Відгук
офіційного опонента на дисертаційну роботу Парфінович Наталії Вікторівни "Сплайни в екстремальних задачах теорії наближень, нерівності для похідних та їх застосування", поданої на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз

З середини 50-х років минулого сторіччя у теорію апроксимації функцій міцно увійшли сплайн-функції, як один з її потужних інструментів. Сплайн-апроксимація у її сучасному вигляді вперше з'явилась у 1946 році в одній з робіт Шенберга, якому і належить цей термін. Свій подальший розвиток теорія сплайнів отримала в дослідженнях американських математиків Альберга, Нільсона, Уолша, Шульца, Варги, де Бора та інших. В подальшому французькими математиками Атья та Лораном був запропонований абстрактний підхід до побудови сплайнів як елементів гільбертових просторів. Значний внесок у розвиток теорії сплайнів також зробили Ю.С.Зав'ялов (дослідження багатовимірної інтерполяції сплайн-функціями), Ю.М.Субботін (екстремальні задачі функціональної сплайн-інтерполяції), М.П.Корнєйчук, В.М.Тихомиров, В.П.Моторний, А.О.Лигун, О.А.Женсикбаєв, В.Ф.Бабенко та інші (теорія найкращих наближень підпросторами сплайн-функцій).

З'ясувалось, що інтерполяційні сплайни не тільки мають перевагу над поліномами з точки зору зручності при обчисленнях, але в деяких ситуаціях вони мають найкращі апроксимативні властивості, забезпечуючи мінімально можливу при даній розмірності похибку наближення. Завдяки роботам М.П.Корнєйчука та його учнів, які застосували апарат сплайнів до класичних задач найкращої апроксимації, виявилось, що вже розроблені в теорії наближень методи розв'язку екстремальних задач, які базуються на ідеї двоїстості, на підпросторах сплайнів працюють іноді ліпше, ніж на підпросторах поліномів. У зв'язку з викладеним важливого значення набули задачі, пов'язані з пошуком екстремальних підпросторів сплайн-функцій при обчисленні точних, точних за порядком або асимптотично точних значень поперечників за Колмогоровим певних класів функцій. Вказані задачі відіграють важливу роль при розв'язанні низки проблем обчислювальної математики, теорії оптимального відновлення функціональних залежностей, теорії кодування інформації тощо.

Важливе місце в теорії наближення функції відіграють так звані (α, β)-наближення класів функцій різними скінченновимірними підпросторами, в тому числі і узагальненими сплайнами. Справа в тому, що множина задач найкращого (α, β)-наближення "інтерполює" задачі найкращого та найкращого одностороннього наближень і дозволяє розглядати їх з загальної точки зору. Вагомі результати в даному напрямку досліджень належать В.Ф.Бабенку, Є.П.Долженку, Є.А.Сєвастьянову.

Важливий клас екстремальних задач теорії апроксимації складають задачі наближення з обмеженнями на апарат наближення. Окрім питань односторонньої апроксимації до вказаної тематики відносяться задачі формозберігаючого наближення, досліджувані І.О.Шевчуком, Ю.М.Субботіним, Д.Левіатаном, В.М.Коноваловим, С.А.Теляковським, В.М.Тихомировим, В.Ф.Бабенком та іншими. Зокрема, було отримано низку вагомих результатів, повязаних з обчисленням найкращих відносних наближень класів функцій певними множинами та знаходженням відносних поперечників зазначених класів в просторах L_p для $p = 1, 2, \infty$. Слід зазначити, що питання про поведінку відносних поперечників $d_n(W_p^r, L_p, W_p^r) = \inf\{E(W_p^r, H \cap W_p^r)_p : H \subset L_p, \dim H \leqslant n\}$, де $E(W_p^r, H \cap W_p^r)_p = \sup\{E(f, H \cap W_p^r)_p : f \in W_p^r\}$, залишається відкритим при $p \neq 1, 2, \infty$.

