.48) очевидне. Розглянемо випадок, коли $\delta(x)$ змінює знак на $[0, 2\pi]$.

Позначимо через g'_j і $\widetilde{\varphi}'_j$ звуження на $[t_j, t_{j+2}]$ $(j = 0, 2, ..., 2n-2)$ функцій g' і $\widetilde{\varphi}'$ відповідно.

В першу чергу відзначимо, що для всіх $j = 0, 2, ..., 2n-2$ має місце співвідношення

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (g'_j)_\pm(t)\,dt \le \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} (\widetilde{\varphi}'_j)_\pm(t)\,dt. \tag{1.49}$$

Дійсно, в силу умови $\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} g'_j(t)\,dt = 0$ бачимо, що $\operatorname{supp}((g'_j)_\pm) \ne \emptyset$, якщо g'_j не тотожній нуль на $[t_j, t_{j+2}]$. Нехай, для визначеності, $\operatorname{mes}\operatorname{supp}((g'_j)_+) \ge \operatorname{mes}\operatorname{supp}(\widetilde{\varphi}'_j)_\pm)$, і $\operatorname{mes}\operatorname{supp}((g'_j)_-) \le \operatorname{mes}\operatorname{supp}(\widetilde{\varphi}'_j)_\pm)$. Використовуючи пропозицію 3.3.3 із [133] і міркування, аналогічні використанним при доведенні нерівності (1.39), неважко переконатись в тому, що

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+2}} (g'_j)_-(t)\,dt \le \int\limits_{t_j}^{t_{j+2}} (\widetilde{\varphi}'_j)_\pm(t)\,dt. \tag{1.50}$$

Враховуючи (1.50) і той факт, що

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+2}} (g'_j)_+(t)\,dt = \int\limits_{t_j}^{t_{j+2}} (g'_j)_-(t)\,dt,$$

отримаємо нерівність (1.49), і, значить,

$$\int\limits_0^{2\pi} |g'(t)|\,dt = \int\limits_0^{2\pi} |\widetilde{\varphi}'(t)|\,dt. \tag{1.51}$$

Враховуючи той факт [131, с.131,141], що для $\psi \in L_1$

$$\|\psi\|_1 = \int_0^{2\pi} r(\psi, u)\, du = \int_0^{2\pi} R(\psi, u)\, du,$$

на підставі (1.51) можемо стверджувати, що $\int_0^{2\pi} \delta(t)\, dt \geq 0$. Нехай $t_0 \in (0, 2\pi)$ – єдина точка, в якій різниця $\delta(x)$ змінює знак з "$+$"на "$-$". Міркуючи, як при доведенні теореми 6.7.6 із [131], маємо (нижче через $\omega'_+(t)$ позначена права похідна функції $\omega(t)$, яка в силу опуклості вгору функції $\omega(t)$ існує в кожній точці)

$$\int_0^{2\pi} \omega'(t) R(\varphi_{n,r+1}, t)\, dt - \int_0^{2\pi} \omega'(t) R(g', t)\, dt = \int_0^{2\pi} \omega'(t)\delta(t)\, dt =$$

$$= \int_0^{t_0} \omega'(t)\delta(t)\, dt + \int_{t_0}^{2\pi} \omega'(t)\delta(t)\, dt \geq \omega'_+(t_0) \int_0^{t_0} \delta(t)\, dt + \omega'_+(t_0) \int_{t_0}^{2\pi} \delta(t)\, dt =$$

$$= \omega'_+(t_0) \int_0^{2\pi} \delta(t)\, dt \geq 0.$$

Справедливість (1.48) встановлено і при $m = r + 1$. Враховуючи (1.46), (1.48), а також рівність [133, с. 299]

$$\|f_{n,m}(\omega; \cdot)\|_1 = \int_0^{2\pi} R(\varphi_{n,m+1}, t)\omega'(t)\, dt,$$

отримаємо оцінку зверху для величин $E(W^r H^\omega, S^1_{2n,m}(h))_1$:

$$E(W^r H^\omega, S^1_{2n,m}(h))_1 = E \leq \int_0^{2\pi} R(\varphi_{n,r+1}, t)\omega'(t)\, dt = \|f_{n,r}(\omega; \cdot)\|_1.$$

Оцінка знизу випливає із нерівності

$$E(W^r H^\omega, S^1_{2n,r}(h))_1 \geq d_{2n}(W^r H^\omega, L_1)$$

і (1.8).

Теорема доведена.

1.4. Нерівності Джексона для сплайнів

Для найкращого рівномірного наближення 2π–періодичних функцій підпросторами T_{2n-1} Д. Джексон в 1911 р. отримав нерівності [271]:
для $f \in C$

$$E(f, T_{2n-1})_C \leq M\omega(f, 1/n)_C, \quad n = 1, 2, ..., \tag{1.52}$$

для $f \in C^r$

$$E(f, T_{2n-1})_C \leq M_r n^{-r}\omega(f^{(r)}, 1/n)_C, \quad n, r = 1, 2, ..., \tag{1.53}$$

де константи M, M_r не залежать від f і n. Проте, константа M_r є необмежено зростаючою за r. Згодом було встановлено, що в (1.53) може бути отримана абсолютна константа, крім того результат поширюється і на випадок метрики L_p (див. роботи Н. І. Ахієзера [9], С. Б. Стєчкіна [195, 198], В. І. Бєрдишева [64], В. Т. Гаврилюк [77]). Особливий інтерес при цьому викликають випадки, коли константи в нерівностях (1.52), (1.53) є непокращуваними.

Зрозуміло, що задачу отримання аналогічних (1.52), (1.53) нерівностей з точними константами можна ставити і у випадку наближень сплайнами, або будь-яким іншим підпростором, а також оцінювати похибки наближень в метриці, відмінній від тієї, в якій задано модуль неперервності.

Отже, нехай $r = 0, 1, 2, ...;$ $1 \leq p, q \leq \infty$, H – підпростір простору $X = \{C, L_p\}$, $\delta > 0$. Нерівностями типу Джексона називають нерівності виду

$$E(f, H)_X \leq K\omega(f^{(r)}, \delta)_Y, \quad Y = \{C, L_q\} \tag{1.54}$$

правильні для довільної функції $f \in X$, такої що $f^{(r)} \in Y$ з константою K, що не залежить від f.

У випадку $H = T_{2n-1}$, $X = Y = C$ і $r = 0$ значні результати щодо нерівностей типу Джексона (1.54) отримав Н. П. Корнєйчук [120, 130]. У випадку $H = T_{2n-1}$, $r = 0$, $X = Y = L_2$ цю нерівність довів М. І. Черних [233, 234]. Точна нерівність (1.54) у випадку $H = T_{2n-1}$, $X = Y = C$

або $X = Y = L_1$, $r = 1$ доведена В. В. Жуком [100, 101], а у випадках: $X = Y = C$, $r = 2, 3, ...$; $X = Y = L_1$, $r = 3, 5, ...$; $X = L_1$, $Y = C$, $r = 1, 2, ...$ – А. О. Лігуном [143, 149, 150, 151]. До того ж А. О. Лігун є автором більш загальних результатів для довільних апроксимуючих підпросторів (див. теорему 1.4.1).

Крім названих публікацій, велика кількість робіт була присвячена відшуканню точних констант в нерівностях такого типу в поліноміальній апроксимації для класичних модулів неперервності, а також для інших характеристик гладкості функцій ([217, 146, 13, 236, 106, 298]).

Достатньо загальний підхід до розгляду нерівностей типу Джексона в L_2 запропонований С. Б. Вакарчуком [68]–[70].

Велика кількість значних результатів стосовно точних нерівностей Джексона одержана також в сплайн-апроксимації (див. роботи [71, 129]). У випадку $H = S^1_{2n,r}$ точні константи в нерівностях типу Джексона (1.54) для $X = L_\infty$, $Y = C$ знайдені А. О. Лігуном [283], а для $X = L_1$, $Y = C$ М. П. Корнєйчуком [127, 128].

Огляд цих та інших відомих результатів і відповідні посилання можна знайти, наприклад, в [133, 152].

Нам знадобиться така загальна теорема, доведена А. О. Лігуном (див. [152], теорема 14).

Теорема 1.4.1. *Нехай $r = 1, 2, ...$, $p = \infty$ або $p = 1$, H– довільний підпростір простору L_p, що містить константи, і*

$$A_{r,p} = (\|\varphi_{1,r}\|_\infty^{-1} E(W_p^r, H)_p)^{\frac{1}{r}}. \tag{1.55}$$

Тоді для довільної функції $f \in L_p^r$ при $r = 1, 3, 5, ...$ і $\delta \ge \pi A_{r+1,p}$

$$E(f, H)_p \le \frac{1}{2} A_{r+1,p}^r \|\varphi_{1,r}\|_\infty \omega(f^{(r)}, \delta)_p,$$

при $r = 2, 4, 6, ...$ і $\delta \ge 2\pi A_{r+1,\infty}$

$$E(f, H)_\infty \le \frac{1}{2} A_{r+1,\infty}^r \|\varphi_{1,r}\|_\infty \omega(f^{(r)}, \delta)_\infty,$$

при $r = 1, 2, 3, \ldots$ *і* $\delta \geq 2\pi A_{r+2,1}$

$$E(f, H)_1 \leq 2A^r_{r+2,1} \|\varphi_{1,r+1}\|_\infty \omega(f^{(r)}, \delta)_\infty.$$

Із теореми 1.4.1 і наведених вище результатів про найкращі наближення класів W^r_p $(p = 1, \infty)$ тригонометричними поліномами і сплайнами випливає низка точних нерівностей типу Джексона (див. [152], наслідки 1,2,3 із теореми 14). Як зазначалось, деякі з цих точних нерівностей були доведені раніше і іншими методами (див., наприклад, [133, розділ 6]).

Із теореми 1.4.1, зокрема, випливають нерівності типу Джексона для найкращих L_1–наближень сплайнами $S^1_{2n,m}$, а саме:

– для довільної функції $f \in L^r_1$ при $r = 1, 3, 5, \ldots$ і $\delta \geq \pi n^{-1}$ виконується точна нерівність

$$E(f, S^1_{2n,m})_1 \leq \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{2n^r} \omega(f^{(r)}, \delta)_1, \quad m \geq r; \tag{1.56}$$

– для довільної функції $f \in C^r$ при $r = 1, 2, \ldots$ і $\delta \geq 2\pi n^{-1}$ виконується точна нерівність

$$E(f, S^1_{2n,m})_1 \leq \frac{2\|\varphi_{1,r+1}\|_\infty}{n^r} \omega(f^{(r)}, \delta)_\infty, \quad m \geq r + 1. \tag{1.57}$$

До цього мова йшла про обчислення точних констант в нерівностях типу Джексона при наближенні фіксованими підпросторами. Розглянемо задачу мінімзації цих констант за всіма підпросторами фіксованої розмірності. Нехай X^r_q є L^r_q, якщо $q < \infty$ і X^r_q є C^r, якщо $q = \infty$. Ми також вважаємо, що $\omega(f^{(r)}, \delta)_\infty = \omega(f^{(r)}, \delta)_C$ для неперервної функції f. Покладемо для $H \subset L_p$

$$\kappa_r(H, \delta)_{p,q} = \sup \left\{ \frac{E(f, H)_p}{\omega(f^{(r)}, \delta)_q} : f \in X^r_q, f \neq const \right\},$$

тобто $\kappa_r(H, \delta)_{p,q}$ – найменша константа κ в нерівності

$$E(f, H)_p \leq \kappa \omega(f^{(r)}, \delta)_q.$$

Розглянемо задачу обчислення величин

$$\kappa_{n,r}(\delta)_{p,q} = \inf\{\kappa_r(H, \delta)_{p,q} : H \subset L_q, \dim H \leq n\} \tag{1.58}$$

Підпростори, що реалізують inf в правій частині (1.58), називаються екстремальними підпросторами в задачі мінімізації констант Джексона.

Зазначимо, що для всіх $n, r \in \mathbb{N}$, $1 \le p, q \le \infty$,

$$\kappa_{n,r}(\delta)_{p,q} \ge \frac{1}{2} d_n(\widetilde{W}_q^r, L_p) = \frac{1}{2} d_n(W_q^r, L_p), \tag{1.59}$$

де $\widetilde{W}_q^r = W_q^r$, якщо $q < \infty$ і $\widetilde{W}_\infty^r = \{f \in W_\infty^r : f^{(r)} \in C\}$.

Нерівність

$$\kappa_{n,r}(\delta)_{p,q} \ge \frac{1}{2} d_n(\widetilde{W}_q^r, L_p)$$

при $q < \infty$ відзначена А. О. Лігуном (див. [152], нерівність (101)), нерівність

$$\kappa_{n,r}(\delta)_{p,\infty} \ge \frac{1}{2} d_n(\widetilde{W}_\infty^r, L_p)$$

доводиться аналогічно. Рівність

$$\frac{1}{2} d_n(\widetilde{W}_q^r, L_p) = \frac{1}{2} d_n(W_q^r, L_p), \quad 1 \le p \le \infty,$$

очевидна. Із співставлення нерівностей (1.56) і (1.57) з (1.59) випливає, що для $r = 1, 3, 5, ...$ і $\delta \ge \pi n^{-1}$

$$\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,1} = \kappa_r(S_{2n,m}^1, \delta)_{1,1} = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{2n^r}, \quad m \ge r, \tag{1.60}$$

а для $r = 1, 2, ...$ і $\delta \ge 2\pi n^{-1}$

$$\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,\infty} = \kappa_r(S_{2n,m}^1, \delta)_{1,\infty} = \frac{2\|\varphi_{1,r+1}\|_\infty}{n^r}, \quad m \ge r + 1. \tag{1.61}$$

Значить, екстремальними в задачі обчислення величин $\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,1}$ для $r = 1, 3, 5, ...$, $\delta \ge \pi n^{-1}$ і $\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,\infty}$ для $r = 1, 2, ...$, $\delta \ge 2\pi n^{-1}$ є підпростори $S_{2n,m}^1$.

Зіставляючи тепер співвідношення (1.19) теореми 1.2.2 для $p = 1$, а потім співвідношення (1.41) теореми 1.3.2 для $p = 1$ з теоремою 1.4.1, отримаємо таке твердження

Теорема 1.4.2. *Нехай $n, m, r \in \mathbb{N}$. Для будь-якої функції $f \in L_1^r$ при $r = 1, 3, 5, ...$, $m \ge r + 1$ і $\delta \ge \pi n^{-1}$ виконується точна нерівність*

$$E(f, S_{2n,m}^2)_1 = E(f, S_{2n,m}^1(h))_1 \le \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{2n^r} \omega(f^{(r)}, \delta)_1. \tag{1.62}$$

Для будь-якої функції $f \in C^r$ при $r = 1, 2, ...,$ $m \geq r + 2$ і $\delta \geq 2\pi n^{-1}$ виконується точна нерівність

$$E(f, S^2_{2n,m})_1 = E(f, S^1_{2n,m}(h))_1 \leq \frac{2\|\varphi_{1,r+1}\|_\infty}{n^r} \omega(f^{(r)}, \delta)_\infty. \qquad (1.63)$$

Із (1.62), (1.63) і (1.60), (1.61) для $r = 1, 3, ...$ і $\delta \geq \pi n^{-1}$ отримаємо співвідношення

$$\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,1} = \kappa_r(S^2_{2n,m}, \delta)_{1,1} = \kappa_r(S^1_{2n,m}(h), \delta)_{1,1} = \frac{\|\varphi_{1,r}\|_\infty}{2n^r}, \quad m \geq r + 1,$$

а для $r = 1, 2, ...$ і $\delta \geq 2\pi n^{-1}$ співвідношення

$$\kappa_{2n,r}(\delta)_{1,\infty} = \kappa_r(S^2_{2n,m}, \delta)_{1,\infty} = \kappa_r(S^1_{2n,m}(h), \delta)_{1,\infty} = \frac{2\|\varphi_{1,r+1}\|_\infty}{n^r}, \quad m \geq r+2.$$

Отже, підпростори $S^2_{2n,m}$ і $S^1_{2n,m}(h)$, $0 < h < \dfrac{2\pi}{n}$ є екстремальними в задачі (1.58).

1.5. Нерівності Бернштейна для сплайнів дефекту 2

Нерівності Бернштейна відіграють важливу роль в багатьох питаннях теорії наближень і стосуються характерізації внутрішніх властивостей поліномів. Мова йде про точну нерівність [65]

$$\|T_n^{(k)}\|_C \leq n^k \|T_n\|_C, \quad k = 1, 2, ...,$$

де T_n– довільний тригонометричний поліном порядку n.

Більш точну оцінку для норми k-ї похідної тригонометричного полінома отримав С. Б. Стєчкін [191].

Оцінки k-ї похідної тригонометричного полінома в L_p–метриках здобули А. Зігмунд [303, 102] і Л. В. Тайков [214].

Перші точні нерівності типу Бернштейна для сплайнів належать В. М. Тихомирову [226] і Ю. М. Субботіну [201].

Відзначимо також дослідження Ю. М. Субботіна [202], А. О. Лігуна [144, 145, 148] , М. П. Корнєйчука і А. О. Лігуна [277].

Огляд і викладення багатьох відомих точних нерівностей типу Бернштейна і подальші посилання можна знайти, наприклад, в [134, 26]. Наші результати є аналогами названих досліджень для сплайнів дефекту 2.

Відзначимо, що для $s \in S^2_{2n,r}$ $s^{(r-1)}$ може мати розриви (першого роду) в точках t_k $(k \in \mathbb{Z})$, і в цих точках ми покладаємо

$$s^{(r-1)}(t_k) = \frac{1}{2}\left[s^{(r-1)}(t_k+0) + s^{(r-1)}(t_k-0)\right].$$

Найкраще наближення функції f підпростором констант в просторі L_p $(1 \le p \le \infty)$ позначимо $E(f)_p$.

Функції Бернуллі означаються в такий спосіб (див. [133, с. 72]). $B_1(x)$– це 2π-періодична функція, яка на $[0, 2\pi)$ задається так:

$$B_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2\pi}, & x \in (0, 2\pi), \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Якщо $r > 1$, то $B_r(x)$ є $(r-1)$-й 2π-періодичний інтеграл з нульовим середнім значенням на періоді від $B_1(x)$.

Покладемо $\psi_{n,r}(x) = -\dfrac{2\pi}{n^r}B_r(nx)$. Відзначимо, що $\psi_{n,r}(x) \in S^2_{2n,r}$.

Нами доведені такі твердження.

Теорема 1.5.1. *Нехай $n, r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$. Для будь-якого сплайна $s \in S^2_{2n,r}$ і будь-якого $j \in \mathbb{Z}$ мають місце нерівності:*

$$\sup_{t_j<t<t_{j+1}} |s^{(r)}(t)| \le \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \cdot \sup_{t_j<t<t_{j+1}} |\psi'_{n,1}(t)|; \tag{1.64}$$

$$\sup_{t_j<t<t_{j+1}} |s^{(r-1)}(t)| \le \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \cdot \sup_{t_j<t<t_{j+1}} |\psi_{n,1}(t)|; \tag{1.65}$$

$$\omega(s^{(r-1)}, (t_j, t_{j+1})) \le \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \cdot \omega(\psi_{n,1}, (t_j, t_{j+1})), \tag{1.66}$$

де $\omega(f, M) = \sup\limits_{t', t'' \in M} |f(t') - f(t'')|$ – коливання функції f на множині $M \subset \mathbb{R}$.

Наслідок 1.5.1. *Нехай $n, r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$. Для будь-якого $s \in S^2_{2n,r}$*

$$\bigvee_0^{2\pi}[s^{(r-1)}] \le \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty} \bigvee_0^{2\pi}[\psi_{n,1}(t)]; \tag{1.67}$$

$$\|s^{(r-1)}\|_\infty \le \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty}\|\psi_{n,1}(t)\|_\infty. \tag{1.68}$$

Теорема 1.5.2. *Нехай $n, r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$. Для будь-якого $s \in S^2_{2n,r}$ і будь-якого $j \in \mathbb{Z}$*

$$\bigvee_{t_j}^{t_{j+1}}[s^{(r-2)}] \le \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty}\bigvee_{t_j}^{t_{j+1}}[\psi_{n,2}] \tag{1.69}$$

і, значить,

$$\bigvee_0^{2\pi}[s^{(r-2)}] \le \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty}\bigvee_0^{2\pi}[\psi_{n,2}]. \tag{1.70}$$

Теорема 1.5.3. *Нехай $n, r \in \mathbb{N}$, $r \ge 2$. Для будь-якого $s \in S^2_{2n,r}$ і будь-якого $p \in [1, \infty)$*

$$\|s^{(r-1)}\|_p \le \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty}\|\psi_{n,1}(t)\|_p. \tag{1.71}$$

Зауваження 1.5.1. *Очевидно, що нерівності (1.64)–(1.71) перетворюються на рівності для функції $s = \psi_{n,r}$ і, значить, є точними.*

Доведення теореми 1.5.1. Нехай $s \in S^2_{2n,r}$. Покладемо

$$\varphi(t) = \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty}\psi_{n,r}(t).$$

Завдяки лінійності функцій $\varphi^{(r-1)}$ і $s^{(r-1)}$ на (t_j, t_{j+1}), $j = \overline{0, n-1}$, співвідношення (1.64) і (1.66), випливатимуть із співвідношення (1.65). Тому для доведення теореми достатньо довести співвідношення (1.65), тобто довести, що для будь-якого $j = \overline{0, n-1}$

$$\sup_{t_j<t<t_{j+1}}|s^{(r-1)}(t)| \le \sup_{t_j<t<t_{j+1}}|\varphi^{(r-1)}(t)|. \tag{1.72}$$

Припустимо, що знайдеться j_0, таке що на інтервалі (t_{j_0}, t_{j_0+1}) співвідношення (1.72) не виконується, тобто має місце принаймні одна з нерівностей:

$$|s^{(r-1)}(t_{j_0}+0)| > |\varphi^{(r-1)}(t_{j_0})|,$$

$$|s^{(r-1)}(t_{j_0}-0)| > |\varphi^{(r-1)}(t_{j_0+1})|.$$

Нехай, для визначеності, $|s^{(r-1)}(t_{j_0}+0)| > |\varphi^{(r-1)}(t_{j_0})|$. Тоді для придатного $0 < |\lambda| < 1$ маємо

$$\lambda s^{(r-1)}(t_{j_0}+0) = \varphi^{(r-1)}(t_{j_0}). \tag{1.73}$$

Покладемо $\delta(t) = \varphi(t) - \alpha - \lambda(s(t) - \beta)$, де α і β – константи найкращого рівномірного наближення для функцій $\varphi(t)$ и $s(t)$ відповідно.

Відзначимо, що $\delta^{(r-1)}$ на кожному з інтервалів (t_j, t_{j+1}) може змінювати знак не більше одного разу, крім того, зміна знаку у $\delta^{(r-1)}$ можлива при переході аргумента через точку t_j. В силу (1.73) $\delta^{(r-1)}$ не змінює знак на (t_{j_0}, t_{j_0+1}) і, значить, $\delta^{(r-1)}$ має на періоді не більш $2n-1$ змін знаку. З іншого боку, оскільки $E(\varphi)_\infty > E(\lambda s)_\infty$, то $\delta(t)$ матиме принаймні одну зміну знаку між будь-якими двома сусідніми точками екстремуму функції $\varphi(t) - \alpha$. Значить, $\delta(t)$ матиме не менше $2n$ змін знаку на періоді. Тоді в силу теореми Ролля у $\delta^{(r-1)}$ буде також не менше $2n$ змін знаку. Отримана суперечність доводить, що для довільного $j = \overline{0, n-1}$

$$\sup_{t_j < t < t_{j+1}} |s^{(r-1)}(t)| \leq \sup_{t_j < t < t_{j+1}} |\varphi^{(r-1)}(t)|.$$

Отже (1.65) доведене.

Теорема 1.5.1 доведена.

В силу лінійності функцій $s^{(r-1)}$ і $\psi_{n,1}$ на кожному інтервалі (t_j, t_{j+1}) і $\dfrac{2\pi}{n}$- періодичності функції $\psi_{n,1}$ із співвідношення (1.65) і (1.66) випливають твердження (1.69) і (1.70) наслідку 1.5.1.

Доведення теореми 1.5.2. Нехай спочатку проміжок $[t_j, t_{j+1}]$ такий, що $s^{(r-1)}$ має нуль в (t_j, t_{j+1}). Оскільки в силу (1.68)

$$\|s^{(r-1)}\|_\infty \leq \|\varphi^{(r-1)}\|_\infty,$$

і в силу (1.64)

$$|s^{(r)}(t)| \leq |\varphi^{(r)}(t)| = \frac{E(s)_\infty}{E(\psi_{n,r})_\infty}, \ \ t \in (t_j, t_{j+1}),$$

то легко зрозуміти, що для кожного $x \geq 0$ буде

$$\text{mes}\{t \in (t_j, t_{j+1}) : |\varphi^{(r-1)}(t)| \geq x\} \geq$$

$$\geq \operatorname{mes}\{t \in (t_j, t_{j+1}) : |s^{(r-1)}(t)| \geq x\}. \tag{1.74}$$

Із (1.74) одразу випливає, що при всіх $p \in [1, \infty)$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} |s^{(r-1)}(t)|^p \, dt \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\varphi^{(r-1)}(t)|^p \, dt, \tag{1.75}$$

і, зокрема,

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} |s^{(r-1)}(t)| \, dt \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\varphi^{(r-1)}(t)| \, dt,$$

отже

$$\bigvee_{t_j}^{t_{j+1}} [s^{(r-2)}] \leq \bigvee_{t_j}^{t_{j+1}} [\varphi^{(r-2)}]. \tag{1.76}$$

Нехай тепер проміжок $[t_j, t_{j+1}]$ такий, що $s^{(r-1)}$ не обертається на нуль і інтервалі (t_j, t_{j+1}). В цьому випадку $s^{(r-2)}\big|_{[t_j,t_{j+1}]}$ – монотонна функція і, значить,

$$\sup_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |s^{(r-2)}(t)| = \max\{|s^{(r-2)}(t_j)|, |s^{(r-2)}(t_{j+1})|\}.$$

Нехай, для визначеності,

$$\sup_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |s^{(r-2)}(t)| = |s^{(r-2)}(t_j)|.$$

Відзначимо також, що

$$\|\varphi^{(r-2)}\|_\infty = |\varphi^{(r-2)}(t_j)| = |\varphi^{(r-2)}(t_{j+1})|.$$

Встановимо нерівність

$$\sup_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |s^{(r-2)}(t)| = |s^{(r-2)}(t_j)| \leq |\varphi^{(r-2)}(t_j)|, \tag{1.77}$$

звідки і буде випливати співвідношення (1.76) для розглядуваного випадку.

Припустимо, що всупереч (1.77),

$$\sup_{t_j \leq t \leq t_{j+1}} |s^{(r-2)}(t)| = |s^{(r-2)}(t_j)| > |\varphi^{(r-2)}(t_j)|.$$

Тоді знайдеться λ, $0 < |\lambda| < 1$, таке, що $\lambda s^{(r-2)}(t_j) = \varphi^{(r-2)}(t_j)$ і, значить, $|\lambda s^{(r-2)}(t_{j+1})| \le |\varphi^{(r-2)}(t_{j+1})|$.

Нехай $\delta(t) = \varphi(t) - \alpha - \lambda(s(t) - \beta)$, де α і β – константи найкращого рівномірного наближення функцій $\varphi(t)$ і $s(t)$ відповідно.

Оскільки $\delta^{(r-2)} \in S^2_{2n,2}$ і $\delta^{(r-2)}(t_j) = 0$, то $\delta^{(r-2)}$ на проміжку $[t_j, t_{j+1}]$ може мати не більше трьох змін знаку. Тоді на періоді у $\delta^{(r-2)}$ буде не більше $2n - 1$ зміни знаку.

З іншого боку, як при доведенні теореми 1.5.1, переконуємось, що $\delta(t)$ має на періоді не менше $2n$ змін знаку. Але тоді в силу теореми Ролля $\delta^{(r-2)}(t)$ змінює знак на періоді не менше $2n$ раз.

Отримана суперечність показує правильність нерівності (1.77).

Із (1.77) з урахуванням монотонності $s^{(r-2)}$ на $[t_j, t_{j+1}]$ випливає, що

$$\bigvee_{t_j}^{t_{j+1}}[s^{(r-2)}] \le \bigvee_{t_j}^{t_{j+1}}[\varphi^{(r-2)}]$$

також для інтервалів, в яких $s^{(r-1)}$ не має нулів.

Теорема 1.5.2 доведена.

Доведення теореми 1.5.3. Під час доведення теореми 1.5.2 нами вже встановлено, що якщо $s^{(r-1)}$ має нуль в (t_j, t_{j+1}), то виконується нерівність (1.75). Покажемо, що ця нерівність виконується і для таких інтервалів, в яких $s^{(r-1)}$ не має нулів. Для цього ми покажемо, що для всіх $x \in [0, 2\pi/n]$ має місце нерівність

$$\int\limits_0^x r(s^{(r-1)}, t)\, dt \le \int\limits_0^x r(\varphi^{(r-1)}, t)\, dt, \qquad x \in [0, 2\pi/n], \tag{1.78}$$

де $r(f, t)$ – незростаюча перестановка (див., напр., [133, розд. 3]) звуження функції $|f|$ на $[t_j, t_{j+1}]$.

Нехай $\Delta(x) = \int\limits_0^x r(\varphi^{(r-1)}, t)\, dt - \int\limits_0^x r(s^{(r-1)}, t)\, dt$. В розглядуваному випадку обидві функції $r(\varphi^{(r-1)}, t)$ і $r(s^{(r-1)}, t)$ лінійні на $[0, 2\pi/n]$, отже їх різниця або не змінює знаку на інтервалі $(0, 2\pi/n)$ (і тоді в силу (1.69) для будь-якого $t \in (0, 2\pi/n)$ буде $r(s^{(r-1)}, t) \leq r(\varphi^{(r-1)}, t))$, або змінює знак рівно один раз в точці $x_0 \in (0, 2\pi/n)$, причому з "+"на "$-$".

В першому випадку нерівність (1.78) очевидна. В другому випадку, оскільки $\Delta'(x) = r(\varphi^{(r-1)}, x) - r(s^{(r-1)}, x)$, то $\Delta(x)$ зростає на інтервалі $(0, x_0)$ і спадає на $(x_0, 2\pi/n)$. Крім того, $\Delta(0) = 0$ і $\Delta(2\pi/n) \geq 0$ (остання нерівність справджується в силу (1.69)). Таким чином, різниця $\Delta(x)$ невід'ємна на $[0, 2\pi/n]$, що еквівалентне (1.78).

Враховуючи(1.78) і пропозицію 3.2.5 із [133], бачимо, що (1.75) має місце також для інтервалів (t_j, t_{j+1}), в яких $s^{(r-1)}$ не має нулів.

Отже, для довільного $p \in [1, \infty)$ і довільного $j = \overline{0, n-1}$

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |s^{(r-1)}(t)|^p \, dt \leq \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |\varphi^{(r-1)}(t)|^p \, dt,$$

значить,

$$\|s^{(r-1)}\|_p = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |s^{(r-1)}(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} |\varphi^{(r-1)}(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int\limits_{0}^{2\pi} |\varphi^{(r-1)}(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi^{(r-1)}\|_p.$$

Таким чином, остання нерівність, з огляду на означення функції φ, дає нерівність (1.71) для всіх $p \in [1, \infty)$.

Теорема 1.5.3 доведена.

Висновки до розділу 1

Розділ 1 присвячено дослідженню класичних задач наближення класів диференційовних періодичних функцій $W^r F$, старша похідна яких належить довільній перестановочно-інваріантній множині F. Відзначимо, що до П–інваріантних множин відноситься достатньо велика кількість розглядуваних в теорії апроксимації множин, отже такий підхід дозволяє істотно збільшити запас наближуваних класів у порівнянні зі стандартними класами Соболєва. Крім того, в даному розділі розглянуто наближення класів функцій W^rH^ω, обмеження на старшу похідну яких задаються опуклим вгору модулем неперервності $\omega(t)$.

В даному розділі отримано точні значення найкращих наближень класів W^rF підпросторами сплайнів $S^2_{2n,m}$ порядку $m \geq r$ дефекту 2 з вузлами в точках $\dfrac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, а також точні значення найкращих наближень класів W^rH^ω такими сплайнами порядку $m \geq r+1$.

Отримано точні значення найкращих наближень класів W^rF і W^rH^ω підпросторами сплайнів $S^1_{2n,m}(h)$ порядку $m \geq r+1$ дефекту 1 з вузлами в точках $\dfrac{2k\pi}{n}$ і $\dfrac{2k\pi}{n}+h$, $k \in \mathbb{Z}$, $h \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}\right)$.

Показано, що сплайни $S^2_{n,m}$ є екстремальними для поперечників за Колмогоровим $d_{2n}(W^rF, L_1)$ для $m \geq r$ і $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$ для $m \geq r+1$, а сплайни $S^1_{2n,m}(h)$ є екстремальними для поперечників за Колмогоровим $d_{2n}(W^rF, L_1)$ і $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$ при $m \geq r+1$.

Отримані результати, а також деякі ідеї, використані для їх доведення дали можливість одержати точні нерівності типу Бернштейна для сплайнів $S^2_{n,m}$ і нерівності типу Джексона для сплайнів $S^2_{n,m}$ і $S^1_{2n,m}(h)$.

Результати цього розділу опубліковані в роботах: [36, 37, 39, 42, 34, 35, 40, 257] (див. також роботи [4, 5, 6, 10, 28, 29, 31, 33] зі списку публікацій здобувача на с. 10–15).

РОЗДІЛ 2

Найкращі несиметричні наближення класів згорток узагальненими сплайнами

2.1. Розвиток ідей і методів в задачах наближення функціональних класів

Для $f \in L_p$ і чисел $\alpha, \beta \geq 0$ покладемо

$$\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p,$$

де

$$f_\pm(x) = \max\{\pm f(x), 0\}.$$

Несиметричні норми у зв'язку з деякими задачами теорії наближень, переважно в просторі C, розглядались М. Г. Крейном (стаття IV в книзі [11]; див. також [137]).

Якщо H – підмножина L_p і $\alpha, \beta > 0$, то величину

$$E(f,H)_{p;\alpha,\beta} := \inf_{h\in H} \|f-h\|_{p;\alpha,\beta}. \tag{2.1}$$

назвемо найкращим (α,β)-наближенням функції f множиною H в метриці L_p.

Задача найкращого (α,β)-наближення класу функцій $M \subset L_p$ множиною H полягає в тому, щоб знайти величину

$$E(M,H)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f\in M} E(f,H)_{p;\alpha,\beta}. \tag{2.2}$$

Нехай фіксовано множину $H \subset L_p$. Функції $f \in L_p$ поставимо у відповідність підмножини:

$$H_f^+ = \{u(t) : u \in H, u(t) \leq f(t), 0 \leq t \leq 2\pi\},$$

$$H_f^- = \{u(t) : u \in H, u(t) \geq f(t), 0 \leq t \leq 2\pi\}.$$

Величини

$$E^\pm(f,H)_p := \begin{cases} \inf\{\|f-u\|_p : u \in H_f^\pm\}, & H_f^\pm \neq \emptyset, \\ \infty, & H_f^\pm = \emptyset \end{cases}$$

і

$$E^{\pm}(M,H)_p := \sup_{f\in M} E^{\pm}(f,H)_p$$

називаються найкращим наближенням знизу (+) і зверху (−) функції $f \in L_p$ і класу $M \subset L_p$ відповідно.

Покладаючи в формулах (2.1) і (2.2) $\alpha = \beta = 1$, отримаємо найкращі L_p-наближення без обмежень (позначення $E(f,H)_p$ і $E(M,H)_p$), а спрямовуючи α або β до $+\infty$ найкраще наближення зверху або знизу (див.[14, теорема 2]) відповідно функції f і класу M. Отже, сім'я задач найкращого (α,β)-наближення "інтерполює" задачі найкращого і найкращого одностороннього наближень і дозволяє розглядати їх з загальної точки зору. У зв'язку з цією властивістю нижче будемо припускати для α або β значення $+\infty$, тобто будемо ототожнювати в цих випадках найкращі (α,β)-наближення з найкращими односторонніми наближеннями. Відзначимо, що вивчення задач найкращого (α,β)-наближення при $\alpha,\beta < \infty$ має, звичайно, і самостійний інтерес. Загальні задачі наближення з "несуворими" обмеженнями розглядав В. Ф. Бабенко [16, 17]. Йому належать основні результати цього напряму досліджень.

Відзначимо, що близькі питання (апроксимації зі знакочутливою вагою) розглядаються Є. П. Долженком і Є. А. Севастьяновим та ін. (див., наприклад, [92, 93]).

Позначимо через T_{2n-1}, $n = 1, 2, ...,$ – простір тригонометричних поліномів порядку не вище $n-1$.

Згортку $K * \varphi$ функції $K \in L_1$ і $\varphi \in L_1$ означимо рівністю

$$(K*\varphi)(x) = \int_0^{2\pi} K(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Для ядра K покладемо

$$M(K) = \{m \in \mathbb{Z} : \hat{K}_m = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} K(t)e^{-imt}\,dt = 0\},$$

і будемо надалі вважати, що $M(K)$ порожня або скінченна множина. Якщо $M \in \mathbb{Z}$ – скінченна центрально-симетрична множина, то через $T(M)$ позначимо лінійний простір тригонометричних поліномів виду

$$T(x) = \sum_{m \in M} c_m e^{imx}, \quad c_{-m} = \bar{c}_m$$

(якщо $M = \emptyset$, то $T(x) \equiv 0$). Якщо $M = \{-(n-1), ..., -1, 0, 1, ..., n-1\}$, то $T(M) = T_{2n-1}$.

Нехай задане ядро K і множина $F \subset L_1$. Через $K * F$ позначимо клас функцій виду

$$f(x) = T(x) + (K * \varphi)(x), \;\; T \in T(M(K)), \varphi \in F, \;\; \varphi \perp T(M(K)). \quad (2.3)$$

У подальшому ми розглядаємо задачі наближення для класів типу $K * F$, частинними випадками яких є різні важливі для теорії наближень класи функцій.

Для ядра K покладемо $\mu = \mu(K) = 0$, якщо $0 \notin M(K)$ і $\mu = \mu(K) = 1$, якщо $0 \in M(K)$.

Наведемо приклади конкретних ядер і функціональних класів.

Нехай

$$B_r(x) = \pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-r} \cos(mx - \pi r/2), \quad r = 1, 2, ... -$$

ядра Бернуллі.

Якщо $F \subset L_1$, то $B_r * F = W^r F$ – клас функцій, що мають локально-абсолютно неперевну похідну $f^{(r-1)}$ ($f^{(r-1)} \in AC_{loc}$) і такі, що $f^{(r)} \in F$. Відзначимо, що якщо

$$F = W_p^0 = \{f \in L_p : \|f\|_p \leq 1\},$$

то $B_r * F = W_p^r$ – стандартний для теорії наближень клас Соболєва.

Неперевне на $(0, 2\pi)$ і таке, що не є тригонометричним поліномом ядро K будемо називати CVD-ядром (і писати $K \in CVD$), якщо $\nu(a\mu + K * \varphi) \leq \nu(\varphi)$ $\forall \varphi \in C$, $\varphi \perp \mu$, $a \in \mathbb{R}$ (тут і скрізь нижче $\nu(g)$ –

число змін знаку на періоді у 2π-періодичної функції g). Очевидно, що $B_r \in CVD$. Ряд питань теорії CVD-ядер викладений в [285, 272].

Нехай $\Delta \in (0, 2\pi]$. Якщо для будь-яких $\varphi \in C$, $\varphi \perp T(M)$ і $T \in T(M)$ таких, що $T + K * \varphi$ має нулі в кожному інтервалі довжини Δ, справедлива нерівність $\nu(T + K * \varphi) \le \nu(\varphi)$, то ядро K будемо називати $CVD[\Delta]$-ядром і писати $K \in CVD[\Delta]$. Зауважимо, що, якщо $K \in CVD$, то $K \in CVD[\Delta]$ для будь-якого $\Delta \in (0, 2\pi]$.

Нехай $\mathcal{P}_r$ – алгебраїчний поліном степеня $r = 1, 2, ...$ з дійсними коефіцієнтами. Покладемо

$$B(\mathcal{P}_r; x) = (2\pi)^{-1} {\sum_{m=-\infty}^{\infty}}' e^{imx}/\mathcal{P}_r(im)$$

(підсумовування в $\sum'$ ведеться за такими m, для яких $\mathcal{P}_r(im) \neq 0$).

Якщо $F \subset L_1$, то

$$B(\mathcal{P}_r; \cdot) * F = W(\mathcal{P}_r; F) -$$

це клас функцій $f \in C$ таких, що $f^{(r-1)} \in AC_{loc}$ і $\mathcal{P}_r(d/dx) f \in F$. Якщо всі корені $\mathcal{P}_r$ дійсні, то $B(\mathcal{P}_r; \cdot) \in CVD$. Якщо це не так, то знайдеться $\Delta \in (0, 2\pi]$, для якого $B(\mathcal{P}_r; \cdot) \in CVD[\Delta]$.

Ядра $(h > 0)$

$$A_h(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imx}/ch(mh),$$

$$G_h(x) = (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{imx - m^2 h}$$

є δ-видними (при $h \to 0$) CVD-ядрами.

Нехай для $n, r \in \mathbb{N}$, як і раніше, через T_{2n-1} позначено простір тригонометричних поліномів степеня не вище $n - 1$, а через $S^1_{2n,r}$ – простір 2π-періодчних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 1 з вузлами в точках $j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$.

Нехай $\varphi_{\lambda,m}(\alpha, \beta; t)$ $(\alpha, \beta > 0,\ \lambda > 0,\ m \in \mathbb{N})$ – $2\pi/\lambda$-періодичний інтеграл порядку m з нульовим середнім значенням на періоді від парної

$2\pi/\lambda$-періодичної функції $\varphi_{\lambda,0}(\alpha,\beta;t)$, яка для $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{\lambda}\right)$ визначається в такий спосіб

$$\varphi_{\lambda,0}(\alpha,\beta;t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \le t \le \dfrac{\pi\beta}{\lambda(\alpha+\beta)}, \\ -\beta, & \dfrac{\pi\beta}{\lambda(\alpha+\beta)} < t \le \dfrac{\pi}{\lambda}. \end{cases}$$

Для $\alpha = \beta = 1$ замість $\varphi_{\lambda,m}(\alpha,\beta;t)$ будемо писати $\varphi_{\lambda,m}(t)$.

У випадку $\max\{\alpha,\beta\} = \infty$ Покладаємо

$$(K * \varphi_{n,0}(1,\infty))(x) = \int\limits_0^{2\pi} K(t)\,dt - \frac{2\pi}{n}\sum_{m=0}^{n-1} K(x - 2m\pi/n).$$

Зрозуміло, що при $\beta \to \infty$ буде

$$\|K * \varphi_{n,0}(1,\beta)_\pm\|_\infty \to \|K * \varphi_{n,0}(1,\infty)_\pm\|_\infty.$$

В розділі 1 ми розглядали питання щодо найкращих наближень достатньо загальних класів $W^rF = B_r * F$, де F– довільна П–інваріантна множина, конкретними апроксимуючими підпросторами, а також питання обчислення поперечників цих класів.

Відзначимо, що істотно доповнити запас класів функцій ми можемо, розглядаючи замість згорток з ядрами Бернуллі згортки з іншими (більш загальними) ядрами.

Загальну теорію найкращих наближень тригонометричними поліномами класів $K * W^0_\infty$ і $K * W^0_1$ в метриках C і L_1 відповідно побудував С. М. Нікольський [163].

Для важливих сукупностей ядер найкращі наближення класів $K*W^0_\infty$ і $K * W^0_1$ в метриках C і L_1 були знайдені В. К. Дзядиком [83]–[87], С. Б. Стєчкіним [193], Сунь Юншеном [212, 213], К. І. Бабенком [59, 62] (див. також [63, розд. 3, §1]).

Задача обчислення поперечників класів згорток з CVD-ядрами і класів, що задаються за допомогою диференціальних операторів зі сталими коефіцієнтами, розглядалась в роботах А. Пінкуса [292], В. Т. Шевалдіна [237, 238].

Починаючи з робіт Ж. Фройда [267] і Т. Ганеліуса [268], низка точних оцінок отримана для односторонніх наближень класів функцій поліномами (див. роботи В. Г. Дороніна [96], В. Г. Дороніна і А. О. Лігуна [99]), а також сплайнами мінімального дефекта (див. роботи В. Г. Дороніна і А. О. Лігуна [97, 98]). Достатньо повно викладення матеріалу з цих питань і відповідна бібліографія подані в [135].

Найбільш загальні результати в цьому напрямі полягають в наступному. Нехай $n = 1, 2, ..., r = 0, 1, ..., \Delta \in (0, 2\pi]$, $\alpha, \beta \in (0, \infty]$. Нехай також K є $CVD[\Delta]$-ядром, F – перестановочно-інваріантною підмножиною в L_1 і H є T_{2n-1} або $K * S^1_{2n,r}$. Тоді, якщо $n \geq \dfrac{2\pi}{\Delta}$ настільки велике, що $H \supset T(M(K))$, то

$$E(K * F, H)_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(\varphi, t) \Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot); t)\, dt. \tag{2.4}$$

Зокрема, якщо $K \in CVD$, то рівність (2.4) правильна при всіх n. Результат (2.4) отримав В. Ф. Бабенко [16].

Для $K \in CVD$ справедлива також рівність

$$d_{2n-1}(K * F, L_1) = d_{2n}(K * F, L_1) =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(\varphi, t) \Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(t))\, dt. \tag{2.5}$$

При цьому простори T_{2n-1} є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(K * F, L_1)$ і $d_{2n}(K * F, L_1)$, а простори $K * S^1_{2n,r}$ $(r = 0, 1, ...)$ – для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

У випадку $F = W^0_p$ результат (2.5) належить А. Пінкусу [292], а у випадку довільної Π - інваріантної множини F – В. Ф. Бабенку [17].

В даному розділі ми отримаємо точні значення найкращих наближень класів згорток $K * F$ ($K \in CVD$, F–довільна Π–інваріантна множина) підпросторами $K * S^2_{2n,r}$ і найкращих несиметричних наближень класів згорток $K * F$ ($K \in CVD[\Delta]$, F–довільна Π–інваріантна множина) підпросторами $K * S^1_{2n,r}(h)$ $(0 < h < \dfrac{2\pi}{n})$, де $S^2_{2n,r}$ $(n, r \in \mathbb{N})$– простори

2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 2, з вузлами в точках $\dfrac{2j\pi}{n}$, $j \in \mathbb{Z}$, означені в підрозділі 1.2, а $S^1_{2n,r}(h)$ – простори 2π-періодичних поліноміальних сплайнів порядку r дефекту 1, з вузлами в точках $\dfrac{2j\pi}{n}$ і $\dfrac{2j\pi}{n} + h$, $j \in Z$, означені в підрозділі 1.3.

2.2. Найкращі наближення класів згорток узагальненими сплайнами на основі сплайнів дефекту 2 з рівномірно розподіленими вузлами

Нехай $K \in CVD$– задане ядро, F– довільна Π–інваріантна множина. Даний підрозділ присвячено знаходженню точних значень найкращих L_1-наближень класів $K * F$ підпросторами $K * S^2_{2n,k}$ $(n, k \in \mathbb{N})$.

Основним результатом підрозділу є

Теорема 2.2.1. *Нехай $n, k \in \mathbb{N}$, $K \in CVD$, F – Π-інваріантна підмножина в L_1. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність*

$$E(K * F, K * S^2_{2n,k})_1 = \sup_{\substack{f\in F \\ f\perp\mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}; t)\, dt. \tag{2.6}$$

Співвідношення (2.6) разом з рівністю (2.5) показують, що підпростори $K * S^2_{2n,k}$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

Вагому роль при доведенні теореми 2.2.1 буде відігравати наступна лема, що пояснює зміст ортогональності функції f підпростору $K * S^2_{2n,k}$.

Покладемо $t_j = \dfrac{2j\pi}{n}$, $j = 1, ..., n$.

Лема 2.2.1. *Для того, щоб 2π-періодична функція $f \in L_1$ була ортогональна простору $K * S^2_{2n,k}$ $(k \in \mathbb{N}$, $K \in CVD)$ необхідно і достатньо, щоб виконувались рівності:*

$$(B_{k+1} * K(-\cdot) * f)(t_1) = (B_{k+1} * K(-\cdot) * f)(t_2) = ... = (B_{k+1} * K(-\cdot) * f)(t_n)$$

і

$$((B_{k+1} * K(-\cdot) * f))' = ((B_{k+1} * K(-\cdot) * f))' = ... = ((B_{k+1} * K(-\cdot) * f))' = 0.$$

Нам знадобиться також таке твердження

Лема 2.2.2. *Нехай* $K \in CVD$. *Якщо* $f \in B_l * K * W_\infty^0$ $(l = 1, 2, ...)$ *і при деякому* $n \in \mathbb{N}$ *виконується нерівність*

$$\|f_\pm\|_C \leq \|(B_l * K * \varphi_{n,o})_\pm\|_C,$$

то функція f *має* μ*-властивість відносно функції* $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$.

Означення μ-властивості див. в [133, с.109].

Крім того при доведенні теореми 2.2.1 нами істотно буде використовуватись така теорема, яка має і самостійний інтерес.

Теорема 2.2.2. *Нехай* $K \in CVD$, $n, l \in \mathbb{N}, l \geq 2$, $t_j = 2j\pi/n$ *для* $j = 1, 2, ..., n$. *Нехай* $\widetilde{\varphi}(t) = B_l * K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(t+\alpha) + \|B_l * K(-\cdot) * \varphi_{n,0}\|_\infty$, *де* α *обрано з умови* $\widetilde{\varphi}(0) = 0$. *Тоді для будь-якої функції* $g \in B_l * K(-\cdot) * W_\infty^0$ *такої, що*

$$g(t_1) = g(t_2) = ... = g(t_n)$$

і

$$g'(t_1) = g'(t_2) = ... = g'(t_n) = 0,$$

мають місце твердження:

a) $\forall t \in \mathbb{R}$ $|g(t) - g(0)| \leq \widetilde{\varphi}(t)$, *притому, якщо* $|g(t) - g(0)|$ *відмінна від* $\widetilde{\varphi}(t)$, *то знак рівності має місце лише в точках* t_j, $j = 1, 2, ..., n$;

b) $\|g_\pm^{(k)}\|_\infty \leq \|(B_{l-k} * K(-\cdot) * \varphi_{n,0})_\pm\|_\infty$, $k = 1, 2, ..., l$.

Спочатку ми доведемо леми 2.2.1 і 2.2.2, потім теорему 2.2.2, а вже потім теорему 2.2.1.

Доведення леми 2.2.1. Відомо, (див. [133, наслідок 2.3.6]), що будь-який сплайн s із $S_{2n,k}^2$ в єдиний спосіб зоражується у вигляді

$$s(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j B_{k+1}(t - t_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j B_k(t - t_j), \tag{2.7}$$

де

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s(t)\, dt, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j = 0,$$

$B_m(t)$ $m = 1, 2, ...$ $-$ ядро Бернуллі.

Тоді будь-який елемент $K * s \in K * S^2_{2n,k}$ можна зобразити у вигляді

$$K * s(t) = a_0\mu + \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{2\pi} K(x-t)B_{k+1}(t-t_j)\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{2\pi} K(x-t)B_k(t-t_j)\,dt, \qquad (2.8)$$

де $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$.

Нехай $f \perp K * S^2_{2n,k}$, тобто $\int\limits_0^{2\pi} f(t)(K * s)(t)\,dt = 0$ для будь-якого $K * s \in K * S^2_{2n,k}$. Насамперед відзначимо, що оскільки $K * S^2_{2n,k}$ містить константи, то $f \perp 1$. З урахуванням (2.8) отримаємо

$$\int_0^{2\pi} f(x)\Big(a_0\mu + \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{2\pi} K(x-t)B_{k+1}(t-t_j)\,dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{2\pi} K(x-t)B_k(t-t_j)\,dt\Big)\,dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K(x-t)B_{k+1}(t-t_j)\,dt\,dx +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K(x-t)B_k(t-t_j)\,dt\,dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{2\pi} B_{k+1}(t-t_j)(K(-\cdot)*f)(t)\,dt + \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{2\pi} B_k(t-t_j)(K(-\cdot)*f)(t)\,dt.$$

За рахунок довільності a_j і b_j і парності (непарності) ядра Бернулі можемо написати

$$\sum_{j=1}^{n} a_j B_{k+1} * (K(-\cdot) * f)(t_j) + \sum_{j=1}^{n} b_j B_k * (K(-\cdot) * f)(t_j) = 0. \qquad (2.9)$$

Нехай $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$, тоді для виконання останньої рівності необхідно, щоб для довільного набору $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ було $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j B_k * (K(-\cdot) * f)(t_j) = 0$, а ця рівність можлива, лише якщо $B_k * (K(-\cdot) * f)(t_j) = 0$ для всіх $j = 1, 2, ..., n$.

Нехай тепер $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$. Рівність $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j B_{k+1} * (K(-\cdot) * f)(t_j) = 0$ рівносильна ортогональності векторів $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ і $\overline{B_{k+1} * K(-\cdot) * f} = (B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_1),$ $B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_2), ..., B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_n))$. Умова $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$ виділяє в просторі $\mathbb{R}^n$ гіперплощину з нормальним вектором $(1, 1, ..., 1)$, який в свою чергу, паралельний вектору $\overline{B_{k+1} * K(-\cdot) * f}$, а значить, $B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_1) = B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_2) = ... = B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_n)$. Необхідність встановлена.

В силу співвідношення (2.9) і умови $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j = 0$ достатність очевидна.

Лема 2.2.1 доведена.

Доведення леми 2.2.2. Припустимо, що f не наділена μ-властивістю відносно $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$, тобто на інтервалі (τ_1, τ_2) монотонності $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$ різниця $B_l * K * \varphi_{n,0}(t) - f(t + \alpha)$ при деякому α змінює знак всупереч μ-властивості, а саме з "+"на "$-$ якщо $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$ зростає, або з "$-$"на "+ якщо $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$ спадає. З міркувань неперервності зрозуміло, що цей факт матиме місце при достатньо малому $\varepsilon > 0$ і для різниці

$$\delta(t) = B_l * K * \varphi_{n,0}(t) - (1-\varepsilon) f(t+\alpha) = B_l * K * (\varphi_{n,0}(t) - (1-\varepsilon) f_0(t+\alpha)) =$$

$$= B_l * K * \delta_0(t),$$

де $f(t) = a\mu + B_l * K * f_0(t)$, $f_0 \perp \mu$, $a \in \mathbb{R}$.

Оскільки $(1-\varepsilon)\|f_\pm\|_C < \|(B_l * K * \varphi_{n,o})_\pm\|_C$, то $\delta(t)$ в точках τ_1 и τ_2 має знак функції $B_l * K * \varphi_{n,0}(t)$. Це означає, що на інтервалі (τ_1, τ_2) функція $\delta(t)$ змінює знак якнайменше 3 рази, а на періоді $[\tau_1, \tau_1 + 2\pi]$ принаймні $2n + 2$ рази. Оскільки $B_l * K \in CVD$, то число істотних змін знаку функції $\delta_0(t)$ має бути не менше $2n+2$, в той час як $(1-\varepsilon)|f_0(t+\alpha)| < 1$ і різниця $\delta_0(t) = \varphi_{n,0}(t) - (1-\varepsilon)f_0(t+\alpha)$ має на періоді рівно $2n$ змін знаку.

Лему 2 доведено.

Доведення теореми 2.2.2. Нехай $\widetilde{g}(t) = g(t) - g(0)$. Функції $\widetilde{\varphi}(t)$ і $\widetilde{g}(t)$ мають нулі кратності 2 в точках t_j, $j \in \mathbb{Z}$. Для доведення твердження а) припустимо, що знайдеться t_* таке, що $|\widetilde{g}(t_*)| > \widetilde{\varphi}(t_*)$. Для придатного $0 < |\lambda| < 1$ отримаємо $\lambda\widetilde{g}(t_*) = \widetilde{\varphi}(t_*)$. Нехай $\delta(t) = \widetilde{\varphi}(t) - \lambda\widetilde{g}(t) =$
$= c\mu + B_l * K(-\cdot) * (\varphi_{n,0} - \lambda g_0)(t)$, $g_0 \in W^0_\infty$. Оскільки $\|\lambda g_0\|_\infty < 1$, а $\|\varphi_{n,0}\|_\infty = 1$, то на жодному з відрізків $[\alpha, \beta]$ додатної довжини функція $\delta_0(t) = (\varphi_{n,0} - \lambda g_0)(t)$, а значить, і $\delta(t)$ не перетворюються тотожньо на нуль, отже всі нулі $\delta(t)$ є ізольованими. Зрозуміло, що функція $\delta(t)$ має нуль в точці t_* і нулі кратності 2 в точках t_j, $j \in \mathbb{Z}$, тобто всього на періоді функції $\delta(t)$ має принаймні 2n+1 нуль з урахуванням кратності. Тоді у $\delta'(t)$ буде принаймні 2n+1 різних нулів, а у $K(-\cdot) * \delta_0(t)$ буде не менше 2n+2 змін знаку на періоді. Проте, $\delta_0(t) = \varphi_0(t) - \lambda g_0(t)$ має на періоді рівно 2n змін знаку, що суперечить тому, що $K(-\cdot) \in CVD$.

Твердження а) доведене.

Доведемо твердження b). Нехай $t_{\max} \in (0, 2\pi)$ таке, що $|\widetilde{g}'_+(t_{\max})| = \|\widetilde{g}'_+\|_\infty$, і $j \in \mathbb{Z}$ обране з умови $t_{\max} \in (t_j, t_{j+1})$. Припустивши, що $|\widetilde{g}'(t_{\max})| > \|\widetilde{\varphi}'_+\|_\infty$, ми зможемо вказати таке $0 < |\lambda| < 1$, що

$$\lambda\widetilde{g}'(t_{\max}) = \|\widetilde{\varphi}'_+\|_\infty = \widetilde{\varphi}'(t^1_{\max}). \tag{2.10}$$

Крім того,

$$\lambda\widetilde{g}'(t_j) = \lambda\widetilde{g}'(t_{j+1}) = \widetilde{\varphi}'(t_j) = \widetilde{\varphi}'(t_{j+1}) = 0. \tag{2.11}$$

Зрозуміло, що функції $\lambda\widetilde{g}'(t)$ і $\widetilde{\varphi}'(t)$ задовольняють умови теореми Колмогорова про порівняння похідних [113] (див. також [133, теорема 3.3.2]). Враховуючи цю обставину і співвідношення (2.10), (2.11), неважко встановити (достатньо, наприклад, скористатись пропозицією 5.6.6 із [131]), що $t_{\max}$ розташоване між $t^1_{\max}$ і $t^1_{\min}$, де $t^1_{\max}$ і $t^1_{\min}$ – точки максимума і мінімума функції $\widetilde{\varphi}'(t)$, що містяться в проміжку (t_j, t_{j+1}). Нехай $t_j^0 \in (t_j, t_{j+1})$ така, що $\widetilde{\varphi}'(t_j^0) = 0$.

Зрозуміло, що знайдуться точки $t_j^1 \in [t_j, t_j^0]$, $t_j^2 \in [t_j^0, t_{j+1}]$ такі, що

$$\lambda\widetilde{g}'(t_j^1) = \lambda\widetilde{g}'(t_j^2) = 0; \;\; t_{\max} \in (t_j^1, t_j^2); \;\; \lambda\widetilde{g}'(t) > 0, \, t \in (t_j^1, t_j^2). \tag{2.12}$$

Знову використовуючи пропозицію 5.6.6 із [131], робимо висновок, що

$$t_{\max} - t_j^1 \geq t_{\max}^1 - t_j$$

і

$$t_j^2 - t_{\max} \geq t_j^0 - t_{\max}^1$$

і значить,

$$t_j^2 - t_j^1 \geq t_j^0 - t_j,$$

звідки

$$mes\{[t_{j+1}, t_j] \setminus (t_j^2, t_j^1)\} \leq mes\{[t_j^0, t_{j+1}]\}. \tag{2.13}$$

В силу пропозиції 5.6.5 із [131] з урахуванням того, що

$$\lambda\widetilde{g}'(t) \geq \widetilde{\varphi}'(t + t_{\max}^1 - t_{\max}), \quad t \in \left(t_{\max} - (t_{\max}^1 - t_j), t_{\max} + (t_j^0 - t_{\max}^1)\right),$$

встановлюємо, що

$$\int\limits_{t_j^1}^{t_j^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\, dt \geq \int\limits_{t_j}^{t_j^0} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt = \left| \int\limits_{t_j^0}^{t_{j+1}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt \right|, \tag{2.14}$$

і оскільки $\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \lambda\widetilde{g}'(t)\, dt = 0$, то

$$\left| \int\limits_{[t_j, t_{j+1}] \setminus (t_j^1, t_j^2)} \lambda\widetilde{g}'(t)\, dt \right| \geq \int\limits_{t_j}^{t_j^0} \widetilde{\varphi}'(t), dt. \tag{2.15}$$

З іншого боку (тут ми знову використовуєм (2.11) і пропозицію 5.6.5 із [131]) для $t \in (t_j, t_j^1) \cup (t_j^2, t_{j+1})$ отримуємо $|\lambda\widetilde{g}'(t)| \leq |\widetilde{\varphi}'(t)|$. Враховуючи цю нерівність і (2.13), дістаємо, що

$$\left| \int\limits_{[t_j, t_{j+1}] \setminus (t_j^1, t_j^2)} \lambda\widetilde{g}'(t)\, dt \right| \leq \int\limits_{[t_j, t_{j+1}] \setminus (t_j^1, t_j^2)} |\widetilde{\varphi}'(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_j^0}^{t_{j+1}} |\widetilde{\varphi}'(t)|, dt = \int\limits_{t_j}^{t_j^0} \widetilde{\varphi}'(t), dt. \tag{2.16}$$

Зіставляючи (2.15) і (2.16), бачимо, що

$$\left| \int\limits_{[t_j,t_{j+1}]\setminus(t_j^1,t_j^2)} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt \right| = \int\limits_{t_j}^{t_j^0} \widetilde{\varphi}'(t), dt,$$

але тоді і

$$\int\limits_{t_j^1}^{t_j^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt = \int\limits_{t_j}^{t_j^0} \widetilde{\varphi}'(t), dt. \tag{2.17}$$

Пригадуючи, що $\lambda\widetilde{g}'(t) \geq \widetilde{\varphi}'(t + t_{\max}^1 - t_{\max})$ для всіх $t \in [t_{\max} - - (t_{\max}^1 - t_j), t_{\max} + (t_{\max}^0 - t_{\max}^1)]$, бачимо, що рівність (2.17) може виконуватись лише у випадку $\lambda\widetilde{g}'(t) = \widetilde{\varphi}'(t + t_{\max}^1 - t_{\max})$ для всіх $t \in [t_{\max} - (t_{\max}^1 - t_j), t_{\max} + (t_{\max}^0 - t_{\max}^1)]$, але це неможливо, оскільки $|\lambda g_0(t)| < 1$ для майже всіх t.

Таким чином, ми довели справедливість нерівності

$$\|g_{\pm}'\|_{\infty} \leq \|(B_{l-1} * K(-\cdot)\varphi_{n,0})_{\pm}\|_{\infty}. \tag{2.18}$$

Із (2.18), застосовуючи лему 2.2.2 і теорему 6.1 із [16], отримаємо, що

$$\|g_{\pm}''\|_{\infty} \leq \|(B_{l-2} * K(-\cdot)\varphi_{n,0})_{\pm}\|_{\infty}.$$

Далі, користуючись індукцією, отримаємо

$$\|g_{\pm}^{(k)}\|_{\infty} \leq \|(B_{l-k} * K(-\cdot)\varphi_{n,0})_{\pm}\|_{\infty}, \quad k = 1, 2, ..., l.$$

Теорему доведено.

