НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ВЛАСИК Ганна Миколаївна

УДК 517.5

ОЦІНКИ НОРМ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ І ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ (ψ, β)–ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз
(111 — математика)

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико–математичних наук, професор
РОМАНЮК Анатолій Сергійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу теорії функцій.

Офіційні опоненти:

доктор фізико–математичних наук
ЧАЙЧЕНКО Станіслав Олегович,
ДВНЗ "Донбаський державний педагогічний університет", м. Слов'янськ, проректор з науково–педагогічної роботи;

кандидат фізико–математичних наук
МУСІЄНКО Андрій Петрович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
асистент кафедри мережевих та інтернет технологій.

Захист відбудеться "22" травня 2018 р. о 15:00 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "11" квітня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **Романюк А. С.**

Загальна характеристика роботи

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню деяких екстремальних задач теорії наближень. Зокрема, розглядаються властивості тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік стосовно двох питань: перше пов'язане з відомою проблемою Літтлвуда, а друге стосується нерівностей типу Бернштейна – Нікольського. Також значну увагу приділено дослідженню поведінки колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для різних співвідношень між параметрами p і q.

Актуальність теми. У 1948 р. Дж. Літтлвуд висловив гіпотезу, що для будь–якого набору цілих чисел $j_1, ..., j_m$ справедлива нерівність

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right\|_1 \geq C \ln m,$$

де $C > 0$ — деяка стала.

У 1981 р. позитивний розв'язок гіпотези Літтлвуда незалежно і майже одночасно було одержано С. В. Конягіним та Мак–Гі, Піно і Смітом. Згодом В. М. Тихомиров запропонував узагальнити задачу Літтлвуда і дослідити асимптотику при $m \to \infty$ величини вигляду

$$L_m(r,q) = \inf_{K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)^{(r)} \right\|_q, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

де $K_m = \{j_1, ..., j_m\}$ — довільний набір із m різних цілих чисел і похідна порядку $r \geq 0$ розуміється в сенсі Вейля.

Дослідженням величини $L_m(r,q)$ займались В. Є. Майоров, Е. С. Белінський, Е. М. Галєєв, М. Б. Сіхов та інші математики.

У багатьох питаннях теорії наближення періодичних функцій однієї змінної важливу роль відіграють нерівності, які пов'язують L_p–норму r–ї похідної полінома з його L_q–нормою. Такого виду співвідношення, у яких поєднані нерівності Бернштейна при $r > 0$, $p = q$ і "нерівності різних метрик" Нікольського при $r = 0$, $p \neq q$, називають нерівностями Бернштейна – Нікольського.

У зв'язку з нерівностями Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів вигляду

$$T^*(m) = \left\{ t : t(x) = \sum_{j \in K_m} c_j e^{ijx} \right\},$$

В. Є. Майоровим була розглянута більш загальна постановка задачі, а саме: досліджувалася величина вигляду

$$\mathcal{T}_m(r,q,p) = \inf_{K_m} \sup_{t\in T^*(m)} \frac{\|t^{(r)}\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 \le p, q \le \infty,$$

де похідна порядку $r \ge 0$ розуміється в сенсі Вейля.

Починаючи з 30–х років минулого століття, у теорії наближення набуває потужного розвитку напрям, пов'язаний з дослідженням апроксимативних характеристик класів періодичних функцій.

Задачі апроксимаційного змісту, що формулюються на класах функцій, у багатьох випадках є задачами, у яких ставиться питання знайти чи оцінити точну верхню грань похибки наближення заданим методом на фіксованому класі функцій.

Питання оптимальної побудови наближаючих поліномів є складовою частиною більш загальної проблеми, сформульованої А. М. Колмогоровим, який запропонував розглядати відхилення фіксованого класу функцій від довільного підпростору заданої розмірності, а потім мінімізувати ці відхилення по всіх таких підпросторах. Відповідна апроксимативна характеристика отримала назву колмогоровський поперечник. Пізніше В. М. Темляковим була введена ще одна важлива апроксимативна характеристика — ортопроекційний поперечник.

