НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Святовець Ірина Федорівна

УДК 531.383:62.50

ДОСЛІДЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ГІРОСКОПІЧНИХ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИХ СИСТЕМ

01.02.01 – теоретична механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Новицький Віктор Володимирович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу математичних проблем механіки та теорії керування

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Зуєв Олександр Леонідович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
завідувач відділу прикладної механіки

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Шатирко Андрій Володимирович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, доцент кафедри моделювання складних систем факультету комп’ютерних наук та кібернетики.

Захист відбудеться “ 29 ” травня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий “ 25 ” квітня 2018р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Г.П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Актуальними останнім часом стали задачі керування гіроскопічними системами, зокрема зі збуреннями. На сьогоднішній день важко уявити собі об'єкти авіації, космонавтики, морської техніки, які не містили б гіроскопічні прилади. До того ж, гіроскопи застосовуються і на наземних апаратах: при з'ясуванні викривлень бурових свердловин, при прокладці тунелів для метро, в системах стабілізації автомобілів та ін. Серед гіроскопічних систем часто зустрічаються майже консервативні. Дослідження майже консервативних систем та близьких до них проводяться в наукових Московській школі Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, та Київській школі В.Б. Ларіна, К.І. Науменка, В.В. Новицького, М.О. Зінчука. Час показав перспективність цього напрямку досліджень, оскільки саме для майже консервативних керованих систем є можливість отримання спрощених алгоритмів побудови керувань. Для неперервних та дискретних майже консервативних систем розроблено методи їх дослідження на стійкість, та знайдено алгоритми побудови оптимального керування, які значно спрощуються завдяки кососиметричності матриці коефіцієнтів та наявності малого параметра. Таким дослідженням присвячена значна кількість робіт В.В. Новицького, М.О.Зінчука та їхніх учнів. Для ефективного використання розроблених алгоритмів запропоновано керовані системи, які не є майже консервативними, зводити за допомогою зворотного зв'язку до майже консервативних моделей.

В більшості сучасних задач керування на об'єкт керування діє зовнішнє збурення. Класичним підходом до розв'язку таких задач є мінімаксний підхід, при якому досягнення мети керування розглядається в найгіршому випадку, тобто при максимальному збуренні.

Проблеми побудови моделей неперервних та дискретних майже консервативних систем за допомогою зворотного зв'язку та знаходження мінімаксного керування майже консервативними системами на сьогоднішній час не є розробленими. Тому дослідження, які містяться в роботі є актуальними і новими та полягають в знаходженні умов розв'язання поставлених задач та побудові відповідних алгоритмів, які їх ефективно розв'язують.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі аналітичної механіки та у відділі математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України згідно із загальним планом науково-дослідних робіт в рамках держбюджетної теми № ІІ-23-12 "Математичні моделі поліагрегатних систем та чисельно – аналітичні методи розв'язування сучасних задач динаміки, стійкості та оптимального керування" (номер держ. реєстрації 0112U001015) за програмою "Розробка математичних моделей та чисельно – аналітичних методів розв'язування сучасних задач фізико - технічних і медико - біологічних наук та інформаційних технологій".

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є побудова моделей неперервних та дискретних майже консервативних систем за допомогою вектора керувань з не майже консервативних моделей, та дослідження задачі мінімаксного керування майже консервативними системами при наявності зовнішніх збурень.

Об'єктом дослідження є лінійні стаціонарні системи парного порядку з керуванням, зокрема гіроскопічні системи, та майже консервативні системи з зовнішніми збуреннями.

Предметом дослідження є умови перетворення моделей не майже консервативних систем в майже консервативні за допомогою зворотного зв'язку, а також умови та алгоритм розв'язання мінімаксної задачі.

Завдання дослідження. Дослідити процес побудови моделей неперервних та дискретних майже консервативних систем. Застосувати різні підходи до формування майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку. Знайти умови існування розв'язку та алгоритмів розв'язання задачі мінімаксного керування для майже консервативних систем.

Методи дослідження. Методи теоретичної механіки, теорії керувань, другий метод Ляпунова, методи лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи полягають у наступному:

1. Проведені дослідження, які стосуються побудови моделей керованих неперервних та дискретних майже консервативних динамічних систем за допомогою спеціального вибору вектора керувань. Доведені теореми про необхідні та достатні умови побудови моделей неперервних та дискретних майже консервативних систем.

2. Отримані теоретичні результати побудови майже консервативних систем застосовано до моделей гіровертикалі, гіроскопа з лінійною характеристикою міжрамкової корекції та об'єкта з виникаючим гіроскопічним ефектом.

3. Застосовано модальний підхід отримання моделі майже консервативної асимптотично стійкої системи та наведено алгоритм використання модального підходу для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування, та його узагальнення на систему порядку $2n$ з m - вимірним вектором керування. Отриманий алгоритм застосовано до моделі керованого гіростабілізатора.

4. Досліджена задача мінімаксного керування для майже консервативних систем. Сформульована необхідна умова існування розв'язку відповідного рівняння Ріккаті з параметром та знайдена умова для оцінки цього параметра.