Доведення теореми 2.2.1. Використовуючи теорему двоїстості С. М. Нікольського [163] для найкращого L_1–наближення підпростором (див. також [133, теорема 1.4.1]), отримаємо

$$E := E(K * F, K * S_{2n,k}^2)_1 = \sup_{f \in K*F} \sup_{\substack{\|g\|_\infty \leq 1, \\ g \perp K*S_{2n,k}^2}} \int\limits_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt =$$

$$= \sup_{\substack{f_0\in F,\\ f_0\perp\mu}} \sup_{\substack{\|g\|_\infty\le 1,\\ g\perp K*S^2_{2n,k}}} \int\limits_0^{2\pi} (K*f_0)(t)g(t)\,dt.$$

З використанням леми 2.2.1 можемо написати

$$E = \sup_{\substack{f_0\in F,\\ f_0\perp\mu}} \sup_{\substack{\|g\|_\infty\le 1,\\ K*g_{k+1}(t_1)=\ldots=K*g_{k+1}(t_n),\\ (K*g_{k+1})'(t_1)=\ldots=(K*g_{k+1})'(t_n)=0}} \int\limits_0^{2\pi} f_0(t)K(-\cdot)*g(t)\,dt,$$

де $t_j = 2j\pi/n$, $j = 1,2,...,n$, g_{k+1} – $(r+1)$-а 2π-періодична первісна функції g.

Враховуючи пропозицію 1.3.4 із [134], остаточно маємо

$$E = \sup_{\substack{\|g\|_\infty\le 1,\\ K*g_{k+1}(t_1)=\ldots=K*g_{k+1}(t_n),\\ (K*g_{k+1})'(t_1)=\ldots=(K*g_{k+1})'(t_n)=0}} \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp\mu}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)g,t)\,dt. \qquad (2.19)$$

Використовуючи твердження b) теореми 2.2.2 для $l = k$, отримаємо $\|(K(-\cdot)*g_1)_\pm\|_\infty \le \|(K(-\cdot)*\varphi_{n,1})_\pm\|_\infty$. Отже, виконуються умови теореми 6.2 із [16], в силу якої має місце нерівність

$$\int\limits_0^t r((K(-\cdot)*g(t)-\lambda)_\pm,u)\,du \le \int\limits_0^t r((K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(t)-\lambda)_\pm,u)\,du \quad (2.20)$$

для всіх $\lambda\in\mathbb{R}$ і $t\in[0,2\pi]$. Використовуючи пропозицію 1.3.14 із [134], можемо написати

$$\int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)*g,t)\,dt \le \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)*\varphi_{n,0},t)\,dt.$$

Із (2.19) і останньої нерівності одразу випливає оцінка зверху для E:

$$E \le \sup_{\substack{f\in F,\\ f\perp\mu}} \int\limits_0^{2\pi} \Pi(f,t)\Pi(K(-\cdot)*\varphi_{n,0},t)\,dt.$$

Оцінка знизу очевидно випливає із нерівності

$$d_{2n}(K*F,L_1) \le E(K*F,K*S^2_{2n,k})_1$$

і співвідношення (2.5).

Отже, співввідношення (2.6) доведене.

Теорема доведена.

2.3. Найкращі несиметричні наближення класів згорток узагальненими сплайнами на основі сплайнів дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами

В даному підрозділі ми розглядаємо наближення класів $K * F$ узагальненими сплайнами $K * S^1_{2n,r}(h)$ $(0 < h < \dfrac{2\pi}{n}, r \in \mathbb{N})$. Основний результат підрозділу міститься в теоремі

Теорема 2.3.1. *Нехай $n, r \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi/n)$, $\Delta \in (0, 2\pi]$, $\alpha, \beta \in (0; \infty]$. Нехай також $K \in CVD[\Delta]$, F-П-інваріантна підмножина в L_1. Тоді якщо $n \geq 2\pi/\Delta$ настільки велике, що $K * S^1_{2n,r}(h) \supset T(M(K))$, то*

$$E(K*F; K*S^1_{2n,r}(h))_{1;\alpha,\beta} = \sup_{\substack{f\in F\\ f\perp\mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(K(-\cdot)*\varphi_{n,0}(\alpha,\beta;t)\Pi(f;t)\,dt. \quad (2.21)$$

Зокрема, якщо $K \in CVD$, то рівність (2.21) правильна для всіх n.

Зіставляючи рівності (2.5) і (2.21) при $K \in CVD$, $\alpha = \beta = 1$, бачимо, що підпростори $K * S^1_{2n,r}(h)$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

Далі покладаємо $t_j = \dfrac{2\pi[\frac{j}{2}]}{n} + (1 - (-1)^j)\dfrac{h}{2}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Для доведення теореми 2.3.1 нам знадобляться деякі допоміжні твердження.

Лема 2.3.1. *Нехай $r, n \in \mathbb{N}$; $K \in L_1$, $g \in L_1$, $h \in (0, \dfrac{2\pi}{n})$; $g \perp K * S^1_{2n,r}(h)$. Тоді*

1) $g \perp T(M(K) \cup \{0\})$ і, зокрема, $(B_k * K(-\cdot) * g)^{(k)} = K(-\cdot) * g$ для всіх $k = 1, 2, ...$;

2) існує $T_g \in T(M(K) \cup \{0\})$ такий, що для $j = 1, 2, ..., 2n$

$$(B_{r+1} * K(-\cdot) * g(t_j)) - T_g(t_j) = 0.$$

Ця лема пояснює зміст ортогональності підпростору $K * S^1_{2n,r}(h)$ і узагальнює відоме [135, лема 9.2.1] твердження про функції ортогональні

$S^1_{2n,r}$. Доведення леми цілком аналогічне доведенню результата В. Ф. Бабенка для підпросторів $K * S^1_{2n,r}$ [16] (див. також [17]).

Лема 2.3.2. *Нехай* $\Delta \in (0;2\pi]$; $n, r \in \mathbb{N}$; $n \geq \dfrac{2\pi}{\Delta}$; $\alpha, \beta \in (0,\infty)$; $K \in CVD[\Delta]$. *Тоді для* $\dfrac{2\pi}{n}$*-періодичної функції* $B_{r+1} * K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot)$ *існують числа* $a < b < a + \dfrac{2\pi}{n}$ *такі, що на інтервалах* (a,b) *і* $(b, a+\dfrac{2\pi}{n})$ *вона строго монотонна.*

Лему доведено в [17].

Теорема 2.3.2. *Нехай* $n, r \in \mathbb{N}$; $\alpha, \beta \in (0,+\infty]$, $\Delta \in (0,2\pi]$;$h \in (0, \dfrac{2\pi}{n})$. *Нехай також* $K \in CVD[\Delta]$, $g \perp K * S^1_{2n,r}(h)$ *і* $\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leq 1$. *Тоді якщо* $n \geq \dfrac{2\pi}{\Delta}$ *настільки велике, що* $T(M) \subset K * S^1_{2n,r}(h)$, *то знайдеться* $T \in (T(M) \cup \{0\})$ *такий, що*

$$\|(B_{r-k+1} * K(-\cdot) * g - T^{(k)})_\pm\|_\infty \leq$$

$$\leq \|(B_{r-k+1} * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha,\beta;\cdot))_\pm\|_\infty, \quad k = 1, ..., r, \tag{2.22}$$

$$\|(K(-\cdot) * g - T)_\pm\|_\infty \leq \|(K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha,\beta;\cdot))_\pm\|_\infty, \tag{2.23}$$

Доведення. Нехай $\widetilde{\varphi}(t) = B_{r+1} * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha,\beta; t+\mu) + \eta$, де μ і η обрані так, щоб $\widetilde{\varphi}(t_j) = 0$, $j \in \mathbb{Z}$. Припустимо спочатку, що $\alpha, \beta < \infty$. Покажемо, що для всіх $t \in \mathbb{R}$

$$|(B_{r+1} * K(-\cdot) * g)(t) - T_g(t)| \leq |\widetilde{\varphi}(t)|, \tag{2.24}$$

де T_g – поліном із леми 2.3.1. Припустимо, що $\widetilde{\varphi}(t) > 0$ для $t \in (t_j, t_{j+1})$, і в цьому інтервалі не виконується нерівність

$$(B_{r+1} * K(-\cdot) * g)(t) - T_g(t) \leq \widetilde{\varphi}(t)$$

(решта випадків розглядається аналогічно).

Нехай $t^* \in (t_j, t_{j+1})$ таке, що $(B_{r+1} * K(-\cdot) * g - T_g)(t^*) > \widetilde{\varphi}(t^*)$. Оберемо $0 < \lambda < 1$ так, щоб $\lambda(B_{r+1} * K(-\cdot) * g - T_g)(t^*) = \widetilde{\varphi}(t^*)$. Тоді різниця

$$\delta(t) = \lambda(B_{r+1} * K(-\cdot) * g - T_g)(t) - \widetilde{\varphi}(t)$$

перетворюється в нуль в точці t^*, і, оскільки $\delta(t_j) = 0$, $j \in \mathbb{Z}$, то $\delta(t)$ має на періоді більше $2n$ нулів і нуль в кожному інтервалі довжини Δ. Для будь-якого тригонометричного полінома T різницю $\delta(t) - T$ можна зобразити у вигляді:

$$\delta(t) - T = \eta - \lambda T_g(t) - T_1 + B_{r+1} * K(-\cdot)[\lambda g - \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot + \mu) - T_2](t),$$

де $T_1 \in T(M(K) \cup \{0\})$ і $T_2 \perp T(M(K) \cup \{0\})$ такі, що

$$\lambda g - \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot) \perp T(M(K) \cup \{0\})$$

і, крім того, $-\beta\lambda < g(t) < \alpha\lambda$ для всіх t.

Поліном T можна, очевидно, обрати так, щоб $\nu(\delta(t) - T) > 2n$, $\delta(t) - T$ мала в кожному інтервалі довжини Δ зміну знака, і для всіх t було

$$-\beta\lambda_1 < \lambda g(t) - T_2(x) < \alpha\lambda_1, \quad \lambda < \lambda_1 < 1.$$

Нехай $\delta_h(t)$– функція Стєклова з кроком h функції f, тоді

$$\delta_h(t) = (\eta - \lambda T_g - T_1)_h(t) + B_{r+1} * K(-\cdot)(\lambda g - \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot + \mu) - T_2)_h(t).$$

Якщо h достатньо мале, то $\delta_h(t)$ має більше $2n$ змін знаку на періоді і змінює знак в кожному проміжку довжини Δ. При цьому $(\eta - \lambda T_g - T_1)_h \in T(M(K) \cup \{0\})$; $(\lambda g - \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot + \mu) - T_2)_h \perp T(M(K) \cup \{0\})$; $\nu((\lambda g - \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot + \mu) - T_2)_h) = 2n$. І ми отримали суперечність з тим, що $B_{r+1} * K(-\cdot) \in CVD[\Delta]$.

Нехай далі $\widetilde{g}(t) = (B_{r+1} * K(-\cdot) * g - T_g)(t)$. Припустимо, що $\widetilde{\varphi}(t) < 0$ для $t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$. Нехай $t_{\max} \in (0, 2\pi)$ і $t_{\min} \in (0, 2\pi)$ такі, що $\widetilde{g}'(t_{\max}) = \|\widetilde{g}'_+\|_\infty$ і $\widetilde{g}'(t_{\min}) = -\|\widetilde{g}'_-\|_\infty$, а $i \in \mathbb{Z}$ обране з умови $t_{\max} \in (t_{2i}, t_{2i+2})$.

Припустивши, що $\widetilde{g}'(t_{\max}) > \|\widetilde{\varphi}'_+\|_\infty$, ми можемо вказати таке $0 < \lambda < 1$, що

$$\lambda \widetilde{g}'(t_{\max}) = \|\widetilde{\varphi}'_+\|_\infty = \widetilde{\varphi}'(t^1_{\max}).$$

Тут через $t^1_{\max} < t^1_{\min}$ ми позначаємо точки з проміжка $[t_{2i}, t_{2i+2}]$, в яких функція $\widetilde{\varphi}'(t)$ набуває відповідно максимального і мінімального значень. Зрозуміло, що $t^1_{\max}$ і $t^1_{\min}$ належать проміжку (t_{2i+1}, t_{2i+2}).

Покажемо, що $t_{\max} \in (t^1_{\max}, t^1_{\min})$. Припустимо, що $t_{\max} \le t^1_{\max}$ (випадок $t_{\max} \ge t^1_{\min}$ розглядається аналогічно). Відзначимо, що при $0 < \lambda_1 < \lambda$ для функцій $\lambda_1 \widetilde{g}'(t)$ і $\widetilde{\varphi}'(t)$ виконуються умови теореми 6.1 із [16], причому $\lambda_1 \widetilde{g}'(t) \ne \widetilde{\varphi}'(t)$ майже скрізь.

Позначимо через t^1 найближчий зліва до $t_{\max}$ нуль функції $\widetilde{g}'(t)$, тоді за допомогою наслідка 6.1 із [16], спрямовуючи λ_1 до λ, неважко переконатись в тому, що

$$t_{\max} - t^1 > t^1_{\max} - t^1_0,$$

де t^1_0 – найближчий зліва до $t^1_{\max}$ нуль функції $\widetilde{\varphi}'(t)$.

Отже,

$$t^1 < t_{\max} - t^1_{\max} + t^1_0 \le t^1_0$$

і, крім того, $\forall t \in (t_{2i}, t_{2i+1})$ $\lambda \widetilde{g}'(t) > \widetilde{\varphi}'(t)$. Тоді

$$\int\limits_{t^1}^{t_{2i+1}} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt > \int\limits_{t^1_0}^{t_{2i+1}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt$$

і

$$\left| \int\limits_{t^1}^{t_{2i+1}} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt \right| < \left| \int\limits_{t_{2i}}^{t^1_0} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt \right| = \int\limits_{t^1_0}^{t_{2i+1}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt,$$

що суперечить тому факту, що $\int\limits_{t^1}^{t_{2i+1}} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt = 0$.

Покажемо, що функція $\lambda \widetilde{g}'(t)$ має нуль у проміжку $(t_{2i+1}, t_{\max})$.

Припускаючи супротивне, аналогічно попередньому, встановлюємо, що

$$t_{\max} - t_{2i+1} > t^1_{\max} - t_{2i+1},$$
$$t^2 - t_{\max} > t^2_0 - t^1_{\max},$$

де t^2 – найближчий справа до $t_{\max}$ нуль функції $\lambda \widetilde{g}'(t)$, причому $t^2 \in (t_{\max}, t_{2i+2})$, а t^2_0 – найближчий справа до $t^1_{\max}$ нуль функції $\widetilde{\varphi}'(t)$. Крім того,

$$\int\limits_{t_{2i+1}}^{t_{\max}} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt > \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^1_{\max}} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt$$

і

$$\int\limits_{t_{\max}}^{t^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt > \int\limits_{t^1_{\max}}^{t^2_0} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt.$$

Враховуючи ще той факт, що $\widetilde{g}(t_{2i+1}) = \widetilde{\varphi}(t_{2i+1}) = 0$, отримаємо

$$\lambda\widetilde{g}(t^2) = \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt = \int\limits_{t_{2i+1}}^{t_{\max}} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt + \int\limits_{t_{\max}}^{t^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt >$$

$$> \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^1_{\max}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt + \int\limits_{t^1_{\max}}^{t^2_0} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt = \int\limits_{t_{2i+1}}^{t^2_0} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt = \widetilde{\varphi}(t^2_0) = \|\widetilde{\varphi}_+\|_\infty.$$

Отже, $\lambda\widetilde{g}(t^2) > \|\widetilde{\varphi}_+\|_\infty$, що неможливо в проміжку $(t_{\max}, t_{2i+2})$ і ми отримали суперечність з (2.24). Таким чином, ми встановили, що $t_{\max} \in (t^1_{\max}, t^1_{\min})$, $t^1 \in (t_{2i+1}, t_{\max})$, $t_{\max} - t^1 > t^1_{\max} - t^1_0$ і $t^2 - t_{\max} > t^2_0 - t^1_{\max}$.

Отже,

$$t^2 - t^1 > t^2_0 - t^1_0, \tag{2.25}$$

і, враховуючи [16, наслідок 6.1], маємо:

$$\int\limits_{t^1}^{t^2} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt > \int\limits_{t^1_0}^{t^2_0} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt.$$

Але тоді, з урахуванням умов $\int\limits_{t_{2i+1}}^{t_{2i+3}} \lambda\widetilde{g}'(t)\,dt = 0$ і $\int\limits_{t_{2i+1}}^{t_{2i+3}} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt = 0$, мусить виконуватись також нерівність

$$\left| \int\limits_{(t_{2i+1}, t_{2i+3})\setminus(t^1, t^2)} \right| > \int\limits_{t^1_0}^{t^2_0} \widetilde{\varphi}'(t)\,dt. \tag{2.26}$$

Нехай (a_k, b_k) – складові інтервали множини

$$\{t \in (t_{2i+1}, t_{2i+3}) : \widetilde{g}'(t) < 0\}.$$

Тоді в силу (2.25)

$$\sum_k (b_k - a_k) \le t_{2i+3} - t_{2i+1} - (t^2 - t^1) \le$$

$$\le t_{2i+3} - t_{2i+1} - (t_0^2 - t_0^1) = \text{mes supp}\widetilde{\varphi}'_- \Big|_{(t_{2i+1}, t_{2i+3})} .$$

Нехай також для кожного k число $\gamma_k \ge 0$ таке, що $(a_k + \gamma_k, b_k + \gamma_k) \subset \text{supp}\widetilde{\varphi}'_- \Big|_{(t_{2i+1}, t_{2i+3})}(t)$. Використовуючи наслідок 6.1 із [16] впевнюємось в тому, що

$$\left| \int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \lambda \widetilde{g}'(t-\gamma_k)\, dt \right| \le \left| \int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt \right| .$$

Зрозуміло, що числа γ_k можна обрати так, щоб інтервали $(a_k+\gamma_k, b_k+\gamma_k)$ попарно не перетинались. Тоді маємо

$$\left| \int\limits_{(t_{2i+1}, t_{2i+3}) \setminus (t^1, t^2)} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt \right| = \left| \sum_k \int\limits_{a_k}^{b_k} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt \right| = \sum_k \left| \int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \lambda \widetilde{g}'(t-\gamma_k)\, dt \right| \le$$

$$\le \sum_k \left| \int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \widetilde{\varphi}'_-(t)\, dt \right| = \left| \sum_k \int\limits_{a_k+\gamma_k}^{b_k+\gamma_k} \widetilde{\varphi}'_-(t)\, dt \right| \le \int\limits_{t_0^1}^{t_0^2} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt.$$

Отже,

$$\left| \int\limits_{(t_{2i+1}, t_{2i+3}) \setminus (t^1, t^2)} \lambda \widetilde{g}'(t)\, dt \right| \le \int\limits_{t_0^1}^{t_0^2} \widetilde{\varphi}'(t)\, dt,$$

що суперечить (2.26).

Таким чином, доведено справедливість нерівності

$$\|(B_r * K(-\cdot) * g - T'_g)_+\|_\infty \le \|(B_r * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha, \beta; \cdot))_+\|_\infty.$$

Нерівність

$$\|(B_r * K(-\cdot) * g - T'_g)_-\|_\infty \le \|(B_r * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha, \beta; \cdot))_-\|_\infty$$

доводиться аналогічно. Отже, маємо

$$\|(B_r * K(-\cdot) * g - T'_g)_\pm\|_\infty \le \|(B_r * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha, \beta; \cdot))_\pm\|_\infty \qquad (2.27)$$

Враховуючи (2.27) і лему 2.3.2 неважко перевірити, що для будь-якого $\lambda \in (0; 1)$ функції $B_r * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha, \beta; \cdot)$ і $\lambda(B_r * K(-\cdot) * g - T'_g)$ задовольняють умови теореми 6.1 із [16], із якої випливає, що

$$\|\lambda(B_{r-1} * K(-\cdot) * g - T''_g)_\pm\|_\infty \le \|(B_{r-1} * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha, \beta; \cdot))_\pm\|_\infty.$$

Спрямовуючи λ до 1, із останньої нерівності отримаємо, що

$$\|(B_{r-1} * K(-\cdot) * g - T_g'')_{\pm}\|_{\infty} \le \|(B_{r-1} * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha,\beta;\cdot))_{\pm}\|_{\infty}.$$

Повторюючи ці міркування необхідну кількість разів, доводимо справедливість (2.22) і (2.23) у випадку $\alpha, \beta < \infty$.

Нехай тепер $\max\{\alpha,\beta\} = \beta = \infty$. Якщо $g \in L_{\infty}$ така, що $\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1$, то знайдеться $\beta_0 \in \mathbb{R}$ таке, що $-\beta_0 \le g \le \alpha$. Якщо $g \perp K * S^1_{2n,r}(h)$, то за вже доведеним

$$\|(B_{r-k+1} * K(-\cdot) * g - T^{(k)})_{\pm}\|_{\infty} \le$$

$$\le \|(B_{r-k+1} * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha,\beta_0;\cdot))_{\pm}\|_{\infty}, \quad k = 1, ..., r+1.$$

Відзначимо тепер, що

$$\|(B_{r-k+1} * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha,\beta_0;\cdot))_{\pm}\|_{\infty} \le \|(B_{r-k+1} * K(-\cdot) * \varphi_{n,o}(\alpha,\infty;\cdot))_{\pm}\|_{\infty}.$$

Теорему доведено.

Теорема 2.3.3. *Нехай $n, r, \Delta, \alpha, \beta, K, h$ такі, як в теоремі 2.3.2 і $\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1$, $g \perp K * S^1_{2n,r}(h)$. Тоді знайдеться $T_g \in T(M(K) \setminus \{0\})$ такий, що для довільного $x \in [0, 2\pi]$*

$$\int_0^x r((K(-\cdot) * g - T_g - \lambda)_{\pm}; t)\,dt \le \int_0^x r((K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot) - \lambda)_{\pm}; t)\,dt.$$

Зауваження 2.3.1. *Вперше твердження такого типу при $\alpha = \beta$ і $K = B_r$ з'явились в роботах М. П. Корнейчука (див. [131, теорема 6.8.1]), потім в роботах М. П. Корнейчука і А. О. Лігуна (див., напр., [277]). Випадок $K = B_r$, $\max(\alpha,\beta) = \infty$ розглянутий В. Г. Дороніним і А. О. Лігуном [135, терема 5.5.2]. У випадку $K \in CVD[\Delta]$, $\alpha, \beta \in (0,\infty]$, $h = \dfrac{\pi}{n}$ теорема 2.3.3 доведена В. Ф. Бабенком [16].*

Доведення теореми 2.3.3. Будемо використовувати методи з [16]. За допомогою теореми 2.3.2 неважко встановити, що при всіх $\varepsilon \in (0;1)$ і всіх достатньо малих $h > 0$ функції $A_h * K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha,\beta;\cdot)$ і

$\varepsilon A_h * K(-\cdot) * g - \varepsilon A_h * T'_g$ (T_g – поліном, який в теоремі 2.3.2 відповідає функції g і ядру K) задовольняють умовам теореми 6.2 із [16], отже для довільного λ і $x \in [0, 2\pi]$

$$\int_0^x r((\varepsilon A_h * K(-\cdot) * g - \varepsilon A_h * T'_g - \lambda)_\pm; t)\, dt \le$$

$$\le \int_0^x r((A_h * K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot) - \lambda)_\pm; t)\, dt.$$

Спрямовуючи спочатку h до нуля, а потім ε до одиниці, впевнюємось в справедливості теореми.

Теорема доведена.

Доведення теореми 2.3.1. В силу теореми 2.1 із [16] можемо написати:

$$E = E(K * F, K * S^1_{2n,m}(h))_1 = \sup_{f \in K*F} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1}\beta^{-1}} \le 1 \\ g \perp K * S^1_{2n,m}(h)}} \int_0^{2\pi} f(x) g(x)\, dx =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1}\beta^{-1}} \le 1 \\ g \perp K * S^1_{2n,m}(h)}} \int_0^{2\pi} (K * \varphi + T)(x) g(x)\, dx =$$

$$= \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1}\beta^{-1}} \le 1 \\ g \perp K * S^1_{2n,m}(h)}} \int_0^{2\pi} (K(-\cdot) * g - T_g)(t) \varphi(t)\, dt,$$

де T_g – поліном із теореми 2.3.3.

Далі, на підставі [16, пропозиція 8.1, 8.2] і теореми 2.3.3, отримаємо

$$E = \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1}\beta^{-1}} \le 1 \\ g \perp K * S^1_{2n,m}(h)}} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi; t) \Pi(K(-\cdot) * g - T_g; t)\, dt \le$$

$$\le \sup_{\substack{\varphi \in F \\ \varphi \perp \mu}} \int_0^{2\pi} \Pi(\varphi; t) \Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta); t)\, dt.$$

Непокращуваність цієї нерівності випливає з [16, пропозиція 8.1] і $\frac{2\pi}{n}$-періодичності функції $K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; \cdot)$.

Теорема доведена.

Висновки до розділу 2

Розділ 2 присвячено дослідженню питань наближення класів згорток функцій з довільної Π–інваріантної множини з ядрами, що не збільшують кількість змін знаку на періоді. Такий підхід дозволяє значно розширити набір наближуваних класів у порівнянні з класами згорток з ядрами Бернуллі (класи диференційовних функцій). Крім того, разом зі звичайними наближеннями ми розглядаємо односторонні наближення і (α, β)–наближення. Зокрема, використання (α, β)–наближенні дозволяє охопити одночасно великий клас задач від симетричних до односторонніх наближень, розглядаючи їх з єдиної точки зору.

В результаті цих досліджень було знайдено точні значення найкращих наближень класів згорток $K * F$, де $K \in CVD$, F – довільна перестановочно-інваріантна множина 2π–періодичних функцій, підпросторами згорток $K * S^2_{2n,r}$ $(r \in \mathbb{N})$, а також точні значення найкращих (α, β)–наближень і найкращих односторонніх наближень класів згорток $K * F$, $K \in CVD[\Delta]$, $\Delta \in (0, 2\pi]$, підпросторами згорток $K * S^1_{2n,r}(h)$, $r \in \mathbb{N}$, $h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)$, $h \neq \frac{\pi}{n}$ (випадок $h = \frac{\pi}{n}$ був відомий).

Відзначимо, що згортки зі сплайнами дефекту 2 $(S^2_{2n,r})$, а також зі сплайнами дефекту 1 з нерівномірно розподіленими вузлами $(S^1_{2n,r}(h))$ в задачах такого роду використано вперше.

Отримані результати показують, що використання такого апарату в задачах наближення класів $K * F$ дає можливість істотно збільшити запас підпросторів, що реалізують поперечники за Колмогоровим цих класів в просторі L_1, а саме, підпростри $K * S^2_{2n,r}$ і $K * S^1_{2n,r}(h)$ у випадку $K \in CVD$ разом з підпросторами $K * S^1_{2n,r}$ виявились екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

Результати цього розділу опубліковані в роботах: [175, 177, 173, 174] (див. також роботи [19, 21, 41, 42] зі списку публікацій здобувача на с. 10–15).

РОЗДІЛ 3

Найкращі відносні наближення функціональних класів і відносні поперечники

3.1. Постановка задач відносної апроксимації і огляд відомих результатів

В попередніх розділах ми торкнулись лише питань, що стосуються точних значень найкращих наближень функціональних класів конкретними підпросторами і поперечників за Колмогоровим цих класів. Звичайно, здобути точні рівності в таких задачах вдається лише в небагатьох випадках, а отже, є сенс ставити питання про відшукання асимптотично точних, або точних за порядком оцінок цих величин.

Стосовно порядкової поведінки вже розглядуваних поперечників за Колмогоровим класів W_p^r ($r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$) нам відомі такі результати. Крім згаданих в розділі 1 рівностей (1.2) і (1.4), для $p = q = \infty$ має місце результат, одержаний В. М. Тихомировим [225, 226]:

$$d_{2n-1}(W_\infty^r, L_\infty) = d_{2n}(W_\infty^r, L_\infty) = n^{-r}. \tag{3.1}$$

Відзначимо, що порядкові оцінки величин (3.1) були вказані раніше С. Б. Стєчкіним [192].

Ю. І. Маковоз [157] довів, що при всіх $1 \leq q \leq p \leq \infty$ і $r \in \mathbb{N}$ порядок поперечників буде таким, як (1.2), (1.4) і (3.1):

$$d_n(W_p^r, L_q) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty,$$

але при інших співвідношеннях між p та q поведінка цих характеристик є інакшою. Так для $1 < p \leq q \leq 2$ і $r \in \mathbb{N}$ маємо

$$d_n(W_p^r, L_q) \asymp n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - r}, \quad n \to \infty.$$

Цей результат належить Р. С. Ісмагілову (див., напр., [103, 104]).

Що стосується решти результатів, то їх здобуто поєднанням зусиль Б. С. Кашина [110, 111] і В. Є. Майорова [154]:

$$d_n(W_p^r, L_q) \asymp n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}-r}, \quad n \to \infty,$$

якщо $1 \le p \le 2$, $q \ge 2$ (випадок $p = 1$, $q = \infty$ належить Є. Д. Глускіну [80]) і

$$d_n(W_p^r, L_q) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty,$$

якщо $2 \le p \le q \le \infty$.

Відзначимо окремо випадок $p = q$ (див. [12]): при $r \in \mathbb{N}$ і $1 \le p \le \infty$

$$d_n(W_p^r, L_p) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty. \tag{3.2}$$

Що стосується узагальнення наведених результатів, багатовимірних аналогів та близьких питань, відзначимо роботи К. І. Бабенка [60, 61], В. М. Темлякова [218, 296], В. М. Тихомирова [224, 228, 229], В. Є. Майорова [155], А. І. Степанця [189, 190], А. С. Романюка [182].

Важливий клас екстремальних задач теорії апроксимації складають задачі наближення з обмеженнями на апарат наближення (див., наприклад., [135]). Так, крім обговорених в розділі 2 питань односторонньої апроксимації, до цієї тематики відносяться задачі формозберігаючого наближення, розглядувані І. О. Шевчуком [240, 241, 293], Ю. М. Субботіним [205]–[207], Д. Лєвіатаном і І. О. Шевчуком [280]–[282], В. М. Коноваловим і Д. Лєвіатаном [274]–[276] та ін., та задачі класзберігаючого наближення, розглядувані Ю. М. Субботіним [200, 204, 205], В. М. Коноваловим [117], В. М. Тихомировим [297], Ю. М. Субботіним і С. О. Теляковським [208]–[211], В. Ф. Бабенком [18]-[21], [245] та ін. Достатньо широке коло питань, пов'язаних з класзберігаючими наближеннями висвітлене в [170]. Задачі локальної сплайн-апроксимації за наявності обмежень розглянуті в [239].

Зупинимось детальніше на питаннях класзберігачої апроксимації.

Нехай H – множина в L_p; $M, M' \subset L_p$ – деякі класи функцій. Для

$M \subset L_p$ величину

$$E(M, H \cap M')_p := \sup_{f \in M} E(f, H \cap M')_p \tag{3.3}$$

називають найкращим відносним (відносно класу M') наближенням класу M множиною H в просторі L_p.

Відносним поперечником класу M в просторі L_p назвемо величину

$$d_n(M, L_p, M') := \inf_{H_n} E(M, H_n \cap M')_p, \tag{3.4}$$

де точна нижня межа береться за всіма підпросторами простору L_p, розмірність яких не перевищує n.

Величини (3.4) ввів до розгляду В. М. Коновалов [117]. Згодом ці характеристики отримали назву поперечників за Коноваловим.

Як і для поперечників за Колмогоровим, підпростори, що реалізують інфімум в правій частині (3.4), називаються екстремальними підпросторами для відносних поперечників, а послідовність підпросторів $\{H_n\}$, для якої

$$d_n(M, L_p, M') \asymp E(M, H_n \cap M')_p, \quad n \to \infty,$$

називається екстремальною за порядком.

Зрозуміло, що для будь-якого $r \in \mathbb{N}$

$$d_n(W_2^r, L_2, W_2^r) = d_n(W_2^r, L_2) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty. \tag{3.5}$$

Проте, порядкова поведінка відносних поперечників $d_n(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r)$ і $d_n(W_1^r, L_1, W_1^r)$ при $n \to \infty$ істотно відрізняється від поведінки колмогорівских поперечників (3.2).

В. М. Коноваловим [117] було доведено, что для всіх $r = 2, 3, ...$

$$d_n(W_\infty^r, L_\infty, W_\infty^r) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty. \tag{3.6}$$

Пізніше В. Ф. Бабенко [18] встановив, что для $r = 3, 4...$

$$d_n(W_1^r, L_1, W_1^r) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty. \tag{3.7}$$

Така різниця в поведінці відносних та колмогорівських поперечників викликала інтерес до дослідження поведінки при $n \to \infty$ величин $d_n(W_p^r, L_q, W_s^r)$ для різних значень $1 \le p, q, s \le \infty$. При цьому питання про поведінку величин $d_n(W_p^r, L_p, W_p^r)$ для $p \ne 1, 2, \infty$ залишається відкритим.

Огляд відомих результатів і подальші посилання можна знайти, наприклад, в [168]–[171], [289].

Відзначимо, що для $p = 1$ і $p = \infty$ разом з підпросторами тригонометричних поліномів порядку не вище $n - 1$, які є екстремальними для поперечників $d_{2n-1}(W_p^r, L_p)$ і $d_{2n}(W_p^r, L_p)$, екстремальними для поперечників $d_{2n}(W_p^r, L_p)$ є також підпростори сплайнів $S^1_{2n,m}$, $m \ge r - 1$ (див. підрозділ 1.1).

Відомо також (див. [18, 19, 21]), що підпростори $S^1_{2n,r}$ є екстремальними за порядком у співвідношеннях (3.6) і (3.7). Крім того, як випливає із результата Ю. М. Субботіна [204], підпростори $S^1_{2n,2r-1}$ реалізують поперечники $d_{2n}(W_2^r, L_2, W_2^r)$.

Наявність таких гарних апроксимативних властивостей у просторів $S^1_{2n,m}$ наводить на думку про застосування їх до розв'язання задач про поведінку поперечників $d_n(W_p^r, L_p, W_p^r)$ і для $p \ne 1, \infty$, а також до інших задач відносної апроксимації. Питанням порядкової поведінки найкращих наближень класів Соболєва підросторами сплайнів мінімального дефекту присвячено підрозділ 3.2. Про точні і асимптотично точні значення найкращих відносних наближень соболєвських класів сплайнами ми поговоримо в підрозділі 3.3.

В четвертому підрозділі наводиться означення слабкого поперечника за Колмогоровим, який є аналогом звичайного колмогорівського поперечника в просторі функцій, що мають значення в довільному банаховому просторі. Такі поперечники введені до розгляду В. Ф. Бабенком і С. О. Пічуговим [55]. Нами вивчається порядкова поведінка при $n \to \infty$ (для випадку L_∞–наближень) послідовності відносних слабких поперечників (ці характеристики введені в [32]) класів згорток банаховозначних функцій з дісним ядром.

3.2. Найкращі відносні наближення класів диференційовних періодичних функцій сплайнами в метриці L_2

В даному підрозділі ми дослідимо порядкову поведінку при $n \to \infty$ послідовності величин $E(W_p^r, S_{2n,r}^1 \cap W_p^r)_q$ при $1 \le q \le p \le 2$, $p \ne 1$, і покажемо, что насправді послідовність підпросторів $\{S_{2n,r}^1\}$ не є екстремальною за порядком принаймні для поперечників $d_n(W_2^r, L_2, W_2^r)$ для $r \ge 3$.

Теорема 3.2.1. *Для всіх $r = 3, 4, ...$ і $1 \le q \le p \le 2$ виконуються порядкові рівності*

$$E(W_p^r, S_{2n,r}^1 \cap W_p^r)_q \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty.$$

Зауваження 3.2.1. *Відзначимо, що при $p = q = 1$ цей результат одержав В. Ф. Бабенко в [21].*

Доведення теореми 3.2.1. Для скорочення запису будемо покладати

$$E_n := E(W_p^r, S_{2n,r}^1 \cap W_p^r)_q.$$

Нехай $q' = \dfrac{q}{q-1}$. Використовуючи теорему двоїстості для найкращих L_p-наближень опуклою множиною [133, пропозиція 1.4.1] і враховуючи ту обставину, що множина $S_{2n,r}^1 \cap W_p^r$ містить константи, неважко встановити, що

$$E_n = \sup_{f \in W_p^r} \sup_{\substack{\|g\|_{q'} \le 1 \\ g \perp 1}} \left\{ \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt - \sup_{h \in S_{2n,r} \cap W_p^r} \int_0^{2\pi} g(t)h(t)\,dt \right\}.$$

Після r-кратного інтегрування частинами, отримаємо

$$E_n = \sup_{\substack{\|f\|_p \le 1 \\ f \perp 1}} \sup_{g \in W_{q'}^r} \left\{ \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt - \sup_{h \in S_{2n,r} \cap W_p^r} \int_0^{2\pi} g(t)h^{(r)}(t)\,dt \right\}.$$

Враховуючи, що r-а похідна сплайна $h \in S^1_{2n,r}$ кусково стала (набуває значення c_k на інтервалі $\left(\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n}\right)$, k=1,...,2n), і покладаючи $c = (c_1, ..., c_{2n})$, умову $h \in S^1_{2n,r} \cap W^r_p$ запишемо у вигляді $c \in \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot C$, де

$$C := \left\{ c = (c_1, c_2, ..., c_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : \sum_{k=1}^{2n} c_k = 0, \sum_{k=1}^{2n} |c_k|^p \leq 1 \right\}.$$

Тепер, використовуючи теорему двоїстості для найкращого наближення вектора $\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} g(t)\,dt, \int\limits_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{2\pi}{n}} g(t)\,dt, ..., \int\limits_{\frac{(2n-1)\pi}{n}}^{2\pi} g(t)\,dt \right)$ векторами $(\lambda, \lambda, ..., \lambda) \in \mathbb{R}^{2n}$, отримаємо

$$E_n = \sup_{g \in W^r_{q'}} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \sup_{c \in C} \sum_{k=1}^{2n} c_k \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} g(t)\,dt \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W^r_{q'}} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} g(t)\,dt - \lambda \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W^r_{q'}} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(g(t) - \frac{\lambda n}{\pi} \right) dt \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W^r_{q'}} \left\{ E\left(g - \frac{\lambda_0(g) n}{\pi} \right)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(g(t) - \frac{\lambda_0(g) n}{\pi} \right) dt \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\},$$

де $\lambda_0(g)$ таке, що

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(g(t) - \frac{\lambda n}{\pi} \right) dt \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(g(t) - \frac{\lambda_0(g) n}{\pi} \right) dt \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Нехай $W_p^{r,0}$ – клас функцій $f \in W_p^r$, таких що $\lambda_0(g) = 0$. Враховуючи, що $\left(g(t) - \dfrac{\lambda_0(g)n}{\pi}\right) \in W_p^{r,0}$, можемо написати

$$E_n = \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} g(t)\,dt \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\}. \qquad (3.8)$$

Введемо позначення $\overline{g}_n(t)$ для 2π-періодичної функції, яка на інтервалі $\left(\dfrac{(k-1)\pi}{n}, \dfrac{k\pi}{n}\right)$ набуває значення $\dfrac{n}{\pi} \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} g(t)\,dt$, $k = 1, ..., 2n$. Тоді із (3.8) отримаємо

$$E_n = \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{2n} |\overline{g}_n(t)|^{p'}\, dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} =$$

$$= \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \left\{ E(g)_{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'} \right\} \le \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \left\{ \|g\|_{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'} \right\}. \qquad (3.9)$$

За допомогою нерівності Гельдера неважко переконатись в тому, що

$$\|g\|_{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'} \ge 0. \qquad (3.10)$$

Застосовуючи теорему Лагранжа, можемо написати

$$\|g\|_{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'} = \left(\|g\|_{p'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} - \left(\|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \frac{(\xi_n)^{\frac{1}{p'}-1}}{p'} \left(\|g\|_{p'}^{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'} \right), \qquad (3.11)$$

де ξ_n належить інтервалу $\left(\|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'}, \|g\|_{p'}^{p'}\right)$.

Тепер із (3.9) і (3.11) отримаємо

$$E_n \le \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \frac{\|\overline{g}_n\|_{p'}^{1-p'}}{p'} \left(\|g\|_{p'}^{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'} \right). \qquad (3.12)$$

Оскільки $\|\overline{g}_n\|_{p'} \to \|g\|_{p'}$ для $n \to \infty$, то для достатньо великих n матимемо $\|\overline{g}_n\|_{p'} \ge \frac{1}{2}\|g\|_{p'}$, тоді із (3.12) отримаємо

$$E_n \le \sup_{g \in W_{q'}^{r,0}} \frac{\|g\|_{p'}^{1-p'}}{2^{1-p'} \cdot p'} \left(\|g\|_{p'}^{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'} \right). \qquad (3.13)$$

Тепер різницю $\|g\|_{p'}^{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'}$ оцінимо зверху.

Нехай t_k– точка з інтервалу $\left[\dfrac{(k-1)\pi}{n}, \dfrac{k\pi}{n}\right]$ така, що

$$\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} g(t)\,dt = g(t_k)\frac{\pi}{n},$$

а $\sigma_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$, тоді

$$\|g\|_{p'}^{p'} - \|\overline{g}_n\|_{p'}^{p'} = \|g\|_{p'}^{p'} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\pi}{n} |g(t_k)|^{p'} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(|g(t)|^{p'} - |g(\sigma_k)|^{p'} + |g(\sigma_k)|^{p'} - |g(t_k)|^{p'}\right) dt \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(|g(t)|^{p'} - |g(\sigma_k)|^{p'}\right) dt \right| + \sum_{k=1}^{2n} \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left||g(\sigma_k)|^{p'} - |g(t_k)|^{p'}\right| dt. \tag{3.14}$$

Добре відомо (див., наприклад, [95, с. 209–210],), що для будь-якої двічі неперервно диференційовної на $\left(\dfrac{(k-1)\pi}{n}, \dfrac{k\pi}{n}\right)$ функції $G(t)$ буде

$$\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} (G(t) - G(\sigma_k))\,dt \le \frac{1}{24} \|G''\|_C \left(\frac{\pi}{n}\right)^3. \tag{3.15}$$

Оскільки для $p' \ge 2$ функція $|g(t)|^{p'}$ двічі неперервно диференційовна, то, використовуючи (3.15), отримаємо

$$\left| \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(|g(t)|^{p'} - |g(\sigma_k)|^{p'}\right) dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{24} \left(p'(p'-1)\|g\|_\infty^{p'-2}\|g'\|_\infty^2 + p'\|g\|_\infty^{p'-1}\|g''\|_\infty\right) \left(\frac{\pi}{n}\right)^3.$$

Враховуючи, що для функції із класу $W^{r,0}_{q'}$ при $0 \le k \le r$ і $\alpha = \dfrac{r-k-\frac{1}{q'}}{r-\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'}}$ має місце нерівність (див. [26, теореми 4.3.1 і 6.8.1]):

$$\|g^{(k)}\|_\infty \le K\|g\|^{\alpha}_{p'}\|g^{(r)}\|^{1-\alpha}_{q'}, \tag{3.16}$$

з константою K, що не залежить від g, отримаємо оцінку

$$\left|\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(|g(t)|^{p'} - |g(\sigma_k)|^{p'}\right) dt\right| \le C_1\|g\|_{p'}^{\frac{p'r-2-\frac{p'}{q'}}{r-\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'}}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3, \tag{3.17}$$

де C_1 не залежить від n.

Аналогічно, за допомогою (3.15) оцінимо різницю

$$\frac{\pi}{n}|g(t_k) - g(\sigma_k)| = \left|\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} (g(t) - g(\sigma_k))\, dt\right| \le \frac{1}{24}\|g''\|_\infty\left(\frac{\pi}{n}\right)^3,$$

звідки

$$|g(t_k) - g(\sigma_k)| \le \frac{1}{24}\|g''\|_\infty\left(\frac{\pi}{n}\right)^2. \tag{3.18}$$

Застосовуючи знову теорему Лагранжа, оцінимо тепер різницю

$$\left||g(\sigma_k)|^{p'} - |g(t_k)|^{p'}\right| = p'\,|g(\tau_k)|^{p'-1}\,||g(t_k)| - |g(\sigma_k)|| \le$$

$$\le p'\,|g(\tau_k)|^{p'-1}\,|g(t_k) - g(\sigma_k)|\,,$$

де τ_k таке, що $|g(\tau_k)|$ належить проміжку з кінцями $|g(t_k)|$ і $|g(\sigma_k)|$. З останньої оцінки і (3.18), одержимо

$$\left||g(\sigma_k)|^{p'} - |g(t_k)|^{p'}\right| \le p'\|g\|^{p'-1}_\infty\frac{1}{24}\|g''\|_\infty\left(\frac{\pi}{n}\right)^2,$$

Із останньої нерівності і нерівності (3.16) одразу випливає, що

$$\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left||g(\sigma_k)|^{p'} - |g(t_k)|^{p'}\right| dt \le C_2\|g\|_{p'}^{\frac{p'r-2-\frac{p'}{q'}}{r-\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'}}}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3, \tag{3.19}$$

де C_2 не залежить від n. Зіставляючи (3.14), (3.17) і (3.19), встановлюємо, що

$$\|g\|_{p'}^{p'} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\pi}{n} |g(t_k)|^{p'} \leq C_3 \|g\|_{p'}^{\frac{p'r-2-\frac{p'}{q'}}{r-\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'}}} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2, \tag{3.20}$$

де C_3 не залежить від n.

Із (3.13) і (3.20) при достатньо великих n маємо

$$E_n \leq \sup_{g\in W_{q'}^{r,0}} \frac{\|g\|_{p'}^{1-p'}}{2^{1-p'}p'} C_3 \|g\|_{p'}^{\frac{p'r-2-\frac{p'}{q'}}{r-\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'}}} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \sup_{g\in W_{q'}^{r,0}} \frac{\|g\|_{p'}^{\frac{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}+r-3}{r-\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'}}}}{2^{1-p'}p'} C_3 \left(\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

Неважко бачити, що для $1 \leq q \leq p \leq 2$ і $r \geq 3$ буде $\dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{q'} + r - 3 \geq 0$, і, значить,

$$E_n \leq \frac{C_4}{n^2}, \tag{3.21}$$

де C_4 не залежить від n.

Необхідна оцінка зверху для E_n отримана. Отримаємо для E_n оцінку знизу.

Нехай $\varphi_{1,r}(x)$ – ідеальний сплайн Ейлера порядку r. Зрозуміло, що $\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q'}} \varphi_{1,r} \in W_{q'}^r$. Тоді з (3.8) отримаємо

$$E_n = \sup_{g\in W_{q'}^{r,0}} \left\{ E(g)_{p'} - \left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{2n} \left| \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} g(t)\,dt \right|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q'}} \left\{ E(\varphi_{1,r})_{p'} - \left(\int\limits_0^{2\pi} \left|\overline{\varphi}_{r,n}(t)\right|^{p'}\,dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q'}} \left\{ \|\varphi_{1,r}\|_{p'} - \left\|\overline{\varphi}_{r,n}(t)\right\|_{p'} \right\}, \tag{3.22}$$

де через $\overline{\varphi}_{r,n}(t)$ позначена функція, що набуває на проміжку $\left[\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n}\right)$ значення $\frac{n}{\pi}\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \varphi_{1,r}(t)\,dt$, $(k = 1, ..., 2n)$.

Відзначимо, що розглядаючи відповідний зсув функції $\varphi_{1,r}$, ми без обмеження загальності можемо вважати, що $\varphi_{1,r}(0) = 0$ і на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ функція $\varphi_{1,r}$ зростає.

Як випливає з (3.10),

$$\|\varphi_{1,r}\|_{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'} \geq 0. \tag{3.23}$$

Застосовуючи теорему Лагранжа, отримаємо

$$\|\varphi_{1,r}\|_{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'} = \left(\|\varphi_{1,r}\|_{p'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} - \left(\|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \frac{(\xi_n)^{\frac{1}{p'}-1}}{p'} \left(\|\varphi_{1,r}\|_{p'}^{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'}^{p'}\right), \tag{3.24}$$

де ξ_n – деяка точка з інтервалу $\left(\|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'}^{p'}, \|\varphi_{1,r}\|_{p'}^{p'}\right)$.

Тепер з (3.22) і (3.24) з огляду на (3.23) можемо написати

$$E_n \geq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{q'}} \frac{\|\varphi_{1,r}\|_{p'}^{1-p'}}{p'} \left(\|\varphi_{1,r}\|_{p'}^{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'}^{p'}\right). \tag{3.25}$$

Нехай t_k – точка з інтервалу $\left[\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n}\right]$, $k = 1, ..., 2n$, така, що

$$\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \varphi_{1,r}(t)\,dt = \varphi_{1,r}(t_k)\frac{\pi}{n},$$

Тоді

$$\|\varphi_{1,r}\|_{p'}^{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'}^{p'} = 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(|\varphi_{1,r}(t)|^{p'} - |\varphi_{1,r}\left(t_k\right)|^{p'}\right)\,dt =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left((\varphi_{1,r}^2(t))^{\frac{p'}{2}} - \left(\varphi_{1,r}^2\left(t_k\right)\right)^{\frac{p'}{2}}\right)\,dt. \tag{3.26}$$

Використовуючи нерівність Гельдера, неважко встановити, що

$$\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(|\varphi_{1,r}(t)|^{p'} - |\varphi_{1,r}(t_k)|^{p'}\right) dt \geq 0, \quad k = 1, ..., n, \tag{3.27}$$

Тому для порядкової оцінки знизу останнього виразу в (3.26), з урахуванням (3.27), нам достатньо оцінити тільки ті доданки, для яких

$$\left[\frac{(k-1)\pi}{n}, \frac{k\pi}{n}\right] \subset [\alpha, \beta], \tag{3.28}$$

де α, β – деякі фіксовані числа, такі, що $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

Нехай k таке, що виконується (3.28). Тоді застосовуючи теорему Лагранжа, отримаємо

$$\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(\left(\varphi_{1,r}^2(t)\right)^{\frac{p'}{2}} - \left(\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)^{\frac{p'}{2}}\right) dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{t_k} \left(\left(\varphi_{1,r}^2(t)\right)^{\frac{p'}{2}} - \left(\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)^{\frac{p'}{2}}\right) dt + \int\limits_{t_k}^{\frac{k\pi}{n}} \left(\left(\varphi_{1,r}^2(t)\right)^{\frac{p'}{2}} - \left(\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)^{\frac{p'}{2}}\right) dt =$$

$$= \frac{p'}{2} \left\{ \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{t_k} \left(\varphi_{1,r}^2(\xi_k(t))\right)^{\frac{p'}{2}-1} \left(\varphi_{1,r}^2(t) - \varphi_{1,r}^2(t_k)\right) dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_k}^{\frac{k\pi}{n}} \left(\varphi_{1,r}^2(\eta_k(t))\right)^{\frac{p'}{2}-1} \left(\varphi_r^2(t) - \varphi_r^2(t_k)\right) dt \right\}, \tag{3.29}$$

де, з урахуванням зростання на $[\alpha, \beta]$ функції $\varphi_{1,r}^2(t)$,

$$\varphi_{1,r}^2(t) < \xi_k(t) < \varphi_{1,r}^2(t_k), \quad \frac{(k-1)\pi}{n} < t < t_k,$$

і

$$\varphi_{1,r}^2(t_k) < \eta_k(t) < \varphi_{1,r}^2(t), \quad t_k < t < \frac{k\pi}{n}.$$

Оскільки функція $\varphi_{1,r}^2(t)$ монотонно зростає на $[\alpha,\beta]$, і різниця $\varphi_{1,r}^2(t)-\varphi_{1,r}^2(t_k)$ на цьому проміжку змінює знак з "$-$"на "$+$"рівно один раз в точці t_k, отримаємо

$$\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}\left(\left(\varphi_{1,r}^2(t)\right)^{\frac{p'}{2}}-\left(\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)^{\frac{p'}{2}}\right)dt\geq$$

$$\geq\frac{p'}{2}\left\{\left(\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)^{\frac{p'}{2}-1}\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{t_k}\left(\varphi_{1,r}^2(t)-\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)dt+\right.$$

$$\left.+\left(\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)^{\frac{p'}{2}-1}\int\limits_{t_k}^{\frac{k\pi}{n}}\left(\varphi_{1,r}^2(t)-\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)dt\right\}=$$

$$=\frac{p'}{2}\left(\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)^{\frac{p'}{2}-1}\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}\left(\varphi_{1,r}^2(t)-\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)dt\geq$$

$$\geq\frac{p'}{2}\left(\varphi_{1,r}^2(\alpha)\right)^{\frac{p'}{2}-1}\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}\left(\varphi_{1,r}^2(t)-\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)dt. \qquad (3.30)$$

Неважко бачити, що

$$\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}\left(\varphi_{1,r}^2(t)-\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)dt=\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}\left(\varphi_{1,r}(t)-\varphi_{1,r}(t_k)\right)^2dt. \qquad (3.31)$$

Тепер для кожного k із (3.28) з урахуванням опуклості вгору функції $\varphi_{1,r}(t)$ на $[\alpha,\beta]$ можемо написати

$$\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}\left(\varphi_{1,r}(t)-\varphi_{1,r}(t_k)\right)^2dt=\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}}\left(\varphi'_{1,r}(\zeta_k(t))\right)^2(t-t_k)^2\,dt\geq$$

$$\geq\left(\varphi'_{1,r}(\beta)\right)^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}t^2\,dt\geq\frac{\left(\varphi'_{1,r}(\beta)\right)^2}{3}\left(\frac{\pi}{2n}\right)^3=\frac{C_5}{n^3}, \qquad (3.32)$$

де $\zeta_k(t)$ – деяка точка з проміжку з кінцями t і t_k, C_5 – константа, не залежна від n.

Зіставляючи (3.30), (3.31) і (3.32), ми маємо

$$\int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(\left(\varphi_{1,r}^2(t)\right)^{\frac{p'}{2}} - \left(\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)^{\frac{p'}{2}} \right) dt \geq \frac{C_6}{n^3}, \tag{3.33}$$

де C_6 не залежить від n.

Тепер з (3.26) і (3.33), з огляду на те, що для достатньо великих n кількість інтервалів, що задовольняють умову (3.28), не менша за $\dfrac{(\beta-\alpha)n}{2\pi}$, отримаємо

$$\|\varphi_{1,r}\|_{p'} - \|\overline{\varphi}_{r,n}\|_{p'} \geq$$

$$\geq \frac{2}{p'} \|\varphi_{1,r}\|_{p'}^{\frac{1}{p'}-1} \cdot 4 \sum{}' \int\limits_{\frac{(k-1)\pi}{n}}^{\frac{k\pi}{n}} \left(\left(\varphi_{1,r}^2(t)\right)^{\frac{p'}{2}} - \left(\varphi_{1,r}^2(t_k)\right)^{\frac{p'}{2}} \right) dt \geq$$

$$\geq \frac{1}{p'} \|\varphi_{1,r}\|_{p'}^{\frac{1}{p'}-1} \cdot \frac{4(\beta-\alpha)n}{\pi} \frac{C_6}{n^3} = \frac{C_7}{n^2}, \tag{3.34}$$

В (3.34) $\sum{}'$ означає, що пісумовування ведеться лише за тими k, для яких виконується (3.28).

Із (3.22) і (3.34) випливає необхідна оцінка знизу:

$$E_n \geq \frac{C_8}{n^2}. \tag{3.35}$$

Зіставляючи (3.21) і (3.35), отримуємо, що

$$E_n := E(W_p^r, S_{2n,r}^1 \cap W_p^r)_q \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty.$$

Теорема доведена.

3.3. Найкращі відносні несиметричні наближення класів диференційовних періодичних функцій сплайнами в метриці L_1

В [20] В. Ф. Бабенко досліджував поведінку при $n \to \infty$ послідовності величин $E_n(W_1^r, S_{2n,r-1}^1 \cap (1+\varepsilon_n) W_V^{r-1})_1$, де $\{\varepsilon_n\}$ – незростаюча послідовність додатних чисел, а саме, ним отримано такий результат

Теорема 3.3.1. *Нехай* $r = 3, 4, \ldots$ *і* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– незростаюча послідовність додатних чисел. Тоді при* $n \to \infty$ *виконуються співвідношення*

$$E_n(W_1^r, S_{2n,r-1}^1 \cap (1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_1 \asymp \begin{cases} n^{-r}\varepsilon_n^{1-r/2}, & \varepsilon_n n^2 \to \infty, \\ n^{-2}, & \varepsilon_n n^2 = O(1). \end{cases}$$

В [19] аналогічне твердження було отримане для найкращих наближень $E_n(W_\infty^r, S_{2n,r-1}^1 \cap (1+\varepsilon_n)W_\infty^r)_\infty$. Ці результати дали, зокрема, оцінки зверху для поперечників $d_n(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon)W_1^r)$ і $d_n(W_\infty^r, L_\infty, (1+\varepsilon)W_\infty^r)$, що підтвердило гіпотезу С. Б. Стєчкіна про те, що для довільного додатного ε при всіх $r = 3, 4, \ldots$, на відміну від (3.6) і (3.7), буде

$$d_n(W_\infty^r, L_\infty, (1+\varepsilon)W_\infty^r) \asymp d_n(W_1^r, L_1, (1+\varepsilon)W_1^r) \asymp n^{-r}, \quad n \to \infty.$$

Крім того, результати В. Ф. Бабенка мають і самостійний інтерес. В подальшому результати теореми 3.3.1 було уточнено [30, 169, 170] (замість порядкових отримані точні асимптотичні рівності). В пункті 3.3.1 ми продовжимо ці дослідження.

Природнім є також питання про відшукання найменшої величини $M > 0$, яка гарантує рівність

$$d_n(W_p^r, L_q, MW_p^r) = d_n(W_p^r, L_q).$$

Ця проблема досліджувалась В. Ф. Бабенком [18] для $r = 1, 2$ і $p = q = 1$, Ю. М. Субботіним [205] для $r = 1, 2$ і $p = q = \infty$, Ю. М. Субботіним і С. О. Теляковським для $r \in \mathbb{N}$, $p = q = 1$ і $p = q = \infty$ в [208], а для $r \in \mathbb{N}$ і $p = q = 2$ в [210].

В [168] отримані точні оцінки значень константи M, для яких при всіх $n = 1, 2, \ldots$ і $r = 3, 4, \ldots$

$$E_n(W_1^r, S_{2n,r-1}^1 \cap MW_V^{r-1})_1 = E_n(W_1^r, S_{2n,r-1}^1)_1.$$

В пункті 3.3.2 ми розглядаємо аналогічну задачу для відносних несиметричних наближень.

3.3.1. Точна асимтотика найкращих відносних несиметричних наближень класів W_1^r сплайнами в L_1

Метою даного пункту є розв'язання задачі про точну асимптотику при $n\to\infty$ величин $E(W_1^r, S^1_{2n,r-1}\cap(1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta}$ і $E^{\pm}(W_1^r, S^1_{2n,r-1}\cap(1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_1$ для парних r.

Теорема 3.3.2. *Нехай $r=4,6,...,$ α,β – додатні числа, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ – незростаюча послідовність додатних чисел, така, що $\varepsilon_n n^2\to\infty$ і $\varepsilon_n\to 0$, якщо $n\to\infty$. Тоді при $n\to\infty$*

$$E(W_1^r, S^1_{2n,r-1}\cap(1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta} = \frac{C_r}{n^r\varepsilon_n^{\frac{r}{2}-1}}(1+o(1)),$$

де

$$C_r = \Big(\frac{\pi^2 E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{4r}\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\frac{r-2}{2E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty)}\Big)^{\frac{r-2}{2}}.$$

Зауваження 3.3.1. *У випадку $\alpha=\beta=1$ ми одержуємо твердження із [30] (див. також [170]).*

Наслідок 3.3.1. *Нехай $r=4,6,...,$ $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ – незростаюча послідовність додатних чисел, така, що $\varepsilon_n n^2\to\infty$ і $\varepsilon_n\to 0$, якщо $n\to\infty$. Тоді при $n\to\infty$*

$$E^{\pm}(W_1^r, S^1_{2n,r-1}\cap(1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_1 = \frac{C_r}{n^r\varepsilon_n^{\frac{r}{2}-1}}(1+o(1)),$$

де

$$C_r = \Big(\frac{\|\varphi_{1,1}\|_\infty^3\|\varphi_{1,r-3}\|_\infty}{r}\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\frac{r-2}{2\|\varphi_{1,1}\|_\infty\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty}\Big)^{\frac{r-2}{2}}.$$

Доведення теореми 3.3.2. Нехай

$$C=\{c=(c_1,c_2,...,c_{2n})\in\mathbb{R}^{2n}:\sum_{n=1}^{2n}c_k=0,\sum_{n=1}^{2n}|c_k|\le 1\}.$$

Будь-який сплайн $u\in S^1_{2n,r-1}$ можна в єдиний спосіб подати у вигляді [133, пропозиція 2.3.5]

$$u(t)=c_o+\sum_{k=1}^{2n}c_kB_r\Big(t-\frac{\pi k}{n}\Big), \tag{3.36}$$

де $B_r(t)$ – ядро Бернуллі, $c_1, c_2, ..., c_{2n} \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=1}^{2n} c_k = 0$. При цьому умова $u(t) \in W_V^{r-1} \cap S^1_{2n,r-1}$ еквівалентна умові $\sum\limits_{n=1}^{2n} |c_k| \le 1$.

В силу теореми двоїстості для найкращих (α, β)–наближень опуклою множиною в метриці L_p [133, пропозиція 1.4.9], враховуючи (3.36) і ту обставину, що множина $W_V^{r-1} \cap S^1_{2n,r-1}$ містить константи, отримаємо:

$$E_n := E(W_1^r, S^1_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta} =$$

$$\sup_{f \in W_1^r} \sup_{\substack{\|g\|_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1 \\ g \perp 1}} \Big\{ \int\limits_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt - (1+\varepsilon_n) \sup_{u(t) \in W_V^{r-1} \cap S_{2n,r-1}} \int\limits_0^{2\pi} u(t) g(t)\, dt \Big\} =$$

$$= \sup_{g \in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}} \Big\{ E(g)_\infty - (1+\varepsilon_n) \sup_{c \in C} \sum_{k=1}^{2n} c_k g\Big(\frac{\pi k}{n}\Big) \Big\}, \tag{3.37}$$

де $E(g)_\infty$ – найкраще рівномірне наближення функції g в просторі констант.

Добре відомо, що для будь-якої функції $g \in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}$ буде $E(g)_\infty \le E(\varphi_{1,r}(\alpha, \beta; \cdot))_\infty$. Для відповідного $\lambda \ge 1$ отримаємо

$$E(g)_\infty = E(\varphi_{\lambda,r}(\alpha, \beta; \cdot))_\infty \tag{3.38}$$

Якщо $\lambda = n$, то [133, теорема 5.4.13]

$$E(g)_\infty - (1+\varepsilon_n) \sup_{c \in C} \sum_{k=1}^{2n} c_k g\Big(\frac{\pi k}{n}\Big) \le E(\varphi_{n,r}(\alpha, \beta; \cdot))_\infty = E(W_1^r, S^1_{2n,r-1})_{1;\alpha,\beta}.$$

Тому зовнішню точну верхню межу можна брати лише за такими $g(t)$, для яких в (3.38) $\lambda \le n$.

Згідно означення функція $\varphi_{\lambda,r}(\alpha, \beta; \cdot))$ для парних r набуває екстремума в точках $t = 0$ і $t = \dfrac{\pi}{\lambda}$. Для визначенності вважаємо, що точка максимума цієї функції $t_{\max} = 0$.