В останні декілька десятиліть значно зросла зацікавленість до дослідження апроксимативних властивостей функціональних класів, які є узагальненнями класів Вейля – Надя $W^r_{p,\beta}$.

У 1983 р. О. І. Степанцем було введено класи $L^\psi_{\beta,p}$, які при фіксованих значеннях параметрів, що їх визначають, співпадають з класами $W^r_{p,\beta}$. За допомогою поняття (ψ,β)–похідних вдалося класифікувати ввесь спектр сумовних (неперервних) періодичних функцій і, в той же час, виділяти більш тонкі властивості кожної окремої функції. Для зазначених класів $L^\psi_{\beta,p}$ на даний час отримано розв'язки цілої низки задач теорії наближення функцій, які раніше розглядалися на класах Вейля – Надя.

Однак, незважаючи на велику кількість робіт, присвячених дослідженню згаданих вище екстремальних задач, ще залишається низка відкритих питань. Це стосується, зокрема, оцінок L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік, нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік, а також колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^\psi_{\beta,p}$.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково–дослідною темою "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин", номер державної реєстрації 0111 U 002079.

Мета і завдання дослідження. *Мета* дисертаційної роботи полягає в знаходженні точних за порядком оцінок L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік, встановленні точних за порядком нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік, а також в одержанні порядків колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для різних співвідношень між параметрами p і q.

Об'єктом дослідження є класи періодичних функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$ однієї змінної.

Предметом дослідження є L_q–норми ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік, нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік, а також колмогоровські та ортопроекційні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Завдання дослідження:

1. Встановити точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік і порівняти їх з оцінками L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле.

2. Одержати точні за порядком нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік.

3. Знайти точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на послідовності ψ, які визначають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ малої гладкості.

4. Встановити точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використовуються загальні методи теорії функцій у поєднанні з методами, які були розроблені у роботах В. Є. Майорова, Е. С. Белінського, Б. С. Кашина, Е. Д. Куланіна, В. М. Темлякова та ін.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають у такому:

1. Встановлено точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік. При цьому виявлено, що у випадку $2 < q < \infty$ і певних умовах на послідовності ψ оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік і оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле відрізняються за порядком.

2. Одержано точні за порядком нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік.

3. Знайдено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на послідовності ψ, які визначають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ малої гладкості.

4. Встановлено точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні питань теорії наближення функцій.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належать науковому керівнику — доктору фіз.–мат. наук, професору А. С. Романюку. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися і обговорювалися на:

— Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 3 – 6 червня 2015 року;

— Міжнародній науковій конференції "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 75–річчя В. П. Моторного, Дніпропетровськ, 08 – 11 жовтня 2015 року;

— Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, 24 – 27 лютого 2015 року;

— Конференції молодих вчених "Підстригачівські читання — 2016" , Львів, 25 – 27 травня 2016 року;

— Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року;

— Конференції молодих вчених "Підстригачівські читання — 2017", Львів, 23 – 25 травня 2017 року;

— Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченої 100–річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, Київ, 7 – 10 червня 2017 року;

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару: доктор фіз.–мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Т. Г. Шевченка (керівники семінару: доктори фіз.–мат. наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко, В. М. Радченко).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у наукових публікаціях [1 – 13]. Шість з них [1 – 6] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико–математичних наук, дві з яких [4, 5] надруковано у виданні, яке внесено до міжнародної наукометричної бази Scopus. Решта сім опубліковано у збірниках тез міжнародних наукових конференцій [7 – 13].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, а також списку використаних джерел, що містить 101 найменування. Повний обсяг дисертації становить 125 сторінок, з них список використаних джерел займає 13 сторінок.

Основний зміст дисертації

У *вступі* наведено коротку історію попередніх досліджень, актуальність обраної теми, визначено наукову новизну та цінність отриманих результатів. Також наводиться означення класів функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$, які досліджуються у роботі, і дається коротка історична довідка щодо їх дослідження.

