МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Святовець Ірина Федорівна

УДК 531.383:62.50

ДИСЕРТАЦІЯ

Дослідження керованих гіроскопічних майже консервативних систем

01.02.01 — теоретична механіка

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Науковий керівник: **Новицький Віктор Володимирович**
доктор фізико–математичних наук, професор

Київ — 2017

АНОТАЦІЯ

Святовець І.Ф. Дослідження керованих гіроскопічних майже консервативних систем. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.01 "Теоретична механіка". - Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Гіроскопічні системи є важливими для практичних застосувань. Серед гіроскопічних систем часто зустрічаються майже консервативні, матриці коефіцієнтів моделей яких можна записати у вигляді $A_0 + \varepsilon A_1$, де A_0 - кососиметрична невироджена матриця, ε - малий параметр. Дослідженнями таких систем займалися Ф.Л.Черноусько, Л.Д.Акуленко, В.Б.Ларін, К.І.Науменко, В.В.Новицький та ін. Для неперервних та дискретних майже консервативних систем розроблено методи їх дослідження на стійкість та знайдено алгоритми побудови оптимального керування, які значно спрощуються завдяки наявності кососиметричності та малого параметра. Дослідженню цих питань присвячена значна кількість робіт В.В.Новицького та М.О.Зінчука. Для ефективного застосування розроблених алгоритмів запропоновано керовані системи, які не є майже консервативними (матриця A_0 не кососиметрична), зводити за допомогою зворотного зв'язку до майже консервативних моделей.

Знаходження бажаного керування відбувається у кілька етапів. Пропонуються різноманітні підходи. У розв'язанні задачі побудови керування, зокрема, використовується кронекерівський добуток матриць, завдяки чому рівняння може бути записано у вигляді, коли виконуються відомі умови існування розв'язку, а саме: рівність рангу матриці коефіцієнтів та рангу розширеної матриці.

Для формування неперервної майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку також пропонується підхід, в якому спочатку будується необхідна матриця коефіцієнтів (обмежень на матрицю немає), а потім обчислюється вектор зворотного зв'язку. Доводиться теорема про вибір вигляду кососиметричної матриці A_0 в замкненій системі при умові, що матриця

при керуванні повного рангу та її стовпцями є одиничні вектори.

Такий же підхід застосовується для побудови лінійної дискретної майже консервативної системи (тут A_0 - ортогональна), з метою застосування для останньої розроблених раніше спрощених методів дослідження стійкості та побудови оптимального керування.

Задачу отримання майже консервативної системи пропонується також вирішити методами модального керування, де заздалегідь можна задати бажане розташування коренів характеристичного рівняння. Вектор зворотного зв'язку задається у вигляді суми двох доданків, перший з яких відповідає за отримання майже консервативної системи, а другий - за асимптотичну стійкість. У цьому випадку вимагатимемо, щоб корені характеристичного многочлена матриці A_0 парного порядку утворювали пари чисто уявних спряжених ненульових коренів, а матриці $A_0 + \varepsilon A_1$ - пари комплексно-спряжених коренів з від'ємними дійсними частинами. Запропоновано алгоритмічний опис застосування модального підходу для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування та його узагальнення на систему порядку $2n$ з m -вимірним вектором керування.

В більшості сучасних задач на об'єкт керування впливає зовнішнє збурення. У такому випадку задача керування ставиться з вимогою зменшення впливу цих збурень на динаміку системи. Класичним підходом до розв'язання таких задач є мінімаксний підхід, при якому досягнення мети керування розглядається в найгіршому випадку, тобто при максимальному збуренні.