Нехай $t'_{\max}$ і $t'_{\min}$ – точки максимума і мінімума функції $g(t)$. Очевидно, що знайдуться $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ такі, що

$$\Big| t'_{\max} - \frac{k_1 \pi}{n} \Big| \le \frac{\pi}{2}, \qquad \Big| t'_{\max} - \frac{k_1 \pi}{n} \Big| \le \frac{\pi}{2}.$$

Враховуючи (3.38), за допомогою теореми порівняння в несиметричному випадку [133, теорема 3.3.9], отримаємо

$$g\Big(\frac{k_1\pi}{n}\Big) \ge \varphi_{\lambda,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\Big), \qquad g\Big(\frac{k_2\pi}{n}\Big) \le \varphi_{\lambda,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}+\frac{\pi}{2n}\Big)$$

Вважаючи $c_{k_1} = \dfrac{1}{2}$, $c_{k_2} = -\dfrac{1}{2}$ і $c_k = 0$, якщо $k \ne k_1, k_2$, із (3.37) маємо

$$E_n \le$$

$$\sup_{1\le\lambda\le n}\Big\{\frac{1}{2}\Big(\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;0)-\varphi_{\lambda,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}\Big)\Big)-\frac{1+\varepsilon_n}{2}\Big(g\Big(\frac{k_1\pi}{n}\Big)-g\Big(\frac{k_2\pi}{n}\Big)\Big)\Big\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sup_{1\le\lambda\le n}\Big\{\Big(\varphi_{\lambda,r}(\alpha,\beta;0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{\lambda,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\Big)\Big)+$$

$$+\Big((1+\varepsilon_n)\varphi_{\lambda,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}+\frac{\pi}{2n}\Big)-\varphi_{\lambda,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{\lambda}\Big)\Big\} = \frac{1}{2}\sup_{1\le\lambda\le n}F_n(\lambda),$$

де

$$F_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^r}\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)-$$

$$-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)+(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\Big\}.$$

Дослідимо на екстремум функцію $F_n(\lambda)$. Для її похідної маємо:

$$F_n'(\lambda) = -\frac{r}{\lambda^{r+1}}\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)-$$

$$-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)+(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\Big\}+$$

$$+\frac{1+\varepsilon_n}{\lambda^{r+1}}\Big\{-\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\frac{\lambda\pi}{2n}+\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\frac{\lambda\pi}{2n}\Big\}$$

і

$$F_n'(1) = (1+\varepsilon_n)\Big\{r\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)\,dt-\frac{\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\Big)-$$

$$-r\int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{2n}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)\,dt+\frac{\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\pi}{2n}\Big)\Big\}+$$

$$+r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi).$$

Оскільки доданок у фігурних дужках має порядок n^{-2}, коли $n \to \infty$, то можемо вважати, що для всіх достатньо великих n буде $F_n'(1) > 0$. Розглянемо тепер

$$F_n'(n) = \frac{1+\varepsilon_n}{n^r}\Big\{ r \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)\,dt - \frac{\pi}{2}\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2}\Big) -$$

$$-r \int\limits_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{2}} \varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)\,dt + \frac{\pi}{2}\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\pi}{2}\Big)\Big\} +$$

$$+ r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi).$$

Оскільки $\varepsilon_n \to 0$, коли $n \to \infty$, то для достатньо великих n знак $F_n'(n)$ буде визначатись знаком доданку в фігурних дужках. Враховуючи опуклість функції $\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)$ при $n = 4, 6, ...$, можемо встановити, що $F_n'(\lambda) < 0$ для достатньо великих n.

Введемо до розгляду функцію $\Phi_n(\lambda) = \lambda^{r+1}F_n'(\lambda)$. Для її похідної можемо написати

$$\Phi_n'(\lambda) = \frac{\pi}{2n}(1+\varepsilon_n)\Big\{(r-1)\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big) - \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big) -$$

$$-(r-1)\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\Big) + \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\Big\} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}(1+\varepsilon_n)\Big\{(r-1)\int\limits_0^{\frac{\lambda\pi}{2n}} \varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;t)\,dt - \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big) -$$

$$-(r-1)\int\limits_{\pi}^{\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}} \varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;t)\,dt + \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\Big\}.$$

З огляду на опуклість при $r = 4, 6, ...$ функції $\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;t)$, приходимо до висновку, що $\Phi_n'(\lambda) < 0$ для $\lambda \in (1,n)$, а значить, $\Phi_n(\lambda)$, а разом з нею і $F_n'(\lambda)$, спадає на проміжку $(1,n)$. Але тоді знайдеться єдина точка $\lambda_n \in (1,n)$ така, що $F_n'(\lambda_n) = 0$, і, крім того, λ_n – точка максимума для функції $F_n(\lambda)$.

Необхідну умову екстремума функції $F_n(\lambda)$ в точці λ_n запишемо у вигляді

$$(1+\varepsilon_n)\Big\{r\int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)\,dt-\frac{\lambda_n\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)-$$

$$-r\int\limits_{\pi}^{\pi+\frac{\lambda_n\pi}{2n}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)\,dt+\frac{\lambda_n\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)\Big\}=$$

$$-r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)+r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi). \tag{3.39}$$

Знову використовуючи опуклість функції $\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)$ при $r=4,6,...$ неважко отримати такі оцінки

$$-r\varepsilon_n(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi))\le 2(1+\varepsilon_n)(r-2)\int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)\,dt\le$$

$$-2(1+\varepsilon_n)(r-2)\frac{\Big|\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2}\Big)\Big|}{\pi}\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2,$$

звідки

$$\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2\le\frac{\pi r\varepsilon_n E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{(1+\varepsilon_n)(r-2)\Big|\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2}\Big)\Big|}. \tag{3.40}$$

З іншого боку, із (3.39) можемо отримати

$$-r\varepsilon_n(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi))\ge 2(1+\varepsilon_n)(r-1)\int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)\,dt\ge$$

$$-(1+\varepsilon_n)(r-1)\Big|\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;0)\Big|\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2,$$

звідки

$$\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2\ge\frac{2r\varepsilon_n E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{(1+\varepsilon_n)(r-1)\Big|\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;0\Big)\Big|}. \tag{3.41}$$

Тепер, зіставляючи (3.40) і (3.41), отримаємо, що

$$\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2\asymp\varepsilon_n$$

або

$$\lambda_n \asymp n\sqrt{\varepsilon_n}$$

при $n \to \infty$.

Нас буде цікавити асимптотична рівність для λ_n при $n \to \infty$, тому, використовуючи розвинення за формулою Тейлора функції $\varphi_{1,r-1}(\alpha, \beta; t)$ в околі точок 0 і π, із (3.39) виводимо

$$(1+\varepsilon_n)\Big\{ r\frac{\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;0\Big)}{2}\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2 - \varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;0\Big)\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2 -$$

$$-r\frac{\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;\pi\Big)}{2}\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2 + \varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;\pi\Big)\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2 + o\Big(\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2\Big)\Big\} =$$
$$= -2r\varepsilon_n E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty.$$

Перетворюючи останній вираз, одержимо

$$(1+\varepsilon_n)(r-2)\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2 E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty(1+o(1)) = 2r\varepsilon_n E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty,$$

звідки

$$\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2 = \frac{2r\varepsilon_n E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{(1+\varepsilon_n)(r-2)E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}(1+o(1))$$

або

$$\lambda_n = \frac{2n}{\pi}\left(\frac{2r\varepsilon_n E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{(1+\varepsilon_n)(r-2)E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}(1+o(1)). \tag{3.42}$$

Тепер, використовуючи (3.42) і (3.39), з огляду на розвинення за формулою Тейлора, після нескладних перетворень для E_n отримаємо оцінку:

$$E_n \le \frac{1}{2}\sup_{1\le\lambda\le n} F_n(\lambda) = \frac{1}{2}F_n(\lambda_n) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_n^r}\frac{1+\varepsilon_n}{r}\Big(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;0) - \varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\pi)\Big)\Big(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)^2(1+o(1)) =$$

$$= \frac{1}{n^r\varepsilon_n^{r/2-1}}\Big(\frac{\pi^2 E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{4r}\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\frac{r-2}{2E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}\Big)^{\frac{r-2}{2}}(1+o(1)). \tag{3.43}$$

І необхідна оцінка зверху отримана.

Одержимо для E_n оцінку знизу. Оскільки $\varphi_{m,r}(\alpha,\beta;\cdot+\mu)\in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}$ при $m\in\mathbb{N}$, то із (3.36) при всіх $m=1,...,n$ і $\eta\in\mathbb{R}$ отримаємо

$$E_n\geq$$

$$\geq\sup_{\mu\in\mathbb{R}}\max_{m=1,\dots,n}\Big\{E(\varphi_{m,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty-(1+\varepsilon_n)\sup_{c\in C}\sum_{k=1}^{2n}c_k\varphi_{m,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{k\pi}{n}+\mu\Big)\Big\}=$$

$$=\max_{m=1,\dots,n}\Big\{E(\varphi_{m,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty-$$

$$-(1+\varepsilon_n)\inf_{\mu\in\mathbb{R}}\inf_{\eta\in\mathbb{R}}\max_{k=1,\dots,2n}\Big|\varphi_{m,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{k\pi}{n}+\mu\Big)-\eta\Big|\Big\}\geq$$

$$\geq\max_{m=1,\dots,n}\Big\{E(\varphi_{m,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty-(1+\varepsilon_n)\inf_{\eta\in\mathbb{R}}\max_{k=1,\dots,2n}\Big|\varphi_{m,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{k\pi}{n}+\mu_0\Big)-\eta\Big|\Big\},$$

де $\mu_0\in\mathbb{R}$ вибираємо так, щоб максимум величини
$\inf\limits_{\eta\in\mathbb{R}}\Big|\varphi_{m,r}\Big(\alpha,\beta;t+\mu_0\Big)-\eta\Big|$ досягався в точці $\dfrac{\pi}{2n}$, але для такого μ_0 буде

$$E_n\geq\max_{m=1,\dots,n}\Big\{\frac{1}{2}\Big(\varphi_{m,r}(\alpha,\beta;0)-\varphi_{m,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{m}\Big)\Big)-$$

$$-\frac{1}{2}(1+\varepsilon_n)\Big(\varphi_{m,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\Big)-\varphi_{m,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{2n}\Big)\Big)\Big\}.$$

Отже,

$$E_n\geq\max_{m=1,\dots,n}F_n(m),$$

де

$$F_n(m)=\frac{1}{m^r}\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{m\pi}{2n}\Big)-$$

$$-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)+(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{m\pi}{2n}\Big)\Big\}.$$

Виберемо $m_n\in\{1,...,n\}$ так, щоб $m_n-1\leq\lambda_n\leq m_n$, тоді

$$\max_{m=1,\dots,n}F_n(m)\geq F_n(m_n)=$$

$$=\frac{1}{(m_n-1)^r}\Big(\frac{m_n-1}{m_n}\Big)^r\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{m_n\pi}{2n}\Big)-$$

$$-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)+(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{m_n\pi}{2n}\Big)\Big\}\geq$$

$$\geq\frac{1}{\lambda_n^r}\Big(\frac{m_n-1}{m_n}\Big)^r\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)-$$

$$-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)+(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda_n\pi}{2n}\Big)\Big\}.$$

Так само, як і при одержанні оцінок зверху, маємо

$$F_n(m_n)=\frac{C_r}{\varepsilon_n^{r/2-1}n^r}\Big(\frac{m_n-1}{m_n}\Big)^r(1+o(1)).$$

Відзначимо, що при $n\to\infty$, $\lambda_n\to\infty$, а значить, $m_n\to\infty$, а тоді можемо написати

$$E_n\geq\frac{1}{2}F_n(m_n)=\frac{C_r}{\varepsilon_n^{r/2-1}n^r}(1+o(1)), \tag{3.44}$$

де

$$C_r=\Big(\frac{\pi^2E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{4r}\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\frac{r-2}{2E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty)}\Big)^{\frac{r-2}{2}}. \tag{3.45}$$

Отже, необхідна оцінка знизу одержана. Зіставляючи (3.43) і (3.44), приходимо до рівності

$$F_n(m_n)=\frac{C_r}{\varepsilon_n^{r/2-1}n^r}(1+o(1)),\quad n\to\infty,$$

де C_r означене рівністю (3.45).

Теорема 3.3.2 доведена.

Доведення наслідку 3.3.1. Скориставшись тим фактом, що $\lim\limits_{\beta\to+\infty}\varphi_{1,r}(1,\beta,t)=-2B_r(t)$ (див. [133, с. 109]), де B_r – ядро Бернуллі, отримаємо

$$\lim_{\beta\to+\infty}E(\varphi_{1,r}(1,\beta,\cdot))_\infty=\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{2}|\varphi_{1,r}(1,\beta,0)-\varphi_{1,r}(1,\beta,\pi)|=$$

$$=|B_r(\pi)-B_r(0)|=\frac{\pi}{2}\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty,$$

де остання рівність написана на підставі співвідношення із [133, с. 107].

Тепер, використовуючи [133, пропозиція 1.5.9], покладаючи $\alpha=1$ і переходячи до границі за $\beta\to+\infty$, із результату теореми 3.3.2 для $n\to\infty$ отримаємо

$$E^+(W_1^r,S^1_{2n,r-1}\cap(1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_1=\frac{C_r}{n^r\varepsilon_n^{\frac{r}{2}-1}}(1+o(1)),$$

де

$$C_r=\Big(\frac{\|\varphi_{1,1}\|_\infty^3\|\varphi_{1,r-3}\|_\infty}{r}\Big)^{\frac{r}{2}}\Big(\frac{r-2}{2\|\varphi_{1,1}\|_\infty\|\varphi_{1,r-1}\|_\infty}\Big)^{\frac{r-2}{2}}.$$

Аналогічно, спрямовуючи α до $+\infty$, при $\beta = 1$, отримаємо таку саму нерівність (для $n \to \infty$) для послідовності величин $E^{-}(W_1^r, S^1_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_1$.

Наслідок доведено.

3.3.2. Точні значення відносних несиметричних наближень класів W_1^r сплайнами в L_1

Результати цього пукту доповнюють результати пункту 3.3.1 і полягають у такому

Теорема 3.3.3. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $r = 4, 6, ...$, α, β – додатні числа,*

$$L = \frac{E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty)}{\left|\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\dfrac{\pi}{2}\Big)\right| \|\varphi_{1,1}\|_\infty}.$$

Тоді, якщо $M \geq rL$, то

$$E(W_1^r, S^1_{2n,r-1} \cap MW_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta} = E(W_1^r, S^1_{2n,r-1})_{1;\alpha,\beta}.$$

Якщо $M < (1-\varepsilon)rL$, де $\varepsilon \in (0,1)$ – довільне фіксоване число, то

$$E(W_1^r, S^1_{2n,r-1} \cap MW_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta} > E(W_1^r, S^1_{2n,r-1})_{1;\alpha,\beta},$$

для всіх $n > \dfrac{2^r - r - 1}{\varepsilon^2 r}$.

Зауваження 3.3.2. *У випадку $\alpha = \beta = 1$ ми одержуємо твердження із [168] (див. також [170]).*

Доведення теореми 3.3.3. Нехай

$$C = \{c = (c_1, c_2, ..., c_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : \sum_{n=1}^{2n} c_k = 0, \sum_{n=1}^{2n} |c_k| \leq 1\}.$$

Так само, як при доведенні теореми 3.3.2, можемо встановити, що

$$E_n := E(W_1^r, S^1_{2n,r-1} \cap MW_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta} =$$

$$= \sup_{g \in W^r_{\infty;\alpha^{-1},\beta^{-1}}} \Big\{ E(g)_\infty - M \sup_{c \in C} \sum_{k=1}^{2n} c_k g\Big(\frac{\pi k}{n}\Big)\Big\}, \tag{3.46}$$

де $E(g)_\infty$ – найкраще рівномірне наближення функції g в просторі констант.

І далі, вважаючи, що $t = 0$ – точка максимума функції $\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;t)$, як в пункті 3.3.1, отримаємо

$$E_n \le \frac{1}{2}\sup_{1\le\lambda\le n}\{F_n(\lambda)+G_n(\lambda)\},$$

де

$$F_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^r}\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - M\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\Big\},$$

$$G_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^r}\Big\{M\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\Big) - \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)\Big\}.$$

Спочатку розглянемо на $[0,n]$ функцію $F_n(\lambda)$. Для похідної цієї функції маємо

$$F_n'(\lambda) = -\frac{r}{\lambda^{r+1}}\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - M\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\Big\}+$$

$$+\frac{1}{\lambda^r}\Big\{-M\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\frac{\pi}{2n}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{r+1}}\Big\{Mr\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big) - r\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - M\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\frac{\lambda\pi}{2n}\Big\}.$$

Нехай $H_n(\lambda) = \lambda^{r+1}F'(\lambda)$, тобто

$$H_n(\lambda) = Mr\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big) - r\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - M\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\frac{\lambda\pi}{2n}.$$

Похідна цієї функції має такий вигляд:

$$H_n'(\lambda) = Mr\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\frac{\pi}{2n} - M\Big\{\frac{\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)+$$

$$+\frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\frac{\pi}{2n}\Big\} =$$

$$= M\frac{\pi}{2n}\Big\{(r-1)\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big) - \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\Big\}.$$

Оскільки $\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\Big) = \int\limits_0^{\frac{\lambda\pi}{2n}}\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;t\Big)\,dt \le 0$ для будь-якого $\lambda\in[1,n]$, і функція $\varphi_{1,r-2}\Big(\alpha,\beta;\cdot\Big)$ – опукла вниз на проміжку $\Big[0,\frac{\pi\beta}{\alpha+\beta}\Big]$, то при $r = 4, 6, ...$ $H_n'(\lambda) < 0$ для всіх $\lambda \in [1, n]$, а значить, $F_n'(\lambda)$ спадає на проміжку $[1, n]$.

Аналогічно, розглядаючи функцію $G_n(\lambda)$, можна показати, що її похідна

$$G_n'(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{r+1}}\Big\{r\varphi_{1,r}(\alpha, \beta; \pi) - rM\varphi_{1,r}\Big(\alpha, \beta; \pi + \frac{\lambda\pi}{2n}\Big) +$$

$$+ M\frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha, \beta; \pi + \frac{\lambda\pi}{2n}\Big)\Big\}$$

монотонно спадає на проміжку $[1, n]$.
Але тоді функція $\Phi_n'(\lambda) = \dfrac{1}{2}\{F_n'(\lambda) + G_n'(\lambda)\}$ також спадає на проміжку $[1, n]$.

Розглянемо

$$\Phi_n'(n) = \frac{1}{n^{r+1}}\Big\{\frac{r}{2}\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha, \beta; \pi) - \varphi_{1,r}(\alpha, \beta; 0)\Big\} +$$

$$+ M\frac{\pi}{2}\Big|\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha, \beta; \pi + \frac{\pi}{2}\Big)\Big|\Big\}. \qquad (3.47)$$

Легко зрозуміти, що для виконання нерівності $\Phi_n'(n) \geq 0$ необхідно, щоб

$$M \geq \frac{rE(\varphi_{1,r}(\alpha, \beta; \cdot))_\infty}{\Big|\varphi_{1,r-1}\Big(\alpha, \beta; \dfrac{\pi}{2}\Big)\Big| \|\varphi_{1,1}\|_\infty}.$$

Тобто, якщо $M \geq rL$, то $\Phi_n'(n) \geq 0$, а $\sup\limits_{1 \leq \lambda \leq n} \{F_n(\lambda) + G_n(\lambda)\}$ досягається в точці $\lambda = n$. Значить, для E_n має місце оцінка

$$E_n \leq \frac{1}{2}\{F_n(\lambda) + G_n(\lambda)\} = \frac{1}{2n^r}\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha, \beta; 0) - M\varphi_{1,r}\Big(\alpha, \beta; \frac{\pi}{2}\Big) +$$

$$+ M\varphi_{1,r}\Big(\alpha, \beta; \frac{3\pi}{2}\Big) - \varphi_{1,r}(\alpha, \beta; \pi)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2n^r}\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha, \beta; 0) - \varphi_{1,r}(\alpha, \beta; \pi)\Big\} = \frac{E(\varphi_{1,r}(\alpha, \beta; \cdot))_\infty}{n^r}.$$

Оскільки завжди $E_n \geq \dfrac{E(\varphi_{1,r}(\alpha, \beta; \cdot))_\infty}{n^r}$ [133, теорема 5.4.13], то для $M \geq rL$ буде

$$E_n = \frac{E(\varphi_{1,r}(\alpha, \beta; \cdot))_\infty}{n^r}.$$

Нехай тепер $M < (1-\varepsilon)rL$, де $0 < \varepsilon < 1$ – довільне фіксоване число. Із (3.47) випливає, що в цьому випадку $\Phi_n'(n) < 0$, тобто $\sup\limits_{1\le\lambda\le n}\{F_n(\lambda) + +G_n(\lambda)\}$ досягається в точці $\lambda_n \in [1, n)$.

Діючи, як при доведенні теореми 3.3.2, маємо

$$E_n \ge \max_{m=1,\dots,n}\{F_n(m) + G_n(m)\},$$

де

$$F_n(m) = \frac{1}{m^r}\Big\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - M\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{m\pi}{2n}\Big)\Big\},$$

$$G_n(m) = \frac{1}{m^r}\Big\{M\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{m\pi}{2n}\Big) - \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)\Big\}.$$

Виберемо $m \in \{1, ..., m\}$ так, щоб $m-1 \le \lambda_n \le m$.

Якщо $m < n$, то

$$E_n \ge \frac{1}{2}\max_{m=1,\dots,n}\{F_n(m) + G_n(m)\} > \frac{1}{2}\{F_n(n) + G_n(n)\} = \frac{E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{n^r}.$$

Якщо $m = n$, тобто $n-1 \le \lambda_n < n$, то

$$E_n \ge \frac{1}{2}\{F_n(n-1) + G_n(n-1)\} = \frac{1}{(n-1)^r}\Big\{\frac{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)}{2} -$$

$$-M\frac{\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{(n-1)\pi}{2n}\Big) - \varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\pi+\frac{(n-1)\pi}{2n}\Big)}{2}\Big\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{(n-1)^r}\Big\{E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty - (1-\varepsilon)Lr\Big|\varphi_{1,r}\Big(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2}\Big)\Big|\frac{\pi}{2n}\Big\} =$$

$$= \frac{E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{(n-1)^r}\Big(1 - (1-\varepsilon)r\frac{1}{n}\Big).$$

Легко зрозуміти, що для всіх $n > \dfrac{2^r - r - 1}{\varepsilon^2 \cdot r}$ буде правильною нерівність

$$1 - (1-\varepsilon)r\frac{1}{n} > \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^r,$$

а тоді

$$E_n > \frac{E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{(n-1)^r}\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^r = \frac{E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{n^r}.$$

Теорема доведена.

3.4. Порядок відносних слабких поперечників деяких класів векторнозначних функцій

Нехай Y–банахів простір, $\|\cdot\|_Y$– норма в Y. Через $O(\mathbb{T},Y)$ ($\mathbb{T}=[-\pi,\pi]$) позначимо простір 2π–періодичних функцій $f:\mathbb{R}\to Y$, для яких $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\|f(t)\|_Y<+\infty$. Ми будемо розглядати лише ті фунуції із $O(\mathbb{T},Y)$, які є інтегровними за Ріманом на $\mathbb{T}$ ($f\in R(\mathbb{T},Y)$) (див. [94]) і для яких існує інтеграл Рімана $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\|f(t)\|_Y\,dt$. Далі в межах цього підрозділу під інтегралом будемо розуміти інтеграл Рімана.

Через $L_p(\mathbb{T},Y)$ $(1\le p\le\infty)$ позначимо простір 2π–періодичних функцій $f\in R(\mathbb{T},Y)$ з нормами

$$\|f\|_{p,Y}=\begin{cases}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\|f(t)\|_Y^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty,\\ \operatorname{ess}\sup\limits_{-\pi\le t\le\pi}\|f(t)\|_Y, & p=\infty.\end{cases}$$

(У випадку $Y=\mathbb{R}$ ми, як і завжди, будемо використовувати позначення L_p).

Поняття n-поперечника за Колмогоровим у випадку, коли $Y=\mathbb{R}$, дозволяє порівнювати апроксимативні властивості всіх підпросторів фіксованої розмірності простору $L_p(\mathbb{T},Y)$. Проте, коли Y– нескінченновимірний банахів простір, навіть такі природні наближуючі підпростори, як підпростір констант або поліномів, виявляються нескінченновимірними. У зв'язку з цим виникає необхідність класифікації нескінченновимірних підпросторів простору банаховозначних функцій (за "слабкою розмірністю") і визначення слабкого поперечника за Колмогоровим. Вперше ці поняття ввели В. Ф. Бабенко і С. О. Пічугов [55].

Наведемо необхідні означення. Нехай $F_k\subset O(\mathbb{R},X)$– деяка сукупність елементів, X– нормований простір. Елементи F_k називаються слабко лінійно залежними (або w-лінійно залежними), якщо для будь-якого ненульового функціоналу $G\in X^*$ числові функції $\langle G,F_k\rangle$ аргументу $x\in\mathbb{R}$ є лінійно залежними. В протилежному випадку елементи F_k називаються слабко лінійно незалежними (w–лінійно незалежними).

Нехай далі H–деякий лінійний підпростір простору $O(\mathbb{R}, X)$. Будемо говорити, що H має слабку розмірність n (і писати $w - dimH = n$), якщо:

1) знайдуться n елементів в H, які є слабко лінійно незалежними;

2) будь-які $n + 1$ елементів з H слабко лінійно залежні.

Відзначимо, що у випадку $Y = \mathbb{R}$ введене поняття слабкої розмірності збігається зі звичайним означенням розмірності.

Тригонометричним поліномом n–го порядку в просторі $O(\mathbb{T}, Y)$ назвемо функцію вигляду

$$T_n^Y(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbb{R},$$

$\{a_0, a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n\} \subset Y$.

Нехай A – деякий клас відображень із $L_p(\mathbb{T}, Y)$. Величину [55]

$$d_n^w(A; L_p(\mathbb{T}, Y)) = \inf_{H_n} \sup_{a \in A} \inf_{h \in H_n} \|a - h\|_p, \tag{3.48}$$

де зовнішня нижня межа береться за всіма підпросторами H із $L_p(\mathbb{T}, Y)$, такими, що $w - dimH_n \leq n$, будемо називати слабким n–поперечником за Колмогоровим класу A в просторі $L_p(\mathbb{T}, Y)$.

Якщо B– ще один клас відображень із $L_p(\mathbb{T}, Y)$, то разом з величинами (3.48) будемо розглядати величини

$$d_n^w(A, L_p(\mathbb{T}, Y), B) = \inf_{H_n} \sup_{a \in A} \inf_{h \in H_n \cap B} \|a - h\|_p, \tag{3.49}$$

де зовнішня нижня межа береться за всіма $H_n \subset L_p(\mathbb{T}, Y)$, $w - dimH_n \leq n$.

Величини типу (3.49) назвемо відносними слабкими поперечниками [170, 32]. Відзначимо, що коли $Y = \mathbb{R}$, (3.48) і (3.49) збігаються зі звичайним поперечником за Колмогоровим і відносним поперечником відповідно.

Через $F_p(\mathbb{T},Y)$ будемо позначати одиничну кулю простору $L_p(\mathbb{T},Y)$.

Нехай задане неперервне ядро $K \in L_1$ і

$$\mu = \mu(K) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \int\limits_0^{2\pi} K(t)\,dt = 0, \\ 0, & \text{в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Через $K * F_p(\mathbb{T},Y)$ будемо позначати клас функцій f, які зображуються у вигляді

$$f(x) = a \cdot \mu + \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(x-t)\varphi(t)\,dt,$$

де $a \in Y$, $\varphi \in F_p(\mathbb{T},Y)$, $\varphi \perp \mu$ (останній запис значить, що $\mu \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\,dt = 0$).

Відзначимо, що якщо $Y = \mathbb{R}$, а $K = B_r$ (ядро Бернуллі), то $K * F_p(\mathbb{T},Y) = W_p^r$.

В. М. Коновалов і А. В. Павлик [118] довели, що для $1 \le q \le \infty$ і $r = 3, 4, ...$

$$d_n(W_1^r, L_q, W_1^r) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty, \tag{3.50}$$

$$d_n(W_\infty^r, L_q, W_\infty^r) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty. \tag{3.51}$$

В [31] (див. також [170]) одержано більш загальні результати. Нехай двічі диференційовне ядро $K \in L_1$ має на періоді рівно два проміжка строгої монотонності і строгої опуклості і таке, що його коефіцієнти Фур'є $c_m(K) \neq 0$, $m \neq 0$. Тоді для $1 \le q \le \infty$

$$d_n(K * W_1^0, L_q, K * W_1^0) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty, \tag{3.52}$$

$$d_n(K * W_\infty^0, L_q, K * W_\infty^0) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty. \tag{3.53}$$

Відзначимо, що співвідношення (3.52) для $q = 1$ і (3.53) для $q = \infty$ були здобуті раніше в [1] і [247] відповідно (див. також [2]). В [32] (див. також [170]) було встановлено такий факт.

Нехай двічі диференційовне ядро $K \in L_1$ має на періоді рівно два проміжка строгої монотонності і строгої опуклості і таке, що його коефіцієнти Фур'є $c_m(K) \neq 0$, $m \neq 0$. Тоді для $1 \leq q \leq \infty$

$$d_n^w(K * F_1(\mathbb{T}, Y), L_q(\mathbb{T}, Y), K * F_1(\mathbb{T}, Y)) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty.$$

Основним результатом даного підрозділу є така

Теорема 3.4.1. *Нехай двічі диференційовне ядро $K \in L_1$ має на періоді рівно два проміжки строгої монотонності і строгої опуклості, і таке, що його коефіцієнти Фур'є $c_m(K) \neq 0$, $m \neq 0$. Тоді для всіх $1 \leq q \leq \infty$*

$$d_n^w(K * F_\infty(\mathbb{T}, Y), L_q(\mathbb{T}, Y), K * F_\infty(\mathbb{T}, Y)) \asymp n^{-2}, \quad n \to \infty.$$

Доведення. Доводячи теорему, будемо діяти аналогічно до [245, 31, 32]. Спочатку отримаємо для $d_n^w(K * F_\infty(\mathbb{T}, Y), L_q(\mathbb{T}, Y), K * F_\infty(\mathbb{T}, Y))$ оцінки зверху. Оскільки

$$d_n^w(K * F_\infty(\mathbb{T}, Y), L_q(\mathbb{T}, Y), K * F_\infty(\mathbb{T}, Y)) \ll$$
$$\ll d_n^w(K * F_\infty(\mathbb{T}, Y), L_\infty(\mathbb{T}, Y), K * F_\infty(\mathbb{T}, Y)),$$

то для знаходження необхідної оцінки, нам достатньо оцінити зверху поперечники $d_n^w(K * F_\infty(\mathbb{T}, Y), L_\infty(\mathbb{T}, Y), K * F_\infty(\mathbb{T}, Y))$.

Нехай

$$J_{2n-2}(t) = \frac{3}{2n(2n^2+1)\pi} \left(\frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \right)^4, \quad t \in \mathbb{R}-$$

ядро Джексона.

У подальших міркуваннях будуть використані властивості інтеграла Рімана векторнозначних функцій, наведені, наприклад, в [94, с. 131–137], а також властивості ядра Джексона [88].

Зафіксуємо довільну функцію $f \in K * F_\infty(\mathbb{T}, Y)$. Діючи аналогічно до [88, с. 127–128], неважко переконатись, що згортка

$$T_{2n-2}^Y(f, t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t - \tau) J_{2n-2}(\tau)\, d\tau$$

ядра J_{2n-2} з функцією $f \in L_\infty(\mathbb{T}, Y)$ є тригонометричним поліномом порядку не вище від $2n-2$. До того ж $T^Y_{2n-2}(f, \cdot) \in K * F_\infty(\mathbb{T}, Y)$, і має місце зображення

$$T^Y_{2n-2}(f, x) = a \cdot \mu + \int\limits_{-\pi}^{\pi} T_{2n-2}(K; x-t)\varphi(t)\, dt,$$

де $\varphi \in L_\infty(\mathbb{T}, Y)$, $\|\varphi\|_\infty \le 1$, $\varphi \perp \mu$, $a \in Y$.

Дійсно, враховуючи парність ядра Джексона і те, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(t)\, dt = 1$ [88, с. 127 – 128], отримаємо

$$T^Y_{2n-2}(f, x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(x-y) f(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(x-y) \left(a \cdot \mu + \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(y-t)\varphi(t)\, dt \right) dy =$$

$$= a \cdot \mu + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(x-y) K(y-t) \varphi(t)\, dy\, dt =$$

$$= a \cdot \mu + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(x-t-u) K(u) \varphi(t)\, du\, dt =$$

$$= a \cdot \mu + \int\limits_{-\pi}^{\pi} T_{2n-2}(K; x-t)\varphi(t)\, dt.$$

Покажемо тепер, що для $f \in K * F_\infty(\mathbb{T}, Y)$ буде $T^Y_{2n-2}(f, \cdot) \in K * F_\infty(\mathbb{T}, Y)$. Насправді,

$$T^Y_{2n-2}(f, t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-x) J_{2n-2}(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(a \cdot \mu + \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-x-\tau)\varphi(\tau)\, d\tau \right) J_{2n-2}(x)\, dx =$$

$$= a \cdot \mu \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(x)\,dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-x-\tau)\varphi(\tau)J_{2n-2}(x)\,d\tau dx =$$

$$= a \cdot \mu \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(x)\,dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-u)\varphi(u-x)J_{2n-2}(x)\,dx\,du =$$

$$= a \cdot \mu + \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-u)\psi(u)\,du,$$

де

$$\psi(u) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(x)\varphi(u-x)\,dx.$$

Покажемо, що $\psi(u) \in F_\infty(\mathbb{T}, Y)$. Насправді, використовуючи той факт, що ядро Джексона невід'ємне, а також те, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(x)\,dx = 1$, маємо:

$$\|\psi(u)\|_{\infty,Y} = \Big\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(x)\varphi(u-x)\,dx \Big\|_{\infty,Y} =$$

$$= \operatorname*{ess\,sup}_{u\in\mathbb{T}} \Big\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(x)\varphi(u-x)\,dx \Big\|_{Y} \le$$

$$\le \operatorname*{ess\,sup}_{u\in\mathbb{T}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |J_{2n-2}(x)| \|\varphi(u-x)\,dx\|_Y\,dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} J_{2n-2}(t)\,dt = 1.$$

Тепер оцінимо відхилення $\|f(\cdot) - T^Y_{2n-2}(f;\cdot)\|_{\infty,Y}$:

$$\|f(\cdot) - T^Y_{2n-2}(f;\cdot)\|_{\infty,Y} =$$

$$= \Big\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-x)\varphi(x)\,dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} T^Y_{2n-2}(K;t-x)\varphi(x)\,dx \Big\|_{\infty,Y} \le$$

$$\le \Big\| \int\limits_{-\pi}^{\pi} |K(t-x) - T^Y_{2n-2}(K;t-x)| \cdot \|\varphi(x)\|_Y\,dx \Big\|_{\infty,Y} \le$$

$$\le \|K(\cdot) - T^Y_{2n-2}(K;\cdot)\|_\infty \cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} \|\varphi(x)\|_Y\,dx.$$

Оскільки для будь-якої двічі диференційовної 2π–періодичної дійсної функції h буде справджуватись оцінка (див., наприклад, [88, с. 204–205])

$$\|h(\cdot) - T_{2n-2}(h;\cdot)\|_\infty \leq C_1 \|h^{(2)}\|_\infty \cdot n^{-2}$$

із абсолютною константою C_1, то можемо написати

$$\|f(\cdot) - T^Y_{2n-2}(f;\cdot)\|_{\infty,Y} \leq C_2 n^{-2},$$

де $C_2 > 0$ – абсолютна константа.

Необхідна оцінка зверху одержана. Покажемо тепер, що має місце і оцінка знизу. Зрозуміло, що

$$d^w_n(K * F_\infty(\mathbb{T},Y), L_q(\mathbb{T},Y), K * F_\infty(\mathbb{T},Y)) \gg$$

$$\gg d^w_n(K * F_\infty(\mathbb{T},Y), L_1(\mathbb{T},Y), K * F_\infty(\mathbb{T},Y)).$$

Отже, нам достатньо оцінити знизу поперечник
$d^w_n(K * F_\infty(\mathbb{T},Y), L_1(\mathbb{T},Y), K * F_\infty(\mathbb{T},Y))$.

Нехай $e \in Y$: $\|e\|_Y = 1$, а $G \in Y^*$: $\|G\| = 1$ і $\langle G, e\rangle = \|e\|_Y = 1$, тоді для будь-якої функції $g \in K * F_\infty(\mathbb{T},\mathbb{R})$ можемо написати $g(t) = \langle G, g(t)e\rangle$, причому $ge \in K * F_\infty(\mathbb{T},Y)$. Покажемо, що для будь-якої функції $f \in K * F_\infty(\mathbb{T},Y)$ і довільного $G \in Y^*$, такого, що $\|G\| = 1$, буде $\langle G, f(t)\rangle \in K * F_\infty(\mathbb{T},\mathbb{R})$. Дійсно,

$$\langle G, f(t)\rangle = \left\langle G, a\mu + \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-x)\varphi(x)\,dx \right\rangle,$$

де $\varphi \in F_\infty(\mathbb{T},Y)$. Скориставшись властивостями інтеграла Рімана [94, с. 135] і лінійного функціонала, отримаємо

$$\langle G, f(t)\rangle = \mu\langle G, a\rangle + \left\langle G, \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-x)\varphi(x)\,dx \right\rangle =$$

$$= \mu\langle G, a\rangle + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \langle G, K(t-x)\varphi(x)\rangle\,dx = \mu\langle G, a\rangle + \int\limits_{-\pi}^{\pi} K(t-x)\langle G, \varphi(x)\rangle\,dx.$$

Покажемо, що $\langle G, \varphi(x)\rangle \in F_\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Дійсно,

$$\|\langle G, \varphi(x)\rangle\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{T}} |\langle G, \varphi(x)\rangle| \le \|G\|_{Y^*} \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{T}} \|\varphi(x)\|_Y \le 1.$$

Тепер, враховуючи, що $\langle G, a\rangle \in \mathbb{R}$, можемо заключити, що $\langle G, f(t)\rangle \in K * F_\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$.

Для довільного n розглянемо класи $H_n \cap K * F_\infty(\mathbb{T}, Y)$, де H_n – підпростори простору $L_\infty(\mathbb{T}, Y)$, такі, що $w - dimH_n \le n$. За означенням слабкої розмірності і слабкої лінійної незалежності підпростори $H_n^G = \{\langle G, u(\cdot)\rangle : u \in H_n\}$ будуть мати розмірність не більшу n. Отже, якщо $u \in H_n \cap K * F_\infty(\mathbb{T}, Y)$, то $\langle G, u(\cdot)\rangle \in H_n^G \cap K * F_\infty(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, де $\dim H_n^G \le n$.

Після зроблених зауважень для будь-якого $G \in Y^*$, такого що $\|G\|_{Y^*} = 1$, можемо написати

$$d_n^w(K * F_\infty(\mathbb{T}, Y), L_1(\mathbb{T}, Y), K * F_\infty(\mathbb{T}, Y)) =$$

$$= \inf_{\substack{H_n\subset L_1(\mathbb{T},Y)\\ w-dimH_n\le n}} \sup_{f\in K*F_\infty(\mathbb{T},Y)} \inf_{u\in H_n\cap K*F_\infty(\mathbb{T},Y)} \|f-u\|_{1,Y} =$$

$$= \inf_{\substack{H_n\subset L_1(\mathbb{T},Y)\\ w-dimH_n\le n}} \sup_{f\in K*F_\infty(\mathbb{T},Y)} \inf_{u\in H_n\cap K*F_\infty(\mathbb{T},Y)} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(t)-u(t)\|_Y\, dt \ge$$

$$\ge \inf_{\substack{H_n\subset L_1(\mathbb{T},Y)\\ w-dimH_n\le n}} \sup_{f\in K*F_\infty(\mathbb{T},Y)} \inf_{u\in H_n\cap K*F_\infty(\mathbb{T},Y)} \int_{-\pi}^{\pi} |\langle G, f(t)\rangle - \langle G, u(t)\rangle|\, dt =$$

$$= \inf_{\substack{H_n\subset L_1\\ dimH_n\le n}} \sup_{f\in K*F_\infty(\mathbb{T},\mathbb{R})} \inf_{u\in H_n\cap K*F_\infty(\mathbb{T},\mathbb{R})} \|f-u\|_1 =$$

$$= d_n(K * W_\infty^0, L_1, K * W_\infty^0).$$

Оскільки має місце співвідношення (3.53), то необхідна оцінка знизу отримана.

Теорема доведена.

Висновки до розділу 3

Розділ 3 присвячено дослідженню питань наближення функціональних класів за наявності обмежень на апарат наближення.

Отримано порядкові рівності при $n \to \infty$ для найкращих L_q–наближень класів W_p^r $(1 \le p \le q \le 2)$ диференційовних періодичних функцій сплайнами порядку r мінімального дефекту з цих класів. З'ясовано, що у випадку $p = q = 2$ для $r = 3, 4, ...$ порядок цих наближень істотно відрізняється від порядку відповідних поперечників за Колмогоровим, отже послідовність підпросторів $\{S^1_{2n,r}\}$ не є екстремальною за порядком для поперечників $d_n(W_2^r, L_2, W_2^r)$ при $r = 3, 4, ...$

Знайдено точну асимптотику при $n \to \infty$ найкращих несиметричних наближень і найкращих односторонніх наближень класів W_1^r сплайнами із $(1+\varepsilon_n)W_V^{r-1}$, де ε_n – незростаюча послідовність додатних чисел. Ці результати є продовженням досліджень В. Ф. Бабенка і Н. В. Парфінович по уточненню отриманих раніше порядкових результатів В. Ф. Бабенка.

Знайдено найменші значення константи M, за яких найкращі несиметричні наближення класу W_1^r сплайнами з MW_V^{r-1} збігаються з найкращими несиметричними наближеннями цього класу без обмежень. Ці результати є продовженням досліджень автора щодо розв'язку таких задач в симетричній ситуації.

Отримано порядкові рівності для відносних слабких поперечників класів згорток функцій з одиничної кулі простору істотно обмежених за нормою банаховозначних функцій з дійсним ядром в рівномірній метриці. Цей результат поширює відомі результати В. М. Коновалова, В. М. Коновалова і А. В. Павлика, В. Ф. Бабенка і Л. Е. Азара.

Результати цього розділу опубліковані в роботах: [81, 82, 109, 41, 269, 107, 108, 256, 33] (див. також роботи [1, 2, 3, 8, 23, 24, 25, 26, 27] зі списку публікацій здобувача на с. 10–15).

РОЗДІЛ 4

Нерівності Колмогорова для дробових похідних функцій однієї змінної та їх застосування

4.1. Відомості про нерівності Колмогорова і постановка споріднених задач

Нерівності для норм проміжних похідних функцій мають велике значення для багатьох напрямів математики (математичний аналіз, диференціальні рівняння,теорія некоректних задач, теорія апроксимації, теорія оптимальних алгоритмів). Найбільшу вагу мають такі нерівності з непокращуваними константами (точні нерівності), оскільки саме вони, а також методи їх доведення, знайшли найбільш важливі застосування. Дана проблематика має тривалу історію і велику кількість яскравих результатів.

Нехай $G \subseteq \mathbb{R}$. Через $L_p(G)$, $1 \le p \le \infty$, позначимо простір вимірних функцій $f : G \to \mathbb{R}$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_p(G)} = \begin{cases} \left(\int\limits_G |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in G} |f(t)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in \mathbb{N}$ і $1 \le s \le \infty$ позначимо через $L_s^r(G)$ множину функцій $f : G \to \mathbb{R}$, таких що $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) локально абсолютно неперервна і $f^{(r)} \in L_s(G)$, і покладемо $L_{p,s}^r(G) := L_p(G) \cap L_s^r(G)$.

Перші точні нерівності для проміжних похідних з'явились у роботах Е. Ландау [279] 1913 року та Ж. Адамара [270] 1914 року. Ці результати полягають в наступному:

– для функцій $f \in L_{\infty,\infty}^2(\mathbb{R}_+)$ виконується точна нерівність

$$\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \le 2 \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}^{\frac{1}{2}} \|f''\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}^{\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

– для функцій $f \in L^2_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ виконується точна нерівність

$$\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \sqrt{2}\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(\mathbb{R})}\|f''\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(\mathbb{R})} \tag{4.2}$$

Одним з найбільш визначних досягнень в цій тематиці є робота А. М. Колмогорова [273] (див. також [113]), в якій доведено, що для всіх $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, та для будь-якої функції $f \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$

$$\|f^{(k)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \frac{\|\varphi_{1,r-k}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\|\varphi_{1,r}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}\|f\|^{1-k/r}_{L_\infty(\mathbb{R})}\|f^{(r)}\|^{k/r}_{L_\infty(\mathbb{R})}. \tag{4.3}$$

Нерівність (4.3) перетворюється на рівність для функцій $\varphi_{\lambda,r}(t) = \lambda^{-r}\varphi_{1,r}(\lambda t)$, $\lambda > 0$ (ідеальні сплайни Ейлера).

Зазначимо також, що для $r = 3, 4$, $k < r$ і $r = 5$, $k = 2$ ця нерівність була одержана в [242].

З огляду на велику значущість цього результату і його вплив на подальший інтенсивний розвиток досліджень в цьому напрямі, розглядувані нерівності мають назву нерівностей типу Колмогорова.

Нехай $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, $1 \le q, p, s \le \infty$, $G = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-, \mathbb{T}\}$, де $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{R}_+$ – множина додатних чисел, $\mathbb{R}_-$ – множина від'ємних чисел, $\mathbb{T}$ – відрізок $[0, 2\pi]$ з ототожненими кінцями.

Нерівність

$$\|f^{(k)}\|_{L_q(G)} \le K\|f\|^{\mu}_{L_p(G)}\|f^{(r)}\|^{\lambda}_{L_s(G)}, \qquad f \in L^r_{p,s}(G). \tag{4.4}$$

$$\lambda = \frac{k - \frac{1}{q} + \frac{1}{p}}{r - \frac{1}{s} + \frac{1}{p}}, \qquad \mu = 1 - \lambda, \tag{4.5}$$

називають мультиплікативною нерівністю типу Колмогорова.

Наведемо ситуації, в яких точна константа в нерівності (4.4) для деяких значень параметрів p, q і s була знайдена для всіх порядків k та r похідних функцій.

Для $G = \mathbb{R}$ точна константа відома у випадках:

1) $p = q = s = 2$ – Г. Г. Гарді, Дж. І. Літтлвуд, Г. Поліа [232];

2) $p = q = s = 1$ – І. М. Стейн [295];

3) $q = \infty$, $p = s = 2$ – Л. В. Тайков [216].

Для $G = \mathbb{R}_-$ точна константа відома у випадках:

1) $p = q = s = \infty$ – Е. Ландау [279] для $r = 2$, А. П. Маторін [159] для $r = 3$, І. Дж. Шонберг та А. Каваретта [294];

2) $p = q = s = 2$ – Ю. І. Любіч [153], М. П. Купцов [139];

3) $q = \infty$, $p = s = 2$ – В. М. Габушин [73], М. П. Купцов [140].

Огляд інших часткових випадків, в яких була знайдена константа K в нерівності (4.4) можна знайти, наприклад, в книгах [227, 26] та оглядах [7, 230, 24].

Необхідні та достатні умови для того, щоб нерівність (4.4) виконувалась з деякою скінченою константою отримані В. М. Габушиним (див. [72, 75])

Фундаментальні і прикладні математичні дослідження, а також дослідження в інших галузях науки, зокрема, фізиці і хімії (див., наприклад, [288, 243]), вимагають розгляду похідних і інтегралів не лише цілого, а і дробового порядку.

Дробові похідні почали вивчати ще Лейбніц і Ейлер. Значний вплив на розвиток дробового інтегродиференціювання здійснили Ліувілль, Абель, Ріман, Лєтніков, Вейль, Адамар та інші відомі математики. Дробове інтегродиференціювання має багатий зміст, що обумовлене взаємозв'язками з різноманітними питаннями фундаментальної математики і прикладних наук. Більшість важливих означень і фактів з теорії дробового інтегродиференціювання можна знайти в монографії [184].

Різноманітність задач, що призводять до необхідності вивчення дробових похідних і інтегралів обумовила також вибір різних підходів до вивчення дробових похідних, найбільш відомими і застосованими з яких є похідні Рімана-Ліувілля для функцій, заданих на всій дійсній прямій і похідні Вейля – для періодичних функцій.

Природним є питання про встановлення точних нерівностей типу Колмогорова для похідних (інтегралів) дробового порядку. Зазначимо, що розв'язання таких задач зустрічається зі значними труднощами, і через це точних нерівностей типу Колмогорова для норм дробових похідних відомо значно менше, ніж для норм похідних цілого порядку.

Перед тим, як перейти до огляду відомих результатів, наведемо означення деяких похідних дробового порядку. Насамперед означимо похідну Рімана-Ліувілля [184, §5.1]. Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $x \in \mathbb{R}$ похідна Рімана-Ліувілля порядку α означається в такий спосіб:

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm} f(x) = \frac{(\pm 1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_0^{+\infty} t^{n-\alpha-1} f(x \mp t)\, dt, \quad n = [\alpha] + 1, \tag{4.6}$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера, а $[z]$ – ціла частина дійсного числа z.

Далі введемо до розгляду дробову похідну за Маршо порядку $\alpha > 0$ (див. [286]) або [184, §5.6], що для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і $x \in \mathbb{R}$ означається в такий спосіб:

$$D^{\alpha}_{\pm} f(x) = \frac{1}{\varkappa(\alpha, n)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\Delta^n_{\pm t} f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \quad n \in \mathbb{N}, n > \alpha, \tag{4.7}$$

де

$$\begin{gathered} (\Delta^n_{\pm t})(x) := \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \mathbf{C}^m_n f(x \mp mt), \\ \varkappa(\alpha, n) := \Gamma(-\alpha) \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \mathbf{C}^m_n m^{\alpha}. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Зазначимо (див. [184, §5.6]), що $\varkappa(\alpha, n)$ можна записати у вигляді

$$\varkappa(\alpha, n) = \frac{1}{\alpha} \int\limits_0^1 \frac{(1-\xi)^{n-1}}{(\ln \frac{1}{\xi})^{\alpha}}\, d\xi,$$

що надає цьому коефіцієнту зміст і для $\alpha = 1, 2, ..., n-1$.

Крім того, в означенні дробової похідної Маршо довільного порядку $\alpha > 0$ нормуючий коефіцієнт побудовано таким чином, щоб значення похідної не залежало від порядку n скінченної різниці $\Delta^n_{\pm t}$.

Зауважимо, що для функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ визначені похідні $\mathcal{D}^\alpha_\pm f$ і $D^\alpha_\pm f$, а для функцій $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ формули (4.6) і (4.7) є змістовними лише для $\mathcal{D}^\alpha_- f$ і $D^\alpha_- f$.

Відомо (див. [184]), що $\mathcal{D}^\alpha_\pm f = D^\alpha_\pm f$ для "достатньо гарних" функцій. В той самий час конструкція (4.7) є придатною для функцій з "достатньо поганою" поведінкою на нескінченності. Наприклад, $D^\alpha_\pm f$ визначена для сталих функцій, або необмежених функцій, порядок росту яких на нескінченності менший за α, чого не можна сказати про похідні $\mathcal{D}^\alpha_\pm f$.

Нерівність типу Колмогорова (4.4) для норм похідних дробового порядку набуде вигляду

$$\|\mathbf{D}^\alpha f\|_{L_q(G)} \le K\|f\|^\mu_{L_p(G)}\|f^{(r)}\|^\lambda_{L_s(G)}, \quad \mu = 1-\lambda, \quad f\in L^r_{p,s}(G), \tag{4.9}$$

де під $\mathbf{D}^\alpha$ ми розуміємо одну із розглядуваних дробових похідних.

Нехай, наприклад, $\mathbf{D}^\alpha = D^\alpha_\pm$. Так, як і у випадку нерівності (4.4) для похідних цілого порядку, неважко бачити, що константа K в нерівності (4.9) скінченна, лише якщо параметри λ і μ задовольняють умови (4.5) з $k=\alpha$. В роботі [252] було встановлено достатні умови, що дозволяють отримувати точні нерівності (4.9) для норм похідних за Маршо в деяких ситуаціях.

Разом з похідними Маршо і Рімана-Ліувілля в задачах про нерівності типу Колмогорова розглядались також інші дробові похідні, такі як похідні за Ріссом [184, § 25.4], похідні за Вейлем [184, § 19]. Наведемо відомі нам ситуації, в яких знайдено точні константи в нерівності (4.9):

1) $G=\mathbb{R}$, $p=q=s=\infty$, $r=2$, $\alpha\in(0,1)$ – С. П. Гейсберг [78] (для похідних за Маршо);

2) $G=\mathbb{R}_+$, $p=q=s=\infty$, $0<\alpha\le 1$, $\alpha<r\le 2$ та $1<\alpha<2$, $r=2$ – В. В. Арестов [244] (для похідних Рімана-Ліувілля);

3) $G=\mathbb{R}$ або $G=\mathbb{R}_+$, $p=s=2$, $q=\infty$, $\alpha<r$ – А. П. Буслаєв, В. М. Тихомиров [67] (для похідних за Вейлем);

4) $G = \mathbb{R}_+$, $p = s = 2$, $q = \infty$, $\alpha \in (-1/2, r - 1/2)$, $r \in \mathbb{N}$ – Г. Г. Магаріл-Ільяєв, В. М. Тихомиров [284] (для похідних Рімана-Ліувілля);

5) $G = \mathbb{T}$, $p = s = \infty$, $q = 2$, $k, r \in \mathbb{N}$, $r/2 \le k < r$, $\alpha = k + 1/2$ – В. Ф. Бабенко [22, 246] (для похідних за Вейлем);

6) $G = \mathbb{R}$ і $G = \mathbb{R}_+$, $p = s = \infty$, $1 \le s \le \infty$, $r = 1$, $\alpha \in (0, 1 - 1/s)$ та $p = q = s = \infty$, $r = 2$, $0 < \alpha < 1$ – В. Ф. Бабенко і М. С. Чуріло-ва [58, 235] (для похідних за Маршо);

7) $G = \mathbb{R}$, $p = q = s = \infty$, $r = 2$, $0 < \alpha < 2$ – В. Ф. Бабенко і М. С. Чурілова [235] (для похідних за Ріссом).

Крім того, В. Ф. Бабенком і М. С. Чуріловою [235, 161] отримані точні адитивні нерівності, що оцінюють рівномірну норму похідних Маршо порядку $\alpha \in (0, r - 1/s) \setminus \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le s \le \infty$, через рівномірну норму зрізаної похідної і $L_s(G)$-норму r-ї похідної даної функції ($G = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$).

Огляд інших результатів щодо нерівностей Колмогорова для норм дробових похідних можна знайти в [235, 188] і [161, розділ 2]. Результати, що стосуються нерівностей для норм похідних функцій багатьох змінних, ми обговоримо в 5-му розділі.

Тепер перейдемо до постановки споріднених задач.

Задача про точні нерівності типу Колмогорова тісно пов'язана із задачею Стєчкіна про наближення необмеженого оператора обмеженими на заданому класі елементів Q, а також із задачею оптимального відновлення необмеженого оператора на класі Q у припущенні, що елементи Q задані з відомою похибкою (див. [196, 8, 7] і [26, § 7.1].

Нехай X і Y — банахові простори $A : \ X \to Y$ — оператор (необов'язково лінійний) з областю визначення $D_A \subset X$, $Q \subset D_A$ — деяка множина.

Функція

$$\Omega(\delta) = \Omega(\delta, A, Q) := \sup_{\substack{f \in Q \\ \|f\|_X \le \delta}} \|Af\|_Y, \quad \delta > 0, \tag{4.10}$$

називається модулем неперервності оператора A на множині Q.

Задача відшукання функції $\Omega(\delta)$ для заданих оператора A і множини Q є абстрактною версією задачі про нерівності типу Колмогорова.

Через $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, Y)$ будемо позначати простір лінійних обмежених операторів $S: \ X \to Y$. Для $N > 0$ покладаємо

$$E_N(A, Q) = \inf_{\substack{S \in \mathcal{L}(X,Y) \\ \|S\| \le N}} \sup_{f \in Q} \|Af - Sf\|_Y. \tag{4.11}$$

Задача С. Б. Стєчкіна про найкраще наближення оператора A на множині Q лінійними обмеженими операторами полягає в тому, щоб для довільного $N > 0$ обчислити величину (4.11), а також знайти екстремальний оператор, тобто оператор, що реалізує точну нижню межу в правій частині (4.11). Ця задача вперше виникла в дослідженнях С. Б. Стєчкіна в 1965 р. (див. [194]). Постановка задачі, перші важливі результати та її розв'язання для диференціальних операторів малих порядків представлені в [196] (див. також [197]). С. Б. Стєчкін розв'язав цю задачу на класах $L^r_{\infty,\infty}(G)$, $G = \mathbb{R}$ та $G = \mathbb{R}_-$, для $r = 2, 3$, в явному вигляді виписавши екстремальні оператори, якими виявилися скінченно різницеві оператори.

В просторі $L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$, $r = 4, 5$, розв'язок задачі Стєчкіна дано В. В. Арєстовим [4]. Цей результат якісно відрізняється від попередніх: екстремальний оператор вже є нескінченно різницевим. Екстремальний оператор для задачі Стєчкіна на класі $L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$ в загальному випадку ($r > 5$) виписано в [66]. Огляд інших відомих результатів розв'язку задачі Стєчкіна можна знайти наприклад, в [8, 7].

Нехай

$$l(\delta, A, Q) = \inf_{N \ge 0} \{E_N(A, Q) + N\delta\}.$$

Наступна теорема С. Б. Стєчкіна [196] (див. також [26, теорема 7.1.1]) дає просту, але часто використовувану і ефективну оцінку знизу величини найкращого наближення оператора через його модуль неперервності.

Теорема 4.1.1. *Якщо A — однорідний (зокрема, лінійний) оператор, Q — центрально-симетрична опукла множина із області визначення оператора A, то виконуються нерівності*

$$E_N(A,Q) \ge \sup_{\delta>0}\{\Omega(\delta,A,Q) - N\delta\} =$$

$$= \sup_{f\in Q}\{\|Af\|_Y - N\|f\|_X\}, \quad N \ge 0, \tag{4.12}$$

$$\Omega(\delta,A,Q) \le l(\delta,A,Q), \quad \delta \ge 0. \tag{4.13}$$

Якщо при цьому існує елемент $f \in Q$ і лінійний обмежений оператор T такі, що

$$\|Af\|_Y = \sup_{f\in Q}\|Af - Tf\|_Y + \|T\|\,\|f\|_X, \tag{4.14}$$

то правильні рівності

$$\Omega(\|f\|_X, A, Q) = \|Af\|_Y,$$

$$E_{\|T\|}(A,Q) = \sup_{f\in Q}\|Af - Tf\|_Y = \|Af\|_Y - \|T\|\,\|f\|_X,$$

і, значить, оператор T є екстремальним в задачі (4.11) *при $N = \|T\|$, а элемент f — в задачі* (4.10) *при $\delta = \|f\|_X$.*

Багато задач чисельного аналізу, теорії функцій та інших розділів математики є некоректними задачами відновленя оператора A на елементах класу $Q \subset D_A$ у припущенні, що елементи класу Q задані з відомою похибкою. Відновлення здійснюється за допомогою деякої множини $\mathcal{R} = \mathcal{R}(X,Y) \subset \mathcal{O}(X,Y)$, де $\mathcal{O} = \mathcal{O}(X,Y)$ — сукупність всіх відображень, що діють із X в Y.

Для числа $\delta \ge 0$ і оператора $T \in \mathcal{R}(X,Y)$ покладемо

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{R}; A, Q) = \inf_{T\in\mathcal{R}} \sup_{\substack{f\in Q,\, \eta\in X,\\ \|f-\eta\|_X \le \delta}} \|Af - Tf\|_Y. \tag{4.15}$$

Задача оптимального відновлення оператора A за допомогою множини відображень (методів відновлення) $\mathcal{R}$ на елементах класу Q, заданих з похибкою δ, полягає в тому, щоб знайти величину (4.15) і вказати оптимальний (тобто такий, що реалізує точну нижню межу в (4.15)) метод відновлення.

Зв'язок задачі (4.15) з нерівностями типу Колмогорова, з одного боку, і задачею наближення необмежених операторів обмеженими – з іншого, встановлюється такою теоремою (див. [26, теорема 7.1.2]).

Теорема 4.1.2. *Якщо Q – врівноважена множина і A – однорідний оператор, то*

$$\Omega(\delta, A, Q) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}; A, Q) \le \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}; A, Q) \le l(\delta, A, Q).$$

Якщо при цьому існує елемент $f \in Q$ і оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ з властивістю (4.14), *то*

$$\|Af\|_Y = \Omega(\delta, A, Q) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}; A, Q) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}; A, Q), \quad \delta = \|f\|_X,$$

і для відповідного δ оператор T є оптимальним.

Відомі результати, взаємозв'язок задачі Стєчкіна і задачі оптимального відновлення оператора з різними екстремальними задачами та подальші посилання можна знайти в [26] та оглядових статтях [4, 76, 5, 6, 8, 74].

В підрозділі 4.2 на підставі загальних теорем із [252] ми отримаємо нові точні нерівності для дробових похідних за Маршо у випадку $G = \mathbb{R}$, $p = q = \infty$, $1 \le s < \infty$, $\alpha \in (0, 1)$, $r = 2$ та $G = \mathbb{R}$, $p = q = \infty$, $1 < s \le \infty$, $\alpha \in (1, 2 - \frac{1}{s})$, $r = 2$.

У підрозділі 4.3 ми отримаємо точні нерівності типу Колмогорова для норм похідних за Адамаром функцій з L_p-просторів, а також з гельдерових просторів. Для випадку гельдерових просторів будуть також розглянуті застосування отриманих нерівностей до розв'язку задач про наближення оператора диференціювання за Адамаром обмеженими операторами і задача відновлення цього оператора.

В підрозділі 4.4 розглядаються питання про точні оцінки норм дробових інтегралів типу потенціалів Феллера (див. [184, § 12]).

4.2. Нерівності типу Колмогорова для норм похідних Маршо функцій, заданих на осі

Даний підрозділ присвячено встановленню точних нерівностей типу Колмогорова для норм дробових похідних за Маршо функцій $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$ $(1 \le s \le \infty)$. Як зазначалось, в [252] було встановлено достатні умови, що гарантують існування точних нерівностей (4.9) для норм дробових похідних Маршо, зокрема, у випадку $p = q = \infty$, $1 \le s \le \infty$. Наведемо твердження, що стосуються цих результатів.

Нехай $G = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$. Через $W^r_{p,s}(G)$ $(1 \le p, s \le \infty)$ позначимо клас функцій $f \in L^r_{p,s}(G)$ таких, що $\|f^{(r)}\|_{L_s(G)} \le 1$, а через $\bigvee(G)$ – простір функцій $f \in L_1(G)$ з обмеженою на G варіацією. Для кожного $x \in G$ і $f \in L_1(G)$ позначимо через $f^{[m]}$ $(m \in \mathbb{N})$ – m-й інтеграл від функції f:

$$f^{[m]} := \frac{1}{(m-1)!} \int\limits_G (x-t)_+^{m-1} f(t)\, dt, \quad x \in G.$$

Для $\tau > 0$ означимо функцію $\mathcal{R}_\tau : G \to \mathbb{R}$ в такий спосіб:

$$\mathcal{R}_\tau(x) = \begin{cases} \frac{x^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Має місце така теорема (див.[252, наслідок 3]).