Нехай L_q — простір 2π–періодичних і сумовних у степені q, $1 \leq q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$), на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма у цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x} |f(x)|\ , & q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{ikx},$$

де

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

— коефіцієнти Фур'є функції f. Скрізь нижче будемо вважати, що для функції $f \in L_1$ виконується умова

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Далі, нехай $\psi(\tau) \neq 0,\ \tau \in \mathbb{N}$, — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)}e^{i(kx+\frac{\beta\pi}{2}\operatorname{sign} k)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця, назвемо (ψ,β)–похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Крім цього, при $\beta = 0$ для $(\psi,0)$–похідної функції f будемо використовувати позначення f^{ψ}. Зауважимо також, що якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, то (ψ,β)–похідна функції f співпадає з її (r,β)–похідною (позначення $f^{(r)}_{\beta}$) у сенсі Вейля – Надя.

Надалі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, якщо

$$f \in L^{\psi}_{\beta} \quad i \quad f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \{\varphi : \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1\}.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r},\ r > 0,\ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля – Надя $W^{r}_{p,\beta}$. У випадку $\beta = r$ класи $W^{r}_{p,r}$ співпадають з класами Вейля, і надалі їх будемо позначати W^{r}_{p}.

Позначимо

$$L_m(\psi, q) = \inf_{K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)^{\psi} \right\|_q, \quad 1 < q < \infty,$$

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) = \inf_{K_m} \sup_{t \in T^*(m)} \frac{\|t^{\psi}\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 < p, q < \infty.$$

Значну увагу в роботі також приділено вивченню колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q.

Колмогоровський поперечник класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q означається за формулою

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) = \inf_{L_m \subset L_q} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{\varphi \in L_m} \|f - \varphi\|_q,$$

де L_m — лінійні підпростори простору L_q, розмірності не більшої, ніж m. Величини $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ досліджуються для деяких співвідношень між параметрами p і q та при певних умовах на послідовності ψ. Точніше, розглядаються такі умови на послідовності ψ, які визначають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ малої гладкості.

Нехай $\{u_j\}_{j=1}^m$ — ортонормована система функцій $u_j \in L_\infty$, $j = \overline{1,m}$. Кожній функції $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду

$$\sum_{j=1}^{m} (f, u_j) u_j(x),$$

де

$$(f, u_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{u_j(x)} dx,$$

а $\overline{u_j}$ — функції комплексно–спряжені до u_j.

Для функціонального класу $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q$ величина

$$d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) = \inf_{\{u_j\}_{j=1}^m} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} (f, u_j) u_j \right\|_q$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу у просторі L_q.

Одержані результати формулюються у термінах порядкових співвідношень. Для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a(n) \ll b(n)$ означає, що існує стала $C_1 > 0$ така, що $a(n) \leq C_1 b(n)$. Співвідношення $a(n) \asymp b(n)$ рівносильне тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що сталі C_i, $i = 1, 2, 3, ...$, які далі будуть зустрічатися у порядкових співвідношеннях, можуть залежати від деяких параметрів. Ці параметри інколи будемо вказувати, у решті випадків вони будуть зрозумілими із контексту.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації. У підрозділі 1.1 розглядається питання, яке пов'язане із відомою гіпотезою Літтлвуда. Тут висвітлено основні етапи в доведенні як самої гіпотези Літтлвуда, так і її узагальнення — оцінки L_q–норм r–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік. У підрозділі 1.2 наведено детальний огляд літератури щодо історії дослідження нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік. Підрозділ 1.3 стосується історії дослідження колмогоровських та ортопроекційних поперечників.

У *другому розділі* досліджується питання, пов'язане з проблемою Літтлвуда, а саме: чи може ядро типу Діріхле з довільним вибором гармонік мати кращі узагальнено–диференціальні властивості, ніж класичне ядро Діріхле? Зокрема, у підрозділі 2.2 встановлюються точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле при $1 < q < \infty$.

Позначимо через Ψ множину функцій $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, котрі задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \leq C.$$

Зазначимо, що до множини Ψ належать, наприклад, функції $\frac{1}{\tau^r}, r > 0$; $\frac{\ln^{\gamma}(\tau+1)}{\tau^r}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $r > 0, \tau \in \mathbb{N}$, та ін.

Нехай $D_m(x) = \sum\limits_{k=-m}^{m} e^{ikx}$ — ядро Діріхле.