Нерівності, що оцінюють норму проміжної похідної функції через норму самої функції та норму її старшої похідної, мають велике значення для багатьох областей математики, таких як математичний аналіз, теорія апроксимації, диференціальні рівняння, теорія некоректних задач, оптимізація алгоритмів тощо. Найбільш цікавими є непокращувані нерівності зазначеного типу, оскільки їх отримання вимагає створення нових оригінальних методів дослідження, які разом з точними нерівностями знаходять подальше застосування у інших галузях математики. Починаючи з робіт Е.Ландау, Ж.Адамара, Г.Харді, Дж.Літтлвуда зусилля багатьох математиків були спрямовані на отримання таких нерівностей. Одним з фундаментальних в зазначеній тематиці є результат А.М.Колмогорова, завдяки якому нерівності для норм проміжних похідних диференційовних функцій та їх аналоги стали називати нерівностями типу Колмогорова.

В подальшому для похідних цілих порядків від функцій, означених на всій числовій осі, на півосі, на обмеженому інтервалі або на одиничному колі значна кількість точних нерівностей типу Колмогорова в різний час була отримана в роботах Г.Харді, Дж.Літтлвуда, Г.Поліа, Б.Надя, І.М.Стейна, С.Б.Стечкіна, М.П.Купцова, В.М.Тихомирова, Л.В.Тайкова, В.М.Габушина, В.В.Арєстова, Г.Г.Магаріл-Ільяєва, В.Ф.Бабенка, С.О.Пічугова, В.О.Кофанова, О.Ю.Шадріна, С.Карліна, А.Пінкуса, А.І.Звягінцева, Б.Боянова та багатьох інших. Не менш важливими, ніж нерівності для похідних цілих порядків, є нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку, але в зазначеному напрямку одержано значно менше остаточних результатів, переважна більшість з яких була отримана в роботах В.В.Арєстова, Г.Г.Магаріл-Ільяєва, В.М.Тихомирова, В.Ф.Бабенка та інших.

Не зважаючи на те, що в кожному з зазначених напрямків дослідження нерівностей типу Колмогорова отримана ціла низка важливих результатів, велика кількість питань, пов'язаних з даною тематикою, залишається відкритою. Це стосується, наприклад, нерівностей типу Колмогорова для норм похідних Маршо функцій, заданих на осі; для норм похідних Адамара функцій, заданих на півосі; для дробових похідних за Адамаром у просторах з інтегральною метрикою тощо. Багато відкритих питань залишається і для нерівностей типу Колмогорова для дробових похідних функцій багатьох змінних.

Виходячи з викладеного, вважаю тему дисертаційної роботи **актуальною**.

Дисертація складається з анотації; переліку умовних позначень; вступу; п'яти розділів, до кожного з яких надаються висновки; загальних висновків; списку використаних джерел з 303 найменувань; додатку А і має 330 сторінок машинописного тексту.

Перший розділ дисертації присвячений постановкам екстремальних задач, пов'язаних з найкращими наближеннями класів диференційовних періодичних функцій сплайнами. Вводяться необхідні поняття та означення, наводяться історичні відомості щодо минулих наукових здобутків, пов'язаних з досліджуваною тематикою.

У підрозділі 1.2 досліджуються найкращі наближення класів диференційовних періодичних функцій підпросторами сплайнів дефекту 2. Зокрема у теоремі 1.2.2 в просторі L_1 отримано точне значення найкращого наближення класів W^rF, де F — довільна Π-інваріантна множина 2π-періодичних функцій, підпросторами 2π-періодичних поліноміальних сплайнів $S^2_{2n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, порядку m дефекту 2 з вузлами в точках $t_j = 2j\pi/n$, $j \in \mathbb{Z}$. Важливу роль при доведенні відіграє теорема 1.2.1. З теореми 1.2.2 витікає, що $S^2_{2n,m}$ є екстремальним підпростором для колмогоровського поперечника $d_n(W^rF, L_1)$ при $m \geqslant r$.

