НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ВЛАСИК ГАННА МИКОЛАЇВНА

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

ОЦІНКИ НОРМ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ І ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ (ψ, β)–ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — Математичний аналіз
111 — Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ________________ Г. М. Власик

Науковий керівник:
РОМАНЮК Анатолій Сергійович
доктор фізико–математичних наук,
професор

Київ — 2018

АНОТАЦІЯ

Власик Г. М. *Оцінки норм тригонометричних поліномів і поперечники класів (ψ, β)–диференційовних функцій. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.*

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню деяких екстремальних задач теорії наближень. Зокрема, розглядаються властивості тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік стосовно двох питань: перше пов'язане з відомою проблемою Літтлвуда, а друге стосується нерівностей типу Бернштейна – Нікольського. Також значну увагу приділено дослідженню поведінки колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для різних співвідношень між параметрами p і q.

У вступі наведено обгрунтування вибору обраної теми дослідження, визначено наукову новизну та цінність отриманих результатів. Також наводиться означення (ψ, β)–похідної функції і відповідних функціональних класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, які досліджуються у роботі, та подається коротка історична довідка щодо їх дослідження.

Перший розділ дисертації присвячено огляду літератури за темою дисертації. Зокрема, у першому підрозділі розглядається питання, яке пов'язане з відомою проблемою Літтлвуда. Тут висвітлено основні етапи в доведенні як самої гіпотези Літтлвуда, так і її узагальнення — оцінки L_q–норм r–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік. У другому підрозділі наведено детальний огляд літератури щодо історії дослідження нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік. Третій підрозділ

стосується історії дослідження колмогоровських та ортопроекційних поперечників.

У другому розділі досліджується питання, пов'язане з проблемою Літтлвуда, а саме: чи може ядро типу Діріхле з довільним вибором гармонік мати кращі узагальнено–диференціальні властивості, ніж класичне ядро Діріхле? Перший підрозділ носить допоміжний характер. Тут формулюється постановка задачі, наводяться необхідні означення і позначення та ряд тверджень, які використовуються для отримання результатів наступних підрозділів. У другому підрозділі встановлюються точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле при $1 < q < \infty$. Третій підрозділ присвячено дослідженню L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік і порівнянню отриманих результатів із оцінками L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле. У цьому ж підрозділі показано, що при $2 < q < \infty$ і певних умовах на послідовність ψ L_q–норми ψ–похідних ядер Діріхле і ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік відрізняються за порядком.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено нерівностям типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік. Перший підрозділ носить допоміжний характер. У другому підрозділі встановлюються точні за порядком нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів зі звичайним вибором гармонік. Третій підрозділ присвячено отриманню точних за порядком нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік.

У четвертому розділі встановлюються точні за порядком оцінки колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q. Перший підрозділ носить допоміжний характер. Другий підрозділ присвячено відшуканню точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на поведінку послідовностей ψ, які визначають функціональні класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ малої гладкості. У третьому підрозділі встановлюються точні порядкові оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

Ключові слова: (ψ, β)–похідна, гіпотеза Літтлвуда, ядро Діріхле, нерівність Бернштейна – Нікольського, колмогоровський поперечник, ортопроекційний поперечник.

Vlasyk H. M. *Estimates of norms for trigonometric polynomials and widths of the classes of* (ψ, β)*–differentiable functions. — The Manuscript.*

A thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.01.01 — "Mathematical Analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to research of some extreme problems of the theory of approximations. In particular, we considered possibilities of trigonometric polynomials with an arbitrary choice of harmonics in relation to two questions: the first is connected with the known Littlewood's problem, and the second concerns the Bernstein – Nikol'skii type inequalities. Also considerable attention is paid to the investigation of the behavior of Kolmogorov and orthoprojective widths of classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q for some relations between parameters p and q.

In the introduction a justification of the choice of topic of research is given, we determined the scientific novelty and the value of obtained results. Also given here are definitions of the (ψ, β)–derivative and the corresponding functional classes $L^{\psi}_{\beta,p}$, which are investigated in the thesis, and given here is a brief historical information of their research.

The first chapter of the thesis is devoted to a review of literature on the topic of the thesis. In particular, in the first section the question is considered that is connected with the known Littlewood's problem. Highlighted here are the main stages in the proof of the Littlewood's hypothesis, and

its generalization — estimates of L_q–norms for r–derivatives of the Dirichlet type kernels with the best choice of harmonics. In the second section, we give a detailed overview of literature on the history of the study of the Bernstein – Nikol'skii type inequalities for trigonometric polynomials with an arbitrary choice of harmonic. The third section associated the history of Kolmogorov and orthoprojective widths.

In the second chapter we study the issue associated with the Littlewood's problem, namely: can the Dirichlet type kernel with the best choice of harmonics have better generalized–differential properties than the classical Dirichlet kernel has? The first section is auxiliary. We ormulated the problem, given here are the necessary definitions and designations and a number of statements used to obtain results of subsequent sections. In the second section, the exact estimates of L_q–norms for ψ–derivatives of the Dirichlet type kernels for $1 < q < \infty$ are established. The third section is devoted to the study of L_q–norms for ψ–derivatives of the Dirichlet type kernels with the best choice of harmonics and to comparison of obtained results with estimates of L_q–norms for ψ–derivatives of the Dirichlet kernels. In this section is shown that for $2 < q < \infty$ and under certain conditions on the sequence ψ L_q–norms for ψ–derivatives of the Dirichlet kernels and the Dirichlet type kernels with the best choice of harmonics differ in order.

The third chapter of the thesis is devoted the Bernstein – Nikol'skii type inequalities for trigonometric polynomials with an arbitrary choice of harmonics. The first section is auxiliary. Established in the second section are the exact order estimates of the Bernstein – Nikol'skii type inequalities for trigonometric polynomials with a normal choice of harmonics. The third section is devoted to receiving the exact order estimates of the Bernstein – Nikol'skii type inequalities for trigonometric polynomials with an arbitrary choice of harmonics.

In the fourth chapter we obtained the exact order estimates of Kolmogorov and orthoprojective widths of classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q. The first section

is auxiliary. The second section is devoted to a search of the exact order estimates of Kolmogorov widths of classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q for some relations between parameters p and q and certain conditions on the behavior of sequences ψ, which define the functional classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ of small smoothness. In the third section, we obtained the exact order estimates of orthoprojective widths of classes $L^{\psi}_{\beta,p}$ in the space L_q for some relations between parameters p and q.

Key words: (ψ,β)–derivative, Littlewood's hypothesis, the Dirichlet kernel, the Bernstein – Nikol'skii inequality, the Kolmogorov width, the orthoprojective width.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Власик Г. М.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2015. — **12**, №3. — С. 65 – 77.

2. *Власик Г. М.* Ортопроекційні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2015. — **12**, №4. — С. 111 – 124.

3. *Власик Г. М.* Оцінки норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, №2. — С. 88 – 100.

4. *Vlasyk H. M.* Bernstein–Nikol'skii–Type Inequalities for Trigonometric Polynomials with an Arbitrary Choice of Harmonics / H. M. Vlasyk // Ukrainian Mathematical Journal. — **69**, No 2. — 2017. — P. 147 – 156. (Ukrainian Original: **69**, №2. — 2017. — P. 147 – 156.)

5. *Власик Г. М.* Порядкові оцінки L_q–норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Укр. мат. журн. — 2017. — **69**, №10. — С. 1310 – 1323.

6. *Власик Г. М.* Колмогоровські поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, №3. — С. 76 – 92.

7. *Власик Г. М.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 3 – 6 червня 2015 р.): Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України. — 2015. — С. 67.

8. *Власик Г. М.* Ортопроекційні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Міжнародна наукова конференція "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 75–річчя В. П. Моторного (Дніпропетровськ, 08 – 11 жовтня 2015 р.): Тези доповідей. — Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет імені О. Гончара. — 2015. — С. 24.

9. *Власик Г. М.* Ортопроекційні поперечники класів (ψ,β)–диференційовних періодичних функцій / Г. М. Власик // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24 – 27 лютого 2016 р.): Тези доповідей. — Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника". — 2016. — С. 67.

10. *Власик Г. М.* Оцінки норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання — 2016" (Львів, 25 – 27 травня 2016 р.): Тези доповідей. — http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Wlasik.pdf.

11. *Власик Г. М.* Нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р.): Тези доповідей. — Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника". — 2017. — С. 56.

12. *Власик Г. М.* Порядкові оцінки L_q–норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 7 – 10 червня 2017 р.): Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України. — 2017. — С. 41.

13. *Власик Г. М.* Нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з найкращим вибором гармонік /

Г. М. Власик // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання — 2017" (Львів, 23 – 25 травня 2017 р.): Тези доповідей. — http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Vlasyk.pdf.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\forall$ — квантор загальності: "для всіх";

$\exists$ — квантор існування: "існує";

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел;

$\mathbb{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел;

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел;

$x \in A\,(x \notin A)$ — елемент x належить (не належить) множині A;

$A \subset B$ — множина A міститься у множині B;

$A \cup B$ — об'єднання множин A та B;

$A \cap B$ — перетин множин A та B;

$|Y|$ — кількість елементів скінченної множини Y;

$[a]$ — ціла частина дійсного числа a;

$sign\, a$ — величина, що дорівнює 1, якщо $a > 0$, дорівнює -1, якщо $a < 0$, і нулю, якщо $a = 0$;

$Lin_m(X)$ — множина лінійних підпросторів простору X розмірності не більшої ніж m;

$\mathcal{L}(X, Y)$ — множина всіх лінійних неперервних операторів, які діють з X в Y;

$\|f\|_q$ — норма функції f у просторі L_q, $1 \le q \le \infty$;

L_q, $1 \le q < \infty$, — простір 2π–періодичних і сумовних у степені q на відрізку $[-\pi; \pi]$ функцій f з нормою

$$\|f\|_q = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^q dt\right)^{1/q};$$

L_∞ — простір 2π–періодичних, суттєво обмежених функцій f з нормою

$$\|f\|_\infty = ess \sup_t |f|;$$

$\sup\limits_{x\in A} F$ — точна верхня межа значень функціонала F на множині A;

$\inf\limits_{x\in A} F$ — точна нижня межа значень функціонала F на множині A;

$ess\sup$ — суттєва точна верхня межа;

$\{x : S\}$ — сукупність елементів x, які мають властивість S;

$\hat{f}(k)$ — коефіцієнти Фур'є функції f;

$f * g$ — згортка функцій f і g;

$a(n) \asymp b(n)$, $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}, \{b(n)\}_{n=1}^{\infty} \geq 0$, — порядкова рівність;

$a(n) \ll b(n)$, $a(n) \gg b(n)$, $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}, \{b(n)\}_{n=1}^{\infty} \geq 0$, — порядкові нерівності;

$V_l(x)$ — ядро Валле–Пуссена;

$\mathbf{V}_l$ — оператор Валле–Пуссена;

$D_m(x)$ — ядро Діріхле вигляду

$$D_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx};$$

$T(m)$ — множина тригонометричних поліномів вигляду

$$t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx};$$

$T^*(m)$ — множина тригонометричних поліномів вигляду

$$t(x) = \sum_{j\in K_m} c_j e^{ijx},$$

де K_m — довільний набір m різних цілих чисел;

$\rho(s)$ — множина вигляду $\rho(s) = \{k \in \mathbb{Z} : [2^{s-1}] \leq |k| < 2^s, s \in \mathbb{Z}_+\}$;

$T(\rho(s))$ — множина тригонометричних поліномів вигляду

$$t(x) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{ikx};$$

$f^{(r)}$ — r–та похідна функції f;

$f_r^{(r)}$ — r–та похідна функції f в сенсі Вейля;

$f_\beta^{(r)}$ — (r,β)–похідна функції f в сенсі Вейля – Надя;

f_β^{ψ} — (ψ,β)–похідна функції f в сенсі Степанця;

B_p — одинична куля у просторі L_p, $1 \le p \le \infty$;

$W_{p,\beta}^r$ — класи Вейля – Надя: $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$

$$W_{p,\beta}^r = \{f : f \in L_1, f_\beta^{(r)} \in B_p\};$$

$L_{\beta,p}^{\psi}$ — класи вигляду: $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$

$$L_{\beta,p}^{\psi} = \{f : f \in L_1, f_\beta^{\psi} \in B_p\};$$

$S_m(f)$ — частинна сума Фур'є функції $f \in L_1$;

$\mathcal{E}_m(f)_q$ — величина наближення функції f за допомогою її частинної суми Фур'є $S_m(f)$ у просторі L_q;

$\mathcal{E}_m(F)_q$ — величина наближення функціонального класу $F \subset L_q$ за допомогою частинних сум Фур'є у просторі L_q;

$d_m(F, L_q)$ — колмогоровський поперечник класу F у просторі L_q;

$d_m^{\perp}(F, L_q)$ — ортопроекційний поперечник класу F у просторі L_q;

Ψ — множина незростаючих додатних послідовностей $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, для яких існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \le C, \quad \forall \tau \in \mathbb{N}.$$

ВСТУП

Актуальність теми. У 1948 р. Дж. Літтлвуд висловив гіпотезу [95]: *для будь–якого набору цілих чисел* $j_1, ..., j_m$ *справедлива нерівність*

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right\|_1 \geq C \ln m,$$

де $C > 0$ — деяка стала.

У 1981 р. позитивний розв'язок гіпотези Літтлвуда незалежно і майже одночасно було одержано С. В. Конягіним [42] та Мак–Гі, Піно і Смітом [99]. Слід зазначити, що пізніше у роботі Р. М. Тригуба [90] було уточнено оцінку знизу L_1–норми ряду Фур'є степеневого вигляду, на якій базувалося доведення гіпотези Літтлвуда [99].

У зв'язку з цим нагадаємо, що для L_1–норми ядра Діріхле D_m справедливе співвідношення (див., наприклад, [101], P. I, §1)

$$\|D_m\|_1 = \left\| \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} \right\|_1 \asymp \ln m.$$

У 1987 р. В. М. Тихомиров у огляді [88] запропонував узагальнити задачу Літтлвуда і дослідити асимптотику при $m \to \infty$ величини вигляду

$$L_m(r,q) = \inf_{K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)^{(r)} \right\|_q, \quad 1 \leq q \leq \infty,$$

де $K_m = \{j_1, ..., j_m\}$ — довільний набір із m різних цілих чисел і похідна порядку $r \geq 0$ розуміється в сенсі Вейля.

Перші оцінки величини $L_m(r,q)$ були отримані В. Є. Майоровим [51]. Згодом Е. С. Белінським [7, 8] було доповнено результати з [51]. Зауважимо, що, як зазначено Е. С. Белінським у роботі [8], одночасно і незалежно від нього оцінки величини $L_m(r,q)$ при $0 \leq r < \frac{1}{q}$ і $2 < q < \infty$ було повідомлено С. В. Конягіним на 4-й Саратовській зимовій школі по теорії функцій і наближень у 1988 р. Згодом дослідження величини $L_m(r,q)$ було поширено і на багатовимірний випадок у роботах [94, 28, 9, 67].

У багатьох питаннях теорії наближення періодичних функцій однієї змінної важливу роль відіграють нерівності, які пов'язують L_p–норму r–ї похідної полінома з його L_q–нормою (див., наприклад, [101], Р. I, §2). Такого виду співвідношення, у яких поєднані нерівності Бернштейна при $r>0$, $p=q$ і "нерівності різних метрик" Нікольського при $r=0$, $p\neq q$, називають нерівностями Бернштейна – Нікольського.

У зв'язку з нерівностями Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів вигляду

$$T^*(m)=\left\{t: t(x)=\sum_{j\in K_m} c_j e^{ijx}\right\},$$

у роботах В. Є. Майорова [50, 51] була розглянута більш загальна постановка задачі, а саме досліджувалася величина вигляду:

$$\mathcal{T}_m(r,q,p)=\inf_{K_m}\sup_{t\in T^*(m)}\frac{\|t^{(r)}\|_q}{\|t\|_p},\quad 1\leq p,q\leq\infty,$$

де похідна порядку $r\geq 0$ розуміється в сенсі Вейля.

Пізніше порядкові оцінки величини $\mathcal{T}_m(r,q,p)$ для тригонометричних поліномів багатьох змінних з "номерами" гармонік з так званого східчастого гіперболічного хреста були одержані Е. М. Галєєвим [29].

Починаючи з 30–х років минулого століття в теорії наближення набуває потужного розвитку напрям, пов'язаний з дослідженням апроксимативних характеристик класів періодичних функцій.

Задачі апроксимаційного змісту, що формулюються на класах функцій, у багатьох випадках є задачами, у яких ставиться питання знайти чи оцінити точну верхню грань похибки наближення заданим методом на фіксованому класі функцій.

Серед існуючих методів наближення тригонометричними поліномами найбільш простим та природним методом наближення функцій з даного класу є метод Фур'є, який полягає в наближенні функцій з цього класу частинною сумою її ряду Фур'є. Щодо наближення тих чи інших класів функцій сумами Фур'є, а також поліномами, які будуються на їх основі, відомо багато глибоких і завершених результатів, із якими можна ознайомитись у монографіях [36, 87, 35, 71, 72, 73, 60].

Питання оптимальної побудови наближаючих поліномів є складовою частиною більш загальної проблеми, сформульованої А. М. Колмогоровим [97], який запропонував розглядати відхилення фіксованого класу функцій від довільного підпростору заданої розмірності, а потім мінімізувати ці відхилення по всіх таких підпросторах. Відповідна апроксимативна характеристика отримала назву колмогоровський поперечник.

Пізніше у роботі В. М. Темлякова [82] була введена ще одна важлива апроксимативна характеристика — ортопроекційний поперечник.

Із результатами досліджень згаданих апроксимативних характеристик різноманітних функціональних класів детальніше можна ознайомитися в монографіях [87, 83, 43, 101, 60].

В останні декілька десятиліть значно зросла зацікавленість до дослідження апроксимативних властивостей функціональних класів, які є узагальненнями класів Вейля – Надя $W^r_{p,\beta}$.

У 1983 р. О. І. Степанцем було введено класи $L^{\psi}_{\beta,p}$, які при фіксованих значеннях параметрів, що їх визначають, співпадають з класами $W^r_{p,\beta}$. За допомогою поняття (ψ,β)–похідних вдалося класифікувати ввесь спектр сумовних (неперервних) періодичних функцій і, в той же час, виділяти більш тонкі властивості кожної окремої функції. Для класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ на даний час отримано розв'язки цілої низки задач теорії наближення функцій, які раніше розглядалися на класах Вейля – Надя. Детальніше з відповідними результатами і коментарями можна ознайомитися у монографіях [72, 73], а також у недавніх роботах [63, 93, 65, 33, 66, 10].

Однак, незважаючи на велику кількість робіт, присвячених дослідженню згаданих вище екстремальних задач, ще залишається низка відкритих питань. Це стосується, зокрема, оцінок L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік, нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік, а також колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Мета і завдання дослідження. *Мета* дисертаційної роботи полягає в знаходженні точних за порядком оцінок L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік, встановленні точних за порядком нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік, а також в одержанні порядків колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для різних співвідношень між параметрами p і q.

Об'єктом дослідження є класи періодичних функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$ однієї змінної.

Наведемо спочатку необхідні позначення і сформулюємо означення класів функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Нехай L_q — простір 2π–періодичних і сумовних у степені q, $1 \le q < \infty$ (відповідно суттєво обмежених при $q = \infty$), на відрізку $[-\pi, \pi]$ функцій f. Норма в цьому просторі визначається таким чином:

$$\|f\|_q = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \le q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x} |f(x)| \,, & q = \infty. \end{cases}$$

Для функції $f \in L_1$ розглянемо її ряд Фур'є

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

де

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

— коефіцієнти Фур'є функції f. Скрізь нижче будемо вважати, що для функції $f \in L_1$ виконується умова

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

Далі, нехай $\psi(\tau) \neq 0$, $\tau \in \mathbb{N}$, — довільна функція натурального аргументу, β — довільне фіксоване дійсне число. Якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(|k|)} e^{i(kx + \frac{\beta\pi}{2} \operatorname{sign} k)}$$

є рядом Фур'є деякої сумовної функції, то її, наслідуючи О. І. Степанця [72, с. 25] (див. також [73, ч. 1, с. 132]), назвемо (ψ, β)–похідною функції f і позначимо f^{ψ}_{β}. Множину функцій f, що задовольняють таку умову, позначатимемо L^{ψ}_{β}. Крім цього, при $\beta = 0$ для $(\psi, 0)$–похідної функції f будемо використовувати позначення f^{ψ}. Зауважимо також, що якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то (ψ, β)–похідна функції f співпадає з її (r, β)–похідною (позначення $f^{(r)}_{\beta}$) в сенсі Вейля – Надя.

Надалі будемо вважати, що функція f належить класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, $1 \leq p \leq \infty$, якщо

$$f \in L^{\psi}_{\beta} \ \ i \ \ f^{\psi}_{\beta} \in U_p = \{\varphi : \varphi \in L_p, \|\varphi\|_p \leq 1\}.$$

Зауважимо, що при $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $r > 0$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають з класами Вейля – Надя $W^r_{p,\beta}$ (див., наприклад, [72, с. 25]). У випадку $\beta = r$ класи $W^r_{p,r}$ співпадають з класами Вейля і надалі їх будемо позначати W^r_p.

При розгляді наближення функцій із множини $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q число q може бути як рівним p, так і більшим чи меншим за нього. Тому зазначимо умови, при яких із того, що $f \in L^{\psi}_{\beta,p}$, випливає, що $f \in L_q$.

Введемо наступне означення (див., наприклад, [72, с. 207]).

При фіксованому $\alpha > 0$ будемо говорити, що функція $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, належить множині P_α, якщо величини

$$\sup_{\tau} |\psi(\tau)|\tau^\alpha$$

і

$$\sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{m=2^m}^{2^m+1} |\psi(\tau+1)(\tau+1)^\alpha - \psi(\tau)\tau^\alpha|$$

є скінченними.

О. І. Степанцем (див., наприклад, [72, с. 208]) була доведена теорема стосовно вкладення класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у простір L_q, яку сформулюємо у зручному для нас, але менш загальному, вигляді.

Теорема А. *Нехай* $1 < p < q < \infty$*,* $\psi \in P_\alpha$*,* $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$*. Тоді*

$$L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q.$$

Легко бачити, що коли послідовність $\psi(\tau)\tau^\alpha$, $\tau \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, не зростає, то $\psi \in P_\alpha$.

У випадку, коли $q \le p$ має місце

Теорема Б [72, с. 208]. *Якщо* $1 < q \le p < \infty$ *і* $\psi \in P_0$*, то* $\forall\beta \in \mathbb{R}$

$$L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q.$$

Зауважимо, що у цьому випадку для вкладення достатньо, щоб $\psi \in \Psi$, де Ψ — це множина функцій $\psi(\tau)$, $\tau \in \mathbb{N}$, котрі задовольняють умови:

1) ψ — додатні і незростаючі;

2) існує стала $C > 0$ така, що

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(2\tau)} \le C.$$

Зазначимо, що до множини Ψ належать, наприклад, функції $\frac{1}{\tau^r}, r > 0;$ $\frac{\ln^\gamma(\tau+1)}{\tau^r},$ $\gamma \in \mathbb{R},$ $r > 0, \tau \in \mathbb{N}$, та ін.