В дисертації вперше досліджується задача мінімаксного керування майже консервативними системами. Розглядається лінійна стаціонарна керована майже консервативна система, на яку діє невідоме збурення з обмеженою енергією. Метою є знаходження керування, яке мінімізує функціонал якості, в який входить збурення, яке його максимізує. Для отримання бажаного керування потрібно знайти додатно визначену матрицю-розв'язок P матричного рівняння Ріккаті відповідного вигляду, в яке входить деякий параметр γ. Відмітимо, що не для всіх значень γ існує додатно визначена матриця-розв'язок. Відомо, що існує мінімальне значення γ_{min} таке, що для всіх значень γ, які належать інтервалу $[\gamma_{min}, \infty)$, матриця-розв'язок P додатно визначена, а при $\gamma < \gamma_{min}$ - знакозмінна. Саме майже консервативність поставленої задачі дає змогу знайти потрібне γ в аналітичному вигляді.

Виходячи з формулювання задачі мінімакснго керування зрозуміло, що керування повинно діяти на систему по тих же каналах, що і збурення. З цього випливає необхідна умова існування розв'язку рівняння, а саме: ранг матриці при керуванні повинен бути більшим або дорівнювати рангу матриці при збуренні.

В роботі отримано критерій для оцінки параметра γ, що входить в рівняння Ріккаті. Матрицю розв'язок P пропонується шукати у вигляді розкладу за малим параметром з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті.

Доведена коректність розкладання в ряд розв'язків рівнянь Ляпунова та Ріккаті. Для цього, неперервні та дискретні майже консервативні автономні та керовані системи за допомогою деякого ортогонального перетворення зводяться до канонічних форм. Потім, для перетворених систем побудовано рівняння Ляпунова та Ріккаті і показано при яких значеннях параметра ε їх асимптотичні розв'язки коректні, тобто відповідні ряди збіжні. За допомогою зворотного перетворення легко отримується збіжність аналогічних рядів для початкових систем.

Розглянуто приклади відповідних математичних моделей гіроскопічних систем, що ілюструють описані підходи розв'язання задачі отримання майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку та побудови мінімаксного керування майже консервативними системами. В огляді літератури проведена класифікація досліджуваних моделей гіроскопічних систем, що розглядаються в роботі.

Отримані результати мають, переважно, теоретичне значення. Вони доповнюють відомі факти матричного підходу до вирішення проблем керування лінійними стаціонарними неперервними та дискретними системами, зокрема зі збуреннями і можуть бути використані при дослідженні математичних моделей, які, зокрема, описують рух механічних систем з керуванням та моделей гіроскопічних систем.

Ключові слова: майже консервативні системи, гіроскопічні системи, вектор зворотного зв'язку, модальне керування, мінімаксне керування, асимптотична стійкість, рівняння Ляпунова, рівняння Ріккаті.

Список публікацій здобувача

1. *Святовець І.Ф.* Формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування / І.Ф.Святовець, О.П.Коломійчук, В.В.Новицький // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2012. – Т.9, №1. – С.301-307.

2. *Новицький В.В.* Моделювання майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / В.В.Новицький, О.П.Коломійчук, І.Ф.Святовець // Вісник Запорізького національного університету: Зб.наукових статей. Фізико - математичні науки. – 2013. – №2. – С.76-82.

3. *Новицький В.В.* Керування рухом гіроскопа з лінійною характеристикою системи міжрамкової корекції / В.В.Новицький, О.П.Коломійчук, І.Ф.Святовець // Вісник Запорізького національного університету: Зб.наукових статей. Фізико - математичні науки. – 2014. – №1. – С.98-105.

4. *Святовець І.Ф.* Модальний підхід до задачі керування / І.Ф.Святовець // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2014. – Т.11, №5. – С.199-209.

5. *Новицький В.В.* Умови формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування / В.В.Новицький, М.О.Зінчук, І.Ф.Святовець // Вісник Запорізького національного університету: Зб.наукових статей. Фізико - математичні науки. – 2016. – №1. – С.174-183.

6. *Зінчук М.О.* Про асимптотичні розв'язки матричних рівнянь Ляпунова та Ріккаті для майже консервативних систем / М.О.Зінчук, І.Ф.Святовець, О.В.Тетерятник // Вісник Запорізького національного університету: Зб.наукових статей. Фізико - математичні науки. – 2016. – №2. – С.110-121.