5. Отримані в дисертації результати з мінімаксного керування застосовано до моделі ротора, що обертається з постійною кутовою швидкістю та моделі двох зв'язаних керованих осциляторів.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані результати мають, переважно, теоретичне значення. Вони доповнюють відомі факти матричного підходу до вирішення проблем керування лінійними стаціонарними неперервними та дискретними системами і можуть бути використані при дослідженні математичних моделей, які, зокрема, описують рух механічних систем з керуванням та моделей гіроскопічних систем.

Особистий внесок здобувача. Основні результати є новими і одержані автором під керівництвом наукового керівника. У спільних публікаціях здобувачеві належить вибір методики розв'язання поставлених перед ним задач, аналітичні розрахунки, аналіз отриманих результатів, співавторам – визначення напрямку дослідження, постановка задачі, підбір методів дослідження та участь у обговоренні отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на міжнародних конференціях: Міжнародна конференція "Моделювання, керування та стійкість MCS-2012" (Крим, Севастополь, 2012); XVI International Conference "Dynamical system modelling and stability investigation" (Kiev, 2013); Міжнародна математична конференція "Боголюбовськи читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування "

(Севастополь, 2013); XVIII International Conference “Dynamical system modelling and stability investigation” (Kiev, 2017) та семінарі “Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика” (Інститут математики НАН України, м.Київ, 2017р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 роботах. Серед них 8 статей [1 - 8] – в наукових періодичних фахових виданнях та 4 тез доповідей [9 - 12] – на міжнародних наукових конференціях.

Структура роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 185 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 140 сторінок, з них список використаних джерел займає 18 сторінок.

При нагоді хочу висловити щиру подяку моєму науковому керівнику В.В. Новицькому та всім співробітникам відділу аналітичної механіки за постійну увагу і допомогу при роботі над дисертацією.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, виділено мету і задачі дослідження, наведено основні результати, визначено їх новизну та практичне значення, зазначено особистий внесок здобувача, апробацію роботи та публікації.

У **першому** розділі наведено огляд літератури, пов’язаної з темою досліджень, що проводились здобувачем, а також стислий огляд фундаментальних робіт, тематика яких є близькою до проблем, що досліджуються у дисертаційній роботі.

Систему

$$\dot{x} = \left(A_0 + \varepsilon A_1\right)x \tag{1}$$

будемо називати майже консервативною, якщо вона отримана збуренням консервативної системи

$$\dot{x} = A_0 x, \tag{2}$$

де $A_0 = -A_0^T \in \Re_{2n\times 2n}$ - кососиметрична невироджена матриця; $x(t) \in \Re_{2n}$ - вектор стану; $\|x\|^2 = const$.

$A_1 \in \Re_{2n\times 2n}$ - матриця-збурення, $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Як приклади, що ілюструють теоретичні висновки зроблених в роботі досліджень, обрані математичні моделі гіроскопічних систем.

Проведена класифікація прикладів за структурою загального вигляду матриці коефіцієнтів для зручності подальшого дослідження. Для цього, за допомогою відповідної заміни змінних, математичні моделі приведені до нормальної форми Коші систем диференціальних рівнянь першого порядку у матричної формі.

При розв'язанні задач дотримуємось наступного алгоритму:

1. Аналіз сил, що діють на систему, за їх математичною моделлю у формі Лагранжа;
2. Перетворення системи рівнянь у форму Коші;
3. Перевірка умови повної керованості системи;
4. Побудова керування, що перетворює систему у майже консервативну;
5. Формування матриці коефіцієнтів замкненої системи та перехід до форми Лагранжа для аналізу структури сил, діючих на нову систему.

Розділ завершується переліком нерозв'язаних задач, вирішенню яких присвячена дисертаційна робота.

У другому розділі дисертації досліджуються умови побудови моделей неперервних або дискретних майже консервативних систем за допомогою зворотного зв'язку.

У більшості прикладів, які розглядаються в роботі, проводиться дослідження систем на асимптотичну стійкість за допомогою матричного рівняння Ляпунова. У деяких задачах будується оптимальне керування. Для пошуку розв'язків матричних рівнянь Ляпунова та Ріккаті останні розкладаються в нескінченні системи матричних рівнянь, а відповідні розв'язки в нескінченні ряди, які при певних умовах можна зробити скінченними сумами.

В підрозділах 2.1, 2.2 для неперервних та дискретних майже консервативних автономних і керованих систем вирішується питання про коректність розкладання розв'язків рівнянь Ляпунова та Ріккаті в нескінченні ряди.

Спочатку розглядається лінійна стаціонарна неперервна асимптотично стійка майже консервативна система

$$\dot{y} = (\tilde{A}_0 + \varepsilon \tilde{A}_1)y, \; y(t_0) = y_0, \tag{3}$$

де $y \in \Re_{2n}$ - вектор стану, $\tilde{A}_0 = -\tilde{A}_0^T \in \Re_{2n\times 2n}$ - кососиметрична невироджена матриця загального вигляду, $\tilde{A}_1 \in \Re_{2n\times 2n}$ - стала матриця збурення, $\varepsilon > 0$ – малий параметр.

За допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$, від системи (3) переходимо до системи

$$\dot{x} = \left(A_0 + \varepsilon A_1\right)x,\ x(t_0) = x_0 \qquad (4)$$

де $x_0 = Ty_0$, $A_1 = T\tilde{A}_1T^T$, а матриця $\tilde{A}_0$ зведена до блочно-діагональної форми

$$A_0 = T\tilde{A}_0T^T = \{G_1, G_2, ..., G_r\}, \qquad (5)$$

де $G_i = diag\{S_i, ..., S_i\},\ G_i \in \Re_{2n_i \times 2n_i}$, $S_i = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_i \\ -\varphi_i & 0 \end{bmatrix} \in \Re_{2\times 2}$, $\varphi_i \neq \varphi_j$,

для $i \neq j$ $(i, j = 1, ..., r)$, $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$.

Оскільки система асимптотично стійка, то існує додатно означена симетрична матриця-розв'язок $P \in \Re_{2n\times 2n}$ матричного рівняння Ляпунова

$$P\left(A_0 + \varepsilon A_1\right) + \left(A_0 + \varepsilon A_1\right)^T P = -2Q, \qquad (6)$$

де $Q \in \Re_{2n\times 2n}$ - деяка невід'ємно означена матриця.

Для пошуку розв'язку використовується розкладання матриць P і Q в степеневі ряди за малим параметром ε .

Спираючись на обмеженість відношень матричних норм $\frac{\|P_{i+1}\|}{\|P_i\|}$ та $\frac{\|Q_{i+1}\|}{\|Q_i\|}$

доводиться збіжність відповідних рядів $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i$ та $\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i$.

Потім показується, що розв'язки $\tilde{P}$ і $\tilde{Q}$ відповідного рівняння Ляпунова для початкової системи (3) також збігаються при деяких значеннях параметра ε . При деяких умовах вибору матриці $\tilde{Q}$ нескінченні ряди можуть бути перетворені в скінченні суми.

Аналогічні міркування проводяться для лінійної стаціонарної неперервної керованої майже консервативної системи

$$\dot{y} = (\tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1)y + \varepsilon\tilde{B}u,\ y(t_0) = y_0, \qquad (7)$$

та дискретних систем

$$y(k+1) = \left(\tilde{F}_0 + \varepsilon\tilde{F}_1\right)y(k),\ y(0) = y_0,\ k = 0,1,... \qquad (8)$$

$$y(k+1)=\left(\widetilde{F}_0+\varepsilon\widetilde{F}_1\right)y(k)+\varepsilon\widetilde{G}u(k),$$
$$y(0)=y_0,\ k=0,1,... \tag{9}$$

У підрозділах 2.3 - 2.6 розглядається керована лінійна стаціонарна не майже консервативна система парного порядку

$$\dot{x}=(\widetilde{A}_0+\varepsilon\widetilde{A}_1)x+Bu, \tag{10}$$

де $x=\left[x_1,...,x_{2n}\right]^T$ – $2n$ - вимірний вектор стану, $u=\left[u_1,...,u_m\right]^T$ – m - вимірний вектор керувань, $\varepsilon>0$ – малий параметр, $\widetilde{A}_0,\widetilde{A}_1\in\Re_{2n\times 2n}$, $B\in\Re_{2n\times m}$. $\widetilde{A}_0^T\neq-\widetilde{A}_0$ або $\det\left(\widetilde{A}_0\right)=0$.

Ставиться задача: побудувати, за допомогою зворотного зв'язку

$$u=-\left(K_0+\varepsilon K_1\right)x \tag{11}$$

замкнену майже консервативну систему

$$\dot{x}=\left(\widetilde{A}_0-BK_0+\varepsilon\left(\widetilde{A}_1-BK_1\right)\right)x=\left(A_0+\varepsilon A_1\right)x, \tag{12}$$

$A_0^T=-A_0$ та $\det\left(A_0\right)\neq 0$.

В підрозділі 2.4 пропонується підхід, у якому застосовується додавання до правої частини рівняння

$$BK_0+K_0^TB^T=\widetilde{A}_0+\widetilde{A}_0^T, \tag{13}$$

суми деякої невідомої кососиметричної матриці Q_0 та її транспонованої . Тоді шукана матриця K_0 знаходиться з рівняння

$$BK_0=\widetilde{A}_0+Q_0. \tag{14}$$

Воно еквівалентне рівнянню

$$\widetilde{B}k_0=\widetilde{a}_0+q_0, \tag{15}$$

де $\widetilde{B}=B\otimes I$, $\widetilde{B}\in\Re_{4n^2\times mn}$, $I\in\Re_{2n\times 2n}$ - одинична матриця,

$$k_0=\begin{bmatrix}K_{1*}^T\\K_{2*}^T\\...\\K_{m*}^T\end{bmatrix},\ \widetilde{a}_0+q_0=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{1*}^T+Q_{1*}^T\\\widetilde{A}_{2*}^T+Q_{2*}^T\\...\\\widetilde{A}_{2n*}^T+Q_{2n*}^T\end{bmatrix},$$

K_{i*}, $\widetilde{A}_{i*}+Q_{i*}$ - i -ий рядок відповідної матриці.

Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку рівняння (15), є

$$rang\left(\widetilde{B}\right)= rang\left(\widetilde{B}/\left(\widetilde{a}_0 + q_0\right)\right). \qquad (16)$$

В підрозділі 2.5, для знаходження K_0, пропонується підхід, в якому спочатку будується необхідна матриця коефіцієнтів, а потім обчислюється вектор зворотного зв'язку.

Якщо вважати, що невироджена кососиметрична матриця A_0 задана, то

$$K_0 = \left(B^T B\right)^{-1} B^T \left(\widetilde{A}_0 - A_0\right). \qquad (17)$$

Але, не для всіх кососиметричних матриць A_0, рівняння

$$\left(I - B\left(B^T B\right)^{-1} B^T\right)\widetilde{A}_0 = \left(I - B\left(B^T B\right)^{-1} B^T\right)A_0 \qquad (18)$$

є тотожністю.

Аналогічно, якщо задати матрицю A_1, то

$$K_1 = \left(B^T B\right)^{-1} B^T \left(\widetilde{A}_1 - A_1\right). \qquad (19)$$

Але, рівнянню

$$\left(I - B\left(B^T B\right)^{-1} B^T\right)\widetilde{A}_1 = \left(I - B\left(B^T B\right)^{-1} B^T\right)A_1 \qquad (20)$$

буде задовольнять тільки деякий клас матриць.

Матриця $H = B\left(B^T B\right)^{-1} B^T$ є матрицею проектування, вона симетрична та ідемпотентна, тобто її власні значення одиничні та нульові, $rang(H)= rang(B)$. Таким чином, отримана матриця проектування має m власних значень, рівних одиниці. Ліва та права частини (18) виконують проектування векторів-стовпців матриць $\widetilde{A}_0, A_0$ на ортогональне доповнення простору стовпців матриці B. Формула (18) буде тотожністю тоді, коли хоча б для однієї кососиметричної матриці A_0 проекції всіх відповідних векторів-стовпців збігаються.

З рівностей (18), (20) випливає, що матриці коефіцієнтів розімкненої та замкненої динамічних систем пов'язані між собою за допомогою метода найменших квадратів. З цих досліджень випливають таки теореми.

Теорема 2.1. *Нехай* $\widetilde{y}_i^0, y_i^0 \in \Re_m$ *розв'язки відповідних лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$B\widetilde{y}_i = \widetilde{a}_i, \quad By_i = a_i, \quad i = \overline{1,2n},$$
$$\widetilde{A}_0 = [\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_{2n}], \; A_0 = [a_1, a_2, ..., a_{2n}], \; \widetilde{a}_i, a_i \in \Re_{2n} \tag{21}$$

знайдені за методом найменших квадратів.

Тоді для всіх матриць коефіцієнтів A_0 *, які можна отримати за допомогою зворотного зв'язку (11), вектори – нев'язки для розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь (21) збігаються*

$$B\widetilde{y}_i^0 - \widetilde{a}_i = By_i^0 - a_i, \quad i = \overline{1,2n}. \tag{22}$$

Теорема 2.2. *Нехай матриця при керуванні системи (10) має вигляд*

$$B = \lfloor e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_m} \rfloor, \quad rangB = m. \tag{23}$$

За допомогою зворотного зв'язку (11) можна отримати деяку кососиметричну матрицю $A_0 = \{a_{ij}\}_1^{2n}$ *в замкненій системі (12) тоді і тільки тоді, коли елементи* $\widetilde{a}_{lj}$, $l, j \in \overline{\{1,2n\}}\{i_1, i_2, ..., i_m\}$ *матриці коефіцієнтів* $\widetilde{A}_0 = \{\widetilde{a}_{ij}\}_1^{2n}$ *вихідної системи задовольняють умові* $\widetilde{a}_{lj} = -\widetilde{a}_{jl}$. *При цьому елементи шуканої матриці обчислюються наступним чином:* $a_{lj} = \widetilde{a}_{lj}$, $l \in \overline{\{1,2n\}}\{i_1, i_2, ..., i_m\}$, $j \in \overline{1,2n}$, *а інші елементи, не порушуючи кососиметричності та невиродженості матриці* A_0 *, можуть бути довільними.*

Підрозділ 2.6 присвячений знаходженню керування, яке одночасно вирішує дві задачі. Перша - отримання невиродженої кососиметричної матриці, а як наслідок – формування майже консервативної системи. Друга – побудова оптимального керування. Для цього вектор u розкладається на суму

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x = -K_0 x - \varepsilon K_1 x = u_0 + \varepsilon u_1. \tag{24}$$

Перший доданок - u_0 - використовується для отримання кососиметричної матриці, а другий - u_1 - для побудови оптимального регулятора системи. Тоді система (10) перепишеться наступним чином

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 - BK_0 + \varepsilon\widetilde{A}_1)x - \varepsilon BK_1 x = \left(A_0 + \varepsilon A_1\right)x - \varepsilon BK_1 x \qquad (25)$$