Предметом дослідження є L_q–норми ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік, нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік, а також колмогоровські та ортопроекційні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Зокрема, досліджуються величини вигляду

$$L_m(\psi, q) = \inf_{K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)^{\psi} \right\|_q, \quad 1 < q < \infty,$$

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) = \inf_{K_m} \sup_{t \in T^*(m)} \frac{\|t^{\psi}\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 < p, q < \infty,$$

при певних умовах на послідовності ψ.

Значну увагу в роботі також приділено вивченню колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q.

Колмогоровський поперечник класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q означається за формулою

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) = \inf_{L_m \subset L_q} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{\varphi \in L_m} \|f - \varphi\|_q,$$

де L_m — лінійні підпростори простору X, розмірності не більшої ніж m. Величини $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ досліджуються для деяких співвідношень між параметрами p і q та при певних умовах на послідовності ψ. Точніше, розглядаються такі умови на послідовності ψ, які визначають функціональні класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ так званої малої гладкості.

Нехай $\{u_j\}_{j=1}^{m}$ — ортонормована система функцій $u_j \in L_\infty$, $j = \overline{1, m}$. Кожній функції $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду

$$\sum_{j=1}^{m} (f, u_j) u_j(x),$$

тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_j\}_{j=1}^{m}$. Тут і далі

$$(f,u_j)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{u_j(x)}dx,$$

де $\overline{u_j}$ — функції комплексно–спряжені до u_j.

Для функціонального класу $L^{\psi}_{\beta,p}\subset L_q$ величина

$$d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p},L_q)=\inf_{\{u_j\}_{j=1}^m}\sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}}\left\|f-\sum_{j=1}^m (f,u_j)u_j\right\|_q$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу у просторі L_q.

Нехай F — деякий функціональний клас простору L_q. Тоді через $d^B_m(F,L_q)$ позначимо величину

$$d^B_m(F,L_q)=\inf_{G\in\mathcal{L}_m(B)_q}\sup_{f\in F\cap D(G)}\left\|f-Gf\right\|_q.$$

Тут $\mathcal{L}_m(B)_q$ — множина лінійних операторів G, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а область значення міститься у підпросторі простору L_q розмірності m;

б) існує число $B\geq 1$ таке, що для всіх k виконується нерівність

$$\|Ge^{ikx}\|_2\leq B.$$

Зауважимо, що до $\mathcal{L}_m(1)_2$ належать, зокрема, оператори ортогонального проектування на підпростори розмірності m, а також оператори, які задаються по ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, котрий означається послідовністю $\{\lambda_l\}$ такою, що $|\lambda_l|\leq 1$ для всіх l.

Одержані результати формулюються у термінах порядкових співвідношень. Для двох невід'ємних послідовностей $\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ співвідношення (порядкова нерівність) $a(n)\ll b(n)$ означає, що існує стала

$C_1 > 0$ така, що $a(n) \leq C_1 b(n)$. Співвідношення $a(n) \asymp b(n)$ рівносильне тому, що $a(n) \ll b(n)$ і $b(n) \ll a(n)$. Зазначимо, що сталі C_i, $i = 1, 2, 3, ...$, які далі будуть зустрічатися у порядкових співвідношеннях, можуть залежати від деяких параметрів. Ці параметри інколи будемо вказувати, у решті випадків вони будуть зрозумілими із контексту. Більше того, з метою уникнення нагромадження індексів, часто різні за значеннями сталі будемо позначати буквами з однаковими індексами, але розрізнятимемо їх лише в межах одного підрозділу. Ця обставина не повинна викликати непорозумінь, оскільки нас будуть цікавити тільки порядкові свіввідношення.

Основними завданнями дослідження є:

1. Встановити точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік і порівняти їх з оцінками L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле.

2. Одержати точні за порядком нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік.

3. Знайти точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на послідовності ψ, які визначають функціональні класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ малої гладкості.

4. Встановити точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

Методи дослідження. При розв'язанні поставлених задач у дисертаційній роботі використовуються загальні методи теорії функцій у поєднанні з методами, які були розроблені у роботах В. Є. Майорова, Е. С. Белінського, Б. С. Кашина, Е. Д. Куланіна, В. М Темлякова та ін.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер

типу Діріхле з найкращим вибором гармонік. При цьому виявлено, що у випадку $2 < q < \infty$ і певних умовах на послідовності ψ оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік і оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле відрізняються за порядком.

2. Одержано точні за порядком нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік.

3. Знайдено точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на послідовності ψ, які визначають функціональні класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ малої гладкості.

4. Встановлено точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належать науковому керівнику — доктору фіз.—мат. наук, професору А. С. Романюку. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати роботи доповідалися і обговорювалися на:

— Міжнародній конференції молодих математиків, Київ, 3 – 6 червня 2015 року;

— Міжнародній науковій конференції "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 75–річчя В. П. Моторного, Дніпропетровськ, 08 – 11 жовтня 2015 року;

— Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, 24 – 27 лютого 2015 року;

— Конференції молодих вчених "Підстригачівські читання — 2016" , Львів, 25 – 27 травня 2016 року;

— Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 року;

— Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченої 100–річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, Київ, 7 – 10 червня 2017 року;

— Конференції молодих вчених "Підстригачівські читання — 2017", Львів, 23 – 25 травня 2017 року;

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару: доктор фіз.–мат. наук, професор А. С. Романюк);

— семінарі "Сучасний аналіз" у Київському національному університеті імені Т. Г. Шевченка (керівники семінару: доктори фіз.–мат. наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко, В. М. Радченко).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у наукових публікаціях [11 – 23]. Шість з них [11 – 16] є статтями у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань з фізико–математичних наук, дві з яких [14, 15] надруковано у виданні, яке внесено до міжнародної наукометричної бази Scopus. Решта сім опубліковано у збірниках тез міжнародних наукових конференцій [17 – 23].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, а також списку використаних джерел, що містить 101 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 125 сторінок, з них список використаних джерел займає 13 сторінок.

У *Вступі* наведено коротку історію попередніх досліджень, актуальність обраної теми, визначено наукову новизну та цінність отриманих результатів. Також наводиться означення класів функцій $L^{\psi}_{\beta,p}$, які досліджуються у роботі, і дається коротка історична довідка щодо їх дослідження.

Перший розділ присвячено огляду літератури за темою дисертації. У підрозділі 1.1 розглядається питання, яке пов'язане із відомою гіпотезою Літтлвуда. Тут висвітлено основні етапи в доведенні як самої гіпотези Літтлвуда, так і її узагальнення — оцінки L_q–норм r–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік. У підрозділі 1.2 наведено детальний огляд літератури щодо історії дослідження нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік. Підрозділ 1.3 стосується історії дослідження колмогоровських та ортопроекційних поперечників.

У *другому розділі* досліджується питання, пов'язане з проблемою Літтлвуда, а саме: чи може ядро типу Діріхле з довільним вибором гармонік мати кращі узагальнено–диференціальні властивості, ніж класичне ядро Діріхле? Підрозділ 2.1 носить допоміжний характер. У ньому формулюється постановка задачі, наводяться необхідні означення і позначення та ряд тверджень, які використовуються для отримання результатів наступних підрозділів. У підрозділі 2.2 встановлюються точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле при $1 < q < \infty$. Підрозділ 2.3 присвячено дослідженню L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік та порівнянню отриманих результатів із оцінками L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік. Підрозділ 3.1 носить допоміжний характер. У ньому формулюється постановка задачі і наводяться необхідні означення і позначення. У підрозділі 3.2 встановлюються точні за порядком нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів зі звичайним вибором гармонік. Підрозділ 3.3 присвячено отриманню точних за порядком нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік.

У *четвертому розділі* встановлюються точні за порядком оцінки колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q. Підрозділ 4.1 носить допоміжний характер. Тут формулюються постановки задач, наводяться необхідні означення і позначення та ряд тверджень, які використовуються для отримання результатів наступних підрозділів. Підрозділ 4.2 присвячено відшуканню точних за порядком оцінок колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на поведінку послідовностей ψ, які визначають класи $L^{\psi}_{\beta,p}$ малої гладкості. У підрозділі 4.3 встановлюються точні порядкові оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацію виконано у відділі теорії функцій Інституту математики НАН України згідно з науково–дослідною темою "Апроксимативні та структурні характеристики функціональних множин" , номер державної реєстрації 0111 U 002079.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при подальшому вивченні питань теорії наближення функцій.

Подяки. Автор висловлює подяку своєму науковому керівникові доктору фіз.–мат. наук, професору Анатолію Сергійовичу РОМАНЮКУ за постановку задач, постійну увагу, корисні зауваження та поради у роботі, а також усім співробітникам відділу теорії функцій Інституту математики НАН України за дружні та плідні дискусії.

Розділ 1

Огляд літератури

1.1. L_q–норми похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік

У 1948 р. Дж. Літтлвуд висловив гіпотезу [95]:

для будь–якого набору цілих чисел $j_1, ..., j_m$ справедлива нерівність

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right\|_1 \gg \ln m.$$

Позитивний розв'язок гіпотези Літтлвуда незалежно і майже одночасно було одержано С. В. Конягіним [42] та Мак–Гі, Піно і Смітом [99] у 1981 р. Слід зазначити, що пізніше у роботі Р. М. Тригуба [90] було уточнено оцінку знизу L_1–норми ряду Фур'є степеневого вигляду, на якій базувалося доведення гіпотези Літтлвуда в [99].

У зв'язку з цією гіпотезою доречно зауважити, що для L_1–норми ядра Діріхле D_m має місце співвідношення (див., наприклад, [101], Р. I, §1):

$$\|D_m\|_1 = \left\| \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} \right\|_1 \asymp \ln m.$$

У 1987 р. В. М. Тихомиров у огляді [88] запропонував узагальнити задачу Літтлвуда і дослідити асимптотику при $m \to \infty$ величини вигляду

$$L_m(r,q) = \inf_{K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)^{(r)} \right\|_q, \quad 1 \le q \le \infty, \tag{1.1}$$

де K_m — довільний набір різних цілих чисел $j_1, ..., j_m$ і похідна порядку $r \ge 0$ розуміється в сенсі Вейля.

Величину (1.1), наслідуючи В. Є. Майорова [51], далі будемо називати константою Лебега – Літтлвуда. Перші оцінки величини $L_m(r,q)$ були отримані В. Є. Майоровим [51]. Згодом Е. С. Белінським [7, 8] було доповнено результати з [51]. Зауважимо, що, як зазначено Е. С. Белінським у роботі [8], одночасно і незалежно від нього оцінки величини $L_m(r,q)$ при $0 \le r < \frac{1}{q}$ і $2 < q < \infty$ було повідомлено С. В. Конягіним на 4-й Саратовській зимовій школі по теорії функцій і наближень у 1988 р. Згодом дослідження величини (1.1) було поширено і на багатовимірний випадок у роботах [94, 28, 9, 67].

Зауважимо, що раніше порядкові оцінки норм похідних ядер Діріхле у просторі L_q, $1 < q < \infty$, як в одновимірному, так і в багатовимірному випадках було отримано Е. М. Галєєвим [24].

Природно звернути увагу на порядкові оцінки L_q–норм ядра Діріхле та ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік. Із робіт [51] та [8] випливає, що

$$L_m(0,1) \asymp \ln m;$$

$$L_m(0,q) \asymp m^{1-1/q}, \quad 1 < q \le 2;$$

$$L_m(0,q) \asymp m^{1/2}, \quad 2 < q < \infty.$$

У той же час, для ядра Діріхле D_m добре відомо (див., наприклад, [101], Р. I, §1), що

$$\|D_m\|_1 \asymp \ln m;$$

$$\|D_m\|_q \asymp m^{1-1/q}, \quad 1 < q < \infty;$$

$$\|D_m\|_\infty \asymp m.$$

1.2. Нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік

У багатьох питаннях теорії наближення періодичних функцій однієї змінної важливу роль відіграють нерівності, які пов'язують норми полінома і його похідної в різних метриках (див., наприклад, [101], Р. I, §2), а саме:

для довільного тригонометричного полінома із множини вигляду

$$T(m) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \right\}$$

та для довільних $r > 0$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$

$$\|t_{\beta}^{(r)}\|_q \ll m^{r+1/p-1/q} \|t\|_p, \quad 1 \leq p \leq q \leq \infty,$$

Співвідношення такого вигляду називають нерівностями Бернштейна – Нікольського, оскільки в них поєднані нерівності Бернштейна при $r > 0$, $p = q$ з "нерівностями різних метрик" Нікольського при $r = 0$, $p \neq q$.

Згодом В. М. Темляков (див., наприклад, [83, Р. I, §2]) встановив нерівності Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів багатьох змінних з "номерами" гармонік з так званого "східчастого гіперболічного хреста". Зазначимо іще, що нерівності типу Бернштейна, а також Джексона – Нікольського, як в одновимірному, так і в багатовимірному випадках досліджувалися у роботах [2, 74, 56, 68, 63, 3, 93, 4], де можна ознайомитися з більш детальною бібліографією.

З огляду на сказане вище виникає природний інтерес, щоб дослідити нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік.

Добре відомим є результат С. Н. Бернштейна (див., наприклад, [54], Р. 3, §3.3) щодо наближення функції $|f|$ у просторі L_∞ тригонометричними поліномами $t \in T(m)$. Порядок наближення виявився рівним m^{-1}. Проте, як показав Р. С. Ісмагілов [38], якщо використовувати тригонометричні поліноми, гармоніки яких беруться не підряд, то порядок наближення виявляється таким, що не перевищує $m^{-6/5}\ln m$. Точний порядок, а саме $m^{-3/2}$, згодом було отримано В. Є. Майоровим [48].

Р. С. Ісмагілов у роботі [38] ввів поняття тригонометричного поперечника, тобто величину, яка характеризує апроксимативні можливості тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік. Виявилося, що в ряді випадків підпростори тригонометричних поліномів, гармоніки яких вибрані в незвичному порядку, мають по відношенню до класів W^r_p, які наближаються в метриці простору L_q, апроксимативні властивості кращі, ніж підпростори поліномів $T(m)$ [41, 6, 48, 49]. Більш того, як показав Б. С. Кашин [39], у деяких випадках підпростори тригонометричних поліномів із множини $T(m)$ не реалізують порядки колмогоровських поперечників класів W^r_p у просторі L_q.

У зв'язку з нерівностями Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з множини $T(m)$ у роботах В. Є. Майорова [50, 51] була розглянута більш загальна постановка задачі, а саме досліджувалася величина

$$\mathcal{T}_m(r,q,p) = \inf_{K_m} \sup_{t\in T^*(m)} \frac{\|t^{(r)}\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 \le p,q \le \infty, \tag{1.2}$$

де похідна порядку $r \ge 0$ розуміється в сенсі Вейля, $K_m = \{j_1, ..., j_m\}$ — довільний набір із m різних цілих чисел і

$$T^*(m) = \left\{ t : t(x) = \sum_{j\in K_m} c_j e^{ijx} \right\}.$$

Пізніше порядкові оцінки величини (1.2) для тригонометричних поліномів багатьох змінних з "номерами" гармонік зі східчастого гіперболічного хреста були одержані Е. М. Галєєвим [29].

1.3. Колмогоровські та ортопроекційні поперечники

У 1936 р. А. М. Колмогоров [97] для центрально–симетричної множини F у нормованому просторі X розглянув величину

$$d_m(F,X) = \inf_{L_m \in Lin_m(X)} \sup_{f\in F} \inf_{u\in L_m} \|f-u\|_X, \tag{1.3}$$

де інфімум шукається по всіх лінійних підпросторах L_m простору X, розмірності не більшої ніж m. Згодом ця величина отримала назву колмогоровського поперечника множини F у просторі X.

Величина $d_m(F,X)$ показує теоретично найкращу точність, з якою можна наблизити множину F лінійними підпросторами L_m розмірності m у метриці простору X.

Першу точну за порядком оцінку колмогоровського поперечника класів W^r_p у просторі L_q при $p=q=2$ і $r\in\mathbb{N}$ було отримано А. М. Колмогоровим [97]. Згодом для $p=1$, $q=2$ і $p=q=\infty$ порядки $d_m(W^r_p, L_q)$, $r\in\mathbb{N}$, було знайдено В. Рудіним [100] і С. Б. Стєчкіним [77].

У 1960 р. В. М. Тихомиров [85] встановив точне значення відповідних поперечників при $p=q=\infty$, а також показав [86], що

$$d_{2m-1}(W^r_\infty, L_\infty) = d_{2m}(W^r_\infty, L_\infty), \quad r\in\mathbb{N}.$$

Пізніше порядки колмогоровських поперечників $d_m(W^r_p, L_q)$, $r\in\mathbb{N}$, встановлювалися для наступних співвідношень між параметрами p і q: $1\le p=q<\infty$ — С. Б. Бабаджановим і В. М. Тихомировим [5]; $1\le q\le p\le\infty$ — Ю. І. Маковозом [52]; $1=p<q\le 2$ — М. З. Соломяком і В. М. Тихомировим [69].

При $1\le p\le q\le 2$ порядкові оцінки $d_m(W^r_p, L_q)$, $r\in\mathbb{N}$, були отримані Р. С. Ісмагіловим [37, 38], ним же було виявлено, що співвідношення

$$d_n(W^r_p, L_q) \asymp n^{-r+1/p-1/q}$$

порушується при $p = 1$ і $q = \infty$.

Нехай l_p^n — n–вимірний банахів простір з нормою

$$\|x\|_{l_p^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

і $B_p^n = \{x : \|x\|_{l_p^n} \le 1\}$ — одинична куля в l_p^n.

У 1974 Є. Д. Глускін [31] отримав непокращувані по порядку оцінки поперечників $d_m(W_1^r, L_\infty)$, $r = 2, 3, 4, ...$, показавши, що для оцінок цих величин можна використати оцінки колмогоровських поперечників $d_m(B_1^n, l_\infty^n)$. Згодом у роботі [32] Є. Д. Глускін встановив порядкові оцінки колмогоровських поперечників $d_m(W_1^r, L_q)$ при $q > 2$.

Узагальнюючи методи дискретизації в оцінках поперечників (див., наприклад, [77, 31, 38]), В. Є. Майоров показав [46], що в деяких ситуаціях задачі про порядкові оцінки колмогоровських поперечників функціональних класів W_p^r у просторі L_q можна звести до оцінок колмогоровських поперечників відповідних одиничних куль B_p^n у просторі l_q^n.

Згодом Б. С. Кашин [39, 40], використовуючи знайдені ним оцінки для поперечників $d_m(B_2^n, l_\infty^n)$ в поєднанні з методом дискретизації, завершив встановлення порядків поперечників $d_m(W_p^r, L_q)$, $2 < p < q < \infty$, $1 < p \le 2 < q < \infty$, у випадку, коли клас W_p^r вкладений у простір неперервних функцій, тобто при $rp > 1$.

Серед тих значень параметрів r, p, q, при яких величина $d_m(W_p^r, L_q)$ має сенс, її порядки залишалися невідомими тільки для "малих" r, точніше для таких r, p, q, що

$$(r, p, q) \in \Omega, \quad \Omega = \{(r, p, q) : 0 < rp \le 1, \, 1 \le p < q < \infty, \, q > 2\}.$$

У роботі [41] показано, що при $\frac{1}{2} < r < 1$ і $2 < q < \frac{1}{1-r}$ справедлива оцінка

$$d_m(W_1^r, L_q) \asymp m^{-\frac{q}{2}(r-1+\frac{1}{q})}.$$

Із цього результату видно, що поведінка колмогоровського поперечника $d_m(W^r_1, L_q)$ при $\frac{1}{2} < r < 1$ суттєво відрізняється від випадку $r > 1$, оскільки [39]

$$d_m(W^r_1, L_q) \asymp m^{-r+\frac{1}{2}}, \quad r > 1, \quad 2 < q < \infty.$$

Іншими словами, Б. С. Кашиним у роботі [41] для випадку $\frac{1}{2} < r < 1$ і $2 < q < \frac{1}{1-r}$ було виявлено ефект, який згодом отримав назву "ефект малої гладкості".

Пізніше у роботах [44, 27] були встановлені точні за порядком оцінки величин $d_m(W^r_p, L_q)$ при $(r, p, q) \in \Omega$, тобто для малих гладкостей r, а також двосторонні оцінки для критичних показників гладкості, які відрізняються логарифмічним множником.

На даний час дослідження колмогоровських поперечників класів періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних мають велику історію, з якою можна ознайомитися, наприклад, у монографіях [87, 83, 43, 88, 101, 30, 60].

Нехай $\{u_j\}_{j=1}^m$ — ортонормована система функцій $u_j \in L_\infty$, $j = \overline{1, m}$. Кожній функції $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду

$$\sum_{j=1}^{m} (f, u_j) u_j(x),$$

тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_j\}_{j=1}^m$. Тут і далі

$$(f, u_j) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{u_j(x)} dx,$$

де $\overline{u_j}$ — функції комплексно–спряжені до u_j.

Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то величина

$$d_m^{\perp}(F, L_q) = \inf_{\{u_j\}_{j=1}^m} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} (f, u_j) u_j \right\|_q \tag{1.4}$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу у просторі L_q, який було введено В. М. Темляковим [82].

У переважній більшості випадків оцінки зверху величин $d_m^{\perp}(F, L_q)$ одержуються за допомогою наближення функцій $f \in F$ їх частинними сумами Фур'є $S_m(f, x)$ вигляду

$$S_m(f, x) = \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Дослідження швидкості наближення періодичних функцій частинними сумами Фур'є беруть початок з робіт А. Лебега [98]. Істотний крок у цьому напрямі було зроблено у 1936 р. А. М. Колмогоровим [97], який показав, що для класів W_{∞}^r, $r \in \mathbb{N}$, має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_m(W_{\infty}^r)_{\infty} = \frac{4 \ln m}{\pi^2 m^r} + O(m^{-r}), \quad m \to \infty, \tag{1.5}$$

де для $F \subset L_q$ і $1 \le q \le \infty$

$$\mathcal{E}_m(F)_q = \sup_{f \in F} \left\| f(x) - \sum_{k=-m}^{m} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_q.$$

У 1940 р. В. Т. Пінкевич [55] показав, що рівність (1.5) виконується для класів Вейля $W_{r,\infty}^r$ при довільних $r > 0$. С. О. Теляковський [79] знайшов асимптотичні рівності величин $\mathcal{E}_m(W_{\infty,\beta}^r)_{\infty}$ при довільних $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$.

Завдяки дослідженням С. М. Нікольського [53] було встановлено аналогічні рівності і для величин $\mathcal{E}_m(W_{r,1}^r)_1$, $r > 0$. У роботах С. М. Нікольського [53], С. Б. Стєчкіна, С. О. Теляковського [78] та С. О. Теляковського [80] знайдено асимптотичні рівності для величин $\mathcal{E}_m(W_{1,\beta}^r)_1$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Що стосується точних за порядком оцінок величин $\mathcal{E}_m(W^r_{p,\beta})_q$, то на сьогодні вони відомі при всіх допустимих значеннях параметрів r, p, q і β (див., наприклад, [101], Р. I, §3).

Питання, які пов'язані з наближенням сумами Фур'є класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q при $1 \leq p, q \leq \infty$ і різних швидкостях прямування до нуля послідовностей ψ, досліджувались у роботах О. І. Степанця [71, 72], О. І. Степанця та О. К. Кушпеля [75], С. О. Теляковського [81], Р. М. Тригуба [91], В. С. Романюка [62], А. С. Сердюка [64], А. С. Сердюка та І. В. Соколенка [65], А. С. Сердюка та У. З. Грабової [33], А. С. Сердюка та Т. А. Степанюк [66] та інших.

