Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу

Парфінович Наталії Вікторівни

«Сплайни в екстремальних задачах теорії наближень, нерівності для похідних та їх застосування»,

подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.01 – математичний аналіз

1. Актуальність теми дослідження. У теорії апроксимації одними із основних є задачі щодо наближення функціональних класів конкретними многовидами фіксованої розмірності, а також задачі про поведінку різних поперечників. При цьому класичними об'єктами наближення вже багато десятиліть є класи гладких функцій, з тими чи іншими типами обмежень на старшу похідну, а одним із найбільш значущих питань – питання про відшукання підпростору заданої розмірності, який у найкращий спосіб наближає клас. Окремий інтерес у цьому колі питань складають задачі про точні значення відповідних характеристик, розв'язанням яких присвячено роботи таких видатних математиків, як Ж. Фавар, Н. І. Ахієзер, М. Г. Крейн, А. М. Колмогоров, Б. Надь, С. М. Нікольський, В. К. Дзядик, С. Б. Стєчкін, Сунь Юншен, К. І. Бабенко, М. П. Корнєйчук, Л. В. Тайков. Ці питання добре висвітлені у математичній літературі: у численних статтях та декількох монографіях. Ще з перших класичних робіт цього напряму відомо, що у багатьох ситуаціях поперечник за Колмогоровим класичних класів Соболєва періодичних функцій реалізуть (у сенсі точного значення) підпростори тригонометричних поліномів відповідної розмірності. Згодом, переважно зусиллями А. О. Лігуна і М. П. Корнєйчука було доведено, що екстремальними у подібних задачах, разом з підпросторами тригонометричних поліномів, є підпростори поліноміальних сплайнів мінімального дефекту з рівномірно розподіленими вузлами. У даній дисертаційній роботі запропоновано серію нових підпросторів, які є екстремальними для L_1-поперечників за Колмогоровим класів диференційовних періодичних функцій з певними обмеженнями на старші похідні. При цьому, у порівнянні з класичними задачами, розглядаються як більш загальні класи функцій, так і апарат наближення, а у деяких ситуаціях – і метрика.

В останні роки все більше уваги приділяється задачам апроксимації, в яких наближаючі агрегати підпорядковані тим чи іншим обмеженням. До таких задач відносяться, наприклад, задачі наближення функціональних класів множинами, елементи яких належать цим класам. У цій проблематиці є також природним ставити питання, подібні тим, що розглядаються для апроксимації без обмежень: дослідження поведінки найкращих відносних наближень та відносних поперечників, відшукання екстремальних підпросторів для відносних поперечників.

Не зважаючи на велику кількість публікацій з розглядуваних питань, коло відкритих проблем залишається дуже великим і таким, що поширюється, тому вибір тематики досліджень є, безумовно, актуальним і обґрунтованим.

Інший напрям досліджень дисертаційної роботи пов'язаний з розвитком класичної гілки аналізу – нерівностями для норм похідних, а також застосуваннями цих нерівностей до задач теорії наближення. Вказані нерівності, особливо з непокращуваними константами, є предметом досліджень вже понад 100 років, починаючи від класичних результатів Е. Ландау, Ж. Адамара, Г. Г. Гарді, Дж. І. Літлвуда. Інтерес до цих питань обумовлений їх застосованістю в таких розділах математики, як аналіз, звичайні диференціальні рівняння, рівнянння у частинних похідних та ін. В останній час доволі популярними є дослідження таких нерівностей для похідних нецілого порядку функцій однієї та багатьох змінних. Інтерес до цього напряму пояснюється необхідністю застосування дробового інтегродиференціювання не тільки у математиці, а і в інших галузях науки, таких як: фізика, хімія, біологія, а невелика кількість відомих насьогодні точних нерівностей такого типу – певними труднощами, що виникають під час їх дослідження, і необхідністю розробки нових підходів і методів. З огляду на сказане вище, вважаю цілком обґрунтованим і актуальним цей напрям досліджень дисертаційної роботи.

2. Зміст роботи і новизна одержаних результатів. Дисертація обсягом 330 сторінок складається з анотації, вступу, п'яти розділів, списку використаних джерел, що містить 303 найменування. У вступі пропонується стислий огляд розвитку досліджень попередників, визначається предмет дослідження автора роботи, вказується її мета, окреслюються методи розв'язання нових задач і формулюються основні результати роботи. Також характеризується ступінь наукової новизни отриманих результатів та повноти викладу їх у наукових публікаціях, особистий внесок автора.

Основний зміст роботи складають п'ять розділів. Перші підрозділи кожного розділу мають допоміжний характер. У них представлений більш детальний огляд наведених раніше результатів за напрямком даного розділу, висвітлюються питання, які залишились невирішеними.