Теорема 4.2.1. *Нехай $G = \mathbb{R}$ або $G = \mathbb{R}_+$, $1 < s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$, $r \in \mathbb{N}$ і $\alpha \in (0, r - 1/s) \setminus \mathbb{N}$. Нехай також функція $\Omega \in V(G)$ така, що $\left(\mathcal{R}_{r-\alpha} - \Omega^{[r-1]}\right) \in L_{s'}(G)$ і для кожної $f \in L^r_{\infty,s}(G)$ виконується співвідношення*

$$D^\alpha_- f(0) - \int\limits_G f(x)\, d\Omega(x) =$$

$$= (-1)^r \int\limits_G \Big(\mathcal{R}_{r-\alpha}(x) - \Omega^{[r-1]}(x)\Big) f^{(r)}(x)\, dx. \qquad (4.16)$$

Якщо функція $\Phi \in W^r_{\infty,s}(G)$ задовольняє умову

$$\int\limits_G \Phi(t)\, d\Omega(t) = \bigvee_G \Omega \cdot \|\Phi\|_{L_\infty(G)} \qquad (4.17)$$

і співвідношення

$$(-1)^r \int\limits_G \Big(\mathcal{R}_{r-\alpha}(x) - \Omega^{[r-1]}(x)\Big)\, \Phi^{(r)}(x)\, dx =$$

$$= \Big\| \mathcal{R}_{r-\alpha} - \Omega^{[r-1]} \Big\|_{L_{s'}(G)}, \tag{4.18}$$

то для будь-якої функції $f \in L^r_{\infty,s}(G)$ *і* $h > 0$ *мають місце нерівності*

$$\|D^\alpha_- f\|_{L_\infty(G)} \leqslant h^{-\alpha} \bigvee_G \Omega \cdot \|f\|_{L_\infty(G)} +$$

$$+ h^{r-\alpha-1/s} \Big\| \mathcal{R}_{r-\alpha} - \Omega^{[r-1]} \Big\|_{L_{s'}(G)} \cdot \Big\| f^{(r)} \Big\|_{L_s(G)}, \tag{4.19}$$

і

$$\|D^\alpha_- f\|_{L_\infty(G)} \leqslant \frac{\|D^\alpha_- \Phi\|_{L_\infty(G)}}{\|\Phi\|^{1-\lambda}_{L_\infty(G)}} \|f\|^{1-\lambda}_{L_\infty(G)} \Big\| f^{(r)} \Big\|^{\lambda}_{L_s(G)}, \ \ \lambda = \frac{\alpha}{r - 1/s}. \tag{4.20}$$

При цьому функція $\Phi_h(x) := h^{r-1/s}\Phi\,(x/h)$, $x \in G$, *перетворює (4.19) і (4.20) на рівності.*

У випадку $s = 1$ справджується таке твердження (див.[252, наслідок 4]).

Теорема 4.2.2. *Нехай* $G = \mathbb{R}$ *або* $G = \mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{N}$ *і* $\alpha \in (0, r-1) \setminus \mathbb{N}$. *Нехай також функція* $\Omega \in V(G)$ *така, що* $\big(\mathcal{R}_{r-\alpha} - \Omega^{[r-1]}\big) \in L_\infty(G)$ *і співвідношення (4.16) виконується для кожної* $f \in L^r_{\infty,1}(G)$. *Якщо* $(r-1)$*-разів диференційовна функція* Φ *з кусково-сталою похідною* $\Phi^{(r-1)}$ *задовольняє рівності (4.17),* $\bigvee\limits_G \Phi^{(r-1)} = 1$ *і*

$$(-1)^r \int\limits_G \Big(\mathcal{R}_{r-\alpha}(x) - \Omega^{[r-1]}(x)\Big)\, d\Phi^{(r-1)}(x) =$$

$$= \Big\| \mathcal{R}_{r-\alpha} - \Omega^{[r-1]} \Big\|_{L_1(G)}, \tag{4.21}$$

то для будь-якої $f \in L^r_{\infty,1}(G)$ *і* $h > 0$, *виконуються точні нерівності*

$$\|D^\alpha_- f\|_{L_\infty(G)} \leqslant h^{-\alpha} \bigvee_G \Omega \cdot \|f\|_{L_\infty(G)} +$$

$$+ h^{r-\alpha-1} \Big\| \mathcal{R}_{r-\alpha} - \Omega^{[r-1]} \Big\|_{L_\infty(G)} \cdot \Big\| f^{(r)} \Big\|_{L_1(G)}, \tag{4.22}$$

і

$$\|D_-^\alpha f\|_{L_\infty(G)} \leqslant \frac{\|D_-^\alpha \Phi\|_{L_\infty(G)}}{\|\Phi\|_{L_\infty(G)}^{1-\lambda}} \|f\|_{L_\infty(G)}^{1-\lambda} \left\|f^{(r)}\right\|_{L_1(G)}^{\lambda}, \quad \lambda = \frac{k}{r-1}. \qquad (4.23)$$

Теореми 4.2.1 і 4.2.2 є результатом спільних досліджень авторів [252] (доведення цих фактів ми не наводимо).

Нехай $\alpha \in (0,1)$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$ і $s' = s/(s-1)$. Для $p \in [0, \alpha/(1-\alpha)]$, розглянемо функцію

$$\omega(p;x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -p, \\ -\dfrac{1}{1+p}, & x \in (-p,1], \\ (1-\alpha)x^{-\alpha}, & x \geqslant 1. \end{cases} \qquad (4.24)$$

Для $x \in \mathbb{R}$, розглянемо функцію $\tau(p;x) := \Gamma(2-\alpha)\mathcal{R}_{2-\alpha}(x) - \omega^{[1]}(p;x)$ і означимо для $s > 1$

$$\phi_s(p;x) := \frac{1}{2}\int\limits_{-p}^{1} t \cdot \tau_{(s')}(p;t)\,dt + \int\limits_{-p}^{x} (x-t)\cdot \tau_{(s')}(p;t)\,dt, \quad s > 1,$$

а для $s = 1$

$$\phi_1(p;x) := \begin{cases} (1+p)/4, & x \leqslant -p, \\ (1+p-2x)/4, & x \in (-p,1), \\ -(1+p)/4, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Тут ми використовуємо позначення $g_{(s')} := |g|^{s'-1}\operatorname{sign} g$.

Нам знадобиться таке допоміжне твердження

Лема 4.2.1. *Нехай* $1 < s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$ *і* $\alpha \in (0,1)$. *Тоді наступні рівняння мають єдиний розв'язок в інтервалі* $[0, \alpha/(1-\alpha)]$*:*

$$Z_s(p) := \int\limits_{-p}^{1} \tau_{(s')}(p;t)\,dt = 0, \qquad (4.25)$$

$$Z_1(p) := k^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}(1+p) - (2\alpha)^{1-\alpha} = 0. \qquad (4.26)$$

Доведення. Той факт, що рівняння $Z_1(p) = 0$ має єдиний розв'язок в інтервалі $[0, \alpha/(1-\alpha)]$ є тривіальним. Для доведення того, що рівняння $Z_s(p) = 0$ також має єдиний розв'язок на цьому інтервалі, зазначимо, що Z_s є неперервною і строго спадною на інтервалі $[0, \alpha/(\alpha-1)]$, і набуває значень протилежних знаків в точках 0 і $\alpha/(\alpha-1)$. Отже, рівняння $Z_s(p) = 0$ має єдиний розв'язок на $[0, \alpha/(1-\alpha)]$.

Лему доведено.

Для спрощення запису, позначимо через $p_{\alpha,s}$, $s > 1$, розв'язок рівняння (4.25) і через $p_{\alpha,1}$ розв'язок рівняння (4.26). Зазначимо, що для деяких значень s числа $p_{\alpha,s}$ можуть бути знайдені в явному вигляді, а саме,

$$p_{\alpha,\infty} = 1 - 2^{-\alpha/(1-\alpha)} \text{ і } p_{\alpha,2} = \alpha/(2-\alpha).$$

Позначимо функції $\omega\left(p_{\alpha,s};\cdot\right)$, $\tau\left(p_{\alpha,s};\cdot\right)$ і $\phi_s\left(p_{\alpha,s};\cdot\right)$ через $\omega_{\alpha,s}$, $\tau_{\alpha,s}$ і $\phi_{\alpha,s}$ відповідно.

З теорем 4.2.1 і 4.2.2 неважко отримати таке твердження.

Теорема 4.2.3. *Нехай $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$, $\alpha \in (0,1)$ і $h > 0$. Тоді для кожної функції $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$, виконується точна нерівність*

$$\left\|D^\alpha_- f\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\left\|D^\alpha_- \Phi_{\alpha,s}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\left\|\Phi_{\alpha,s}\right\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \left\|f\right\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\mathbb{R})} \left\|f''\right\|^{\lambda}_{L_s(\mathbb{R})}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2-1/s}, \tag{4.27}$$

де $\Phi_{\alpha,s} := \left\|\phi''_{\alpha,s}\right\|^{-1}_{L_s(\mathbb{R})} \cdot \phi_{\alpha,s}$, $s > 1$, і $\Phi_{\alpha,1} := \phi_{\alpha,1}$.

Крім того, якщо $s > 1$, то функція $\Phi_{\alpha,s}(x/h)$, $x \in \mathbb{R}$, перетворює (4.27) на рівність.

Доведення. Нехай $\Omega := \frac{\omega_{\alpha,s}}{\Gamma(2-\alpha)}$. Неважко перевірити, що для кожної функції $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$ справджується рівність (4.16). Крім того, якщо $s > 1$, то $\Phi_{\alpha,s}$ спадає на $\mathbb{R}$, $\Phi_{\alpha,s} \in W^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$, $\Phi_{\alpha,s}(-p_{\alpha,s}) = -\Phi_{\alpha,s}(1) = \left\|\Phi_{\alpha,s}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$. Отже, функції Ω і $\Phi_{\alpha,s}$ задовольняють умови теореми 4.2.1. У випадку $s = 1$ неважко переконатись, що функції Ω і $\Phi_{\alpha,1}$ задовольняють умови теореми 4.2.2.

Теорему доведено.

Нехай $1 < s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$ і $\alpha \in (1, 2-1/s)$. Розглянемо множину $S := \{(a,b) \in (0,1)^2 : a \le b\} \times [0, +\infty)$. Для кожного $(a,b,p) \in S$, означимо

$$\omega(a,b,p;x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -p, \\ \dfrac{1-b+\left(1-b^{1-\alpha}\right)(a-1)}{(1-b)(a+p)} & x \in [-p, a], \\ \dfrac{b^{1-\alpha}-1}{1-b}, & x \in [a,1], \\ (1-\alpha)x^{-\alpha}, & x \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.28}$$

Для $x \in \mathbb{R}$, розглянемо функцію $\tau(a,b,p;x) := \Gamma(2-\alpha)\mathcal{R}_{2-\alpha}(x) - \omega^{[1]}(a,b,p;x)$ і

$$\phi(a,b,p;x) := \frac{1}{2}\int\limits_{-p}^{a} t \cdot \tau_{(s')}(a,b,p;t)\,dt + \int\limits_{-p}^{x} (x-t)\cdot \tau_{(s')}(a,b,p;t)\,dt. \tag{4.29}$$

У подальшому нами істотно буде використано такий допоміжний результат

Лема 4.2.2. *Наступна система рівнянь має розв'зок на S:*

$$\begin{cases} Z_1(a,b,p) := \displaystyle\int\limits_{-p}^{a} \tau_{(s')}(a,b,p;t)\,dt = 0, \\ Z_2(a,b,p) := \displaystyle\int\limits_{a}^{1} \tau_{(s')}(a,b,p;t)\,dt = 0, \\ Z_3(a,b,p) := \displaystyle\int\limits_{-p}^{1} t\cdot\tau_{(s')}(a,b,p;t)\,dt = 0. \end{cases} \tag{4.30}$$

Нехай $(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s})$ – один з розв'язків системи рівнянь (4.30) і, для спрощення запису, ми позначаємо функції $\omega\left(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s};\cdot\right)$, $\tau\left(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s};\cdot\right)$ і $\phi\left(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s};\cdot\right)$ через $\omega_{\alpha,s}$, $\tau_{\alpha,s}$ і $\phi_{\alpha,s}$ відповідно.

Зауважимо, що для деяких значень s трійка $(a_{\alpha,s}, b_{\alpha,s}, p_{\alpha,s})$ може бути виписаною у явному вигляді, а саме $p_{\alpha,\infty} = a_{\alpha,\infty} = 1/3$ і $b_{\alpha,\infty} = 2/3$.

Нехай $\Phi_{\alpha,s} := \left\|\phi''_{\alpha,s}\right\|^{-1}_{L_s(\mathbb{R})} \cdot \phi_{\alpha,s}$. Має місце таке твердження

Теорема 4.2.4. *Нехай* $1 < s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$, $\alpha \in (1, 2 - 1/s)$ *і* $h > 0$. *Тоді для кожної функції* $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$, *виконується точна нерівність*

$$\|D^\alpha_- f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leqslant \frac{\|D^\alpha_- \Phi_{\alpha,s}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\|\Phi_{\alpha,s}\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \|f\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\mathbb{R})} \|f''\|^{\lambda}_{L_s(\mathbb{R})}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2 - 1/s}. \quad (4.31)$$

При цьому функція $\Phi_{\alpha,s}(x/h)$, $x \in \mathbb{R}$, *перетворює (4.31) на рівність*

Доведемо спочатку лему 4.2.2 , а потім теорему 4.2.4.

Доведення леми 4.2.2. Спочатку зазначимо, що функція Z_2 є неперервною на S, строго спадною за змінною a, строго зростаючою за змінною b і є константою за змінною p. Крім того, для кожного $a \in (0,1)$, $Z_2(a, a, 0) < 0$ і $\lim\limits_{b \to 1-0} Z_2(a, b, 0) > 0$. З цього факту і монотонності Z_2 за змінною b випливає існування строго зростаючої функції $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}$ такої, що $Z_2(a, \gamma(a), 0) = 0$. Крім того, неперервність функції γ випливає з її монотонності і неперервності функції Z_2.

Тепер розглянемо функцію Z_1. Зрозуміло, що Z_1 є неперервною на S, сторого зростаючою за змінними a і b, і строго спадною за змінною p. Оскільки для будь-якого $a \in (0,1)$, $Z_1(a, \gamma(a), 0) > 0$ і $\lim\limits_{p \to -\infty} Z_1(a, \gamma(a), p) = -\infty$, робимо висновок, що існує функція $\delta : (0,1) \to \mathbb{R}$ така, що для будь-якого $a \in (0,1)$, $Z_1(a, \gamma(a), \delta(a)) = 0$. Оскільки Z_1 неперервна на S і δ є монотонною, переконуємось, що δ є також неперервною на $(0,1)$. Отже, для будь-якого $a \in (0,1)$, маємо

$$Z_1(a, \gamma(a), \delta(a)) = Z_2(a, \gamma(a), \delta(a)) = 0.$$

Покладемо $b^* = \lim\limits_{a \to +0} \gamma(a)$. Оскільки

$$\begin{aligned}\lim_{a \to 0^+} Z_2\left(a, \tfrac{1}{2}, 0\right) \; = \; & \int\limits_0^{1/2} \left(t^{1-\alpha} - 1 + 2\left(1 - 2^{\alpha-1}\right)(1-t)\right)^{s'-1} dt - \\ & - \int\limits_{1/2}^{1} \left(t^{1-\alpha} - 1 + 2\left(1 - 2^{\alpha-1}\right)(1-t)\right)^{s'-1} dt > 0\end{aligned}$$

і

$$\lim_{a\to 0^+} Z_2\left(a,\frac{1}{2},0\right) = \int\limits_0^{1/2} \left(t^{1-\alpha}-t\right)^{s'-1}\,dt - \int\limits_{1/2}^{1} \left(t^{1-\alpha}-t\right)^{s'-1}\,dt > 0,$$

отримаємо, що $b^* \in (0,1)$.

Насамкінець, відзначимо, що Z_3 також неперервна на S функція, і

$$\lim_{a\to 0^+} Z_3\left(a,\gamma(a),\delta(a)\right) = Z_3\left(+0,b^*,0\right) =$$

$$= \int\limits_0^{b^*} t\cdot\tau_\alpha^{s'-1}\left(+0,b^*,0\right)\,dt - \int\limits_{b^*}^{1} t\cdot\tau_\alpha^{s'-1}\left(+0,b^*,0\right)\,du <$$

$$< b^*\left[\int\limits_0^{b^*} \tau_\alpha^{s'-1}(a,b,p;t)\,dt - \int\limits_{b^*}^{1} \tau_\alpha^{s'-1}(a,b,p;t)\,dt\right] = b^* Z_2\left(+0,b^*,0\right) = 0,$$

$$\lim_{a\to 1^-} Z_3\left(a,\gamma(a),\delta(a)\right) \;>\; \int\limits_0^{1} t\left(t^{1-\alpha}-1\right)^{s'-1}\,dt > 0.$$

Отже, існує $a \in (0,1)$ таке, що $Z_3\left(a,\gamma(a),\delta(a)\right) = 0$.

Лему доведено.

Доведення теореми 4.2.4. Нехай $\Omega := \frac{\omega_{\alpha,s}}{\Gamma(2-\alpha)}$. Неважко перевірити, що для кожної функції $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$ справджується рівність (4.16). Крім того, зрозуміло, що $\Phi_{\alpha,s} \in W^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$, $\Phi_{\alpha,s}\left(-p_{\alpha,s}\right) = -\Phi_{\alpha,s}\left(a_{\alpha,s}\right) = \left\|\Phi_{\alpha,s}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$, $\Phi_{\alpha,s}(x) = \left\|\Phi_{\alpha,s}\right\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$ для будь-якого $x \geqslant 1$, $\Phi_{\alpha,s}$ є незростаючою на $(-\infty, a_{\alpha,s}]$ і неспадною на $[a_{\alpha,s}, +\infty)$. Отже, функції Ω і $\Phi_{\alpha,s}$ задовольняють умови теореми 4.2.1.

Теорему доведено.

4.3. Нерівності типу Колмогорова для норм похідних Адамара функцій, заданих на півосі.

Нехай $\mathfrak{D}$ – оператор, що відображає будь-яку диференційовну функцію $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ у функцію $\mathfrak{D}f(x) = xf'(x)$, $x\in\mathbb{R}_+$, тобто $\mathfrak{D} = x\dfrac{d}{dx}$. Дробовий степінь, $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, оператора $\mathfrak{D}$ реалізується дробовим диференціальним оператором Адамара $\mathfrak{D}_\pm^\alpha$ (див. [184, §18]), який для $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ і $x \in \mathbb{R}_+$ означається так:

$$\mathfrak{D}_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\varkappa(\alpha, r)} \int\limits_0^1 \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \mathbf{C}_r^m f\left(u^m x\right) \frac{du}{u|\ln u|^{1+\alpha}},$$

$$\mathfrak{D}_-^\alpha f(x) = \frac{1}{\varkappa(\alpha, r)} \int\limits_1^{+\infty} \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \mathbf{C}_r^m f\left(u^m x\right) \frac{du}{u|\ln u|^{1+\alpha}},$$

де $r \in \mathbb{N}$, $r > \alpha$, і $\varkappa(\alpha, r)$ означене в (4.8).

Для довільної функції $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ означимо функцію $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в такий спосіб: $g(t) = f\left(e^t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді для кожного $x \in \mathbb{R}_+$ маємо $\mathfrak{D}_\pm^\alpha f(x) = D_\pm^\alpha g(\ln x)$. Значить, $\|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} = \|D_\pm^\alpha g\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$, і для кожного $1 \le s < \infty$,

$$\int\limits_0^{+\infty} \left|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f(x)\right|^s \frac{dx}{x} = \left\|D_\pm^\alpha g\right\|_{L_s(\mathbb{R})}^s.$$

Остання формула дає можливість отримувати точні нерівності типу Колмогорова для вагових L_s-норм дробових похідних за Адамаром із точних нерівностей типу Колмогорова для L_s-норм дробових похідних за Маршо.

В пункті 4.3.1 ми наведемо відповідні результати, а також деякі результати, що стосуються поточкових оцінок похідних за Адамаром [38, 43].

4.3.1. Нерівності для дробових похідних за Адамаром у просторах з інтегральною метрикою

Для $1 \leqslant s \leqslant \infty$, через $\mathcal{L}_s(G)$ позначимо простір вимірних функцій $f : G \to \mathbb{R}$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{\mathcal{L}_s(G)} = \begin{cases} \left(\int\limits_G |f(t)|^s \, \dfrac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}}, & 1 \leqslant s < \infty, \\ \|f\|_{L_\infty(G)}, & s = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in \mathbb{N}$ позначимо через $\mathcal{L}^r_{p,s}(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p, s \leq \infty$, простір функцій $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)$ таких, що $f^{(r-1)}$ локально абсолютно неперервна на $\mathbb{R}_+$ і $\mathfrak{D}^r f \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}_+)$.

На підставі наведених вище міркувань можемо написати такі твердження.

Теорема 4.3.1. *Нехай $1 \leqslant p, q, s \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, r)$ і $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$. Нехай також K – точна константа в нерівності (4.9) для $G = \mathbb{R}$ і $\mathbf{D}^\alpha = D^\alpha_\pm$. Тоді для кожної $f \in \mathcal{L}^r_{p,s}(\mathbb{R}_+)$, виконується точна нерівність*

$$\|\mathfrak{D}^\alpha_\pm f\|_{\mathcal{L}_q(\mathbb{R}_+)} \leqslant K \, \|f\|^\mu_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)} \, \|\mathfrak{D}^r f\|^\lambda_{\mathcal{L}_s(\mathbb{R}_+)} .$$

Зіставляючи це твердження з теоремами 4.2.3 і 4.2.4 одержимо

Наслідок 4.3.1. *Нехай $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $s' = s/(s-1)$, $\alpha \in (0, 2 - 1/s)$ і $\lambda = \alpha/(2 - 1/s)$. Тоді для кожної функції $f \in \mathcal{L}^2_{\infty,s}(\mathbb{R}_+)$, виконується точна нерівність*

$$\|\mathfrak{D}^\alpha_\pm f\|_{\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \leqslant \frac{\|D^\alpha_- \Phi_{\alpha,s}\|_{L_\infty(\mathbb{R})}}{\|\Phi_{\alpha,s}\|^{1-\lambda}_{L_\infty(\mathbb{R})}} \, \|f\|^{1-\lambda}_{\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_+)} \left\|\mathfrak{D}^2 f\right\|^\lambda_{\mathcal{L}_s(\mathbb{R}_+)} ,$$

де функція $\Phi_{\alpha,s}$ означена в підрозділі 4.2.

Подальші результати цього розділу стосуватимуться похідних за Адамаром порядку $\alpha \in (0, 1)$, тому нам зручно буде використовувати відповідний цьому випадку вигляд похідних.

Нехай $\mathcal{M}_+ = (0;1)$ і $\mathcal{M}_- = (1,\infty)$. Дробові похідні за Адамаром $\mathfrak{D}^\alpha_\pm$, $0<\alpha<1$, для функцій $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ означаються формулами [184, с. 252]:

$$(\mathfrak{D}^\alpha_\pm f)\,(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{\mathcal{M}_\pm}\frac{f(x)-f(xt)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}.$$

Далі ми наведемо точні нерівності типу Колмогорова, що для $x\in\mathbb{R}_+$ оцінюють похідні за Адамаром $|(\mathfrak{D}^\alpha_\pm f)(x)|$ функцій $f\in L^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_+)$ через $\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}$ і $\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$ (див.[38]).

Теорема 4.3.2. *Нехай $\alpha\in(0,1)$. Для будь-якої функції $f\in L^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_+)$ і будь-якого $x\in\mathbb{R}_+$ справджується точна нерівність*

$$|(\mathfrak{D}^\alpha_+ f)(x)| \le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(2\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}|\ln h|^{-\alpha} +$$

$$+x\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\int\limits_h^1(|\ln t|^{-\alpha}-|\ln h|^{-\alpha})\,dt\Big), \tag{4.32}$$

якщо $0<h<1$, і точна нерівність

$$|(\mathfrak{D}^\alpha_- f)(x)| \le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(2\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}|\ln h|^{-\alpha}+$$

$$+x\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\int\limits_1^h((\ln t)^{-\alpha}-(\ln h)^{-\alpha})\,dt\Big), \tag{4.33}$$

якщо $h>1$.

Нерівності 4.32 і 4.33 перетворюються на рівності для функцій

$$g^+_{x,h}(u) = \begin{cases} \frac{(h-1)x}{2} & 0<u<hx,\\ u-\frac{(1+h)x}{2} & hx\le u\le x,\\ \frac{(1-h)x}{2} & u>x\end{cases}$$

і

$$g^-_{x,h}(u) = \begin{cases} \frac{(h-1)x}{2} & 0<u<x,\\ \frac{(h+1)x}{2}-u & x\le u\le hx,\\ \frac{(1-h)x}{2} & u>hx\end{cases}$$

відповідно.

Доведення. Проведемо доведення для випадку $(\mathfrak{D}^{\alpha}_{+}f)$. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}_+$ і $0 < h < 1$ маємо

$$|(\mathfrak{D}^{\alpha}_{+}f)(x)| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big|\int\limits_0^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\Big|\int\limits_0^h \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big| + \Big|\int\limits_h^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big|\Big). \tag{4.34}$$

Спочатку оцінимо перший доданок в (4.34):

$$\Big|\int\limits_0^h \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big| \le$$

$$\le 2\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}\int\limits_0^h \frac{1}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} = \frac{2\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha}. \tag{4.35}$$

Для оцінки другого доданка в (4.34) спочатку відзначимо, що

$$f(x) - f(tx) = \int\limits_{tx}^{x} f'(u)\,du.$$

Тоді

$$\Big|\int\limits_h^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big| = \Big|\int\limits_h^1\int\limits_{tx}^{x} \frac{f'(u)\,du}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big| \le$$

$$\le \|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}x\int\limits_h^1 \frac{(1-t)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{x\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}}{\alpha}\int\limits_h^1 (|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha})\,dt. \tag{4.36}$$

Підставляючи (4.35) і (4.36) в (4.34), для кожного $x \in \mathbb{R}_+$ і $0 < h < 1$ отримаємо нерівність (4.32).

Неважко бачити, що для $x \in \mathbb{R}_+$ і $0 < h < 1$ виконуються рівності $\|g^+_{x,h}\|_{C(\mathbb{R}_+)} = \dfrac{1-h}{2}x$ і $\|(g^+_{x,h})'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} = 1$. Тепер обчислимо безпосередньо

$|(\mathfrak{D}_+^\alpha g_{x,h}^+)(x)|$.

$$|(\mathfrak{D}_+^\alpha g_{x,h}^+)(x)| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\int\limits_0^1 \frac{g_{x,h}^+(x) - g_{x,h}^+(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\int\limits_0^h \frac{g_{x,h}^+(x) - g_{x,h}^+(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} + \int\limits_h^1 \frac{g_{x,h}^+(x) - g_{x,h}^+(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big((1-h)x\int\limits_0^h \frac{dt}{|\ln t|^{1+\alpha}t} + x\int\limits_h^1 \frac{(1-t)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\frac{(1-h)x}{\alpha}|\ln h|^{-\alpha} + \frac{x}{\alpha}\int\limits_h^1 (|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha})\,dt\Big) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(2\|g_{x,h}^+\|_{C(\mathbb{R}_+)}|\ln h|^{-\alpha} + x\|(g_{x,h}^+)'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\int\limits_h^1 (|\ln t|^{-\alpha} - |\ln h|^{-\alpha})\,dt\Big).$$

Отже, для довільних $x \in \mathbb{R}_+$ і $0 < h < 1$ функція $g_{x,h}^+$ перетворює нерівність (4.32) на рівність.

Випадок $(\mathfrak{D}_-^\alpha f)$ розглядається аналогічно.

Теорема доведена.

Далі ми отримаємо поточкові оцінки для норм похідних за Адамаром порядку $\alpha \in (0,1)$ через $\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}$ і $\|\mathfrak{D} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$(див. [43]).

Теорема 4.3.3. *Нехай $\alpha \in (0,1)$. Для довільної функції $f \in \mathcal{L}^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_+)$ і будь-якого $x \in \mathbb{R}_+$ виконується точна нерівність*

$$|(\mathfrak{D}_+^\alpha f)(x)| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(2\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}\frac{|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha} + \|\mathfrak{D} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big), \qquad (4.37)$$

якщо $0 < h < 1$, і точна нерівність

$$|(\mathfrak{D}_-^\alpha f)(x)| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(2\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}\frac{(\ln h)^{-\alpha}}{\alpha} + \|\mathfrak{D} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\frac{(\ln h)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big), \qquad (4.38)$$

якщо $h > 1$.

Нерівності (4.37) і (4.38) перетворюються на рівності для функцій

$$g^+_{x,h}(u) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{h}, & 0 < u < hx, \\ \ln\frac{u}{xh} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{h}, & hx \le u \le x, \\ \frac{1}{2}\ln\frac{1}{h}, & u > x \end{cases}$$

і

$$g^-_{x,h}(u) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\ln h, & 0 < u < x, \\ \ln\frac{u}{x} - \frac{1}{2}\ln h, & x \le u \le hx, \\ \frac{1}{2}\ln h, & u > hx \end{cases}$$

відповідно.

Із (4.37) і (4.38) випливає точна нерівність

$$\|(\mathfrak{D}^\alpha_+ f)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \le$$
$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(2\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}\frac{|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha} + \|\mathfrak{D}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big). \tag{4.39}$$

якщо $0 < h < 1$, і точна нерівність

$$\|(\mathfrak{D}^\alpha_- f)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \le$$
$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(2\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}\frac{(\ln h)^{-\alpha}}{\alpha} + \|\mathfrak{D}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\frac{(\ln h)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big), \tag{4.40}$$

якщо $h > 1$.

Мінімізуючи по h праві частини (4.39) і (4.40), отримаємо

Наслідок 4.3.2. *Нехай* $\alpha \in (0,1)$. *Для довільної функції* $f \in \mathcal{L}^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_+)$ *виконуються точні нерівності*

$$\|(\mathfrak{D}^\alpha_\pm f)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \le \frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\|f\|^{1-\alpha}_{C(\mathbb{R}_+)}\|\mathfrak{D}f\|^\alpha_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}. \tag{4.41}$$

Доведення теореми 4.3.3. Проведемо доведення для випадку $(\mathfrak{D}^\alpha_+ f)$. Випадок $(\mathfrak{D}^\alpha_- f)$ розглядається аналогічно. Як і при доведенні теореми 4.3.2, зазначимо, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}_+$ і $0 < h < 1$ виконується рівність (4.34). Оцінку першого доданку в цій рівності дає співвідношення (4.35). Для оцінки другого доданку аналогічно (4.36) маємо:

$$\Big|\int_h^1 \frac{f(x) - f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big| = \Big|\int_h^1\int_{tx}^x \frac{f'(u)\,du}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big| \le$$

$$\leq \|\mathfrak{D}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\Big|\int\limits_h^1 \frac{d|\ln t|}{|\ln t|^{1+\alpha}}\int\limits_{tx}^{x}\frac{du}{u}\Big| \leq$$

$$\leq \|\mathfrak{D}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \tag{4.42}$$

Підставляючи (4.35) і (4.42) в (4.34), для кожного $x \in \mathbb{R}_+$ і $0 < h < 1$ отримаємо нерівність (4.37).

Тепер переконаємось в точності цієї нерівності. Для $x \in \mathbb{R}_+$ і $0 < h < 1$ маємо: $\|g^+_{x,h}\|_{C(\mathbb{R}_+)} = \dfrac{1}{2}|\ln h|$ і $\|\mathfrak{D}g^+_{x,h}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} = 1$. Далі,

$$|(\mathfrak{D}^\alpha_+ g^+_{x,h})(x)| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\int\limits_0^1 \frac{g^+_{x,h}(x) - g^+_{x,h}(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\int\limits_0^h \frac{g^+_{x,h}(x) - g^+_{x,h}(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} + \int\limits_h^1 \frac{g^+_{x,h}(x) - g^+_{x,h}(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(-\ln\frac{1}{h}\int\limits_0^h \frac{d|\ln t|}{|\ln t|^{1+\alpha}} + \int\limits_h^1 \frac{\ln\frac{1}{t}}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\Big) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(\frac{\ln\frac{1}{h}}{\alpha}|\ln h|^{-\alpha} + \frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\Big(2\|g^+_{x,h}\|_{C(\mathbb{R}_+)}\frac{|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha} + \|\mathfrak{D}g^+_{x,h}\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big).$$

Отже, для довільних $x \in \mathbb{R}_+$ і $0 < h < 1$ функція $g^+_{x,h}$ перетворює нерівність (4.37) на рівність.

Теорему доведено.

4.3.2. Нерівності типу Колмогорова для норм похідних за Адамаром функцій з гельдерових просторів та їх застосування

Нехай $G = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$ і $\omega(t)$ – деякий модуль неперервності, тобто неспадна на $\mathbb{R}_+$ непереврна напівадитивна функція, в нулі рівна нулю. Позначимо через H_X^ω (где $X = \{C(G), L_p(G)\}$) множину функцій $f \in X$, для яких

$$\|f\|_{H_X^\omega} = \sup_{\substack{t\in G,\\ t\neq 0}} \frac{\|f(\cdot) - f(\cdot + t)\|_X}{\omega(|t|)} < \infty,$$

а через $\mathcal{H}_X^\omega$ (де $X = \{C(\mathbb{R}_+), \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)\}$) – множину функцій $f \in X$, для яких

$$\|f\|_{\mathcal{H}_X^\omega} = \sup_{\substack{t\in \mathbb{R}_+,\\ t\neq \{0,1\}}} \frac{\|f(\cdot) - f(\cdot \times t)\|_X}{\omega(|\ln t|)} < \infty.$$

Якщо $\omega(t) = t^\beta$, $0 < \beta \le 1$, то замість H_X^ω і $\mathcal{H}_X^\omega$ будемо писати відповідно H_X^β і $\mathcal{H}_X^\beta$.

Через UH_X^ω і $U\mathcal{H}_X^\omega$ будемо позначати одиничні кулі просторів H_X^ω і $\mathcal{H}_X^\omega$ відповідно.

Розглядувані нами нерівності типу Колмогорова стосуватимуться оцінки $\|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\|_X$ через $\|f\|_X$ і $\|f\|_{\mathcal{H}_X^\omega}$, $X = \{C(\mathbb{R}_+), \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)\}$, або, що еквівалентно, розв'язання такої екстремальної задачі на класі $U\mathcal{H}_X^\omega$:

$$\|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\|_X \to \sup, \quad \|f\|_X \le \delta, \quad \delta > 0.$$

В [57] В. Ф. Бабенко і М. С. Чурілова отримали точні нерівності, що оцінюють $\|D_\pm^\alpha f\|_{L_\infty(G)}$ через $\|f\|_{L_\infty(G)}$ і $\|f\|_{H^\omega_{C(G)}}$, а в [25] одержані нерівності, що оцінюють $\|D_\pm^\alpha f\|_{L_p(G)}$ через $\|f\|_{L_p(G)}$ і $\|f\|_{H^\omega_{L_p(G)}}$, $1 \le p < \infty$, причому для $p = 1$ встановлено точність цих нерівностей. В [25] розв'язано також задачу про наближення операторів дробового диференціювання $D_\pm^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, на множині $UH_1^\omega(G)$ обмеженими операторами і задачу оптимального відновлення операторів дробового диференціювання за Маршо на класі функцій, що задаються з похибкою.

Наведемо формулювання деяких результатів з [57, 25] (див. також [235]):

Теорема 4.3.4. *Нехай $1 \le p \le \infty$, $\alpha \in (0,1)$, і модуль неперервності $\omega(t)$ такий, що інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt$ збігається. Покладемо $X = C(\mathbb{R})$, якщо $p = \infty$, и $X = L_p(\mathbb{R})$, якщо $1 \le p < \infty$. Тоді для будь-якої функції*

$f \in H_X^\omega$ і будь-якого $h > 0$ правильні нерівності

$$\|D_\pm^\alpha f\|_{L_p(\mathbb{R})} \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\|f\|_{H_X^\omega} \int\limits_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + 2\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} \frac{h^{-\alpha}}{\alpha} \right], \tag{4.43}$$

або, що еквівалентно,

$$\|D_\pm^\alpha f\|_{L_p(\mathbb{R})} \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{\min\left\{2\|f\|_{L_p(\mathbb{R})}, \|f\|_{H_X^\omega}\,\omega(t)\right\}}{t^{1+\alpha}} dt. \tag{4.44}$$

Для $p = \infty$ нерівності є точними з екстремальною функцією:

$$f(t) = \begin{cases} \omega(|t|) - \frac{1}{2}\omega(h), & t \in (-h, h), \\ \frac{1}{2}\omega(h), & t \notin (-h, h), \end{cases}$$

а для $p = 1$ нерівності є точними з екстремальною функцією:

$$f_h(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega'(u), & u \in (0, h), \\ 0, & u \notin (0, h), \end{cases}$$

де $\omega(\cdot)$ – локально абсолютно неперервна функція на напівосі $[0, \infty)$.

В даному підрозділі ми одержимо точні нерівності типу Колмогорова, що оцінюють $\|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$ через $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$ і $\|f\|_{\mathcal{H}^\omega_{C(\mathbb{R}_+)}}$, а також такі, що оцінюють $\|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}$, $1 \le p < \infty$ через $\|f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}$ і $\|f\|_{\mathcal{H}^\omega_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}}$.

Під час оцінки норм $\|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}$, $1 \le p \le \infty$, ми можемо діяти в два способи, а саме: отримати цю оцінку безпосередньо, використовуючи означення похідної за Адамаром або одержати необхідні нерівності як наслідки з теореми 4.3.4. Ми будемо використовувати другий підхід і для цього, скористаємось наведеними вище міркуваннями, які висвітлюють зв'язок між похідними Маршо функцій, визначених на $\mathbb{R}$, і похідними Адамара функцій, визначених на $\mathbb{R}_+$.

Нехай $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, тоді композиція $f \circ \exp$ буде визначена на $\mathbb{R}$. Як уже зазначалось,

$$D_\pm^\alpha (f \circ \exp)(x) = \left(\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\right)(\exp x). \tag{4.45}$$

Нехай $\omega(t)$ – модуль неперервності, такий що виконується така умова

$$\int\limits_0^u \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt < \infty, \quad u > 0. \tag{4.46}$$

Зрозуміло, що для $f \in \mathcal{H}^{\omega}_{C(\mathbb{R}_+)}$ буде $\|\mathfrak{D}^{\alpha}_{\pm}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} = \|D^{\alpha}_{\pm}(f \circ \exp)\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$, $\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)} = \|f \circ \exp\|_{C(\mathbb{R})}$ і $\|f\|_{\mathcal{H}^{\omega}_{C(\mathbb{R}_+)}} = \|f \circ \exp\|_{H^{\omega}_{C(\mathbb{R})}}$.

Тепер, використовуючи (4.45) і застосовуючи нерівність (4.44) при $p = \infty$ до функції $f \circ \exp$, за допомогою заміни змінних отримаємо

$$\|\mathfrak{D}^{\alpha}_{\pm}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} = \|D^{\alpha}_{\pm}(f \circ \exp)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{\min\left\{\|f \circ \exp\|_{H^{\omega}_{C(\mathbb{R})}} \cdot \omega(t), 2\,\|f \circ \exp\|_{L_\infty(\mathbb{R})}\right\}}{t^{1+\alpha}}dt =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{\mathcal{M}_\pm} \frac{\min\left\{\|f\|_{\mathcal{H}^{\omega}_{C(\mathbb{R}_+)}} \cdot \omega(|\ln u|), 2\,\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\right\}}{|\ln u|^{1+\alpha}}\frac{du}{u}. \tag{4.47}$$

Далі будемо вважати, що $0 < h < 1$ для $\mathfrak{D}^{\alpha}_{+}$ і $h > 1$ для $\mathfrak{D}^{\alpha}_{-}$. Позначимо $\mathcal{V}^h_+ = (h, 1)$, де $0 < h < 1$ і $\mathcal{V}^h_- = (1, h)$, де $h > 1$. За допомогою заміни змінних з (4.43) при $p = 1$ отримаємо:

$$\|\mathfrak{D}^{\alpha}_{\pm}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} = \|D^{\alpha}_{\pm}(f \circ \exp)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\|f \circ \exp\|_{H^{\omega}_{C(\mathbb{R}_+)}} \int\limits_0^{h_1} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}}dt + 2\,\|f \circ \exp\,\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \frac{h_1^{-\alpha}}{\alpha}\right] \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[2\,\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \frac{|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha} + \|f\|_{\mathcal{H}^{\omega}_{C(\mathbb{R}_+)}} \int\limits_{\mathcal{V}^h_\pm} \frac{\omega(|\ln t|)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right]. \tag{4.48}$$

Нерівності (4.47) і (4.48) перетворюються на рівності для функції

$$f^+_h(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\omega(|\ln h|), & 0 < t < h, \\ \frac{1}{2}\omega(|\ln h|) - \omega(|\ln t|), & h < t < 1, \\ \frac{1}{2}\omega(|\ln h|), & t > 1, \end{cases} \tag{4.49}$$

у випадку $\mathfrak{D}_+^\alpha$ і

$$f_h^-(t) = f_{h^{-1}}^+(t^{-1}) \qquad (4.50)$$

у випадку $\mathfrak{D}_-^\alpha$.

Таким чином, доведено таку теорему.

Теорема 4.3.5. *Нехай $0 < \alpha < 1$, $\omega(t)$ – модуль неперервності такий, що виконується умова (4.46). Для будь-якої функції $f \in \mathcal{H}_{C(\mathbb{R}_+)}^\omega$ правильні точні нерівності:*

$$\|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{\mathcal{M}_\pm} \frac{\min\left\{\|f\|_{\mathcal{H}_{C(\mathbb{R}_+)}^\omega} \cdot \omega(|\ln t|), 2\,\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\right\}}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}, \qquad (4.51)$$

$$\|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[2\,\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \frac{|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha} + \|f\|_{\mathcal{H}_{C(\mathbb{R}_+)}^\omega} \int\limits_{\mathcal{V}_\pm^h} \frac{\omega(|\ln t|)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}\right],$$

з екстремальними функціями (4.49) і (4.50) для $\mathfrak{D}_+^\alpha$ і $\mathfrak{D}_-^\alpha$ відповідно. Зокрема, якщо $\omega(t) = t^\beta$, $0 < \alpha < \beta \leq 1$, то

$$\|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{2^{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha/\beta)} \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}^{1-\alpha/\beta} \cdot \|f\|_{\mathcal{H}_{C(\mathbb{R}_+)}^\beta}^{\alpha/\beta}$$

з екстремальними функціями:

$$f_h^+(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(|\ln h|)^\beta, & 0 < t < h, \\ \frac{1}{2}(|\ln h|)^\beta - (|\ln t|)^\beta, & h < t < 1, \\ \frac{1}{2}(|\ln h|)^\beta, & t > 1, \end{cases}$$

і $f_h^-(t) = f_{h^{-1}}^+(t^{-1})$ для $\mathfrak{D}_+^\alpha$ і $\mathfrak{D}_-^\alpha$ відповідно.

Нехай тепер $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}^\omega$. Неважко бачити, що $f \circ \exp \in H_{L_p(\mathbb{R})}^\omega$, і при цьому виконуються співвідношення:

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)} = \|f \circ \exp\|_{L_p(\mathbb{R})}, \|\mathfrak{D}_\pm^\alpha f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)} = \|D_\pm^\alpha (f \circ \exp)\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

$$\|f\|_{\mathcal{H}^{\omega}_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}} = \|f \circ \exp\|_{H^{\omega}_{L_p(\mathbb{R})}}.$$

Тоді із нерівності (4.44) для $1 \le p < \infty$, використовуючи заміну змінних, отримаємо:

$$\|\mathfrak{D}^{\alpha}_{\pm} f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)} = \|D^{\alpha}_{\pm} f \circ \exp\|_{L_p(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{\infty} \frac{\min\left\{2\,\|f \circ \exp\|_{L_p(\mathbb{R})}, \|f \circ \exp\|_{H^{\omega}_{L_p(\mathbb{R})}} \omega(t)\right\}}{t^{1+\alpha}} dt =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{\mathcal{M}_{\pm}} \frac{\min\left\{2\,\|f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}, \|f\|_{\mathcal{H}^{\omega}_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}} \omega(|\ln u|)\right\}}{|\ln u|^{1+\alpha}} \frac{du}{u}, \qquad (4.52)$$

а із (4.43):

$$\|\mathfrak{D}^{\alpha}_{\pm} f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)} = \|D^{\alpha}_{\pm} (f \circ \exp)\|_{L_{\infty}(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\|f \circ \exp\|_{H^{\omega}_{L_p(\mathbb{R}_+)}} \int\limits_0^{h_1} \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt + 2\,\|f \circ \exp\|_{L_p(\mathbb{R}_+)} \frac{h_1^{-\alpha}}{\alpha} \right] \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[2\,\|f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)} \frac{|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha} + \|f\|_{\mathcal{H}^{\omega}_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}} \int\limits_{\mathcal{V}^h_{\pm}} \frac{\omega(|\ln t|)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right]. \qquad (4.53)$$

Якщо $p = 1$ і $\omega(t)$ – локально абсолютно неперервна функція, то для функції

$$f_h^+(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega'(|\ln t|), & t \in (h,1), \\ 0, & t \notin (h,1), \end{cases} \qquad (4.54)$$

у випадку $\mathfrak{D}^{\alpha}_{+}$ і

$$f_h^-(t) = f^+_{h^{-1}}(t^{-1}) \qquad (4.55)$$

у випадку $\mathfrak{D}^{\alpha}_{-}$, нерівності (4.52) і (4.53) перетворюються на рівності. Отже, ми довели таку теорему.

Теорема 4.3.6. *Нехай $0 < \alpha < 1$, $\omega(t)$ – модуль неперервності такий, що виконується умова (4.46). Для будь-якої функції $f \in \mathcal{H}^{\omega}_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}$, $1 \le p < \infty$, правильні нерівності:*

$$\|\mathfrak{D}^{\alpha}_{\pm} f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)} \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{\mathcal{M}_{\pm}} \frac{\min\left\{2\,\|f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}, \|f\|_{\mathcal{H}^{\omega}_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}} \omega(|\ln t|)\right\}}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t},$$

$$\|\mathfrak{D}^\alpha_\pm f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)} \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[2\, \|f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)} \frac{|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha} + \|f\|_{H^\omega_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}} \int\limits_{\mathcal{V}^h_\pm} \frac{\omega(|\ln t|)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right].$$

Якщо $p = 1$ і $\omega(t)$ – локально абсолютно неперервна функція, то нерівності є точними з екстремальними функціями (4.54) і (4.55) для $\mathfrak{D}^\alpha_+$ і $\mathfrak{D}^\alpha_-$ відповідно.

Зокрема, якщо $\omega(t) = t^\beta$, $0 < \alpha < \beta \le 1$, то

$$\|\mathfrak{D}^\alpha_\pm f\|_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)} \le \frac{2^{1-\frac{\alpha}{\beta}}}{\Gamma(1-\alpha)(1-\alpha/\beta)} \|f\|^{1-\alpha/\beta}_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \cdot \|f\|^{\alpha/\beta}_{\mathcal{H}^\beta_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}}. \tag{4.56}$$

У випадку $p = 1$ нерівності (4.56) є точними з екстремальними функціями

$$f^+_h(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{2}(|\ln t|)^{\beta-1}, & t \in (h, 1), \\ 0, & t \notin (h, 1), \end{cases}$$

у випадку $\mathfrak{D}^\alpha_+$ і $f^-_h(t) = f^+_{h^{-1}}(t^{-1})$ у випадку $\mathfrak{D}^\alpha_-$.

Розглянемо тепер деякі застосування отриманих нерівностей.

Нехай $\Omega_\pm(\delta, U\mathcal{H}^\omega_X)$ – модуль неперервності для операторів $\mathfrak{D}^\alpha_\pm$ відповідно. Із двох останніх теорем легко отримати оцінку для $\Omega_\pm(\delta, U\mathcal{H}^\omega_X)$.

Теорема 4.3.7. *Нехай $1 \le p \le \infty$, $X = \{C(\mathbb{R}_+), \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)\}$, $\alpha \in (0,1)$ і $\omega(t)$ – деякий модуль неперервності, що задовольняє умови (4.46) і при $X = \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)$ є локально абсолютно непрерывною функциею. Тоді на класі функцій $U\mathcal{H}^\omega_X$ при будь-якому $\delta > 0$*

$$\Omega_\pm(\delta, U\mathcal{H}^\omega_X) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{\mathcal{M}_\pm} \frac{\min\{\omega(|\ln u|), 2\delta\}}{|\ln u|^{1+\alpha}} \frac{du}{u},$$

якщо $X = \{C(\mathbb{R}_+), \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)\}$ і

$$\Omega_\pm(\delta, U\mathcal{H}^\omega_X) \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{\mathcal{M}_\pm} \frac{\min\{\omega(|\ln u|), 2\delta\}}{|\ln u|^{1+\alpha}} \frac{du}{u},$$

якщо $X = \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$.

Зокрема, якщо $\omega(t) = t^\beta$, $0 < \alpha < \beta \le 1$, то

$$\Omega_\pm(\delta, U\mathcal{H}^\beta_X) = \frac{(2\delta)^{1-\alpha/\beta}}{(1-\alpha/\beta)\Gamma(1-\alpha)},$$

при $X = \{C(\mathbb{R}_+), \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)\}$ *і*

$$\Omega_\pm(\delta, U\mathcal{H}_X^\beta) \le \frac{(2\delta)^{1-\alpha/\beta}}{(1-\alpha/\beta)\Gamma(1-\alpha)}$$

при $X = \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$.

Перейдемо тепер до розв'язку задачі про наближення оператора дробового диференціювання за Адамаром. Має місце така

Теорема 4.3.8. *Нехай* $X = \{C(\mathbb{R}_+), \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)\}$, $\alpha \in (0,1)$ *і* $\omega(t)$ *– деякий модуль неперервності, що задовольняє умову (4.46) і при* $X = \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)$ *є локально абсолютно неперервною функцією. Нехай* $h_N \in \mathbb{R}_+$ *для заданого* $N > 0$ *задовольняє умову*

$$\frac{2}{\Gamma(1-\alpha)} \left|\ln h_N\right|^{-\alpha} = N. \tag{4.57}$$

Тоді

$$E_N(\mathfrak{D}_\pm^\alpha, U\mathcal{H}_X^\omega) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{\mathcal{V}_\pm^{h_N}} \frac{\omega(|\ln t|)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}.$$

Зокрема, якщо $\omega(t) = t^\beta$, $0 < \alpha < \beta \le 1$, *то*

$$E_N(\mathfrak{D}_\pm^\alpha, U\mathcal{H}_X^\beta) = \left(\frac{2}{N}\right)^{\beta/\alpha - 1} \frac{\alpha}{(\beta-\alpha)\Gamma^{\frac{\beta}{\alpha}}(1-\alpha)}.$$

При цьому екстремальними операторами є

$$(T_{h_N}^+ f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{h_N} \frac{f(x) - f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}, \tag{4.58}$$

$$(T_{h_N}^- f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{h_N}^{\infty} \frac{f(x) - f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \tag{4.59}$$

У випадку $\mathfrak{D}_+^\alpha$ *і* $\mathfrak{D}_-^\alpha$ *відповідно.*

Доведення. Доведемо теорему для випадку дробової похідної $\mathfrak{D}_+^\alpha$.

Покажемо насамперед, що оператор $T_{h_N}^+$ є обмеженим:

$$\left\|T_{h_N}^+ f\right\|_X = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| \int\limits_0^{h_N} \frac{f(x) - f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right\|_X \le$$

$$\leq \frac{2\alpha \|f\|_X}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^{h_N} \frac{dt}{t\,|\ln t|^{1+\alpha}} = N \|f\|_X ,$$

а значить, $\left\|T^+_{h_N}\right\| \leq N$. Одержимо оцінку зверху для найкращого наближення оператора дробової похідної

$$E_N(\mathfrak{D}^\alpha_+, U\mathcal{H}^\omega_X) \leq \left\|\mathfrak{D}^\alpha_+ f - T^+_{h_N} f\right\|_X \leq \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{h_N}^{1} \frac{\omega(|\ln t|)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}.$$

Тепер, використовуючи (4.12) і теорему 4.3.7, отримаємо оцінку знизу

$$E_N(\mathfrak{D}^\alpha_+, U\mathcal{H}^\omega_X) \geq \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^1 \frac{\min\{\omega(|\ln t|), 2\delta\}}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} - N\delta.$$

Звідси, обираючи $\delta = \dfrac{1}{2}\omega(h_N)$ і враховуючи (4.57), отримаємо

$$E_N(\mathfrak{D}^\alpha_+, U\mathcal{H}^\omega_X) \geq \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\int\limits_0^{h_N} \frac{\omega(|\ln h_N|)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} + \int\limits_{h_N}^{1} \frac{\omega(|\ln t|)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right] - \frac{1}{2}\omega(h_N)N =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{h_N}^{1} \frac{\omega(|\ln t|)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}.$$

Отже,

$$E_N(\mathfrak{D}^\alpha_+, U\mathcal{H}^\omega_X) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{h_N}^{1} \frac{\omega(|\ln t|)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}.$$

Для похідної $\mathfrak{D}^\alpha_-$ доведення аналогічне.

Теорема доведена.

За допомогою теорем 4.1.2 і 4.3.7 отримаємо розв'язок задачі оптимального відновлення операторів дробового диференціювання $\mathfrak{D}^\alpha_\pm$ на класах $U\mathcal{H}^\omega_{\mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)}$ і $U\mathcal{H}^\omega_{C(\mathbb{R}_+)}$.

Теорема 4.3.9. *В умовах теореми 4.3.8 для будь-якого $\delta > 0$ правильні рівності:*
на класі $U\mathcal{H}^\omega_X$

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{D_\pm} \frac{\min\{\omega(|\ln u|), 2\delta\}}{|\ln u|^{1+\alpha}} \frac{du}{u},$$

на класі $U\mathcal{H}_X^\beta$, $0<\alpha<\beta\le 1$,

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{L})=\frac{(2\delta)^{1-\alpha/\beta}}{(1-\alpha/\beta)\Gamma(1-\alpha)}.$$

При цьому екстремальними операторами є (4.58) і (4.59) Для випадку $\mathfrak{D}_+^\alpha$ *і* $\mathfrak{D}_-^\alpha$ *відповідно.*

4.4. Нерівності типу Колмогорова для норм узагальнених потенціалів Феллера

В даному підрозділі ми отримаємо точні нерівності, що оцінюють норми узагальнених потенциалів Феллера функцій, заданих на всій дійсній осі.

Наведемо деякі означення і позначення.

Нехай μ_F – міра на $\mathbb{R}$, породжена функцією з обмеженою варіацією F. Інтеграл Лебега-Стілтьєса, взятий за мірою μ_F, що відповідає функції F, будемо позначати

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dF(x) \tag{4.60}$$

(див. [115]). Зазначимо, що якщо f неперервна на $\mathbb{R}$, то (4.60) збігається з інтегралом Рімана-Стілтьєса і має місце оцінка:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\,dF(x)\le\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\cdot\bigvee_{\mathbb{R}}[F].$$

Якщо до того ж F – абсолютно неперервна функція, то замість (4.60) будемо використовувати рівний йому інтеграл Лебега

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)F'(x)\,dx.$$

Нехай $\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ простір вимірних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Лінійний простір $E\subset\mathfrak{S}(\mathbb{R})$, наділений нормою $\|\cdot\|_E$, називається ідеальною структурою (див.[138, розд. 2, §2]), якщо для кожної функції $f\in E$ і $g\in\mathfrak{S}(\mathbb{R})$ такої, що $|g(x)|\le|f(x)|$ майже скрізь на $\mathbb{R}$ випливає, що $g\in E$ і $\|g\|_E\le\|f\|_E$.

Множина $A(E) \subset \mathbb{R}$ називається носієм ідеальної структури E, якщо $f(x) = 0$ для всіх $f \in E$ і $x \notin A(E)$. Через E^1 позначимо асоційований до E підпростір (див. [138, розд. 2, §3]), тобто підростір функцій $g \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ таких, що $\mathrm{supp} g \subset A(E)$ і

$$\|g\|_{E^1} := \sup_{\substack{f \in E \\ \|f\|_E \le 1}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx < \infty.$$

Зрозуміло, що E^1 – ідеальна структура на $\mathbb{R}$ і є підпростором в просторі, спряженому до E. Ідеальні структури узагальнюють багато важливих просторів, наприклад, простори $L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, простори Орліча [136], простори Лоренца [138], простори Марцинкевича [138] та інші.

Ми будемо також називати ідеальні структури E півінваріантними відносно зсуву, якщо для всіх $f \in E$ і $x \in \mathbb{R}$ $f(\cdot + x) \in E$ і $\|f(\cdot + x)\|_E = \|f\|_E$.

Нехай $F, E \subset \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ – ідеальні структури. Для $r \in \mathbb{N}$ через $L^r_{F,E}(\mathbb{R})$ позначимо простір функцій $f \in F$ таких, що $f^{(r-1)}$ – локально абсолютно неперервна на $\mathbb{R}$ і $f^{(r)} \in E$. При цьому, якщо $F = L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, будемо використовувати позначення $L^r_{p,E}(\mathbb{R})$, а якщо $E = L_s(\mathbb{R})$, $1 \le s \le \infty$, то отримаємо простори $L^r_{p,s}(\mathbb{R})$.

Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дробові інтеграли порядку $0 < \alpha < 1$ [184, §5] визначаються в такий спосіб:

$$I^{\alpha}_{+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha}}\,dt, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$I^{\alpha}_{-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x}^{\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(x+t)}{t^{1-\alpha}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{f(x-t)}{|t|^{1-\alpha}}\,dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

Для $0 < \alpha < 1$ розглянемо інтеграл [184, §12]

$$(I^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{|t-x|^{1-\alpha}}\, dt,$$

який називають потенціалом Рісса.

Неважко бачити, що

$$(I^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t)}{|t|^{1-\alpha}}\, dt = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}} (I_{+}^{\alpha} + I_{-}^{\alpha}).$$

Нехай u, v – довільні сталі із $\mathbb{R}$. Потенціалом Феллера [266] (див. також [184, §12]) порядку $0 < \alpha < 1$ функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будемо називати

$$M_{u,v}^{\alpha} f(x) = u I_{+}^{\alpha} f(x) + v I_{-}^{\alpha} f(x).$$

Зазначимо, що при $u = v = 1$ ми отримаємо потенціали Рісса (з точністю до нормуючого множника).

Нехай функція φ визначена на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ і задовольняє такі умови:

1) $\text{supp}\varphi = (-\infty, 0)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = 0$;

3) φ монотонна на $(-\infty, 0)$;

4) φ локально інтегровна на $\mathbb{R}$;

5) φ' інтегровна на $(-\infty, -\varepsilon]$ для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Нехай функція $\psi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ задовольняє такі умови:

1) $\text{supp}\psi = (0; +\infty)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$;

3) ψ монотонна на $(0, +\infty)$;

4) ψ локально інтегровна на $\mathbb{R}$;

5) ψ' інтегровна на $[\varepsilon, +\infty)$ для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Побудуємо функцію $K(x) = \varphi(x) + \gamma\psi(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ означимо оператор згортки:

$$(M_{\varphi,\psi,\gamma}) f(x) = (K * f)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t-x) f(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t) f(t+x)\, dt.$$

Відзначимо, що при

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{u}{\Gamma(\alpha)|t|^{1-\alpha}}, & t\in(-\infty,0),\\ 0, & t\in(0,+\infty)\end{cases}$$

$$\gamma\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{v}{\Gamma(\alpha)|t|^{1-\alpha}}, & t\in(0,+\infty),\\ 0, & t\in(-\infty,0)\end{cases}$$

$K*f = M^{\alpha}_{u,v}f$ (зокрема, при $u=v=1$ – це потенціал Рісса). Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\varphi(x)\geq 0$ для будь-якого $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ і $\psi(x)\geq 0$ для будь-якого $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Означимо для $h>0$ оператор $M_{\varphi,\psi,\gamma,h}$ в такий спосіб. Виберемо $h_1,h_2\in\mathbb{R}$ так, щоб $h_2-h_1=2h$. Ядро K_h оператора задамо так:

$$K_h(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in(-\infty,h_1);\\ K(h_1), & x\in[h_1,0);\\ K(h_2), & x\in(0,h_2];\\ \gamma\psi(x), & x\in(h_2,+\infty).\end{cases} \tag{4.61}$$

Тоді

$$(M_{\varphi,\psi,\gamma,h})f(x)=(K_h*f)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_h(t)f(t+x)\,dt.$$

Отримаємо оцінку рівномірної норми узагальненого потенціала Феллера похідної функції $f\in L^1_{\infty,E}(\mathbb{R})$.

Для $h>0$ і для кожного $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$(K*f')(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(t)f'(x+t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_h(t)f'(x+t)\,dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(K-K_h)(t)f'(x+t)\,dt$$

Після інтегрування частинами в першому інтегралі отримаємо:

$$(K*f')(x)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\,dK_h(t)+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(K-K_h)(t)f'(x+t)\,dt \tag{4.62}$$

Розглянемо спочатку випадок $\gamma > 0$. В цьому випадку виберемо h_1 і h_2 так, щоб для ядра оператора $M_{\varphi,\psi,\gamma,h}$ було $K(h_1) = K(h_2)$. Тоді ядро K_h оператора $M_{\varphi,\psi,\gamma,h}$ набуде вигляду:

$$K_h(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in (-\infty, h_1); \\ K(h_1), & x \in [h_1, h_2] \setminus \{0\}; \\ \gamma\psi(x), & x \in (h_2, +\infty). \end{cases} \tag{4.63}$$

Для кожного $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $h > 0$ з урахуванням (4.62) маємо:

$$|(M_{\varphi,\psi,\gamma} f')(x)| \leq |\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K'_h(t) f(x+t)\, dK_h(t)| + |\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (K - K_h)(t) f'(x+t)\, dt| \leq$$

$$\leq \bigvee_{\mathbb{R}} [K_h] \cdot \|f\|_\infty + \|K - K_h\|_{E^1} \cdot \|f'\|_E.$$

Тоді

$$\|M_{\varphi,\psi,\gamma} f'\|_\infty \leq \bigvee_{\mathbb{R}} [K_h] \cdot \|f\|_\infty + \|K - K_h\|_{E^1} \cdot \|f'\|_E. \tag{4.64}$$

Припустимо, що існує невід'ємна фукція g_0, з носієм $\operatorname{supp} g_0 = [h_1, h_2] \setminus \{0\}$ і з нормою $\|g_0\|_E = 1$, така що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (K - K_h)(t) g_0(t)\, dt = \|K - K_h\|_{E^1}. \tag{4.65}$$

Означимо функцію $g(t)$ в такий спосіб:

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \displaystyle\int\limits_{h_1}^{h_2} g_0(\tau)\, d\tau, & t \in (-\infty, h_1); \\ \dfrac{1}{2} \displaystyle\int\limits_{h_1}^{h_2} g_0(\tau)\, d\tau - \int\limits_{h_1}^{t} g_0(\tau)\, d\tau, & t \in [h_1, h_2]; \\ -\dfrac{1}{2} \displaystyle\int\limits_{h_1}^{h_2} g_0(\tau)\, d\tau, & t \in (h_2, +\infty). \end{cases} \tag{4.66}$$

Зрозуміло, що $g \in L^1_{\infty,E}(\mathbb{R})$, $\|g'\|_E = 1$, $\|g\|_\infty = \dfrac{1}{2}\int\limits_{h_1}^{h_2} g_0(\tau)\,d\tau$. Обчислимо безпосередньо $|(M_{\varphi,\psi,\gamma}g')(0)|$:

$$|(M_{\varphi,\psi,\gamma}g')(0)| = \Big| -\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dK_h(t) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (K-K_h)g'(t)\,dt\Big| =$$

$$= \|g\|_\infty \bigvee_{\mathbb{R}} [K_h] + \|K-K_h\|_{E^1}.$$

Отже, ми встановили, що оцінка (4.64) є точною.