7. *Святовець І.Ф.* Формування лініної дискретної майже консервативної

системи за допомогою вектора керування / І.Ф.Святовець// Вісник Запорізького національного університету: Зб.наукових статей. Фізико - математичні науки. – 2016. – №2. – С.229-236.

8. *Svyatovets I.* Construction of minimax control for almost conservative controlled dynamic systems with the limited perturbations / I.Svyatovets // Eureka: Physics and Engineering. – 2017. – №2. – P.9-15.

9. *Новицький В.В.* Гіроскопічний компас як майже консервативна спостережна і керована механічна система / В.В.Новицький, О.П.Коломійчук, І.Ф.Святовець // Моделирование, управление и устойчивость: международная конференция, 10-14 сентября 2012г.: Тезисы докл.– Симферополь: Таврический национальный университет, 2012. –С.134.

10. *Новицький В.В.* Формування майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / В.В.Новицький,І.Ф.Святовець, О.П.Коломійчук // Dynamical system modelling and stability investigation: XVI Internatinal Conference, May 29-31, 2013: Тези доповідей.– Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2013. – С.376.

11. *Новицький В.В.* Умови формування майже консервативної динамічної системи за допомогою зворотного зв'язку / В.В.Новицький, О.П.Коломійчук, І.Ф.Святовець // Міжнародна математична конференція "Боголюбовськи читання DIF –2013 23-30 червня, 2013., Севастополь: Тези доповідей.–Київ:Ін-т математики НАНУ, 2013.–С.304.

12. *Святовець І.Ф.* Задача мінімаксного керування майже консервативними системами / І.Ф.Святовець // Dynamical system modelling and stability investigation: XVIII Internatinal Conference, May 24-26, 2017: Тези доповідей.– Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2017. – С.173.

Abstract

Svyatovets I.F. Research of controlled gyroscopic almost conservative systems. - Qualifying scientific work on the rights of manuscripts.

A thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematic (doctor of philosophy) in specialty 01.02.01 "Theoretical mechanics". - Institute

of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

Gyroscopic systems are important for practical applications. Amoun gyroscopic systems, there are often almost conservative systems. For such systems the matrices of coefficients of theirs models can be written as $A_0 + \varepsilon A_1$, where A_0 is skew-symmetric and ε is a small parameter. Such systems were researched by F. L. Chernousko, L. D. Akulenko, V. B. Larin, K. I. Naumenko, V. Novytsky and others. For continuous and discrete, almost conservative systems, methods of their research on stability are developed, and algorithms for constructing optimal control, which are greatly simplified due to property of the skew-symmetry of the matrix and the presence of a small parameter are found. A considerable number of works of V.V.Novitsky and M.O.Zinchuk is devoted to research of these problems. For efficient use of the developed algorithms, controlled systems that are not almost conservative (the matrix A_0 is not skew-symmetric) is proposed to reduce to almost conservative models by feedback.

Finding the desired control is carried out in several stages.The different approaches are proposed. In solving the problem of constructing control, in particular, the Kronecker product of matrices is used, so that the equation can be written in the form when the conditions of the existence of the solution hold, namely: the equality of the rank of the matrix of coefficients under variables and the rank of the augmented matrix.

For the formation of a continuous almost conservative system through feedback, an approach is also proposed, in which first the necessary matrix of coefficients is constructed (no restrictions on the matrix), and then the feedback vector is calculated. The theorem on the choice of the form of the skew-symmetric matrix A_0 in a closed system is proved on condition that the matrix about control has the complete rank and its columns is single vectors.

The same approach is used to construct a linear discrete almost conservative systems in the case A_0 is orthogonal.This makes it possible applying to such systems the previously developed simplified methods of stability research and the optimal control construction.

The problem of obtaining an almost conservative system is also proposed to be solved by methods of modal control, in which it is possible to predefine the desired disposition of the roots of the characteristic equation. The feedback vector is given in the form of a sum of two terms, the first of which is responsible for obtaining an almost conservative system, and the second one for asymptotic stability. In this case, we require that the roots of the characteristic polynomial of the matrix A_0 matrix of even order formed a pair of purely imaginary conjugate nonzero roots, and for the matrix $A_0+\varepsilon A_1$ are pair of complex-conjugate roots with negative real parts. An algorithmic description of the application of the modal approach for a fourth-order system with a two-dimensional vector of control is proposed, and its generalization to the order system $2n$ with a m -dimensional control vector.