В наступній теоремі 1.2.3 отримано точні значення найкращих L_1-наближень класів W^rH^ω сплайнами $S^2_{2n,m}$ при $m \geqslant r+1$, де ω — опуклий вгору модуль неперервності. З'ясувалось, що $S^2_{2n,m}$ при $m \geqslant r+1$ також є екстремальним підпростором для поперечника $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$. У підрозділі

1.3 досліджуються найкращі наближення класів диференційовних періодичних функцій W^rF (теорема 1.3.2) та W^rH^ω (теорема 1.3.3) підпросторами сплайнів $S^1_{2n,m}(h)$, $n, m \in \mathbb{N}$, мінімального дефекту, порядку m, з вузлами в точках $t_j = 2\pi[j/2]/n + (1-(-1)^j)h/2$, $j \in \mathbb{Z}$, де $[\cdot]$ — ціла частина числа, $h \in (0, 2\pi/n)$. При цьому ω — опуклий вгору модуль неперервності. У вказаних теоремах обчислено точні значення величин $E(W^rF, S^1_{2n,m}(h))$ та $E(W^rH^\omega, S^1_{2n,m}(h))$, $m \geqslant r+1$, відповідно. Було встановлено, що підпростір $S^1_{2n,m}(h)$ є екстремальним для колмогоровських поперечників $d_{2n}(W^rF, L_1)$ та $d_{2n}(W^rH^\omega, L_1)$ при $m \geqslant r+1$. При доведенні теорем 1.3.2 та 1.3.3 важливу роль відіграє допоміжний результат — теорема 1.3.1. На мій погляд, вказані результати є вагомими, їх доведення нетривіальне, а здобувач проявив певну майстерність і хист.

У підрозділах 1.4 та 1.5 досліджуються нерівності Джексона для сплайнів та нерівності Бернштейна для сплайнів дефекту 2 відповідно. Зокрема, в теоремі 1.4.2 отримано точну нерівність Джексона при наближенні функцій $f \in L^r_1$, $r = 1, 3, 5, \ldots$, підпросторами сплайнів $S^2_{2n,m}$ та $S^1_{2n,m}(h)$, $m \geqslant r+1$, у метриці L_1. Зважаючи на те, що нерівності Бернштейна відіграють важливу роль в багатьох питанях теорії наближень, в теоремах 1.5.1, 1.5.2 та 1.5.3 отримано зазначені результати для сплайнів $s \in S^2_{2n,r}$, коли $n, r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячений найкращим несиметричним наближенням класів згорток узагальненими сплайнами. Спочатку наводиться в хронологічному порядку розвиток ідей та методів теорії апроксимації функціональних класів, пов'язаних з даною тематикою. Далі, у теоремі 2.2.1 отримано точне значення наближення класів згорток $K*F$, де ядро $K \in CVD$, F — Π-інваріантна підмножина в L_1, підпросторами $K * S^2_{2n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, в метриці L_1. Завдяки цьому було встановлено, що підпростори $K * S^2_{2n,k}$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$. Важливу роль при доведенні зазначеної теореми відіграє лема 2.2.1 та теорема 2.2.2, яка має і самостійний інтерес. Логічним продовженням цих досліджень виступає теорема 2.3.1, в якій отримано точне значення найкращого наближення класів $K*F$, коли $K \in CDV[\Delta]$, а F — Π-інваріантна підмножина в L_1, узагальненими сплайнами $K * S^1_{2n,r}(h)$, $h \in (0, 2\pi/n)$, $\Delta \in (0, 2\pi]$, $r \in \mathbb{N}$, в метриці простору $L_{1;\alpha,\beta}$, де $\alpha, \beta \in (0, \infty]$. При цьому $n \geqslant 2\pi/\Delta$ має бути настільки великим, щоб $T(M(K)) \subset K * S^1_{2n,r}(h)$. Завдяки цьому було встановлено, що підпростори $K * S^1_{2n,r}(h)$ є екстремальними для поперечників $d_{2n}(K * F, L_1)$ при $K \in CVD$ і $\alpha = \beta = 1$.