Із результатами дослідження наближень класів Вейля – Надя $W^r_{p,\beta}$, а також класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, у просторі L_q сумами Фур'є та поліномами, що побудовані на базі цих сум, можна ознайомитися у монографіях [87, 35, 71, 83, 72, 101, 73, 76, 60].

Для встановлення оцінок знизу ортопроекційних поперечників деяких класів періодичних функцій багатьох змінних В. М. Темляковим (див., наприклад, [83]) було запропоновано розглянути величини, які, у певному сенсі, є близькими до цих поперечників і означаються наступним чином.

Нехай F — деякий функціональний клас простору L_q. Тоді через $d^B_m(F, L_q)$ позначимо величину

$$d^B_m(F, L_q) = \inf_{G \in \mathcal{L}_m(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \left\| f - Gf \right\|_q . \tag{1.6}$$

Тут $\mathcal{L}_m(B)_q$ — множина лінійних операторів G, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а область значення міститься у підпросторі простору L_q розмірності m;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх k виконується нерівність

$$\|Ge^{ikx}\|_2 \leq B.$$

Зауважимо, що до $\mathcal{L}_m(1)_2$ належать, зокрема, оператори ортогонального проектування на підпростори розмірності m, а також оператори, які задаються по ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, котрий означається послідовністю $\{\lambda_l\}$ такою, що $|\lambda_l| \leq 1$ для всіх l.

З означення величин $d_m(F, L_q)$, $d_m^{\perp}(F, L_q)$ і $d_m^B(F, L_q)$ випливає, що вони пов'язані між собою співвідношеннями

$$d_m^B(F, L_q) \leq d_m^{\perp}(F, L_q), \tag{1.7}$$

$$d_m(F, L_q) \leq d_m^{\perp}(F, L_q)$$

і, зокрема,

$$d_m(F, L_2) = d_m^{\perp}(F, L_2).$$

Із нерівності (1.7) видно, що оцінки знизу величин $d_m^B(F, L_q)$ можуть слугувати оцінками знизу для ортопроекційних поперечників $d_m^{\perp}(F, L_q)$ і, навпаки, оцінки зверху для поперечників $d_m^{\perp}(F, L_q)$ можна використовувати для оцінок зверху величини $d_m^B(F, L_q)$.

Відмітимо також, що при доведенні оцінок знизу величин $d_m^B(F, L_q)$ будемо використовувати метод, який розробив В. М. Темляков при встановленні оцінок цих величин для деяких класів функцій багатьох змінних (див., наприклад, [83, 84, 101]). Суть цього методу полягає в побудові функцій з класів F, які "погано" наближаються за допомогою операторів G.

З детальнішою інформацією стосовно дослідження величин (1.4) і (1.6) для різноманітних функціональних класів можна ознайомитись у роботах [26, 84, 1, 58, 59, 92, 70, 61, 34], а також у монографіях [83, 101, 60].

Розділ 2

Оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік

Даний розділ присвячено дослідженню узагальнено–диференційовних властивостей тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік щодо відомої проблеми Літтлвуда [95], а саме: чи може ядро типу Діріхле з довільним вибором гармонік мати кращі узагальнено–диференціальні властивості, ніж класичне ядро Діріхле? Як виявилося, при деяких умовах на послідовності ψ, відповідь є позитивною.

2.1. Постановка задачі та допоміжні твердження

У 1981 р. незалежно і майже одночасно С. В. Конягін [42] та Мак-Гі, Піно і Сміт [99] довели гіпотезу Літтлвуда [95]:

для будь–якого набору цілих чисел $j_1, ..., j_m$ *справедлива порядкова нерівність*

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right\|_1 \gg \ln m.$$

У той же час, для ядра Діріхле добре відомо (див., наприклад, [101], Р. 1, §1), що

$$\|D_m\|_1 = \left\| \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} \right\|_1 \asymp \ln m.$$

Згодом В. М. Тихомиров у огляді [88] запропонував узагальнити задачу Літтлвуда і дослідити асимптотику при $m \to \infty$ величини вигляду

$$L_m(r,q) = \inf_{K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)^{(r)} \right\|_q, \quad 1 \le q \le \infty, \tag{2.1}$$

де K_m — довільний набір різних цілих чисел $j_1, ..., j_m$ і похідна порядку $r \ge 0$ розуміється в сенсі Вейля.

Перші оцінки величини $L_m(r,q)$ були отримані В. Є. Майоровим [51]. Згодом Е. С. Белінським [7, 8] було доповнено результати з [51]. Зауважимо, що, як зазначено Е. С. Белінським у роботі [8], одночасно і незалежно від нього оцінки величини $L_m(r,q)$ при $0 \le r < \frac{1}{q}$ і $2 < q < \infty$ було повідомлено С. В. Конягіним на 4-й Саратовській зимовій школі по теорії функцій і наближень у 1988 р. Згодом дослідження величини (2.1) було поширено і на багатовимірний випадок у роботах [94, 9].

Із робіт [51] та [8] випливає, що

$$\begin{gathered} L_m(0,1) \asymp \ln m; \\ L_m(0,q) \asymp m^{1-1/q}, \quad 1 < q \le 2; \\ L_m(0,q) \asymp m^{1/2}, \quad 2 < q < \infty. \end{gathered} \tag{2.2}$$

У той же час, для ядра Діріхле добре відомо (див., наприклад, [101], P. I, §1), що

$$\begin{gathered} \|D_m\|_1 \asymp \ln m; \\ \|D_m\|_q \asymp m^{1-1/q}, \quad 1 < q < \infty; \\ \|D_m\|_\infty \asymp m. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Метою нашої роботи є встановлення точних за порядком оцінок величини

$$L_m(\psi,q) = \inf_{K_m} \left\| \left(\sum_{n=1}^{m} e^{ij_n x} \right)^{\psi} \right\|_q$$

при $1 < q < \infty$ і певних умовах на послідовності ψ.

При доведенні основних результатів нам знадобляться деякі відомі твердження, які ми сформулюємо згідно з нашими позначеннями.

Нехай $T(m)$ — множина поліномів t вигляду

$$T(m) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Тоді має місце твердження.

Твердження А [73, ч. 2, с. 115]. *Нехай $1 < q < \infty$, ψ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді для довільного полінома $t \in T(m)$ справедлива оцінка*

$$\|t_\beta^\psi\|_q \ll \psi^{-1}(m)\|t\|_q.$$

Нехай $f \in L_q$, $1 < q < \infty$. Для $s \in \mathbb{Z}_+$ розглянемо множину

$$\rho(s) = \left\{ k \in \mathbb{Z} : \ [2^{s-1}] \le |k| < 2^s \right\},$$

де $[a]$ — ціла частина числа a, і покладемо

$$\delta_s(f) := \delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Теорема В (Літтлвуда – Пелі, див., наприклад, [101], В., §3). *Нехай задано $1 < q < \infty$. Тоді існують додатні сталі $C_1(q), C_2(q)$ такі, що для кожної функції $f \in L_q$ мають місце оцінки*

$$C_1(q)\|f\|_q \le \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} |\delta_s(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le C_2(q)\|f\|_q.$$

Теорема Г [56]. *Нехай $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $1 < q < \infty$. Тоді для f_β^ψ справедливе співвідношення*

$$\|f_\beta^\psi\|_q \asymp \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} |\psi^{-1}(2^s)\delta_s(f)|^2 \right)^{1/2} \right\|_q.$$

Теорема Д (Хаусдорфа – Юнга, див., наприклад, [101], B., §3). *Нехай* $1 < q \leq 2$ *і* $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. *Тоді для будь–якої функції* $f \in L_q$

$$\|f\|_q \geq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^{q'} \right)^{1/q'}.$$

Якщо послідовність $\{c_k\}$ *є такою, що*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^q < \infty,$$

то тоді існує функція $f \in L_{q'}$ *для якої* $\hat{f}(k) = c_k$ *і*

$$\|f\|_{q'} \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^{q} \right)^{1/q}.$$

Лема А [9]. *Нехай* $2 \leq q < \infty$, $K_n = \{j_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{Z}$ *і*

$$T(K_n) := T(K_n, x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ij_k x}.$$

Тоді для довільного $m \leq n$ *існує тригонометричний поліном* $\tilde{T}(K_m)$ *з кількістю гармонік не більше* m *і такий, що*

$$\|T(K_n) - \tilde{T}(K_m)\|_q \leq C_3 \frac{n}{\sqrt{m}},$$

причому $K_m \subset K_n$, *всі коефіцієнти полінома* $\tilde{T}(K_m)$ *однакові і не перевищують за модулем* $\frac{n}{m}$.

Теорема Е (див., наприклад, [54, с. 159]). *Нехай* $t \in T(m)$, $m > 0$. *Тоді при* $1 \leq q \leq p \leq \infty$ *виконується нерівність*

$$\|t\|_p \ll m^{1/q - 1/p} \|t\|_q.$$

Це співвідношення є частковим випадком нерівності, яка була доведена в багатовимірному випадку С. М. Нікольським і відома як "нерівність різних метрик". Зауважимо також, що в одновимірному випадку при

$p = \infty$ відповідну нерівність довів Джексон [96].

Теорема Є (Марцинкевича, див., наприклад, [36, с. 346]). *Нехай задано послідовність* $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$*, що задовольняє умови:*

1) $|\lambda_n| \leq C_4, \ n \in \mathbb{Z};$
2) $\sum\limits_{\mu=\pm 2^{\nu-1}}^{\pm 2^{\nu}-1} |\lambda_{\mu+1} - \lambda_{\mu}| \leq C_4, \ \nu \in \mathbb{N}.$

Тоді, якщо

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_q, \ 1 < q < \infty,$$

то

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_q$$

і існує стала $C_5(q)$ *така, що*

$$\|F\|_q \leq C_5(q) C_4 \|f\|_q.$$

2.2. Порядкові оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле при $1 < q < \infty$

У даному підрозділі встановлюються точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле при $1 < q < \infty$.

Теорема 2.1. *Нехай* $1 < q < \infty$, ψ *— додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедлива оцінка*

$$\|(D_m)^{\psi}\|_q \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}. \tag{2.4}$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$, *то*

$$\|(D_m)^{\psi}\|_q \asymp \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}. \tag{2.5}$$

Доведення. Доведемо в (2.4) оцінку зверху. Оскільки ядро Діріхле D_m — тригонометричний поліном із множини $T(m)$, то, скориставшись твердженням A, отримаємо

$$\|(D_m)^{\psi}\|_q \ll \psi^{-1}(m)\|D_m\|_q.$$

Звідси, згідно зі співвідношенням (2.3), будемо мати

$$\|(D_m)^{\psi}\|_q \ll \psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Тепер встановимо в (2.5) відповідну оцінку знизу. За заданим m виберемо $\mu \in \mathbb{N}$ таким чином, щоб виконувалася умова $2^{\mu-1} \leq m \leq 2^{\mu}$. Тоді для будь–якого $s \leq \mu$ можемо записати

$$\delta_s(x) = \sum_{l\in\rho(s)} e^{ilx} = \sum_{2^{s-1}\leq|l|<2^s} e^{ilx} = 2\sum_{2^{s-1}\leq l<2^s} \cos lx =$$

$$= \frac{2\sin 2^{s-2}x \cdot \cos 2^{-1}(3\cdot 2^{s-1}-1)x}{\sin 2^{-1}x}$$

і відповідно покладемо

$$\delta_s(f,x) = \psi^{-1}(2^s)\sum_{l\in\rho(s)} e^{ilx} = \psi^{-1}(2^s)\delta_s(x). \tag{2.6}$$

Нехай

$$\Delta_n = \{x \in \mathbb{R} : \pi 2^{-n-1} < |x| \leq \pi 2^{-n}\}, \quad n \geq 0.$$

Тоді, використовуючи співвідношення

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

і враховуючи, що $l \in \rho(s)$, а $x \in \Delta_n$, $s < n$, для $\delta_s(x)$ будемо мати

$$\delta_s(x) = 2\sum_{2^{s-1}\leq l<2^s} \cos lx =$$

$$= \frac{2\sin 2^{s-2}x \cdot \cos 2^{-1}(3\cdot 2^{s-1}-1)x}{\sin 2^{-1}x} \geq$$

$$\geq \frac{2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot 2^{s-2} x \cdot \cos 2^{-1}(3 \cdot 2^{s-1} - 1)x}{2^{-1}x} =$$

$$= \frac{2^{s+1}}{\pi} \cos 2^{-1}(3 \cdot 2^{s-1} - 1)x \geq$$

$$\geq \frac{2^{s+1}}{\pi} \cos 2^{-1}(3 \cdot 2^{s-1} - 1)\pi 2^{-s} =$$

$$= \frac{2^{s+1}}{\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - \pi 2^{-s-1}\right) \geq \frac{2^{s+1}}{\pi} \cos\frac{3\pi}{8}. \tag{2.7}$$

Тоді, використовуючи теореми В і Г та співвідношення (2.6), отримаємо

$$\left\| \Big(D_m\Big)^{\psi} \right\|_q = \left\| \Big(\sum_{|k| \leq m} e^{ikx} \Big)^{\psi} \right\|_q \asymp$$

$$\asymp \left\| \left(\sum_{s \leq \mu} \left| \psi^{-1}(2^s) \delta_s(x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \asymp$$

$$\asymp \left\| \left(\sum_{s \leq \mu} \left| \delta_s(f, x) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \asymp$$

$$\asymp \left\| \sum_{s \leq \mu} \psi^{-1}(2^s) \delta_s(x) \right\|_q =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{s \leq \mu} \psi^{-1}(2^s) \delta_s(x) \right|^q dx \right)^{1/q} = I$$

Далі, розбиваючи відрізок інтегрування на області Δ_n і беручи в сумі по s тільки доданок з $s = n$, та враховуючи (2.7), будемо мати

$$I \gg \left(\sum_{n \leq \mu} \psi^{-q}(2^n) \int\limits_{\Delta_n} \left| \frac{2^{n+1}}{\pi} \cos\frac{3\pi}{8} \right|^q dx \right)^{1/q} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{n \leq \mu} \psi^{-q}(2^n) \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot \left| \frac{2^{n+1}}{\pi} \cos\frac{3\pi}{8} \right|^q \right)^{1/q} \geq$$

$$\gg \left(\sum_{n \le \mu} \psi^{-q}(2^n) 2^{n(q-1)} \right)^{1/q} \ge$$

$$\ge \psi^{-1}(2^\mu) 2^{\mu(1-1/q)} \asymp \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Теорему 2.1 доведено.

Зауваження 2.1. Якщо $1 < q < \infty$, $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $r > 1/q - 1$, то відповідне твердження було встановлено у роботі [24].

2.3. Оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік при $1 < q < \infty$

У даному підрозділі встановлюються точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік.

Має місце твердження.

Теорема 2.2. *Нехай $2 < q < \infty$, ψ — додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедлива оцінка*

$$L_m(\psi, q) \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$, і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, то

$$L_m(\psi, q) \asymp \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 2.1 попереднього підрозділу. Дійсно, оскільки

$$L_{2m+1}(\psi, q) \le \|(D_m)^\psi\|_q \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}, \quad 2 < q < \infty,$$

то звідси знаходимо

$$L_m(\psi, q) \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Тепер встановимо відповідну оцінку знизу. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що $K_m = \{j_1, ..., j_m\}$, $0 < j_1 < ... < j_m$, — довільний набір із m натуральних чисел, $m_s = |K_m \cap \rho(s)|$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Тоді, використовуючи теорему В та нерівність

$$\left(\sum_l |a_l|^2\right)^{1/2} \geq \left(\sum_l |a_l|^q\right)^{1/q}, \quad 2 \leq q < \infty, \tag{2.8}$$

отримаємо

$$\left\|\left(\sum_{k=1}^m e^{ij_kx}\right)^{\psi}\right\|_q \geq \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{j_k\in K_m} \psi^{-1}(j_k)e^{ij_kx}\right|^q dx\right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\left|\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-1}(l)e^{ilx}\right|^2\right)^{q/2} dx\right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-1}(l)e^{ilx}\right|^q dx\right)^{1/q}. \tag{2.9}$$

Далі, покладемо

$$\Delta_s = [\pi 2^{-(s+3)}, \pi 2^{-(s+2)}]$$

і зауважимо, що оскільки $l \in K_m \cap \rho(s)$ і $x \in \Delta_s$, то $\cos lx \geq \frac{1}{2}$. Тоді для співвідношення (2.9) маємо

$$L_m(\psi, q) \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-1}(l)\cos(lx)\right|^q dx\right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\int_{\Delta_s}\left|\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-1}(l)\cos lx\right|^q dx\right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} |\Delta_s| \left| \sum_{l\in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) \right|^q \right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^{s-1}) 2^{-s} m_s^q \right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^{s}) 2^{-s} m_s^q \right)^{1/q}. \qquad (2.10)$$

Нехай

$$I_1 = \psi^{-q}(2^s) 2^{-s} m_s^q, \qquad (2.11)$$

де $m_s \le 2^s$ і

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} m_s = m.$$

Виберемо $\mu > 0$ так, щоб $2^{\mu-1} \le m \le 2^\mu$ і

$$\sum_{s\le\mu} m_s \le \sum_{s\le\mu} 2^s \le C_1 2^\mu \le \frac{m}{2}.$$

У такому випадку повинно виконуватися співвідношення

$$\sum_{s>\mu} m_s \ge C_2 \frac{m}{2}. \qquad (2.12)$$

Крім цього, з (2.11) маємо, що

$$m_s = I_1^{1/q} \psi(2^s) 2^{s/q}. \qquad (2.13)$$

і тому, згідно з (2.12) і (2.13), оскільки послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, отримаємо

$$m \ll \sum_{s>\mu} m_s = I_1^{1/q} \sum_{s>\mu} \psi(2^s) 2^{s/q} =$$

$$= I_1^{1/q} \sum_{s>\mu} \psi(2^s) 2^{s/q} 2^{s\varepsilon} 2^{-s\varepsilon} \ll$$

$$\ll I_1^{1/q} \psi(2^\mu) 2^{\mu/q} 2^{\mu\varepsilon} \sum_{s>\mu} 2^{-s\varepsilon} \ll$$

$$\ll I_1^{1/q} \psi(2^\mu) 2^{\mu/q} 2^{\mu\varepsilon} 2^{-\mu\varepsilon} =$$

$$= I_1^{1/q} \psi(2^\mu) 2^{\mu/q}. \tag{2.14}$$

З (2.14) знаходимо

$$I_1 \gg \psi^{-q}(2^\mu) 2^{-\mu} m^q$$

або

$$I_1 \gg \psi^{-q}(m) m^{-1} m^q = \psi^{-q}(m) m^{q-1}. \tag{2.15}$$

Таким чином, співставивши (2.10), (2.11) і (2.15), приходимо до шуканої оцінки знизу:

$$L_m(\psi, q) \gg \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(m) m^{q-1} \right)^{1/q} \gg \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Теорему 2.2 доведено.

Теорема 2.3. *Нехай* $1 < q \leq 2$, ψ *— додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедлива оцінка*

$$L_m(\psi, q) \ll \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$, *і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$, *що послідовність* $\psi(\tau)\tau^\varepsilon$, $\tau \in \mathbb{N}$, *не зростає, то*

$$L_m(\psi,q)\asymp\psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з теореми 2.1 попереднього підрозділу. Дійсно, оскільки

$$L_{2m+1}(\psi,q)\le\|(D_m)^{\psi}\|_q\ll\psi^{-1}(m)m^{1-1/q},\ \ 1<q\le 2,$$

то звідси знаходимо

$$L_m(\psi,q)\ll\psi^{-1}(m)m^{1-1/q}.$$

Одержимо відповідну оцінку знизу. При цьому, як і при доведенні оцінки знизу в теоремі 2.2, будемо вважати, що $K_m=\{j_1,...,j_m\}$, $0<j_1<...<j_m$, — довільний набір із m натуральних чисел, $m_s=|K_m\cap\rho(s)|$, $s\in\mathbb{Z}_+$. Тоді, використовуючи теорему В та нерівність (2.8), отримаємо

$$\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{m}e^{ij_kx}\Big)^{\psi}\Big\|_q\ge\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{j_k\in K_m}\psi^{-1}(j_k)e^{ij_kx}\Big|^q dx\Big)^{1/q}\asymp$$

$$\asymp\Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\Big|\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)}\psi^{-1}(l)e^{ilx}\Big|^2\Big)^{q/2}dx\Big)^{1/q}\gg$$

$$\gg\Big(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big|\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)}\psi^{-1}(l)e^{ilx}\Big|^q dx\Big)^{1/q}=$$

$$=\Big(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\Big\|\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)}\psi^{-1}(l)e^{ilx}\Big\|_q^q\Big)^{1/q}. \tag{2.16}$$

Далі, використовуючи теорему Д, з (2.16) отримаємо

$$L_m(\psi,q)\gg\Big(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+}\Big\|\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)}\psi^{-1}(l)e^{ilx}\Big\|_q^q\Big)^{1/q}\gg$$

$$\gg \Bigg(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \Bigg(\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-q'}(l) \Bigg)^{q/q'} \Bigg)^{1/q} \gg$$

$$\gg \Bigg(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \Big(\psi^{-q'}(2^{s-1}) m_s \Big)^{q/q'} \Bigg)^{1/q} \gg$$

$$\gg \Bigg(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^{s-1}) m_s^{q/q'} \Bigg)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp \Bigg(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^{s}) m_s^{q/q'} \Bigg)^{1/q}. \tag{2.17}$$

Нехай

$$I_2 = \psi^{-q}(2^s) m_s^{q/q'}, \tag{2.18}$$

де $m_s \le 2^s$ і

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} m_s = m.$$

Виберемо $\mu > 0$ так, щоб $2^{\mu-1} \le m \le 2^{\mu}$ і

$$\sum_{s\le\mu} m_s \le \sum_{s\le\mu} 2^s \le C_3 2^{\mu} \le \frac{m}{2}.$$

У такому випадку повинно виконуватися співвідношення

$$\sum_{s>\mu} m_s \ge C_4 \frac{m}{2}. \tag{2.19}$$

Крім цього, з (2.18) випливає, що

$$m_s = I_2^{q'/q} \psi^{q'}(2^s). \tag{2.20}$$

і тому, згідно з (2.19) і (2.20), оскільки послідовність $\psi(\tau)\tau^{\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, отримаємо

$$m \ll \sum_{s>\mu} m_s = I_2^{q'/q} \sum_{s>\mu} \psi^{q'}(2^s) =$$

$$= I_2^{q'/q} \sum_{s>\mu} \psi^{q'}(2^s) 2^{s\varepsilon} 2^{-s\varepsilon} \ll$$

$$\ll I_2^{q'/q} \psi^{q'}(2^\mu) 2^{\mu\varepsilon} \sum_{s>\mu} 2^{-s\varepsilon} \ll$$

$$\ll I_2^{q'/q} \psi^{q'}(2^\mu) 2^{\mu\varepsilon} 2^{-\mu\varepsilon} = I_2^{q'/q} \psi^{q'}(2^\mu). \tag{2.21}$$

З (2.21) знаходимо

$$I_2 \gg \psi^{-q}(2^\mu) m^{q/q'}$$

або

$$I_2 \gg \psi^{-q}(m) m^{q/q'}. \tag{2.22}$$

Таким чином, співставивши (2.17), (2.18) і (2.22), приходимо до шуканої оцінки знизу:

$$L_m(\psi, q) \gg \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(m) m^{q/q'} \right)^{1/q} \gg$$

$$\gg \psi^{-1}(m) m^{1/q'} = \psi^{-1}(m) m^{1-1/q}.$$

Теорему 2.3 доведено.