Припустимо тепер, що функції $g_0(t)$ не існує. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться функція $g_{0,\varepsilon}$ така, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (K-K_h)(t) g_{0,\varepsilon}(t)\,dt > \|K-K_h\|_{E^1} - \varepsilon.$$

Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $g_{0,\varepsilon}(t)$ – невід'ємна, $\mathrm{supp} g_{0,\varepsilon} = [h_1,h_2] \setminus \{0\}$ і $\|g_{0,\varepsilon}\|_E = 1$.

Означимо функцію $g_\varepsilon(t)$ рівністю (4.66) з функцією $g_{0,\varepsilon}$ замість g_0.

Неважко бачити, що $g_\varepsilon \in L^1_{\infty,E}$, $\|g'_\varepsilon\|_E = 1$, $\|g_\varepsilon\|_\infty = \dfrac{1}{2}\int\limits_{h_1}^{h_2} g_{0,\varepsilon}(\tau)\,d\tau$.

Так само, як і вище, встановлюємо правильність оцінки

$$\|M_{\varphi,\psi,\gamma}g'_\varepsilon\|_\infty \geq |(M_{\varphi,\psi,\gamma}g'_\varepsilon)(0)| > \|g_\varepsilon\|_\infty \bigvee_{\mathbb{R}} [K_h] + \|K-K_h\|_{E^1} - \varepsilon.$$

Оскільки ε – довільне як завгодно мале додатне число, можемо стверджувати, що нерівність (4.64) є точною.

Нехай тепер $\gamma < 0$. Як і в попередньому випадку, можемо показати, що має місце оцінка (4.64), де K_h означене в такий спосіб. Для будь-якого $h > 0$ покладемо $h_1 = -h$, $h_2 = h$ і

$$K_h(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in (-\infty, -h); \\ K(-h), & x \in [-h, 0); \\ K(h), & x \in (0, h]; \\ \gamma\psi(x), & x \in (h, +\infty). \end{cases} \tag{4.67}$$

Для дослідження питання про точність цієї оцінки припустимо, що існує непарна, невід'ємна на $(0,h]$ функція g_0, $\mathrm{supp} g_0 = [-h,h]\backslash\{0\}$, $\|g_0\|_E = 1$, така що виконується умова (4.65).

Означимо функцію $g(t)$ в такий спосіб:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int\limits_0^h g_0(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t g_0(\tau)\,d\tau, & t \in [-h,h]\setminus\{0\}; \\ -\frac{1}{2}\int\limits_0^h g_0(\tau)\,d\tau, & t \in \mathbb{R}\setminus[-h,h]. \end{cases} \tag{4.68}$$

Зрозуміло, що $g \in L^1_{\infty,E}$, $\|g'\|_E = 1$, $\|g\|_\infty = \frac{1}{2}\int\limits_0^h g_0(\tau)\,d\tau$. Обчислимо безпосередньо $|(M_{\varphi,\psi,\gamma}g')(0)|$:

$$|(M_{\varphi,\psi,\gamma}g')(0)| = \Big| -\int\limits_{-\infty}^{\infty} K'_h g(t)\,dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (K-K_h)g'(t)\,dt\Big| =$$

$$= \|g\|_\infty \bigvee_{\mathbb{R}}[K_h] + \|K-K_h\|_{E^1}.$$

Отже, ми встановили, що оцінка (4.64) є точною і в цьому випадку.

Припустимо тепер, що функції $g_0(t)$ не існує. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться функція $g_{0,\varepsilon}$ така, що

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (K-K_h)(t) g_{0,\varepsilon}(t)\,dt > \|K-K_h\|_{E^1} - \varepsilon.$$

Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $g_{0,\varepsilon}(t)$ – непарна, невід'ємна на $(0,h]$, $\mathrm{supp} g_{0,\varepsilon} = [-h,h]\setminus\{0\}$ і $\|g_{0,\varepsilon}\|_E = 1$.

Означимо фунуцію $g_\varepsilon(t)$ рівністю (4.68) с функцією $g_{0,\varepsilon}$ замість g_0.

Неважко бачити, що $g_\varepsilon \in L^1_{\infty,E}$, $\|g'_\varepsilon\|_E = 1$, $\|g_\varepsilon\|_\infty = \frac{1}{2}\int\limits_0^h g_{0,\varepsilon}(\tau)\,d\tau$.

Так само, як і вище, встановлюємо правильність оцінки

$$\|M_{\varphi,\psi,\gamma}g'_\varepsilon\|_\infty \geq |(M_{\varphi,\psi,\gamma}g'_\varepsilon)(0)| > \|g_\varepsilon\|_\infty \bigvee_{\mathbb{R}}[K_h] + \|K-K_h\|_{E^1} - \varepsilon.$$

Оскільки ε – довільне наскільки завгодно мале додатне число, можемо стверджувати, що нерівність (4.64) є точною.

Тепер можемо сформулювати теорему

Теорема 4.4.1. *Нехай $h > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$; φ і ψ задовольняють наведені вище умови, K_h означене рівністю (4.63) при $\gamma > 0$ і рівністю (4.67) при $\gamma < 0$, E– ідеальна півінваріантна відносно зсуву структура на $\mathbb{R}$, E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді для довільних $f \in L^1_{\infty,E}(\mathbb{R})$ і $h > 0$ виконується точна нерівність*

$$\|M_{\varphi,\psi,\gamma} f'\|_\infty \le \bigvee_{\mathbb{R}} [K_h] \cdot \|f\|_\infty + \|K - K_h\|_{E^1} \cdot \|f'\|_E.$$

Якщо існує функція g_0, що задовольняє умову (4.65), то нерівність перетворюється на рівність для функції g, означеної рівністю (4.66) при $\gamma > 0$ і (4.68) при $\gamma < 0$.

Тепер наведемо деякі частинні випадки теореми 4.4.1.

Нехай $E = L_s(\mathbb{R})$, $1 \le s \le \infty$. В цьому випадку нерівність (4.64) набуває вигляду

$$\|M_{\varphi,\psi,\gamma} f'\|_\infty \le \bigvee_{\mathbb{R}} [K_h] \cdot \|f\|_\infty + \|K - K_h\|_{s'} \cdot \|f'\|_s, \tag{4.69}$$

де s и s' пов'язані співвідношенням $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, а у випадку $s = \infty$ ми покладаємо $s' = 1$. Для $\gamma > 0$ розглянемо функцію g_0, означену в такий спосіб

$$g_0(t) = \begin{cases} \dfrac{(K(t) - K_h(t))^{s'-1}}{\|K - K_h\|_{s'}^{s'-1}}, & t \in [h_1; h_2] \setminus \{0\}; \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [h_1; h_2]. \end{cases}$$

Тоді функція $g(t)$ матиме такий вигляд

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{h_1}^{h_2} g_0(\tau)\,d\tau, & t \in (-\infty, h_1); \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{h_1}^{h_2} g_0(\tau)\,d\tau - \int_{h_1}^{t} g_0(\tau)\,d\tau, & t \in [h_1, h_2]; \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{h_1}^{h_2} g_0(\tau)\,d\tau, & t \in (h_2, +\infty). \end{cases} \tag{4.70}$$

Для $\gamma < 0$ розглянемо функцію

$$g_0(t) = \begin{cases} \dfrac{|K(t) - K_h(t)|^{s'-1}\mathrm{sign}(K(t) - K_h(t))}{\|K - K_h\|_{s'}^{s'-1}}, & t \in [-h; h] \setminus \{0\}; \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus [-h; h]. \end{cases}$$

І побудуємо функцію

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{0}^{h} g_0(\tau)\,d\tau - \int_{0}^{t} g_0(\tau)\,d\tau, & t \in [-h, h]; \\ -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{0}^{h} g_0(\tau)\,d\tau, & t \in \mathbb{R} \setminus [-h, h]. \end{cases} \tag{4.71}$$

Безпосередньою перевіркою впевнюємось, що нерівність (4.69) перетворюється на рівність для функції g, означеної рівністю (4.70) для $\gamma > 0$ і (4.71) для $\gamma < 0$. Отже, нами доведена

Теорема 4.4.2. *Нехай $h > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$; φ і ψ задовольняють наведені вище умови, K_h означене рівністю (4.63) для $\gamma > 0$ і рівністю (4.67) для $\gamma < 0$, $1 \le s \le \infty$, $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = 1$. Тоді для довільних $f \in L^1_{\infty,s}(\mathbb{R})$ і $h > 0$ виконується точна нерівність*

$$\|M_{\varphi,\psi,\gamma} f'\|_\infty \le \bigvee_{\mathbb{R}} [K_h] \cdot \|f\|_\infty + \|K - K_h\|_{s'} \cdot \|f'\|_s.$$

Нерівність перетворюється на рівність для функції g, означеної рівністю (4.70) для $\gamma > 0$ і (4.71) для $\gamma < 0$.

Тепер отримаємо оцінку норми в ідеальній структурі узагальненого потенціала Феллера.

Нехай $f \in L^1_{E,E}(\mathbb{R})$. Означимо для $h > 0$ оператор $M_{\varphi,\psi,\gamma,h}$ в такий спосіб. Виберемо $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ так, щоб $h_2 - h_1 = 2h$ і $K(h_1) = |K(h_2)|$. Ядро K_h оператора $M_{\varphi,\psi,\gamma,h}$ задамо рівністю (4.61). Для кожного $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $h > 0$ застосуємо формулу (4.62), а потім оцінимо $\|K * f'\|_E$:

$$\|K * f'\|_E \leq \| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\, dK_h(t)\|_E + \| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (K - K_h)(t) f'(x+t)\, dt\|_E \leq$$

$$\leq \bigvee_{\mathbb{R}} [K_h] \cdot \|f\|_E + \|K - K_h\|_1 \cdot \|f'\|_E.$$

Отже, можемо сформулювати теорему

Теорема 4.4.3. *Нехай $h > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$; φ і ψ задовольняють наведені вище умови, E– ідеальна півінваріантна відносно зсуву структура на $\mathbb{R}$, E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді для будь-якої функції $f \in L^1_{E,E}$ і $h > 0$*

$$\|M_{\varphi,\psi,\gamma} f'\|_E \leq \bigvee_{\mathbb{R}} [K_h] \cdot \|f\|_E + \|K - K_h\|_1 \cdot \|f'\|_E. \tag{4.72}$$

Нерівність (4.72) є точною для $E = L_\infty(\mathbb{R})$ і $E = L_1(\mathbb{R})$.

Доведення. Точність нерівності (4.72) для $E = L_\infty(\mathbb{R})$ обговорювалась вище (див. теорему 4.4.2). Розглянемо випадок $E = L_1(\mathbb{R})$. Покажемо, що в цьому випадку нерівність (4.72) буде точною. Нехай спочатку $\gamma > 0$. Для $\varepsilon \in (0, 2h)$ розглянемо функцію Стєклова від функції $\chi_{(-h_1,h_2)}$, тобто

$$f_\varepsilon(x) = S_\varepsilon \chi_{(-h_1,h_2)}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\varepsilon \chi(x+t)\, dt, \ \ \chi \in L_\infty(\mathbb{R})$$

або

$$f_\varepsilon(x)=\begin{cases} 0, & x<h_1-\varepsilon,\\ 1-\dfrac{h_1-x}{\varepsilon}, & h_1-\varepsilon\le x\le h_1,\\ 1, & h_1\le x\le h_2-\varepsilon,\\ \dfrac{h_2-x}{\varepsilon}, & h_2-\varepsilon<x\le h_2,\\ 0, & x>h_2.\end{cases}$$

Для похідної цієї функції маємо

$$f'_\varepsilon(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & h_1-\varepsilon<x<h_1,\\ -\dfrac{1}{\varepsilon}, & h_2-\varepsilon<x<h_2,\\ 0, & \mathbb{R}\setminus\{[h_1-\varepsilon;h_1]\cup[h_2-\varepsilon,h_2]\}.\end{cases}$$

Враховуючи рівності $\|f_\varepsilon\|_1=2h$, $\|f'_\varepsilon\|_1=2$, а також підраховуючи безпосередньо $\|M_{\varphi,\psi,\gamma}f'_\varepsilon\|_1$, неважко переконатись в точності нерівності. Дійсно,

$$(M_{\varphi,\psi,\gamma}f'_\varepsilon)(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t)f'_\varepsilon(x+t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_h(t)f'_\varepsilon(x+t)\,dt+\int\limits_{-\infty}^{\infty}(K(t)-K_h(t))f'_\varepsilon(x+t)\,dt=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_\varepsilon(x+t)\,dK_h(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}(K(t)-K_h(t))f'_\varepsilon(x+t)\,dt.$$

Звернемо увагу на те, що обидва інтеграли від'ємні, і функції під ітегралами зберігають знак. Це означає, що

$$|(M_{\varphi,\psi,\gamma}f'_\varepsilon)(x)|=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_\varepsilon(x+t)|\,dK_h(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|(K(t)-K_h(t))f'_\varepsilon(x+t)|\,dt.$$

Тоді, обчислюючи норму $\|M_{\varphi,\psi,\gamma}f'_\varepsilon\|_1$, маємо

$$\|M_{\varphi,\psi,\gamma}f'_\varepsilon\|_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_\varepsilon(x+t)|\,dK_h(t)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|(K(t)-K_h(t))f'_\varepsilon(x+t)|\,dt\Bigg)\,dx=$$

$$=\bigvee_{\mathbb{R}}[K_h]\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f_\varepsilon(x+t)|\,dx+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|(K-K'_h)(t)|\,dt\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f'_\varepsilon(x+t)|\,dx=$$

$$=2h\bigvee_{\mathbb{R}}[K_h]+2\|K-K_h\|_1=\bigvee_{\mathbb{R}}[K_h]\|f_\varepsilon\|_1+\|K-K_h\|_1\|f'_\varepsilon\|_1.$$

Точність нерівності встановлено. Нехай тепер $\gamma<0$. В якості екстремальної функції розглянемо функцію $g_\varepsilon(x)=\|f_\varepsilon\|_\infty-f_\varepsilon(x)$. Точність нерівності доводиться так само, як в попередньому випадку.

Теорема доведена.

Висновки до розділу 4

Розділ 4 присвячено дослідженню нерівностей типу Колмогорова з непокращуваними константами для норм дробових похідних функцій, означених на дійсній осі або півосі, а також для норм узагальнених потенціалів Феллера від першої похідної функцій, означених на дійсній осі. Результати даного розділу полягають у такому.

Отримано точні нерівності для норм дробових похідних за Маршо функцій $f\in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$, $1\le s\le\infty$, які у випадку $1\le s\le\infty$ оцінюють L_∞–норми похідних порядку $0<\alpha<1$, а у випадку $1<s\le\infty$ – порядку $1<\alpha<2-\dfrac{1}{s}$ через L_∞–норму самої функції і L_s–норму її другої похідної.

Отримано точні нерівності для норм дробових похідних за Адамаром функцій, визначених на дійсній півосі, які у випадку $1\le s\le\infty$ оцінюють L_∞–норми похідних порядку $0<\alpha<1$, а у випадку $1<s\le\infty$ – порядку $1<\alpha<2-\dfrac{1}{s}$ через L_∞–норму самої функції і L_s–норму оператора $\mathfrak{D}^2$ $\left(\mathfrak{D}=x\cdot\dfrac{d}{dx}\right)$.

Для похідних за Адамаром порядку $0<\alpha<1$ одержано деякі точні поточкові оцінки через L_∞–норму самої функції і L_∞–норму її другої похідної або оператора $\mathfrak{D}$, а також нерівності, що оцінюють L_p–норми похідних за Адамаром через L_p–норму та гельдорову норму самої функції.

Встановлено точні нерівності, що оцінюють норми узагальнених потенціалів Феллера першої похідної заданої на дійсній осі функції через L_∞–норму цієї функції і L_s–норму її першої похідної.

Результати цього розділу опубліковані в роботах: [38, 43, 46, 252, 54] (див. також роботи [7, 11, 13, 16, 36] зі списку публікацій здобувача на с. 10–15).

РОЗДІЛ 5

Нерівності Колмогорова для дробових похідних функцій багатьох змінних та їх застосування

5.1. Нерівності типу Колмогорова в багатовимірній ситуації. Огляд результатів

В розділі 4 ми розглянули питання, що стосуються точних нерівностей типу Колмогорова функцій однієї змінної. В даному розділі ми продовжимо дослідження цих питань і зосередимо увагу на таких нерівностях для функцій багатьох змінних. Як уже зазначалось, нерівності типу Колмогорова з точними константами мають велике значення для багатьох напрямів математики. В той самий час більшість сучасних задач є багатовимірними, тому природньо ставити питання про дослідження нерівностей такого типу і для функцій багатьох змінних.

Нехай $\mathbb{R}^m$ – простір точок $t = (t_1, ..., t_m)$, $t_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$, $|t| = (\sum\limits_{i=1}^{m} t_i^2)^{1/2}$ і $\{e_i\}_{i=1}^m$ – стандартний базис в $\mathbb{R}^m$. Нехай $\mathbb{R}^m_+$ – множина точок $t \in \mathbb{R}^m$ таких, що $t_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$.

Через $C(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір неперервних обмежених функцій $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_{C(\mathbb{R}^m)} := \sup\{|f(t)| : \ t \in \mathbb{R}^m\},$$

а через $L_s(\mathbb{R}^m)$, $1 \leq s \leq \infty$, – простір вимірних функцій $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_s(\mathbb{R}^m)} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(t)|^s \, dt \right)^{1/s}, & 1 \leq s < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t \in \mathbb{R}^m} |f(t)|, & s = \infty, \end{cases}$$

Нехай $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\bar{\alpha} \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^m$. Мішану похідну функції f порядку $\bar{\alpha}$ будемо позначати через $D^{\bar{\alpha}} f$, а через $D^{ke_i} f$ позначимо k-ту частинну похідну функції f за i-ю змінною.

Відзначимо, що точних нерівностей типу Колмогорова для функцій багатьох змінних відомо набагато менше, ніж для функцій однієї змінної. Наведемо деякі відомі результати з цієї проблематики.

Для функцій двох змінних В. М. Коноваловим [116] було встановлено непокращувану нерівність

$$\|D^{(1,1)}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le \left(3\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \cdot \|D^{(3,0)}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \cdot \|D^{(0,3)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

О. А. Тімошин [222] одержав непокращувану нерівність

$$\|D^{(1,1)}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le 3^{\frac{2}{3}}2^{\frac{1}{2}}\|f\|^{\frac{1}{6}}_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \cdot \|D^{(3,0)}f\|^{\frac{1}{3}}_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \cdot \|D^{(0,2)}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Наступний результат належить В. Ф. Бабенку [23]:

$$\|D^{(1,1)}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \le \frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}\left(\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \cdot \|D^{(2,1)}f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)} \cdot \|D^{(1,2)}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^2)}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ю. М. Субботіним [203] та Дінь-Дзунгом і В. М. Тихомировим [91] були одержані точні нерівності для L_2-норм похідних періодичних та неперіодичних функцій, а О. П. Буслаєвим і В. М. Тихомировим [67] – точні нерівності для C-норми "проміжної" похідної через L_2-норми "старших" похідних для функцій багатьох змінних, означених на всьому просторі $\mathbb{R}^m$ або напівпросторі $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m-1}$.

Для періодичних функцій багатьох змінних В. Ф. Бабенко, В. О. Кофанов та С. О. Пічугов [253, 254, 255] для деяких спеціальних значень $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^m_+$ довели точну нерівність, що оцінює L_2-норму похідної $D^{\bar{\alpha}}f$ через $\|f\|_{L_\infty}(\mathbb{R}^m)$ і $\prod\limits_{i=1}^{m} \|D^{re_i}f\|^{\frac{\alpha_i}{r}}_{L_\infty}(\mathbb{R}^m)$.

Відзначимо також роботи В. Г. Тимофєєва [219, 220], який отримав аналог нерівності Ландау для функцій з обмеженим в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ лапласіаном.

Історія досліджень багатовимірних нерівностей типу Колмогорова для норм дробових похідних нараховує зовсім небагато результатів, серед яких відзначимо, насамперед, роботи В. Ф. Бабенка і С. О. Пічугова [261, 56]. Ці результати стосуються точних оцінок норм мішаних похідних дробового порядку. В підрозділі 5.2 ми продовжимо ці дослідження. Відзначимо також роботу В. Ф. Бабенка і М. С. Чурілової [251], яка містить нерівності типу Колмогорова для гіперсингулярних інтегралів зі знакосталою характеристикою. Такі інтеграли дозволяють, зокрема, розглядати з однієї точки зору похідні за напрямом і похідні за Ріссом функцій багатьох змінних. Деякі результати, що стосуються близьких питань отримані в [27, 29].

Дослідженню нерівностей типу Колмогорова для похідних за Ріссом функцій багатьох змінних і гіперсингулярних інтегралів присвячено підрозділи 5.3, 5.5, 5.4.

В підрозділі 5.6 ми розглянемо питання про точні оцінки норм одновимірних потенціалів Рісса функцій багатьох змінних з обмеженим в $L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leq s \leq \infty)$ лапласіаном. Ці результати тісно пов'язані з результатами В. Г. Тимофєєва [219, 220].

Викладення матеріалу побудоване так, що простежується тісний взаємозв'язок задачі про точні нерівності типу Колмогорова і задачі Стєчкіна про наближення необмеженого оператора обмеженими, що віддзеркалюється і в методах доведення відповідних результатів.

До числа інших застосувань нерівностей типу Колмогорова відноситься розв'язання задачі про необхідні і достатні умови існування функції розглядуваного класу, що має задані числа нормами похідних відповідного порядку.

Ця задача поставлена А. М. Колмогоровим [113] і полягає в наступному.

Нехай $n, r \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, і задана система чисел $0 = k_1 < ... < k_n = r$. Вимагається знайти необхідні і достатні умови, яким повинна задовольняти система додатних чисел $M_{k_1}, ..., M_{k_n}$, для того, щоб знайшлась функція $x \in L^r_{\infty,\infty}(\mathbb{R})$, для якої рівність $\|x^{(k_j)}\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = M_{k_j}$ справедлива для всіх $j = 1, ..., n$.

Для наборів із трьох чисел $(n = 3)$ ця задача була розв'язана Ж. Адамаром [270] (для $r = 2$) і Г. Є. Шиловим [242] (для $r = 3, 4$ та для $r = k_3 = 5$ і $k_2 = 2$). Повний розв'язок для трійок чисел належить

А. М. Колмогорову [273, 113, 114].

Для систем чисел $M_{k_1}, ..., M_{k_n}$, що складаються з більше, ніж трьох елементів, відзначимо результати А. М. Родова [180, 181] та В. К. Дзядика і В. А. Дубовіка [89, 90].

Зрозуміло, що задачу Колмогорова можна ставити не лише на класах функцій, означених на осі, а і з різними областями визначення, крім того, рівномірні норми можна замінити іншими.

Стосовно подальшого розвитку цієї проблематики відзначимо дослідження В. М. Оловянішнікова [167], В. Ф. Бабенка і Ю. Є. Брітвіна [249], В. Ф. Бабенка і Ю. В. Бабенко [248], Д. С. Скороходова [188], О. В. Коваленка [112].

В підрозділах 5.2, 5.3.1, 5.5.1 ми наводимо приклади розв'язання задач такого типу для функцій багатьох змінних.

Домовимось в межах цього розділу замість $\|\cdot\|_{L_s(\mathbb{R}^m)}$ $(1 \le s \le \infty)$ писати $\|\cdot\|_s$ і $\|\cdot\|_C$ замість $\|\cdot\|_{C(\mathbb{R}^m)}$.

5.2. Точні нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів

Для заданого вектора $t = (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m$ через $\Delta_{t_j e_j} f(u)$ позначимо першу різницю функції $f(u)$ за змінною u_j з кроком t_j, $j = 1, ..., m$

$$\Delta_{t_j e_j} f(u) := f(u) - f(u + t_j e_j),$$

і означимо через

$$\Delta_t f(u) := \Delta_{t_1 e_1} \Delta_{t_2 e_2} ... \Delta_{t_m e_m} f(u)$$

мішану різницю функції $f(u)$ з кроком t.

Нехай $\omega_j(t_j)$, $t_j \ge 0$, $j = 1, ..., m$ – деякі модулі неперервності. Ми будемо розглядати такі простори:

$$H^{j,\omega_j} := H^{j,\omega_j}(\mathbb{R}^m) =$$

$$= \{f \in C(\mathbb{R}^m) : \|f\|_{\omega_j} = \|f\|_{H^{j,\omega_j}} = \sup_{t_j \neq 0} \frac{\|\Delta_{t_j e_j} f(\cdot)\|_{C(\mathbb{R}^m)}}{\omega_j(|t_j|)} < \infty\}.$$

Якщо $\omega_j(t_j) = t_j^{\beta_j}$, $\beta_j \in (0,1]$, то замість H^{j,ω_j}, $j = 1, ..., m$ будемо писати H^{j,β_j}.

Для функції $f(u)$, $u \in \mathbb{R}^m$, вектора гладкості $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., m$, і вектора розподілу знаків $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \pm$, $j = 1, ..., m$, мішана похідна Маршо порядку α означається в такий спосіб (див. [184, с. 347])

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(u) := A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \Delta_{\varepsilon t} f(u) \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt,$$

де $f \in C(\mathbb{R}^m)$, $A_\alpha = \prod\limits_{j=1}^m A_{\alpha_j}$, $A_{\alpha_j} = \dfrac{\alpha_j}{\Gamma(1-\alpha_j)}$, $\varepsilon t := (\varepsilon_1 t_1, ..., \varepsilon_m t_m)$.

В. Ф. Бабенко і С. О. Пічугов [56] показали, що для довільної функції $f \in \bigcap\limits_{j=1}^m H^{j,\beta_j}$, виконується точна нерівність

$$\|D_\varepsilon^\alpha f\|_C \leq \frac{2^{m-1}}{\prod\limits_{j=1}^m \Gamma(1-\alpha_j)} \cdot \frac{2^{1-\sum\limits_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}}}{1 - \sum\limits_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \cdot \|f\|_C^{1-\sum\limits_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \cdot \prod_{j=1}^m \|f\|_{H^{j,\beta_j}}^{\frac{\alpha_j}{\beta_j}}, \qquad (5.1)$$

якщо $\beta_j \in (0,1]$ і $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., m$, задовольняють умови $\sum\limits_{j=1}^m \dfrac{\alpha_j}{\beta_j} < 1$.

Відзначимо, що для $m = 1$ нерівність (5.1) була отримана В. Ф. Бабенком і М. С. Чуріловою [57, 235].

В цьому підрозділі ми отримаємо нерівність, яка є узагальненням (5.1), а також є багатовимірним аналогом нерівності (4.44) (для $p = \infty$) із теореми 4.3.4, отриманої В. Ф. Бабенком і М. С. Чуріловою [57, 235].

У подальшому для $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., m$, і для заданих модулів неперервності $\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)$, ми будемо вимагати виконання таких умов

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{1, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt < \infty. \qquad (5.2)$$

Сформулюємо основний результат цього підрозділу:

Теорема 5.2.1. *Нехай модулі неперервності* $\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)$ *і числа* $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., m$, *такі, що виконується умова (5.2). Тоді для будь-якої функції* $f \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} H^{j,\omega_j}$ *і будь-якого вектора* ε *розподілу знаків, правильна така точна нерівність*

$$\|D_\varepsilon^\alpha f\|_C \leq$$

$$2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\|f\|_C, \|f\|_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., \|f\|_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt. \quad (5.3)$$

Для заданих модулів неперервності $\omega_1, ..., \omega_m$, через UH^{j,ω_j}, $j = 1, ..., m$, позначимо одиничну кулю простору H^{j,ω_j}.

Розглянемо функцію

$$\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^{m} UH^{j,\omega_j}\right) := \sup_{\substack{f \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} UH^{j,\omega_j}, \\ \|f\|_C \leq \delta}} \|D_\varepsilon^\alpha f\|_C\,, \quad \delta \geq 0, \quad (5.4)$$

тобто модуль неперервності оператора D_ε^α на множині $\bigcap\limits_{j=1}^{m} UH^{j,\omega_j}$.

Із теореми 5.2.1 випливає

Наслідок 5.2.1. *В умовах теореми 5.2.1 для будь-якого* $\delta > 0$,

$$\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^{m} UH^{j,\omega_j}\right) =$$

$$= 2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\delta, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt. \quad (5.5)$$

Зокрема, якщо $\beta_j \in (0,1]$ *і* $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., m$, *такі що* $\sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\alpha_j}{\beta_j} < 1$, *то*

$$\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^{m} UH^{j,\beta_j}\right) = \frac{2^{m-1}}{\prod\limits_{j=1}^{m} \Gamma(1-\alpha_j)} \cdot \frac{2^{1-\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}}}{1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \cdot \delta^{1-\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}}.$$

Наступна теорема дає розв'язок задачі Стєчкіна для оператора D_ε^α на класі $\bigcap\limits_{j=1}^{m} UH^{j,\omega_j}$.

Теорема 5.2.2. *Нехай строго зростаючі модулі неперервності* $\omega_1(t_1),\ldots,$ $\omega_m(t_m)$ *є такими, що задовольняють умову (5.2). Для* $N > 0$ *нехай* $h^N = (h_1^N, \ldots, h_m^N) \in \mathbb{R}_+^m$ *таке, що*

$$\omega_1(h_1^N) = \ldots = \omega_m(h_m^N) \qquad \text{і} \qquad \frac{2^m A_\alpha}{\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_m} \prod_{j=1}^m (h_j^N)^{-\alpha_j} = N. \tag{5.6}$$

Нехай

$$G(h^N) := \{u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m \ : \ |u_1| \geq h_1^N, \ldots, |u_m| \geq h_m^N\}.$$

Тоді

$$E_N \left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j} \right) =$$

$$= 2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m \setminus G(h^N)} \min\{\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Зокрема, оператор

$$B_{h^N} f(u) = A_\alpha \int\limits_{G(h^N)} \Delta_{\varepsilon t} f(u) \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt$$

є екстремальним оператором.

Зазначимо, що оцінка знизу для $E_N \left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap\limits_{j=1}^m UH^{j,\omega_j} \right)$ буде отримана за допомогою наслідку 5.2.1. Для того, щоб одержати оцінку зверху для $E_N \left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap\limits_{j=1}^m UH^{j,\omega_j} \right)$ ми оцінимо зверху величину $\|D_\varepsilon^\alpha f - B_{h^N} f\|_C$ на класі $\bigcap\limits_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}$.

Зазначимо також, що у випадку $\omega(t_j) = t_j^{\beta_j}$, $\beta_j \in (0,1]$, $j = 1, ..., m$, застосовуючи теорему 5.2.2, ми негайно одержимо таке твердження.

Наслідок 5.2.2. *Припустимо, що* $\beta_j \in (0,1]$ *і* $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., m$, *задовольняють умови* $\sum\limits_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j} < 1$. *Тоді для довільного* $N > 0$,

$$E_N \left(D_\varepsilon^\alpha, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\beta_j} \right) = \left(\frac{2^{m - \sum\limits_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}}}{\prod\limits_{j=1}^m \Gamma(1-\alpha_j)} \right)^{\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}}} \cdot \frac{\sum\limits_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}}{1 - \sum\limits_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \cdot N^{1 - \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{\beta_j}}}.$$

Як зазначалось вище, нерівності для проміжних похідних також тісно пов'язані з задачею Колмогорова про необхідні і достатні умови існування функції, для якої задані числа є верхніми гранями абсолютних значень їх похідних відповідних порядків (див. [113, 114]). Деякі відомі результати в цьому напрямі можна знайти, наприклад, в [180, 181, 89, 90] і [26].

Ми розглянемо задачу Колмогорова в такій постановці. Потрібно знайти необхідні і достатні умови на числа $M_0, M_\alpha, M_{\omega_1}, ..., M_{\omega_m}$ для існування функції $f \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} H^{j,\omega_j}$, такої що

$$\|f\|_C = M_0, \;\; \|D_\varepsilon^\alpha f\|_C = M_\alpha, \;\; \|f\|_{\omega_1} = M_{\omega_1}, ..., \|f\|_{\omega_m} = M_{\omega_m}.$$

Теорема 5.2.3. *Нехай модулі неперервності $\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)$ і числа $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., m$, такі, що виконується (5.2), і нехай задані числа $M_0, M_\alpha, M_{\omega_1}, ..., M_{\omega_m}$. Для існування функції $f \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} H^{j,\omega_j}$ такої, що*

$$\|f\|_C = M_0, \;\; \|D_\varepsilon^\alpha f\|_C = M_\alpha, \;\; \|f\|_{\omega_1} = M_{\omega_1}, ..., \|f\|_{\omega_m} = M_{\omega_m},$$

необхідно і достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$M_\alpha \leq$$

$$2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2M_0, M_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., M_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt. \qquad (5.7)$$

Наслідок 5.2.3. *Припустимо, що $\beta_j \in (0,1]$ і $\alpha_j \in (0,1)$, $j = 1, ..., m$, задовольняють умови $\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j} < 1$, і нехай задані числа $M_0, M_\alpha, M_{\beta_1}, ..., M_{\beta_m}$. Для існування функції $f \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} H^{j,\beta_j}$ такої, що*

$$\|f\|_C = M_0, \;\; \|D_\varepsilon^\alpha f\|_C = M_\alpha, \;\; \|f\|_{H^{1,\beta_1}} = M_{\beta_1}, \; ..., \; \|f\|_{H^{m,\beta_m}} = M_{\beta_m},$$

необхідно і достатньо, щоб

$$M_\alpha \leq \frac{2^{m-1}}{\prod\limits_{j=1}^{m} \Gamma(1-\alpha_j)} \cdot \frac{2^{1-\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}}}{1 - \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \cdot M_0^{1-\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{\beta_j}} \cdot \prod_{j=1}^{m} M_{H^{j,\beta_j}}^{\frac{\alpha_j}{\beta_j}}.$$

Тепер перейдемо до доведення результатів.

Доведення теореми 5.2.1. Проведемо доведення теореми у випадку $\varepsilon = (+, ..., +)$. Інші ситуації розглядаються аналогічно. Використовуючи означення дробової похідної, отримаємо

$$\forall u \in \mathbb{R}^m \quad |D_\varepsilon^\alpha f(u)| \le A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \|\Delta_t f(\cdot)\|_C \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt. \tag{5.8}$$

Для оцінки норми $\|\Delta_t f\|_C$ будемо використовувати такі нерівності

$$\|\Delta_t f\|_C \le 2^m \|f\|_C$$

і

$$\|\Delta_t f\|_C \le 2^{m-1} \|\Delta_{t_j e_j} f\|_C \le 2^{m-1} \|f\|_{\omega_j} \omega_j(|t_j|), \quad j = 1, ..., m.$$

Зіставляючи ці оцінки, ми отримаємо

$$\|\Delta_t f\|_C \le 2^{m-1} \min\{2\|f\|_C, \|f\|_{\omega_1}\omega_1(|t_1|), ..., \|f\|_{\omega_m}\omega_m(|t_m|)\}.$$

Застосовуючи останню оцінку до правої частини (5.8), одержимо, що $\forall u \in \mathbb{R}^m$

$$|D_\varepsilon^\alpha f(u)| \le$$

$$2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\|f\|_C, \|f\|_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., \|f\|_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt. \tag{5.9}$$

Покажемо тепер, що для кожної функції $f \in \bigcap\limits_{j=1}^m H^{j,\omega_j}$, її дробова похідна $D_\varepsilon^\alpha f(u)$ неперервно залежить від u.

Нехай

$$\omega(f, \theta) := \sup_{|t| < \theta} \|f(\cdot) - f(\cdot + t)\|_C,$$

де $|t| = \sqrt{t_1^2 + ... + t_m^2}$, $t = (t_1, ..., t_m)$.

Застосовуючи (5.9) до різниці $f(u) - f(u + \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}^m$, отримаємо

$$|D_\varepsilon^\alpha f(u) - D_\varepsilon^\alpha f(u + \delta)| \le$$

$$\le 2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\omega(f, |\delta|), 2\|f\|_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., 2\|f\|_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Зазначимо, що функція

$$\min\{2\omega(f,|\delta|), 2\|f\|_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., 2\|f\|_{\omega_m}\omega_m(t_m)\}\prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j-1}$$

рівномірно прямує до нуля (при $\delta \to 0$) на будь-якій множині точок $(t_1, ..., t_m) \in \prod\limits_{j=1}^{m}[\sigma_j, \infty)$, $\sigma_j > 0$, $j = 1, ..., m$, та інтеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\omega(f,|\delta|), 2\|f\|_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., 2\|f\|_{\omega_m}\omega_m(t_m)\}\prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j-1}\,dt$$

є рівномірно збіжним на довільній обмеженій множині значень параметра δ.

Отже,

$$|D_\varepsilon^\alpha f(u) - D_\varepsilon^\alpha f(u+\delta)| \to 0, \quad |\delta| \to 0,$$

що доводить неперервність $D_\varepsilon^\alpha f(u)$ для всіх $u \in \mathbb{R}^m$.

Таким чином, із (5.9) ми отримаємо:

$$\|D_\varepsilon^\alpha f\|_C \leq$$

$$\leq 2^{m-1}A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\|f\|_C, \|f\|_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., \|f\|_{\omega_m}\omega_m(t_m)\}\prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j-1}\,dt,$$

і нерівність (5.3) доведено.

Побудуємо тепер функцію $g(t)$, яка перетворює нерівність (5.3) на рівність. Для цього використаємо метод із [56]. Означимо функцію $g(u)$ для $u \in \mathbb{R}_+^m$, а потім продовжимо її на весь простір $\mathbb{R}^m$ парно за кожною змінною.

Для $u = (u_1, ..., u_m) \in \mathbb{R}_+^m$ і $\delta > 0$, покладемо $\omega_j^\delta(u_j) = \min\{\omega_j(u_j), 2\delta\}$.

Розглянемо вектор $\omega^\delta(u) = (\omega_1^\delta(u_1), ..., \omega_m^\delta(u_m))$ і позначимо $v = v(u) := (v_1(u), ..., v_m(u)) = (\omega^\delta(u))^*$, де $(\omega^\delta(u))^*$ є перестановкою чисел $\omega_1^\delta(u_1), ..., \omega_m^\delta(u_m)$ в незростаючому порядку. Тепер означимо функцію $g(u)$, покладаючи для $u \in \mathbb{R}_+^m$,

$$g(u) = v_1(u) - v_2(u) + ... + (-1)^{m-1}v_m(u) - \delta.$$

Оскільки $0 \le \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}v_j(u) \le 2\delta$, отримаємо $\|g\|_C \le \delta$. Впевнимомось, що $g \in \bigcap_{j=1}^{m} H^{j,\omega_j}$, і оцінимо $\|g\|_{\omega_j}$, $j = 1, ..., m$. Для цього розглянемо різницю

$$g(u+he_j) - g(u) = v_1(u+he_j) - v_2(u+he_j) + ... + (-1)^{m-1}v_m(u+he_j) -$$

$$-(v_1(u) - v_2(u) + ... + (-1)^{m-1}v_m(u)), \quad h > 0.$$

Вектор $u + he_j$ відрізняється від вектора u лише j-ю координатою, яка є більшою за j-ту координату вектора u. Отже, $v(u+he_j)$ відрізняється від $v(u)$ в такий спосіб. Нехай число $\omega_j^\delta(u_j)$ є ν-ю координатою вектора $v(u)$. Тоді існує $\mu \le \nu$ таке що $\omega_j^\delta(u_j + he_j)$ є μ-ю координатою $v(u+he_j)$. Більш того, координати $v(u+he_j)$ співпадають з координатами вектора $v(u)$, якщо їх індекси менші за μ або більші за ν.

Отже,

$$g(u+he_j)-g(u) = (-1)^{\mu-1}\omega_j^\delta(u_j+h)+(-1)^{\mu}v_\mu(u)+...+(-1)^{\nu-1}v_{\nu-1}(u)-$$

$$-(-1)^{\mu-1}v_\mu(u) - ... - (-1)^{\nu-2}v_{\nu-1}(u) - (-1)^{\nu-1}\omega_j^\delta(u_j) =$$

$$= (-1)^{\mu-1}\omega_j^\delta(u_j+h)+2(-1)^{\mu}v_\mu(u)+...+2(-1)^{\nu-1}v_{\nu-1}(u)-(-1)^{\nu-1}\omega_j^\delta(u_j).$$

Оскільки

$$\omega_j^\delta(u_j+h) \ge v_\mu(u) \ge ... \ge v_{\nu-1}(u) \ge \omega_j^\delta(u_j),$$

неважко перевірити, що

$$\omega_j^\delta(u_j) - \omega_j^\delta(u_j+h) \le$$

$$\le (-1)^{\mu-1}\omega_j^\delta(u_j+h)+2(-1)^{\mu}v_\mu(u)+...+2(-1)^{\nu-1}v_{\nu-1}(u)-(-1)^{\nu-1}\omega_j^\delta(u_j) \le$$

$$\le \omega_j^\delta(u_j+h) - \omega_j^\delta(u_j). \tag{5.10}$$

Беручи до уваги, що

$$\omega_j^\delta(u_j+h) - \omega_j^\delta(u_j) \le \omega_j(u_j+h) - \omega_j(u_j) \le \omega_j(h),$$

ми отримаємо $g \in H^{j,\omega_j}$ і $\|g\|_{\omega_j} \le 1$, $j = 1, ..., m$.

Тепер обчислимо $|(D^{\alpha}_{\varepsilon}g)(0)|$, коли $\varepsilon=(+,...,+)$. Для цього спочатку покажемо, що для всіх $t\in\mathbb{R}^m_+$,

$$\Delta_{t_1}...\Delta_{t_m}g(0,...,0)=-2^{m-1}\min\{2\delta,\omega_1(t_1),...,\omega_m(t_m)\}$$
$$=-2^{m-1}\min\{\omega^{\delta}_1(t_1),...,\omega^{\delta}_m(t_m)\}.$$

Доведення проведемо, використовуючи індукцію за m. Для $m=2$ (база індукції), твердження перевіряється безпосередньо.

Оскільки оператори Δ_{t_i} і Δ_{t_j} комутують, обчислюючи $\Delta_{t_1}...\Delta_{t_m}g(0,...,0)$, ми можемо взяти $\Delta_{t_1},...,\Delta_{t_m}$ у зручному порядку. Для визначеності, припустимо, що $\omega^{\delta}_1(t_1)$ найбільше число серед $\omega^{\delta}_1(t_1),...,\omega^{\delta}_m(t_m)$. Будемо обчислювати різницю для t_1 в останню чергу. Зобразимо різницю $\Delta_{t_1}...\Delta_{t_m}g(0,...,0)$ так:

$$\Delta_{t_1}...\Delta_{t_m}g(0,...,0)=\sum_{j_1=0}^{1}\sum_{j_2=0}^{1}....\sum_{j_m=0}^{1}(-1)^{j_1+...+j_m}\cdot g(j_1t_1,j_2t_2,...j_mt_m)=$$
$$=\sum_{j_2=0}^{1}....\sum_{j_m=0}^{1}(-1)^{j_2+...+j_m}\cdot g(0,j_2t_2,...j_mt_m)-$$
$$-\sum_{j_2=0}^{1}....\sum_{j_m=0}^{1}(-1)^{j_2+...+j_m}\cdot g(t_1,j_2t_2,...j_mt_m).$$

За припущенням індукції,

$$\sum_{j_2=0}^{1}....\sum_{j_m=0}^{1}(-1)^{j_2+...+j_m}\cdot g(0,j_2t_2,...j_mt_m)=$$
$$=-2^{m-2}\min\{\omega^{\delta}_2(t_2),...,\omega^{\delta}_m(t_m)\}. \tag{5.11}$$

Використовуючи той факт, що $\omega^{\delta}_1(t_1)$ є найбільшим числом з $\omega^{\delta}_1(t_1),...,\omega^{\delta}_m(t_m)$, і означення g, отримаємо

$$g(t_1,j_2t_2,...j_mt_m)=\omega^{\delta}_1(t_1)-g(0,j_2t_2,...j_mt_m).$$

Отже,

$$-\sum_{j_2=0}^{1}....\sum_{j_m=0}^{1}(-1)^{j_2+...+j_m}(\omega^{\delta}_1(t_1)-g(0,j_2t_2,...j_mt_m))=$$

$$= -2^{m-2}\min\{\omega_2^\delta(t_2), ..., \omega_m^\delta(t_m)\}$$

(тут ми знову використали індуктивне припущення (5.11)). Остаточно ми одержимо

$$\Delta_{t_1}...\Delta_{t_m} g(0, ..., 0) =$$

$$= -2^{m-2}\min\{\omega_2^\delta(t_2), ..., \omega_m^\delta(t_m)\} - 2^{m-2}\min\{\omega_2^\delta(t_2), ..., \omega_m^\delta(t_m)\}$$

$$= -2^{m-1}\min\{\omega_2^\delta(t_2), ..., \omega_m^\delta(t_m)\} = -2^{m-1}\min\{\omega_1^\delta(t_1), \omega_2^\delta(t_2), ..., \omega_m^\delta(t_m)\}.$$

Для $\varepsilon = (+, ..., +)$, оцінимо $\|D_\varepsilon^\alpha g\|_C$ знизу:

$$\|D_\varepsilon^\alpha g\|_C \geq |(D_\varepsilon^\alpha g)(0, ..., 0)| = 2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \prod_{j=1}^m t^{-\alpha_j - 1} \cdot \Delta_t g(0, ..., 0)\, dt =$$

$$= 2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\delta, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t^{-\alpha_j - 1}\, dt \geq$$

$$2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\|g\|_C, \|g\|_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., \|g\|_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt. \quad (5.12)$$

Зіставляючи (5.3) (для функції g) з (5.12), бачимо, що

$$\|D_\varepsilon^\alpha g\|_C = 2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\delta, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t^{-\alpha_j - 1}\, dt =$$

$$2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\|g\|_C, \|g\|_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., \|g\|_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt, \quad (5.13)$$

тобто співвідношення (5.3) перетворюється на рівність.

Теорему доведено.

Доведення наслідку 5.2.1. З рівності (5.3) випливає, що для будь-якого $\delta > 0$,

$$\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right) \leq 2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\delta, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Для функції g, побудованої при доведенні теореми 5.2.1,

$$\|g\|_C \leq \delta, \;\; g \in \bigcap_{j=1}^m H^{j,\omega_j}.$$

Використовуючи (5.13) отримаємо

$$\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^{m} UH^{j,\omega_j}\right) \geq \|D_\varepsilon^\alpha g\|_C =$$

$$= 2^{m-1} A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2\delta, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Наслідок доведено.

Доведення теореми 5.2.2. Як при доведенні теореми 5.2.1 припустимо, що $\varepsilon = (+, ..., +)$. Нагадаємо, що для заданого $N > 0$, вектор $h^N = (h_1^N, ..., h_m^N) \in \mathbb{R}_+^m$ означається такими умовами:

$$\omega_1(h_1^N) = \ldots = \omega_m(h_m^N), \qquad \frac{2^m A_\alpha}{\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_m} \prod_{j=1}^{m} (h_j^N)^{-\alpha_j} = N,$$

і

$$G(h^N) := \{u = (u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m \ : \ u_1 \geq h_1^N, \ldots, u_m \geq h_m^N\}.$$

Означимо оператор B_{h^N} в такий спосіб:

$$B_{h^N} f(u) = A_\alpha \int\limits_{G(h^N)} \Delta_t f(u) \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Покажемо, що B_{h^N} – обмежений оператор з $C(\mathbb{R}^m)$ в $C(\mathbb{R}^m)$, і більше за те: $\|B_{h^N}\| \leq N$. Дійсно, для всіх $f \in C(\mathbb{R}^m)$

$$\|B_{h^N} f\|_C \leq 2^m A_\alpha \int\limits_{G(h^N)} \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt \cdot \|f\|_C =$$

$$= \frac{2^m A_\alpha}{\alpha_1 \cdot ... \cdot \alpha_m} \prod_{j=1}^{m} \left(h_j^N\right)^{-\alpha_j} \|f\|_C = N\|f\|_C.$$

Для будь-якого $f \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} H^{j,\omega_j}$, оцінимо різницю $\|D_\varepsilon^\alpha f - B_{h^N} f\|_C$.

Маємо

$$\|D_\varepsilon^\alpha f - B_{h^N} f\|_C \leq \|A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m \setminus G(h^N)} \Delta_t f(u) \prod_{j=1}^{m} t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt\|_C \leq$$

$$\leq 2^{m-1}A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^m_+\setminus G(h^N)} \min\{\omega_1(t_1),...,\omega_m(t_m)\}\prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1}\,dt.$$

Ми одержали оцінку величини $E_N\left(D^\alpha_\varepsilon, \bigcap\limits_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right)$ зверху.

Оцінимо цю величину знизу. З теореми 4.1.1 маємо

$$E_N\left(D^\alpha_\varepsilon, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right) \geq \sup_{\delta>0}\left\{\Omega\left(\delta, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right) - N\delta\right\}. \tag{5.14}$$

Використовуючи наслідок 5.2.1 і умову (5.6) отримаємо

$$E_N\left(D^\alpha_\varepsilon, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right) \geq$$

$$\geq \sup_{\delta>0}\left\{2^{m-1}A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^m_+} \min\{2\delta,\omega_1(t_1),...,\omega_m(t_m)\}\prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1}\,dt\right.$$

$$\left. -2^m A_\alpha \delta \int\limits_{G(h^N)} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1}\,dt\right\}. \tag{5.15}$$

Покладемо

$$\delta_N = \omega_1(h_1^N) = ... = \omega_m(h_m^N).$$

Зазначимо, що для $t \in G(h^N)$

$$\min\{2\delta_N, \omega_1(t_1),...,\omega(t_m)\} = 2\delta_N$$

і для $t \in \mathbb{R}^m_+ \setminus G(h^N)$,

$$\min\{2\delta_N, \omega_1(t_1),...,\omega(t_m)\} = \min\{\omega_1(t_1),...,\omega(t_m)\}.$$

З (5.15) одержимо

$$E_N\left(D^\alpha_\varepsilon, \bigcap_{j=1}^m UH^{j,\omega_j}\right) \geq$$

$$\geq 2^{m-1}A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^m_+} \min\{2\delta_N,\omega_1(t_1),...,\omega_m(t_m)\}\prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j-1}\,dt-$$

$$-2^{m-1}A_\alpha \int\limits_{G(h^N)} \min\{2\delta_N, \omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt =$$

$$= 2^{m-1}A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m \setminus G(h^N)} \min\{\omega_1(t_1), ..., \omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Ми отримали необхідну оцінку знизу.

Теорему 5.2.2 доведено.

Доведення теореми 5.2.3. Розглянемо випадок $\varepsilon = (+, ..., +)$. Для $\delta > 0$ і модулів неперервності $\omega_1, ..., \omega_m$, через $g(\cdot; \delta; \omega_1, ..., \omega_m)$ позначимо функцію g, побудовану під час доведення теореми 5.2.1. Припустимо, що нерівність (5.7) виконується і оберемо $0 < L_0 \le M_0$ так, щоб

$$M_\alpha = 2^{m-1}A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2L_0, M_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., M_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt.$$

Для функції $g(\cdot; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m)$, маємо

$$\|g(\cdot; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m)\|_C \le L_0 \le M_0.$$

Крім того, неважко перевірити, що

$$\|g(\cdot; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m)\|_{\omega_j} = M_{\omega_j}, \quad j = 1, ..., m.$$

Як і при доведенні теореми 5.2.1, отримаємо

$$\|D_\varepsilon^\alpha g(\cdot; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m)\|_C =$$

$$= 2^{m-1}A_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}_+^m} \min\{2L_0, M_{\omega_1}\omega_1(t_1), ..., M_{\omega_m}\omega_m(t_m)\} \prod_{j=1}^m t_j^{-\alpha_j - 1}\, dt = M_\alpha.$$

Тепер побудуємо функцію

$$\psi(u) = g(u; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m) + M_0 - \|g(\cdot; L_0; M_{\omega_1}\omega_1, ..., M_{\omega_m}\omega_m)\|_C.$$

Очевидно, що $\psi \in \bigcap\limits_{j=1}^m H^{j,\omega_j}$, і, крім того,

$$\|\psi\|_C = M_0, \;\; \|D_\varepsilon^\alpha \psi\|_C = M_\alpha, \;\; \|\psi\|_{\omega_j} = M_{\omega_j}, \;\; j = 1, ..., m.$$

Теорему 5.2.3 доведено.

5.3. Нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних зі скінченною нормою градієнта і деякі їх застосування

Похідна Рісса порядку α, $0 < \alpha < 1$, функції $f:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ визначається рівністю (див. [184, § 25])

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$

де

$$d_{m,1}(\alpha) = \frac{\pi^{1+m/2}}{2^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$

– нормуючий множник [184, § 26]. Зазначимо, що похідна Рісса D^α реалізує [184, § 25] дробовий степінь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

Для функції $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$, локально абсолютно неперервної за кожною змінною при майже всіх фіксованих значеннях решти змінних, означені частинні похідні у змісті Соболєва $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}$ [164, розд. 4, п. 4.1, п. 4.4.4]. Покладемо

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right).$$

Для $1 \le p, s \le \infty$ через $L^\nabla_{p,s} = L^\nabla_{p,s}(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ таких, що $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L_s(\mathbb{R}^m)$ для кожного $i = 1, \ldots, m$. Відзначимо, що якщо $f \in L^\nabla_{p,s}$, то $|\nabla f| \in L_s(\mathbb{R}^m)$. Через $W^\nabla_{p,s} = W^\nabla_{p,s}(\mathbb{R}^m)$ позначимо клас функцій f із $L^\nabla_{p,s}$ таких, що $\|\nabla f\|_{L_s(\mathbb{R}^m)} \le 1$ (тут і скрізь нижче ми пишемо $\|\nabla f\|_{L_s(\mathbb{R}^m)}$ замість $\|\,|\nabla f|\,\|_{L_s(\mathbb{R}^m)}$).

Цей підрозділ присвячено встановленню нерівностей типу Колмогорова для норм похідних Рісса D^α функцій f з деяких просторів.

Дослідження ми почнемо з оцінки L_∞–норми похідної Рісса D^α функцій багатьох змінних через L_∞–норму самої функції і L_s–норму $(1 \le s \le \infty)$ її градієнта, а також розв'яжемо задачу найкращого наближення оператора D^α на класі $W^\nabla_{\infty,s}$ функцій f таких, що $\|\nabla f\|_s \le 1$, і задачу оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Ці результати складають зміст пункту 5.3.1. В пункті 5.3.2 ми розглянемо більш загальну ситуацію, коли градієнти функцій f належать ідеальній структурі і, нарешті, в пункті 5.3.3 обговоримо питання оцінки норми похідної Рісса функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, отримаємо нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^{\nabla}_{p,p}(\mathbb{R}^m)$. Результати цього підрозділу є, в певному сенсі, продовженням досліджень, розпочатих в [251].

Зазначимо, що з результатів [251] (див. також [235]) випливає, що для $f \in L^{\nabla}_{\infty,\infty}$ мають місце твердження

Теорема 5.3.1. *Нехай $0 < \alpha < 1$. Тоді для довільної функції $f \in L^{\nabla}_{\infty,\infty}$ має місце точна нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{2^{1-\alpha}\sigma_{m-1}}{\alpha(1-\alpha)d_{m,1}(\alpha)}\|f\|_\infty^{1-\alpha}\,\|\nabla f\|_\infty^{\alpha}, \tag{5.16}$$

де σ_{m-1} — площа поверхні одиничної сфери S^{m-1} простору $\mathbb{R}^m$.

Нерівність (5.16) *перетворюється на рівність для функції*

$$f_h(t) = \begin{cases} |t| - \frac{h}{2}, & |t| \le h, \\ \frac{h}{2}, & |t| > h, \end{cases}$$

де $h > 0$.

Теорема 5.3.2. *Нехай $0 < \alpha < 1$, $N > 0$. Тоді*

$$E_N(D^\alpha, W^{\nabla}_{\infty,\infty}) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\left(\frac{\sigma_{m-1}}{d_{m,1}(\alpha)}\right)^{1/\alpha} N^{(\alpha-1)/\alpha}.$$

Зазначимо також, що для похідних дробового порядку в змісті Маршо (див. [184, § 5]) функцій одного змінного точні нерівності, що оцінюють L_∞–норми таких похідних через L_∞–норми самих функцій і L_s–норми їх перших похідних, отримані в роботі [57].

5.3.1. Нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса функцій із $L^{\nabla}_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$ і споріднені питання

Матеріал даного пункту організовано таким чином. Спочатку ми отримаємо оцінки відхилення $D^\alpha f$ від так званої зрізаної похідної Рісса $D^\alpha_h f$ (саме вона згодом виявиться оператором найкращого наближення для D^α на класі $W^{\nabla}_{\infty,s}$). Потім за допомогою цих результатів отримаємо нерівність Колмогорова, що оцінює рівномірну норму $D^\alpha f$ через рівномірну норму f і L_s–норму ∇f, в адитивній і мультиплікативній формах, встановимо точність отриманих нерівностей і знайдемо модуль неперервності оператора D^α на класі $W^{\nabla}_{\infty,s}$. Це дозволить завершити розв'язання задачі Стєчкіна і розв'язати задачу оптимального відновлення оператора D^α на заданих з похибкою функціях класу $W^{\nabla}_{\infty,s}$. І, нарешті, ми розв'яжемо задачу Колмогорова про необхідні і достатні умови існування функції, що має задані значення $\|f\|_\infty$, $\|D^\alpha f\|_\infty$ і $\|\nabla f\|_s$.

Отримаємо оцінку зверху норми зрізаної похідної Рісса та її відхилення від D^α

Нехай $h > 0$. Позначимо через B_h множину точок x простору $\mathbb{R}^m$, для яких $|x| \le h$. Нехай $s > m$ і α такі, що $0 < \alpha < 1 - m/s$. Для заданого $h > 0$ розглянемо оператор

$$D^\alpha_h f(x) = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$

який називається зрізаною похідною Рісса. В [251] показано, що D^α_h — обмежений оператор, що діє із $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$, і справедлива така

Лема 5.3.1. *Нехай $h > 0$ і $0 < \alpha < 1$. Тоді* $\|D^\alpha_h\| = \dfrac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} h^{-\alpha}$.

Оцінку відхилення зрізаної похідної Рісса від D^α і подальші результати ми напишемо в термінах деякої спеціальної функції, яку для $t \in \mathbb{R}^m$ означимо в такий спосіб. Для $s > m$, $0 < \alpha < 1 - m/s$ і $h > 0$ покладемо

$$\psi_h(t) = \psi_{h,s,\alpha}(t) =$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^{|t|} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma - & \\ -\frac{1}{2} \int\limits_0^{h} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma, & |t| \le h, \\ \frac{1}{2} \int\limits_0^{h} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right)^{s'-1} d\gamma, & |\mathrm{t}|>\mathrm{h}, \end{cases} \tag{5.17}$$

де $1/s + 1/s' = 1$. Нескладні обчислення показують, що $\psi_h \in L^{\nabla}_{\infty,s}$ для довільного $h > 0$ і

$$\|\nabla \psi_h\|_s = \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)_+ \right\|_{s'}^{s'-1} =$$

$$= h^{m/s + (1-m-\alpha)(s'-1)} \, \|\nabla \psi_1\|_s, \tag{5.18}$$

де $x_+ = \max\{x, 0\}$. Зрозуміло також, що

$$\|\psi_h\|_\infty = \frac{1}{2} \int\limits_0^{h} \left[\frac{1}{\gamma^{m-1}} \left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right) \right]^{s'-1} d\gamma =$$

$$= h^{1 + (1-m-\alpha)(s'-1)} \, \|\psi_1\|_\infty. \tag{5.19}$$

Тепер для будь-якої функції $f \in L^{\nabla}_{\infty,s}$ оцінимо відхидення $|D^\alpha f(x) - D_h f(x)|$. Маємо

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha_h f(x)| \le \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} \frac{|f(x) - f(x+t)|}{|t|^{m+\alpha}} \, dt.$$

Зазначимо (див., напр., [142, теорема 6.9]), що для майже всіх x

$$|f(x) - f(x+t)| \le \int\limits_0^{|t|} \left| f'_t\Big(x + \frac{\gamma t}{|t|}\Big) \right| d\gamma \le \int\limits_0^{|t|} \left| \nabla f\Big(x + \frac{\gamma t}{|t|}\Big) \right| d\gamma, \tag{5.20}$$

де через f'_t позначено похідну функції f в напрямку $t/|t|$. Використовуючи (5.20), переходячи до полярних координат і змінюючи потім порядок інтегрування, отримаємо, що для майже всіх x

$$|D^\alpha f(x) - D_h f(x)| \le \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} \int\limits_0^{|t|} \frac{|\nabla f(x + \frac{\gamma t}{|t|})|}{|t|^{m+\alpha}} \, d\gamma \, dt =$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} \int\limits_0^h \frac{\rho^{m-1}}{\rho^{m+\alpha}}\,d\rho \int\limits_0^\rho |\nabla f(x+\gamma x')|\,d\gamma\,dx' =$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} dx' \int\limits_0^h |\nabla f(x+\gamma x')|\,d\gamma \int\limits_\gamma^h \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} \int\limits_0^h |\nabla f(x+\gamma x')|\gamma^{m-1} \left(\frac{1}{|\gamma x'|^{m-1+\alpha}} - \frac{1}{h^\alpha |\gamma x'|^{m-1}} \right) d\gamma\,dx' =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} |\nabla f(x+y)| \left(\frac{1}{|y|^{m-1+\alpha}} - \frac{1}{h^\alpha |y|^{m-1}} \right) dy.$$

Оцінюючи останній інтеграл за допомогою нерівності Гельдера і враховуючи співвідношення (5.18), отримаємо для майже кожного x

$$|D^\alpha f(x) - D_h^\alpha f(x)| \le$$
$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_s \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)_+ \right\|_{s'} =$$
$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_s \, \|\nabla \psi_h\|_s^{s-1} =$$
$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_s \, \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} \, h^{1-\alpha-m/s}. \qquad (5.21)$$

Отже, має місце

Лема 5.3.2. *Нехай $s > m$ и α таке, що $0 < \alpha < 1 - m/s$. Тоді для будь-якого $h > 0$ і для довільної функції $f \in L_{\infty,s}^\nabla$ правильна оцінка*

$$\|D^\alpha f - D_h^\alpha f\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_s \, \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} \, h^{1-\alpha-m/s}.$$

Із лем 5.3.1 і 5.3.2 випливає

Лема 5.3.3. *Нехай $s > m$ і α таке, що $0 < \alpha < 1 - m/s$. Нехай також*

$$h_N = \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N} \right)^{1/\alpha} \quad \text{для} \quad N > 0.$$

Тоді $\|D_{h_N}^\alpha\| = N$ *і*

$$E_N(D^\alpha, W_{\infty,s}^\nabla) \le$$
$$\le \sup_{f \in W_{\infty,s}^\nabla} \|D^\alpha f - D_{h_N}^\alpha f\|_\infty \le \frac{\alpha^{\frac{m/s-1}{\alpha}} d_{m,1}^{\frac{m/s-1}{\alpha}}(\alpha)}{(2\sigma_{m-1})^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}} \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} N^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}.$$

Нерівності типу Колмогорова. Тепер одержимо нерівності типу Колмогорова і доведемо їх точність.