Третій розділ дисертації присвячений найкращим відносним наближенням класів диференційовних 2π-періодичних функцій сплайнами та обчисленню порядків відносних слабких поперечників деяких класів векторнозначних функцій. На початку розділу наводиться необхідна інформація щодо постановки задачі відносної апроксимації та дається огляд результатів з цієї тематики. У теоремі 3.2.1 одержано точну порядкову оцінку величини найкращого відносного (відносно класу W_p^r) наближення функціональних класів W_p^r, де $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 3$, у метриці L_q, $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant 2$, підпросторами сплайнів $S_{2n,r}^1$ при $n \to \infty$. Слід зазначити, що при $p = q = 1$ цей результат був отриманий В.Ф.Бабенком у 1994 році. Завдяки теоремі 3.2.1 було встановлено, що насправді послідовність підпросторів сплайнів $\{S_{2n,r}^1\}$ не є екстремальною за порядком, принаймні для відносних поперечників за Коноваловим $d_n(W_2^r, L_2, W_2^r)$ при $r \geqslant 3$. Продовжуючи дану тематику, досліджуються найкращі відносні несиметричні наближення класів диференційовних 2π-періодичних функцій W_1^r, $r = 4, 6, \ldots$, сплайнами в просторі L_1. Спершу наводиться один з результатів В.Ф.Бабенка (1992 р.) щодо поведінки при $n \to \infty$ послідовності величин $E(W_1^r, S_{2n,r-1}^1 \cap (1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_1$, де $\{\varepsilon_k\}$ — незростаюча послідовність додатних чисел, $r = 3, 4, \ldots$. У теоремі 3.3.2 дається подальше розвинення цього результату шляхом отримання точної асимптотики найкращих відносних несиметричних наближень класів W_1^r сплайнами в L_1. Як наслідок, отримано найкращі односторонні наближення класів W_1^r сплайнами із $(1+\varepsilon_k)W_V^{r-1}$. Природним є також отримання оцінок значень константи , для яких при всіх $n \in \mathbb{N}$ і $r = 3, 4, \ldots$ має місце рівність $E(W_1^r, S_{2n,r-1}^1 \cap MW_V^{r-1})_1 = E(W_1^r, S_{2n,r-1}^1)_1$. У теоремі 3.3.3 дисертації результат аналогічного змісту було отримано для відносних несиметричних наближень у просторі L_1 для класів W_1^r, де $r = 4, 6, \ldots$, сплайнами з MV_V^{r-1}; тобто було знайдено найменші значення константи M, за яких вказана апроксимативна характеристика збігається з найкращими несиметричними наближеннями класу W_1^r підпросторами сплайнів $S_{2n,r-1}^1$ без будь-яких обмежень. Завершується розділ отриманням точних порядкових оцінок для відносних слабких поперечників класів згорток функцій з одиничної кулі простору істотнообмежених за нормою банаховозначних функцій з дійсним ядром у рівномірній метриці (теорема 3.4.1). Цей результат можна розглядати, як певне поширення результатів В.М.Коновалова і А.В.Павліка та В.Ф.Бабенка і Л.Е.Азара.

Четвертий розділ дисертації присвячений дослідженню нерівностей Колмогорова для дробових похідних функцій однієї змінної та їх застосуванням. На початку розділу наведено історичні відомості про нерівності Колмогорова та вказано низку споріднених задач, а саме *задачу С.Б.Стєчкіна* про найкраще наближення необмеженого оператора лінійними обмеженнями на заданому класі елементів та *задачу оптимального відновлення* необмеженого оператора на класі Q у припущенні, що елементи з Q задані з відомою похибкою.

Стосовно історії виникнення та розвитку зазначених задач, в дисертації наведено ґрунтовні історичні відомості. Зокрема, наводяться умови на множину Q та необмежений оператор A, при яких має місце звязок задачі про оптимальне відновлення оператора A за допомогою множини відображень $\mathcal{O}$ на елементах класу Q, заданих з похибкою δ, з нерівностями типу Колмогорова, з одного боку, і задачею наближення необмежених операторів обмеженими — з іншого боку. Також наводиться один результат С.Б.Стєчкіна (1967 р.), який дає просту, але часто використовувану і ефективну оцінку знизу величини найкращого наближення оператора через його модуль неперервності. В подальших дослідженнях (розділ 5) ці два відомі результати неоднаразово використовуються для розв'язку задач про найкращі відновлення та задач про найкращі наближення певних операторів.