Зауваження 2.2. Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r > 1/q$ при $2 < q < \infty$ і $r > 0$ при $1 < q \le 2$, то оцінки відповідних величин встановлено у роботі [51].

Зауваження 2.3. З результатів, одержаних у теоремах 2.2 і 2.3, випливає, що норми ψ–похідних у метриці простору L_q, $1 < q < \infty$, при відповідних умовах на послідовності ψ, як для ядер Діріхле D_m, так і для ядер типу Діріхле з найкращим вибором гармонік мають однакові порядки.

Тепер сформулюємо і доведемо твердження, у якому встановлено точну за порядком оцінку величини $L_m(\psi, q)$, $2 < q < \infty$, і при цьому виявлено, що ця величина при певних умовах на послідовність ψ відрізняється за порядком від L_q–норми ψ–похідної ядра Діріхле.

Теорема 2.4. *Нехай* $2 < q < \infty$, $\psi \in \Psi$. *Тоді справедлива оцінка*

$$L_m(\psi, q) \ll \psi^{-1}\Big([m^{q/2}]\Big)\sqrt{m}. \tag{2.23}$$

Якщо ж, крім цього, існують $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *такі, що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{1/q-\varepsilon_1}$, $\tau \in \mathbb{N}$, *не спадає, а послідовність* $\psi(\tau)\tau^{\varepsilon_2}$ *не зростає, то*

$$L_m(\psi, q) \asymp \psi^{-1}\Big([m^{q/2}]\Big)\sqrt{m}. \tag{2.24}$$

Доведення. Для доведення в (2.23) оцінки зверху розглянемо поліном

$$\overline{D}_{2^s}(x) = \sum_{k=1}^{2^s} e^{ikx},$$

де $2^s > m$, і у подальших міркуваннях число s буде уточнено. Згідно з лемою А знайдеться тригонометричний поліном

$$t_m^*(x) = \sum_{n=1}^{m} a e^{ij_n x}, \quad |a| \le \frac{2^s}{m},$$

який містить не більше, ніж m гармонік, і такий, що

$$\|\overline{D}_{2^s} - t_m^*\|_q \le C_5 \frac{2^s}{\sqrt{m}}. \tag{2.25}$$

Очевидно можна вважати, що $C_5 > 1$. Тоді будуть справедливі співвідношення

$$\left|\frac{t_m^*(0)}{a}\right| = \frac{1}{|a|}|t_m^*(0)| \ge \frac{m}{2^s}\|t_m^*\|_\infty \ge$$

$$\geq \frac{m}{2^s}\biggl(\|\overline{D}_{2^s}\|_\infty - \|\overline{D}_{2^s} - t^*_m\|_\infty\biggr). \qquad (2.26)$$

Тому, використавши теорему E, оцінку (2.25) і врахувавши, що $2^s > m$, будемо мати

$$\|\overline{D}_{2^s} - t^*_m\|_\infty \ll 2^{s/q}\|\overline{D}_{2^s} - t^*_m\|_q \leq C_5 2^{s/q}\frac{2^s}{\sqrt{m}}. \qquad (2.27)$$

Таким чином, підставивши (2.27) в (2.26), отримаємо

$$\left|\frac{t^*_m(0)}{a}\right| \geq \frac{m}{2^s}\biggl(\|\overline{D}_{2^s}\|_\infty - \|\overline{D}_{2^s} - t^*_m\|_\infty\biggr) \geq$$

$$\geq \frac{m}{2^s}\biggl(2^s - C_5 2^{s/q}\frac{2^s}{\sqrt{m}}\biggr) =$$

$$= m\biggl(1 - C_5\frac{2^{s/q}}{\sqrt{m}}\biggr) \geq \frac{m}{2},$$

якщо тільки $2^s \leq m^{q/2}(2C_5)^{-q}$. Тому будемо вважати, що

$$2^s = [m^{q/2}(2C_5)^{-q}].$$

Далі нам буде потрібна оцінка знизу величини $|a|$. Оскільки

$$\Bigl|2^s - |a|\cdot m\Bigr| = \Bigl|\|\overline{D}_{2^s}\|_\infty - \|t^*_m\|_\infty\Bigr| \leq \|\overline{D}_{2^s} - t^*_m\|_\infty,$$

то, скориставшись співвідношенням (2.27), отримаємо

$$2^s - |a|\cdot m \leq C_5 2^{s/q}\frac{2^s}{\sqrt{m}}.$$

Звідси, прийнявши до уваги умову на 2^s, будемо мати

$$|a| \geq \frac{2^s}{m} - C_5 2^{s/q}\frac{2^s}{\sqrt{m}\cdot m} \geq \frac{2^s}{m} - \frac{2^s}{2m} = \frac{2^s}{2m}.$$

Розглянемо тепер тригонометричний поліном

$$\bar{t}_m(x) = \frac{1}{a} t_m^*(x),$$

який має m гармонік, і всі його коефіцієнти рівні 1. Скориставшись послідовно твердженням А, співвідношеннями (2.25) та (2.2) і врахувавши, що $2^s > m$, можемо записати

$$\left\| \left(\bar{t}_m \right)^{\psi} \right\|_q = \left\| \left(\frac{1}{a} t_m^* \right)^{\psi} \right\|_q =$$

$$= \frac{1}{|a|} \left\| \left(t_m^* \right)^{\psi} \right\|_q \ll \frac{m}{2^s} \psi^{-1}(2^s) \|t_m^*\|_q \leq$$

$$\leq \frac{m}{2^s} \psi^{-1}(2^s) \left(\|\overline{D}_{2^s} - t_m^*\|_q - \|\overline{D}_{2^s}\|_q \right) \leq$$

$$\leq \frac{m}{2^s} \psi^{-1}(2^s) \left(C_5 \frac{2^s}{\sqrt{m}} - 2^{s(1-1/q)} \right) \ll$$

$$\ll \psi^{-1}(2^s) \sqrt{m}. \tag{2.28}$$

Далі, оскільки $\psi \in \Psi$ і $2^s = [C_6 m^{q/2}]$, де $C_6 = (2C_5)^{-q}$, то зі співвідношення (2.28) маємо

$$\|(\bar{t}_m)^{\psi}\|_q \ll \psi^{-1}\left([C_6 m^{q/2}] \right) \sqrt{m}.$$

Звідси, врахувавши, що $C_6 < 1$, отримаємо шукану оцінку зверху

$$L_m(\psi, q) \ll \psi^{-1}\left([C_6 m^{q/2}] \right) \sqrt{m} \leq$$

$$\leq \psi^{-1}\left([m^{q/2}] \right) \sqrt{m}.$$

Доведемо в (2.24) оцінку знизу. Як буде зрозуміло з подальших міркувань, можна вважати, що $K_m = \{j_1, ..., j_m\}$, $0 < j_1 < ... < j_m$, — довільний набір із m натуральних чисел, $m_s = |K_m \cap \rho(s)|$ — кількість елементів даного набору, які потрапляють до множини $\rho(s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$.

Далі, для кожного $s \in \mathbb{Z}_+$ розглянемо поліном

$$\bar{t}_{m,s}(x) = \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} e^{ilx}$$

і покажемо, що виконується співвідношення

$$\|(\bar{t}_{m,s})^{\psi}\|_q \gg \psi^{-1}(2^s)\|\bar{t}_{m,s}\|_q, \quad 2 < q < \infty. \tag{2.29}$$

З цією метою розглянемо послідовність $\{\lambda_{l,s}\}$, яка задається формулою:

$$\{\lambda_{l,s}\} = \left\{\frac{\psi(l)}{\psi(2^s)}\right\},\ l \in K_m \cap \rho(s),$$

і переконаємося, що $\{\lambda_{l,s}\}$ задовольняє умови 1) і 2) теореми Є.

Оскільки $\psi \in \Psi$ і за умовою l є додатними, то:

$$1)\ |\lambda_{l,s}| = \left|\frac{\psi(l)}{\psi(2^s)}\right| \leq \frac{\psi(l)}{\psi(2^s)} \leq C_7,$$

$$2) \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} |\lambda_{l,s} - \lambda_{l+1,s}| =$$

$$= \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \left|\frac{\psi(l)}{\psi(2^s)} - \frac{\psi(l+1)}{\psi(2^s)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \Big(\psi(l) - \psi(l+1)\Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(2^s)}\Big(\psi(2^{s-1}) - \psi(2^s)\Big) \leq$$

$$\leq \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \leq C_7.$$

Таким чином оператор $\Lambda_{l,s}$, який задається послідовністю $\{\lambda_{l,s}\}$ і діє як мультиплікатор, задовольняє умови теореми Є.

Тепер подією оператором $\Lambda_{l,s}$ на поліном

$$\bar{t}^{*}_{m,s}(x) = \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{ilx}.$$

У результаті одержимо

$$\Lambda_{l,s}\bar{t}^{*}_{m,s}(x) = \Lambda_{l,s} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{ilx} =$$

$$= \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \frac{\psi(l)}{\psi(2^s)} \psi^{-1}(l) e^{ilx} =$$

$$= \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} e^{ilx} = \frac{1}{\psi(2^s)} \bar{t}_{m,s}(x).$$

Звідси маємо

$$\left\| \Lambda_{l,s}\bar{t}^{*}_{m,s} \right\|_q = \frac{1}{\psi(2^s)} \left\| \bar{t}_{m,s} \right\|_q. \tag{2.30}$$

З іншого боку, згідно з теоремою Є

$$\left\| \Lambda_{l,s}\bar{t}^{*}_{m,s} \right\|_q = \left\| \Lambda_{l,s} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{ilx} \right\|_q \leq$$

$$\leq C_8 \left\| \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{ilx} \right\|_q = C_8 \left\| \left(\bar{t}_{m,s} \right)^{\psi} \right\|_q. \tag{2.31}$$

Отже, співставивши (2.30) і (2.31), отримаємо потрібне співвідношення (2.29).

Далі, використавши теорему В і нерівність (2.8), згідно з (2.29) отримаємо

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{m} e^{ij_k x} \right)^{\psi} \right\|_q^q \geq \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j_k \in K_m} \psi^{-1}(j_k) e^{ij_k x} \right|^q dx \asymp$$

$$\asymp \int_{-\pi}^{\pi} \Bigg(\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \Bigg| \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{ilx} \Bigg|^2 \Bigg)^{q/2} dx \gg$$

$$\gg \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \int_{-\pi}^{\pi} \Bigg| \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} \psi^{-1}(l) e^{ilx} \Bigg|^q dx \gg$$

$$\gg \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^s) \int_{-\pi}^{\pi} \Bigg| \sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} e^{ilx} \Bigg|^q dx =$$

$$= \sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^s) \|\bar{t}_{m,s}\|_q^q. \qquad (2.32)$$

Щоб продовжити (2.32), розглянемо дві множини S_1 і S_2 та будемо вважати, що $s \in S_1$, якщо $m_s > 2^{\frac{2s}{q}}$, а всі інші індекси s віднесемо до S_2. Відповідно останню суму в (2.32) подамо у вигляді двох доданків

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^s) \|\bar{t}_{m,s}\|_q^q =$$

$$= \sum_{s\in S_1} \psi^{-q}(2^s) \|\bar{t}_{m,s}\|_q^q + \sum_{s\in S_2} \psi^{-q}(2^s) \|\bar{t}_{m,s}\|_q^q. \qquad (2.33)$$

Для оцінки першої суми використаємо співвідношення, яке випливає із нерівності різних метрик (теорема Е). А саме, оскільки

$$m_s = \|\bar{t}_{m,s}\|_\infty \le 2^{s/q} \|\bar{t}_{m,s}\|_q,$$

то

$$\|\bar{t}_{m,s}\|_q \ge \frac{m_s}{2^{s/q}}. \qquad (2.34)$$

Для оцінки другої суми в (2.33) скористаємося нерівністю

$$\|\bar{t}_{m,s}\|_q > \|\bar{t}_{m,s}\|_2 = \sqrt{m_s}, \quad q > 2. \qquad (2.35)$$

Тоді, підставляючи (2.34) і (2.35) в (2.33), отримаємо

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-q}(2^s)\|\bar{t}_{m,s}\|_q^q \geq$$

$$\geq \sum_{s\in S_1} \psi^{-q}(2^s)\frac{m_s^q}{2^s} + \sum_{s\in S_2} \psi^{-q}(2^s)\sqrt{m_s^q}. \tag{2.36}$$

Для продовження міркувань розглянемо спочатку випадок, коли

$$\sum_{s\in S_1} m_s > \frac{m}{2},$$

і оцінимо належним чином знизу першу суму в правій частині співвідношення (2.36). З умови $m_s > 2^{\frac{2s}{q}}$ випливає, що

$$\max_{s\in S_1} s \leq \log_2\left([m^{q/2}]+1\right). \tag{2.37}$$

Тоді, використовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\frac{m}{2} \leq \sum_{s\in S_1} m_s = \sum_{s\in S_1} \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}m_s\psi(2^s)2^{s/q} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s\in S_1} \psi^{-q}(2^s)2^{-s}m_s^q\right)^{1/q}\left(\sum_{s\in S_1} \psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\right)^{1/q'}. \tag{2.38}$$

Тепер, врахувавши (2.32), (2.33) і (2.36), одержимо

$$L_m(\psi,q) \gg \left(\sum_{s\in S_1} \psi^{-q}(2^s)2^{-s}m_s^q\right)^{1/q}$$

і згідно з (2.38) можемо записати

$$\frac{m}{2} \leq L_m(\psi,q)\left(\sum_{s\in S_1} \psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\right)^{1/q'}.$$

Звідси випливає оцінка

$$L_m(\psi, q) \geq \frac{m}{2}\Bigg(\sum_{s\in S_1} \psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\Bigg)^{-1/q'}. \tag{2.39}$$

З іншого боку, оскільки послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q-\varepsilon_1}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не спадає, то, врахувавши умову (2.37), отримаємо

$$\Bigg(\sum_{s\in S_1} \psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\Bigg)^{1/q'} =$$

$$= \Bigg(\sum_{s\in S_1} \psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}2^{-sq'\varepsilon_1}2^{sq'\varepsilon_1}\Bigg)^{1/q'} \leq$$

$$\leq \Bigg(\psi^{q'}\Big([m^{q/2}]+1\Big)\cdot\Big([m^{q/2}]+1\Big)^{q'/q-q'\varepsilon_1}\cdot\Big([m^{q/2}]+1\Big)^{q'\varepsilon_1}\Bigg)^{1/q'} =$$

$$= \Bigg(\psi^{q'}\Big([m^{q/2}]+1\Big)\cdot\Big([m^{q/2}]+1\Big)^{q'/q}\Bigg)^{1/q'} =$$

$$= \psi\Big([m^{q/2}]+1\Big)\cdot\Big([m^{q/2}]+1\Big)^{1/q}. \tag{2.40}$$

Легко переконатися, що

$$\psi\Big([m^{q/2}]+1\Big) \asymp \psi\Big([m^{q/2}]\Big). \tag{2.41}$$

Дійсно, оскільки з одного боку ψ — додатні і незростаючі, то

$$\psi\Big([m^{q/2}]\Big) > \psi\Big([m^{q/2}]+1\Big). \tag{2.42}$$

А з іншого боку, врахувавши, що $\psi \in \Psi$, можемо записати

$$\psi\Big([m^{q/2}]\Big) \leq C_9\psi\Big(2[m^{q/2}]\Big). \tag{2.43}$$

Тому, звідси одразу випливає, що

$$\psi\Big([m^{q/2}]\Big) \le C_{10}\psi\Big([m^{q/2}]+1\Big). \qquad (2.44)$$

Таким чином, співставивши (2.42) і (2.44), отримаємо співвідношення (2.41) і, відповідно, (2.40) набуває вигляду

$$\left(\sum_{s\in S_1}\psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\right)^{1/q'} \ll \psi\Big([m^{q/2}]\Big)\sqrt{m}.$$

Звідси маємо

$$\left(\sum_{s\in S_1}\psi^{q'}(2^s)2^{sq'/q}\right)^{-1/q'} \gg \psi^{-1}\Big([m^{q/2}]\Big)m^{-1/2} \qquad (2.45)$$

і, підставивши (2.45) у (2.39), одержуємо шукану оцінку:

$$L_m(\psi,q) \gg m\psi^{-1}\Big([m^{q/2}]\Big)m^{-1/2} =$$

$$= \psi^{-1}\Big([m^{q/2}]\Big)\sqrt{m}.$$

Нехай тепер

$$\sum_{s\in S_2} m_s > \frac{m}{2}.$$

Оскільки в такому випадку $m_s \le 2^{\frac{2s}{q}}$, то виберемо s таким чином, щоб виконувалася умова

$$s < \log_2[m^{q/2}] - \frac{3}{2}q. \qquad (2.46)$$

Тоді

$$\sum_{\substack{s\in S_2\\ s<\log_2[m^{q/2}]-\frac{3}{2}q}} m_s \le \sum_{\substack{s\in S_2\\ s<\log_2[m^{q/2}]-\frac{3}{2}q}} 2^{\frac{2s}{q}} \le \frac{m}{8}.$$

Відповідно

$$\sum_{\substack{s\in S_2\\ s\geq \log_2[m^{q/2}]-\frac{3}{2}q}} m_s > \frac{3m}{8}.$$

Тоді, скориставшись нерівністю Гельдера з показником $\frac{q}{2}$, будемо мати

$$\frac{3m}{8} \ll \sum_{\substack{s\in S_2\\ s\geq \log_2[m^{q/2}]-\frac{3}{2}q}} m_s =$$

$$= \sum_{\substack{s\in S_2\\ s\geq \log_2[m^{q/2}]-\frac{3}{2}q}} \psi^{-2}(2^s) m_s \psi^2(2^s) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{s\in S_2} \psi^{-q}(2^s) m_s^{q/2}\right)^{2/q} \left(\sum_{s\geq \log_2[m^{q/2}]-\frac{3}{2}q} \psi^{\frac{2q}{q-2}}(2^s)\right)^{\frac{q-2}{q}}. \qquad (2.47)$$

Далі, оскільки згідно з умовою теореми $\psi(\tau)\tau^{\varepsilon_2}$, $\tau\in\mathbb{N}$, не зростає, то, врахувавши (2.46), отримаємо

$$\left(\sum_{s\geq \log_2[m^{q/2}]-\frac{3}{2}q} \psi^{\frac{2q}{q-2}}(2^s)\right)^{\frac{q-2}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{s\geq \log_2[m^{q/2}]-\frac{3}{2}q} \psi^{\frac{2q}{q-2}}(2^s) 2^{s\varepsilon_2\frac{2q}{q-2}} 2^{-s\varepsilon_2\frac{2q}{q-2}}\right)^{\frac{q-2}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\psi^{\frac{2q}{q-2}}\left(2^{-\frac{3}{2}q}[m^{q/2}]\right)\cdot\left(2^{-\frac{3}{2}q}[m^{q/2}]\right)^{\varepsilon_2\frac{2q}{q-2}}\cdot \sum_{s\geq \log_2[m^{q/2}]-\frac{3}{2}q} 2^{-s\varepsilon_2\frac{2q}{q-2}}\right)^{\frac{q-2}{q}} \leq$$

$$\leq \left(\psi^{\frac{2q}{q-2}}\left(2^{-\frac{3}{2}q}[m^{q/2}]\right)\cdot\left(2^{-\frac{3}{2}q}[m^{q/2}]\right)^{\varepsilon_2\frac{2q}{q-2}}\cdot\left(2^{-\frac{3}{2}q}[m^{q/2}]\right)^{-\varepsilon_2\frac{2q}{q-2}}\right)^{\frac{q-2}{q}} =$$

$$= \psi^2\Bigg(2^{-\frac{3}{2}q}[m^{q/2}]\Bigg). \tag{2.48}$$

А оскільки $\psi \in \Psi$, то, виконавши елементарні перетворення, маємо

$$\psi\Bigg(2^{-\frac{3}{2}q}[m^{q/2}]\Bigg) \le C_{11}\psi\Bigg([m^{q/2}]\Bigg). \tag{2.49}$$

Тепер, врахувавши (2.32), (2.33) і (2.36), одержимо

$$L_m(\psi, q) \gg \left(\sum_{s\in S_2} \psi^{-q}(2^s)\sqrt{m_s^q}\right)^{1/q}. \tag{2.50}$$

Таким чином, співставивши (2.47) – (2.50), можемо записати

$$\frac{3m}{8} \ll L_m^2(\psi, q)\cdot \psi^2\Bigg([m^{q/2}]\Bigg),$$

звідки одержуємо шукану оцінку:

$$L_m(\psi, q) \gg \psi^{-1}\Bigg([m^{q/2}]\Bigg)\sqrt{m}.$$

Теорему 2.4 доведено.

Зауваження 2.4. Якщо $2 < q < \infty$, $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $0 \le r < 1/q$, то відповідне твердження було встановлено у роботі [8].

Одержане співвідношення (2.24) доповнює точні за порядком оцінки величин $L_m(\psi, q)$, $1 < q < \infty$, які були одержані в теоремах 2.2 і 2.3 за інших умов на послідовність ψ.

Співставляючи результати теорем 2.1 і 2.4 бачимо, що при виконанні умов теореми 2.4 на послідовність ψ величина $L_m(\psi, q)$ і L_q–норма ψ–похідної ядра Діріхле відрізняються за порядком.

2.4. Висновки до розділу 2

Даний розділ присвячено дослідженню узагальнено–диференціальних властивостей тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік стосовно відомої проблеми Літтлвуда [95]. У результаті проведених досліджень встановлено, що при $2 < q < \infty$ і деяких умовах на послідовність ψ ядро типу Діріхле з певним вибором гармонік може мати кращі узагальнено–диференціальні властивості, ніж класичне ядро Діріхле.

У підрозділі 2.2 одержано точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле D_m при $1 < q < \infty$.

Підрозділ 2.3 присвячено відшуканню точних за порядком оцінок L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле при $1 < q < \infty$.

Співставляючи результати теореми 2.1 з підрозділу 2.2 з теоремами 2.2, 2.3 підрозділу 2.3, бачимо, що при виконанні умов теорем 2.2 і 2.3 на послідовність ψ, величина $L_m(\psi, q)$ і L_q–норма ψ–похідної ядра Діріхле співпадають за порядком.

Якщо ж порівняти результати теореми 2.1 підрозділу 2.2 з теоремою 2.4 підрозділу 2.3, то виявляємо, що при виконанні умов теореми 2.4 на послідовність ψ, величина $L_m(\psi, q)$ і L_q–норма ψ–похідної ядра Діріхле відрізняються за порядком.

Основні результати цього розділу опубліковано у роботах [13, 15].

Розділ 3

Нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік

Даний розділ присвячено дослідженню нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік і, зокрема, для звичайних тригонометричних поліномів.