Із лем 5.3.1 і 5.3.2 для $f \in L^{\nabla}_{\infty,s}$ і $0 < \alpha < 1 - m/s$ випливає

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \|D^\alpha f - D_h f\|_\infty + \|D_h f\|_\infty \le$$
$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left(\|\nabla f\|_s \,\|\nabla\psi_1\|_s^{s-1}\, h^{1-\alpha-m/s} + 2\sigma_{m-1}\|f\|_\infty h^{-\alpha}\right). \qquad (5.22)$$

Покажемо, що при будь-якому $h > 0$ нерівність (5.22) перетворюється на рівність для функції $f(t) = \psi_h(t)$. Для цього насамперед покажемо, що функція $D^\alpha\psi_h$ неперервна в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$. Дійсно, для $f = \psi_h$ зрізана похідна $D^\alpha\psi_h(x)$ неперервна для всіх $x \in \mathbb{R}^m$ і співвідношення (5.20) виконується для довільного $x \in \mathbb{R}^m$. Значить, оцінка (5.21) правильна для будь-якого x. Зафіксувавши x, при будь-якому $\delta \in \mathbb{R}^m$ будемо мати

$$|(D^\alpha - D^\alpha_h)(\psi_h(x) - \psi_h(x+\delta))| \le$$
$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\|\nabla\psi_h(\cdot) - \nabla\psi_h(\cdot+\delta)\|_s \,\|\nabla\psi_1\|_s^{s-1}\, h^{1-\alpha-m/s}. \qquad (5.23)$$

Оскільки $\|\nabla f(\cdot) - \nabla f(\cdot+\delta)\|_s \to 0$, $\delta \to 0$, бачимо, що функція $D^\alpha\psi_h - D^\alpha_h\psi_h$ неперервна в $\mathbb{R}^m$. Неперервність $D^\alpha\psi_h$ встановлено. Звідси випливає, що $\|D^\alpha\psi_h\|_\infty \ge |D^\alpha\psi_h(0)|$.

Обчислимо $|D^\alpha\psi_h(0)|$. Використовуючи означення ψ_h, маємо

$$|D^\alpha\psi_h(0)| = \Big|\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\psi_h(0)-\psi_h(t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt\Big| =$$

$$= \Big|\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{B_h}\frac{dt}{|t|^{m+\alpha}}\int\limits_0^{|t|}\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma +$$

$$+\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus B_h}\frac{dt}{|t|^{m+\alpha}}\int\limits_0^{h}\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma\Big|.$$

Переходячи до полярних координат і змінюючи потім порядок інтегрування за ρ і γ в першому доданку, одержимо

$$|D^\alpha\psi_h(0)| = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\Big|\int\limits_{S^{m-1}}dx'\int\limits_0^h\frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}\int\limits_0^\rho\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma +$$

$$+\int\limits_{S^{m-1}} dx' \int\limits_h^\infty \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} \int\limits_0^h \left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1} d\gamma\Big| =$$

$$=\frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\sigma_{m-1}\int\limits_0^h \left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1} d\gamma \int\limits_\gamma^h \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}+$$

$$+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h \left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1} \gamma^{m-1}\, d\gamma\Big\} =$$

$$=\frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\sigma_{m-1}\int\limits_0^h \left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'} \gamma^{m-1}\, d\gamma+$$

$$+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h \left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1} \gamma^{m-1}\, d\gamma\Big\} =$$

$$=\frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{s'}^{s'}+$$

$$+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h \left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1} \gamma^{m-1}\, d\gamma\Big\}.$$

Звідси, з огляду на (5.18) і (5.19), маємо

$$|D^\alpha\psi_h(0)| = \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left\{\|\nabla\psi_h\|_s^s + 2\sigma_{m-1}\|\psi_h\|_\infty\, h^{-\alpha}\right\} =$$

$$= \frac{h^{m+(1-\alpha-m)s'}}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\{\|\nabla\psi_1\|_s^s + 2\sigma_{m-1}\|\psi_1\|_\infty\} = h^{m+(1-\alpha-m)s'}|D^\alpha\psi_1(0)|. \quad (5.24)$$

Переписавши (5.24) у вигляді

$$|D^\alpha\psi_h(0)| = \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left\{\|\nabla\psi_h\|_s\,\|\nabla\psi_1\|_s^{s-1}h^{1-\alpha-m/s} + 2\sigma_{m-1}\|\psi_h\|_\infty\, h^{-\alpha}\right\},$$

переконуємось у точності (5.22).

Отже, нами доведена

Теорема 5.3.3. *Нехай $s > m$ і α такі, що $0 < \alpha < 1 - m/s$. Тоді для будь-якої функції $f \in L^\nabla_{\infty,s}$ при кожному $h > 0$ виконується точна нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le$$

$$\leq \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \left(\|\nabla f\|_s \, \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} \, h^{1-\alpha-m/s} + 2\sigma_{m-1} \|f\|_\infty h^{-\alpha} \right). \qquad (5.25)$$

Нерівність (5.25) *перетворюється на рівність для функції* ψ_h, *означеної формулою* (5.17).

В (5.25) покладемо

$$h = \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\nabla f\|_s} \, \frac{\|\nabla \psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{1}{1-m/s}}.$$

Тоді

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \Big\{ \|\nabla f\|_s \, \|\nabla \psi_1\|_s^{s-1} \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\nabla f\|_s} \, \frac{\|\nabla \psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{1-\alpha-m/s}{1-m/s}} +$$

$$+ 2\sigma_{m-1} \|f\|_\infty \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\nabla f\|_s} \, \frac{\|\nabla \psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{\alpha}{1-m/s}} \Big\} =$$

$$= \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}} \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \frac{\|\psi_1\|_\infty^{\frac{\alpha}{1-m/s}}}{\|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \left\{ \frac{\|\nabla \psi_1\|_s^s}{\|\psi_1\|_\infty} + 2\sigma_{m-1} \right\} =$$

$$= \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}} \, \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \, \frac{\|\nabla \psi_1\|_s^s + 2\sigma_{m-1} \|\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \, \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}}.$$

Використовуючи (5.24), отримаємо

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq \frac{\|D^\alpha \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \, \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

За допомогою (5.18), (5.19) і (5.24) безпосередньою підстановкою переконуємось, що остання нерівність перетворюється на рівність для $\psi_h(t)$, $h > 0$. Таким чином, доведена

Теорема 5.3.4. *Нехай* $s > m$ *і* α *такі, що* $0 < \alpha < 1 - m/s$. *Тоді для довільної функції* $f \in L^\nabla_{\infty,s}$ *виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq \frac{\|D^\alpha \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \, \|\nabla \psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}, \qquad (5.26)$$

де функція ψ_1 *означена співвідношенням* (5.17).

Нерівність (5.26) *перетворюється на рівність для функції* ψ_h, $h > 0$.

Із теореми 5.3.4 випливає

Наслідок 5.3.1. *В умовах теореми 5.3.3 для всіх* $\delta > 0$

$$\Omega\left(\delta, D^{\alpha}, W^{\nabla}_{\infty,s}\right) = \frac{\|D^{\alpha}\psi_1\|_{\infty}}{\|\psi_1\|_{\infty}^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}\,\|\nabla\psi_1\|_{s}^{\frac{\alpha}{1-m/s}}}\delta^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}. \tag{5.27}$$

Задача Стєчкіна. Тепер перейдемо до задачі найкращого наближення оператора D^{α} обмеженими.

Нехай $h_N = \left(\dfrac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N}\right)^{1/\alpha}$ для $N > 0$. Із теореми 5.3.3 і леми 5.3.3 випливає, що виконується умова (4.14) теореми 4.1.1 з оператором $D^{\alpha}_{h_N}$ і функцією $\dfrac{\psi_h}{\|\nabla\psi_h\|_s}$. Отже, правильна

Теорема 5.3.5. *Нехай* $N > 0$*,* $s > m$ *і* α *такі, що* $0 < \alpha < 1 - m/s$*. Тоді*

$$E_N(D^{\alpha}, W^{\nabla}_{\infty,s}) = \frac{\alpha^{\frac{m/s-1}{\alpha}} d_{m,1}^{\frac{m/s-1}{\alpha}}(\alpha)}{(2\sigma_{m-1})^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}}\|\nabla\psi_1\|_s^{s-1} N^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}.$$

При цьому оператор

$$D_{h_N} f(x) = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_{h_N}} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt, \tag{5.28}$$

де $h_N = \left(\dfrac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N}\right)^{1/\alpha}$*, є екстремальним оператором.*

Задача відновлення. Тепер, користуючись теоремою 4.1.2, ми можемо одержати значення величини найкращого відновлення оператора D^{α} за допомогою множини відображень $\mathcal{L}(L_{\infty}(\mathbb{R}^m), L_{\infty}(\mathbb{R}^m))$ і $\mathcal{O}(L_{\infty}(\mathbb{R}^m), L_{\infty}(\mathbb{R}^m))$ на елементах класу $W^{\nabla}_{\infty,s}$, заданих з похибкою δ. Оберемо h із умови

$$\frac{\|\psi_h\|_{\infty}}{\|\nabla\psi_h\|_s} = \left\|\frac{\psi_h}{\|\nabla\psi_h\|_s}\right\|_{\infty} = \delta,$$

тобто покладемо

$$h = \left(\delta\, \frac{\|\nabla\psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_{\infty}}\right)^{\frac{1}{1-m/s}}.$$

Зазначимо, що функція $\psi_h/\|\nabla\psi_h\|_s \in W^{\nabla}_{\infty,s}$. Для цієї функції і оператора D^{α}_h, як уже зазначалось, виконується умова (4.14) теореми 4.1.1 і, значить, в силу теореми 4.1.2

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}, D^\alpha, W^{\nabla}_{\infty,s}) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}, D^\alpha, W^{\nabla}_{\infty,s}) = \left\| D^\alpha \frac{\psi_h}{\|\nabla\psi_h\|_s} \right\|_\infty = \Omega(\delta, D^\alpha, W^{\nabla}_{\infty,s}).$$

Отже, правильна

Теорема 5.3.6. *Нехай $N > 0$, $s > m$ і α такі, що $0 < \alpha < 1 - m/s$. Тоді для всіх $\delta > 0$*

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}, D^\alpha, W^1_s) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}, D^\alpha, W^1_s) = \frac{\|D^\alpha\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla\psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \delta^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

При цьому оператор (5.28) є екстремальним оператором.

Задача Колмогорова. Розглянемо задачу Колмогорова в такій постановці. Нехай числа M_0, M_α, M_∇ задані. Необхідно знайти необхідну й достатню умови для снування функції $f \in L^{\nabla}_{\infty,s}$ такої, що

$$\|f\|_\infty = M_0, \qquad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \qquad \|\nabla f\|_s = M_\nabla.$$

Розв'язок цієї задачі дає наступна

Теорема 5.3.7. *Нехай $s > m$ і α такі, що $0 < \alpha < 1 - m/s$. Нехай M_0, M_α, M_∇ — додатні числа. Для існування функції $f \in L^{\nabla}_{\infty,s}$ такої, що*

$$\|f\|_\infty = M_0, \qquad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \qquad \|\nabla f\|_s = M_\nabla,$$

необхідно і достатньо виконання умови

$$M_\alpha \le \frac{\|D^\alpha\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla\psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} M_0^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} M_\nabla^{\frac{\alpha}{1-m/s}}. \tag{5.29}$$

Доведення. Необхідність випливає із теореми 5.3.4. Доведемо достатність. Оскільки виконується умова (5.29), то знайдеться $0 < L_0 < M_0$ таке, що

$$M_\alpha = \frac{\|D^\alpha\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla\psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} L_0^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} M_\nabla^{\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

Нехай h_0 вибрано з умови $\|\nabla\psi_{h_0}\|_s = M_\nabla$ і $\|\psi_{h_0}\|_\infty = L_0$, тобто з урахуванням (5.18) і (5.19)

$$h_0 = \Big(\frac{L_0}{M_\nabla}\frac{\|\nabla\psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty}\Big)^{\frac{s}{s-m}}.$$

Тоді в силу теореми 5.3.4

$$\|D^\alpha\psi_{h_0}\|_\infty = \frac{\|D^\alpha\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}\|\nabla\psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} L_0^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} M_\nabla^{\frac{\alpha}{1-m/s}},$$

звідки отриаємо $M_\alpha = \|D^\alpha\psi_{h_0}\|_\infty$. Розглянемо функцію $f = \psi_{h_0}+M_0-L_0$. Зрозуміло, що

$$\|f\|_\infty = M_0, \qquad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \qquad \|\nabla f\|_s = M_\nabla.$$

Отже, функція f – шукана.

Теорему доведено.

5.3.2. Нерівності Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних зі скінченною в ідеальній структурі нормою градієнта

В даному пункті ми отримаємо нові точні нерівності, що оцінюють L_∞–норму похідної Рісса D^α функцій багатьох змінних через L_∞-норму самої функції і норму її градієнта в ідеальній структурі, а також розглянемо деякі суміжні питання. При цьому будемо використовувати схему досліджень з попереднього пункту.

Нехай F і E – ідеальні структури на $\mathbb{R}^m$ (означення ідеальних структур на $\mathbb{R}^m$ цілком аналогічне наведеному в підрозділі 4.4). Через $L^\nabla_{F,E} = L^\nabla_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in F$ таких, що $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in E$, $i = 1, 2, ..., m$ і $|\nabla f| \in E$. Якщо $F = L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$, то покладемо $L^\nabla_{F,E} = L^\nabla_{p,E}$. Якщо, крім цього, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$, $1 \le s \le \infty$, то $L^\nabla_{F,E} = L^\nabla_{p,s}$.

Через $W^\nabla_{F,E}$ позначимо клас функцій f із $L^\nabla_{F,E}$, для яких
$\|\nabla f\|_E := \||\nabla f|\|_E \le 1$. Якщо $F = L_p(\mathbb{R}^m)$, $1 \le p \le \infty$, то $W^\nabla_{F,E} = W^\nabla_{p,E}$. Якщо, крім цього, $E = L_s(\mathbb{R}^m)$, $1 \le s \le \infty$, то $W^\nabla_{F,E} = W^\nabla_{p,s}$.

Оцінимо зверху норми зрізаної похідної Рісса та її відхилення від D^α

Нехай $h>0$. Позначимо через B_h множину точок x простору $\mathbb{R}^m$, для яких $|x|\le h$. Для заданого $h>0$ розглянемо зрізану похідну Рісса

$$D_h^\alpha f(x)=\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus B_h}\frac{f(x)-f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt.$$

Як зазначалось, D_h^α — обмежений оператор, що діє з $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$, і справедлива лема 5.3.1.

Нехай E^1 – асоційований простір до E (означення див. в підрозділі 4.4).

Скрізь нижче ми припускаємо, що

$$\frac{1}{|\cdot|^{m-1+\alpha}}\in E^1 \tag{5.30}$$

і

$$\lim_{h\to 0^+}\left\|\frac{\chi_{[-h,h]}}{|\cdot|^{m-1+\alpha}}\right\|_{E^1}=0. \tag{5.31}$$

Для довільної функції $f\in L^{\nabla}_{\infty,E}$ оцінимо відхилення $|D^\alpha f(x)-D_h^\alpha f(x)|$. Маємо

$$|D^\alpha f(x)-D_h^\alpha f(x)|\le\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{B_h}\frac{|f(x)-f(x+t)|}{|t|^{m+\alpha}}\,dt.$$

Відзначимо (див., напр., [142, теорема 6.9]), що для майже всіх x

$$|f(x)-f(x+t)|\le\int\limits_0^{|t|}|f'_t(x+\frac{\gamma t}{|t|})|\,d\gamma\le\int\limits_0^{|t|}|\nabla f(x+\frac{\gamma t}{|t|})|\,d\gamma, \tag{5.32}$$

де через f'_t позначено похідну функції f в напрямі $t/|t|$.

Використовуючи (5.32), переходячи до полярних координат і змінюючи потім порядок інтегрування, отримаємо, що для майже всіх x

$$|D^\alpha f(x)-D_h^\alpha f(x)|\le\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{B_h}\int\limits_0^{|t|}\frac{|\nabla f(x+\frac{\gamma t}{|t|})|}{|t|^{m+\alpha}}\,d\gamma\,dt$$

$$=\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{S^{m-1}}\int\limits_0^{h}\frac{\rho^{m-1}}{\rho^{m+\alpha}}\,d\rho\int\limits_0^{\rho}|\nabla f(x+\gamma x')|\,d\gamma\,dx'$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} dx' \int\limits_0^h |\nabla f(x+\gamma x')|\, d\gamma \int\limits_\gamma^h \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} \int\limits_0^h |\nabla f(x+\gamma x')|\gamma^{m-1} \left(\frac{1}{|\gamma x'|^{m-1+\alpha}} - \frac{1}{h^\alpha |\gamma x'|^{m-1}} \right) d\gamma\, dx'$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} |\nabla f(x+y)| \left(\frac{1}{|y|^{m-1+\alpha}} - \frac{1}{h^\alpha |y|^{m-1}} \right) dy. \qquad (5.33)$$

Оцінюючи останній інтеграл за допомогою нерівності Гельдера, отримаємо для майже кожного x

$$|D^\alpha f(x) - D_h^\alpha f(x)| \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_E \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)_+ \right\|_{E^1}. \qquad (5.34)$$

Отже, справедлива

Лема 5.3.4. *Нехай* $0 < \alpha < 1$, E *– ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура в* $\mathbb{R}^m$, *що задовольняє умови (5.30) і (5.31),* E^1 *– асоційований підпростір до* E. *Тоді для довільних* $h > 0$ *і* $f \in L^\nabla_{\infty,E}$ *справедлива оцінка*

$$\|D^\alpha f - D_h^\alpha f\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_E \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)_+ \right\|_{E^1}.$$

Із лем 5.3.1 і 5.3.4 випливає

Лема 5.3.5. *Нехай виконуються умови леми 5.3.4. Нехай також*

$$h_N = \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N} \right)^{1/\alpha} \quad \text{для} \quad N > 0.$$

Тоді $\|D^\alpha_{h_N}\| = N$ *і*

$$E_N(D^\alpha, W^\nabla_{\infty,E}) \le \sup_{f \in, W^\nabla_{\infty,E}} \|D^\alpha f - D^\alpha_{h_N} f\|_\infty \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_E \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h_N^\alpha} \right)_+ \right\|_{E^1}.$$

Тепер одержимо оцінку рівномірної норми похідної Рісса.

Із лем 5.3.1 і 5.3.4 для $f \in L^{\nabla}_{\infty,E}$ при виконанні умов (5.30) і (5.31) випливає, що для будь-якого $h > 0$

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \|D^\alpha f - D^\alpha_h f\|_\infty + \|D^\alpha_h f\|_\infty \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \Big\{ \|\nabla f\|_E \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)_+ \right\|_{E^1} +$$

$$+ 2\sigma_{m-1} \|f\|_\infty h^{-\alpha} \Big\}. \tag{5.35}$$

Припустимо, що для заданого $h > 0$ існує невід'ємна функція $\psi_h(\gamma)$ така, що $\mathrm{supp}\psi_h = [0, h]$, $\|\psi_h(|\cdot|)\|_E = 1$ і

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{|y|^{m-1}} \left(\frac{1}{|y|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)_+ \cdot \psi_h(|y|)\, dy =$$

$$= \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha} \right)_+ \right\|_{E^1}. \tag{5.36}$$

Означимо функцію $\varphi_h(t)$ в наступний спосіб

$$\varphi_h(t) = \begin{cases} \int\limits_0^{|t|} \psi_h(\gamma)\, d\gamma - \frac{1}{2} \int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\, d\gamma, & |t| \le h, \\ \frac{1}{2} \int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\, d\gamma, & |t| > h. \end{cases} \tag{5.37}$$

Неважко перевірити, що $\varphi_h \in L^{\nabla}_{\infty,E}$ при будь-якому $h > 0$ і $|\nabla \varphi_h| = |\psi_h(|\cdot|)|$, а значить, і $\|\nabla \varphi_h\|_E = \|\psi_h(|\cdot|)\|_E$.

Покажемо, що при будь-якому $h > 0$ нерівність (5.35) перетворюється на рівність для функції $f(t) = \varphi_h(t)$. Для цього насамперед покажемо, що функція $D^\alpha \varphi_h$ неперервна в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$. Дійсно, для $f = \varphi_h$ зрізана похідна $D^\alpha_h \varphi_h(x)$ неперервна для всіх $x \in \mathbb{R}^m$ і співвідношення (5.32) мають місце при довільному $x \in \mathbb{R}^m$. Значить, оцінка (5.34) справедлива для будь-якого x. Фіксуючи x, при будь-якому $\delta \in \mathbb{R}^m$ маємо:

$$|(D^\alpha - D^\alpha_h)(\varphi_h(x) - \varphi_h(x + \delta))| \le$$

$$\leq \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla\varphi_h(\cdot) - \nabla\varphi_h(\cdot+\delta)\|_E \left\| \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^{\alpha}} - \frac{1}{h^{\alpha}} \right)_+ \right\|_{E^1}.$$

Оскільки $\|\nabla\varphi_h(\cdot) - \nabla\varphi_h(\cdot+\delta)\|_E \to 0,\ \delta \to 0$, бачимо, що і функція $D^{\alpha}\varphi_h - D^{\alpha}_h\varphi_h$ неперервна в $\mathbb{R}^m$. Неперервність $D^{\alpha}\varphi_h$ встановлена. Звідси випливає, що $\|D^{\alpha}\varphi_h\|_{\infty} \geq |D^{\alpha}\varphi_h(0)|$.

Обчислимо $|D^{\alpha}\varphi_h(0)|$. Використовуючи означення φ_h, маємо

$$|D^{\alpha}\varphi_h(0)| = \Big| \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_h(0) - \varphi_h(t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt \Big| =$$

$$= \Big| \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} \frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} \int\limits_0^{|t|} \psi_h(\gamma)\, d\gamma +$$

$$+ \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} \int\limits_0^{|t|} \psi_h(\gamma)\, d\gamma \Big|.$$

Переходячи до полярних координат і змінюючи потім порядок інтегрування по ρ і γ в першому доданку, отримаємо

$$|D^{\alpha}\psi_h(0)| = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \Big| \int\limits_{S^{m-1}} dx' \int\limits_0^h \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} \int\limits_0^{\rho} \psi_h(\gamma)\, d\gamma +$$

$$+ \int\limits_{S^{m-1}} dx' \int\limits_h^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} \int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\, d\gamma \Big| =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \Big\{ \sigma_{m-1} \int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\, d\gamma \int\limits_{\gamma}^h \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}} +$$

$$+ \sigma_{m-1} h^{-\alpha} \int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\, d\gamma \Big\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \Big\{ \sigma_{m-1} \int\limits_0^h \psi_h(\gamma) \left(\frac{1}{\gamma^{\alpha}} - \frac{1}{h^{\alpha}} \right) d\gamma +$$

$$+ \sigma_{m-1} h^{-\alpha} \int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\, d\gamma \Big\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\int\limits_{B_h} \psi_h(|t|)\frac{1}{|t|^{m-1}}\left(\frac{1}{|t|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)dt + \sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h \psi_h(\gamma)\,d\gamma\Big\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\|\nabla\varphi_h\|_E \left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1} + 2\sigma_{m-1}\|\varphi_h\|_\infty h^{-\alpha}\Big\}.$$

Отже, ми переконались в точності (5.35) за умови існування функції φ_h з умовами (5.36) і (5.37).

Нехай тепер умови (5.36) і (5.37) не виконуються. В цьому випадку для заданого $h>0$ і для кожного $\varepsilon>0$ існує функція $\psi_{h,\varepsilon}\in E$, $\|\psi_{h,\varepsilon}\|_E\le 1$, така що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{1}{|y|^{m-1}}\left(\frac{1}{|y|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\cdot\psi_{h,\varepsilon}(|y|)\,dy >$$

$$> \left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_E^1 - \varepsilon.$$

Не втрачаючи загальності, можемо вважати, що $\psi_{h,\varepsilon}$ невід'ємна і $\mathrm{supp}\psi_{h,\varepsilon}=[0,h]$. Означимо функцію $\varphi_{h,\varepsilon}$ формулою (5.37) з функцією $\psi_{h,\varepsilon}$ замість ψ_h.

Неважко перевірити, що $\varphi_{h,\varepsilon}\in W^\nabla_{\infty,E}$ для довільного $h>0$ і при цьому $|\nabla\varphi_{h,\varepsilon}|=|\psi_{h,\varepsilon}(|\cdot|)|$, а значить, і $\|\nabla\varphi_{h,\varepsilon}\|_E=\|\psi_{h,\varepsilon}(|\cdot|)\|_E$.

Неперервність функції $D^\alpha\varphi_{h,\varepsilon}$ в кожній точці $x\in\mathbb{R}^m$ встановлюється аналогічно до відповідного факту для $D^\alpha\varphi_h$.

Обчислимо $|D^\alpha\varphi_{h,\varepsilon}(0)|$. Діючи, як при обчисленні $|D^\alpha\varphi_h(0)|$, отримаємо

$$\|D^\alpha\varphi_{h,\varepsilon}\|_\infty \ge |D^\alpha\varphi_{h,\varepsilon}(0)| =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\int\limits_{B_h}\psi_{h,\varepsilon}(|t|)\frac{1}{|t|^{m-1}}\left(\frac{1}{|t|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)dt + 2\sigma_{m-1}\|\varphi_{h,\varepsilon}\|_\infty h^{-\alpha}\Big\} >$$

$$> \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\|\nabla\varphi_{h,\varepsilon}\|_E\left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1} - \varepsilon +$$

$$+2\sigma_{m-1}\|\varphi_{h,\varepsilon}\|_\infty h^{-\alpha}\Big\}.$$

Разом з цим, в силу (5.35), виконується нерівність

$$\|D^\alpha\varphi_{h,\varepsilon}\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\|\nabla\varphi_{h,\varepsilon}\|_E\left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1} +$$

$$+2\sigma_{m-1}\|\varphi_{h,\varepsilon}\|_\infty h^{-\alpha}\Big\}.$$

Враховуючи, що ε - наскільки завгодно мале додатне число, можемо сформулювати теорему.

Теорема 5.3.8. *Нехай $0 < \alpha < 1$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (5.30) і (5.31), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді для довільних $f \in L^{\nabla}_{\infty,E}$ і $h > 0$ виконується точна нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{2\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\|f\|_\infty +$$

$$+\left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1}\|\nabla f\|_E\Big\}. \tag{5.38}$$

При виконанні умов (5.36) і (5.37) нерівність (5.38) перетворюється на рівність для функції φ_h, означеної формулою (5.37).

Як зразок застосування отриманих нерівностей, знайдемо величину найкращого наближення оператора D^α обмеженими операторами

Нехай виконуються умови (5.36) і (5.37). Покладемо $h_N = \left(\dfrac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha)N}\right)^{1/\alpha}$ для $N > 0$. Із теореми 5.3.8 і леми 5.3.5 випливає, що виконується умова (4.14) теореми 4.1.1 з оператором $D^\alpha_{h_N}$ і функцією φ_{h_N}. Таким чином, справедлива

Теорема 5.3.9. *Нехай $0 < \alpha < 1$, $N > 0$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура в $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (5.30) і (5.31), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді при виконанні умов (5.36) і (5.37) справджується рівність:*

$$E_N(D^\alpha, W^{\nabla}_{\infty,E}) = \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\left\|\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h_N^\alpha}\right)_+\right\|_{E^1}\|\nabla\varphi_{h_N}\|_E.$$

При цьому оператор

$$D^\alpha_{h_N}f(x) = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus B_{h_N}}\frac{f(x)-f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt, \quad h_N = \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha)N}\right)^{1/\alpha},$$

є екстремальним оператором.

5.3.3. Оцінки норм похідних Рісса в ідеальній структурі для функцій зі скінченною нормою гадієнта

Для $h > 0$ і $f \in L^{\nabla}_{E,E}$ розглянемо зрізану похідну $D^{\alpha}_{h} f$. Застосовуючи узагальнену нерівність Мінковського, маємо

$$\|D^{\alpha}_{h}\|_E = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\Big\| \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt \Big\|_E \le$$

$$\le \frac{2}{d_{m,1}(\alpha)} \|f\|_E \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} = \frac{2\sigma_{m-1}\|f\|_E}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} h^{-\alpha}.$$

Тепер для функції $f \in L^{\nabla}_{E,E}$ отримаємо оцінку величини $\|D^{\alpha} f - D^{\alpha}_{h} f\|_E$.

Діючи, як в ланцюжку рівностей (5.33), і використовуючи узагальнену нерівність Мінковського, отримаємо

$$\|D^{\alpha} f - D^{\alpha}_{h} f\|_E \le \Big\| \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} \int\limits_{0}^{|t|} \frac{\nabla f\left(\cdot + \frac{\gamma t}{|t|}\right)}{|t|^{m+\alpha}} d\gamma dt \Big\|_E =$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_E \int\limits_{S^{m-1}} dx' \int\limits_{0}^{h} d\gamma \int\limits_{\gamma}^{h} \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} = \frac{\sigma_{m-1}\|\nabla f\|_E}{(1-\alpha) d_{m,1}(\alpha)} h^{1-\alpha}.$$

Тепер для $\|D^{\alpha} f\|_E$ можемо написати

$$\|D^{\alpha} f\|_E \le \|D^{\alpha}_{h} f\|_E + \|D^{\alpha} f - D^{\alpha}_{h} f\|_E \le$$

$$\le \frac{\sigma_{m-1}}{d_{m,1}(\alpha)} \Big\{ \frac{2\|f\|_E}{\alpha} h^{-\alpha} + \frac{\|\nabla f\|_E}{1-\alpha} h^{1-\alpha} \Big\}. \tag{5.39}$$

Мінімізуючи (5.39) по h, отримаємо мультиплікативну нерівність

$$\|D^{\alpha} f\|_E \le \frac{2^{1-\alpha}\sigma_{m-1}}{\alpha(1-\alpha) d_{m,1}(\alpha)} \|f\|_E^{1-\alpha} \|\nabla f\|_E^{\alpha}.$$

Таким чином, нами доведена

Теорема 5.3.10. *Нехай $0 < \alpha < 1$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура в $\mathbb{R}^m$. Тоді для довільних $f \in L^{\nabla}_{E,E}$ і $h > 0$*

виконується нерівність:

в адитивній формі

$$\|D^\alpha f\|_E \leq \frac{\sigma_{m-1}}{d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\frac{2\|f\|_E}{\alpha}h^{-\alpha} + \frac{\|\nabla f\|_E}{1-\alpha}h^{1-\alpha}\Big\};$$

в мультиплікативній формі

$$\|D^\alpha f\|_E \leq \frac{2^{1-\alpha}\sigma_{m-1}}{\alpha(1-\alpha)d_{m,1}(\alpha)}\|f\|_E^{1-\alpha}\|\nabla f\|_E^{\alpha}.$$

Із теореми 5.3.10 одразу випливає

Наслідок 5.3.2. *Нехай $0 < \alpha < 1$, $1 \leq s \leq \infty$. Тоді для довільних функції $f \in L^{\nabla}_{s,s}$ і $h > 0$ виконується нерівність:*
в адитивній формі

$$\|D^\alpha f\|_s \leq \frac{\sigma_{m-1}}{d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\frac{2\|f\|_s}{\alpha}h^{-\alpha} + \frac{\|\nabla f\|_s}{1-\alpha}h^{1-\alpha}\Big\}; \qquad (5.40)$$

в мультиплікативній формі

$$\|D^\alpha f\|_s \leq \frac{2^{1-\alpha}\sigma_{m-1}}{\alpha(1-\alpha)d_{m,1}(\alpha)}\|f\|_s^{1-\alpha}\|\nabla f\|_s^{\alpha}. \qquad (5.41)$$

Нерівності (5.40) і (5.41) є точними для $s = \infty$.

Зауважимо, що нерівності (5.40) і (5.41) при $s = \infty$ випливають із результатів [251] (див. теорему 5.3.1).

5.4. Нерівності типу Колмогорова для норм гіперсингулярних інтегралів з однорідною знакосталою характеристикою

У попередніх підрозділах ми розглянули деякі узагальнення поняття дробового диференціювання для функцій багатьох змінних – це похідні за Ріссом (див. підрозділ 5.3) і мішані частинні похідні за Маршо (див. підрозділ 5.2).

Одним із таких узагальнень є дробова похідна за напрямом $\theta \in \mathbb{R}^m$ у формі Маршо (див., наприклад, [184, с. 438]), яка для $\alpha \in (0,1)$, $\theta \in \mathbb{R}^m$

($|\theta| = 1$) і $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ означається формулою:

$$(D_\theta^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^\infty \frac{f(x) - f(x-\xi\theta)}{\xi^{1+\alpha}}\, d\xi.$$

Ще один напрямок узагальнення поняття дробового диференціювання на багатовимірний випадок полягає в розгляданні гіперсингулярних інтегралів з однорідною характеристикою, які вивчались в роботах Р. Відена [299]-[302], С. Г. Самка [185]–[187], Е. Л. Раджабова [179], В. А. Ногіна і С. Г. Самка [165, 166].

Для $\alpha \in (0,1)$ і $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ гіперсингулярні інтеграли з однорідною характеристикою Ω визначаються рівністю (див. [184, § 25]):

$$(D_\Omega^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}} \Omega(t/|t|)\, dt,$$

де Ω є однорідною степеня 0 за t,

$$d_{m,1}(\alpha) = \frac{\pi^{1+m/2}}{2^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$

— нормуючий множник [184, § 26].

Зазначимо, що такий підхід дозволяє з єдиної точки зору розглядати задачі, пов'язані з похідними за напрямом і похідними Рісса. Зокрема, для $\Omega(x) \equiv 1$ ми отримаємо похідну за Ріссом D^α.

Нехай $\Omega(x)$ – невід'ємна, однорідна степеня 0 функція, інтегровна на одиничній сфері $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$. Через $L_{s,\Omega}(\mathbb{R}^m)$ $(1 \le s \le \infty)$ позначимо простір вимірних функцій $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ зі скінченною нормою $\|f\|_{s,\Omega} := \|\Omega^{1/s} f\|_s$. Зазначимо, що у випадку $\Omega(x) \equiv 1$ ми отримаємо стандартні простори $L_s = L_s(\mathbb{R}^m)$ з нормами $\|\cdot\|_s$.

Для функції $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$, локально абсолютно неперервної за кожною змінною при майже всіх фіксованих значеннях решти змінних, означені частинні похідні у сенсі Соболєва $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}$ [164, розд. 4, п. 4.1, п. 4.4.4]. Покладемо

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right).$$

Для $1 \le s \le \infty$ через $L^{\nabla}_{\infty,s,\Omega} = L^{\nabla}_{\infty,s,\Omega}(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ таких, що $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \in L_{s,\Omega}(\mathbb{R}^m)$ для кожного $i = 1,\dots,m$. Зазначимо, що якщо $f \in L^{\nabla}_{\infty,s,\Omega}$, то $|\nabla f| \in L_{s,\Omega}(\mathbb{R}^m)$. Через $W^{\nabla}_{s,\Omega}$ позначимо клас функцій із $L^{\nabla}_{\infty,s,\Omega}$ таких, що $\|\nabla f\|_{s,\Omega} \le 1$ (тут і скрізь нижче ми пишемо $\|\nabla f\|_{s,\Omega}$ замість $\|\,|\nabla f|\,\|_{s,\Omega}$).

Ми отримаємо непокращувані нерівності типу Колмогорова, що оцінюють $\|D^\alpha_\Omega f\|_\infty$ через $\|f\|_\infty$ і $\|\nabla f\|_{s,\Omega}$ для функції $f \in L^{\nabla}_{\infty,s,\Omega}$, в адитивній і мультиплікативній формі, а також, як і завжди, розглянемо відповідні задачі Стєчкіна і оптиального відновлення.

Зазначимо, що у випадку $\Omega(x) \equiv 1$ розглядувані задачі розв'язані в [44], а у випадку $s = \infty$ в [251].

Спочатку отримаємо оцінку зверху норми зрізаного гіперсингулярного інтеграла і його відхилення від D^α_Ω.

Нехай $h > 0$. Позначимо через B_h множину точок x простору $\mathbb{R}^m$, для яких $|x| \le h$. Нехай $s > m$ і α такі, що $0 < \alpha < 1 - m/s$. Для заданого $h > 0$ розглянемо оператор

$$D^\alpha_{\Omega,h} f(x) = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{t}{|t|}\right) dt,$$

який назвемо зрізаним гіперсингулярним інтегралом з характеристикою Ω. В [251] показано, що $D^\alpha_{\Omega,h}$ — обмежений оператор, що діє з $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$, і справджується така

Лема 5.4.1. *Нехай $h > 0$ і $0 < \alpha < 1$. Тоді*

$$\|D^\alpha_{\Omega,h}\| = \frac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} h^{-\alpha},$$

де $\sigma_{m-1} = \int\limits_{S^{m-1}} \Omega(\xi')\, d\xi'$.

Нехай функція $\Omega(x)$ для всіх $s > m$ і $0 < \alpha < 1 - m/s$ задовольняє умову

$$\int\limits_{B_h} \frac{\Omega(t)}{|t|^{\frac{(m-1+\alpha)s}{s-1}}}\, dt. \tag{5.42}$$

Оцінку відхилення зрізаного гіперсингулярного інтеграла від D^{α}_{Ω} і подальші результати ми запишемо в термінах деякої спеціальної функції, яку для $t \in \mathbb{R}^m$ означимо в такий спосіб. Для $s > m$, $0 < \alpha < 1 - m/s$ і $h > 0$ покладемо

$$\psi_h(t) = \psi_{h,s,\alpha}(t) =$$
$$= \begin{cases} \int\limits_0^{|t|} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)\right)^{s'-1} d\gamma - \\ -\frac{1}{2}\int\limits_0^{h} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)\right)^{s'-1} d\gamma, & |t| \le h, \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^{h} \left(\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)\right)^{s'-1} d\gamma, & \text{|t|>h}, \end{cases} \tag{5.43}$$

де $1/s + 1/s' = 1$.

Нескладні обчислення показують, що $\psi_h \in L^{\nabla}_{\infty,s,\Omega}$ за будь-яких $h > 0$ і

$$\|\nabla\psi_h\|_{s,\Omega} = \left\| \Omega^{1/s'} \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)_+ \right\|_{s'}^{s'-1} =$$
$$= h^{m/s+(1-m-\alpha)(s'-1)} \|\nabla\psi_1\|_{s,\Omega}, \tag{5.44}$$

де $x_+ = \max\{x, 0\}$. Зрозуміло також, що

$$\|\psi_h\|_\infty = \frac{1}{2}\int\limits_0^h \left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1} d\gamma =$$
$$= h^{1+(1-m-\alpha)(s'-1)} \|\psi_1\|_\infty. \tag{5.45}$$

Тепер для будь-якої функції $f \in L^{\nabla}_{\infty,s,\Omega}$ оцінимо відхилення $|D^\alpha_\Omega f(x) - D^\alpha_{\Omega,h} f(x)|$. Маємо

$$|D^\alpha_\Omega f(x) - D^\alpha_{\Omega,h} f(x)| \le \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} \frac{|f(x) - f(x+t)|}{|t|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{t}{|t|}\right) dt.$$

Зазначимо (див., наприклад, [142, теорема 6.9]), що для майже всіх x

$$|f(x) - f(x+t)| \le \int\limits_0^{|t|} \left| f'_t\Big(x + \frac{\gamma t}{|t|}\Big)\right| d\gamma \le \int\limits_0^{|t|} \left|\nabla f\Big(x + \frac{\gamma t}{|t|}\Big)\right| d\gamma, \tag{5.46}$$

де через f'_t позначено похідну функції f в напрямку $t/|t|$. Використовуючи (5.46), переходячи до полярних координат і змінюючи потім порядок інтегрування, отримаємо, що для майже всіх x

$$|D^\alpha_\Omega f(x) - D^\alpha_{\Omega,h} f(x)| \leq \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} \int\limits_0^{|t|} \frac{|\nabla f(x + \frac{\gamma t}{|t|})|}{|t|^{m+\alpha}} \Omega\left(\frac{t}{|t|}\right) d\gamma\, dt =$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} \Omega(x') \int\limits_0^h \frac{\rho^{m-1}}{\rho^{m+\alpha}} d\rho \int\limits_0^\rho |\nabla f(x + \gamma x')|\, d\gamma\, dx' =$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} \Omega(x') dx' \int\limits_0^h |\nabla f(x + \gamma x')|\, d\gamma \int\limits_\gamma^h \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}} =$$

$$\frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{S^{m-1}} \Omega(x') \int\limits_0^h |\nabla f(x+\gamma x')| \gamma^{m-1} \left(\frac{1}{|\gamma x'|^{m-1+\alpha}} - \frac{1}{h^\alpha |\gamma x'|^{m-1}}\right) d\gamma\, dx'$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{B_h} |\Omega\left(\frac{y}{|y|}\right) \nabla f(x+y)| \left(\frac{1}{|y|^{m-1+\alpha}} - \frac{1}{h^\alpha |y|^{m-1}}\right) dy.$$

Оцінивши останній інтеграл за допомогою нерівності Гельдера і враховуючи співвідношення (5.44), отримаємо для майже кожного x

$$|D^\alpha_\Omega f(x) - D^\alpha_{\Omega,h} f(x)| \leq \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\Omega^{\frac{1}{s}} \nabla f\|_s \left\| \Omega^{\frac{1}{s'}} \frac{1}{|\cdot|^{m-1}} \left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha} - \frac{1}{h^\alpha}\right)_+ \right\|_{s'} =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\Omega^{\frac{1}{s}} \nabla f\|_s \, \|\Omega^{\frac{1}{s}} \nabla \psi_h\|_s^{s-1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\Omega^{\frac{1}{s}} \nabla f\|_s \, \|\Omega^{\frac{1}{s}} \nabla \psi_1\|_s^{s-1} h^{1-\alpha-m/s}. \qquad (5.47)$$

Отже, справджується

Лема 5.4.2. *Нехай $s > m$ і α такі, що $0 < \alpha < 1 - m/s$, $\Omega(x)$ – невід'ємна однорідна степеня 0 за x, інтегровна на одиничній сфері $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ функція, для якої виконується умова (5.42). Тоді для будь-якого $h > 0$ і для будь-якої функції $f \in L^\nabla_{\infty,s,\Omega}$ правильна оцінка*

$$\|D^\alpha_\Omega f - D^\alpha_{\Omega,h} f\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\nabla f\|_{s,\Omega} \, \|\nabla \psi_1\|_{s,\Omega}^{s-1} h^{1-\alpha-m/s}.$$

Із лем 5.4.1 і 5.4.2 випливає

Лема 5.4.3. *Нехай виконано умови леми 5.4.2. Нехай також*

$$h_N = \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N}\right)^{1/\alpha} \quad \text{для} \quad N > 0.$$

Тоді $\|D^\alpha_{\Omega,h_N}\| = N$ *і*

$$E_N(D^\alpha_\Omega, W^\nabla_{s,\Omega}) \le$$

$$\le \sup_{f\in W^1_{s,\Omega}} \|D^\alpha_\Omega f - D^\alpha_{\Omega,h_N} f\|_\infty \le \frac{\alpha^{\frac{m/s-1}{\alpha}} d_{m,1}^{\frac{m/s-1}{\alpha}}(\alpha)}{(2\sigma_{m-1})^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}} \|\nabla\psi_1\|^{s-1}_{s,\Omega} N^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}.$$

Нерівності типу Колмогорова. Із лем 5.4.1 і 5.4.2 для $f \in L^\nabla_{\infty,s,\Omega}$ і $0 < \alpha < 1 - m/s$ випливає

$$\|D^\alpha_\Omega\|_\infty \le \|D^\alpha_\Omega f - D^\alpha_{\Omega,h} f\|_\infty + \|D^\alpha_{\Omega,h} f\|_\infty \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big(\|\Omega^{1/s}\nabla f\|_s \|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|^{s-1}_s h^{1-\alpha-m/s} +$$

$$+ 2\sigma_{m-1}\|f\|_\infty h^{-\alpha}\Big). \tag{5.48}$$

Покажемо, що за будь-якого $h > 0$ нерівність (5.48) перетворюється на рівність для функції $f(t) = \psi_h(t)$. Для цього, насамперед, покажемо, що функція $D^\alpha_\Omega \psi_h$ неперервна в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$. Дійсно, для $f = \psi_h$ зрізана похідна $D^\alpha_\Omega \psi_h(x)$ неперервна для всіх $x \in \mathbb{R}^m$ і співвідношення (5.46) виконується за будь-якого $x \in \mathbb{R}^m$. Значить, оцінка (5.47) правильна для будь-якого x. Фіксуючи x, за будь-якого $\delta \in \mathbb{R}^m$ матимемо

$$|(D^\alpha_\Omega - D^\alpha_{\Omega,h})(\psi_h(x) - \psi_h(x+\delta))| \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \|\Omega^{1/s}\nabla\psi_h(\cdot) - \Omega^{1/s}\nabla\psi_h(\cdot+\delta)\|_s \|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|^{s-1}_s h^{1-\alpha-m/s}. \tag{5.49}$$

Оскільки $\|\nabla f(\cdot) - \nabla f(\cdot+\delta)\|_s \to 0$, $\delta \to 0$, бачимо, що функція $D^\alpha_\Omega \psi_h - D^\alpha_{\Omega,h}\psi_h$ неперервна в $\mathbb{R}^m$. Неперервність $D^\alpha_\Omega \psi_h$ встановлено. Звідси випливає, що $\|D^\alpha_\Omega \psi_h\|_\infty \ge |D^\alpha_\Omega \psi_h(0)|$.

Обчислимо $|D^\alpha_\Omega \psi_h(0)|$. Використовуючи означення ψ_h, маємо

$$|D^\alpha_\Omega \psi_h(0)| = \Big|\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\psi_h(0) - \psi_h(t)}{|t|^{m+\alpha}} \Omega\Big(\frac{t}{|t|}\Big)\, dt\Big| =$$

$$= \Big|\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{B_h}\frac{dt}{|t|^{m+\alpha}}\Omega\Big(\frac{t}{|t|}\Big)\int\limits_0^{|t|}\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma+$$

$$+\frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus B_h}\Omega\Big(\frac{t}{|t|}\Big)\frac{dt}{|t|^{m+\alpha}}\int\limits_0^{h}\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma\Big|.$$

Переходячи до полярних координат і змінюючи потім порядок інтегрування за ρ і γ в першому доданку, отримаємо

$$|D^\alpha_\Omega\psi_h(0)| =$$

$$= \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)}\Big|\int\limits_{S^{m-1}}\Omega(x')\,dx'\int\limits_0^h\frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}\int\limits_0^{\rho}\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma+$$

$$+\int\limits_{S^{m-1}}\Omega(x')\,dx'\int\limits_h^\infty\frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha}}\int\limits_0^{h}\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma\Big| =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\sigma_{m-1}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}d\gamma\int\limits_\gamma^h\frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}+$$

$$+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}\gamma^{m-1}\,d\gamma\Big\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\sigma_{m-1}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'}\gamma^{m-1}\,d\gamma+$$

$$+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}\gamma^{m-1}\,d\gamma\Big\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)}\Big\{\Big\|\Omega^{1/s'}\frac{1}{|\cdot|^{m-1}}\left(\frac{1}{|\cdot|^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)_+\Big\|_{s'}^{s'}+$$

$$+\sigma_{m-1}h^{-\alpha}\int\limits_0^h\left[\frac{1}{\gamma^{m-1}}\left(\frac{1}{\gamma^\alpha}-\frac{1}{h^\alpha}\right)\right]^{s'-1}\gamma^{m-1}\,d\gamma\Big\}.$$

Звідси, враховуючи (5.44) і (5.45), маємо

$$|D_\Omega^\alpha \psi_h(0)| = \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \left\{ \|\Omega^{1/s}\nabla\psi_h\|_s^s + 2\sigma_{m-1}\|\psi_h\|_\infty \, h^{-\alpha} \right\} =$$

$$= \frac{h^{m+(1-\alpha-m)s'}}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \{\|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s^s + 2\sigma_{m-1}\|\psi_1\|_\infty\} =$$

$$= h^{m+(1-\alpha-m)s'} |D_\Omega^\alpha \psi_1(0)|. \tag{5.50}$$

Переписавши (5.50) у вигляді

$$|D_\Omega^\alpha \psi_h(0)| =$$

$$= \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \left\{ \|\Omega^{1/s}\nabla\psi_h\|_s \, \|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s^{s-1} h^{1-\alpha-m/s} + 2\sigma_{m-1}\|\psi_h\|_\infty \, h^{-\alpha} \right\},$$

впевнюємось у точності (5.48). Отже, нами доведена

Теорема 5.4.1. *Нехай виконуються умови леми 5.4.2. Тоді для будь-якої функції* $f \in L_{\infty,s,\Omega}^{\nabla}$ *при кожному* $h > 0$ *справджується точна нерівність*

$$\|D_\Omega^\alpha f\|_\infty \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \left(\|\nabla f\|_{s,\Omega} \, \|\nabla\psi_1\|_{s,\Omega}^{s-1} \, h^{1-\alpha-m/s} + 2\sigma_{m-1}\|f\|_\infty h^{-\alpha} \right). \tag{5.51}$$

Нерівність (5.51) *перетворюється на рівність для функції* ψ_h, *визначеної формулою* (5.43).

В (5.51) покладемо

$$h = \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\Omega^{1/s}\nabla f\|_s} \, \frac{\|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{1}{1-m/s}}.$$

Тоді

$$\|D_\Omega^\alpha f\|_\infty \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \left\{ \|\Omega^{1/s}\nabla f\|_s \, \|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s^{s-1} \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\Omega^{1/s}\nabla f\|_s} \, \frac{\|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{1-\alpha-m/s}{1-m/s}} + \right.$$

$$\left. + 2\sigma_{m-1}\|f\|_\infty \left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\Omega^{1/s}\nabla f\|_s} \, \frac{\|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{\alpha}{1-m/s}} \right\} =$$

$$\|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\Omega^{1/s}\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}} \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \frac{\|\psi_1\|_\infty^{\frac{\alpha}{1-m/s}}}{\|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \left\{ \frac{\|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s^s}{\|\psi_1\|_\infty} + 2\sigma_{m-1} \right\}$$

$$= \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\Omega^{1/s}\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}} \frac{1}{\alpha d_{m,1}(\alpha)} \frac{\|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s^s + 2\sigma_{m-1}\|\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}}.$$

Використовуючи (5.50), отримаємо

$$\|D_\Omega^\alpha f\|_\infty \le \frac{\|D_\Omega^\alpha\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\Omega^{1/s}\nabla\psi_1\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\Omega^{1/s}\nabla f\|_s^{\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

За допомогою (5.44), (5.45) і (5.50) безпосередньою підстановкою впевнюємось, що остання нерівність перетворюється на рівність для $\psi_h(t)$, $h > 0$. Отже, доведена

Теорема 5.4.2. *Нехай виконано умови леми 5.4.2. Тоді для будь-якої функції $f \in L^1_{\infty,s,\Omega}$ справджується точна нерівність*

$$\|D_\Omega^\alpha f\|_\infty \le \frac{\|D_\Omega^\alpha\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla\psi_1\|_{s,\Omega}^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla f\|_{s,\Omega}^{\frac{\alpha}{1-m/s}}, \tag{5.52}$$

де функція ψ_1 визначена співвідношенням (5.43).

Нерівність (5.52) *перетворюється на рівність для функції ψ_h, $h > 0$.*

Із теореми 5.4.2 випливає

Наслідок 5.4.1. *В умовах теореми 5.4.1 для всіх $\delta > 0$*

$$\Omega\left(\delta, D_\Omega^\alpha, W_{s,\Omega}^\nabla\right) = \frac{\|D_\Omega^\alpha\psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla\psi_1\|_{s,\Omega}^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \delta^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}. \tag{5.53}$$

Далі розглянемо задачі про найкраще наближення оператора D_Ω^α обмеженими і його оптимальне відновлення за неточно заданою іинформацією на класі $W_{s,\Omega}^\nabla$.

Задача Стєчкіна. Нехай $h_N = \left(\dfrac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N}\right)^{1/\alpha}$ для $N > 0$. Із теореми 5.4.1 і леми 5.4.3 випливає, що викоуються умови теореми 4.1.1 з оператором D_{Ω,h_N}^α і функцією $\dfrac{\psi_h}{\|\nabla\psi_h\|_{s,\Omega}}$. Отже, справджується

Теорема 5.4.3. *Нехай $N > 0$ і виконуються умови леми 5.4.2. Тоді*

$$E_N(D_\Omega^\alpha, W_{s,\Omega}^\nabla) = \frac{\alpha^{\frac{m/s-1}{\alpha}} d_{m,1}^{\frac{m/s-1}{\alpha}}(\alpha)}{(2\sigma_{m-1})^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}} \|\nabla\psi_1\|_{s,\Omega}^{s-1} N^{1+\frac{m/s-1}{\alpha}}.$$

При цьому оператор

$$D^{\alpha}_{h_N} f(x) = \frac{1}{d_{m,1}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_{h_N}} \frac{f(x) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}} \Omega(t/|t|)\, dt, \tag{5.54}$$

$$h_N = \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{\alpha d_{m,1}(\alpha) N} \right)^{1/\alpha},$$

є екстремальним оператором.

Задача оптимального відновлення. Тепер, користуючись теоремою 4.1.2, ми можемо отримати значення величини найкращого відновлення оператора D^{α}_{Ω} за допомогою множини відображень $\mathcal{L}(L_\infty(\mathbb{R}^m),\ L_\infty(\mathbb{R}^m))$ і $\mathcal{O}(L_\infty(\mathbb{R}^m),\ L_\infty(\mathbb{R}^m))$ на елементах класу $W^{\nabla}_{s,\Omega}$, заданих з похибкою δ. Виберемо h із умови

$$\frac{\|\psi_h\|_\infty}{\|\nabla \psi_h\|_{s,\Omega}} = \|\frac{\psi_h}{\|\nabla \psi_h\|_{s,\Omega}}\|_\infty = \delta,$$

тобто покладемо

$$h = \left(\delta\, \frac{\|\nabla \psi_1\|_{s,\Omega}}{\|\psi_1\|_\infty} \right)^{\frac{1}{1-m/s}}.$$

Зазначимо, що функція $\psi_h / \|\nabla \psi_h\|_{s,\Omega} \in W^{\nabla}_{s,\Omega}$, і в силу теореми 4.1.2

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}, D^{\alpha}_{\Omega}, W^{\nabla}_{s,\Omega}) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}, D^{\alpha}_{\Omega}, W^{\nabla}_{s,\Omega}) = \|D^{\alpha}_{\Omega} \frac{\psi_h}{\|\nabla \psi_h\|_{s,\Omega}}\|_\infty = \Omega(\delta, D^{\alpha}_{\Omega}, W^{\nabla}_{s,\Omega}).$$

Отже, справджується

Теорема 5.4.4. *Нехай $N > 0$ і виконуються умови леми 5.4.2. Тоді для всіх $\delta > 0$*

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}, D^{\alpha}_{\Omega}, W^{\nabla}_{s,\Omega}) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}, D^{\alpha}_{\Omega}, W^{\nabla}_{s,\Omega}) = \frac{\|D^{\alpha}_{\Omega} \psi_1\|_\infty}{\|\psi_1\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}} \|\nabla \psi_1\|_{s,\Omega}^{\frac{\alpha}{1-m/s}}} \delta^{1-\frac{\alpha}{1-m/s}}.$$

При цьому оператор (5.54) *є екстремальним оператором.*

5.5. Нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних зі скінченною нормою лапласіана і деякі їх застосування

Нехай

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

– оператор Лапласа. Для локально інтегровних на $\mathbb{R}^m$ функцій f і g будемо писати

$$\Delta f = g,$$

якщо для будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \Delta\varphi(x) f(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) g(x)\, dx.$$

Через $L_{p,s}^{\Delta} = L_{p,s}^{\Delta}(\mathbb{R}^m)$ $1 \le p, s \le \infty$ позначимо сукупність функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^m)$ таких, що $\Delta f \in L_s(\mathbb{R}^m)$. Через $W_{p,s}^{\Delta} = W_{p,s}^{\Delta}(\mathbb{R}^m)$ позначимо клас функцій із $L_{p,s}^{\Delta}$ таких, що $\|\Delta f\|_s \le 1$.

Похідна Рісса порядку α $(0 < \alpha < 2)$ функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ означається рівністю (див. [184, § 25])

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}_m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt,$$

де

$$d_{m,2}(\alpha) = \frac{2^{1-\alpha}\pi^{1+\frac{m}{2}}}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)}$$

– нормуючий множник [184, § 26]. Зазначимо, що похідна Рісса D^α реалізує [184, § 25] дробовий степінь $(-\Delta)^{\alpha/2}$ оператора Лапласа.

Для $h > 0$ зрізаною похідною Рісса порядку $\alpha \in (0, 2)$ функції $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ називається

$$(D_h^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt$$

(тут і скрізь нижче $B_h = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \le h\}$ – куля радіуса h з центром в початку координат).

В [219, 220] В. Г. Тимофеєв показав, що для всіх функцій $f \in C(\mathbb{R}^m)$, таких що $\Delta f \in L_\infty(\mathbb{R}^m)$, виконується точна нерівність

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_C \le \sqrt{2}\|f\|_C^{\frac{1}{2}} \cdot \|\Delta f\|_\infty^{\frac{1}{2}}, \quad i = \overline{1,m} \tag{5.55}$$

(для $m = 1$ це нерівність Ландау [279]).

Він також розв'язав задачу Стєчкіна про наближення необмеженого оператора $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = \overline{1,m})$ обмеженими і задачу відновлення значень оператора $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = \overline{1,m})$ на класі функцій $f \in C(\mathbb{R}^m)$, таких що $\|\Delta f\|_\infty \le 1$, заданих з відомою похибкою в $C(\mathbb{R}^m)$.

В пункті 5.5.1 ми отримаємо точну нерівність типу Колмогорова для функцій $f \in L^\Delta_{\infty,s}$, $1 \le s \le \infty$, що оцінює норму D^α $(0 < \alpha < 2)$ через $\|f\|_\infty$ і $\|\Delta f\|_s$, а також розв'яжемо задачу найкращого наближення оператора D^α на класі $W^\Delta_{\infty,s}$ і задачу оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. В пункті 5.5.2 ми розглянемо більш загальну ситуацію, коли лапласіани функцій f обмежені в ідеальній структурі. В пункті 5.5.3 обговоримо питання оцінки норм функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, отримаємо нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^\Delta_{p,p}(\mathbb{R}^m)$.

5.5.1. Нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса функцій із $L^\Delta_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$ і споріднені питання

Матеріал цього пункту організовано за схемою, запропонованою в пункті 5.3.1. Спочатку ми введемо оператор U^α_h, який виявиться оператором найкращого наближення для D^α і отримаємо оцінки відхилення $D^\alpha f$ від $U^\alpha_h f$ на класі $W^\Delta_{\infty,s}$. Потім за допомогою цих результатів отримаємо точну нерівність Колмогорова, що оцінює рівномірну норму $D^\alpha f$ через $\|f\|_\infty$ і $\|\Delta f\|_s$, в адитивній та мультиплікативній формі, а також знайдемо модуль неперервності оператора D^α на класі $W^\Delta_{\infty,s}$. Це дозволить завершити розв'язання задачі Стєчкіна і розв'язати задачу оптимального відновлення оператора D^α на заданих з похибкою функціях класу $W^\Delta_{\infty,s}$. І, нарешті, ми розв'яжемо задачу Колмогорова про необхідні і достатні умови існування функції, що має задані значення $\|f\|_\infty$, $\|D^\alpha f\|_\infty$ і $\|\Delta f\|_s$.

Оператор U_h^α. Отже, побудуємо оператор U_h^α і оцінимо його норму та відхилення від D^α на класі $W^\Delta_{\infty,s}$.

Нехай $h > 0$. Через $\tilde{G}_h(x,y)$ будемо позначати функцію Гріна кулі B_h (див., [141, с. 265]), тобто для x, $y \in B_h$, $x \neq y$, у випадку $m \geq 3$

$$\tilde{G}_h(x,y) = \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)}\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}} - \frac{h^{m-2}|y|^{m-2}}{|x|y|^2 - h^2 y|^{m-2}}\right),$$

і у випадку $m = 2$

$$\tilde{G}_h(x,y) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{h^2 - xy}{h(x-y)}\right|$$

(тут і скрізь нижче σ_{m-1} – площа поверхні одиничної сфери S^{m-1} простору $\mathbb{R}^m$).

Для $\rho > 0$ покладемо

$$G_h(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_{m-1}(m-2)}\left(\frac{1}{\rho^{m-2}} - \frac{1}{h^{m-2}}\right)_+, & m \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{h}{\rho}\right)_+, & m = 2, \end{cases}$$

(як завжди, $a_+ := \max\{a, 0\}$).

Зазначимо, що для $y \in B_h$, $y \neq 0$,

$$\tilde{G}_h(0,y) = G_h(|y|).$$

Усередненням функції f в точці x за сферою радіуса h назвемо величину

$$\widetilde{f}(x,h) = \frac{1}{\sigma_{m-1}}\int\limits_{S^{m-1}} f(x+hy)ds_y$$

де ds_y – елемент площі поверхні сфери S^{m-1}.

Відомо (див., напр., [141, с. 289]), що для довільної двічі неперервно диференційовної функції f правильне зображення

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} \widetilde{G}_h(x,y)(-\Delta f(y))\,dy. \tag{5.56}$$

Застосовуючи зображення (5.56) до функції $f(z \pm x)$ (при фіксованому x) і покладаючи потім $z = 0$, отримаємо

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\,dy.$$

Для будь-якої функції $f \in L^{\Delta}_{\infty,s}$ і будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ будемо мати

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \left[\widetilde{\varphi}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta\varphi(x \mp y))\,dy\right] dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left[\widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\,dy\right] dx.$$

Отже, для $f \in L^{\Delta}_{\infty,s}$ і майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$ буде

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\,dy. \tag{5.57}$$

Розглянемо також таку функцію

$$F_h(t) = \begin{cases} \int\limits_t^h G_\rho(t) \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}, & t \in (0,h], \\ 0, & t > h. \end{cases}$$

Неважко бачити, що для функцій $G_h(|y|)$ і $F_h(|y|)$ мають місце такі співвідношення

$$G_h(|y|) = h^{2-m} G_1(|y|/h)$$

і

$$F_h(|y|) = h^{2-\alpha-m} F_1(|y|/h).$$

Скрізь нижче ми припускаємо, що $s > m/2$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$. Зазначимо, що при виконанні цих умов для довільного $c \in \mathbb{R}$ функція $F_h(|y|) - cG_h(|y|)$ належить простору $L_{s'}$ ($s' = s/(s-1)$), а функція $|F_h(|y|) - cG_h(|y|)|^{s'-1}$ – простору L_s, отже, функція $|F_h(|y|) - cG_h(|y|)|^{s'-1}$ буде інтегровною на B_h .

Виберемо $c = c_h$ із умови

$$\int\limits_{B_h} |F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)|^{s'-1} \mathrm{sgn}(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy = 0. \tag{5.58}$$

Як неважко перевірити, для будь-якого $h > 0$ буде

$$c_h = h^{-\alpha} c_1. \tag{5.59}$$

Для $\rho \in (0, h]$ покладемо

$$\widetilde{\psi}_h(\rho) = \begin{cases} -\dfrac{|F_h(\rho) - c_h G_h(\rho)|^{s'-1} \mathrm{sgn}(F_h(\rho) - c_h G_h(\rho))}{\|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{s'}^{s'-1}}, & \rho \in (0, h], \\ 0, & \rho > h, \end{cases}$$

$$\widetilde{\varphi}_{h,2}(\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\int\limits_0^\rho - \int\limits_\rho^h\right) \int\limits_t^h u^{m-1} \widetilde{\psi}_h(u)\, du \dfrac{dt}{t^{m-1}}, & \rho \in [0, h] \\ \dfrac{1}{2}\int\limits_0^h \int\limits_t^h u^{m-1} \widetilde{\psi}_h(u)\, du \dfrac{dt}{t^{m-1}}, & \rho > h. \end{cases}$$

Означимо

$$\psi_h(y) = \widetilde{\psi}_h(|y|), \;\; y \in \mathbb{R}^m,$$

і

$$\varphi_{h,2}(y) = \widetilde{\varphi}_{h,2}(|y|), \;\; y \in \mathbb{R}^m.$$

Зазначимо, що для $p = \infty$ функція $\varphi_{h,2}(x)$ може бути записаною у явному вигляді і в розглядуваних задачах є багатовимірним аналогом ідеального сплайна Ейлера другого порядку (див., наприклад, [26, с. 66–69], [53]). Побудуємо цю функцію.