Для норм похідних за Маршо функцій $f \in L^r_{\infty,s}(G)$, де $G = \{\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\}$, $1 < s \leqslant \infty$, при певних умовах отримано точні адитивні та мультиплікативні нерівності, які оцінюють норму $\|D^\alpha_- f\|_{L_\infty(G)}, \alpha \in (0, r - 1/s)\backslash\mathbb{N}$, через L_∞-норму самої функції f і L_s-норму її r-тої похідної $f^{(r)}$ (теорема 4.2.1). У випадку $s = 1$ вказана задача розв'язана за допомогою теореми 4.2.2.

У випадку $f \in L^2_{\infty,s}(\mathbb{R})$, $1 < s \leqslant \infty$, $\alpha \in (1, 2 - 1/s)$, для дробових похідних за Маршо $D^\alpha_- f$ отримано точну мультиплікативну нерівність, в якій $\|D^\alpha_- f\|_{L_\infty(\mathbb{R})}$ оцінюється зверху через L_∞-норму функції f та L_s-норму її другої похідної f'' (теорема 4.2.4).

Далі вивчаються нерівності типу Колмогорова для норм дробових похідних за Адамаром $\mathcal{D}^\alpha_\pm f$ у просторах з інтегральною метрикою. Так, у теоремі 4.3.1 отримано точну нерівність, в якій для довільної функції $f \in \mathcal{L}^r_{p,s}(\mathbb{R}_+)$, $1 \leqslant p, s \leqslant \infty$, $r \in \mathbb{N}$, норма $\|\mathcal{D}^\alpha_\pm f\|$ оцінюється зверху через $\mathcal{L}_p$-норму функції f та L_s-норму r-тої похідної $\mathcal{D}^r f$ на півпрямій $\mathbb{R}_+$. У наступній теоремі 4.3.2 наведено точні нерівності типу Колмогорова, в яких для будь-якого $x \in \mathbb{R}_+$ величина $|(\mathcal{D}^\alpha_\pm f)(x)|$, де $f \in L^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_+)$, $\alpha \in (0,1)$, оцінюється через $\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}$ та $\|f'\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$. Цю ж задачу, коли величина $|(\mathcal{D}^\alpha_\pm f)(x)|$, де $x \in \mathbb{R}_+$, $f \in L^1_{\infty,\infty}(\mathbb{R}_+)$, $\alpha \in (0,1)$, оцінюється через $\|f\|_{C(\mathbb{R}_+)}$ і $\|\mathcal{D}(f)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$, вирішено за допомогою теореми 4.3.3.

Наступним кроком стало дослідження нерівностей типу Колмогорова для оцінки норм похідних за Адамаром $\|\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm} f\|_X$, де $\alpha \in (0,1)$, $X = \{C(\mathbb{R}_+); \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+), 1 \leqslant p < \infty\}$, $f \in X$, через $\|f\|_X$ та $\|f\|_{\mathcal{H}^{\omega}_X}$ (ω — деякий модуль неперервності, $\mathcal{H}^{\omega}_X$ — гельдерів простір) (дивись теорему 4.3.6, в якій $X = \mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)$ та $f \in \mathcal{H}^{\omega}_{\mathcal{L}_p(\mathbb{R}_+)}$). У випадку $f \in \mathcal{H}^{\omega}_{C(\mathbb{R}_+)}$ точні адитивну та мультиплікативну нерівності типу Колмогорова щодо оцінки $\|\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm} f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$ через $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}$ та $\|f\|_{\mathcal{H}^{\omega}_{C(\mathbb{R}+)}}$ при певному обмеженні на ω було отримано в теоремі 4.3.5. Завдяки результатам, отриманим у вказаних теоремах при певному обмежені на ω, *було*:

одержано оцінку для модуля неперервності $\Omega_{\pm}(\delta, U\mathcal{H}^{\omega}_X)$ операторів $\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}$ (теорема 4.3.7);

розв'язано задачу про найкраще наближення оператора дробового диференціювання за Адамаром $\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}$, $\alpha \in (0,1)$, тобто обчислено точне значення величини $E_N(\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}, U\mathcal{H}^{\omega}_X)$, де $X = \{C(\mathbb{R}_+), \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)\}$ (теорема 4.3.8);

отримано розв'язок задачі оптимального відновлення операторів дробового диференціювання $\mathcal{D}^{\alpha}_{\pm}$ на класах $U\mathcal{H}^{\omega}_{\mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+)}$ та $U\mathcal{H}^{\omega}_{C(\mathbb{R}_+)}$ (теорема 4.3.9).

Закінчується розділ встановленням точних нерівностей типу Колмогорова, що оцінюють норми узагальнених потенціалів Феллера першої похідної заданої на $\mathbb{R}$ функції через L_∞-норму цієї функції та L_s-норму її першої похідної (див., наприклад, теорему 4.4.2).

Отримані в четвертому розділі результати, на мою думку, є вагомим внеском здобувача у подальший розвиток нерівностей типу Колмогорова для дробових похідних функцій однієї змінної. Особливої уваги заслуговують застосування зазначених результатів до низки задач, пов'язаних з найкращими наближеннями та оптимальними відновленнями операторів тощо.

П'ятий розділ дисертації присвячений нерівностям Колмогорова для дробових похідних функцій багатьох змінних та їх застосуванням. На початку розділу наводяться необхідні позначення та означення і дається огляд результатів з вказаної тематики. Зокрема, згадуються результати В.М.Коновалова, О.А.Тімошина, Ю.М.Субботіна та Дінь-Дзунга, О.П.Буслаєва та В.М.Тихомирова, В.Г.Тимофєєва, В.Ф.Бабенка, С.О.Пічугова, М.С.Чурілова та інших. Далі отримано точні нерівності типу Колмогорова для норм мішаних дробових похідних за Маршо функцій багатьох змінних з гельдерових просторів (теорема 5.2.1) та застосовано їх до розвязання задачі про наближення необмеженого оператора дробового диференціювання за Маршо D^{α}_{ε}, де $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $\alpha_j \in (0,1)$, $j = \overline{1,m}$; $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$, $\varepsilon_j = \pm$, $j = \overline{1,m}$, — вектор розподілу знаків, обмеженими операторами на класах функцій, які задаються мажорантою модуля неперервності (теорема 5.2.2). У наступній теоремі 5.2.3 отримано розв'язок задачі Колмогорова про необхідні і достатні умови існування функції, для якої задані числа є верхніми гранями абсолютних значень їх похідних відповідних порядків, пристосованої до досліджуваного випадку дробових похідних за Маршо.

Наступним кроком стало отримання здобувачем нерівностей типу Колмогорова для похідних Рісса функцій з $L^{\nabla}_{\infty,s}(\mathbb{R}^m)$, $s > m$, та розв'язання споріднених задач. Спочатку за допомогою леми 5.3.2 отримано у метриці $L_{\infty}(\mathbb{R}^m)$ оцінку відхилення похідної Рісса $D^{\alpha}f$, $0 < \alpha < 1-m/s$, від так званої зрізаної похідної Рісса $D^{\alpha}_{h}f$, $h > 0$. Потім за допомогою зазначеного отримано точну нерівність типу Колмогорова, що оцінює рівномірну норму похідної Рісса $D^{\alpha}f$ через рівномірну норму f і L_s-норму ∇f в адитивній (теорема 5.3.3) і мультиплікативній (теорема 5.3.4) формах. Також знайдено модуль неперервності Ω оператора D^{α} на класі $W^{\nabla}_{\infty,s}$, де $s > m$, $0 < \alpha < 1 - m/s$ (наслідок 5.3.1) та отримано розв'язки задачі Стечкіна (теорема 5.3.5) та задачі про оптимальне відновлення оператора D^{α} на заданих з похибкою функціях з класу $W^{\nabla}_{\infty,s}$ (теорема 5.3.6). У теоремі 5.3.7 розв'язано задачу Колмогорова про необхідні та достатні умови існування функції $f \in L^{\nabla}_{\infty,s}$, $s > m$, $0 < \alpha < 1-m/s$, такої, що $\|f\|_{\infty} = M_0$, $\|D^{\alpha}\|_{\infty} = M_{\alpha}$, $\|\nabla f\|_s = M_{\nabla}$.