У прийнятих позначеннях справедлива теорема.

Теорема 2.1. *Нехай* $1 < q < \infty$, ψ *— додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедлива оцінка*

$$\|(D_m)^{\psi}\|_q \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$, *то*

$$\|(D_m)^\psi\|_q \asymp \psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Зауваження 2.1. Якщо $1 < q < \infty$, $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r > 1/q-1$, то відповідне твердження було встановлено Е. М. Галєєвим.

Підрозділ 2.3 присвячено дослідженню L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік та порівнянню отриманих результатів із оцінками L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле.

Теорема 2.2. *Нехай $2 < q < \infty$, ψ — додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедлива оцінка*

$$L_m(\psi, q) \ll \psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$, і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, то

$$L_m(\psi, q) \asymp \psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Теорема 2.3. *Нехай $1 < q \leq 2$, ψ — додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедлива оцінка*

$$L_m(\psi, q) \ll \psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$, і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, то

$$L_m(\psi, q) \asymp \psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Зауваження 2.2. Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r > 1/q$ при $2 < q < \infty$ і $r > 0$ при $1 < q \leq 2$, то оцінки відповідних величин встановлено В. Є. Майоровим.

Зауваження 2.3. Із результатів, одержаних у теоремах 2.2, 2.3, випливає, що норми ψ–похідних у метриці простору L_q, $1 < q < \infty$, при відповідних умовах на послідовності ψ, як для ядер Діріхле D_m, так і для ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік мають однакові порядки.

Наведемо ще одне твердження, у якому встановлено точну за порядком оцінку величини $L_m(\psi, q)$, $2 < q < \infty$, і при цьому виявлено, що ця величина при певних умовах на послідовність ψ відрізняється за порядком від L_q–норми ψ–похідної ядра Діріхле.

Теорема 2.4. *Нехай $2 < q < \infty$, $\psi \in \Psi$. Тоді справедлива оцінка*

$$L_m(\psi, q) \ll \psi^{-1}\Big([m^{q/2}]\Big)\sqrt{m}.$$

Якщо ж, крім цього, існують $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такі, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q-\varepsilon_1}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не спадає, а послідовність $\psi(\tau)\tau^{\varepsilon_2}$ не зростає, то

$$L_m(\psi, q) \asymp \psi^{-1}\Big([m^{q/2}]\Big)\sqrt{m}. \tag{1}$$

Зауваження 2.4. Якщо $2 < q < \infty$, $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $0 \le r < 1/q$, то відповідне твердження було встановлено Е. С. Белінським.

Співвідношення (1) доповнює точні за порядком оцінки величин $L_m(\psi, q)$, $1 < q < \infty$, які одержані у теоремах 2.2 і 2.3 за інших умов на послідовність ψ.

Співставляючи результати теорем 2.1 і 2.4, бачимо, що при виконанні умов теореми 2.4 на послідовність ψ величина $L_m(\psi, q)$ і L_q–норма ψ–похідної ядра Діріхле відрізняються за порядком.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік і, зокрема, для звичайних тригонометричних поліномів. Так у підрозділі 3.2 отримано порядкові оцінки величини

$$\sup_{t \in T(m)} \frac{\|t^\psi\|_q}{\|t\|_p},$$

де $T(m) = \left\{t : t(x) = \sum\limits_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}\right\}$, для деяких співвідношень між параметрами p та q.

Має місце

Теорема 3.1. *Нехай ψ — додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедливі співвідношення*

$$\sup_{t \in T(m)} \frac{\|t^\psi\|_q}{\|t\|_q} \asymp \psi^{-1}(m), \quad 1 < q < \infty,$$

$$\sup_{t \in T(m)} \frac{\|t^\psi\|_q}{\|t\|_p} \ll \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}, \quad 1 < p < q < \infty.$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$, то

$$\sup_{t\in T(m)} \frac{\|t^{\psi}\|_q}{\|t\|_p} \asymp \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}, \quad 1<p<q<\infty.$$

Зауваження 3.1. Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r>0$, $1<p\le q<\infty$, то порядки відповідних величин встановлено В. М. Темляковим.