Нехай для $\rho \geq 0$ і $\delta = \sqrt[m]{2}$

$$\psi(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2m}(\rho^2 - 1/\delta^2 - \sigma G_1(1/\delta) + 1/2), & 0 \leq \rho \leq 1/\delta \\ \dfrac{1}{2m}(-\rho^2 - 2\sigma_{m-1} G_1(\rho) + 1/\delta^2 + \\ \quad \sigma_{m-1} G_1(1/\delta) + 1/2), & 1/\delta < \rho \leq 1 \\ \psi(1), & \rho > 1. \end{cases} \tag{5.60}$$

Для $h>0$ і $x\in\mathbb{R}^m$ покладемо

$$\varphi_{h,2}(x)=h^{-2}\psi(h|x|). \tag{5.61}$$

Враховуючи зображення оператора Лапласа для радіальних функцій

$$\Delta\varphi(\rho)=\varphi''(\rho)+\frac{m-1}{\rho}\varphi'(\rho),$$

неважко перевірити, що $\varphi_{h,2}\in W^{\Delta}_{\infty,s}\cap C(\mathbb{R}^m)$ і $\Delta\varphi_{h,2}(y)=\psi_h(y)$. Крім того,

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m}\varphi_{h,2}(y)=-\min_{y\in\mathbb{R}^m}\varphi_{h,2}(y)$$

і для довільного $y\in\mathbb{R}^m$

$$\varphi_{h,2}(y)=h^{\frac{2-m/s-\alpha/s}{1-1/s}}\varphi_{1,2}\left(h^{-1}y\right),$$

отже,

$$\|\varphi_{h,2}\|_\infty=h^{\frac{2-m/s-\alpha/s}{1-1/s}}\|\varphi_{1,2}\|_\infty.$$

Легко також переконатись, що

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty=h^{\frac{2-m/s-\alpha}{1-1/s}}\|D^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty,$$

і

$$\|\Delta\varphi_{h,2}\|_s=h^{\frac{2-\alpha-m/s}{s-1}}\|\Delta\varphi_{1,2}\|_s=h^{\frac{2-\alpha-\frac{m}{s}}{s-1}}.$$

Для заданого $h>0$ розглянемо оператор

$$U^\alpha_h f(x)=D^\alpha_h f(x)+\frac{2c_h\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}(f(x)-\widetilde{f}(x,h)), \tag{5.62}$$

де c_h вибрано з умови (5.58). Покажемо, що U^α_h обмежений оператор, що діє з $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$, і знайдемо його норму.

Для будь-якої функції $f\in L_\infty(\mathbb{R}^m)$ і $h>0$

$$\|U^\alpha_h f\|_\infty=\frac{1}{d_{m,2}(\alpha)}\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^m\setminus B_h}\frac{2f(\cdot)-f(\cdot+t)-f(\cdot-t)}{|t|^{m+\alpha}}\,dt+\right.$$

$$\left.+2c_h\sigma_{m-1}\Big(f(\cdot)-\widetilde{f}(\cdot,h)\Big)\right\|_\infty\le$$

$$\leq \frac{4\|f\|_\infty}{d_{m,2}(\alpha)} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} + c_h \sigma_{m-1} \right\} = \frac{4\|f\|_\infty \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h \right),$$

отже, (з урахуванням (5.59))

$$\|U_h^\alpha f\|_\infty \leq \frac{4\|f\|_\infty \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h \right) = \frac{4\|f\|_\infty \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} h^{-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right),$$

і значить,

$$\|U_h^\alpha\| \leq \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} h^{-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right). \tag{5.63}$$

Нагадаємо, що $\varphi_{h,2} \in C(\mathbb{R}^m)$ і зображення (5.57) для неї має місце в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$. Тому для будь-якого $h > 0$ правильна оцінка

$$\|U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \geq |U_h^\alpha \varphi_{h,2}(0)| =$$

$$= \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{2\varphi_{h,2}(0) - 2\varphi_{h,2}(y)}{|y|^{m+\alpha}} \, dy + 2c_h \sigma_{m-1} (\varphi_{h,2}(0) - \widetilde{\varphi}_{h,2}(0)) \Big| =$$

$$= \frac{4\|\varphi_{h,2}\|_\infty}{d_{m,2}(\alpha)} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{dy}{|y|^{m+\alpha}} + 4c_h \sigma_{m-1} \Big) = \frac{4\|\varphi_{h,2}\|_\infty \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} h^{-\alpha} \Big(\frac{1}{\alpha} + c_1 \Big),$$

отже,

$$\|U_h^\alpha\| \geq \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} h^{-\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right) = \frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty}. \tag{5.64}$$

З огляду на співвідношення (5.63) і (5.64) впевнюємось, що виконується

Лема 5.5.1. *Нехай* $h > 0$, $s > m/2$ *і* $0 < \alpha < 2 - m/s$ *або* $s = \infty$ *і* $0 < \alpha < 2$. *Тоді*

$$\|U_h^\alpha\| = \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h \right) = \frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} = h^{-\alpha} \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}.$$

Тепер для функцій $f \in L^\Delta_{\infty,s}$ ми отримаємо оцінку величини $\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty$.

Використовуючи означення $D^\alpha \varphi$ і $U_h^\alpha \varphi$, а також перехід до полярних координат, неважко впевнитись в тому, що для будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ і будь-якого $x \in \mathbb{R}^m$

$$D^\alpha \varphi(x) - U_h^\alpha \varphi(x) =$$

$$= \frac{2\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left\{ \int\limits_0^h (\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x,\rho)) \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}} - c_h (\varphi(x) - \widetilde{\varphi}(x,h)) \right\}.$$

Звідси, враховуючи зображення (5.57), застосоване до функції φ, отримуємо ($\forall x \in \mathbb{R}^m$)

$$D^\alpha \varphi(x) - U_h^\alpha \varphi(x) =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{B_h} (-\Delta\varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy. \qquad (5.65)$$

Враховуючи (5.65), легко бачити, що для будь-якої функції $f \in L^\Delta_{\infty,s}$ і будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x))\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)(D^\alpha \varphi(x) - U_h^\alpha \varphi(x))\, dx.$$

Звідси і з (5.65) отримаємо, що для $f \in L^\Delta_{\infty,s}$ при майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$ має місце зображення

$$D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x) =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{B_h} (-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy. \qquad (5.66)$$

Використовуючи (5.66) і нерівність Гельдера, отримаємо, що для майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$

$$|D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x)| \le \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_s \, \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{s'}$$

і, значить,

$$\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty \le \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_s \, \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{s'}. \qquad (5.67)$$

В силу (5.67) маємо

$$\|D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \le \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{s'}. \qquad (5.68)$$

Аналогічно (5.65), враховуючи, що для функції $\varphi_{h,2}$ зображення (5.57) має місце в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$, одежимо, що для функції $\varphi_{h,2}$ при всіх $x \in \mathbb{R}^m$ правильна рівність

$$D^\alpha \varphi_{h,2}(x) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(x) =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{B_h} (-\Delta\varphi_{h,2}(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy.$$

Як згортка функцій $\Delta\varphi_{h,2} \in L_s(\mathbb{R}^m)$ і $F_h(|y|) - c_h G_h(|y|) \in L_{s'}(\mathbb{R}^m)$ функція $D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}$ буде неперервною в будь-якій точці $x \in \mathbb{R}^m$. Функція $U_h^\alpha\varphi_{h,2}(x)$ також буде неперервною в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$. Значить, неперервною буде і $D^\alpha\varphi_{h,2}(x)$.

Враховуючи зазначену неперервність функції $D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}$ і означення функції ψ_h, отримуємо

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \geq |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int\limits_{B_h} \psi_h(|y|)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy \right| =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{s'}.$$

Звідси і з (5.68) робимо висновок, що

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty = |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)\|_{s'}. \tag{5.69}$$

Зіставляючи (5.67) і (5.69), бачимо, що правильна

Лема 5.5.2. *Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для будь-якого $h > 0$ і для будь-якої функції $f \in L^\Delta_{\infty,s}$*

$$\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty \leq \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \|\Delta f\|_s =$$
$$= h^{2-\alpha-\frac{m}{s}} \|D^\alpha\varphi_{1,2} - U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty \|\Delta f\|_s. \tag{5.70}$$

Нерівність (5.70) перетворюється на рівність для $f(t) = \varphi_{h,2}(t)$.

Із лем 5.5.1 і 5.5.2 випливає

Лема 5.5.3. *Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$ та для $N > 0$*

$$h_N = \left(\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тоді $\|U^{\alpha}_{h_N}\| = N$ *і*

$$E_N(D^{\alpha}, W^{\Delta}_{\infty,s}) \le \sup_{f\in W^{\Delta}_{\infty,s}} \|D^{\alpha}f - U^{\alpha}_{h_N}f\|_{\infty} =$$

$$= h_N^{2-\alpha-m/s}\|D^{\alpha}\varphi_{1,2} - U^{\alpha}_1\varphi_{1,2}\|_{\infty} =$$

$$= N^{1-\frac{2-m/s}{\alpha}}\left(\frac{\|U^{\alpha}_1\varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}}\right)^{\frac{2-m/s}{\alpha}-1}\|D^{\alpha}\varphi_{1,2} - U^{\alpha}_1\varphi_{1,2}\|_{\infty}.$$

Нерівності типу Колмогорова. Перейдемо до встановлення нерівностей типу Колмогорова.

Із лем 5.5.1 і 5.5.2 для $f \in L^{\Delta}_{\infty,s}$ при $s > m/2$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ випливає, що для будь-якого $h > 0$

$$\|D^{\alpha}f\|_{\infty} \le \|D^{\alpha}f - U^{\alpha}_h f\|_{\infty} + \|U^{\alpha}_h f\|_{\infty} \le$$

$$\le h^{2-\alpha-\frac{m}{s}}\|D^{\alpha}\varphi_{1,2} - U^{\alpha}_1\varphi_{1,2}\|_{\infty}\|\Delta f\|_s + h^{-\alpha}\frac{\|U^{\alpha}_1\varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}}\|f\|_{\infty}. \qquad (5.71)$$

Покажемо, що нерівність (5.71) перетворюється на рівіність для функції $f(y) = \varphi_{h,2}(y)$.

В силу неперервності функції $\varphi_{h,2}(y)$ в точці 0 маємо

$$\|D^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty} \ge |D^{\alpha}\varphi_{h,2}(0)| = |D^{\alpha}\varphi_{h,2}(0) - U^{\alpha}_h\varphi_{h,2}(0) + U^{\alpha}_h\varphi_{h,2}(0)|.$$

Як неважко перевірити, $D^{\alpha}\varphi_{h,2}(0) - U^{\alpha}_h\varphi_{h,2}(0) < 0$ і $U^{\alpha}_h\varphi_{h,2}(0) < 0$. Тому, використовуючи ще співвідношення (5.69), одержимо

$$\|D^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty} \ge |D^{\alpha}\varphi_{h,2}(0) - U^{\alpha}_h\varphi_{h,2}(0)| + |U^{\alpha}_h\varphi_{h,2}(0)| =$$

$$= h^{\frac{2-m/s-\alpha}{1-1/s}}\|D^{\alpha}\varphi_{1,2} - U^{\alpha}_1\varphi_{1,2}\|_{\infty} + h^{-\alpha}\frac{\|U^{\alpha}_1\varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}}\|\varphi_{h,2}\|_{\infty}.$$

Отже, нерівність (5.71) точна, і нами доведена

Теорема 5.5.1. *Нехай* $m/2 < s < \infty$, $0 < \alpha < 2 - m/s$ *або* $s = \infty$ *і* $0 < \alpha < 2$. *Тоді для будь-якої функції* $f \in L^{\Delta}_{\infty,s}$ *при кожному* $h > 0$ *має місце точна нерівність*

$$\|D^{\alpha}f\|_{\infty} \le$$

$$\leq h^{2-\alpha-m/s}\|D^\alpha\varphi_{1,2}-U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty\cdot\|\Delta f\|_s+h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\cdot\|f\|_\infty. \quad (5.72)$$

Нерівність (5.72) перетворюється на рівність для функції $f(y) =$ $= \varphi_{h,2}(y)$.

Отримаємо тепер мультиплікативну нерівність. Візьмемо довільну функцію f із $L^\Delta_{\infty,s}$ і виберемо h так, щоб виконувалось

$$\frac{\|f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s}=\|\varphi_{h,2}\|_\infty=h^{2-m/s}\|\varphi_{1,2}\|_\infty. \quad (5.73)$$

Із (5.73) випливає, що $h=\left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\right)^{\frac{1}{2-m/s}}$. Покажемо, що

$$\frac{\|D^\alpha f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s}\leq\|D^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty.$$

Дійсно, з урахуванням теореми 5.5.1 отримаємо

$$\frac{\|D^\alpha f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s}\leq h^{2-\alpha-m/s}\|D^\alpha\varphi_{1,2}-U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty+h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\cdot\frac{\|f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s},$$

звідки для $h=\left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\right)^{\frac{1}{2-m/s}}$ випливає

$$\frac{\|D^\alpha f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s}\leq\left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\right)^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}\|D^\alpha\varphi_{1,2}-U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty+$$

$$+\left(\frac{\|\Delta f\|_s\|\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|f\|_\infty}\right)^{\frac{\alpha}{2-m/s}}\cdot\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\frac{\|f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s}=$$

$$=\left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\right)^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}\left(\|D^\alpha\varphi_{1,2}-U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty+\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty\right).$$

Враховуючи, що для функції $\varphi_{1,2}$ нерівність (5.72) при $h=1$ перетворюється на рівність, остаточно отримаємо

$$\frac{\|D^\alpha f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s}\leq\frac{\|D^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}}\left(\frac{\|f\|_\infty}{\|\Delta f\|_s}\right)^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}.$$

Отже, доведена

Теорема 5.5.2. *Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для довільної функції $f \in L^{\Delta}_{\infty,s}$ має місце точна нерівність*

$$\|D^{\alpha}f\|_{\infty} \le \frac{\|D^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}}\|f\|_{\infty}^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}\|\Delta f\|_{s}^{\frac{\alpha}{2-m/s}}. \qquad (5.74)$$

Нерівність (5.74) перетворюється на рівність для функцій вигляду $f(t) = a\varphi_{h,2}(t)$, $h > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Із теореми 5.5.2 випливає

Наслідок 5.5.1. *В умовах теореми 5.5.2 для всіх $\delta > 0$*

$$\Omega\left(\delta, D^{\alpha}, W^{\Delta}_{\infty,s}\right) = \frac{\|D^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}}\delta^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}.$$

Задача Стєчкіна. Розв'яжемо задачу про найкраще наближення оператора D^{α} обмеженими.

Нехай $h_N = \left(\dfrac{\|U_1^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}N}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ для $N > 0$. Із леми 5.5.3 випливає, що

$$E_N(D^{\alpha}, W^{\Delta}_{\infty,s}) \le h_N^{2-\alpha-m/s}\|D^{\alpha}\varphi_{1,2} - U_1^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty} =$$

$$= N^{1-\frac{2-m/s}{\alpha}}\left(\frac{\|U_1^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}}\right)^{\frac{2-m/s}{\alpha}-1}\|D^{\alpha}\varphi_{1,2} - U_1^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty},$$

а із точності нерівності (5.72) теореми 5.5.1 випливає, що для оператора D^{α} виконується умова (4.14) теореми 4.1.1 з оператором $T = U^{\alpha}_{h_N}$ і функцією $f = \varphi_{h_N,2}$. Таким чином, справджується

Теорема 5.5.3. *Нехай $N > 0$, $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді*

$$E_N(D^{\alpha}, W^{\Delta}_{\infty,s}) = h_N^{2-\alpha-m/s}\|D^{\alpha}\varphi_{1,2} - U_1^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty} =$$

$$= \left(\frac{\|U_1^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty}N}\right)^{\frac{2-m/s}{\alpha}-1}\|D^{\alpha}\varphi_{1,2} - U_1^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty}.$$

При цьому оператор (5.62) з $h = h_N$ є екстремальним оператором.

Задача оптимального відновлення. Тепер, користуючись теоремою 4.1.2, можемо отримати значення величини оптимальної похибки відновлення оператора D^α за допомогою множини відображень $\mathcal{L}(C,C)$ і $\mathcal{O}(C,C)$ на елементах класу $W^\Delta_{\infty,s}$, заданих з похибкою δ. Виберемо h із умови

$$\|\varphi_{h,2}\|_\infty = \delta,$$

тобто покладемо

$$h = h_\delta = \left(\frac{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}{\delta}\right)^{\frac{1}{2+(2-m-\alpha)(s'-1)}}.$$

Для функції $\varphi_{h,2}$ і оператора U_h^α, як уже зазначалось, виконана умова (4.14) теореми 4.1.1, і, значить, в силу теореми 4.1.2

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,s}) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,s}) = \|D^\alpha \varphi_{h_\delta,2}\|_\infty = \Omega(\delta, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,s}).$$

Отже, правильна

Теорема 5.5.4. *Нехай $N > 0$, $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для всіх $\delta > 0$*

$$\mathcal{E}_\delta(\mathcal{O}, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,s}) = \mathcal{E}_\delta(\mathcal{L}, D^\alpha, W^\Delta_{\infty,s}) = \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}} \delta^{\frac{2-\alpha-m/s}{2-m/s}}.$$

При цьому оператор (5.62) при $h = h_\delta$ є екстремальним оператором.

Задача Колмогорова. Ми розглянемо такий варіант задачі Колмогорова. Нехай числа M_0, M_α, M_Δ задані. Треба знайти необхідну і достатню умови існування функції $f \in L^\Delta_{\infty,s}$ такої, що

$$\|f\|_\infty = M_0, \quad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \quad \|\Delta f\|_s = M_\Delta.$$

Розв'язок цієї задачі дає

Теорема 5.5.5. *Нехай $m/2 < s < \infty$, $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$, M_0, M_α, M_Δ – додатні числа. Для існування функції $f \in L^\Delta_{\infty,s}$ такої, що*

$$\|f\|_\infty = M_0, \quad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \quad \|\Delta f\|_s = M_\Delta,$$

необхідно і достатньо, щоб

$$M_\alpha \le \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{2-m/s}}} M_0^{1-\frac{\alpha}{2-m/s}} M_\Delta^{\frac{\alpha}{2-m/s}}. \tag{5.75}$$

Доведення. Необхідність випливає із теореми 5.5.2. Доведемо достатність. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $M_\Delta = 1$. Оскільки виконана умова (5.75), то знайдеться $0 < L_0 \le M_0$, таке що

$$M_\alpha = \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{2-m/s}}} L_0^{1-\frac{\alpha}{2-m/s}}.$$

Нехай h_0 вибране з умови $\|\varphi_{h_0,2}\|_\infty = L_0$, тоді в силу теореми 5.5.2

$$\|D^\alpha \varphi_{h_0,2}\|_\infty = \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{2-m/s}}} L_0^{1-\frac{\alpha}{2-m/s}},$$

звідки отримаємо $\|D^\alpha \varphi_{h_0,2}\|_\infty = M_\alpha$. Візьмемо функцію $f = \varphi_{h_0,2} + M_0 - L_0$. Зрозуміло, що

$$\|f\|_\infty = M_0, \quad \|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha, \quad \|\Delta f\|_s = M_\Delta = 1.$$

Отже, функція f – шукана.

Теорему доведено.

5.5.2. Нерівності типу Колмогорова для норм похідних Ріса функцій багатьох змінних зі скінченною в ідеальній структурі нормою лапласіана

Нехай F і E – ідеальні структури. Через $L^\Delta_{F,E} = L^\Delta_{F,E}(\mathbb{R}^m)$ позначимо простір функцій $f \in F$ таких, що $\Delta f \in E$. Через $W^\Delta_{F,E}$ позначимо клас функцій f із $L^\Delta_{F,E}$, для яких $\|\Delta f\|_E \le 1$.

Якщо $F = L_p(\mathbb{R}^m)$, то будемо використовувати позначення $L^\Delta_{p,E}$ і $W^\Delta_{p,E}$ відповідно, а якщо до того ж $E = L_s(\mathbb{R}^m)$ $(1 \le s \le \infty)$, то отримаємо $L^\Delta_{p,s}$ і $W^\Delta_{p,s}$ відповідно.

Нехай, як і раніше, $\widetilde{G}_h(x,y)$ $(h > 0)$ – функція Гріна кулі B_h, $\widetilde{f}(x,h)$ – усереднення функції f в точці x за сферою радіуса h.

В пункті 5.5.1 показано, що для довільної двічі неперервно диференційовної функції f:

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\,dy.$$

Для будь-якої функції $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}$ і будь-якої фінітної нескінченно диференційовної функції φ маємо:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) f(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x) \left[\widetilde{\varphi}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta\varphi(x \mp y))\,dy \right] dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left[\widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\,dy \right] dx,$$

де $G_h(\rho)$ – функція, означена в пункті 5.5.1.

Тобто для $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}$ і майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$ буде

$$f(x) = \widetilde{f}(x,h) + \int\limits_{B_h} G_h(|y|)(-\Delta f(x \pm y))\,dy. \tag{5.76}$$

В пункті 5.5.1 було також введено функцію

$$F_h(t) = \begin{cases} \int\limits_t^h G_\rho(t) \frac{d\rho}{\rho^{\alpha+1}}, & t \in (0,h], \\ 0, & t > h \end{cases}$$

і показано, що для функцій $G_h(|y|)$ і $F_h(|y|)$ мають місце співвідношення:

$$G_h(|y|) = h^{2-m} G_1(|y|/h)$$

і

$$F_h(|y|) = h^{2-\alpha-m} F_1(|y|/h).$$

Для $t > 0$ покладемо

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{m+\alpha-2}}, & m \geq 3, \\ \frac{\ln t}{t^\alpha}, & m = 2. \end{cases}$$

Скрізь нижче ми припускаємо, що

$$G(|t|)\chi_{[-1,1]} \in E^1 \tag{5.77}$$

і

$$\lim_{h\to 0^+} \|G(|t|)\chi_{[-h,h]}\|_{E^1} = 0. \tag{5.78}$$

Зазначимо, що при виконанні цих умов при будь-якому $c \in \mathbb{R}$ функція $F_h(|y|) - cG_h(|y|)$ належить простору E^1.

Оберемо $c = c_h$ з умови

$$\int\limits_{B_h} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy = 0. \tag{5.79}$$

Як неважко зрозуміти, для будь-якого $h > 0$ буде

$$c_h = h^{-\alpha} c_1. \tag{5.80}$$

Нехай $h > 0$ і $\widetilde{\psi}_h(\rho)$ – деяка функція однієї змінної з $\mathrm{supp}\widetilde{\psi}_h = [0, h]$, в середньому рівна нулю. Припустимо, що існує функція $\psi_h \in E$ ($\mathrm{supp}\psi_h = B_h$, $\psi_h(y) = \widetilde{\psi}_h(|y|)$, $\|\psi\|_E = 1$) така, що справджується рівність:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\widetilde{\psi}_h(|y|)\, dy = \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}. \tag{5.81}$$

Означимо функцію $\widetilde{\varphi}_{h,2}(\rho)$ в такий спосіб. Для $\rho \in (0, h]$ покладемо

$$\widetilde{\varphi}_{h,2}(\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\int\limits_0^\rho - \int\limits_\rho^h\right) \int\limits_t^h u^{m-1}\widetilde{\psi}_h(u)\, du \dfrac{dt}{t^{m-1}}, & \rho \in [0, h] \\ \dfrac{1}{2}\int\limits_0^h \int\limits_t^h u^{m-1}\widetilde{\psi}_h(u)\, du \dfrac{dt}{t^{m-1}}, & \rho > h. \end{cases} \tag{5.82}$$

Для $y \in \mathbb{R}^m$ покладемо

$$\varphi_{h,2}(y) = \widetilde{\varphi}_{h,2}(|y|). \tag{5.83}$$

Враховуючи зображення оператора Лапласа для радіальних функцій

$$\Delta\varphi(\rho) = \varphi''(\rho) + \frac{m-1}{\rho}\varphi'(\rho),$$

неважко перевірити, що $\varphi_{h,2} \in W^{\Delta}_{\infty,E} \cap C(\mathbb{R}^m)$ і $\Delta\varphi_{h,2}(y) = \psi_h(y)$. Крім того,

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m} \varphi_{h,2}(y) = -\min_{y\in\mathbb{R}^m} \varphi_{h,2}(y).$$

Для заданого $h > 0$ розглянемо оператор

$$U_h^\alpha f(x) = D_h^\alpha f(x) + \frac{2c_h\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}(f(x) - \widetilde{f}(x,h)), \tag{5.84}$$

де c_h обрано з умови (5.79). Так само, як в пункті 5.5.1, доводиться твердження

Лема 5.5.4. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (5.77) і (5.78), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді при виконанні умов (5.81)–(5.83) для довільного $h > 0$*

$$\|U_h^\alpha\| = \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}\left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h\right) = \frac{\|U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,2}\|_\infty} = h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha\varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}.$$

Тепер для функцій $f \in L_{\infty,E}^\Delta$ ми отримаємо оцінку величини $\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty$.

В пункті 5.5.1 показано, що для довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ і довільного $x \in \mathbb{R}^m$

$$D^\alpha\varphi(x) - U_h^\alpha\varphi(x) =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int\limits_{B_h}(-\Delta\varphi(x+y))(F_h(|y|) - c_hG_h(|y|))\,dy. \tag{5.85}$$

Враховуючи (5.85), легко бачити, що для будь-якої функції $f \in L_{\infty,E}^\Delta$ і довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)(D^\alpha\varphi(x) - U_h^\alpha\varphi(x))\,dx.$$

Звідси і із (5.85) виводимо, що для $f \in L_{\infty,E}^\Delta$ при майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$ має місце зображення

$$D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x) =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\int\limits_{B_h}(-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_hG_h(|y|))\,dy. \tag{5.86}$$

Використовуючи (5.86) і нерівність Гельдера, отримаємо, що для майже всіх $x \in \mathbb{R}^m$

$$|D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x)| \le \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|\Delta f\|_E\,\|F_h(|\cdot|) - c_hG_h(|\cdot|)\|_{E^1}$$

і, значить,

$$\|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty \le \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|\Delta f\|_E\, \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}\,. \tag{5.87}$$

В силу (5.87) маємо

$$\|D^\alpha \varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}\|_\infty \le \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\, \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}\,. \tag{5.88}$$

Враховуючи, що для функції $\varphi_{h,2}$ зображення (5.76) має місце в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$, аналогічно (5.85), встановлюємо, що для $\varphi_{h,2}$ при всіх $x \in \mathbb{R}^m$ справедлива рівність

$$D^\alpha \varphi_{h,2}(x) - U_h^\alpha \varphi_{h,2}(x) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{B_h} (-\Delta\varphi_{h,2}(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy.$$

Як згортка функцій $\Delta\varphi_{h,2} \in E$ і $F_h(|y|) - c_h G_h(|y|) \in E^1$ функція $D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha \varphi_{h,2}$ неперервна в будь-якій точці $x \in \mathbb{R}^m$. Функція $U_h^\alpha\varphi_{h,2}(x)$ також буде неперервною в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m$. Значить, неперервною буде і $D^\alpha\varphi_{h,2}(x)$.

Враховуючи неперервність функції $D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}$ і означення функції ψ_h, отримаємо

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \ge |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int\limits_{B_h} \psi_h(|y|)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy \right| =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}.$$

Звідси і із (5.88)отримаємо

$$\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty = |D^\alpha\varphi_{h,2}(0) - U_h^\alpha\varphi_{h,2}(0)| =$$
$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)\|_{E^1}. \tag{5.89}$$

Відзначимо, що при виконанні умови (5.78) $\|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty \to 0$, $h \to 0$. Зіставляючи (5.87) і (5.89), бачимо, що справедлива

Лема 5.5.5. *Нехай виконуються умови леми 5.5.4. Тоді при виконанні умов (5.81)–(5.83) для довільного $h > 0$ і для будь-якої функції $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}$*

$$\|D^{\alpha} f - U_h^{\alpha} f\|_{\infty} \le \|D^{\alpha}\varphi_{h,2} - U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty}\|\Delta f\|_E. \tag{5.90}$$

Нерівність (5.90) перетворюється на рівність для $f(t) = \varphi_{h,2}(t)$.

Із лем 5.5.4 і 5.5.5 випливає

Лема 5.5.6. *Нехай виконуються умови леми 5.5.4 і для $N > 0$*

$$h_N = \left(\frac{\|U_1^{\alpha}\varphi_{1,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{1,2}\|_{\infty} N}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тоді при виконанні умов (5.81)–(5.83) $\|U^{\alpha}_{h_N}\| = N$ і

$$E_N(D^{\alpha}, W^{\Delta}_{\infty,E}) \le \sup_{f \in W^{\Delta}_{\infty,E}} \|D^{\alpha} f - U^{\alpha}_{h_N} f\|_{\infty} = \|D^{\alpha}\varphi_{h_N,2} - U^{\alpha}_{h_N}\varphi_{h_N,2}\|_{\infty}.$$

Оцінка рівномірної норми похідної Рісса. Припустимо, що виконуються умови (5.81)–(5.83). Із лем 5.5.4 і 5.5.5 для $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}$ при умовах (5.77) і (5.78) випливає, що для будь-якого $h > 0$

$$\|D^{\alpha} f\|_{\infty} \le \|D^{\alpha} f - U_h^{\alpha} f\|_{\infty} + \|U_h^{\alpha} f\|_{\infty} \le$$

$$\le \|D^{\alpha}\varphi_{h,2} - U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty}\|\Delta f\|_E + \frac{\|U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{h,2}\|_{\infty}}\|f\|_{\infty}. \tag{5.91}$$

Покажемо, що нерівність (5.91) перетворюється на рівність для функції $\varphi_{h,2}(y)$. Оскільки функція $D^{\alpha}\varphi_{h,2}(y)$ неперервна в точці 0, маємо:

$$\|D^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty} \ge |D^{\alpha}\varphi_{h,2}(0)| = |D^{\alpha}\varphi_{h,2}(0) - U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}(0) + U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}(0)|.$$

Оскільки $D^{\alpha}\varphi_{h,2}(0) - U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}(0)$ і $U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}(0)$ одного знаку, можемо написати, використовуючи (5.89):

$$\|D^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty} \ge |D^{\alpha}\varphi_{h,2}(0) - U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}(0)| + |U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}(0)| =$$

$$= \|D^{\alpha}\varphi_{h,2} - U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty} + h^{-\alpha}\frac{\|U_h^{\alpha}\varphi_{h,2}\|_{\infty}}{\|\varphi_{h,2}\|_{\infty}}\|\varphi_{h,2}\|_{\infty}.$$

Отже, нерівність (5.91) точна, і нами доведена

Теорема 5.5.6. *Нехай* $0 < \alpha < 2$, E *– ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура на* $\mathbb{R}^m$, *що задовольняє умови (5.77) і (5.78),* E^1 *– асоційований підпростір до* E. *Тоді, якщо виконуються умови (5.81)–(5.83), то для довільної* $f \in L^{\Delta}_{\infty,E}$ *і* $h > 0$

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le h^{-\alpha}\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty}\cdot\|f\|_\infty + \|D^\alpha\varphi_{h,2} - U_h^\alpha\varphi_{h,2}\|_\infty\cdot\|\Delta f\|_E. \quad (5.92)$$

Нерівність (5.92) є точною і перетворюється на рівність для функції $\varphi_{h,2}(y)$.

Припустимо тепер, що умови (5.81)–(5.83) не виконуються. В цьому випадку оцінку для $\|D^\alpha f\|_\infty$ запишемо у вигляді (див. (5.87)):

$$\|D^\alpha f\|_\infty \le \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_\infty + \|U_h^\alpha f\|_\infty \le$$

$$\le \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}\|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}\|\Delta f\|_E + \frac{4\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)}h^{-\alpha}(1/\alpha + c_1)\|f\|_\infty =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)}(2h^{-\alpha}\sigma_{m-1}(1/\alpha + c_1)\|f\|_\infty + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1}\|\Delta f\|_E).$$

Для кожного $\varepsilon > 0$ існує функція $\psi_{h,\varepsilon} \in E$, $\|\psi_{h,\varepsilon}\|_E \le 1$, така що

$$\int\limits_{B_h}(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\psi_{h,\varepsilon}(y)\,dy > \|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)\|_{E^1} - \varepsilon.$$

і

$$\psi_{h,\varepsilon}(y) = \widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}(|y|),\ \ y \in \mathbb{R}^m,$$

де $\widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}(\rho)$ в середньому дорівнює нулю і $\mathrm{supp}\widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}(\cdot) = [0,h]$.

Далі ми означимо $\widetilde{\varphi}_{h,2}(\rho)$ формулою (5.82) з функцією $\widetilde{\psi}_{h,\varepsilon}$ замість $\widetilde{\psi}_h$ і покладемо:

$$\varphi_{h,\varepsilon,2}(y) = \widetilde{\varphi}_{h,\varepsilon,2}(|y|),\ \ y \in \mathbb{R}^m.$$

Зрозуміло, що $\varphi_{h,\varepsilon,2} \in W^{\Delta}_{\infty,E}(\mathbb{R}^m)$,

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m}\varphi_{h,\varepsilon,2}(y) = -\min_{y\in\mathbb{R}^m}\varphi_{h,\varepsilon,2}(y)$$

і

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\Delta\varphi_{h,\varepsilon,2}(y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{B_h} (F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\psi_{h,\varepsilon}(y)\,dy > \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon.$$

Міркуючи, як і в попередньому випадку, в силу неперервності функції $D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(y)$ в точці 0 маємо:

$$\|D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty \geq |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| = |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) + U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)|.$$

$$= |D^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0) - U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| + |U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left| \int\limits_{B_h} \psi_{h,\varepsilon}(y)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\,dy \right| + |U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}(0)| >$$

$$> \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon + \|U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} - \varepsilon + \frac{4\sigma_{m-1} h^{-\alpha}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right) \|\varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty.$$

Рівність

$$\frac{\|U_h^\alpha \varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty}{\|\varphi_{h,\varepsilon,2}\|_\infty} = \frac{4\sigma_{m-1} h^{-\alpha}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right)$$

встановлюється аналогічно до відповідної рівності в лемі 5.5.4. Отже, можемо сформулювати теорему

Теорема 5.5.7. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (5.77) і (5.78), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді для довільних $f \in L^\Delta_{\infty,E}$ і $h > 0$ виконується точна нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{2\sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right) h^{-\alpha} \cdot \|f\|_\infty + \right.$$
$$\left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} \cdot \|\Delta f\|_E \right). \tag{5.93}$$

Задача Стєчкіна. Тепер знайдемо величину найкращого наближення оператора D^α обмеженими операторами.

Нехай виконуються умови (5.81) – (5.83). Для $N > 0$ покладемо

$$h_N = \left(\frac{4\sigma_{m-1}\left(\frac{1}{\alpha} + c_1\right)}{d_{m,2}(\alpha) N} \right)^{1/\alpha} = \left(\frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty N} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

для $N > 0$. Із леми 5.5.6 випливає, що

$$E_N(D^\alpha, W^\Delta_{\infty,E}) \le \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} = \|D^\alpha \varphi_{h_N,2} - U_1^\alpha \varphi_{h_N,2}\|_\infty,$$

а із точності нерівності (5.92) випливає, що для оператора D^α виконується умова (4.14) теореми 4.1.1 із [26] з оператором $T = U^\alpha_{h_N}$ і функцією $f(t) = \varphi_{h_N,2}$. Отже справедлива

Теорема 5.5.8. *Нехай $0 < \alpha < 2$, $N > 0$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (5.77) і (5.78), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді при виконанні умов (5.81) – (5.83) справджується рівність:*

$$E_N(D^\alpha, W^\Delta_{\infty,E}) = \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{E^1} = \|D^\alpha \varphi_{h_N,2} - U_1^\alpha \varphi_{h_N,2}\|_\infty.$$

При цьому оператор U^α_h з $h = h_N$ є екстремальним оператором.

5.5.3. Оцінки норм похідних Рісса в ідеальній структурі для функцій зі скінченною нормою лапласіана

Для $h > 0$ і функції $f \in L^\Delta_{E,E}$ розглянемо оператор (5.84). Застосовуючи узагальнену нерівність Мінковського, маємо:

$$\|U^\alpha_h\|_E = \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{2f(\cdot) - f(\cdot + t) - f(\cdot - t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt +$$

$$+ 2c_h \sigma_{m-1}(f(\cdot) - \widetilde{f}(\cdot, h)) \Bigg\|_E \le$$

$$\le \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \cdot 4\|f\|_E \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus B_h} \frac{dt}{|t|^{m+\alpha}} + c_h \sigma_{m-1} \right\} = \frac{4\|f\|_E \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{\alpha} + c_h \right).$$

Тепер для функції $f \in L^\Delta_{E,E}$ отримаємо оцінку величини $\|D^\alpha f(\cdot) -$ $- U^\alpha_h f(\cdot)\|_E$. Спочатку покажемо, що для $f \in L^\Delta_{E,E}$ має місце зображення

$$D^\alpha f(x) - U^\alpha_h f(x) =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{B_h} (-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy. \qquad (5.94)$$

Дійсно, оскільки $\Delta f \in E$, то використовуючи нерівність Гельдера, з урахуванням умови (5.77), маємо

$$\left| \int\limits_{B_h} (-\Delta f)(x+y)(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy \right| \leq$$

$$\leq \|\Delta f\|_E \|F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)\|_{E^1}. \qquad (5.95)$$

Як в пункті 5.5.1, встановлюємо, що для довільної фінітної нескінченно диференційовної функції φ і для $f \in L^{\Delta}_{E,E}$ має місце зображення

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)(D^\alpha f(x) - U_h^\alpha f(x))\, dx =$$

$$= \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \int\limits_{B_h} (-\Delta f(x+y))(F_h(|y|) - c_h G_h(|y|))\, dy\, dx,$$

звідки з урахуванням (5.95), маємо (5.94).

Використовуючи (5.94) і узагальнену нерівність Мінковського, одержимо оцінку:

$$\|D^\alpha f(\cdot) - U_h^\alpha f(\cdot)\|_E \leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_E \int\limits_{B_h} |F_h(|y|) - c_h G_h(|y|)|\, dy.$$

Тепер для $\|D^\alpha f\|_E$ можемо написати

$$\|D^\alpha f\|_E \leq \|D^\alpha f - U_h^\alpha f\|_E + \|U_h^\alpha f\|_E \leq$$

$$\leq \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \|\Delta f\|_E \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_1 + \frac{4\|f\|_E \sigma_{m-1}}{d_{m,2}(\alpha)} \left(\frac{h^{-\alpha}}{2} + c_h \right) =$$

$$= \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \Big(2\sigma_{m-1} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right) h^{-\alpha} \cdot \|f\|_E +$$

$$+ \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_{L_1} \cdot \|\Delta f\|_E \Big).$$

Таким чином, нами доведена

Теорема 5.5.9. *Нехай $0 < \alpha < 2$, E – ідеальна напівінваріантна відносно зсуву структура на $\mathbb{R}^m$, що задовольняє умови (5.77) і (5.78), E^1 – асоційований підпростір до E. Тоді для довільних $f \in L^{\Delta}_{E,E}$ і $h > 0$ виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_E \le \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left(2\sigma_{m-1} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right) h^{-\alpha} \cdot \|f\|_E + \right.$$
$$\left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_1 \cdot \|\Delta f\|_E \right).$$

Із теореми 5.5.9 одразу випливає

Наслідок 5.5.2. *Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для довільних функції $f \in L^{\Delta}_{s,s}$ і $h > 0$ виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_s \le \frac{2}{d_{m,2}(\alpha)} \left(2\sigma_{m-1} \left(\frac{1}{\alpha} + c_1 \right) h^{-\alpha} \cdot \|f\|_s + \right.$$
$$\left. + \|F_h(|\cdot|) - c_h G_h(|\cdot|)\|_1 \cdot \|\Delta f\|_s \right). \tag{5.96}$$

При $s = \infty$ нерівність є точною.

Відзначимо, що нерівність (5.96) можна переписати у вигляді

$$\|D^\alpha f\|_s \le$$
$$\le \frac{\|U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty} h^{-\alpha} \|f\|_s + \|D^\alpha \varphi_{1,2} - c_1 U_1^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty h^{2-\alpha} \|\Delta f\|_s. \tag{5.97}$$

Після мінімізації по h остання нерівність набуває вигляду

$$\|D^\alpha f\|_s \le \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \|\Delta f\|_s^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_s^{1-\frac{\alpha}{2}}. \tag{5.98}$$

В (5.97) і (5.98) функція $\varphi_{1,2}$ означена в пункті 5.5.1 формулами (5.60) і (5.61).

Отже, маємо

Наслідок 5.5.3. *Нехай $m/2 < s < \infty$ і $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і $0 < \alpha < 2$. Тоді для довільних функції $f \in L^{\Delta}_{s,s}$ і $h > 0$ виконується нерівність*

$$\|D^\alpha f\|_s \le \frac{\|D^\alpha \varphi_{1,2}\|_\infty}{\|\varphi_{1,2}\|_\infty^{1-\alpha/2}} \|\Delta f\|_s^{\frac{\alpha}{2}} \|f\|_s^{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

При $s = \infty$ нерівність є точною.

Відзначимо, що у випадку $s = \infty$ результати наслідків 5.5.2 і 5.5.3 отримані в [53].

5.6. Оцінка рівномірної норми одновимірного потенціала Рісса частинної похідної функції з обмеженим лапласіаном

Через $CL_\infty^\Delta = CL_\infty^\Delta(\mathbb{R}^m)$ позначимо клас функцій $u \in C$, для яких значення оператора Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$$

належить $L_\infty(\mathbb{R}^m)$. У випадку $m = 1$ під Δu ми розуміємо u'', при цьому u'' і Δu ми розуміємо у сенсі Соболєва.

В цьому підрозділі ми продовжимо дослідження, пов'язані з нерівністю В. Г. Тимофєєва (5.55) (див. [219] і [220]), розпочаті в підрозділі 5.5, в іншому напрямі, а саме отримаємо точну нерівність типу Колмогорова для рівномірних норм одновимірних потенціалів Рісса.

Нехай $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$ і $\alpha \in (0, 1)$. Одновимірним потенціалом Рісса (означення потенціала Рісса див. [184, с.173]) порядку α частинної похідної $\partial u / \partial x_i$ функції u назвемо

$$(I_{x_i}^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x - te_i)}{|t|^{1-\alpha}}\, dt,$$

де e_i – i-й орт простору $\mathbb{R}^m$.

Для $h > 0$ і $i = 1, ..., m$ означимо функцію $v_{h,i}$ в такий спосіб

$$v_{h,i}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_i}{h^2}(h - x_i) + \dfrac{x_i}{h}, & x_i \in [0, h], \\ \dfrac{x_i}{h^2}(h + x_i) + \dfrac{x_i}{h}, & x_i \in [-h, 0], \\ \mathrm{sign} x_i, & x_i \notin [-h, h]. \end{cases} \tag{5.99}$$

У випадку $m = 1$ замість $v_{h,i}$ будемо писати v_h, а замість x_i будемо писати x.

В данній роботі ми отримаємо непокращувані нерівності, що оцінюють $\|I^\alpha_{x_i} u'_{x_i}\|_C$ через $\|u\|_C$ і $\|\Delta u\|_\infty$.

Теорема 5.6.1. *Нехай $0 < \alpha < 1$. Тоді для будь-якої функції $f \in CL^\Delta_\infty$ при кожному $h > 0$ та $i = 1, ..., m$, мають місце точні нерівності*

$$\|I^\alpha_{x_i} u'_{x_i}\|_C \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{2}{h^{1-\alpha}} \|u\|_C + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} h^{1+\alpha} \|\Delta u\|_\infty \right), \qquad (5.100)$$

які перетворюються на рівності для функцій $v_{h,i}$ при всіх $h > 0$.

Крім того, для будь-якої функції $f \in CL^\Delta_\infty$ виконується точна нерівність

$$\|I^\alpha_{x_i} u'_{x_i}\|_\infty \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha+2)} 2^{\frac{1+\alpha}{2}} \|u\|_C^{\frac{1+\alpha}{2}} \|\Delta u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

яка перетворюється на рівність для функції $v_{h,i}$ за будь-якого значення параметра $h > 0$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $m = 1$. Як добре відомо (див., наприклад, [28], співвідношення (6)), для $u \in CL^\Delta_\infty$ має місце зображення

$$u(x) = u(-h)\frac{h-x}{2h}(x,-h) + u(h)\frac{x+h}{2h}(x,h) - \int_{-h}^{h} G(x,t)u''(t)\,dt =$$

$$= u(-h)\frac{\partial G}{\partial t}(x,-h) - u(h)\frac{\partial G}{\partial t}(x,h) - \int_{-h}^{h} G(x,t)u''(t)\,dt, \quad x \in [-h,h],$$

де

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(h-x)(t+h)}{2h}, & t \in [-h,x], \\ \dfrac{(h-t)(x+h)}{2h}, & t \in [x,h], \end{cases} \qquad (5.101)$$

а під $\dfrac{\partial G}{\partial t}(x,-h)$ і $\dfrac{\partial G}{\partial t}(x,h)$ мається на увазі права і лівая похідні відповідно.

Звідси для похідної будь-якої функції $u \in CL^\Delta_\infty$ легко випливає зображення

$$u'(x) = u(-h)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}(x,-h) - u(h)\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}(x,h) - \int_{-h}^{h} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)u''(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2h}(u(h) - u(-h)) - \int\limits_{-h}^{h} \frac{\partial G}{\partial x}(x,t)u''(t)\,dt, \tag{5.102}$$

яке, доречі, неважко отримати і безпосередньо.

Для функції $u \in CL_\infty^\Delta$ із (5.102) випливає неперервність першої похідної u', а разом з нею і неперервність $I^\alpha u'$. Одержимо оцінку зверху для $\|I^\alpha u'\|_C$. Для цього, з огляду на інваріантність величини $\|I^\alpha u'\|_C$ відносно зсуву аргумента, достатньо оцінити $|I^\alpha u'(0)|$. Для будь-якого $h > 0$ маємо:

$$(I^\alpha u')(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u'(t)}{|t|^{1-\alpha}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)u'(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-h}^{h} \left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right) u'(t)\,dt,$$

де

$$\Phi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h^{1-\alpha}}, & t \in [-h,h], \\ \dfrac{1}{|t|^{1-\alpha}}, & t \notin [-h,h]. \end{cases}$$

Після інтегрування частинами в першому доданку, підстановки виразу (5.102) для $u'(t)$ в другий доданок і зміни порядку інтегрування отримаємо

$$(I^\alpha u')(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(t)u(t)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-h}^{h} \left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right) u'(t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(t)u(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-h}^{h} \left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right) \left\{ \frac{1}{2h}(u(h) - u(-h)) - \int\limits_{-h}^{h} \frac{\partial G}{\partial t}(t,\xi)u''(\xi)\,d\xi \right\} dt.$$

Отже,

$$(I^\alpha u')(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(t)u(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{2h}(u(h)-u(-h))\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}-\frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)dt-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}u''(\xi)\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}-\frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\frac{\partial G}{\partial t}(t,\xi)\,dtd\xi. \qquad (5.103)$$

Теперь оцінимо $|I^\alpha u'(0)|$:

$$|I^\alpha u'(0)|\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Phi'(t)|\,dt+\frac{1-\alpha}{\alpha}2h^{\alpha-1}\right)\|u\|_C+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}|F(\xi)|\,d\xi\cdot\|u''\|_\infty=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{2h^{\alpha-1}}{\alpha}\|u\|_C+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}|F(\xi)|\,d\xi\cdot\|u''\|_\infty, \qquad (5.104)$$

де

$$F(\xi)=\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}-\frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\frac{\partial G}{\partial t}(t,\xi)\,dt,\quad \xi\in[-h,h].$$

Покажемо, що $\int\limits_{-h}^{h}|F(\xi)|\,d\xi=\frac{1-\alpha}{\alpha(1+\alpha)}h^{1+\alpha}$.

Розглянемо функцію v_h, $h>0$, (див.(5.99)). Для її похідної маємо:

$$v_h'(x)=\begin{cases}\frac{2}{h}-\frac{2x}{h^2}, & x\in[0,h],\\ \frac{2}{h}+\frac{2x}{h^2}, & x_1\in[-h,0],\\ 0, & x\notin[-h,h].\end{cases}$$

Обчислюючи $I^\alpha v_h'$ в точці $x=0$, отримаємо

$$(I^\alpha v_h')(0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}v_h'(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{h}\frac{1}{t^{1-\alpha}}\left(\frac{2}{h}-\frac{2t}{h^2}\right)dt+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{0}\frac{1}{(-t)^{1-\alpha}}\left(\frac{2}{h}+\frac{2t}{h^2}\right)dt=$$

$$= \frac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} h^{\alpha-1}. \tag{5.105}$$

Як неважко перевірити, $F(\xi) \leq 0$ для $\xi \in [-h, 0]$, і $F(\xi) \geq 0$ для $\xi \in [0, h]$. З урахуванням цього зауваження вираз (5.103) для цієї функції набуває вигляду

$$(I^\alpha v_h')(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2h^{\alpha-1}}{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2}{h^2} \int\limits_{-h}^{h} |F(\xi)|\, d\xi.$$

Значить, з огляду на (5.105), отримаємо

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2h^{\alpha-1}}{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{2}{h^2} \int\limits_{-h}^{h} |F(\xi)|\, d\xi = \frac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} h^{\alpha-1},$$

Звідки

$$\int\limits_{-h}^{h} |F(\xi)|\, d\xi = \frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha+1)} h^{\alpha+1}. \tag{5.106}$$

Підставляючи (5.106) в (5.104), отримаємо

$$|I^\alpha u'(0)| \leq \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2}{h^{1-\alpha}} \|u\|_C + \frac{1-\alpha}{1+\alpha} h^{1+\alpha} \|\Delta u\|_\infty \right),$$

звідки випливає нерівність (5.100) у випадку $m = 1$.

Враховуючи співвідношення $\|v_h\|_C = 1$, $\|v_h''\|_\infty = \dfrac{2}{h^2}$ і $\|I^\alpha v_h'\|_\infty = = \dfrac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} h^{\alpha-1}$, неважко переконатись в тому, що нерівність (5.100) перетворюється на рівність для функції v_h.

Підставляючи в праву частину (5.100) $h = \sqrt{\dfrac{2\|u\|_C}{\|u''\|_\infty}}$, приходимо до нерівності

$$\|I^\alpha u'\|_\infty \leq \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \frac{2^{\frac{1+\alpha}{2}}}{\alpha(1+\alpha)} \|u\|_C^{\frac{1+\alpha}{2}} \|u''\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

яка перетворюється на рівність для функції v_h за будь-якого значення параметра h.

Тепер розглянемо випадок $m \geq 2$. Виділимо в $\mathbb{R}^m$ шар

$$\Pi_h = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m : -h < \xi_1 < h,\ -\infty < \xi_i < \infty,\ i = 2, ..., m\},$$

$h > 0$.

Нехай $G(\xi, \eta)$ – функція Гріна внутрішньої задачі Діріхлє для шару Π_h, тобто

$$G(\xi,\eta) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(m/2)}{(n-2)2\pi^{m/2}}|\xi-\eta|^{2-m} - g(\xi,\eta), & m \geq 3, \\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln|\xi-\eta| - g(\xi,\eta), & m = 2, \end{cases}$$

де $g(\xi, \eta)$ – гармонічна функція в Π_h, така що для всіх $\eta \in \Pi_h$ виконується рівність $G(\xi, \eta) = 0$, якщо $\xi \in \partial\Pi_h$.

Зазначимо, що раніше задача Діріхлє для шару в $\mathbb{R}^m$ використовувалась В. Г. Тімофєєвим при дослідженні ним нерівностей Колмогорова (див. [219], [220]).

Відомо (див, наприклад, [219] і [220]), що для частинної похідної першого порядку будь-якої функції $u \in CL_\infty^\Delta$ має місце таке інтегральне зображення

$$u'_{x_1}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) =$$
$$= -\int\limits_{\partial\Pi_h} u(\xi)\frac{\partial^2 G(\xi,x)}{\partial x_1 \partial n_\xi}\,d\xi - \int\limits_{\Pi_h} \Delta u(\xi)\frac{\partial G(\xi,x)}{\partial x_1}\,d\xi, \ \ x \in \Pi_h, \qquad (5.107)$$

де $\dfrac{\partial G(\xi,x)}{\partial n_\xi}$ – похідна за напрямком зовнішньої нормалі до межі $\partial\Pi_h$ області Π_h.

Для функції $u \in CL_\infty^\Delta$ із [220] випливає неперервність першої частинної похідної u'_{x_1}, а разом з нею і неперервність $I^\alpha_{x_1}u'_{x_1}$. Отримаємо оцінку зверху для $\|I^\alpha_{x_1}(u'_{x_1})\|_C$. Як і у випадку m=1 для цього достатньо оцінити величину $|I^\alpha_{x_1}(u'_{x_1})(0)|$.

Для будь-якого $h > 0$ маємо:

$$(I^\alpha_{x_1}u'_{x_1})(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{u'_{x_1}(te_1)}{|t|^{1-\alpha}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(t)u'_{x_1}(te_1)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)u'_{x_1}(t)\,dt,$$

де, як і вище, функція $\Phi(t)$ означена співвідношенням

$$\Phi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{h^{1-\alpha}}, & t\in[-h,h],\\ \dfrac{1}{|t|^{1-\alpha}}, & t\notin[-h,h].\end{cases}$$

Після інтегрування частинами в першому доданку і підстановки із (5.107) виразу для u'_{x_1} в другий доданок одержимо

$$(I^{\alpha}_{x_1}u'_{x_1})(0)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(t)u(te_1)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}-\frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\Big\{-\int\limits_{\partial\Pi_h}u(\xi)\frac{\partial^2G(\xi,te_1)}{\partial x_1\partial n_\xi}\,d\xi-$$

$$-\int\limits_{\Pi_h}\Delta u(\xi)\frac{\partial G(\xi,te_1)}{\partial x_1}\,d\xi\Big\}\,dt.$$

Після зміни порядку інтегрування матимемо

$$(I^{\alpha}_{x_1}u'_{x_1})(0)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(t)u(te_1)\,dt-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\partial\Pi_h}u(\xi)\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}-\frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\frac{\partial^2G(\xi,te_1)}{\partial x_1\partial n_\xi}\,dt\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\Pi_h}\Delta u(\xi)\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}-\frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\frac{\partial G(\xi,te_1)}{\partial x_1}\,dt\,d\xi. \tag{5.108}$$

Покладаючи

$$F_1(\xi)=\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}-\frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\frac{\partial^2G(\xi,te_1)}{\partial x_1\partial n_\xi}\,dt,\quad \xi\in\partial\Pi_h, \tag{5.109}$$

$$F_2(\xi)=\int\limits_{-h}^{h}\left(\frac{1}{|t|^{1-\alpha}}-\frac{1}{h^{1-\alpha}}\right)\frac{\partial G(\xi,te_1)}{\partial x_1}\,dt\quad \xi\in\Pi_h, \tag{5.110}$$

перепишемо (5.108) у вигляді

$$(I^{\alpha}_{x_1}u'_{x_1})(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi'(t)u(te_1)\,dt - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\partial\Pi_h}F_1(\xi)u(\xi)\,d\xi -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\Pi_h}F_2(\xi)\Delta u(\xi)\,d\xi. \qquad (5.111)$$

Тепер оцінимо $|(I^{\alpha}_{x_1}u'_{x_1})(0)|$:

$$|(I^{\alpha}_{x_1}u'_{x_1})(0)| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Phi'(t)||u(te_1)|\,dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\partial\Pi_h}|F_1(\xi)||u(\xi)|\,d\xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\Pi_h}|F_2(\xi)||\Delta u(\xi)|\,d\xi \leq$$

$$\leq A(m,\alpha)\|u\|_C + B(m,\alpha)\|\Delta u\|_{\infty}, \qquad (5.112)$$

де

$$A(m,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Phi'(t)|\,dt + \int\limits_{\partial\Pi_h}|F_1(\xi)|\,d\xi\right),$$

$$B(m,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\Pi_h}|F_2(\xi)|\,d\xi.$$

Для обчислення $A(m,\alpha)$ і $B(m,\alpha)$ нам знадобляться деякі властивості функцій $F_1(\xi)$ і $F_2(\xi)$, які ми сформулюємо у вигляді тверджень.

Твердження 5.6.1. *Якщо* $\xi_1 = -h$, *то* $F_1(\xi)|_{\xi_1=-h} \geq 0$. *Якщо* $\xi_1 = h$, *то* $F_1(\xi)|_{\xi_1=h} \leq 0$.

Доведення. Нехай $\mathcal{M}(t) = \dfrac{1}{|t|^{1-\alpha}} - \dfrac{1}{h^{1-\alpha}}$. Тоді (5.109) перепишемо у вигляді

$$F_1(\xi) = \int\limits_{-h}^{h}\mathcal{M}(t)\frac{\partial^2 G(\xi, te_1)}{\partial x_1 \partial n_{\xi}}\,dt. \qquad (5.113)$$

Після інтегрування частинами в (5.113) маємо

$$F_1(\xi) = -\int\limits_{-h}^{h} \mathcal{M}'(t)\frac{\partial G(\xi, te_1)}{\partial n_\xi}\, dt =$$

$$= -\left(\int\limits_{-h}^{0} + \int\limits_{0}^{h}\right) \mathcal{M}'(t)\frac{\partial G(\xi, te_1)}{\partial n_\xi}\, dt. \qquad (5.114)$$

Зазначимо, що $\mathcal{M}'(t)$, як непарна функція, набуває від'ємних значень для $t \in (0, h)$. Після заміни змінної в першому доданку в (5.114), отримаємо

$$F_1(\xi) = \int\limits_{0}^{h} (-\mathcal{M}'(t))\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(G(\xi, te_1) - G(\xi, -te_1)\right) dt.$$

Для $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ покладемо $\widetilde{\xi} = (-\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Оскільки функція $G(\xi, \eta)$ є функцією Гріна шару Π_h, то, як неважко перевірити, функція $\overline{G}(\xi, \eta) = G(\xi, \eta) - G(\xi, \widetilde{\eta})$ є функцією Гріна шару

$$\Pi_h' = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m : 0 < \xi_1 < h, -\infty < \xi_i < \infty,\ \ i = 2, ..., m\},$$

$h > 0$.

Значить,

$$\frac{\partial \overline{G}(\xi, \eta)}{\partial n_\xi}\Big|_{\partial \Pi_h'} \leq 0, \qquad (5.115)$$

де $\dfrac{\partial \overline{G}(\xi, \eta)}{\partial n_\xi}$ – похідна за напрямком зовнішньої нормалі до $\partial \Pi_h'$.

Враховуючи цю властивість і той факт, що $(-\mathcal{M}'(t)) > 0$ при $0 < t < h$, отримаємо, що $F_1(\xi)|_{\xi_1 = h} \leq 0$.

Аналогічно, виконуючи заміну в другому інтегралі (5.114), ми прийдемо до зображення

$$F_1(\xi) = \int\limits_{-h}^{0} (-\mathcal{M}'(t))\frac{\partial}{\partial n_\xi}\left(G(\xi, te_1) - G(\xi, -te_1)\right) dt =$$

$$= \int\limits_{-h}^{0} (-\mathcal{M}'(t))\frac{\partial}{\partial n_\xi}\overline{G}(\xi, te_1)\, dt.$$

Враховуючи, що функція $\overline{G}(\xi,\eta)$ є функцією Гріна шару

$\Pi''_h = \{(\xi_1,...,\xi_n) \in \mathbb{R}^n : -h < \xi_1 < 0, -\infty < \xi_i < \infty,\ \ i = 2,...,n\},\ h > 0,$

від'ємність функції $(-\mathcal{M}'(t))$ для $t \in (-h,0)$ і властивість (5.115), отримаємо, що $F_1(\xi)|_{\xi_1=-h} \geq 0$.

Твердження 5.6.1 доведене.

Твердження 5.6.2. *Якщо* $-h \leq \xi_1 \leq 0$*, то* $F_2(\xi) \leq 0$*, а якщо* $0 \leq \xi_1 \leq h$*, то* $F_2(\xi) \geq 0$*.*

Доведення. Діючи, як при доведенні твердження 5.6.1, дістанемо зображення

$$F_2(\xi) = \int\limits_0^h (-\mathcal{M}'(t))\overline{G}(\xi, te_1)\,dt, \tag{5.116}$$

де $\overline{G}(\xi,\eta) = G(\xi,\eta) - G(\xi,\widetilde{\eta})$ – функція Гріна шару Π'_h, і

$$F_2(\xi) = \int\limits_{-h}^0 (-\mathcal{M}'(t))\overline{G}(\xi, te_1)\,dt, \tag{5.117}$$

де $\overline{G}(\xi,\eta) = G(\xi,\eta) - G(\xi,\widetilde{\eta})$ – функція Гріна шару Π''_h.

Оскільки $\overline{G}(\xi,\eta) \geq 0$ в Π'_h, а $(-\mathcal{M}'(t)) > 0$ при $0 < t < h$, то з (5.116) одержуємо, що $F_2(\xi) \geq 0$ при $0 \leq \xi_1 \leq h$. Аналогічно, використовуючи від'ємність $(-\mathcal{M}'(t))$ при $-h < t < 0$, з (5.117) отримуємо, що $F_2(\xi) \leq 0$ при $-h \leq \xi_1 \leq 0$.

Твердження 5.6.2 доведено.