3.1. Постановка задач

Поєднавши разом нерівності Бернштейна та Джексона – Нікольського, які пов'язують норми полінома і його похідної в різних метриках, можемо записати наступне твердження (див., наприклад, [101], Р. I, §2):

для довільного тригонометричного полінома із множини

$$T(m) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \right\}$$

та для довільних $r > 0$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$

$$\|t_\beta^{(r)}\|_q \ll m^{r+1/p-1/q} \|t\|_p, \quad 1 \le p \le q \le \infty.$$

У роботах [50, 51, 29] досліджувалася величина

$$\mathcal{T}_m(r,q,p) = \inf_{K_m} \sup_{t \in T^*(m)} \frac{\|t^{(r)}\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 \le p, q \le \infty,$$

де похідна порядку $r \ge 0$ розуміється в сенсі Вейля, K_m — довільний набір різних цілих чисел $j_1, ..., j_m$ і

$$T^*(m) = \left\{ t : t(x) = \sum_{j \in K_m} c_j e^{ijx} \right\}.$$

Нашою метою є встановлення точних за порядком оцінок величини

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) = \inf_{K_m} \sup_{t \in T^*(m)} \frac{\|t^{\psi}\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 < p, q < \infty, \tag{3.1}$$

при певних умовах на послідовності ψ та деяких співвідношеннях між параметрами p і q.

При доведенні основних результатів ми будемо використовувати деякі відомі твердження і теореми, які було вже наведено в підрозділі 2.1 розділу 2.

3.2. Нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів зі звичайним вибором гармонік

У даному підрозділі отримаємо порядкові оцінки величини

$$\sup_{t \in T(m)} \frac{\|t^{\psi}\|_q}{\|t\|_p}$$

для деяких співвідношень між параметрами p та q.

Має місце

Теорема 3.1. *Нехай ψ — додатня і незростаюча послідовність. Тоді мають місце співвідношення*

$$\sup_{t \in T(m)} \frac{\|t^{\psi}\|_q}{\|t\|_q} \asymp \psi^{-1}(m), \quad 1 < q < \infty, \tag{3.2}$$

$$\sup_{t \in T(m)} \frac{\|t^{\psi}\|_q}{\|t\|_p} \ll \psi^{-1}(m) m^{1/p - 1/q}, \quad 1 < p < q < \infty. \tag{3.3}$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$, то

$$\sup_{t\in T(m)} \frac{\|t^{\psi}\|_q}{\|t\|_p} \asymp \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}, \quad 1 < p < q < \infty. \tag{3.4}$$

Доведення. Оцінки зверху у співвідношенні (3.2) встановлено в твердженні A. Оцінка (3.3) є наслідком оцінки зверху в (3.2) і теореми E, тобто

$$\|t^{\psi}\|_q \ll \psi^{-1}(m)\|t\|_q \ll \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}\|t\|_p.$$

Тепер перейдемо до встановлення відповідних оцінок знизу. Для цього наведемо приклади поліномів, для яких реалізуються оцінки знизу у співвідношеннях (3.2) і (3.4).

Нехай спочатку $p = q$ і ψ — додатня і незростаюча послідовність. Тоді розглянемо поліном

$$\bar{t}(x) = \sin mx.$$

Згідно з означенням ψ–похідної для полінома $\bar{t}$ маємо

$$\bar{t}^{\psi}(x) = \psi^{-1}(m) \sin mx$$

і відповідно

$$\|\bar{t}^{\psi}\|_q \asymp \psi^{-1}(m)\|\sin mx\|_q = \psi^{-1}(m)\|\bar{t}\|_q.$$

Нехай тепер $p < q$. У цьому випадку по заданому m виберемо $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ таке, щоб $2^{\tilde{s}-1} \le m \le 2^{\tilde{s}}$. Розглянемо поліном

$$\tilde{t}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k\in\rho(\tilde{s})} e^{ikx},$$

де $\rho(\tilde{s}) = \{k : 2^{\tilde{s}-1} \le |k| < 2^{\tilde{s}}\}$. Тоді згідно з означенням ψ–похідної для полінома $\tilde{t}$ можемо записати

$$\tilde{t}^{\psi}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k\in\rho(\tilde{s})} \psi^{-1}(|k|) e^{ikx} = \sum_{k\in\rho^{+}(\tilde{s})} \psi^{-1}(k) \cos kx,$$

де $\rho^+(\tilde{s}) = \{k : 2^{\tilde{s}-1} \le k < 2^{\tilde{s}}\}$.

Далі розглянемо поліном вигляду

$$\tilde{t}^*(x) = \sum_{k\in\rho^+(\tilde{s})} \psi^{-1}(2^{\tilde{s}}) \cos kx,$$

котрий отримується при дії оператора $\Lambda_{\tilde{s}}$, породженого послідовністю

$$\{\lambda_{k,\tilde{s}}\} = \left\{\frac{\psi(k)}{\psi(2^{\tilde{s}})}\right\}, k \in \rho^+(\tilde{s}),$$

на поліном $\tilde{t}^\psi$, тобто

$$\tilde{t}^*(x) = \Lambda_{\tilde{s}}\tilde{t}^\psi(x). \tag{3.5}$$

Легко переконатися, що числа $\{\lambda_{k,\tilde{s}}\}$ є множниками Марцинкевича, тобто вони задовольняють умови 1) і 2) теореми Є.

Дійсно, оскільки $\psi \in \Psi$ і $k \in \rho^+(\tilde{s})$, то:

$$1)\ |\lambda_{k,\tilde{s}}| = \left|\frac{\psi(k)}{\psi(2^{\tilde{s}})}\right| \le \frac{\psi(2^{\tilde{s}-1})}{\psi(2^{\tilde{s}})} \le C_1,$$

$$2)\ \sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1} |\lambda_{k,\tilde{s}} - \lambda_{k+1,\tilde{s}}| =$$

$$= \sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1} \left|\frac{\psi(k)}{\psi(2^{\tilde{s}})} - \frac{\psi(k+1)}{\psi(2^{\tilde{s}})}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\psi(2^{\tilde{s}})} \sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1} \Big(\psi(k) - \psi(k+1)\Big) \le$$

$$\le \frac{1}{\psi(2^{\tilde{s}})}\Big(\psi(2^{\tilde{s}-1}) - \psi(2^{\tilde{s}})\Big) \le$$

$$\le \frac{\psi(2^{\tilde{s}-1})}{\psi(2^{\tilde{s}})} \le C_1.$$

Тоді згідно з теоремою Є має місце оцінка

$$\|\Lambda_{\tilde{s}}\tilde{t}^{\psi}\|_q \ll \|\tilde{t}^{\psi}\|_q \tag{3.6}$$

і тому, співставивши співвідношення (3.5) і (3.6), отримаємо

$$\|\tilde{t}^{\psi}\|_q \gg \|\tilde{t}^{*}\|_q. \tag{3.7}$$

Таким чином, для $\|\tilde{t}^{*}\|_q$ знаходимо

$$\|\tilde{t}^{*}\|_q = \psi^{-1}(2^{\tilde{s}})\Big\|\sum_{k\in\rho^{+}(\tilde{s})}\cos kx\Big\|_q =$$

$$= \psi^{-1}(2^{\tilde{s}})\Big\|\sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1}\cos kx\Big\|_q.$$

Далі, скористаємося співвідношенням (див., наприклад [73, ч. 2, с. 42]):

$$\Big\|\sum_{k=m}^{l}\cos kt\Big\|_q \asymp (l-m)^{1-1/q},$$

$m, l \in \mathbb{N}$, $l > m$ і $1 < q < \infty$, згідно з яким можемо записати

$$\Big\|\sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1}\cos kx\Big\|_q \asymp 2^{(\tilde{s}-1)(1-1/q)} \asymp 2^{\tilde{s}(1-1/q)}.$$

Відповідно для $\|\tilde{t}^{*}\|_q$ отримаємо оцінку

$$\|\tilde{t}^{*}\|_q \asymp \psi^{-1}(2^{\tilde{s}})2^{\tilde{s}(1-1/q)}. \tag{3.8}$$

Таким чином, співставивши (3.7) і (3.8) та врахувавши, що $\psi(2^{\tilde{s}}) \asymp \psi(m)$ (оскільки $\psi \in \Psi$ і $2^{\tilde{s}-1} \le m \le 2^{\tilde{s}}$), будемо мати

$$\|\tilde{t}^{\psi}\|_q \gg \psi^{-1}(2^{\tilde{s}})2^{\tilde{s}(1-1/q)} \asymp$$

$$\asymp \psi^{-1}(2^{\tilde{s}})2^{\tilde{s}(1-1/q)}2^{-\tilde{s}(1-1/p)}\left\|\sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1}\cos kx\right\|_p \asymp$$

$$\asymp \psi^{-1}(m)m^{1/p-1/q}\left\|\sum_{k=2^{\tilde{s}-1}}^{2^{\tilde{s}}-1}\cos kx\right\|_p =$$

$$= \psi^{-1}(m)m^{1/p-1/q}\|\tilde{t}\|_p.$$

Теорему 3.1 доведено.

Зауваження 3.1. Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $r > 0$, $1 < p \le q < \infty$, то порядки відповідних величин встановлено В. М. Темляковим (див., наприклад, [83, с. 23]).

3.3. Нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік

У даному підрозділі одержимо твердження, у яких встановлюються порядкові оцінки величин $\mathcal{T}_m(\psi, q, p)$ при деяких співвідношеннях між параметрами p і q.

Теорема 3.2. *Нехай $2 \le p \le q < \infty$, ψ — додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедлива оцінка*

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) \ll \psi^{-1}(m)m^{1/p-1/q}.$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$ і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, то

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) \asymp \psi^{-1}(m)m^{1/p-1/q}.$$

Доведення. Оцінка зверху випливає з відповідного результату теореми 3.1.

Доведемо оцінку знизу. Нехай $K_m = \{j_1, ..., j_m\}$ — довільний набір із m різних цілих чисел і $m_s = |K_m \cap \rho(s)|$ — кількість елементів даного набору, які потрапляють до множини $\rho(s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$. Зрозуміло, що у подальших міркуваннях ми розглядаємо тільки ті $s \in \mathbb{Z}_+$, для яких $K_m \cap \rho(s) \neq \varnothing$, і тому кількість таких s є скінченна.

Розглянемо функцію

$$f_{s,m}(x) = \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} e^{ilx}$$

і покажемо, що виконується співвідношення

$$\|(f_{s,m})^{\psi}\|_q \gg \psi^{-1}(2^s)\|f_{s,m}\|_q.$$

З цією метою для $s \in \mathbb{N}$ розглянемо послідовність $\{\lambda_{l,s}\}$, яка задається формулою:

$$\{\lambda_{l,s}\} = \left\{\frac{\psi(|l|)}{\psi(2^s)}\right\}, \ l \in K_m \cap \rho(s).$$

Переконаємося, що послідовність $\{\lambda_{l,s}\}$ задовольняє умови 1) та 2) теореми Є. Зауважимо, що для цього достатньо перевірити виконання цих умов для додатних l таких, що $l \in K_m \cap \rho(s)$.

Оскільки $\psi \in \Psi$, то:

$$1) \ |\lambda_{l,s}| = \left|\frac{\psi(l)}{\psi(2^s)}\right| \leq \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \leq C_1,$$

$$2) \ \sum_{l=2^{s-1}}^{2^s-1} |\lambda_{l,s} - \lambda_{l+1,s}| = \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} |\lambda_{l,s} - \lambda_{l+1,s}| =$$

$$= \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \left|\frac{\psi(l)}{\psi(2^s)} - \frac{\psi(l+1)}{\psi(2^s)}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \Big(\psi(l) - \psi(l+1)\Big) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\psi(2^s)}\Big(\psi(2^{s-1}) - \psi(2^s)\Big) \leq$$

$$\leq \frac{\psi(2^{s-1})}{\psi(2^s)} \leq C_1.$$

Тепер подіємо мультиплікатором $\Lambda_{l,s}$, який задається послідовністю $\{\lambda_{l,s}\}$, на поліном

$$\Big(f^*_{s,m}\Big)^{\psi}(x) = \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(|l|)e^{ilx}.$$

У результаті одержимо

$$\Lambda_{l,s}\Big(f^*_{s,m}\Big)^{\psi}(x) = \Lambda_{l,s} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(|l|)e^{ilx} =$$

$$= \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \frac{\psi(|l|)}{\psi(2^s)} \psi^{-1}(|l|)e^{ilx} =$$

$$= \frac{1}{\psi(2^s)} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} e^{ilx} = \frac{1}{\psi(2^s)} f_{s,m}(x).$$

Звідси маємо

$$\Big\|\Lambda_{l,s}\Big(f^*_{s,m}\Big)^{\psi}\Big\|_q = \frac{1}{\psi(2^s)}\Big\|f_{s,m}\Big\|_q. \tag{3.9}$$

З іншого боку, згідно з теоремою Є

$$\Big\|\Lambda_{l,s}\Big(f^*_{s,m}\Big)^{\psi}\Big\|_q = \Big\|\Lambda_{l,s} \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(|l|)e^{ilx}\Big\|_q \leq$$

$$\leq C_2 \Big\| \sum_{l \in K_m \cap \rho(s)} \psi^{-1}(|l|)e^{ilx}\Big\|_q = C_2 \Big\|\Big(f_{s,m}\Big)^{\psi}\Big\|_q. \tag{3.10}$$

Отже, співставивши (3.9) і (3.10), отримуємо потрібне співвідношення

$$\|(f_{s,m})^{\psi}\|_q \gg \psi^{-1}(2^s)\|f_{s,m}\|_q. \tag{3.11}$$

Далі, скориставшись теоремою E, можемо записати

$$\psi^{-1}(2^s)\|f_{s,m}\|_q \gg \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}\|f_{s,m}\|_\infty =$$

$$= \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}m_s. \tag{3.12}$$

Тоді з (3.11) і (3.12) маємо

$$\|(f_{s,m})^{\psi}\|_q \gg \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}m_s. \tag{3.13}$$

З іншого боку, в силу теореми Г при $2 \le p < \infty$

$$\|f_{s,m}\|_p \ll \left(\sum_{l\in K_m\cap\rho(s)} |\hat{f}_{s,m}|^{p'}\right)^{1/p'} =$$

$$= m_s^{1/p'} = m_s^{1-1/p}. \tag{3.14}$$

Тому згідно з (3.13) і (3.14) будемо мати

$$\sup_{f\in T^*(m)} \frac{\|f^{\psi}\|_q}{\|f\|_p} \ge$$

$$\ge \sup_{\substack{f\in T^*(m)\cap T(\rho(s)),\\ s\in\mathbb{Z}_+}} \frac{\|f^{\psi}\|_q}{\|f\|_p} \ge$$

$$\ge \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\|(f_{s,m})^{\psi}\|_q}{\|f_{s,m}\|_p} \gg$$

$$\gg \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{\psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}m_s}{m_s^{1-1/p}} =$$

$$= \sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \psi^{-1}(2^s)2^{-s/q}m_s^{1/p}, \tag{3.15}$$

де

$$T(\rho(s)) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k \in \rho(s)} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Позначимо

$$I_3 = \sup_{s \in \mathbb{Z}_+} \psi^{-1}(2^s) 2^{-s/q} m_s^{1/p}, \tag{3.16}$$

де $m_s \leq 2^s$ і

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}_+} m_s = m.$$

Виберемо $\mu > 0$ так, щоб $2^{\mu-1} \leq m < 2^\mu$ і

$$\sum_{s \leq \mu} m_s \leq \sum_{s \leq \mu} 2^s \leq C_3 2^\mu \leq \frac{m}{2}.$$

У такому випадку повинно виконуватися співвідношення

$$\sum_{s > \mu} m_s \geq C_4 \frac{m}{2}. \tag{3.17}$$

Крім цього, з (3.16) випливає, що $\forall s \in \mathbb{Z}_+, K_m \cap \rho(s) \neq \varnothing$

$$m_s \leq I_3^p \psi^p(2^s) 2^{sp/q}. \tag{3.18}$$

і тому, згідно з (3.17) і (3.18), оскільки послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, отримаємо

$$\frac{m}{2} \ll \sum_{s > \mu} m_s \leq I_3^p \sum_{s > \mu} \psi^p(2^s) 2^{sp/q} =$$

$$= I_3^p \sum_{s > \mu} \psi^p(2^s) 2^{sp/q} 2^{s\varepsilon p} 2^{-s\varepsilon p} \ll$$

$$\ll I_3^p \psi^p(2^\mu) 2^{\mu p/q} 2^{\mu\varepsilon p} \sum_{s>\mu} 2^{-s\varepsilon p} \ll$$

$$\ll I_3^p \psi^p(2^\mu) 2^{\mu p/q} 2^{\mu\varepsilon p} 2^{-\mu\varepsilon p} =$$

$$= I_3^p \psi^p(2^\mu) 2^{\mu p/q}. \tag{3.19}$$

З (3.19) знаходимо

$$I_3 \gg \psi^{-1}(2^\mu) 2^{-\mu/q} m^{1/p}$$

і, врахувавши, що $2^{\mu-1} \leq m < 2^\mu$, отримаємо

$$I_3 \gg \psi^{-1}(m) m^{-1/q} m^{1/p} = \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}. \tag{3.20}$$

Таким чином, співставивши (3.15), (3.16) і (3.20) приходимо до шуканої оцінки знизу:

$$\sup_{f \in T^*(m)} \frac{\|f^\psi\|_q}{\|f\|_p} \gg \psi^{-1}(m) m^{1/p-1/q}.$$

Теорему 3.2 доведено.

Теорема 3.3. *Нехай $1 < q \leq p < \infty$, ψ — додатня і незростаюча послідовність. Тоді справедлива оцінка*

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) \ll \psi^{-1}(m).$$

Якщо ж $\psi \in \Psi$, то

$$\mathcal{T}_m(\psi, q, p) \asymp \psi^{-1}(m).$$

Доведення. Оцінка зверху випливає із теореми 3.1.

Доведемо оцінку знизу. Нехай, як і вище, $K_m = \{j_1, ..., j_m\}$ — довільний набір різних цілих чисел, $m_s = |K_m \cap \rho(s)|$ — кількість елементів даного набору, які потрапляють до множини $\rho(s)$, $s \in \mathbb{Z}_+$.

Позначимо

$$\overline{K}_m = K_m \cap (\mathring{\mathbb{Z}} \backslash K),$$

де

$$K = \{\rho(s), s \le \mu\},$$

а величина μ вибрана з умови

$$|K| = \sum_{s \le \mu} 2^s \le C_5 2^\mu \le \frac{m}{2}$$

і $2^{\mu-1} \le m < 2^\mu$. Тоді

$$|K| \asymp m,$$

де $|K|$ — кількість елементів множини K. Оскільки

$$\sum_{s > \mu} m_s \ge C_6 \frac{m}{2},$$

то

$$|\overline{K}_m| \asymp m.$$

Нехай l — довільне число з множини $\overline{K}_m$. Тоді можемо записати

$$\sup_{f \in T^*(m)} \frac{\|f^\psi\|_q}{\|f\|_p} \ge \frac{\|(e^{ilx})^\psi\|_q}{\|e^{ilx}\|_p}. \tag{3.21}$$

Оскільки

$$\|(e^{ilx})^\psi\|_q \asymp \psi^{-1}(|l|) \|e^{ilx}\|_q, \tag{3.22}$$

то, враховуючи, що $l \in \rho(s)$ при деякому $s > \mu$ і $2^{\mu-1} \le m < 2^\mu$, для правої частини співвідношення (3.22) отримаємо

$$\psi^{-1}(|l|)\|e^{ilx}\|_q > \psi^{-1}(2^s)\|e^{ilx}\|_q >$$

$$> \psi^{-1}(2^\mu)\|e^{ilx}\|_q \asymp \psi^{-1}(m)\|e^{ilx}\|_q.$$

Тому, продовжуючи (3.21), маємо

$$\frac{\|(e^{ilx})^\psi\|_q}{\|e^{ilx}\|_p} \gg \frac{\psi^{-1}(m)\|e^{ilx}\|_q}{\|e^{ilx}\|_p} \asymp \psi^{-1}(m).$$

Теорему 3.3 доведено.

Зауваження 3.2. Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, то відповідні результати до теорем 3.2, 3.3 було встановлено у роботі [51].

3.4. Висновки до розділу 3

Даний розділ присвячено дослідженню нерівностей типу Бернштейна – Нікоьського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік при різних співвідношеннях між параметрами p і q.

У підрозділі 3.2 одержано порядкові оцінки величин вигляду

$$\sup_{t\in T(m)} \frac{\|t^{\psi}\|_q}{\|t\|_p}, \quad 1 < p \le q < \infty.$$

Підрозділ 3.3 присвячено дослідженню нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік і порівнянню цих результатів з теоремою 3.1 підрозділу 3.2.

Співставивши результати теореми 3.1 з підрозділу 3.2 з теоремами 3.2, 3.3 підрозділу 3.3, бачимо, що при виконанні умов теорем 3.2 і 3.3 на послідовності ψ величини $\mathcal{T}_m(\psi, q, p)$ і $\sup\limits_{t\in T(m)} \|t^{\psi}\|_q/\|t\|_p$ співпадають за порядком.

Основні результати цього розділу опубліковано у роботі [14].

Розділ 4

Колмогоровські та ортопроекційні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q

У цьому розділі встановлюються точні за порядком оцінки колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q. Крім цього, одержано також точні за порядком оцінки апроксимативної характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, яка, у певному сенсі, є близькою до ортопроекційного поперечника.

4.1. Постановка задач та допоміжні твердження

У 1936 р. А. М. Колмогоров [97] для центрально–симетричної множини F у банаховому просторі X розглянув величину

$$d_m(F,X) = \inf_{L_m \in Lin_m(X)} \sup_{f\in F} \inf_{u\in L_m} \|f-u\|_X, \tag{4.1}$$

де інфімум шукається по всіх лінійних підпросторах L_m простору X, розмірності не більшої ніж m. Згодом ця величина отримала назву колмогоровського поперечника множини F у просторі X.

Узагальнюючи методи дискретизації в оцінках поперечників (див. роботи [77, 31, 38]), В. Є. Майоров показав [46], що в деяких випадках для отримання порядкових оцінок колмогоровських поперечників класів W^r_p у просторі L_q можна скористатися відповідними оцінками колмогоровських поперечників скінченновимірних множин B^n_p у просторі l^n_q, де

$$B^n_p = \{x : \|x\|_{l^n_p} \le 1\}$$

— одинична куля в n–вимірному банаховому просторі з нормою

$$\|x\|_{l_p^n} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Як вже зазначалося вище, на теперішній час дослідження колмогоровських поперечників різноманітних класів періодичних функцій як однієї, так і багатьох змінних мають велику історію, з якою можна ознайомитися, наприклад, у монографіях [87, 83, 43, 88, 101, 60].

Нехай $\{u_j\}_{j=1}^{m}$ — ортонормована система функцій $u_j \in L_\infty$, $j = \overline{1, m}$. Кожній функції $f \in L_q$, $1 \leq q \leq \infty$, поставимо у відповідність апарат наближення вигляду

$$\sum_{j=1}^{m} (f, u_j) u_j(x),$$

тобто ортогональну проекцію функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_j\}_{j=1}^{m}$. Тут і далі

$$(f, u_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{u_j(x)} dx,$$

де $\overline{u_j}$ — функції комплексно–спряжені до u_j.

Якщо $F \subset L_q$ — деякий функціональний клас, то величина

$$d_m^{\perp}(F, L_q) = \inf_{\{u_j\}_{j=1}^{m}} \sup_{f \in F} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} (f, u_j) u_j \right\|_q \tag{4.2}$$

називається ортопроекційним поперечником цього класу у просторі L_q.