Матриця K_0 знаходиться з умови $A_0^T = -A_0$. Оптимальне керування будується у вигляді

$$u_1 = -K_1 x = -\varepsilon R^{-1} B^T Sx \qquad (26)$$

з квадратичним критерієм якості

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Qx + u_1^T Ru_1\right)dt \qquad (27)$$

де $Q \in \Re_{2n\times 2n}$ - невід'ємно визначена матриця, $R \in \Re_{m\times m}$ - додатно визначена матриця , $S \in \Re_{2n\times 2n}$ - додатно визначена матриця – розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$\left(A_0 + \varepsilon A_1\right)^T S + S\left(A_0 + \varepsilon A_1\right) - \varepsilon^2 SBR^{-1} B^T S + Q = 0\,. \qquad (28)$$

Після заміни $P = \varepsilon S$ рівняння (28) перепишеться так

$$\left(A_0 + \varepsilon A_1\right)^T P + P\left(A_0 + \varepsilon A_1\right) - \varepsilon SBR^{-1} B^T S + \varepsilon Q = 0\,. \qquad (29)$$

Використовуючи розклад матриць P та Q за малим параметром

$$P = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i\,,\;\; Q = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i Q_i\,, \qquad (30)$$

компоненти шуканої матриці P знайдемо з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \qquad (31)$$

$$
\begin{aligned}
&A_0P_1 - P_1A_0 = P_0A_1 + A_{1T}P_0 - P_0BR^{-1}B^TP_0 + Q_0,\\
&A_0P_2 - P_2A_0 = P_1A_1 + A_1^TP_1 - P_1BR^{-1}B^TP_0 - P_0BR^{-1}B^TP_1 + Q_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_0P_i - P_iA_0 = P_{i-1}A_1 + A_{1T}P_{i-1} - \sum_{k=1}^{i} P_kBR^{-1}B^TP_{i-k} + Q_{i-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{32}
$$

В підрозділі 2.7 досліджуються умови побудови за допомогою зворотного зв'язку дискретних майже консервативних систем, з метою застосування до останніх розроблених раніше спрощених методів дослідження стійкості, побудови оптимального регулятора та стабілізації системи.

Розглядається повністю керована лінійна дискретна система з малим параметром

$$
\begin{aligned}
&x(k+1) = \left(\widetilde{F}_0 + \varepsilon\widetilde{F}_1\right)x(k) + Gu(k),\\
&x(0) = x_0, k = 0,1,..,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

де $x(k) = \left[x_1(k),..,x_n(k)\right]^T \in \Re_n$ - вектор стану, $\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1 \in \Re_{n\times n}$, $u(k) = \left[u_1(k),..,u_m(k)\right]^T \in \Re_m$ - вектор керувань, $G \in \Re_{n\times m}$, $rangG = m$, ε - малий параметр.

Система не є майже консервативною, тобто

$$\widetilde{F}_0\widetilde{F}_0^T \neq I_n, \tag{34}$$

де I_n - одинична матриця розмірності n.

Для отримання майже консервативної системи будується лінійний статичний зворотний зв'язок за станом

$$u(k) = -\left(H_0 + \varepsilon H_1\right)x(k). \tag{35}$$

Після підстановки (35) в (33), отримаємо замкнену систему

$$x(k+1) = \left(F_0 + \varepsilon F_1\right)x(k), \tag{36}$$

де

$$F_0 = \widetilde{F}_0 - GH_0,\ F_0F_0^T = F_0^TF_0 = I_n, \tag{37}$$

$$F_1 = \tilde{F}_1 - GH_1$$

Якщо вважати, що ортогональна матриця F_0 рівняння (36) задана, то

$$H_0 = \left(G^T G\right)^{-1} G^T \left(\tilde{F}_0 - F_0\right). \tag{38}$$

Підставляючи вираз для H_0 в перше рівняння (37) отримаємо рівність

$$\left(I - G\left(G^T G\right)^{-1} G^T\right)\tilde{F}_0 = \left(I - G\left(G^T G\right)^{-1} G^T\right)F_0 . \tag{39}$$

Не для всіх ортогональних матриць F_0 (39) є тотожністю.

Таким же способом можна отримати матрицю H_1, коли задати матрицю F_1

$$H_1 = \left(G^T G\right)^{-1} G^T \left(\tilde{F}_1 - F_1\right). \tag{40}$$

Підставляючи (40) в останнє рівняння (37) отримаємо

$$\left(I - G\left(G^T G\right)^{-1} G^T\right)\tilde{F}_1 = \left(I - G\left(G^T G\right)^{-1} G^T\right)F_1 . \tag{41}$$

Теорема 2.3. *Нехай* $\tilde{y}_i^0, y_i^0 \in \Re_m$ *розв'язки відповідних лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{gathered} G\tilde{y}_i = \tilde{f}_i, \quad Gy_i = f_i, \quad i = \overline{1,n}, \\ \tilde{F}_0 = \left[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, ..., \tilde{f}_n\right], \; F_0 = \left[f_1, f_2, ..., f_n\right], \; \tilde{f}_i, f_i \in \Re_n \end{gathered} \tag{42}$$

знайдені за методом найменших квадратів.