Обчислимо $A(m,\alpha)$. З цією метою розглянемо функцію

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}x_1, & x \in \Pi_h, \\ \operatorname{sign} x_1, & x \notin \Pi_h. \end{cases}$$

Функція w є розв'язком задачі $\Delta w = 0$, $w|_{\partial\Pi_h} = \mathrm{sign}\xi_1$ в шарі Π_h. Вираз (5.111) для цієї функції з урахуванням твердження 5.6.1 набуває вигляду

$$(I^\alpha_{x_1} w'_{x_1})(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(t) w(te_1)\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\partial\Pi_h} |F_1(\xi)|\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi'(t)|\, dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\partial\Pi_h} |F_1(\xi)|\, d\xi \tag{5.118}$$

Отже,

$$A(m, \alpha) = (I^{\alpha}_{x_1} w'_{x_1})(0).$$

Обчислюючи $(I^{\alpha}_{x_1} w'_{x_1})(0)$, отримаємо

$$A(m, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h} \int\limits_{-h}^{h} \frac{1}{|t|^{1-\alpha}}\, dt = \frac{2}{\alpha\Gamma(\alpha)} \frac{1}{h^{1-\alpha}}. \tag{5.119}$$

Для відшукання $B(m, \alpha)$ розглянемо функцію $v_{h,1}$, $h > 0$ (див.(5.99))

Для її похідної маємо:

$$(v_{h,1})'_{x_1} = \begin{cases} \frac{2}{h} - \frac{2x_1}{h^2}, & x_1 \in [0, h], \\ \frac{2}{h} + \frac{2x_1}{h^2}, & x_1 \in [-h, 0], \\ 0, & x_1 \notin [-h, h]. \end{cases}$$

Зрозуміло, що

$$(I^{\alpha}_{x_1} (v_{h,1})'_{x_1})(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t|^{1-\alpha}} (v_{h,1})'_{x_1}(e_1 t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{0}^{h} \frac{1}{t^{1-\alpha}} \left(\frac{2}{h} - \frac{2t}{h^2} \right) dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-h}^{0} \frac{1}{(-t)^{1-\alpha}} \left(\frac{2}{h} + \frac{2t}{h^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2}{h} \int\limits_{0}^{h} \frac{1}{t^{1-\alpha}}\, dt - \frac{2}{h^2} \int\limits_{0}^{h} t^{\alpha}\, dt + \frac{2}{h} \int\limits_{-h}^{0} \frac{dt}{(-t)^{1-\alpha}} + \frac{2}{h^2} \int\limits_{-h}^{0} \frac{t}{(-t)^{1-\alpha}}\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2}{\alpha} h^{\alpha-1} - \frac{2}{\alpha+1} h^{\alpha-1} + \frac{2}{\alpha} h^{\alpha-1} - \frac{2}{\alpha+1} h^{\alpha-1} \right) =$$

$$= \frac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)} h^{\alpha-1}. \tag{5.120}$$

В той же час, з урахуванням тверджень 5.6.1 і 5.6.2, вираз (5.111) для цієї функції набуває вигляду

$$(I^{\alpha}_{x_1} (v_{h,1})'_{x_1})(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi'(t) v_{h,1}(te_1)\, dt -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\partial\Pi_h} F_1(\xi)v(\xi)\,d\xi - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\Pi_h} F_2(\xi)\Delta v(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi'(t)|\,dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\partial\Pi_h} |F_1(\xi)|\,d\xi + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\Pi_h} |F_2(\xi)|\frac{2}{h^2}\,d\xi =$$

$$= A(m,\alpha) + \frac{2}{h^2}B(m,\alpha).$$

Значить, з урахуванням (5.120), отримаємо

$$A(m,\alpha) + \frac{2}{h^2}B(m,\alpha) = \frac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}h^{\alpha-1}.$$

Звідки, використовуючи (5.119), знаходимо

$$B(m,\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}h^{1+\alpha}. \tag{5.121}$$

Підставляючи (5.119) і (5.121) в (5.112), одержимо нерівність

$$|(I^{\alpha}_{x_1}u'_{x_1})(0)| \le \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(\frac{2}{h^{1-\alpha}}\|u\|_C + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}h^{1+\alpha}\|\Delta u\|_\infty\right).$$

Звідки випливає нерівність (5.100). Враховуючи ті обставини, що $\|v_{h,1}\|_C = 1$, $\|\Delta v_{h,1}\|_\infty = \frac{2}{h^2}$ і $\|I^{\alpha}_{x_1}(v_{h,1})'_{x_1}\|_\infty = \frac{4}{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)}h^{\alpha-1}$, неважко переконатись в тому, що нерівність (5.100) перетворюється на рівність для функції $v_{h,1}$.

Підставляючи в праву частину (5.100) $h = \sqrt{\frac{2\|u\|_C}{\|\Delta u\|_\infty}}$, приходимо до нерівності

$$\|I^{\alpha}_{x_1}u'_{x_1}\|_\infty \le \frac{2}{\Gamma(\alpha)}\frac{2^{\frac{1+\alpha}{2}}}{\alpha(1+\alpha)}\|u\|_C^{\frac{1+\alpha}{2}}\|\Delta u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

яка перетворюється на рівність для функції $v_{h,1}$ при будь-якому значенні параметра h.

Теорему доведено.

Висновки до розділу 5

В розділі 5 ми досліджуємо нерівності Колмогорова для функцій багатьох змінних, а також застосування цих нерівностей до розв'язання споріднених задач. Результати цих досліджень полягають у такому.

Отримано нові точні мультиплікативні нерівності типу Колмогорова для норм мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів, одержані результати застосовані до розв'язку задачі наближення необмеженого оператора дробового диференціювання за Маршо обмеженими на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності.

Одержано точні нерівності, що оцінюють L_∞–норми похідної Рісса D^α функцій багатьох змінних через L_∞–норму самої функції і L_s–норму $(1 \leq s \leq \infty)$ її градієнта, розв'язано задачі найкращого наближення оператора D^α на класі функцій f таких, що $\|\nabla f\|_s \leq 1$, і задачі оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Розглянуто також більш загальну ситуацію, коли модулі градієнтів функцій f належать ідеальній структурі і досліджене питання оцінки норми похідної Рісса функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, отримано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^\nabla_{p,p}(\mathbb{R}^m)$.

Встановлено точні нерівності, що оцінюють L_∞–норму гіперсингулярних інтегралів з однорідною характеристикою функцій, заданих на $\mathbb{R}^m$, через L_∞–норми самих функцій і вагові L_s–норми їх градієнтів.

Доведено точну нерівність типу Колмогорова для функцій $f \in L^\Delta_{\infty,s}$, $1 \leq s \leq \infty$, що оцінює норму D^α $(0 < \alpha < 2)$ через $\|f\|_\infty$ і $\|\Delta f\|_s$, а також розв'язано задачу найкращого наближення оператора D^α на класі $W^\Delta_{\infty,s}$ і задачу оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Розглянуто також більш загальну ситуацію, коли лапласіани функцій f належать ідеальній структурі. Здобуто оцінки норм функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, одержано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^\Delta_{p,p}(\mathbb{R}^m)$.

Одержано точні нерівності для норм одновимірних потенціалів Рісса функцій багатьох змінних з обмеженим в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leq s \leq \infty)$ лапласіаном.

Результати цього розділу опубліковано в роботах: [259, 44, 47, 53, 172, 50, 176, 178, 51, 52, 260, 45, 258, 48, 49, 290] (див. також роботи [9, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 22, 30, 32, 34, 35, 37, 38, 39, 40] зі списку публікацій здобувача с. 10–15).

ВИСНОВКИ

Дисертаційну роботу присвячено класичним задачам дослідження найкращих наближень і поперечників за Колмогоровим функціональних класів, деяким питанням відносної апроксимації, одержанню точних нерівностей типу Колмогорова для норм дробових похідних та інтегралів функцій однієї та багатьох змінних, а також застосуванню цих нерівностей в задачах теорії наближення. Основні результати роботи викладено в таких пунктах.

1. Знайдено нові екстремальні підпростори для поперечників за Колмогоровим класів диференційовних періодичних функцій W^rF, старша похідна яких належить довільній перестановочно-інваріантній множині F та класів функцій W^rH^ω, обмеження на старшу похідну яких задаються опуклим вгору модулем неперервності $\omega(t)$.

При цьому одержані точні значення найкращих наближень в метриці L_1 класів W^rF підпросторами сплайнів $S^2_{2n,m}$ порядку $m \geq r$ дефекту 2 з вузлами в точках $\dfrac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ і підпросторами сплайнів $S^1_{2n,m}(h)$ порядку $m \geq r+1$ дефекту 1 з вузлами в точках $\dfrac{2k\pi}{n}$ і $\dfrac{2k\pi}{n}+h$, $k \in \mathbb{Z}$, $h \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}\right)$, а також точні значення найкращих наближень класів W^rH^ω такими сплайнами порядку $m \geq r+1$. Показано, що саме ці підпростори разом з тригонометричними поліномами порядку не вище $n-1$ і сплайнами мінімального дефекту з рівновіддаленими вузлами реалізують поперечники $d_{2n}(W^rF, L_1)$ і $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$.

Отримані результати, а також деякі ідеї, використані для їх доведення дали можливість одержати точні нерівності типу Бернштейна для сплайнів $S^2_{2n,m}$ і нерівності типу Джексона для сплайнів $S^2_{2n,m}$ і $S^1_{2n,m}(h)$.

2. Знайдено точні значення найкращих наближень класів згорток функцій з довільної Π–інваріантної множини з ядрами K, що не збільшують кількість змін знаку на періоді, підпросторами згорток $K * S^2_{2n,r}$ і $K * S^1_{2n,r}(h)$, $r \in \mathbb{N}$, $h \in \left(0, \dfrac{2\pi}{n}\right)$, $h \neq \dfrac{\pi}{n}$ (випадок $h = \dfrac{\pi}{n}$ був відомий).

Такий підхід дозволяє значно розширити набір наближуваних класів у порівнянні з класами згорток з ядрами Бернуллі (класи диференційовних функцій). Крім того, разом зі звичайними наближеннями ми розглядаємо односторонні наближення і (α, β)–наближення. Зокрема, використання (α, β)–наближеннь дозволяє охопити одночасно великий клас задач від симетричних до односторонніх наближень, розглядаючи їх з єдиної точки зору.

Отримані результати, зокрема, показують, що підпростри $K * S^2_{2n,r}$ і $K * S^1_{2n,r}(h)$ у випадку $K \in CVD$ разом з підпросторами $K * S^1_{2n,r}$ виявились екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$.

3. Отримано порядкові рівності при $n \to \infty$ для найкращих L_q–наближень класів W^r_p $(1 \le p \le q \le 2)$ диференційовних періодичних функцій сплайнами порядку r з цих класів. З'ясовано, що у випадку $p = q = 2$ для $r = 3, 4, ...$ порядок цих наближень істотно відрізняється від порядку відповідних поперечників за Колмогоровим, отже послідовність підпросторів $\{S^1_{2n,r}\}$ не є екстремальною за порядком для поперечників $d_n(W^r_2, L_2, W^r_2)$ при $r = 3, 4, ...$

Отримано порядкові рівності для відносних слабких поперечників класів згорток функцій з одиничної кулі простору істотно обмежених за нормою банаховозначних функцій з дійсним ядром в рівномірній метриці. Цей результат поширює відомі результати В. М. Коновалова, В. М. Коновалова і А. В. Павлика, В. Ф. Бабенка і Л. Е. Азара.

4. Отримано точні нерівності для норм дробових похідних за Маршо функцій $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$, $1 \le s \le \infty$, які у випадку $1 \le s \le \infty$ оцінюють L_∞–норми похідних порядку $0 < \alpha < 1$, а у випадку $1 < s \le \infty$ – порядку $1 < \alpha < 2 - \dfrac{1}{s}$ через L_∞–норму самої функції і L_s–норму її другої похідної, аналогічні результати одержано для норм дробових похідних за Адамаром функцій, визначених на дійсній півосі.

5. Отримано нові точні мультиплікативні нерівності типу Колмогорова для норм мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох

змінних з гельдерових просторів, одержані результати застосовані до розв'язку задачі наближення необмеженого оператора дробового диференціювання за Маршо обмеженими на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності.

Одержано точні нерівності, що оцінюють L_∞–норми похідної Рісса D^α функцій багатьох змінних через L_∞–норму самої функції і L_s–норму $(1 \le s \le \infty)$ її градієнта, розв'язано задачі найкращого наближення оператора D^α на класі функцій f таких, що $\|\nabla f\|_s \le 1$, і задачі оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Розглянуто також більш загальну ситуацію, коли градієнти функцій f належать ідеальній структурі і досліджене питання оцінки норми похідної Рісса функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, отримано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^\nabla_{p,p}(\mathbb{R}^m)$.

Встановлено точні нерівності, що оцінюють L_∞–норму гіперсингулярних інтегралів з однорідною характеристикою функцій, заданих на $\mathbb{R}^m$, через L_∞–норми самих функцій і вагові L_s–норми їх градієнтів.

Доведено точну нерівність типу Колмогорова для функцій $f \in L^\Delta_{\infty,s}$, $1 \le s \le \infty$, що оцінює норму D^α $(0 < \alpha < 2)$ через $\|f\|_\infty$ і $\|\Delta f\|_s$, а також розв'язано задачу найкращого наближення оператора D^α на класі $W^\Delta_{\infty,s}$ і задачу оптимального відновлення оператора D^α на елементах цього класу, заданих з похибкою. Розглянуто також більш загальну ситуацію, коли лапласіани функцій f належать ідеальній структурі. Здобуто оцінки норм функції f в ідеальній структурі та, як наслідок, одержано нерівності типу Колмогорова, що оцінюють L_p–норми функцій $f \in L^\Delta_{p,p}(\mathbb{R}^m)$.

Одержано точні нерівності для норм одновимірних потенціалів Рісса функцій багатьох змінних з обмеженим в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ $(1 \le s \le \infty)$ лапласіаном.

Ці результати продовжують дослідження В. Г. Тимофєєва щодо точної нерівності, яка оцінює L_∞–норми перших частинних похідних функцій через їх L_∞–норми та L_∞–норми їх лапласіанів і є багатовимірним аналогом відомої нерівності Ландау.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азар Л. Э. Об относительных поперечниках классов функций многих переменных, задаваемых в виде свертки // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 1998. Вип. 3. С. 3–18.

2. Азар Л. Э. Аппроксимация функциональных классов при наличии ограничений. Дисс. ... канд. физ.–мат. наук. Днепропетровск: ДГУ, 1999. 115 с.

3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.

4. Арестов В. В. О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.

5. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 3–20.

6. Арестов В. В. Наилучшее приближение неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН СССР. 1992. Т. 198. С. 3–20.

7. Арестов В. В. Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 88–124.

8. Арестов В. В., Габушин В. Н. Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. 1995. № 11. С. 42–63.

9. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.

10. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. С. 107–112.

11. Ахиезер Н. И., Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков: ГОНТИ, 1938. 255 с.

12. Бабаджанов С. Б., Тихомиров В. М. О поперечниках одного класса в пространстве L_p // Известия АН Узб. ССР. Сер. физ.-мат. 1967. Т. 2. С. 24–30.

13. Бабенко А. Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L_2 // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 5. С. 651–664.

14. Бабенко В. Ф. Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций //Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 11. С. 409–416.

15. Бабенко В. Ф. Неравенства для перестановок дифференцируемых периодических функций, задачи приближения и приближенного интегрирования //Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 5. С. 1038–1041.

16. Бабенко В. Ф. Приближение классов сверток // Сибирский математический журнал. 1987. Т. 28, № 5. С. 6–21.

17. Бабенко В. Ф. Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы. Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Днепропетровск: ДГУ, 1987. 275 с.

18. Бабенко В. Ф. Приближение в среднем при наличии ограничений на производные приближающих функций // Вопросы анализа и приближений. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1989. С. 9 – 18.

19. Бабенко В. Ф. О наилучших равномерных приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Матем. заметки. 1991. Т. 50, вып. 6. С. 24–30.

20. Бабенко В. Ф. О наилучших L_1–приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные // Там само. 1992. Т. 51, вып. 5. С. 12–19.

21. Бабенко В. Ф. Наилучшие L_1-приближения классов W_1^r сплайнами из W_1^r // Укр. мат. журн. 1994. Т. 46, № 10. С. 1410–1413.

22. Бабенко В. Ф. Точные неравенства для норм промежуточных производных полуцелого порядка и некоторые их приложения // Доп. НАН України. 1997. № 2. С. 23–26.

23. Бабенко В. Ф. О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных // Доп. НАН України. 2000. № 5. С. 7–11.

24. Бабенко В. Ф. Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям //Укр. мат. журн. 2000. Т. 52, № 1. С. 9-29.

25. Бабенко В. Ф., Чурилова М. С. Оценки норм дробных производных через интегральные модули непрерывности и их приложения //Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 9. С. 1155-1168.

26. Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А. Неравенства для производных и их приложения. К.: Наук. думка, 2003. 591 с.

27. Бабенко В. Ф., Левченко Д. О. Нерівності типу Колмогорова для гіперсингулярних інтегралів зі знакозмінною характеристикою // Проблеми математичного моделювання: міждержавна науково-методична конференція. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2008. С. 7–8.

28. Бабенко В. Ф., Лескевич Т. Ю. Приближение некоторых классов функций многих переменных гармоническими сплайнами // Укр. мат. журн. 2010. Т. 64, № 8. С. 1011–1024.

29. Бабенко В. Ф., Матвеева Т. В. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных // Вiсник Днiпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2008. Вип. 6. С. 15–20.

30. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О наилучших L_1-приближениях функциональных классов сплайнами при наличии ограничений на их производные // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 4. С. 435–444.

31. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О порядке относительных поперечников некоторых функциональных классов // Вiсник Днiпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2002. Вип. 7. С. 7–15.

32. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О порядке относительных поперечников некоторых классов функций со значениями в банаховом пространстве // Вiсник Днiпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2004. Вип. 9. С. 9–16.

33. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О порядке относительных приближений некоторых функциональных классов сплайнами // Современные проблемы теории функций и их приложения: 14-ая Саратовская зимняя школа. Саратов: СГУ, 2008. С. 17–18.

34. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Наилучшие приближения классов периодических функций сплайнами дефекта 2 // Проблеми математичного моделювання: мiждержавна науково-методична конференцiя. Днiпродзержинськ: ДДТУ, 2008. С. 9–10.

35. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами дефекта 2 // Боголюбiвськi читання, 2008. Диференцiальнi рiвняння, теорiя функцiй та їх застосування : мiжнародна конференцiя. Мелiтополь: IМ НАНУ, 2008. С. 11–12.

36. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Точные значения наилучших приближений классов периодических функций сплайнами дефекта 2 //Матем. заметки. 2009. Т. 85, № 4. С. 538–551.

37. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Бернштейна для сплайнов дефекта 2 // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 7. С. 995–999.

38. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, заданных на полуоси // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2009. Вип. 14. С. 31–35.

39. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Несимметричные приближения классов периодических функций сплайнами дефекта 2 и неравенства типа Джексона // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 11. С. 1443–1454.

40. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами // Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III: international conference. Svityaz: IM NASU, 2009. P. 16–17.

41. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О порядке относительных приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 2. С. 147–157.

42. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами //Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 5. С. 669–683.

43. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Точные неравенства типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, заданных

на полуоси // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2010. Вип. 15. С. 38–48.

44. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 60–70.

45. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных Рисса функций многих переменных // Modern Analysis: international conference. Donetsk: DonNU, 2011. С. 20.

46. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Семиренко А. А. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, определенных на полуоси, и их приложения // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2012. Вип. 17. С. 49–59.

47. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для норм поизводных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения // Український математичний вісник. 2012. Т. 9, № 2. С. 157–174.

48. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных // Боголюбівські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнародна конференція. Київ: ІМ НАНУ, 2013. С. 215–216.

49. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Точные неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных // Крымская международная математическая конференция. Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. С. 84.

50. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Оценка равномерной нормы одномерного потенциала Рисса частной производной функции с ограниченным лапласианом // Укр. мат. журн. 2016. Т. 68, № 7. С. 867–878.

51. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А. Точные неравенства для норм дробных производных функций многих переменных // Боголюбівські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнародна конференція. Мелітополь: ІМ НАНУ, 2008. С. 12.

52. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных // Approximation Theory and Applications: international conference. Dnipropetrovsk: DNU, 2010. P. 15.

53. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи // Матем. заметки. 2014. Т. 95, № 1. С. 3–17.

54. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Скороходов Д. С., Чурілова М. С. О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных производных функций, заданных на оси и полуоси // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнародна конференція. Кам'янець-Подільський: ІМ НАНУ, 2012. С. 18.

55. Бабенко В. Ф., Пичугов С. А. Аппроксимация непрерывных вектор-функций // Укр. мат. журн. 1994. Т. 46, N 11. С. 1435–1448.

56. Бабенко В. Ф., Пичугов С. А. Точные оценки для норм дробных производных функций многих переменных, удовлетворяющих условию Гельдера // Мат. заметки. 2010. Т. 87, вып. 1. С. 26–34.

57. Бабенко В. Ф., Чурілова М. Г. Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку //Вісник Дніпропетровського. ун-ту. Сер. Математика. 2001. Вип. 6. С. 16-20.

58. Бабенко В. Ф., Чурілова М. С. Про нерівності типу Колмогорова для дробових похідних функцій, визначених на дійсній осі // Там само. 2008. Вип. 13. С. 28–34.

59. Бабенко К. И. О наилучшем приближении одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22, № 5. С. 631–640.

60. Бабенко К. И. О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 2. – С. 247–250.

61. Бабенко К. И. О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132, № 5. – С. 982–985.

62. Бабенко К. И. Некоторые вопросы приближенного задания и вычисления функций I, II, III, IV. М.: Препринт ИПМ АН СССР, 1970.

63. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 452 с.

64. Бердышев В. И. О теорме Джексона в L_p. Труды МИАН СССР. 1967.–Т. 88. С. 3–16.

65. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: Конструктивная теория функций. М.: АН СССР, 1952. Т.1. 582 с.

66. Буслаев А. П. О приближении оператора дифференцирования // Матем. заметки. 1981. Т. 29, № 5. С. 731–742.

67. Буслаев А. П., Тихомиров В. М. О неравенствах для производных в многомерном случае // Матем. заметки. 1979. Т. 25, № 1. С. 59–74.

68. Вакарчук С. Б. Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n–поперечников классов (ψ, β)–дифференцируемых функций в L_2. I. // Укр. мат. журн. 2016. Т. 68, № 6. С. 723–745.

69. Вакарчук С. Б. Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n–поперечников классов (ψ, β)–дифференцируемых функций в L_2. II. // Там само. № 8. С. 1021–1036.

70. Вакарчук С. Б. Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n–поперечников классов (ψ, β)–дифференцируемых функций в L_2. III. // Там само. № 10. С. 1299–1319.

71. Великин В. Л. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1973. Т. 37, № 1. С. 165–185.

72. Габушин В. Н. Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 3. С. 291–298.

73. Габушин В. Н. О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полупрямой // Там само. 1969. Т. 6, № 5. С. 573–582.

74. Габушин В. Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Там само. 1970. Т. 8, № 5. – С. 551–562.

75. Габушин В. Н. Неравенства между производными в метриках L_p при $0 < p \leq \infty$ // Изв. АН СССР Сер. мат. 1976. Т. 40, № 4. С. 869 – 892.

76. Габушин В. Н. Оптимальные методы вычисления значений оператора Ux, если x задано с погрешностью. Дифференцирование функций, определенных с ошибкой // Тр. МИАН СССР. 1980. Т. 145. С. 63–78.

77. Гаврилюк В. Т. Приближение непрерывных периодических функций суммами Рогозинского и суммами Фурье // Вопросы теории приближений функций и ее приложений. Киев: ИМ АН УССР. 1976. С. 46–60.

78. Гейсберг С. П. Обобщение неравенства Адамара. Исследования по некоторым вопросам конструктивной теории функций // Сб. научных трудов ЛМИ. 1965. Т. 50. С. 42–54.

79. Гейсберг С. П. Дробные производные функций, ограниченных на оси // Изв. вузов. Математика. 1968. Т. 11. С. 51–69.

80. Глускин Е. Д. Об одной задаче о поперечниках // ДАН СССР. 1974. Т. 29, вып. 3. С. 527–530.

81. Громик Н. П., Парфинович Н. В. О порядке относительных поперечников некоторых классов векторнозначных функций // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2005. Вип. 10. С. 33–39.

82. Губанова В. В., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших относительных несимметричных приближений классов дифференцируемых периодических функций // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2006. Вип. 11. С. 21–28.

83. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s–ю производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1953. Т. 17, № 2. С. 135–162.

84. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций // Там само. 1959. Т. 23, № 6. С. 933–950.

85. Дзядык В. К. О наилучшем тригонометрическом приближении в метрике L_1 некоторых функций // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129, № 1. С. 19–22.

86. Дзядык В. К. К вопросу о наилучшем приближении абсолютно монотонных и некоторых других функций в метрике L при помощи тригонометрических полиномов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25. С. 173–238.

87. Дзядык В. К. О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейных комбинаций абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 5. С. 691–701.

88. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения. – М.: Наука, 1977. 512 с.

89. Дзядык В. К., Дубовик В. А. К проблеме А. Н. Колмогорова о зависимости между верхними гранями производных вещественных функций, определенных на всей оси // Укр. мат. журн. 1974. Т. 26, № 3. С. 300–317.

90. Дзядык В. К., Дубовик В. А. К неравенствам А. Н. Колмогорова между верхними гранями производных вещественных функций, заданных на всей оси // Там само. 1975. Т. 27, № 3. С. 291–299.

91. Динь-Дзунг, Тихомиров В. М. О неравенствах для производных в L_2-метрике // Вестник МГУ Сер. мат., мех. 1079. Т. 2. С. 7–11.

92. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Знакочувствительные аппроксимации (пространство знакочувствительных весов, жесткость и свобода системы) // Доклады РАН. 1993. Т. 332, № 6. С. 686–689.

93. Долженко Е. П., Севастьянов Е. А. Аппроксимации со знакочувствительным весом (теоремы существования и единственности) // Изв. РАН. Сер. мат. 1998. Т. 62, № 6. С. 59–102.

94. Дороговцев А. Я. Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. К.: Вища школа, 1992. 319 с.

95. Дороговцев А. Я. Введение в дифференциальное и интегральное исчисление. К., 2005. 224 с.

96. Доронин В. Г. Наилучшее одностороннее приближение на некоторых классах функций // Матем. заметки. 1971. Т. 10, № 6. С. 615–626.

97. Доронин В. Г., Лигун А. А. Верхние грани наилучших односторонних приближений сплайнами классов W^rL_1 // Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 1. С. 11–17.

98. Доронин В. Г., Лигун А. А. Верхние грани наилучших односторонних приближений классов W^rL_Ψ в метрике L // Там само. 1977. Т. 22, № 2. С. 257–268.

99. Доронин В. Г., Лигун А. А. О наилучшем одностороннем приближении классов $W^r_\alpha V$ $(r > -1)$ тригонометрическими полиномами в метрике L_1 // Там само. № 3. С. 357–370.

100. Жук В. В. О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 6. С. 1283–1291.

101. Жук В. В. Некоторые точные неравенства между равномерными приближениями периодических функций // ДАН СССР. 1971. Т. 201, № 2. С. 263–265.

102. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: в 2 т. Т. 2. М.: Мир, 1965. 538 с.

103. Исмагилов Р. С. Об n–мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 1968. Т. 2, вып. 2. С. 32–39.

104. Исмагилов Р. С. Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, вып. 3. С. 161–178.

105. В. И. Иванов. Приближение функций из C^r сплайнами минимального дефекта // Матем. заметки. 1988. Т. 43, № 6. С. 746–756.

106. Иванов В. И., Смирнов О. И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. Тула: Тульский гос. ун-т, 1995. 192 с.

107. Карпова О. М., Парфінович Н. В. Про найкращі відносні несиметричні наближення класів періодичних функцій сплайнами // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька. Львів: ІППММ НАНУ, 2007. С. 121.

108. Карпова Е. Н., Парфинович Н. В. Об односторонних приближениях классов дифференцируемых периодических функций сплайнами при наличии ограничений на их производные // Проблеми математичного моделювання: міждержавна науково-методична конференція. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2007. С. 26.

109. Карпова Е. Н., Парфинович Н. В. О наилучших относительных несимметричных приближениях классов периодических функций сплайнами // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2008. Вип. 13. С. 91–98.

110. Кашин Б. С. О поперечниках октаэдрорв // Успехи матем. наук. 1975. Т. 30, вып. 4. С. 225–257.

111. Кашин Б. С. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, № 2. С. 334–351.

112. Коваленко О. В. Інтерполяційні та екстремальні властивості ідеальних сплайнів та їх застосування. Дисс. ... канд. фіз.–мат. наук. Дніпропетровськ: ДНУ, 2015. 136 с.

113. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функций на бесконечном интервале // Ученые заметки МГУ. Математика. 1939. Т. 30, № 3. С. 3–13.

114. Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. тр. Математика, механика. М.: Наука, 1985. С. 252–263.

115. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989. 624 с.

116. Коновалов В. Н. Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных // Мат. заметки. 1978. Т. 23, вып. 1. С. 67–78.

117. Коновалов В. Н. Оценка поперечников типа Колмогорова для классов дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. 1984. Т. 35, № 3. С. 369–380.

118. Коновалов В. Н., Павлик А. В. Оптимальное по порядку приближение функций из пространств Соболева с сохранением класса // Міжнародна конференція "Теорія апроксимації та чисельні методи". Тези доповідей. Рівне. 1996. С. 37.

119. Корнейчук Н. П. О наилучшем равномерном приближении дифференцируемых функций // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. С. 304–307.

120. Корнейчук Н. П. Точная константа в теореме Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // ДАН СССР. 1962. Т. 145. С. 514–515.

121. Корнейчук Н. П. Точное значение наилучших приближений и поперечников некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 150. С. 1218–1220.

122. Корнейчук Н. П. Верхние грани наилучших приближений на классах дифференцируемых периодических функций в метриках С и L // ДАН СССР. 1970. Т. 190. С 269–271.

123. Корнейчук Н. П. Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодичсеских функций // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1971. Т 35, вып. 1. С. 93–124.

124. Корнейчук Н. П. Неравенства для дифференцируемых периодических функций и наилучшее приближение одного класса функций другим // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1972. Т. 36, № 2. С. 423–434.

125. Корнейчук Н. П. Про співвідношення між модулями неперервності функцій та їх преставлень // Доп. АН УРСР. 1973. № 9. С. 194–796.

126. Корнейчук Н. П. Наилучшее приближение сплайнами на классах периодических функций в метрике L // Матем. заметки. 1976. Т. 20, № 5. С. 655–664.

127. Корнейчук Н. П. Точные неравенства для наилучшего приближения сплайнами // ДАН СССР. 1978. Т. 242, № 2. С. 280–283.

128. Корнейчук Н. П. Неравенства для наилучшего приближения сплайнами дифференцируемых периодических функций // Укр. мат. журн. 1979. Т. 31, № 4. С. 380–388.

129. Корнейчук Н. П. Поперечники в L_p классов непрерывных и дифференцируемых функций и оптимальные методы кодирования и восстановления функций и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1981. Т. 45, № 2. С. 266–290.

130. Корнейчук Н. П. О точной константе в неравенстве Джексона для непрерывных периодических функций // Мат. заметки. 1982. Т. 32. № 5. С. 669–674.

131. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320 с.

132. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.

133. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.

134. Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А. Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. Киев: Наукова думка, 1992. 304 с.

135. Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982. 252 с.

136. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958. 271 с.

137. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука. 1973. 351 с.

138. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978. 400 с.

139. Купцов Н. П. Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0,\infty)$ // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 94–117.

140. Купцов Н. П. О точных константах в неравенствах между нормами функций и их производных // Матем. заметки. 1987. Т. 41, № 3. С. 313–319.

141. Курант Р. Уравнения с частными прооизводными, М.: Мир, 1964. 830 с.

142. Либ Э., Лосс М. Анализ. Новосибирск: Науч. книга, 1998. 258 с.

143. Лигун А. А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 1. С. 21–30.

144. Лигун А. А. Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 6. С. 913–926.

145. Лигун А. А. Об одном неравенстве для сплайн-функций минимального дефекта // Там само. 1978. Т. 24, № 4 С. 547–552.

146. Лигун А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Там само. № 6. С. 785–792.

147. Лигун А. А. О поперечниках некоторых классов дифференцируемых периодических функций // Матем. заметки. 1980. Т. 27, № 1.– С. 61–75.

148. Лигун А. А. О неравенствах между нормами производных периодических функций // Там само. 1983. Т. 33, № 3 С. 385–391.

149. Лигун А. А. О константах в теореме Джексона // Там само. 1985. Т. 37, № 3. С. 326–336.

150. Лигун А. А. О точных константах в неравенствах типа Джексона // Там само. Т. 38, № 5. С. 248–256.

151. Лігун А. А. О точных константах в неравенствах типа Джексона // ДАН СССР. 1985. Т. 283, № 1. С. 33–37.

152. Лигун А. А., Капустян В. Е., Волков Ю. И. Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами. Киев: Выща школа, 1990. 208 с.

153. Любич Ю. И. О неравенствах между степенями линейного оператора // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1960. Т. 24, № 6. С. 825–864.

154. Майоров В. Е. Дискретизация задачи о поперечниках // Успехи мат. наук. 1974. Т. 30, вып. 6. С. 170–180.

155. Майоров В. Е. О наилучшем приближении классов $W_1^r(\mathbb{I}^s)$ в пространстве $L_\infty(\mathbb{I}^s)$ // Матем. заметки. 1976. Т. 19, № 5. P. 699–706.

156. Маковоз Ю. И. Поперечники некоторых функциональных классов в пространстве L // Изв. АН БССР, Сер. физ.-матем. 1969. Т. 4. С. 19–28.

157. Маковоз Ю. И. Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховых пространствах // Матем. сб. 1972. Т. 87, № 1. С. 136–142.

158. Маковоз Ю. И. Поперечники соболевских классов и сплайны, наименее уклоняющиеся от нуля // Матем. заметки. 1979. Т. 26, № 5. P. 805–812.

159. Маторин А. П. О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой // Укр. матем. журнал. 1955. Т. 7. С. 262–266.

160. Московский А. В. Некоторые экстремальные свойства дифференцируемых периодических функций, полиномов и сплайнов на отрезках меньших периода // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1996. Т 2:1. С. 169–175.

161. Моторный В. П., Бабенко В. Ф., Довгошей А. А., Кузнецова О. И. Теория аппроксимации и гармонический анализ. Киев: Наук. думка, 2010. 302 с.

162. Моторный В. П., Рубан В. И. Поперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций в пространстве L // Матем. заметки. 1975. Т. 17, № 4. С. 531–543.

163. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1946. Т. 10, № 3. С. 207–256.

164. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.

165. Ногин В. А., Самко С. Г. О сходимости в $L_p(\mathbb{R}^n)$ гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой. Ростов н/Д, 1980. 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.01.81, № 179.

166. Ногин В. А., Самко С. Г. О сходимости в $L_p(\mathbb{R}^n)$ гиперсингулярных интегралов с однородной характеристикой // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения: Межвуз. сб. науч. ст. Элиста. 1982. С. 119–131.

167. Оловянишников В. М. К вопросу о неравенствах между верхними гранями последовательных производных на полупрямой // Усп. матем. наук. 1951. Т. 6, № 2. С. 167–170.

168. Парфинович Н. В. О точных значениях относительных приближений классов периодических функций сплайнами // Вісник Дніпропетровського. ун-ту. Сер. Математика. 1999. Вип. 4. С. 74–78.

169. Парфинович Н. В. О точных асимптотиках наилучших относительных приближений классов периодических функций сплайнами // Укр. мат. журн. 2001. Т. 53, № 4. С. 489–500.

170. Парфінович Н. В. Відносні наближення функціональних класів. Дисс. ... канд. фіз.-мат. наук. Дніпропетровськ: ДНУ, 2002. 140 с.

171. Парфинович Н. В. Точний порядок відносних поперечників класів W_1^r у просторі L_1 // Укр. мат. журн. 2005. Т. 57, № 10. С. 1409–1417.

172. Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для норм гиперсингулярных интегралов с однородной знакопостоянной характери-

стикой // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2015. Вип. 20. С. 58–69.

173. Парфінович Н. В. Найкращі наближення класів диференційованих функцій сплайнами // Approximation Theory and Applications: international conference. Dnipropetrovsk: DNU, 2015. P. 48.

174. Парфінович Н. В. Найкращі наближення класів згорток узагальненими сплайнами // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнародна конференція. Слов'янськ: ДДПУ, 2017. С. 77.

175. Парфінович Н. В. Про екстремальні підпростори для поперечників класів згорток // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2017. Вип. 22. С. 68–79.

176. Парфінович Н. В. Оцінки норм похідних за Ріссом функцій багатьох змінних // Дослідження в математиці і механіці. 2017. Т. 22, вип. 1(29). С. 46–61.

177. Парфінович Н. В. Точні значення найкращих (α, β)–наближень класів згорток з ядрами, що не збільшують число змін знака // Укр. мат. журн. 2017. Т. 69, № 8. С. 1073–1083.

178. Парфінович Н. В. Нерівності Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних // Український математичний вісник. 2017. Т. 14, № 2. С. 265–178.

179. Раджабов Э. Л. О некоторых сверхсингулярных интегральных операторах // Изв. АН ТаджССР. Отд. физ.-мат. и геол.-хим. наук. 1974. № 2. С. 17–25.

180. Родов А. М. Зависимость между верхними гранями производных вещественных функций, определенных на всей вещественной оси // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10. С. 257–270.

181. Родов А. М. Достаточные условия существования функции действительного переменного с заданными верхними гранями модулей самой функции и ее пяти последовательных производных // Ученые записки БГУ. Сер. мат. 1954. Т. 19. С. 65–72.

182. Романюк А. С. Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных // Праці Ін-ту математики НАН України. 2012. Т. 93. 352 с.

183. Рубан В. И. Поперечники множеств в пространствах периодических функций // ДАН СССР. 1980. Т. 225, вып. 1. С. 34–35.

184. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск, 1987. 688 с.

185. Самко С. Г. Обобщенные риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы, их символы и обращение // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 3. С. 528–531.

186. Самко С. Г. Гиперсингулярные интегралы с однородной характеристикой // Тр. Ин-та прикл. мат. Тбил. ун-та. 1978. Т. 5-6. С. 235–249.

187. Самко С. Г. Обобщенные риссовы потенциалы и гиперсингулярные интегралы с однородными характеристиками, их символы и обращение // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1980. Т. 156. С. 157–222.

188. Скороходов Д. С. Нерівності типу Колмогорова для функцій однієї змінної та їх застосування. Дисс. ... канд. фіз.-мат. наук. Дніпропетровськ: ДНУ, 2010. 156 с.

189. Степанец А. И. Методы теории приближений: в 2 т. Т. 1. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. 426 с.

190. Степанец А. И. Методы теории приближений: в 2 т. Т. 2. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. 468 с.

191. Стечкин С. Б. Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна. // ДАН СССР. 1948. Т. 60, № 9. С. 1511–1514.

192. Стечкин С. Б. О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами // Успехи матем. наук. 1954. Т. 9, N 1. С. 133–134.

193. Стечкин С. Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1956. Т. 20. С. 643–648.

194. Стечкин С. Б. Неравенства между нормами производных функции // Acta sci. math. 1965. Т. 26, № 3–4. – С. 225–230.

195. Стечкин С. Б. Замечание к теореме Джексона // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1967. Т 88. С. 17–19.

196. Стечкин С. Б. Наилучшее приближение ограниченных операторов // Матем. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.

197. Стечкин С. Б. О неравенствах между верхними гранями производных произвольной функции на полуоси // Там само. Вып. 6. С. 665–674.

198. Стечкин С. Б. О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1971. Т. 109. С. 26–34.

199. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Слайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.

200. Субботин Ю. Н. Приближение сплайнами при ограничениях на нормы их производных // Труды Международной конференции по конструктивной теории функций. Варна. 1970. Т 7, вып. 1. С. 107–111.

201. Субботин Ю. Н. Поперечник класса W^rL в $L(0,2\pi)$ и приближение сплайн-функциями // Матем. заметки. 1970. Т. 7, № 1. С. 43–52.

202. Субботин Ю. Н. Приближение сплайн-функциями и оценки поперечников // Труды МИАН. 1971. Т. 109. С. 35–60.

203. Субботин Ю. Н. Экстремальная функциональная интерполяция и приближение сплайнами. Дисс. ... докт. фiз.-мат. наук. Свердловск, 1973.

204. Субботин Ю. Н. Экстремальные задачи теории приближения функций при неполной информации // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1980. Т. 145. С. 152–168.

205. Субботин Ю. Н. Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // ЖВМ и МФ. 1993. Т 33, № 7. С. 996–1003.

206. Субботин Ю. Н. Аппроксимация полиномиальными и тригонометрическими сплайнами третьего порядка, сохраяющими некоторые свойства аппроксимируемых функций // Тр. ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т 13, № 2. С. 156–166.

207. Субботин Ю. Н. Формосохраняющая экспоненциальная аппроксимация // Изв. вузов. Математика. 2009. Т 11. С. 53–66.

208. Субботин Ю. Н., Теляковский С. А. Точные значения относительных поперечников классов дифференцируемых функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65, вып. 6. С. 871–879.

209. Субботин Ю. Н., Теляковский С. А. Относительные поперечники классов дифференцируемых функций в метрике L^2 // Успехи матем. наук. 2001. Т. 56, вып. 4. С. 159–160.

210. Субботин Ю. Н., Теляковский С. А. Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами // Мат. сб. 2000. Т. 191, N 8. С. 131–140.

211. Субботин Ю. Н., Теляковский С. А. Об относительных поперечниках классов дифференцируемых функций // Труды МИАН. 2005. Т. 248, N 8. С. 250–261.

212. Сунь Юншен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 1. С. 67–92.

213. Сунь Юншен. О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами II // Там само. 1961. Т. 25, № 1. С. 143–152.

214. Тайков Л. В. Одно обобщение неравенства С. Н. Бернштейна // Труды Мат. ин-та АН СССР. 1965. Т. 78. С. 43–47.

215. Тайков Л. В. О приближении в среднем некоторых классов периодических функций// Там само. 1967. Т 88. С. 61–70.

216. Тайков Л. В. Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования // Матем. заметки. 1968. Т. 4, № 2. С. 233–238.

217. Тайков Л. В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывных функций // Там само. 1976. Т. 20, № 3. С. 433–438.

218. Темляков В. Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.

219. Тимофеев В. Г. Неравенства типа Колмогорова с оператором Лапласа. В кн.: Теория функций и приближений. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1983. С. 84–92.

220. Тимофеев В. Г. Неравенства типа Ландау для функций нескольких переменных // Матем. заметки. 1985. Т. 37, вып. 5. С. 676–689.

221. Тимошин О. А. Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной в метриках L и C на плоскости // Там само. 1984. Т. 36, № 3. С. 369–375.

222. Тимошин О. А. Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков // Докл. РАН. 1995. Т. 344, № 1. С. 20–22.

223. Тимошин О. А. Наилучшее приближение оператора второй смешанной производной // Изв. РАН. Сер. мат. 1998. Т. 62, №1. С. 201–210.

224. Тихомиров В. М. Об n-мерных поперечниках некоторых функциональных классов // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 4. С. 734–737.

225. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // УМН. 1960. Т. 15, № 3. С. 81–120.

226. Тихомиров В. М. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C_{[-1,1]}$ // Мат. сб. 1969. Т. 80, № 2. С. 290–304.

227. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976. 304 с.

228. Тихомиров В. М. Теория приближений // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 14. С. 103–260.

229. Тихомиров В. М. А. Н. Колмогоров и теория приближений // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 1. С. 83–122.

230. Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г. Неравенства для производных: Комментарии к избранным трудам А. Н. Колмогорова // М.: Наука, 1985. С. 387–390.

231. Туровец С. П. О наилучшем приближении в среднем дифференцируемых функций // ДАН УССР, Сер. А. 1968. Т. 5. С. 417–421.

232. Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. И., Полиа Г. Неравенства / пер. с англ. В. И. Левин. [3-е изд.]. М.: Издательство ЛКИ, 2008. 456 с.

233. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Труды Мат. ин-та АН СССР. 1967. Т. 88. С. 71–74.

234. Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 5. С. 513–522.

235. Чурілова М. С. Нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку та їх застосування в теорії апроксимації. Дисс. ... канд. фіз.-мат. наук. Дніпропетровськ: ДНУ, 2006. 150 с.

236. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 1. С. 125–129.

237. Шевалдин В. Т. Некоторые задачи экстремальной интерполяции // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 803–805.

238. Шевалдин В. Т. $\mathcal{L}$–сплайни и поперечники // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 5. С. 735–744.

239. Шевалдин В. Т. Апроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург. УрО РАН. 2014. 198 с.

240. Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка, 1992. 225 с.

241. Шевчук И. А. Приближение монотонных функций монотонными полиномами. Мат сборник. 1993. Т 76, № 1. С. 51–64.

242. Шилов Г. Е. О неравенствах между производными // Сб. научных студ. работ МГУ. 1937. С. 17–27.

243. Application of fractional calculus in Phisics/ed: Hilfer R. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, World Scientific. 2000. 464 p.

244. Arestov V. V. Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approximation theory: proc. conf. Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ. 1979. P. 19–34.

245. Babenko V. F. On the Relative Widths of Classes of Functions with Bounded Mixed Derivative // East J. Approx. 1996. V. 2, N 3. P. 319–330.

246. Babenko V. F. Exact inequalities for norms of intermediate derivatives of half-integer order and some of their applications // Approxim. Theory and Appl. Palm Harbor (USA): Hadronic Press. 1998. P. 5–16.

247. Babenko V. F, Azar L. E. On the relative widths of some classes of convolutions // International conference on approximation theory and its applications dedicated to the memory of V. K. Dzjadyk: Abstracts. Kyiv: IM NASU. 1999. P. 10–11.

248. Babenko V., Babenko Yu. On the Kolmogorov problem for the upper bounds of four consecutive derivatives of a multiply monotone function // Constructive Approx. 1997. V. 26, № 1. P. 83–92.

249. Babenko V. F., Britvin Yu. E. On Kolmogorov's problem about existence of a function with given norms of its derivatives // East J. Approx. 2002. V. 8, № 1. P. 95–110.

250. Babenko V. F., Churilova M. G. On the Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives // East J. Approx. 2002. V. 8. N 4. P. 437–446.

251. Babenko V. F., Churilova M. S. Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic // Banach J. Math. 2007. Vol. 1. P. 1–10.

252. Babenko V. F., Churilova M. S., Parfinovych N. V., Skorokhodov D. S. Kolmogorov type inequalities for the Marchaud fractional derivatives on the real line and the half-line // Journal of Inequalities and Applications. 2014-504. P. 1–31. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-504 (дата звернення: 25.12.2017).

253. Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A. On inequalities of Landau-Hadamard-Kolmogorov type for L_2-norm of intermediate derivatives // East J. Approx. 1996. V. 2, N 3. P. 343–368.

254. Babenko V. F., Kofanov V. A. and Pichugov S. A. Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Multivariate approximation and splines / Eds. G. Nërberger, J.W. Schmidt, G. Walz. Basel: Birkhuser Verlag. 1997. P. 1–12.

255. Babenko V. F., Kofanov V. A. and Pichugov S. A. Exact inequalities of Kolmogorov type for multivariate functions and their applications // East J. Approx. 1997. V. 3, N 2. P. 155–188.

256. Babenko V. F., Parfinovych N. V. On some problems of shape preserving and class preserving approximation // Tenth SIAM Conference on Geometric Design and Computing: international conference. San Antonio: Vanderbilt University, 2007. P. 37.

257. Babenko V. F., Parfinovych N. V. The best approximation of periodic functions by splines // Thirteenth International Conference in Approximation Theory: international conference. San Antonio: Vanderbilt University, 2010. P. 31–32.

258. Babenko V. F., Parfinovych N. V. Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of multivariate functions // Fourteenth Internati-

onal Conference in Approximation Theory: international conference. San Antonio: Vanderbilt University, 2013. P. 39.

259. Babenko V. F., Parfinovych N. V., Pichugov S. A. Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 3. С. 301–314.

260. Babenko V. F., Parfinovych N. V., Pichugov S. A. Exact inequalities of Kolmogorov type for fractional derivatives of multivariate functions // International symposium in approximation theory: international conference. Nashville: Vanderbilt University, 2011. P. 27.

261. Babenko V. F., Pichugov S. A. Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of Hölder functions of two variables // East J. Approx. 2007. V. 13, № 3. P. 321–329.

262. Bohr H. Un theoreme generale sur l'integration d'un polynome trigonometrique // Acad. Sci. 1935. V. 200 P. 1276–1277.

263. Favard J. Sur l'approximation des fonctions periodiques par des polynomes trigonometriques // C. R. Acad. Sci. (Paris). 1936. V. 203. P. 1122–1124.

264. Favard J. Application de la formule sommatoire d'Fuler a la demonstration de quelques proprietes extremales des integrals des fonctions periodiques // Math Tidskrift. 1936. V. 4. P. 81–94.

265. Favard J. Sur les meilleurs procedes d'approximation de certaines classes de fonctions par des polynomes trigonometriques // Bull. Sci. Math. Ser. 2. 1937. V. 60. P. 209–224, 243–256.

266. Feller W. On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semi-groups, generated by them // Comm. Sémin. Math. L'Univ. Lund (Medd. Launds Univ Mat. Sémin.). Tome suppl. 1952. Vol. 21. P. 72–81.

267. Freud G. Über einseitige Approximation durch Polynome I // Acta sci. math. (Szeged). 1955. Bd. 16. S. 12–18.

268. Ganelius T. On one-sided approximation by trigonometrical polynomials // Math. Scand. 1954. V. 4. P. 247–258.

269. Gromyk N. P., Parfinovich N. V. The relative widths of some classes of periodic Banach-valued functions // Conference "Functional Methods in Approximation Theory, Stochastic Analysis and Statistics II": international conference. Kyiv: KNU, 2004. P. 34.

270. Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // Bull. Soc. Math. France. 1914. V. 42. P. 68–72.

271. Jackson D. Über die Genauigkeit des Annäherung stetigen Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrishen Summen gegebener Ordnung // Diss. – Göttingen, 1911.

272. Karlin S. Total positivity. Vol. I. Calif.: Stanford Univ. Press., 1968. 576 c.

273. Kolmogorov A. N. Une généralisation de J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées succesives d'une fonction // C.R. Acad.Sci. 1938. V. 207. P. 764–765.

274. Konovalov V. N., Leviatan D. Estimates on the approximation of 3-monotone functions by 3-monotone quadratic splines // East J. Approx. 2001. V. 7, N 3. P. 333–349.

275. Konovalov V. N., Leviatan D. Shape preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions on a finite interval // Israel J. Math. 2003. V. 133. P. 239–268.

276. Konovalov V. N., Leviatan D. Free-knot splines approximation of s-monotone functions // Advances in Computational Mathematics. 2004. V. 20, N 4. P. 347–366.

277. Korneichuk N. P., Ligun A. A. On approximation of a class by another class and extremal subspaces in L_1 // Analysis. Math. 1981. V. 7, № 2. P. 107–119.

278. Kwong M. K., Zettl A. Norm inequalities for derivatives and differences. Lecture notes in mathematics. Vol. 1536. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1992. 150 p.

279. Landau E. Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktion // Proc. London Math.Soc. 1913. T. 13. P. 43–49.

280. Leviatan D., Shevchuk I. A. Some positive results and counterexamples in comonotone approximation // Journal of Approximation Theory. 1999. V. 100, N 1. P. 113–143.

281. Leviatan D., Shevchuk I. A. Coconvex approximation // Journal of Approximation Theory. 2002. V. 118, N 1. P. 20–65.

282. Leviatan D., Shevchuk I. A. Comparing the dedrees of unconstrained and shape preserving approximation by polynomials // Journal of Approximation Theory. 2016. V. 211. P. 16–28.

283. Ligun A. A. Inequalities for upper bounds of functions // Analysis Math. 1976. V. 2, № 1. P. 11–40.

284. Magaril-Il'jaev G. G. Tihomirov V. M. On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line // Analysis Mathematica. 1981. V. 7, N 1. P. 37–47.

285. Mairhuber J. C., Schonberg I. J., Williamson R. E. On variation diminishing transformations on the circle // Rend. Circ. Math. Palermo. 1959. V. 8, № 2. P. 241–270.

286. Marchaud A., Sur de derivées et sur les différences des fonctions de variables réelles, J. Math. Pures et Appl. 1927. V. 6. P. 337–425.

287. Mitrinović D. S., Peĉarić J. E., Fink A. M. Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. Dordrecht; Boston; London: Kluver Acad. Publ, 1991. 587 p.

288. Oldham K. B., Spanier J. The fractional calculus. N.Y., London: Acad. Press. 1974. 234 p.

289. Parfinovich N. V. On the Best Approximation of Classes of Periodic Functions by Splines under Restrictions on their Derivatives // East J. Approx. 1999. V. 5, N 3. P. 267–278.

290. Parfinovych N. V. Kolmogorov type inequalities for norms of the hypersingular integrals with homogeneous characteristic // International V. Skorobohatko mathematical conference. Lviv: IAPMM NASU, 2015. P. 119.

291. Pinkus A. On n-widths of periodic functions // J. Anal. Math. 1979. V. 35. P. 209–235.

292. Pinkus A. n-Width in Approximation Theory. Berlin, Heidelberg.: New York: Tokio: Springer Verlag, 1985. 294 p.

293. Shevchuk I. A. One example in monotone approximation // Journal of Approximation Theory. 1996. V. 86. P. 270–277.

294. Shoenberg I. J., Cavaretta A. Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the halfline // in proceedings of the Int. Conf. on Constructive Function Theory (Varna, 19–25 May 1970). Sofia: DARBA, 1972. P. 297–310.

295. Stein E. M. Functions of exponential type // Annals of Math. 1957. V. 65, № 3. P. 582–592.

296. Temliakov V. N. Approximation of periodic function. New York: Nova Sc. Publ., Inc., 1993. 419 p.

297. Tikhomirov V. M. Some Remarks on Relative Diameters // Banach Center Pabl. 1989. V. 22. P. 471–474.

298. Vakarchuk S. B. On best polynomial approximations in L_2 of certain classes of 2π–periodic functions and of exact values of their n-widths // Math. Notes. 2001. V. 70, N 3 P. 300–310.

299. Weeden R. L. Hypersingular integrals and summability of Fourier integrals and series // A. P. Calderon, ed. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. V. 10. Singular Integrals. Univ. Chicago. III. 1996. – Providence, R. I. – 1967. – P. 336–369.

300. Weeden R. L. On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134, № 3. P. 421–435.

301. Weeden R. L. On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions. II // Ibid. 1969. V. 139, № 1. P. 37–53.

302. Weeden R. L. On hypersingular integrals and certain spaces of locally differentiable functions // Ibid. 1969. V. 146, № 2. P. 211–230.

303. Zygmund A. A remark on conjugate series // Proc. Am. Math. Soc. 1932. V. 34. P. 435–446.

Додаток А

Список публікацій добувача:

1. Громик Н. П., Парфинович Н. В. О порядке относительных поперечников некоторых классов векторнозначных функций // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2005. Вип. 10. С. 33–39.

2. Губанова В. В., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших относительных несимметричных приближений классов дифференцируемых периодических функций // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. Математика. 2006. Вип. 11. С. 21–28.

3. Карпова Е. Н., Парфинович Н. В. О наилучших относительных несимметричных приближениях классов периодических функций сплайнами // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2008. Вип. 13. С. 91–98.

4. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Точные значения наилучших приближений классов периодических функций сплайнами дефекта 2 // Матем. заметки. 2009. Т 85, № 4. С. 538–551.

5. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Бернштейна для сплайнов дефекта 2 // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 7. С. 995–999.

6. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Несимметричные приближения классов периодических функций сплайнами дефекта 2 и неравенства типа Джексона // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 11. С. 1443–1454.

7. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, заданных на полуоси // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2009. Вип. 14. С. 31–35.

8. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О порядке относительных приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 2. С. 147–157.

9. Babenko V. F., Parfinovych N. V., Pichugov S. A. Sharp Kolmogorov-type inequalities for norms of fractional derivatives of multivariate functions // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 3. С. 301–314.

10. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 5. С. 669–683.

11. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Точные неравенства типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, заданных на полуоси // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2010. Вип. 15. С. 38–48.

12. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения // Труды института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 60–70.

13. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Семиренко А. А. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, определенных на полуоси, и их приложения // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2012. Вип. 17. С. 49–59.

14. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных и некоторые их приложения // Український математичний вісник. 2012. Т. 9, № 2. С. 157–174.

15. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих пере-

менных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи // Матем. заметки. 2014. Т. 95, № 1. С. 3–17.

16. Babenko V. F., Churilova M. S., Parfinovych N. V., Skorokhodov D. S. Kolmogorov type inequalities for the Marchaud fractional derivatives on the real line and the half-line // Journal of Inequalities and Applications. 2014-504. P. 1–31. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-504 (дата звернення: 25.12.2017).

17. Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для норм гиперсингулярных интегралов с однородной знакопостоянной характеристикой // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2015. Вип. 20. С. 58–69.

18. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Оценка равномерной нормы одномерного потенциала Рисса частной производной функции с ограниченным лапласианом // Укр. мат. журн. 2016. Т. 68, № 7. С. 867–878.

19. Парфінович Н. В. Про екстремальні підпростори для поперечників класів згорток // Вісник Дніпропетровського ун–ту. Сер. Математика. 2017. Вип. 22. С. 68–79.

20. Парфінович Н. В. Оцінки норм похідних за Ріссом функцій багатьох змінних // Дослідження в математиці і механіці. 2017. Т. 22, вип. 1(29). С. 46–61.

21. Парфінович Н. В. Точні значення найкращих (α, β)–наближень класів згорток з ядрами, що не збільшують число змін знака // Укр. мат. журн. 2017. Т. 69, № 8. С. 1073–1083.

22. Парфінович Н. В. Нерівності Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних // Український математичний вісник. 2017. Т. 14, № 2. С. 265–178.

23. Gromyk N. P., Parfinovich N. V. The relative widths of some classes of periodic Banach-valued functions // Conference "Functional Methods in

Approximation Theory, Stochastic Analysis and Statistics II": international conference. Kyiv: KNU, 2004. P. 34.

24. Карпова О. М., Парфінович Н. В. Про найкращі відносні несиметричні наближення класів періодичних функцій сплайнами // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька. Львів: ІППММ НАНУ, 2007. С. 121.

25. Карпова Е. Н., Парфинович Н. В. Об односторонних приближениях классов дифференцируемых периодических функций сплайнами при наличии ограничений на их производные // Проблеми математичного моделювання: міждержавна науково-методична конференція. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2007. С. 26.

26. Babenko V. F., Parfinovych N. V. On some problems of shape preserving and class preserving approximation // Tenth SIAM Conference on Geometric Design and Computing: international conference. San Antonio: Vanderbilt University, 2007. P. 37.

27. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О порядке относительных приближений некоторых функциональных классов сплайнами // Современные проблемы теории функций и их приложения: 14-ая Саратовская зимняя школа. Саратов: СГУ, 2008. С. 17–18.

28. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Наилучшие приближения классов периодических функций сплайнами дефекта 2 // Проблеми математичного моделювання: міждержавна науково-методична конференція. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2008. С. 9–10.

29. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами дефекта 2 // Боголюбівські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнародна конференція. Мелітополь: ІМ НАНУ, 2008. С. 11–12.

30. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А. Точные неравенства для норм дробных производных функций многих переменных // Боголюбівські читання, 2008. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнародна конференція. Мелітополь: ІМ НАНУ, 2008. С. 12.

31. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О точных значениях наилучших приближений классов дифференцируемых периодических функций сплайнами // Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III: international conference. – Svityaz: IM NASU, 2009. P. 16–17.

32. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Пичугов С. А. Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных // Approximation Theory and Applications: international conference. Dnipropetrovsk: DNU, 2010. P. 15.

33. Babenko V. F., Parfinovych N. V. The best approximation of periodic functions by splines // Thirteenth International Conference in Approximation Theory: international conference. San Antonio: Vanderbilt University, 2010. P. 31–32.

34. Babenko V. F., Parfinovych N. V., Pichugov S. A. Exact inequalities of Kolmogorov type for fractional derivatives of multivariate functions // International symposium in approximation theory: international conference. Nashville: Vanderbilt University, 2011. P. 27.

35. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных Рисса функций многих переменных // Modern Analysis: international conference. Donetsk: DonNU, 2011. С. 20.

36. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В., Скороходов Д. С., Чурілова М. С. О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных произво-

дных функций, заданных на оси и полуоси // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнародна конференція. Кам'янець-Подільський: ІМ НАНУ, 2012. С. 18.

37. Babenko V. F., Parfinovych N. V. Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of multivariate functions // Fourteenth International Conference in Approximation Theory: international conference. San Antonio: Vanderbilt University, 2013. P. 39.

38. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных // Боголюбівські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнародна конференція. Київ: ІМ НАНУ, 2013. С. 215–216.

39. Бабенко В. Ф., Парфинович Н. В. Точные неравенства типа Колмогорова для дробных производных функций многих переменных // Крымская международная математическая конференция. Симферополь: КНЦ НАНУ, 2013. С. 84.

40. Parfinovych N. V. Kolmogorov type inequalities for norms of the hypersingular integrals with homogeneous characteristic // International V. Skorobohatko mathematical conference. Lviv: IAPMM NASU, 2015. P. 119.

41. Парфінович Н. В. Найкращі наближення класів диференційованих функцій сплайнами // Approximation Theory and Applications: international conference. Dnipropetrovsk: DNU, 2015. P. 48.

42. Парфінович Н. В. Найкращі наближення класів згорток узагальненими сплайнами // Теорія наближення функцій та її застосування: міжнародна конференція. Слов'янськ: ДДПУ, 2017. С. 77.

Відомості про апробацію результатів дисертації:

За результатами дисертаційної роботи було зроблено доповіді на:

– Міжнародній конференції "Functional Methods in Approximation Theory, Stochastic Analysis and Statistics II" , присвяченій пам'яті А. Я. Дороговцева (01.10.2004–05.10.2004, Київ, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міжнародних математичних конференціях ім. В. Я. Соробогатька (24.09.2007–28.09.2007, 25.08.2015–28.08.2015, Дрогобич, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міждержавних науково-методичних конференціях "Проблеми математичного моделювання"(23.05.2007–25.05.2007, 28.05.2008–30.05.2008, Дніпродзержинськ, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міжнародних конференціях з теорії наближення (04.03.2007–08.03.2007, 07.03.2010–10.03.2010, 07.04.2013–10.04.2013, Сан Антоніо, США),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції з математичного моделювання і обчислень (04.11.2007–08.11.2007, Сан Антоніо, США),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" , присвяченій 70-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка (16.06.2008–21.06.2008, Мелітополь, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III" , присвяченій пам'яті В. К. Дзядика (22.08.2009–26.08.2009, Світязь, Україна),
форма участі – доповідь;

–Міжнародній конференції "Теорія наближень та її застосування" , присвяченій 80-річчю з дня народження М. П. Корнєйчука (14.06.2010–

17.06.2010, Дніпропетровськ, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міжнародному симпозіумі з теорії наближення, присвяченому 70–річчю з дня народження професора Л. Шумейкера (17.05.2011–20.05.2011, Нешвіл, США),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції з сучасного аналізу (20.06.2011–23.06.2011, Донецьк, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування" , присвяченій 70-річчю з дня народження чл.-кор. НАНУ О. І. Степанця (28.05.2012–03.06.2012, Кам'янець-Подільський, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" , присвяченій 75-річчю з дня народження академіка А. М. Самойленка (23.06.2013–30.06.2013, Севастополь, Україна),
форма участі – доповідь;

– Кримській міжнародній математичній конференції (22.09.2013–04.10.2013, Судак, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Теорія наближень та її застосування" , присвяченій 75-річному ювілею В. П. Моторного (08.10.2015–11.10.2015, Дніпропетровськ, Україна),
форма участі – доповідь;

– Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування" , присвяченій 75-річчю з дня народження чл.-кор. НАНУ О. І. Степанця (28.05.2017–03.06.2017, Слов'янськ, Україна),
форма участі – доповідь.

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідались і обговорювались на міжвузівському семінарі з теорії функцій при кафедрі

математичного аналізу і теорії функцій ДНУ імені Олеся Гончара (Дніпропетровськ, 2010–2014, керівники семінару: член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. В. П. Моторний і д.ф.-м.н., проф. В. Ф. Бабенко, Дніпро, 01.11.2017, керівник семінару член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., проф. В. П. Моторний),
форма участі – доповідь,
а також на

– семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (Київ, 10.03.2017, 30.06.2017, керівник семінару д.ф.м.н., проф. А. С. Романюк),
форма участі – доповідь;

– семінарі з теорії функцій при кафедрі математичного аналізу Одеського національного університету імені І. І. Мечнікова (Одеса, 03.07.2017, керівник семінару, д.ф.-м.н., проф. А. О. Кореновський),
форма участі – доповідь;

– науково-методичному семінарі при кафедрі теорії функцій Білоруського державного університету (Мінськ, 25.09.2017, керівник семінару д.ф.м-н., проф. Е. І. Зверович),
форма участі – доповідь;

– семінарі "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка (Київ, 04.10.2017, керівники семінару: д.ф.-м.н., проф. О. О. Курченко, д.ф.-м.н., проф. В. М. Радченко, д.ф.-м.н., проф. І. О. Шевчук),
форма участі – доповідь.