Підрозділ 3.3 присвячено отриманню точних за порядком нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік.

Справедливі такі твердження.

Теорема 3.2. *Нехай $2\le p\le q<\infty$, ψ — додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедлива оцінка*

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) \ll \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}.$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$ і, крім того, існує таке $\varepsilon>0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$, $\tau\in\mathbb{N}$, не зростає, то

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) \asymp \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}.$$

Теорема 3.3. *Нехай $1<q\le p<\infty$, ψ — додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедлива оцінка*

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) \ll \psi^{-1}(m).$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$, то

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) \asymp \psi^{-1}(m).$$

Зауваження 3.2. Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, то відповідні результати до теорем 3.2, 3.3 було встановлено В. Є. Майоровим.

У *четвертому розділі* встановлюються точні за порядком оцінки колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q. Крім цього, одержано також точні за порядком оцінки апроксимативної характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, яка, у певному сенсі, є близькою до ортопроекційного поперечника. Підрозділ 4.2 присвячено відшуканню точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на послідовності ψ, які визначають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ малої гладкості.

Перед формулюванням наступного результату наведемо необхідне позначення.

Нехай $1 < p < q < \infty$. Тоді через $\Psi_{\varepsilon,p,q}$ позначимо множину послідовностей ψ, які задовольняють умови:

1) $\psi \in \Psi$;

2) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi(\tau)\tau^{1/p-1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає.

Справедливе твердження.

Теорема 4.1. *Нехай послідовність ψ задовольняє умови:*

а) при $2 \le p < q < \infty$ $\psi \in \Psi_{\varepsilon,p,q}$ і, крім того, існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})/(1-\frac{2}{q})-\varepsilon_1}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не спадає;

б) при $1 < p \le 2 < q < \infty$ $\psi \in \Psi_{\varepsilon,p,q}$ і, крім того, існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/p-\varepsilon_2}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не спадає.

Тоді для будь–якого $\beta \in \mathbb{R}$

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \qquad (2)$$

Прокоментуємо одержаний результат.

Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, то з теореми 4.1 одержимо твердження, яке раніше було встановлено Є. Д. Куланіним.

Зауваження 4.1. При виконанні умов теореми 4.1 підпростір тригонометричних поліномів вигляду $T(m)$ не реалізує порядок колмогоровського поперечника $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$.

Зауваження 4.2. Співвідношення (2) доповнює точні за порядком оцінки величин $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ при $2 \le p < q < \infty$ і $1 < p \le 2 < q < \infty$, які були одержані О. К. Кушпелем за інших умов на послідовність ψ.

Якщо співставити (2) з результатами О. К. Кушпеля, то знаходимо, що оцінки величин $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ при однакових співвідношеннях між параметрами p і q, але різних умовах на послідовності ψ, відрізняються за порядком.

У підрозділі 4.3 встановлюються точні порядкові оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q. Крім того, тут одержуємо порядки ще однієї апроксимативної характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, яка була розглянута В. М. Темляковим. Встановлені оцінки цієї величини дали змогу записати відповідні оцінки знизу для ортопроекційного поперечника.

Для функціонального класу $F \subset L_q$ розглянемо величину

$$d_m^B(F, L_q) = \inf_{G \in \mathcal{L}_m(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f - Gf\|_q.$$

Тут через $\mathcal{L}_m(B)_q$ позначено множину лінійних операторів G, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а область значення міститься у підпросторі простору L_q розмірності m;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх $k \in \mathbb{Z}$ виконується нерівність

$$\|Ge^{ikx}\|_2 \leq B.$$

Із означення величин $d_m^{\perp}(F, L_q)$ і $d_m^B(F, L_q)$ легко бачити, що

$$d_m^B(F, L_q) \leq d_m^{\perp}(F, L_q). \tag{3}$$

Таким чином, оцінки знизу величин $d_m^B(F, L_q)$, згідно зі співвідношенням (3), дозволяють записати відповідні оцінки знизу для ортопроекційних поперечників $d_m^{\perp}(F, L_q)$.