Тоді для всіх матриць коефіцієнтів F_0, *які можна отримати за допомогою зворотного зв'язку (35), вектори – нев'язки для розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь (42) збігаються*

$$G\tilde{y}_i^0 - \tilde{f}_i = Gy_i^0 - f_i, \quad i = \overline{1,n} . \tag{43}$$

Теорема 2.4. *Нехай матриця при керуванні системи (33) має вигляд*

$$G = \left[e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_m}\right], \quad rangG = m, e_{i_j} \in \Re_n, \; j = \overline{1,m}. \tag{44}$$

Тоді за допомогою зворотного зв'язку (35) можна отримати деяку ортогональну матрицю $F_0 = \tilde{F}_0 - GH_0$, $F_0^T F_0 = F_0 F_0^T = I$ *в тому і тільки в тому випадку, коли рядки* $\overline{\{1,n\}}\{i_1, i_2, ..., i_m\}$ *матриці* $\tilde{F}_0$

ортогональні. Відповідні рядки матриці F_0 *мають збігатися з ними, а рядки* $i_1, i_2, \ldots, i_m$ *- довільні, але такі, що забезпечують ортогональність шуканої матриці.*

У третьому розділі дисертації задача отримання моделі майже консервативної системи вирішується методами модального керування, при цьому заздалегідь можна задати бажане розташування коренів характеристичного рівняння.

Для системи (10) перший доданок вектора керування (11) буде відповідати за отримання майже консервативної системи, а другий – за асимптотичну стійкість.

Вимагатимемо, щоб корені характеристичного многочлена матриці A_0 були чисто уявні, а матриці A комплексно спряженими з від'ємними дійсними частинами.

Запропоновано такий *Алгоритм* застосування модального підходу для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування та його узагальнення для систем порядку 2n з m вимірним вектором керування.

I. Перевірка умови повної керованості системи $\{\tilde{A}, B\}$, де $\tilde{A} = \tilde{A}_0 + \varepsilon \tilde{A}_1$, як необхідної та достатньої.

II. Побудова матриці K_0 .

Зауваження 1. Необхідною умовою визначення K_0 є виконання умови повної керованості системи $\{\tilde{A}_0, B\}$.

Зауваження 2. Розв'язок задачі побудови модального керування для системи з двома входами виконують у два етапи. На першому підбирається такий зворотний зв'язок за станом, щоб отримана система була б керована за допомого одного входу. На другому етапі будується керування для системи з одним входом.

III. Побудова асимптотично стійкої системи.

Зауваження 3. Послідовність виконання всіх кроків по знаходженню K , повністю збігається з послідовністю знаходження K_0 .

Зауваження 4. Враховуючи Зауваження 2, пропонується в якості першого доданка матриці керування використовувати вже знайдену матрицю K_0 і далі будувати модальне керування для системи $\left\{\widetilde{A} - BK_0, b_i\right\}$ з одним входом.

У четвертому розділі досліджується задача мінімаксного керування майже консервативними системами.

Розглядається керована лінійна стаціонарна майже консервативна система, на яку діє невідоме збурення $f(t)$ з обмеженою енергією. Модель матиме вигляд

$$\dot{x} = \left(A_0 + \varepsilon A_1\right)x + \varepsilon Bu + \varepsilon \Psi f\,, \tag{45}$$

де $x = \left[x_1,\dots,x_{2n}\right]^T$ – 2n - вимірний вектор стану, $u = \left[u_1,\dots,u_m\right]^T$ – m - вимірний вектор керувань, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $A_0, A_1 \in \Re_{2n\times 2n}$, причому $A_0 = -A_0^T$ та $\det(A_0) \neq 0$, $B \in \Re_{2n\times m}$ - матриця при керуванні, $\Psi \in \Re_{2n\times k}$ - матриця при збуренні.

Потрібно знайти керування $u(t)$, яке мінімізує функціонал

$$J = \int_0^\infty \left(x^T Q x + u^T u - \gamma^2 f^T f\right)dt\,, \tag{46}$$

і вплив збурення $f(t)$.

Бажане керування розшукується у вигляді

$$u = -\varepsilon B^T S x\,, \tag{47}$$

а найгірше збурення

$$f = K_f x,\ K_f = \varepsilon \gamma^{-2} \Psi^T S. \tag{48}$$

S - додатно визначена матриця – розв’язок матричного рівняння Ріккаті наступного вигляду

$$SA + A^T S - \varepsilon^2 SBB^T S + \gamma^{-2}\varepsilon^2 S\Psi\Psi^T S + Q = 0, \tag{49}$$

де $A = A_0 + \varepsilon A_1$, яке після заміни $P = \varepsilon S$, перепишеться наступним чином

$$PA + A^T P - \varepsilon PBB^T P + \gamma^{-2}\varepsilon P\Psi\Psi^T P + \varepsilon Q = 0\,, \tag{50}$$

або

$$PA + A^T P - \varepsilon P\left(BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T\right)P + \varepsilon Q = 0. \qquad (51)$$

Відомо, що існує мінімальне значення $\gamma = \gamma_{\min}$ таке, що для всіх значень γ, які належать інтервалу $[\gamma_{\min}, \infty)$ матриця P додатно визначена, а при $\gamma < \gamma_{\min}$ матриця P знакозмінна.