Для встановлення оцінок знизу ортопроекційних поперечників В. М. Темляковим (див., наприклад, [83]) було запропоновано розглядати апроксимативні характеристики, які, у певному сенсі, є близькими до ортопроекційних поперечників. Означимо їх.

Нехай F — деякий функціональний клас простору L_q. Розглянемо наступну величину

$$d_m^B(F, L_q) = \inf_{G \in \mathcal{L}_m(B)_q} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f - Gf\|_q. \tag{4.3}$$

Тут через $\mathcal{L}_m(B)_q$ позначено множину лінійних операторів G, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а область значення міститься у підпросторі простору L_q розмірності m;

б) існує число $B \geq 1$ таке, що для всіх k виконується нерівність

$$\|Ge^{ikx}\|_2 \leq B.$$

Зауважимо, що до $\mathcal{L}_m(1)_2$ належать, зокрема, оператори ортогонального проектування на підпростори розмірності m, а також оператори, які задаються по ортонормованій системі функцій за допомогою мультиплікатора, котрий означається послідовністю $\{\lambda_l\}$ такою, що $|\lambda_l| \leq 1$ для всіх l.

Із означення величин $d_m(F, L_q)$, $d_m^{\perp}(F, L_q)$ і $d_m^B(F, L_q)$ випливає, що вони пов'язані між собою співвідношенням

$$d_m^B(F, L_q) \leq d_m^{\perp}(F, L_q), \tag{4.4}$$

$$d_m(F, L_q) \leq d_m^{\perp}(F, L_q)$$

і, зокрема, при $q = 2$

$$d_m(F, L_2) = d_m^{\perp}(F, L_2).$$

Зі співвідношення (4.4) видно, що оцінки знизу величин $d_m^B(F, L_q)$ можуть слугувати оцінками знизу для ортопроекційних поперечників $d_m^{\perp}(F, L_q)$ і, навпаки, оцінки зверху для поперечників $d_m^{\perp}(F, L_q)$ можна використовувати для оцінок зверху величин $d_m^B(F, L_q)$.

При доведенні оцінок знизу величин $d_m^B(F, L_q)$ будемо використовувати метод, який розробив В. М. Темляков при встановленні оцінок цих величин для деяких класів функцій багатьох змінних (див., наприклад, [83, 84, 101]). Суть цього методу полягає в побудові функцій з класів F, які "погано" наближаються за допомогою операторів G.

З детальнішою інформацією стосовно дослідження величин (4.2) і (4.3) можна ознайомитись у роботах [26, 84, 1, 58, 59, 92, 70, 61, 34], а також у монографіях [83, 101, 60].

Метою нашої роботи є знаходження точних за порядком оцінок величин

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) = \inf_{L_m \subset L_q} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \inf_{\varphi \in L_m} \|f - \varphi\|_q$$

і

$$d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) = \inf_{\{u_j\}_{j=1}^m} \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} (f, u_j) u_j \right\|_q$$

для деяких співвідношень між параметрами p і q та при певних умовах на поведінку послідовностей ψ, котрі характеризують гладкість функцій, які належать класу $L^{\psi}_{\beta,p}$.

При доведенні основних результатів розділу 4 ми будемо використовувати деякі відомі твердження (деякі з них вже було наведено в підрозділі 2.1 розділу 2).

Нехай $s \in \mathbb{N}$ і

$$\rho(s) = \big\{ k \in \mathbb{Z} : \ 2^{s-1} \le |k| < 2^s \big\}.$$

Тоді для $f \in L_1$ покладемо

$$\delta_s(f) := \delta_s(f, x) = \sum_{k \in \rho(s)} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Лема Б [57]. *Нехай $\psi \in \Psi$ і $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді при $1 < q < \infty$ справедливе співвідношення*

$$\|\delta_s(f_\beta^\psi)\|_q \asymp \psi^{-1}(2^s)\|\delta_s(f)\|_q.$$

Нехай l_p^n означає простір всеможливих упорядкованих систем з n дійсних чисел, норма в якому означається таким чином

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i| \ , & p = \infty. \end{cases}$$

і $B_p^n = \{x : \|x\|_{l_p^n} \leq 1\}$ — одинична куля в цьому просторі.

Наступне твердження є відомою теоремою Марцинкевича – Зігмунда [36, с. 46], яка адаптована до наших позначень, і в багатовимірному випадку наведена в роботі [25].

Теорема Ж. *Нехай $1 < p < \infty$ і $s \in \mathbb{N}$. Тоді між простором тригонометричних поліномів вигляду*

$$\delta_s(f) = \sum_{k\in\rho(s)} c_k e^{ikx}$$

і простором $\mathbb{R}^{2^s}$ можна встановити ізоморфізм шляхом співставлення поліному $\delta_s(f)$ системи чисел

$$\delta_s f^j = \left\{ f_n\left(\frac{2\pi j}{2^s}\right)\right\} \in \mathbb{R}^{2^s}, \quad f_n(t) = \sum_{sign\, k = sign\, n} c_k e^{ikt},$$

$$n = \pm 1, \quad j = 1, ..., 2^{s-1},$$

і при цьому буде справедливе порядкове співвідношення

$$\|\delta_s(f)\|_p \asymp \left(2^{-s}\sum_{j=1}^{2^s} |\delta_s f^j|^p\right)^{1/p}.$$

Лема В. *Нехай X — банаховий простір, $W, W_1, ..., W_l, ...$ — підмножини простору X і $N_l \in \mathbb{Z}_+$. Тоді якщо*

$$\sum_l N_l \le N \quad i \;\; W \subset \bigcup_l W_l,$$

то

$$d_N(W, X) \le \sum_l d_{N_l}(W_l, X).$$

Дана лема випливає безпосередньо із означення колмогоровського поперечника. Її формулювання наводиться в роботах В. Є. Майорова [47], В. М. Тихомирова [89] і пізніше вона неодноразово використовувалася в роботах багатьох авторів.

Лема Г [39]. *Нехай $m < n$ і $\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) / \left(1 - \frac{2}{q}\right)$. Тоді*

$$d_m(B_p^n, l_q^n) \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} min\{1, n^{2\alpha/q} m^{-\alpha}\}, & 2 \le p < q < \infty, \\ max\Big\{n^{1/q-1/p}, min\{1, n^{1/q} m^{-1/2}\}\sqrt{1 - \frac{m}{n}}\Big\}, & 1 \le p < 2 \le q < \infty. \end{cases}$$

Лема Д [57]. *Нехай $1 < p, q < \infty$ і $b = (1/p - 1/q)_+$. Тоді*

$$L^{\psi}_{\beta,p} \subset C_1(p,q) L^{\tilde{\psi}}_{\beta,q},$$

де $\tilde{\psi}(k) = \psi(k) k^b$, $c_+ = max\{c, 0\}$ і $C_1(p,q)$ — константа, залежна від p і q.

Нехай $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L_q,\ 1 \le q \le \infty$, тоді через $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q$ будемо позначати величину

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q = \sup_{f \in L^{\psi}_{\beta,p}} \left\| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} \right\|_q.$$

Зазначимо, що величини $d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ і $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q$, де $m = 2n+1$, пов'язані між собою нерівністю

$$d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \leq \mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_q. \tag{4.5}$$

Теорема З [75]. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує* $\varepsilon > 0$ *таке, що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{1/p-1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді справедливе співвідношення*

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{1/p-1/q}.$$

Лема Е [84]. *Нехай* A *— лінійний оператор, такий, що для довільного* k

$$Ae^{ikx} = \sum_{l=1}^{m} a_l^k \psi_l(x), \tag{4.6}$$

де $\{\psi_l(x)\}_{l=1}^m$ *— ортонормована система функцій. Тоді для довільного тригонометричного полінома* t *виконується нерівність*

$$\min_{y=x} ReAt(x-y) \leq \left(m\sum_{l=1}^{m}\sum_{k}|a_l^k\hat{t}(k)|^2\right)^{1/2}. \tag{4.7}$$

Теорема И [33]. *Нехай* $1 < q \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \Psi \cap \Psi_{q'}$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, *де* $\Psi_{q'}$ *— множина монотонно незростаючих послідовностей* ψ, *для яких існує стала* $\alpha > \frac{1}{q'}$ *така, що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{\alpha}$, $\tau \in \mathbb{N}$, *спадає, і виконується одна з умов*

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \geq 0,\ k \in \mathbb{N}, \tag{4.8}$$

або

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right) \leq 0,\ k \in \mathbb{N}, \tag{4.9}$$

де

$$\Delta^2\left(\frac{1}{\psi(k)}\right)=\frac{1}{\psi(k)}-\frac{2}{\psi(k+1)}+\frac{1}{\psi(k+2)}.$$

Тоді справедливе наступне співвідношення

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{\frac{1}{q'}}.$$

Твердження Б [73, ч. 2, с. 119]. *Нехай ψ — довільна незростаюча послідовність невід'ємних чисел, для яких виконується одна з умов (4.8) або (4.9) і, крім того,*

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\sum_{k=1}^{m-1}\psi(m)(k\psi(k))^{-1}=O(1), \tag{4.10}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена по m. Тоді для довільного тригонометричного полінома $t\in T(m)$ виконується нерівність

$$\|t^{\psi}_{\beta}\|_1\le O(1)|\psi(m)|^{-1}\|t\|_1,$$

в якій величина $O(1)$ — рівномірно обмежена по m і t.

Теорема І [33]. *Нехай $1<p<\infty$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\psi\in\Psi\cap\Psi_p$, де Ψ_p — множина монотонно незростаючих послідовностей ψ, для яких існує стала $\alpha>\frac{1}{p}$ така, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{\alpha}$, $\tau\in\mathbb{N}$, спадає. Тоді справедливе співвідношення*

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty}\asymp\psi(m)m^{1/p}.$$

Теорема Ї [75]. *Нехай $1<q\le p<\infty$, $\psi\in\Psi$, $\beta\in\mathbb{R}$. Тоді справедливе співвідношення*

$$\mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q\asymp\psi(m).$$

4.2. Колмогоровські поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q

У цьому підрозділі встановимо точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q.

Нехай $1 < p < q < \infty$. Тоді через $\Psi_{\varepsilon,p,q}$ позначимо множину послідовностей ψ, які задовольняють умови

1) $\psi \in \Psi$;

2) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $\psi(\tau)\tau^{1/p-1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає.

Справедливе твердження

Теорема 4.1. *Нехай послідовність ψ задовольняє умови:*

а) при $2 \le p < q < \infty$ $\psi \in \Psi_{\varepsilon,p,q}$ і, крім того, існує $\varepsilon_1 > 0$ таке, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})/(1-\frac{2}{q})-\varepsilon_1}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не спадає;

б) при $1 < p \le 2 < q < \infty$ $\psi \in \Psi_{\varepsilon,p,q}$ і, крім того, існує $\varepsilon_2 > 0$ таке, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/p-\varepsilon_2}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не спадає.

Тоді для будь–якого $\beta \in \mathbb{R}$

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}. \tag{4.11}$$

Доведення. Доведення будемо проводити методом дискретизації, тобто зведемо задачу про поперечник функціонального класу $L^{\psi}_{\beta,p}$ до оцінок поперечників відповідних дискретних множин.

Спочатку отримаємо оцінку зверху для випадку а). За заданим m виберемо n так, щоб $2^n \asymp m^{q/2}$ і для $l \in \mathbb{N}$ покладемо

$$m_l = \begin{cases} m2^{-(n-l)\gamma}, & l \le n, \\ 0, & l > n, \end{cases}$$

де $\gamma > 0$ — деяке число, яке буде вказано нижче. Тоді

$$\sum_{l=1}^{n} m_l \le C_1 m.$$

Далі, нехай $T(\rho(l))$, $l \in \mathbb{N}$, — множина тригонометричних поліномів вигляду

$$T(\rho(l)) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k \in \rho(l)} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Тоді в силу леми Б та теореми Ж для будь–якої функції $f \in L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(\rho(l))$ будемо мати

$$1 \geq \|f^{\psi}_{\beta}\|_p \asymp$$

$$\asymp \psi^{-1}(2^l)\|\delta_l(f)\|_p \asymp$$

$$\asymp \psi^{-1}(2^l)\left(2^{-l}\sum_{j=1}^{2^l}|\delta_l f^j|^p\right)^{1/p} \asymp$$

$$\asymp \psi^{-1}(2^l)2^{-l/p}\left(\sum_{j=1}^{2^l}|\delta_l f^j|^p\right)^{1/p}. \tag{4.12}$$

Таким чином, згідно з (4.12) для $f \in L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(\rho(l))$ справедливе співвідношення

$$\left(\sum_{j=1}^{2^l}|\delta_l f^j|^p\right)^{1/p} \leq C_2(p)\psi(2^l)2^{l/p},$$

де $C_2(p)$ — константа, залежна від p.

Далі, в силу леми Б для $g \in L_q \cap T(\rho(l))$ справедливі співвідношення

$$\|g\|_q = \|\delta_l(g)\|_q \asymp$$

$$\asymp \left(2^{-l}\sum_{j=1}^{2^l}|\delta_l g^j|^q\right)^{1/q} \asymp$$

$$\asymp 2^{-l/q}\bigg(\sum_{j=1}^{2^l}|\delta_l g^j|^q\bigg)^{1/q}. \tag{4.13}$$

Тепер, скориставшись лемою В, можемо записати

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ll$$

$$\ll \sum_{l} d_{m_l}(L^{\psi}_{\beta,p}\cap T(\rho(l)), L_q\cap T(\rho(l))) =$$

$$= \sum_{l\leq n} d_{m_l}(L^{\psi}_{\beta,p}\cap T(\rho(l)), L_q\cap T(\rho(l)))+$$

$$+\sum_{l>n} d_{m_l}(L^{\psi}_{\beta,p}\cap T(\rho(l)), L_q\cap T(\rho(l))) =$$

$$= I_3 + I_4. \tag{4.14}$$

Оцінимо отримані доданки. Для I_4 в силу вибору чисел m_l маємо

$$I_4 = \sum_{l>n} \|\delta_l(f)\|_q. \tag{4.15}$$

Враховуючи, що $f\in L^{\psi}_{\beta,p}$, і використовуючи теорему З, можемо записати

$$\|\delta_l(f)\|_q = \|S_{2^l}(f) - S_{2^{l-1}}(l) + f - f\|_q \leq$$

$$\leq \|f - S_{2^l}(f)\|_q + \|f - S_{2^{l-1}}(f)\|_q \ll$$

$$\ll \psi(2^l)2^{l(1/p-1/q)}. \tag{4.16}$$

Підставивши (4.16) в (4.15), отримаємо

$$I_4 \ll \sum_{l>n} \psi(2^l) 2^{l(1/p-1/q)}.$$

Оскільки за умовою теореми послідовність $\psi(\tau)\tau^{1/p-1/q+\varepsilon_1}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає, то оцінка величини I_4 продовжується наступним чином

$$I_4 \ll \sum_{l>n} \psi(2^l) 2^{l(1/p-1/q)} =$$

$$= \sum_{l>n} \psi(2^l) 2^{l(1/p-1/q+\varepsilon_1)} 2^{-l\varepsilon_1} \leq$$

$$\leq \psi(2^n) 2^{n(1/p-1/q+\varepsilon_1)} \sum_{l>n} 2^{-l\varepsilon_1} \ll$$

$$\ll \psi(2^n) 2^{n(1/p-1/q+\varepsilon_1)} 2^{-n\varepsilon_1} =$$

$$= \psi(2^n) 2^{n(1/p-1/q)}. \tag{4.17}$$

Оцінимо тепер доданок I_3. В силу зазначеного вище ізоморфізму між простором поліномів $T(\rho(l))$ і скінченновимірним простором $\mathbb{R}^{2^l}$, згідно з оцінками (4.12) і (4.13), можемо записати

$$I_3 \ll \sum_{l \leq n} \psi(2^l) 2^{l(1/p-1/q)} d_{m_l}(B_p^{2^l}, l_q^{2^l}). \tag{4.18}$$

Далі, скориставшись лемою Г, будемо мати

$$d_{m_l}(B_p^{2^l}, l_q^{2^l}) \ll 2^{2l\alpha/q} m_l^{-\alpha},$$

де $\alpha = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) / \left(1 - \frac{2}{q}\right)$.

Тепер, враховуючи вибір чисел m_l, згідно з (4.18) одержимо

$$I_3 \ll \sum_{l \leq n} \psi(2^l) 2^{l(1/p-1/q)} 2^{2l\alpha/q} m_l^{-\alpha} =$$

$$= \sum_{l \le n} \psi(2^l) 2^{l(1/p-1/q+2\alpha/q)} m_l^{-\alpha} =$$

$$= \sum_{l \le n} \psi(2^l) 2^{l(1/p-1/q+2\alpha/q)} m^{-\alpha} 2^{(n-l)\gamma\alpha} =$$

$$= \sum_{l \le n} \psi(2^l) 2^{l(1/p-1/q-\gamma\alpha+2\alpha/q)} m^{-\alpha} 2^{n\gamma\alpha}.$$

Оскільки за умовою теореми послідовність $\psi(\tau)\tau^{\alpha-\varepsilon_2}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не спадає, то при певному виборі γ послідовність $\psi(2^l)2^{l(\alpha-\gamma\alpha)}$ теж не спадає і тому

$$I_3 \ll \sum_{l \le n} \psi(2^l) 2^{l(\alpha-\gamma\alpha)} m^{-\alpha} 2^{n\gamma\alpha} \ll$$

$$\ll \psi(2^n) 2^{n(\alpha-\gamma\alpha)} m^{-\alpha} 2^{n\gamma\alpha} = \psi(2^n) 2^{n\alpha} m^{-\alpha}.$$

Далі, враховуючи, що $2^n \asymp m^{q/2}$, для I_3 можемо записати

$$I_3 \ll \psi(2^n) 2^{n\alpha} m^{-\alpha} \asymp \psi(2^n) 2^{n\alpha} 2^{-2n\alpha/q} =$$

$$= \psi(2^n) 2^{n(\alpha-2\alpha/q)} = \psi(2^n) 2^{n(1/p-1/q)}. \tag{4.19}$$

Таким чином, підставляючи (4.17) і (4.19) в (4.14), приходимо до шуканої оцінки зверху у випадку а):

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ll$$

$$\ll \psi(2^n) 2^{n(1/p-1/q)} + \psi(2^n) 2^{n(1/p-1/q)} \asymp$$

$$\asymp \psi(2^n) 2^{n(1/p-1/q)} \asymp \psi([m^{\frac{q}{2}}]) m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Тепер отримаємо оцінку зверху у випадку б).

В силу леми Д при $1 < p \leq 2$ має місце вкладення $L^{\psi}_{\beta,p} \subset L^{\tilde{\psi}}_{\beta,2}$, де $\tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau)\tau^{1/p-1/2}$, $\tau \in \mathbb{N}$, і відповідно

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ll d_m(L^{\tilde{\psi}}_{\beta,2}, L_q) \ll$$

$$\ll \tilde{\psi}([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} =$$

$$= \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})} =$$

$$= \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінки зверху в обох випадках одержані.

Переходячи до встановлення відповідних оцінок знизу, розглянемо спочатку випадок б). За заданим m виберемо $n \in \mathbb{N}$ так, щоб $2^n \asymp m^{q/2}$ і покладемо

$$T(\rho(n)) = \left\{ t : t(x) = \sum_{k \in \rho(n)} c_k e^{ikx} \right\}.$$

Із означення колмогоровського поперечника можемо записати

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \geq d_m(L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(\rho(n)), L_q), \tag{4.20}$$

де $L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(\rho(n))$ — множина функцій із класу $L^{\psi}_{\beta,p}$, які є поліномами із $T(\rho(n))$.

Далі, нехай P_n — оператор ортогонального проектування на $T(\rho(n))$. В силу теореми В справедлива оцінка

$$\|P_n f\|_q \leq C_3(q)\|f\|_q, \;\; 1 < q < \infty,$$

і тому $\forall\; f \in L_q$, $t \in T(\rho(n))$ маємо

$$\|t-f\|_q \geq C_4(q)\|P_n(t-f)\|_q = C_4(q)\|t-P_nf\|_q. \tag{4.21}$$

Таким чином згідно з (4.20) і (4.21)

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \geq d_m(L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(\rho(n)), L_q) \gg$$

$$\gg d_m(L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(\rho(n)), L_q \cap T(\rho(n))). \tag{4.22}$$

Далі, нехай

$$t \in L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(\rho(n)).$$

Тоді, з одного боку, в силу леми Б і теореми Ж можемо записати

$$\|t^{\psi}_{\beta}\|_p \asymp \psi^{-1}(2^n)\|\delta_n(t)\|_p \asymp$$

$$\asymp \psi^{-1}(2^n)2^{-n/p}\left(\sum_{j=1}^{2^n}|\delta_n t^j|^p\right)^{1/p}. \tag{4.23}$$

Тому, згідно з (4.23), робимо висновок, що одиничній кулі із $L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(\rho(n))$ можемо співставити кулю радіуса $C_5(p)\psi^{-1}(2^n)2^{-n/p}$, $C_5(p) > 0$, із простору $l_p^{2^n}$.

З іншого боку, для

$$f \in L_q \cap T(\rho(n))$$

маємо

$$\|f\|_q \asymp 2^{-n/q}\left(\sum_{j=1}^{2^n}|\delta_n f^j|^q\right)^{1/q}. \tag{4.24}$$

Із (4.24) робимо висновок, що для норм функцій із $L_q \cap T(\rho(n))$ і норм відповідних елементів із $l_q^{2^n}$ справедливе співвідношення

$$\|\cdot\|_q \asymp 2^{-n/q}\|\cdot\|_{l_q^{2^n}}.$$

Таким чином, співставляючи оцінки (4.20) — (4.24), можемо записати

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \gg d_m(L^{\psi}_{\beta,p} \cap T(\rho(n)), L_q \cap T(\rho(n))) \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)} d_m(B_p^{2^n}, l_q^{2^n}). \tag{4.25}$$

Далі, використовуючи лему Г і враховуючи, що $2^n \asymp m^{q/2}$, з (4.25) будемо мати

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \gg \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)} \asymp \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінку знизу у випадку а) отримаємо, скориставшись вкладенням

$$L^{\tilde{\psi}}_{\beta,2} \subset C_6(p)L^{\psi}_{\beta,p}, \quad p \le 2,$$

де $\tilde{\psi}(\tau) = \psi(\tau)\tau^{1/p-1/2}$.

Отже,

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \ge C_7(p) d_m(L^{\tilde{\psi}}_{\beta,p}, L_q) \ge$$

$$\ge \tilde{\psi}(2^n)2^{n(1/2-1/q)} =$$

$$= \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)} \asymp$$

$$\asymp \psi([m^{\frac{q}{2}}])m^{\frac{q}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Оцінки знизу доведено. Теорему 4.1 доведено.

Прокоментуємо одержаний результат.

Якщо $\psi(|k|) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, то з доведеної теореми одержуємо наступне твердження [44].

Теорема K. *Якщо* $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<r<(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})/(1-\frac{2}{q})$ *при* $2\leq p<q<\infty$ *або* $\frac{1}{p}-\frac{1}{q}<r<\frac{1}{p}$ *при* $1<p\leq 2<q<\infty$, *то*

$$d_m(W^r_{p,\beta},L_q)\asymp m^{\frac{q}{2}(-r+\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}.$$

Зауваження 4.1. При виконанні умов теореми 4.1 підпростір тригонометричних поліномів вигляду $T(m)$ не реалізує порядок колмогоровського поперечника $d_m(L^{\psi}_{\beta,p},L_q)$ [75].