In most modern control problems, the control object is influenced by external perturbation. In this case, the problem is to reduce the influence of these perturbations on the dynamics of the system. A classical approach to the solution of such problems is the minimax approach, in which achievement of the purpose of management is considered in the worst case, that is, with maximum perturbation.

In the thesis the problem of minimax control of almost conservative systems is first investigated. A linear stationary controlled, almost conservative system, on which there is an unknown perturbation with limited energy, is considered. The goal is to find a control that minimizes the quality functional, which includes a perturbation that maximizes it. To obtain the desired control, we need to find a positive definite matrix P , which is the solution of the Riccati matrix equation of the corresponding form, which includes some parameter γ. We note that not for all values of γ there is a positively defined matrix-solution. It is known that there exists a minimal value γ_{min} such that for all values of γ belonging to the interval $[\gamma_{min}, \infty)$ the matrix-solution P is positively defined, and for $\gamma < \gamma_{min}$ is a sign-variable. It is almost the conservatism of the problem that makes it possible to find the necessary γ in an analytic form.

Proceeding from the formulation of the task of minimax control, it is clear that control should operate on the system on the same channels as perturbation. From this follows the necessary condition for the existence of the solution of the equation, namely: the rank of the matrix in control should be greater, or equal to the rank of the matrix of perturbation.

In the thesis the criterion for evaluating the parameter γ, which is included in the Riccati equation is obtained. The matrix-solution P is proposed to be sought in the form of a decomposition on a small parameter from an in nite system of algebraic equations of Riccati type.

It is proved, that decomposition in a series of solutions of the Lyapunov and Riccati equations is correct. To this end, continuous and discrete almost conservative autonomous and controlled systems, through some orthogonal transformation, are reduced to canonical forms. Then, for the transformed systems, the Lyapunov and Riccati equations are constructed, and the values of the parameters ε, at which their asymptotic solutions are correct, that is, the corresponding series are convergent are also shown. By inverse transformation it is easy to obtain convergence of similar series for initial systems.

Examples of relevant mathematical models of gyroscopic systems are given. These examples illustrate the described approaches to solving the problem of obtaining an almost conservative system by means of feedback and constructing a minimax control of almost conservative systems. In the literature review, the classification of the gyroscopic systems models under consideration is carried out. The results obtained are mainly theoretical. They complement the known results of matrix approaches to solving of problems of control of linear stationary continuous and discrete systems, particularly with perturbation, and can be used in the researches of mathematical models, which in particular describe the movement of mechanical systems with control and models of gyroscopic systems.

Keywords: almost conservative systems, gyroscopic systems, feedback vector, modal control, minimax control, asymptotic stability, Lyapunov equation, Riccati equation.

Publications list of the applicant.

1.*Svyatovets I.F.* Formation of an almost conservative system by means of a control vector / I.F.Svyatovets, O.P.Kolomijchuk, V.V. Novytsky // Analytical mechanics and its applications: Collection of Papers Institute of Mathematics NAS of Ukraine. - 2012. - T.9, No.1. - P.301-307.

2. *Novitsky V.V.* Modeling of an almost conservative system by means of feedback / V.V.Novitsky, O.P.Kolomiychuk, I.F.Svyatovets // Bulletin of the Zaporizhzhya National University: Scientific papers . Physics and mathematics. - 2013. - No. 2. - P.76-82.

3. *Novitsky V.V.* Control of the motion of a gyroscope with a linear characteristic of the inter-frame correction system / V.V.Novitsky, O.P.Kolomijchuk, I.F.Svyatovets // Bulletin of the Zaporizhzhya National University: Collection of scientific Papers. Physics and mathematics. - 2014 - No. 1. - P.98-105.