У *такому ж ракурсі* розглянуто нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних зі скінченною в ідеальній структурі нормою градієнта (лема 5.3.4, теореми 5.3.8, 5.3.9) та нерівності типу Колмогорова для норм гіперсингулярних інтегралів з однорідною знакосталою характеристикою (лема 5.4.2; теореми 5.4.1, 5.4.2, наслідок 5.4.1, теореми 5.4.3, 5.4.4).

При дослідженні неріностей типу Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних зі скінченною нормою лапласіана $\|\triangle f\|_s$ вводиться оператор U^{α}_{h}, $h > 0$, і отримується оцінка відхилення $D^{\alpha}f$ від U^{α}_{h} в метриці $L_{\infty}(\mathbb{R}^m)$ на класі $L^{\triangle}_{\infty,s}$ при $m/2 < s < \infty$, $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$, $0 < \alpha < 2$ (лемма 5.5.2). Потім за допомогою цих результатів одержується точна нерівність типу Колмогорова, що оцінює $\|D^{\alpha}f\|_{\infty}$ через $\|f\|_{\infty}$ і $\|\triangle f\|_s$ в адитивній формі (теорема 5.5.1) та в мультиплікативній формі (теорема 5.5.2). Також знайдено модуль неперервності оператора D^{α} на класі $W^{\triangle}_{\infty,s}$ (наслідок 5.5.1) та отримано розв'язки задачі Стечкіна (теорема 5.5.3) та задачі про оптимальне відновлення оператора D^{α} на заданих з похибкою функціях класу $W^{\triangle}_{\infty,s}$. У теоремі 5.5.5 отримано розв'язок адаптованої до досліджуваного випадку задачі Колмогорова про необхідні і достатні умови існування функції $f \in L^{\triangle}_{\infty,s}$, $m/2 < s < \infty$, $0 < \alpha < 2 - m/s$ або $s = \infty$ і

$0 < \alpha < 2$, що має задані значення $\|f\|_\infty = M_0$, $\|D^\alpha f\|_\infty = M_\alpha$, $\|\triangle f\|_s = M_\triangle$.

Приблизно за подібною схемою досліджуються нерівності типу Колмогорова для норм похідних Рісса функцій багатьох змінних зі скінченною в ідеальній структурі нормою лапласіана (теореми 5.5.6, 5.5.7, 5.5.8).

Наприкінці розділу отримано точні нерівності для норми одновимірного потенціалу Рісса частинної похідної функції багатьох змінних з обмеженим в $L_\infty(\mathbb{R}^m)$ лапласіаном (теорема 5.6.1).

На мою думку, результати пятого розділу є суттєвим внеском здобувача у подальший розвиток напряму, пов'язаного з дослідженням нерівностей типу Колмогорова для функцій багатьох змінних.

Однак є **деякі зауваження**, що стосуються дисертаційної роботи.

Доцільно було б на початку дисертації пояснити, у якому сенсі використовується термін "точна нерівність".

На стор. 35 (1-й та 2-й рядки знизу) та на стор. 61 (4-й та 5-й рядки зверху) дано означення функції $f_{n,0}(\omega, t)$, але воно не повне. Треба додати наступне: $f_{n,0}(\omega, t) = -f_{n,0}(t - \pi/n)$, $\pi/n \leqslant t \leqslant 2\pi$, $f_{n,0}(t + 2\pi) = f_{n,0}(t)$ (дивись стор. 288 монографії М.П.Корнєйчука "Точные константы в теории приближений". – М. : Наука, 1987).