Зауваження 4.2. Одержане співвідношення (4.11) доповнює точні за порядком оцінки величин $d_m(L^{\psi}_{\beta,p},L_q)$ при $2\leq p<q<\infty$ і $1<p\leq 2<q<\infty$, які були одержані в роботі [45] за інших умов на послідовність ψ. Для зручності порівнянь наведемо відповідний результат.

Теорема Л [45]. *Нехай* $\psi\in\Psi$ *і* $\beta\in\mathbb{R}$. *Тоді*

а) якщо при $1<p\leq 2<p<\infty$ *існує* $\varepsilon_3>0$ *таке, що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{\frac{1}{p}+\varepsilon_3}$, $\tau\in\mathbb{N}$, *не зростає, то*

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p},L_q)\asymp\psi(m)m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}};$$

б) якщо при $2\leq p<p<\infty$ *існує* $\varepsilon_4>0$ *таке, що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})/(1-\frac{2}{q})+\varepsilon_4}$, $\tau\in\mathbb{N}$, *не зростає, то*

$$d_m(L^{\psi}_{\beta,p},L_q)\asymp\psi(m).$$

Таким чином, співставивши (4.11) з результатами теореми Л, бачимо, що оцінки величин $d_m(L^{\psi}_{\beta,p},L_q)$ при однакових співвідношеннях між параметрами p і q, але різних умовах на послідовності ψ, відрізняються за порядком.

4.3. Точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q

У даному підрозділі основна увага зосереджена на встановленні точних за порядком оцінок ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій при різних співвідношеннях між параметрами p і q. До того ж, тут одержано також точні за порядком оцінки ще однієї апроксимативної характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, яка, у певному сенсі, є близькою до ортопроекційного поперечника. Встановлені оцінки цієї величини дали змогу записати відповідні оцінки знизу для ортопроекційного поперечника.

Має місце

Теорема 4.2. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$, *що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{1/p-1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді*

$$d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi(m)m^{1/p-1/q}. \tag{4.26}$$

Доведення. Оцінки зверху в (4.26) одержимо, скориставшись результатом наближення функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ їх частинними сумами Фур'є у метриці простору L_q. Згідно з теоремою З та нерівностями (4.4) і (4.5) можемо записати

$$d^B_{2m}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \le d^{\perp}_{2m}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \le \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_q \asymp \psi(m)m^{1/p-1/q}.$$

Оцінки зверху отримано.

Тепер перейдемо до встановлення в (4.26) оцінок знизу, зробивши попередньо деякі зауваження.

При оцінці знизу величини $d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ будемо вважати, що оператори G належить $\mathcal{L}_m(B)_2$, і у зв'язку з цим наведемо міркування В. М. Темлякова (див., наприклад, [84]), які підтверджують, що таке припущення не є додатковим обмеженням на оператори G.

У випадку $q \ge 2$ умова $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$ є безпосереднім наслідком умови

$G \in \mathcal{L}_m(B)_q$. Покажемо тепер, що якщо $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$ при $1 \le q < 2$, то $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$.

Нехай $m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ і

$$V_m(x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos kx + 2\sum_{k=m+1}^{2m-1} \left(\frac{2m-k}{m}\right) \cos kx$$

— ядро Валле–Пуссена, що діє на функцію $f \in L_q$ наступним чином

$$V_m f = f * V_m,$$

де $*$ — операція згортки.

Відомо, що для довільного тригонометричного полінома $t \in T(m)$ і довільної функції $f \in L_q$, $1 \le q \le \infty$, виконується співвідношення

$$V_m t = t,$$

$$\|V_m f\|_q \le 3\|f\|_q.$$

Нехай $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$. Розглянемо оператор

$$A = V_m G.$$

Тоді $A \in \mathcal{L}_m(B)_2$ і для будь–якого тригонометричного полінома $t \in T(m)$ можемо записати

$$\|f - Af\|_q = \|V_m(f - Af)\|_q \le 3\|f - Gf\|_q.$$

Із цієї нерівності випливає, що при отриманні порядкових оцінок знизу величин $d_m^B(L_{\beta,p}^{\psi} \cap T(m), L_q)$, умови $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$ і $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$ рівносильні.

Отже, нехай оператор $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$ і для довільного $k \in \mathbb{Z}$

$$Ge^{ikx} = \sum_{l=1}^{m} a_l^k \psi_l(x),$$

де $\{\psi_l(x)\}_{l=1}^m$ — ортонормована система функцій. Зазначимо, що для довільних m і k

$$\sum_{l=1}^{m} |a_l^k|^2 \leq B^2,$$

а для довільного l

$$\sum_{k} |\hat{\psi}_l(k)|^2 \leq 1. \tag{4.27}$$

Тепер перейдемо безпосередньо до отримання оцінки знизу величин $d_m^B(L_{\beta,p}^{\psi}, L_q)$.

Розглянемо функцію

$$\varphi_n(x) = K_{2^{n-2}-1}(x),$$

де

$$\mathcal{K}_{l-1}(t) = \sum_{k=-(l-1)}^{l-1} \left(1 - \frac{|k|}{l}\right) e^{ikx}$$

— ядро Фейєра порядку l, $\mathcal{K}_m(t) \equiv 1$ при $m < 1$.

Нехай задано оператор $G \in \mathcal{L}_m(B)_q$ і $N \geq m$. Розглянемо оператор

$$A = (S_n - S_{n-1})G,$$

де S_n — оператор Фур'є, який співставляє кожній функції $f \in L_1$ її частинну суму вигляду

$$S_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx}.$$

Крім того, згідно з наслідком з теореми B для норми оператора $\|S_l\|_{q\to q}$, що діє з L_q в L_q, справедлива оцінка

$$\|S_l\|_{q\to q} \le C_1, \quad 1<q<\infty, \quad l\in\mathbb{Z},$$

і тому для $f\in T(m)$, можемо записати

$$\|f-Af\|_q = \|(S_n-S_{n-1})(f-Gf)\|_q \ll \|f-Gf\|_q. \tag{4.28}$$

Зі співвідношення (4.28) випливає, що оцінку знизу достатньо довести для класу $L^{\psi}_{\beta,p}\cap T(m)$ і операторів $A\in\mathcal{L}_m(B)_q$ з областю значень $T(m)$. Тоді для оператора A і класу функцій $L^{\psi}_{\beta,p}\cap T(m)$ розглянемо співвідношення, яке є наслідком (4.28),

$$\inf_{A\in\mathcal{L}_m(B)_q}\ \sup_{f\in L^{\psi}_{\beta,p}\cap T(m)} \|f-Af\|_q \ll d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q). \tag{4.29}$$

Для встановлення оцінки знизу для величин в лівій частині співвідношення (4.29), розглянемо величину

$$I_5 = \sup_y \|\varphi_n(x-y) - A\varphi_n(x-y)\|_\infty.$$

Легко бачити, що

$$I_5 \ge \varphi_n(0) - \min_{y=x} Re\ A\varphi_n(x-y). \tag{4.30}$$

Оцінимо кожний доданок правої частини (4.30). Згідно з означенням функції φ_n можемо записати

$$\varphi_n(0) = N. \tag{4.31}$$

Далі, нахай $\{\psi_l(x)\}_{l=1}^m$ — ортонормована система функцій і

$$Ae^{ikx} = \sum_{l=1}^m a_l^k \psi_l(x).$$

Тоді

$$\left(\sum_{l=1}^{m} |a_l^k|^2 \right)^{1/2} \le B, \tag{4.32}$$

і згідно з лемою E та нерівностями (4.27) і (4.32), маємо

$$\min_{y=x} ReA\varphi_n(x-y) \le \left(m \sum_{l=1}^{m} \sum_{k} |a_l^k \hat{\varphi}_n(k)|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(m \sum_{l=1}^{m} \sum_{k} |a_l^k|^2 \right)^{1/2} = \left(m \sum_{k} \sum_{l=1}^{m} |a_l^k|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le B(2mN)^{1/2}. \tag{4.33}$$

За заданим досить великим $n \in \mathbb{N}$ виберемо константи $0 < C_2 < C_3 < 1$ так, щоб $C_2 2^n \le m < C_3 2^n$ і виконувалась нерівність

$$C_4 N > 2B(2mN)^{1/2}.$$

Тоді, використовуючи оцінки (4.30) – (4.33) і враховуючи, що $N \asymp 2^n$, отримуємо

$$I_5 = \sup_{y} \|\varphi_n(x-y) - A\varphi_n(x-y)\|_\infty \ge$$

$$\ge C_4 N - B(2mN)^{1/2} > B(2mN)^{1/2} \gg 2^n.$$

Відповідно, знайдеться y^* такий, що

$$\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_\infty \gg 2^n. \tag{4.34}$$

Далі, оскільки в силу вибору m поліноми $t \in T(m)$ мають степінь не вище 2^n, то згідно з "нерівністю різних метрик" (теорема E) можемо записати

$$\|t\|_\infty \ll 2^{n/q}\|t\|_q,$$

звідки випливає, що

$$\|t\|_q \gg 2^{-n/q}\|t\|_\infty.$$

Скориставшись (4.34), отримаємо

$$\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_q \gg$$

$$\gg 2^{-n/q}\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_\infty \gg$$

$$\gg 2^{-n/q}2^n = 2^{n(1-1/q)}. \qquad (4.35)$$

Для завершення доведення оцінки знизу величини $d_m^B(L^\psi_{\beta,p}, L_q)$ розглянемо функцію

$$g(x) = C_5\psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}\varphi_n(x), \quad C_5 > 0.$$

Використовуючи властивість ядра Фейєра (див., наприклад, [101], Р. I, §2)

$$\|\mathcal{K}_{2^n-1}\|_p \asymp 2^{n(1-1/p)}, \quad 1 \le p \le \infty, \qquad (4.36)$$

та згідно з твердженням А, легко переконатися, що $g \in L^\psi_{\beta,p}$:

$$\|g^\psi_\beta\|_p \ll \psi^{-1}(2^n)\|g\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-n(1-1/p)}\psi^{-1}(2^n)\psi(2^n)\|\varphi_n\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-n(1-1/p)}2^{n(1-1/p)} = 1.$$

Звідси випливає, що при певному виборі сталої $C_5 > 0$ функція $g \in L^{\psi}_{\beta,p}$.

Таким чином, використовуючи оцінку (4.35) та приймаючи до уваги (4.29), будемо мати

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \gg \|g(x-y^*) - Ag(x-y^*)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}2^{n(1-1/q)} = \psi(2^n)2^{n(1/p-1/q)} \asymp$$

$$\asymp \psi(m)m^{1/p-1/q}. \tag{4.37}$$

Теорему 4.2 доведено.

У наступному твердженні доповнимо результати теореми 4.2, а саме: розглянемо випадок $p = 1$ і $1 < q \leq \infty$.

Теорема 4.3. *Нехай $1 < q \leq \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$, виконується одна з умов (4.8) або (4.9) і, крім того, існує таке $\varepsilon > 0$, що послідовність $\psi(\tau)\tau^{1-1/q+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, не зростає. Тоді*

$$d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \asymp d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \asymp \psi(m)m^{1-1/q}. \tag{4.38}$$

Доведення. Оцінки зверху в (4.38) випливають з теореми И та нерівностей (4.4) і (4.5). Таким чином можемо записати:

$$d^B_{2m}(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \leq d^{\perp}_{2m}(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \leq \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,1})_q \asymp \psi(m)m^{1-1/q}.$$

Оцінку зверху отримано.

Для встановлення оцінки знизу величини $d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q)$ розглянемо функцію

$$g_1(x) = C_6\psi(2^n)\varphi_n(x), \quad C_6 > 0.$$

Покажемо, що при певному виборі сталої C_6 функція g_1 належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$. Для цього достатньо пересвідчитися, що $\|(g_1)^{\psi}_{\beta}\| \ll 1$. Із цією метою скористаемося твердженням Б.

Зауважимо, що умова (4.10) виконується, оскільки існує число $\alpha > 1 - 1/q$ таке, що послідовність $\eta(m) = \psi(m)m^{\alpha}$ не зростає, а

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\psi(m)}{k\psi(k)} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\eta(m)k^{\alpha}}{m^{\alpha}\eta(k)k} \leq \frac{1}{m^{\alpha}} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{k^{\alpha}}{k} \leq 1.$$

Отже, на підставі твердження А і спввідношення (4.36) одержимо, що

$$\|(g_1)^{\psi}_{\beta}\|_1 \ll \psi^{-1}(2^n)\|g_1\|_1 \ll \psi^{-1}(2^n)\psi(2^n) = 1,$$

звідки випливає, що g_1 належить класу $L^{\psi}_{\beta,1}$.

Далі розглянемо два випадки: а) $1 < q < \infty$; б) $q = \infty$. У випадку а), використовуючи оцінку (4.37) із заміною функції g на g_1 і прийнявши до уваги, що $p = 1$, будемо мати

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_q) \gg \|g_1(x - y^*) - Ag_1(x - y^*)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(2^n)\|\varphi_n(x - y^*) - A\varphi_n(x - y^*)\|_q \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^{n(1-1/q)} \asymp \psi(m)m^{1-1/q}.$$

Аналогічно і у випадку б): використавши оцінку (4.34), одержимо

$$d^B_m(L^{\psi}_{\beta,1}, L_{\infty}) \gg \|g_1(x - y^*) - Ag_1(x - y^*)\|_{\infty} \gg$$

$$\gg \psi(2^n)\|\varphi_n(x - y^*) - A\varphi_n(x - y^*)\|_{\infty} \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^n \asymp \psi(m)m.$$

Теорему 4.3 доведено.

Тепер сформулюємо і доведемо твердження, яке доповнює попередні результати.

Теорема 4.4. *Нехай* $1 < p < \infty$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і, крім того, існує таке* $\varepsilon > 0$, *що послідовність* $\psi(\tau)\tau^{1/p+\varepsilon}$, $\tau \in \mathbb{N}$, *не зростає. Тоді*

$$d_m^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_{\infty}) \asymp d_m^{B}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_{\infty}) \asymp \psi(m)m^{1/p}. \tag{4.39}$$

Доведення. Оцінки зверху в (4.39) є наслідком оцінок наближення функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ їх частинними сумами Фур'є у метриці простору L_{∞}. Для цього достатньо скористатися теоремою I та нерівностями (4.4) і (4.5)

$$d_{2m}^{B}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_{\infty}) \leq d_{2m}^{\perp}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_{\infty}) \leq \mathcal{E}_m(L^{\psi}_{\beta,p})_{\infty} \asymp \psi(m)m^{1/p}.$$

Встановимо оцінку знизу величини $d_m^{B}(L^{\psi}_{\beta,p}, L_{\infty})$. Розглянемо функцію

$$g_2(x) = C_7\psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}\varphi_n(x), \quad C_7 > 0.$$

Використовуючи властивість ядра Фейєра (див., наприклад, [101], Р. I, §1)

$$\|\mathcal{K}_{2^n-1}\|_p \asymp 2^{n(1-1/p)}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{4.40}$$

згідно з твердженням A, легко переконатися, що $g_2 \in L^{\psi}_{\beta,p}, 1 < p < \infty$:

$$\|(g_2)^{\psi}_{\beta}\|_p \ll \psi^{-1}(2^n)\|g_2\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-n(1-1/p)}\psi^{-1}(2^n)\psi(2^n)\|\varphi_n\|_p \ll$$

$$\ll 2^{-n(1-1/p)}2^{n(1-1/p)} = 1.$$

Звідси випливає, що при певному виборі сталої $C_7 > 0$ функція $g_2 \in L^{\psi}_{\beta,p}$.

Таким чином, використовуючи оцінку (4.37) та на підставі (4.29), будемо мати

$$d_m^B(L^\psi_{\beta,p}, L_\infty) \gg \|g_2(x-y^*) - Ag_2(x-y^*)\|_\infty \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}\|\varphi_n(x-y^*) - A\varphi_n(x-y^*)\|_\infty \gg$$

$$\gg \psi(2^n)2^{-n(1-1/p)}2^n = \psi(2^n)2^{n(1/p)} \asymp$$

$$\asymp \psi(m)m^{1/p}. \tag{4.41}$$

Теорему 4.4 доведено.

Тепер встановимо точні за порядком оцінки величин $d_m^B(L^\psi_{\beta,p}, L_q)$ і $d_m^\perp(L^\psi_{\beta,p}, L_q)$ при $1 \le q \le p \le \infty$, $(p,q) \notin \{(1,1),(\infty,\infty)\}$.

Теорема 4.5. *Нехай* $1 \le q \le p \le \infty$, $(p,q) \notin \{(1,1),(\infty,\infty)\}$, $\psi \in \Psi$, $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді справедливі порядкові оцінки*

$$d_m^\perp(L^\psi_{\beta,p}, L_q) \asymp d_m^B(L^\psi_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi(m). \tag{4.42}$$

Доведення. Оцінку зверху в (4.42) одержимо з оцінок наближення функцій з класів $L^\psi_{\beta,p}$ їх частинними сумами Фур'є у метриці простору L_q. Оскільки $L^\psi_{\beta,\infty} \subset L^\psi_{\beta,p}$, $1 \le p < \infty$, і $\|\cdot\|_q \le \|\cdot\|_p$, то оцінку зверху величини $d_m^\perp(L^\psi_{\beta,p}, L_q)$ достатньо довести для випадку $1 < q = p < \infty$. Для цього скориставшись теоремою Ї та нерівностями (4.4) і (4.5), одержимо

$$d_{2m}^B(L^\psi_{\beta,p}, L_q) \le d_{2m}^\perp(L^\psi_{\beta,p}, L_q) \le \mathcal{E}_m(L^\psi_{\beta,p})_q \asymp \psi(m).$$

Оцінки зверху для величин $d_m^B(L^\psi_{\beta,p}, L_q)$ і $d_m^\perp(L^\psi_{\beta,p}, L_q)$ встановлено.

Тепер перейдемо до доведення в (4.42) оцінок знизу. Нагадаємо, що при цьому достатньо отримати необхідну оцінку знизу для величини $d_m^B(L^\psi_{\beta,\infty}, L_1)$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що оператори

G належать множині $\mathcal{L}_m(B)_2$.

Отже, нехай $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$ і для довільного $k \in \mathbb{N}$ виконується рівність

$$Ge^{ikx} = \sum_{l=1}^{m} a_l^k \psi_l(x), \tag{4.43}$$

де $\{\psi_l\}_{l=1}^m$ — ортонормована система функцій. Зазначимо, що для довільного k

$$\sum_{l=1}^{m} |a_l^k|^2 \leq B^2, \tag{4.44}$$

а для довільного l

$$\sum_{k} |\hat{\psi}_l(k)|^2 \leq 1. \tag{4.45}$$

Для $s \in \mathbb{N}$ покладемо

$$\rho(s) = \{k : 2^{s-1} \leq |k| < 2^s\}$$

і нехай n таке, що

$$|\rho(n-1)| < 4B^2 m \leq |\rho(n)|, \tag{4.46}$$

де $|\rho(l)|$ — кількість елементів множини $\rho(l) \subset \mathbb{Z}$.

Розглянемо наближення функцій e^{ikx}, $k \in \rho(n)$, операторами $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$. Позначимо

$$\alpha_k = (Ge^{ikx}, e^{ikx}).$$

Тоді згідно з (4.43) можемо записати

$$\alpha_k = \sum_{l=1}^{m} a_l^k \hat{\psi}_l(k).$$

Тому, скориставшись (4.44), отримаємо

$$|\alpha_k|^2 \leq \sum_{l=1}^{m} |a_l^k|^2 \sum_{l=1}^{m} |\hat{\psi}_l(k)|^2 \leq B^2 \sum_{l=1}^{m} |\hat{\psi}_l(k)|^2.$$

Далі, враховуючи співвідношення (4.45), будемо мати

$$\sum_{k\in\rho(n)} |\alpha_k|^2 \leq B^2 \sum_{k\in\rho(n)} \sum_{l=1}^{m} |\hat{\psi}_l(k)|^2 =$$

$$= B^2 \sum_{l=1}^{m} \sum_{k\in\rho(n)} |\hat{\psi}_l(k)|^2 \leq$$

$$\leq B^2 \sum_{l=1}^{m} 1 = B^2 m.$$

Звідси робимо висновок, що знайдеться таке число $k_0 \in \rho(n)$, що $\alpha_{k_0} \leq \frac{1}{2}$, тому, що в іншому разі, враховуючи співвідношення (4.46), отримали б

$$\sum_{k\in\rho(n)} |\alpha_k|^2 > \frac{1}{4} \sum_{k\in\rho(n)} 1 = \frac{1}{4}|\rho(n)| \geq B^2 m,$$

а це суперечить (4.46).

У такому випадку, оскільки $(e^{ik_0x}, e^{ik_0x}) = 1$, можемо записати

$$\frac{1}{2} \leq |1 - \alpha_{k_0}| = |(e^{ik_0x} - Ge^{ik_0x}, e^{ik_0x})| =$$

$$= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{ik_0x} - Ge^{ik_0x} e^{-ik_0x}) dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ik_0x} - Ge^{ik_0x} e^{-ik_0x}| dx =$$

$$= \|e^{ik_0x} - Ge^{ik_0x}\|_1, \tag{4.47}$$

де $G \in \mathcal{L}_m(B)_2$.

Нарешті, враховуючи те, що для операторів $A \in \mathcal{L}_m(B)_2$ та

$G \in \mathcal{L}_m(B)_1$ і тригонометричних поліномів з відповідним спектром виконується нерівність

$$\|t - At\|_1 \leq 3\|t - Gt\|_1,$$

то згідно з (4.47) будемо мати

$$\|e^{ik_0x} - Ge^{ik_0x}\|_1 \geq \frac{1}{6}. \tag{4.48}$$

Тепер розглянемо функцію

$$g_3(x) = C_8\psi(2^n)e^{ik_0x},\ C_8 > 0. \tag{4.49}$$

Легко переконатися, що $g_3 \in L^{\psi}_{\beta,\infty}$. Дійсно, оскільки

$$\|(g_3)^{\psi}_{\beta}\|_\infty = \psi(2^n)\psi^{-1}(k_0)\|e^{ik_0x}\|_\infty \ll 1,$$

то звідси випливає, що з певною сталою C_8 функція g_3 належить класу $L^{\psi}_{\beta,\infty}$.

Далі, скориставшись оцінкою (4.48), можемо записати

$$\|g_3 - Gg_3\|_1 = \psi(2^n)\|e^{ik_0x} - Ge^{ik_0x}\|_1 \gg \psi(2^n).$$

Таким чином,

$$d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,\infty}, L_1) \geq d^B_m(L^{\psi}_{\beta,\infty}, L_1) \gg \psi(2^n) \asymp \psi(m),$$

а, отже,

$$d^{\perp}_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \geq d^B_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q) \asymp \psi(m).$$

Теорему 4.5 доведено.

Зауваження 4.3. Якщо $\psi(k) = |k|^{-r}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $r > 1/p - 1/q$ при $1 \leq p < q \leq \infty$ і $r > 0$ при $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $(p,q) \notin \{(1,1),(\infty,\infty)\}$, то відповідні твердження до теорем 4.2 – 4.5 встановлено у [101], Р. I, §4.