Теорема 4.2. *Нехай $1 < p < q < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$ і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/p-1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді*

$$d_m^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi}, L_q) \asymp d_m^B(L_{\beta,p}^{\psi}, L_q) \asymp \psi(m) m^{1/p-1/q}.$$

Теорема 4.3. *Нехай $1 < q \leq \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$, виконується одна з умов*

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \geq 0,\ \ k \in \mathbb{N},$$

або

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \leq 0,\ \ k \in \mathbb{N},$$

де

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) = \frac{1}{\psi(k)} - \frac{2}{\psi(k+1)} + \frac{1}{\psi(k+2)},$$

і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$*, що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{1-1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді*

$$d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \asymp d_m^B(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \asymp \psi(m)m^{1-1/q}.$$

Теорема 4.4. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$*, що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{1/p+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$*, не зростає. Тоді*

$$d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_\infty) \asymp d_m^B(L^{\psi}_{\beta,p}, L_\infty) \asymp \psi(m)m^{1/p}.$$

Наведемо ще одну теорему, у якій встановлено точні порядкові оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q при $1 \le q \le p \le \infty$, $(p,q) \notin \{(1,1),(\infty,\infty)\}$.

Теорема 4.5. *Нехай* $1 \le q \le p \le \infty$, $(p,q) \notin \{(1,1),(\infty,\infty)\}$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$*. Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp d_m^B(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi(m).$$

Зауваження 4.3. Якщо $\psi(k) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r > 1/p - 1/q$ при $1 \le p < q \le \infty$ і $r > 0$ при $1 \le q \le p \le \infty$, $(p,q) \notin \{(1,1),(\infty,\infty)\}$, то відповідні твердження до теорем 4.2 – 4.5 встановлено В. М. Темляковим.

Зауваження 4.4. Порядки ортопроекційних поперечників $d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_p)$ і величин $d_m^B(L^{\psi}_{\beta,p}, L_p)$, які встановлені у теоремах 4.2 – 4.5, реалізуються частинними сумами Фур'є функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Висновки

1. Встановлено точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік. При цьому виявлено, що у випадку $2 < q < \infty$ і певних умовах на послідовності ψ оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік і оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле відрізняються за порядком.

2. Одержано точні за порядком нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік.

3. Знайдено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на послідовності ψ, які визначають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ малої гладкості.

4. Встановлено точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. *Власик Г. М.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2015. — **12**, №3. — С. 65 – 77.

2. *Власик Г. М.* Ортопроекційні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2015. — **12**, №4. — С. 111 – 124.

3. *Власик Г. М.* Оцінки норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. —2016. — **13**, №2. — С. 88 – 100.

4. *Vlasyk H. M.* Bernstein – Nikol'skii – Type Inequalities for Trigonometric Polynomials with an Arbitrary Choice of Harmonics / H. M. Vlasyk // Ukrainian Mathematical Journal. — **69**, No 2. — 2017. — P. 147 – 156. (Ukrainian Original: **69**, №2. — 2017. — P. 147 – 156).

5. *Власик Г. М.* Порядкові оцінки L_q–норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, №10. — С. 1310 – 1323.

6. *Власик Г. М.* Колмогоровські поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, №3. — С. 76 – 92.

7. *Власик Г. М.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 3 – 6 червня 2015 р.): Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2015. — С. 67.

8. *Власик Г. М.* Ортопроекційні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Міжнародна наукова конференція "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 75–річчя В. П. Моторного (Дніпропетровськ, 08 – 11 жовтня 2015 р.): Тези доповідей. — Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет імені О. Гончара, 2015. — С. 24.

9. *Власик Г. М.* Ортопроекційні поперечники класів (ψ, β)–диференційовних періодичних функцій / Г. М. Власик // Всеукраїнсь-

ка наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24 – 27 лютого 2016 р.): Тези доповідей. — Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника", 2016. — С. 67.

10. *Власик Г. М.* Оцінки норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання — 2016" (Львів, 25 – 27 травня 2016 р.): Тези доповідей. — http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Wlasik.pdf.

11. *Власик Г. М.* Нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р.): Тези доповідей. — Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника", 2017. — С. 56.