При означені функції $\omega(p, x)$ (стор. 47 та стор. 170) замість $x \in (-p, 1]$ треба записати $x \in (-p, 1)$ оскільки інакше в точці $x = 1$ функція $\omega(p)$ приймає два різні значення. Така ж ситуація має місце і при означенні функцій $\omega(a, b, p; x)$ (стор. 48 та стор. 172).

У формулі, наведеній на стор. 90 (11-й рядок зверху), множник $1/2$ доцільно прибрати з лівої та правої частин рівності.

У формулюванні леми 2.2.1 (стор. 105) в останній формулі (1-й рядок знизу) пропущено аргументи $t_1, t_2, ..., t_n$.

В дисертації по різному позначаються одні й ті ж самі згортки: $(B_{k+1} * K(-\cdot) * f)(t_1) = ...$ (стор. 105, 3-й рядок знизу); $B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_1) = ...$ (стор. 108, 11-й рядок зверху); $(B_{k+1} * K(-\cdot) * f(t_1)$ (стор. 108, 7-й рядок зверху); $B_{k+1} * (K(-\cdot) * f)(t_j) = ...$ (стор. 108, 3-й, 4-й,6-й рядки зверху); $B_{r+1} * K(-\cdot) * g(t_j)) = ...$ (стор. 113, 3-й рядок знизу).

У формулі (2.21) на стор. 113 перший множник $\Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta; t)$ підінтегрального виразу слід записати у вигляді $\Pi(K(-\cdot) * \varphi_{n,0}(\alpha, \beta); t)$.

На стор. 139 (1-й рядок знизу) другу нерівність слід замінити на $|t_{min} - \frac{k_2\pi}{n}| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

З формулювання теореми 4.2.2 не зрозуміло, що буде у випадку $r = 1$, оскільки тоді $\alpha \in (0, r-1)\backslash\mathbb{N}$ невизначене.

На стор. 239 незрозуміло, якою насправді є умова (5.42)

На стор. 208 інтеграли повинні братися по множині $\mathbb{R}^m\backslash B_h$.

Є низка незначних технічних описок, наприклад, в формулі (1) на стор. 35; в формулі, наведеній в теоремі 3.2.1 на стор. 45; в формулі (1.31) тощо.

Вказані зауваження, на мій погляд, не впливають на позитивне сприйняття матеріалів дисертаційної роботи і не зменшують її наукової значущості.

Не зважаючи на зроблені зауваження, одержані в дисертації результати та зроблені автором висновки є **правильними і обґрунтованими**. Основні результати дисертації є новими, отримані особисто її автором і досить повно викладені в надрукованих ним роботах. Автореферат правильно відображає зміст дисертації. Одержані в дисертації результати, а також застосовані методи можуть бути використані при дослідженні певного кола питань, пов'язаних з розв'язанням деяких екстремальних задач теорії наближення функцій, з розробкою ефективних методів доведення нерівностей для норм проміжних похідних, з вдосконаленням методів оцінювання найкращого наближення необмеженого оператора лінійними обмеженими.

Вважаю, що дисертаційна робота Парфінович Наталії Вікторівни "Сплайни в екстремальних задачах теорії наближень, нерівності для похідних та їх застосування" задовольняє вимогам пп. 9, 10, 12–14 "Порядку присудження наукових ступенів" (Постанова Кабінету Міністрів України №567 від 24.07.2013) щодо докторських дисертацій, а її автор **Парфінович Наталія Вікторівна заслуговує** на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 - математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри економіки та
моделювання бізнес-процесів
університету імені Альфреда Нобеля С.Б.Вакарчук

07.05.2018

Підпис С.Б.Вакарчука засвідчую
Секретар Вченої ради
університету імені Альфреда Нобеля
доктор педагогічних наук, професор С.П.Кожушко

Надійшов до спецради вченої ради Д26.206.01
10.05.2018р.
секретар ради /Романюк А.С./