Перший розділ присвячено дослідженню найкращих наближень класів диференційовних періодичних функцій W^rF, старша похідна яких належить довільній перестановочно-інваріантній множині F, і класів диференційовних періодичних функцій $W^r H^\omega$, обмеження на старшу похідну яких задаються опуклим вгору модулем неперервності $\omega(t)$. Отримано точні значення найкращих наближень у L_1 цих класів підпросторами сплайнів $S^2_{2n,m}$ порядку $m \geq r$ дефекту 2 з вузлами у точках $\frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$ (теореми 1.2.2 і 1.2.3). Ці результати показують, що підпростори $S^2_{2n,m}$ як і підпростори T_{2n-1} тригонометричних поліномів порядку $n-1$ і $S^1_{2n,m}$ сплайнів мінімального дефекту з вузлами у точках $\frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, (це було відомо), є екстремальними для поперечників за Колмогоровим вказаних класів у L_1. Крім того, у даному розділі вказано ще одну серію екстремальних підпросторів для колмогоровських поперечників таких класів. Цими підпросторами є підпростори $S^1_{2n,m}(h)$ $\left(h \in \left(0, \frac{2\pi}{n}\right)\right)$ сплайнів порядку $m \geq r+1$ дефекту 1 з вузлами у точках $\frac{2k\pi}{n}$ і $\frac{2k\pi}{n} + h$, $k \in \mathbb{Z}$. Відповідні результати містяться у теоремах 1.3.2 і 1.3.3. На мій погляд, зазначені тут теореми є основними для даного розділу, а сам розділ важливою складовою дисертаційної роботи.

У *другому розділі* продовжуються дослідження питань побудови екстремальних підпросторів для колмогоровських поперечників, але замість класів $W^r F$ розглядаються більш загальні класи, елементи яких утворені за допомогою згорток функцій із перестановочно-інваріантної множини F з ядрами K, що не збільшують осциляцію, а у ролі наближаючих агрегатів виступають так звані узагальнені сплайни, що є згортками ядра K із введеними раніше сплайнами $S^2_{2n,r}$ або $S^1_{2n,r}(h)$. Доведено, що підпростори $K * S^2_{2n,r}$ і $K * S^1_{2n,r}(h)$ у випадку $K \in CVD$ є екстремальними для поперечників за Колмогоровим $d_{2n}(K * F, L_1)$. Аналогічні факти щодо підпросторів сплайнів $K * S^1_{2n,r}$ і тригонометричних поліномів T_{2n-1} були відомі.

Третій розділ присвячено дослідженню поведінки відносних поперечників (або поперечників за Коноваловим) та найкращих наближень за наявності обмежень на наближаючі агрегати. Відомо, що для $p = 2$ поперечники за Коноваловим $d_n(W^r_p, L_p, W^r_p)$ збігаються з колмогоровськими поперечниками $d_n(W^r_p, L_p)$, проте цей факт не є правильним для інших значень p, а саме, відомо, що для $p = 1, \infty$ поведінка цих характеристик істотно відрізняється навіть за порядком. У цьому розділі (зокрема, з метою побудови естремальних за порядком підпросторів для відносних поперечників) досліджене питання про порядкову поведінку при $n \to \infty$ найкращих L_q–наближень класів W^r_p $(1 \leq p \leq q \leq 2)$ диференційовних періодичних функцій сплайнами порядку r мінімального дефекту з цих класів. З'ясовано, що у випадку $p = q = 2$

для $r = 3, 4, \dots$ порядок цих наближень істотно відрізняється від порядку відповідних поперечників за Колмогоровим, отже послідовність підпросторів $\{S^1_{2n,r}\}$ не є екстремальною за порядком для поперечників $d_n(W^r_2, L_2, W^r_2)$ при $r = 3, 4, \dots$.

Четвертий і п'ятий розділи присвячено дослідженню точних нерівностей для норм дробових похідних та інтегралів функцій однієї та багатьох змінних. У *четвертому розділі* одержано низку таких нерівностей для норм дробових похідних у сенсі Маршо, які для функцій, заданих на всій дійсній осі, означаються таким чином:

$$D^\alpha_\pm f(x) = \frac{1}{\varkappa(\alpha, n)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{(\Delta^n_{\pm t} f)(x)}{t^{1+\alpha}}\, dt, \quad n \in \mathbb{N}, n > \alpha > 0,$$

де

$$\begin{aligned} (\Delta^n_{\pm t} f)(x) &:= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \mathbf{C}^m_n f(x \mp mt), \\ \varkappa(\alpha, n) &:= \Gamma(-\alpha) \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \mathbf{C}^m_n m^\alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

і у сенсі Адамара, які для функцій, заданих на півосі, означаються так:

$$\mathfrak{D}^\alpha_\pm f(x) = \frac{1}{\varkappa(\alpha, r)} \int\limits_{\mathcal{M}_\pm} \sum_{m=0}^{r} (-1)^m \mathbf{C}^m_r f(u^m x)\, \frac{du}{u|\ln u|^{1+\alpha}},$$