Необхідною умовою існування розв'язку рівняння (51) є

$$rang(BB^T) \geq rang(\Psi\Psi^T). \qquad (52)$$

Знайдемо конструктивні умови для оцінки параметра γ, що входить в рівняння Ріккаті (51).

Матриця

$$N = BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T = B(I_m - \gamma^{-2}HH^T)B^T, \qquad (53)$$

матиме максимальний ранг m тоді та тільки тоді, коли буде невиродженою матриця

$$M = I_m - \gamma^{-2}HH^T \qquad (54)$$

Для існування додатно визначеного розв'язку $P > 0$ рівняння Ріккаті, M повинна бути теж додатно визначеною, що буде тоді і тільки тоді, коли виконано умову

$$|\gamma| \geq \sqrt{\lambda_{\max}(HH^T)}. \qquad (55)$$

Розв'язок рівняння (51) пропонується знаходити з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті

$$A_0P_0 - P_0A_0 = 0, \qquad (56)$$

$$A_0P_1 - P_1A_0 = P_0A_1 + A_1^TP_0 - P_0(BB^T - \gamma^{-2}\psi\psi^T)P_0 + Q_0,$$

$$A_0P_2 - P_2A_0 = P_1A_1 + A_1^TP_1 - P_0(BB^T - \gamma^{-2}\psi\psi^T)P_1 - P_1(BB^T - \gamma^{-2}\psi\psi^T)P_0 + Q_1, \qquad (57)$$

……………………………………..

$$A_0P_i - P_iA_0 = P_{i-1}A_1 + A_1^TP_{i-1} - \sum_{k=0}^{i-1} P_k(BB^T - \gamma^{-2}\psi\psi^T)P_{i-1-k} + Q_{i-1},$$

задавши матриці P і Q у вигляді розкладу за малим параметром.

ВИСНОВКИ

Основні результати роботи полягають у наступному:

1. Проведені дослідження, які стосуються побудови моделей керованих майже консервативних динамічних систем за допомогою спеціального вибору вектора керувань. Доведені теореми про необхідні та достатні умови побудови моделей неперервних та дискретних майже консервативних систем.

2. Отримані теоретичні результати побудови майже консервативних систем застосовано до моделей гіровертикалі, гіроскопа з лінійною характеристикою міжрамкової корекції та об'єкта з виникаючим гіроскопічним ефектом.

3. Застосовано модальний підхід отримання моделі майже консервативної асимптотично стійкої системи та наведено алгоритм використання модального підходу для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування. Отриманий алгоритм застосовано до моделі керованого гіростабілізатора.

4. Досліджена задача мінімаксного керування для майже консервативних систем. Сформульована необхідна умова існування розв'язку відповідного рівняння Ріккаті з параметром та знайдена умова для оцінки цього параметра.

5. Отримані в дисертації результати з мінімаксного керування застосовано до моделі ротора, що обертається з постійною кутовою швидкістю та моделі двох зв'язаних керованих осциляторів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Святовець І.Ф. Формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування /І.Ф.Святовець, О.П. Коломійчук, В.В. Новицький // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – Т.9, № 1. – С. 301–307.

2. Новицький В.В. Моделювання майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / В.В. Новицький, О.П. Коломійчук, І.Ф.Святовець// Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 2. – С. 76–82.

3. Новицький В.В. Керування рухом гіроскопа з лінійною характеристикою системи міжрамкової корекції / В.В. Новицький, О.П. Коломійчук, І.Ф.Святовець// Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2014. – № 1. – С. 98–105.

4. Святовець І.Ф. Модальний підхід до задачі керування /І.Ф.Святовець // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т.11, № 5. – С. 199–209.

5. Новицький В.В. Умови формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування / В.В. Новицький, М.О. Зінчук, І.Ф.Святовець// Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 1. – С. 174–183.

6. Зінчук М.О. Про асимптотичні розв'язки матричних рівнянь Ляпунова та Ріккаті для майже консервативних систем/ М.О. Зінчук, І.Ф.Святовець, О.В.Тетерятник// Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 110–121.

7. Святовець І.Ф. Формування лінійної дискретної майже консервативної системи за допомогою вектора керування / І.Ф.Святовець // Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. – 2016. – № 2. – С. 229–236.

8. Svyatovets I. Construction of minimax control for almost conservative controlled dynamic systems with the limited perturbations/I. Svyatovets // Eureka: Physics and Engineering. – 2017. –№ 2. – P. 9–15.

9. Новицький В.В. Гіроскопічний компас як майже консервативна спостережна і керована механічна система/ В.В. Новицький, О.П. Коломійчук, І.Ф.Святовець// Моделирование, управление и устойчивость: международная конференція, 10-14 сентября 2012г. : Тезисы докл. Симферополь Таврический национальный университет. –2012. –С. 134.

10. Новицький В.В. Формування майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / В.В. Новицький, І.Ф.Святовець, О.П. Коломійчук // Dynamical system modelling and stability investigation: XVI International Conference , May 29-31, 2013 : Тези доповідей. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2013. - С. 376.