12. *Власик Г. М.* Порядкові оцінки L_q–норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 7 – 10 червня 2017 р.): Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 41.

13. *Власик Г. М.* Нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з найкращим вибором гармонік / Г. М. Власик // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання — 2017" (Львів, 23 – 25 травня 2017 р.): Тези доповідей. — http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Vlasyk.pdf.

Анотації

Власик Г. М. *Оцінки норм тригонометричних поліномів і поперечники класів (ψ, β)–диференційовних функцій. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.*

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню деяких екстремальних задач теорії наближень.

Встановлено точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік. При цьому виявлено, що у випадку $2 < q < \infty$ і певних умовах на послідовності ψ оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гар-

монік і оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле відрізняються за порядком. Одержано точні за порядком нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік. Знайдено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на послідовності ψ, які визначають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ малої гладкості. Встановлено точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

Ключові слова: (ψ,β)–похідна, гіпотеза Літтлвуда, ядро Діріхле, нерівність Бернштейна – Нікольського, колмогоровський поперечник, ортопроекційний поперечник.

Власик А. Н. *Оценки норм тригонометрических полиномов и поперечники классов (ψ,β)–дифференцируемых функций. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.*

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по специальности 01.01.01 — "Математический анализ" (111 — Математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена исследованию некоторых экстремальных задач теории приближений.

Установлено точные по порядку оценки L_q–норм ψ–производных ядер типа Дирихле с наилучшим выбором гармоник. При этом выявлено, что в случае $2 < q < \infty$ и определенных условиях на последовательности ψ оценки L_q–норм ψ–производных ядер типа Дирихле с наилучшим выбором гармоник и оценки L_q–норм ψ–производных ядер Дирихле отличаются по порядку. Получены точные по порядку неравенства типа Бернштейна – Никольского для тригонометрических полиномов с произвольным выбором гармоник. Найдены точные по порядку оценки колмогоровских поперечников классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p и q и определенных условиях на последовательности ψ, которые определяют классы $L^{\psi}_{\beta,p}$ малой гладкости. При этом выяснилось, что подпространства тригонометрических полиномов соответствующей размерности не реализуют порядковых оценок рассматриваемых поперечников $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$. Установлено точные по порядку оценки ортопроекционных поперечников классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ в пространстве L_q для некоторых соотношений между параметрами p и q. У всех рассмотренных случаях порядки ортопроекционных поперечников реализуются частными

суммами Фурье функций из классов $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Ключевые слова: (ψ,β)–производная, гипотеза Литтлвуда, ядро Дирихле, неравенство Бернштейна - Никольского, колмогоровский поперечник, ортопроекционный поперечник.

Vlasyk H. M. *Estimates of norms for trigonometric polynomials and widths of the classes of (ψ,β)–differentiable functions. — The Manuscript.*

A thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.01.01 — "Mathematical Analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to research of some extreme problems of the theory of approximations.

Obtained in the thesis are the exact order estimates of L_q–norms for ψ–derivatives of the Dirichlet type kernels with the best choice of harmonics and to comparison of obtained results with estimates of L_q–norms for ψ–derivatives of the Dirichlet kernels. Shown here is that for $2 < q < \infty$ and under certain conditions on a sequence ψ L_q–norms for ψ–derivatives of the Dirichlet kernels and the Dirichlet type kernels with the best choice of harmonics differ in order. We obtained the exact order estimates of the Bernstein – Nikol'skii type inequalities for trigonometric polynomials with an arbitrary choice of harmonics. Obtained here are the exact order estimates of Kolmogorov widths of classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q for some relations between parameters p and q and certain conditions on the behavior of sequences ψ, which define classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ of small smoothness. We obtained the exact order estimates of orthoprojective widths of classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q for some relations between parameters p and q.

Key words: (ψ,β)–derivative, Littlewood's hypothesis, the Dirichlet kernel, the Bernstein – Nikol'skii inequality, the Kolmogorov width, the orthoprojective width.

Підп. до друку 19.03.2018. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,3. Ум. друк. арк. 1,2. Тираж 100 пр. Зам. 27.

Інститут математики НАН України,
01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.