Зауваження 4.4. Порядки ортопроекційних поперечників $d_m^{\perp}(L_{\beta,p}^{\psi}, L_p)$ і величин $d_m^{B}(L_{\beta,p}^{\psi}, L_p)$, які встановлені в теоремах 4.2 – 4.5, реалізуються частинними сумами Фур'є функцій з класів $L_{\beta,p}^{\psi}$.

4.4. Висновки до розділу 4

Даний розділ присвячено встановленню точних за порядком оцінок колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q.

У підрозділі 4.2 одержано точні порядкові оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на послідовність ψ. Слід зазначити, що при виконанні умов теореми 4.2 порядки колмогоровських поперечників $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ не реалізуються підпросторами тригонометричних поліномів $T(m)$.

Підрозділ 4.3 присвячено встановленню точних за порядком оцінок ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q при різних співвідношеннях між параметрами p і q. Також тут одержано точні за порядком оцінки ще однієї апроксимативної характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, яка, у певному сенсі, є близькою до ортопроекційного поперечника. Виявлено, що у всіх розглянутих випадках порядки цієї величини і ортопроекційного поперечника класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають за порядком і, більше того, ці порядки реалізуються частинними сумами Фур'є функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Основні результати цього розділу опубліковано у роботах [11, 12, 16].

Висновки

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню деяких екстремальних задач теорії наближень. Зокрема, вивчаються властивості тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік стосовно двох питань: перше пов'язане з відомою проблемою Літтлвуда, а друге стосується нерівностей типу Бернштейна – Нікольського. Також значну увагу приділено дослідженню поведінки колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ у просторі L_q для різних співвідношень між параметрами p і q.

Другий розділ дисертаційної роботи присвячено дослідженню узагальнено–диференціальних властивостей тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік стосовно відомої проблеми Літтлвуда [95]. У результаті проведених досліджень встановлено, що в деяких ситуаціях ядро типу Діріхле з певним вибором гармонік може мати кращі узагальнено–диференціальні властивості, ніж класичне ядро Діріхле.

У підрозділі 2.2 одержано точні за порядком оцінки L_q–норм ψ–похідних ядер Діріхле D_m при $1 < q < \infty$.

Підрозділ 2.3 присвячено відшуканню точних за порядком оцінок L_q–норм ψ–похідних ядер типу Діріхле при $1 < q < \infty$.

Співставляючи результати теореми 2.1 з підрозділу 2.2 з теоремами 2.2, 2.3 підрозділу 2.3, бачимо, що при виконанні умов теорем 2.2 і 2.3 на послідовність ψ, величина $L_m(\psi, q)$ і L_q–норма ψ–похідної ядра Діріхле співпадають за порядком.

Якщо ж порівняти результати теореми 2.1 підрозділу 2.2 з теоремою 2.4 підрозділу 2.3, то виявляємо, що при виконанні умов теореми 2.4 на послідовність ψ, величина $L_m(\psi, q)$ і L_q–норма ψ–похідної ядра Діріхле відрізняються за порядком.

Третій розділ присвячено дослідженню нерівностей типу Бернштейна – Нікоьського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік при різних співвідношеннях між параметрами p і q.

У підрозділі 3.2 одержано порядкові оцінки величин вигляду $\sup\limits_{t\in T(m)} \|t^{\psi}\|_q/\|t\|_p$, $1 < p \leq q < \infty$.

Підрозділ 3.3 присвячено дослідженню нерівностей типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік і порівнянню цих результатів з теоремою 3.1 підрозділу 3.2.

Співставивши результати теореми 3.1 з підрозділу 3.2 з теоремами 3.2, 3.3 підрозділу 3.3, бачимо, що при виконанні умов теорем 3.2 і 3.3 на послідовності ψ величини $\mathcal{T}_m(\psi, q, p)$ і $\sup\limits_{t\in T(m)} \|t^{\psi}\|_q/\|t\|_p$ співпадають за порядком.

Четвертий розділ присвячено встановленню точних за порядком оцінок колмогоровських та ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q.

У підрозділі 4.2 одержано точні порядкові оцінки колмогоровських поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q для деяких співвідношень між параметрами p і q та певних умовах на послідовність ψ. Слід зазначити, що при виконанні умов теореми 4.2 порядки колмогоровських поперечників $d_m(L^{\psi}_{\beta,p}, L_q)$ не реалізуються підпросторами тригонометричних поліномів $T(m)$.

Підрозділ 4.3 присвячено відшуканню точних за порядком оцінок ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q при різних співвідношеннях між параметрами p і q. Також тут одержано точні за порядком оцінки ще однієї апроксимативної характеристики класів $L^{\psi}_{\beta,p}$, яка, у певному сенсі, є близькою до ортопроекційного поперечника. Виявлено, що у всіх розглянутих випадках порядки цієї величини і ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ співпадають за порядком і, більше того, ці порядки реалізуються частинними сумами Фур'є функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,p}$.

Література

1. *Андрианов А. В.* О двух методах распространения свойств систем функций от одной переменной на их тензорное произведение / А. В. Андрианов, В. Н. Темляков // Тр. МИРАН. — 1997. — **219**. — С. 32 – 43.

2. *Арестов В. В.* О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов / В. В. Арестов // Мат. заметки. — 1980. — **27**, №4. — С. 539 – 547.

3. *Арестов В. В.* Точные неравенства для тригонометрических полиномов относительно интегральных функционалов / В. В. Арестов // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — **16**, №4. — С. 38 – 53.

4. *Арестов В. В.* Неравенство Бернштейна – Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов / В. В. Арестов, П. Ю. Глазырина // Тр. ИММ УрО РАН. — 2014. — **20**, №1. — С. 17 – 21.

5. *Бабаджанов С. Б.* О поперечниках одного класса в пространствах L^p / С. Б. Бабаджанов, В. М. Тихомиров // Изв. АН Узб. ССР. Сер. физ.–мат. — 1967. — **2**. — С. 24 – 30.

6. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций "плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники / Э. С. Белинский // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. — Ярославль: Яросл. ун–т. — 1984. — С. 10 – 24.

7. *Белинский Э. С.* Приближение тригонометрическими полиномами заданной длины на классах функций с ограниченной смешанной производной и некоторые экстремальные задачи / Э. С. Белинский // Теория функций и приближений. Тр. 4-й Саратовской зимней школы. 25 января — 5 февраля 1988 г. Межвуз. науч. сб. Саратов: Из–во Сарат. ун–та. 1990. — Ч. 2. — С. 43 – 45.

8. *Белинский Э. С.* Две экстремальные задачи для тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник / Э. С. Белинский // Мат. заметки. — 1991. — **49**, №1. — С. 12 – 18.

9. *Белинский Э. С.* О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник / Э. С. Белинский, Э. М. Галеев // Вестн. МГУ. Сер.1. Матем., мех. — 1991. — **2**. — С. 3 – 7.

10. *Боденчук В. В.* Точні оцінки колмогоровських поперечників класів аналітичних функцій. I / В. В. Боденчук, А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, №6. — С. 719 – 738.

11. *Власик Г. М.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Аналіз і застосування: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2015. — **12**, №3. — С. 65 – 77.

12. *Власик Г. М.* Ортопроекційні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2015. — **12**, №4. — С. 111 – 124.

13. *Власик Г. М.* Оцінки норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — **13**, №2. — С. 88 – 100.

14. *Vlasyk H. M.* Bernstein–Nikol'skii–Type Inequalities for Trigonometric Polynomials with an Arbitrary Choice of Harmonics / H. M. Vlasyk // Ukrainian Mathematical Journal. — **69**, No 2. — 2017. — P. 147 – 156. (Ukrainian Original: **69**, №2. — 2017. — P. 147 – 156.)

15. *Власик Г. М.* Порядкові оцінки L_q–норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Укр.

мат. журн. — 2017. — **69**, №10. — С. 1310 – 1323.

16. *Власик Г. М.* Колмогоровські поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2017. — **14**, №3. — С. 76 – 92.

17. *Власик Г. М.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 3 – 6 червня 2015 р.): Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України. — 2015. — С. 67.

18. *Власик Г. М.* Ортопроекційні поперечники класів $L^{\psi}_{\beta,p}$ періодичних функцій у просторі L_q / Г. М. Власик // Міжнародна наукова конференція "Теорія наближень і її застосування" з нагоди 75–річчя В. П. Моторного (Дніпропетровськ, 08 – 11 жовтня 2015 р.): Тези доповідей. — Дніпропетровськ: Дніпропетровський національний університет імені О. Гончара. — 2015. — С. 24.

19. *Власик Г. М.* Ортопроекційні поперечники класів (ψ, β)–диференційовних періодичних функцій / Г. М. Власик // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 24 – 27 лютого 2016 р.): Тези доповідей. — Івано–Франківськ: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника". — 2016. — С. 67.

20. *Власик Г. М.* Оцінки норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання — 2016" (Львів, 25 – 27 травня 2016 р.): Тези доповідей. — http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Wlasik.pdf.

21. *Власик Г. М.* Нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з довільним вибором гармонік / Г. М. Вла-

сик // Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, 22 – 25 лютого 2017 р.): Тези доповідей. — Івано–Франківськь: ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені В. Стефаника". — 2017. — С. 56.

22. *Власик Г. М.* Порядкові оцінки L_q–норм узагальнених похідних ядер типу Діріхле з довільним вибором гармонік / Г. М. Власик // Міжнародна конференція молодих математиків (Київ, 7 – 10 червня 2017 р.): Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України. — 2017. — С. 41.

23. *Власик Г. М.* Нерівності типу Бернштейна – Нікольського для тригонометричних поліномів з найкращим вибором гармонік / Г. М. Власик // Конференція молодих вчених "Підстригачівські читання — 2017" (Львів, 23 – 25 травня 2017 р.): Тези доповідей. — http://iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Vlasyk.pdf.

24. *Галеев Э. М.* Порядковые оценки производных периодического многомерного α-ядра Дирихле в смешанной норме / Э. М. Галеев // Матем. сб. — 1982. — **117(159)**, №1. — С. 32 – 43.

25. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}_p^{\bar{\alpha}}$ и $\widetilde{H}_p^{\bar{\alpha}}$ в пространстве $\widetilde{L}_p$ / Э. М. Галеев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985. — **49**, №5. — С. 916 – 934.

26. *Галеев Э. М.* Порядки ортопроекционных поперечников классов периодических функций одной и нескольких переменных / Э. М. Галеев // Мат. заметки. — 1988. — **43**, №2. — С. 197 – 211.

27. *Галеев Э. М.* Поперечники по Колмогорову классов периодических функций одной и нескольких переменных / Э. М. Галеев // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — **54**, №2. — С. 418 – 430.

28. *Галеев Э. М.* Порядковые оценки наименьших по выбору N гармоник норм производных ядер Дирихле и Фавара / Э. М. Галеев // Матем. сб. — 1991. — **182**, №4. — С. 593 – 604.

29. *Галеев Э. М.* Неравенства Бернштейна – Никольского для функций нескольких переменных, наилучших по выбору гармоник / Э. М. Галеев // Вестн. МГУ. Сер.1. Матем., мех. — 1992. — **6**. — С. 3 – 6.

30. *Галеев Э. М.* Поперечники функциональных классов и конечномерных множеств / Э. М. Галеев // Владикавк. мат. журн. — 2011. — **13**, №2. — С. 3 – 14.

31. *Глускин Е. Д.* Об одной задаче о поперечниках / Е. Д. Глускин // Докл. АН СССР. — 1974. — **219**, №3. — С. 527 – 530.

32. *Глускин Е. Д.* Об оценках норм некоторых p–абсолютно суммирующих операторов / Е. Д. Глускин // Функ. анализ. — 1978. — **12**, №2. — С. 23 – 31.

33. *Грабова У. З.* Порядкові оцінки найкращих наближень і наближень сумами Фур'є класів (ψ, β)-диференційовних функцій / У. З. Грабова, А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 9. — С. 1186 – 1197.

34. *Дерев'янко Н. В.* Оцінки ортопроекційних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q / Н. В. Дерев'янко // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін–ту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 95 – 109.

35. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. — М.: Наука, 1977. — 512 с.

36. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. / А. Зигмунд. — М.: Мир, 1965. — Т. II. — 538 с.

37. *Исмагилов Р. С.* Об n–мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве / Р. С. Исмагилов // Функ. анализ и его приложения. — 1968. — **2**, №2. — С. 32 – 39.

38. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими полиномами / Р. С. Исмагилов // Успехи мат. наук. — 1974. — **29**, №3. — С. 161 – 178.

39. *Кашин Б. С.* Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций / Б. С. Кашин // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1977. — **41**, №2. — С. 334 – 351.

40. *Кашин Б. С.* Общие ортонормированные системы и некоторые вопросы теории приближений (автореф. докт. дис.) / Б. С. Кашин // Мат. заметки. — 1979. — **26**, №2. — С. 292 – 315.

41. *Кашин Б. С.* О поперечниках классов Соболева малой гладкости / Б. С. Кашин // Вест. МГУ. Сер. мат. — 1981. — №5. — С. 50 – 54.

42. *Конягин С. В.* О проблеме Литтлвуда / С. В. Конягин // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — **45**, №2. — С. 243 – 265.

43. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений / Н. П. Корнейчук. — М.: Наука, 1987. — 424 с.

44. *Куланин Е. Д.* Оценки поперечников классов Соболева малой гладкости / Е. Д. Куланин // Вест. МГУ. Сер. мат. — 1983. — №2. — С. 24 – 30.

45. *Кушпель А. К.* Поперечники классов гладких функций в пространстве L_q / А. К. Кушпель — Киев: — 1987. — 54 с. — (Препр./ АН УССР. Ин–т матем.; 87.44).

46. *Майоров В. Е.* Дискретизация задачи о поперечниках / В. Е. Майоров // Успехи мат. наук. — 1975. — **30**, №6. — С. 179 – 180.

47. *Майоров В. Е.* О наилучшем приближении классов $W_1^r(\mathbb{I}^s)$ в пространстве $L_\infty(\mathbb{I}^s)$ / В. Е. Майоров // Мат. заметки. — 1976. — **19**, №5. — С. 699 – 706.

48. *Майоров В. Е.* Тригонометрические поперечники соболевских классов / В. Е. Майоров // Тр. 2–й Саратовской зимней школы по "Теория функций и приближений". — 1986. — С. 20 – 22.

49. *Майоров В. Е.* Тригонометрические поперечники соболевских классов W_1^r в пространстве L_q / В. Е. Майоров // Мат. заметки. — 1986. — **40**, №2. — С. 161 – 173.

50. *Майоров В. Е.* Об одной модификации неравенства Бернштейна – Никольского для тригонометрических полиномов / В. Е. Майоров // ДАН СССР. — 1981. — **258**, №1. — С. 23 – 26.

51. *Майоров В. Е.* Неравенства Бернштейна–Никольского и оценки норм ядер Дирихле для тригонометрических полиномов по произвольным гармоникам / В. Е. Майоров // Мат. заметки. — 1990. — **47**, №6. — С. 55 – 61.

52. *Маковоз Ю. И.* Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве / Ю. И. Маковоз // Мат. сб. — 1972. — **87**, №1. — С. 136 – 142.

53. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем / С. М. Никольский // Изв. АН. Сер. матем. — 1946. —**10**, №3. — С. 207 – 256.

54. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С. М. Никольский. — М.: Наука — 1977. — 456 с.

55. *Пинкевич В. Т.* О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля / В. Т. Пинкевич // Изв. АН. СССР Сер. матем. — 1940. — **4**, №6. — С. 521 – 528.

56. *Романюк А. С.* Неравенства для L_p-норм (ψ, β)-производных и поперечников по Колмогорову классов функций многих переменных $L^{\psi}_{\beta,p}$ / А. С. Романюк // Исследования по теории аппроксимации функций: Сб. науч. тр. — Киев: Ин–т математики АН УССР. — 1987. — С. 92 – 105.

57. *Романюк А. С.* Оценки наилучших приближений и поперечников классов $L^{\psi}_{\beta,p}$ периодических функций многих переменных / А. С. Романюк. — Киев, 1988. — С. 29 – 59. — (Препр./ АН УССР. Ин–т матем.; 88.14).

58. *Романюк А. С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. I / А. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №9. — С. 1224 – 1231.

59. *Романюк А. С.* Оценки аппроксимативных характеристик классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II / А. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, №10. — С. 1402 – 1408.

60. *Романюк А. С.* Аппроксимативные характеристик классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк // Праці Інституту математики НАН України. — 2012. — **93**. — 352 с.

61. *Романюк А. С., Романюк В. С.* Тригонометрические и ортопроекционные поперечники классов периодических функций многих переменных / А. С. Романюк, В. С. Романюк // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, №10. — С. 1348 – 1366.

62. *Романюк В. С.* Дополнения к оценкам приближения суммами Фурье классов бесконечно дифференцируемых функций / В. С. Романюк // Екстремальні задачі теорії функцій та суміжні питання: Пр. Ін–ту математики НАН України. — 2003. — **46**. — С. 131 – 135.

63. *Савчук В. В.* Найкращі наближення голоморфними функціями. Застосування до найкращих многочленних наближень класів голоморфних функцій / В. В. Савчук // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, №8. — С. 1047 – 1067.

64. *Сердюк А. С.* Наближення класів аналітичних функцій сумами Фур'є в рівномірній метриці / А. С. Сердюк // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, №8. — С. 1079 – 1096.

65. *Сердюк А. С.* Наближення лінійними методами класів $(\psi, \overline{\beta})$–диференційовних функцій / А. С. Сердюк, І. В. Соколенко // Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2013. — **10**, №1. — С. 245 – 254.

66. *Сердюк А. С.* Порядкові оцінки найкращих наближень та наближень сумами Фур'є в рівномірній метриці класів згорток періодичних функцій невеликої гладкості / А. С. Сердюк, Т. А. Степанюк // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, №12. — С. 1658 – 1675.

67. *Сихов М. Б.* Неравенства типа Бернштейна, Джексона – Никольского и оценки норм производных ядер Дирихле / М. Б. Сихов // Мат. заметки. — 2006. — **80**, №1. — С. 95 – 104.

68. *Смаилов Е. С.* О влиянии геометрических свойств спектра многочлена на неравенства разных метрик С. М. Никольского / Е. С. Смаилов // Сиб. мат. журн. — 1998. — **39**, №5. — С. 1157 – 1163.

69. *Соломяк М. З.* О геометрических характеристиках вложения классов W_p в C / М. З. Соломяк, В. М. Тихомиров // Изв. вузов. Сер. мат. — 1967. — №10. — С. 76 – 82.

70. *Стасюк С. А.* Апроксимативні характеристики класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних / С. А. Стасюк, О. В. Федуник // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, №5. — С. 692 – 704.

71. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами / А. И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1981. — 340 с.

72. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. — К.: Наук. думка, 1987. — 268 с.

73. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. / А. И. Степанец. — К.: Ин–т математики НАН Украины, 2002. — **40**. — Ч. I. — 427 с.; Ч. II. — 468 с.

74. *Степанец А. И.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций / А. И. Степанец, А. К. Кушпель. — Киев: — 1984. — 41 с. — (Препр./ АН УССР. Ин–т матем.; 84.15).

75. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_q / А. И. Степанец, А. К. Кушпель // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, №4. — С. 483 – 492.

76. *Степанец А. И.* Приближение суммами Валле–Пуссена / А. И. Степанец, С. О. Рукасов, С. О. Чайченко // Праці Інституту математики НАН України. — 2007. — **68**. — 386 с.

77. *Стечкин С. Б.* О наилучших приближениях заданных классов любимы полиномами / С. Б. Стечкин // Успехи мат. наук. — 1954. — **9**, №1. — С. 133 – 134.

78. *Стечкин С. Б.* О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L / С. Б. Стечкин, С. А. Теляковский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1967. — **88**. — С. 20 – 29.

79. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I / С. А. Теляковский // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1961. — **62**. — С. 61 – 97.

80. *Теляковский С. А.* Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье / С. А. Теляковский // Мат. заметки. — 1968. — **4**, №3. — С. 291 – 300.

81. *Теляковский С. А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости / С. А. Теляковский // Укр. мат. журн. — 1989. — **41**, №4. — С. 510 – 518.

82. *Темляков В. Н.* Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных / В. Н. Темляков // Докл. АН СССР. — 1982. — **267**, №2. — С. 314 – 317.

83. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной / В. Н. Темляков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1986. — **178**, №2. — С. 3 – 113.

84. *Темляков В. Н.* Оценки асимптотических характеристик классов функций с ограниченной смешанной производной или разностью / В. Н. Темляков // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1989. — **189**. — С. 138 – 168.

85. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений / В. М. Тихомиров // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, №3. — С. 81 – 120.

86. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1,1]$ / В. М. Тихомиров // Мат. сб. — 1969. — **80**, №2. — С. 81 – 120.

87. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М.: Москов. гос. ун–та, 1976. — 304 с.

88. *Тихомиров В. М.* Теория приближений / В. М. Тихомиров // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. — 1987. — **14**. — С. 103 – 260.

89. *Тихомиров В. М.* А. Н. Колмогоров и теория приближений / В. М. Тихомиров // Успехи мат. наук. — 1989. — **44**, №1. — С. 83 – 122.

90. *Тригуб Р. М.* Оценки снизу L_1–нормы ряда Фурье степенного типа / Р. М. Тригуб // Мат. заметки. — 2003. — **73**, №6. — С. 951 – 953.

91. *Тригуб Р. М.* Мультипликаторы рядов Фурье и приближение функций полиномами в пространствах C и L / Р. М. Тригуб // Докл. АН СССР. — 1989. — **306**, №2. — С. 292 – 296.

92. *Федуник О. В.* Оцінки апроксимативних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних в просторі L_q / О. В. Федуник // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Збірник праць Ін–ту математики НАН України. — 2005. — **2**, №2. — С. 268 – 294.

93. *Чайченко С. О.* Наилучшие приближения периодических функций в обобщенных пространствах Лебега / С. О. Чайченко // Укр. мат. журн. — 2012. — **64**, №9. — С. 1249 – 1265.

94. *Galeev E. M.* Approximation of periodic functions of one and several variables / E. M. Galeev // Constructive theory of Functions'87. — Sofia. — 1988. — P. 138 – 144.

95. *Hardy G. H.* A new proof of a theorem of rearrangements / G. H. Hardy, J. E. Littlewood // Jour. of the L. M. Soc. — 1948. — **23**, №91. — P. 163 – 168.

96. *Jackson D.* Certain problems of closest approximation / D. Jackson // Bull. Amer. Math. Soc. — 1933. — **39**, №12. — P. 889 – 906.

97. *Kolmogoroff A.* Über die beste annäherung von funktionen einer gegebenen funktionenklasse / A. Kolmogoroff // Ann. of Math. — 1936. — **37**, №1. — P. 107 – 110.

98. *Lebesgue H.* Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz / H. Lebesgue // Bull. Soc. Math. France. — 1910. — **38**. — P. 184 – 210.

99. *McGehe O. C.* Hardy inequality and L^1-norm of exponential sums / O. C. McGehe, L. Pigno, B. Smith // Ann. Math. — 1981. — **113**, №3. — P. 613 – 618.

100. *Rudin W.* L_2–approximations by partial sums of orthogonal developments / W. Rudin // Duke Math. J. — 1952. — **19**, №1. — P. 1 – 4.

101. *Temlyakov V. N.* Approximation of periodic functions / V. N. Temlyakov. — New York: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. — 419 p.