11. Новицький В.В. Умови формування майже консервативної динамічної системи за допомогою зворотного зв'язку / В.В. Новицький, О.П. Коломійчук, І.Ф.Святовець// Міжнародна математична конференція «Боголюбовськи читання DIF -2013» 23-30 червня, 2013р., Севастополь: Тези доповідей. Ін-т математики НАНУ, 2013. - С. 304.

12. Святовець І.Ф. Задача мінімаксного керування майже консервативними системами/ І.Ф.Святовець // Dynamical system modelling and stability investigation: XVIII International Conference , May 24-26, 2017 : Тези доповідей. Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2017. - С. 173.

АНОТАЦІЇ

Святовець І.Ф. Дослідження керованих гіроскопічних майже консервативних систем. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

В дисертаційній роботі досліджуються питання керування динамічними системами. Зокрема, розглядається задача використання вектора зворотного зв'язку для побудови неперервних та дискретних майже консервативних систем. Досліджуються умови існування бажаного керування.

Показується, як можна будувати керування, яке одночасно вирішувало б дві задачі: формування майже консервативної системи і побудова оптимального керування.

Для побудови майже консервативної системи застосовуються методи модального керування, при якому заздалегідь можна задати бажане розташування коренів характеристичного рівняння. Пропонується покроковий опис використання модального керування для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування і його узагальнення для системи порядку 2n з m - вимірним вектором керування.

Досліджується задача мінімаксного керування майже консервативними системами при наявності зовнішніх збурень. Формулюється умова для оцінки параметра, що входить в рівняння Ріккаті.

Наводяться приклади застосування викладених методик до моделей гіроскопічних систем.

Ключові слова: майже консервативна динамічна система**,** гіроскопічна система, модальне керування, мінімаксне керування, вектор зворотного зв'язку, кососиметрична матриця, ортогональна матриця, рівняння Ріккаті.

Святовец И.Ф. Исследование управляемых гироскопических почти консервативных систем. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

В диссертационной работе исследуются вопросы управления динамическими системами. В частности, рассматривается задача применения вектора обратной связи для построения непрерывных и дискретных почти консервативных систем. Исследуются условия существования желаемого управления. Для этого применяются различные подходы: использование некоторой кососимметричной матрицы для получения необходимого условия; применение кронекеровского произведения матриц. Используется подход, в котором сначала строится необходимая матрица коэффициентов, а потом находится вектор обратной связи.

Показывается, как можно строить управление, которое одновременно решало бы две задачи: получение невырожденной кососимметрической матрицы и как следствие формирование почти консервативной системы и построение оптимального управления.

Задача построения почти консервативной системы решается методами модального управления, при котором заранее можно задать

желаемое расположение корней характеристического уравнения. Предлагается пошаговое описание применения модального управления для системы четвертого порядка с двумерным вектором управления и его обобщение для системы порядка $2n$ с m- мерным вектором управления.

Исследуется задача минимаксного управления почти консервативными системами, на которые действует неизвестное возмущение с ограниченной энергией. Формулируется критерий оценки параметра, входящего в соответственное уравнение Риккати.

Рассматриваются примеры соответствующих математических моделей гироскопических систем, которые иллюстрируют описанные подходы формирования почти консервативных систем с помощью обратной связи.

Ключевые слова: почти консервативная динамическая система, гироскопическая система, модальное управление, минимаксное управление, вектор обратной связи, кососимметричная матрица, ортогональная матрица, уравнение Риккати.

Svyatovets I.F. Research of controlled gyroscopic almost conservative systems. - Manuscript.

A thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematic (doctor of philosophy) in specialty 01.02.01 "Theoretical mechanics". - Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

In the thesis the problem of control of dynamic systems is investigated. In particular, the problem of applying the feedback vector to construct continuous and discrete almost conservative systems is considered. The conditions for the existence of the desired control are investigated. For this, different approaches are used: the use of some skew-symmetric matrix to obtain the necessary condition; application of the Kronecker product of matrices. An approach is used in which the necessary matrix of coefficients is first constructed, and then the feedback vector is found.

It shows how one can construct a control that simultaneously solves two problems: obtaining a nonsingular skew-symmetric matrix and, as a consequence, forming an almost conservative system and constructing an optimal control.

The problem of constructing an almost conservative system is solved by methods of modal control, in which the desired location of the roots of the characteristic equation can be preset in advance. A step-by-step description of the application of modal control for a fourth-order system with a two-dimensional control vector and its generalization for a system of order 2n with an m-dimensional control vector is proposed.

The problem of minimax control of almost conservative systems, on which there is an unknown perturbation with limited energy, is investigated. The criterion for estimating a parameter contained in the corresponding Riccati equation is formulated.

Examples of corresponding mathematical models of gyroscopic systems are considered, which illustrate the approaches described for the formation of almost conservative systems by feedback.

Key words: almost conservative dynamic system, gyroscopic system, modal control, minimax control, feedback vector, skew-symmetric matrix, orthogonal matrix, Riccati equation.

Підп. до друку 10.04.2018. Формат $60\times84/16$. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,3. Ум. друк. арк. 1,2. Тираж 100 пр. Зам. 32.

Інститут математики НАН України,
01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3