4. *Svyatovets I.F.* Modal approach to the control problem / I.F.Svyatovets // Analytical mechanics and its applications: Collection of Papers Institute of Mathematics NAS of Ukraine. - 2014 - T.11, No. 5. - P.199-209.

5. *Novitsky V.V.* Conditions for the formation of a almost conservative system with the help of a control vector / V.V.Novitsky, M.O.Zinchuk, I.F.Svyatovets // Bulletin of the Zaporizhzhya National University: Collection of scientific Papers. Physics and mathematics. - 2016 - No.1. - P.174 -183.

6. *Zinchuk M.O.* On asymptotic solutions of Lyapunov and Riccati matrix equations for almost conservative systems / M.O. Zinchuk, I.F.Svyatovets, A.V.Teteryatnik // Bulletin of the Zaporizhzhya National University: Collection of scientific Papers. Physics and mathematics. - 2016 - No.2. - P.110 -121.

7. *Svyatovets I.F.* Formation of a linear discrete almost conservative system by means of a control vector / I.F.Svyatovets // Bulletin of the Zaporizhzhya National University: Collection of scientific Papers. Physics and mathematics. - 2016 - No.2. - P.229 -236.

8. *Svyatovets I.* Construction of the minimax control for almost conservative controlled dynamic systems with the limited perturbations / I.Svyatovets // Eureka: Physics and Engineering. - 2017 - No.2. - P.9-15.

9. *Novitsky V.V.* Gyroscopic compass as an almost conservative observational and controlled mechanical system / V.V.Novitsky, O.P.Kolomiiychuk, I.F.Svyatovets // Modeling, management and stability: international conference, September 10-14, 2012: Abstracts .– Simferopol: Taurian National University, 2012. - P.134.

10. *Novitsky V.V.* Formation of an almost conservative system by means of feedback / V.V.Novitsky, I.F.Svyatovets, O.P.Kolomiiychuk // Dynamical system modeling and stability research: XVI Internatinal Conference, May 29-31, 2013: Abstracts .– Kyiv: Kyiv National Taras Shevchenko University, 2013. - P.376.

11. *Novitsky V.V.* Conditions for the formation of an almost conservative dynamic system by means of feedback / V.V.Novitsky, O.P.Kolomijchuk, I.F.Svyatovets // International Mathematical Conference "Bogolyubovsky reading DIF - 2301, June 23-30, 2013, Sevastopol: Abstracts .– Kyiv: Institute of Mathematics, NASU, 2013. - P.304.

12. *Svjatovets I.F.* The problem of minimax control of almost conservative systems / I.F.Svyatovets // Dynamical system modeling and stability research: XVIP†P† Internatinal Conference, May 24-26, 2017: Abstracts .– Kyiv: Kyiv National Taras Shevchenko University, 2017. - P.173.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Актуальними останнім часом стали задачі керування гіроскопічними системами, які, зокрема, можуть перебувати під впливом збурення. На сьогоднішній день важко уявити собі об'єкти авіації, космонавтики, морської техніки, які не містили б гіроскопічні прилади. До того ж, гіроскопи застосовуються і на наземних апаратах: при з'ясуванні викривлень бурових свердловин, при прокладці тунелів для метро, в системах стабілізації автомобілів та ін. Серед гіроскопічних систем часто зустрічаються майже консервативні. Дослідження майже консервативних систем та близьких до них проводяться в наукових Московській школі Ф.Л.Черноусько [147] -[153], Л.Д.Акуленко [2, 3], та Київській школі В.Б.Ларіна [72]-[77], К.І.Науменка [99], В.В.Новицького [103]-[111], М.О.Зінчука [37]-[42]. Час показав перспективність цього напрямку досліджень, оскільки саме для майже консервативних керованих систем є можливість отримання спрощених алгоритмів побудови керувань. Для неперервних та дискретних майже консервативних систем розроблено методи їх дослідження на стійкість та знайдено алгоритми побудови оптимального керування, які значно спрощуються завдяки кососиметричності матриці коефіцієнтів та наявності малого параметра. Таким дослідженням присвячена значна кількість робіт В.В.Новицького, М.О.Зінчука та їхніх учнів. Для ефективного використання розроблених алгоритмів запропоновано керовані системи, які не є майже консервативними, зводити, за допомогою зворотного зв'язку, до майже консервативних моделей.