де $\mathcal{M}_+ = (0, 1)$, $\mathcal{M}_- = (1, +\infty)$, $r \in \mathbb{N}$, $r > \alpha > 0$ і $\varkappa(\alpha, r)$ означене в (1). Одержано також точні нерівності для норм узагальнених потенціалів Феллера:

$$M^\alpha_{u,v} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Big(u \int\limits_0^\infty \frac{f(x-t)}{t^{1-\alpha}}\, dt + v \int\limits_0^\infty \frac{f(x+t)}{t^{1-\alpha}}\, dt \Big), \quad u, v \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

П'ятий розділ містить результати щодо нерівностей такого типу для функцій багатьох змінних, а також щодо розв'язання деяких споріднених задач. На мій погляд, найбільший інтерес мають результати підрозділів 5.5 і 5.6, в яких встановлено точні нерівності, що оцінюють L_∞–норми похідних за Ріссом:

$$(D^\alpha f)(x) := \frac{1}{d_{m,2}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{2f(x) - f(x-t) - f(x+t)}{|t|^{m+\alpha}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^m, 0 < \alpha < 2,$$

$$d_{m,2}(\alpha) = \frac{2^{1-\alpha}\pi^{1+\frac{m}{2}}}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+\alpha}{2}\right)},$$

функцій $f \in L^{\Delta}_{\infty,s}$ через L_∞–норми самих функцій і L_s–норми їх лапласіанів, а також точні нерівності, що оцінюють норми одновимірних потенціалів Рісса:

$$(I^{\alpha}_{x_i} u'_{x_i})(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u'_{x_i}(x - te_i)}{|t|^{1-\alpha}}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^m, 0 < \alpha < 1$$

(e_i – i-й орт простору $\mathbb{R}^m$) частинних похідних функцій, означених на $\mathbb{R}^m$, через L_∞–норми самих функцій і L_∞–норми їх лапласіанів.

Ці результати є водночас поширенням на випадок дробових похідних і багатовимірними аналогами класичної нерівності Ландау.

3. Обґрунтованість та достовірність одержаних результатів. Дисертаційна робота Н. В. Парфінович виконана на високому науковому рівні. Одержані у ній результати є достовірними і строго обґрунтованими, що забезпечено наявністю чітких, повних і правильних доведень усіх наведених у роботі тверджень.

4. Апробація результатів та публікації. Результати дисертації досить повно опубліковані у провідних наукових журналах України та інших країн, є відомими спеціалістам та добре цитованими. 22 статті з переліку публікацій здобувача відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук, 13 із них надруковані у виданнях, внесених до міжнародних наукометричних баз Web of Science, Scopus. Зі статей, надрукованих у співавторстві, до дисертаційної роботи включено результати, отримані особисто здобувачем, що відзначено окремо по кожній публікації. Результати доповідались на численних українських та закордонних конференціях, а також на фахових семінарах в Україні та інших країнах.

Автореферат повно і адекватно відображає зміст дисертаційної роботи.

5. Практичне значення результатів дисертації. Дисертаційна робота Парфінович Наталії Вікторівни носить теоретичний характер. Отримані у роботі результати та розвинені методи мають перспективи щодо подальшого застосування у багатьох розділах сучасного аналізу, а також у суміжних областях.

6. Зауваження. Робота оформлена ретельно і акуратно. Принципових зауважень щодо її змісту та оформлення не маю. Робота містить невелику кількість похибок, які носять технічний характер (див., наприклад, сс. 5–9, 46, 98, 124, 160, 164, 247, 283, 287, 305) і не впливають на високу оцінку дисертаційної роботи.

7. Висновки. Враховуючи вищесказане, вважаю, що дисертаційна робота Парфінович Наталії Вікторівни «Сплайни в екстремальних задачах теорії наближень, нерівності для похідних та їх застосування» є завершеною науковою працею, що містить нові, важливі наукові результати, і задовольняє вимоги пп. 9, 10, 12–14 «Порядку присудження наукових ступенів», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України № 567 від 24 липня 2013 року (зі змінами і доповненнями, внесеними згідно з постановами КМУ № 656 від 19.08.2015 р., № 1159 від 30.12.2015 р., № 567 від 27.07.2016 р. та наказом МОН України від 12.01.2017 р.) щодо докторських дисертацій, а її автор, Парфінович Наталія Вікторівна, заслуговує на присудження їй наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Завідувач кафедри теорії функцій
Білоруського державного університету,
доктор фіз.-мат. наук, професор В. Г. Кротов

ПОДПИСЬ Кротова В.Г. УДОСТОВЕРЯЮ
Начальник управления
организационной работы и
документационного обеспечения Черкасская
«02» 05 2018 г.

Надійшов до спеціалізованої вченої ради Д26 07.05.2018р.
секретар ради / Артемигенко Ж.Я. /

Канцелярія