В більшості сучасних задач керування на об'єкт керування діє зовнішнє збурення. Класичним підходом до розв'язку таких задач є мінімаксний підхід, при якому досягнення мети керування розглядається в найгіршому випадку, тобто при максимальному збуренні.

Проблеми побудови неперервних та дискретних майже консервативних керованих систем за допомогою зворотного зв'язку та знаходження мінімаксного керування майже консервативними системами на сьогоднішній час не є розробленими. Тому дослідження, що містяться в роботі є актуальними і новими та полягають в знаходженні умов розв'язання поставлених задач та побудові відповідних алгоритмів, які їх ефективно розв'язують.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертація виконана у відділі аналітичної механіки та у відділі математичних проблем механіки і теорії керування Інституту математики НАН України згідно із загальним планом науково-дослідних робіт в рамках держбюджетної теми № II–23–12 "Математичні моделі поліагрегатних систем та чисельно-аналітичні методи розв'язування сучасних задач динаміки, стійкості та оптимального керування"(номер держ. реєстрації 0112U001015) за програмою "Розробка математичних моделей та чисельно-аналітичних методів розв'язування сучасних задач фізико-технічних і медико-біологічних наук та інформаційних технологій".

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є побудова неперервних та дискретних майже консервативних систем за допомогою вектора керувань з не майже консервативних моделей , та дослідженння задачі мінімаксного керування майже консервативними системами при наявності зовнішніх збурень.

Об'єктом дослідження є лінійні стаціонарні системи парного порядку з керуванням, зокрема гіроскопічні системи, та майже консервативні системи з зовнішніми збуреннями.

Предметом дослідження є умови перетворення не майже консервативних систем в майже консервативні за допомого зворотного зв'язку, а також умови та алгоритм розв'язання мінімаксної задачі.

Методи дослідження. Методи теоретичної механіки, теорії керувань, другий метод Ляпунова, методи лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь.

Поставлена мета зумовлює розв'язання таких завдань: Знаходження умов та алгоритмів побудови майже консервативної неперервної або дискретної системи за допомогою вектора керувань; застосування різних підходів до формування майже консервативної системи, а також знаходження умов існування розв'язку та алгоритмів розв'язання задачі мінімаксного керування для майже консервативної системи.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи полягають у наступному:

1. Проведені дослідження, які стосуються побудови керованих неперервних та дискретних майже консервативних динамічних систем за допомогою спеціального вибору вектора керувань. Доведені теореми про необхідні та достатні умови побудови неперервних та дискретних майже консервативних систем.

2. Отримані теоретичні результати побудови майже консервативних динамічних систем застосовано до моделей гіровертикалі, гіроскопа з лінійною характеристикою міжрамкової корекції та об'єкта з виникаючим гіроскопічним ефектом.

3. Застосовано модальний підхід отримання майже консервативної асимптотично стійкої системи та наведено алгоритм використання модального підходу для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування, та його узагальнення на систему порядку $2n$ з m - вимірним вектором керування. Отриманий алгоритм застосовано до моделі керованого гіростабілізатора.

4. Досліджена задача мінімаксного керування для майже консервативних систем. Сформульована необхідна умова існування розв'язку відповідного рівняння Ріккаті з параметром та знайдена умова для оцінки цього параметра.

5. Отримані в дисертації результати з мінімаксного керування застосовано до моделі ротора, що обертається з постійною кутовою швидкістю та моделі двох зв'язаних керованих осциляторів.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані результати мають, переважно, теоретичне значення. Вони доповнюють відомі факти матричного підходу до вирішення проблем керування лінійними стаціонарними неперервними та дискретними системами і можуть бути використані при дослідженні математичних моделей, які, зокрема, описують рух механічних систем з керуванням та моделей гіроскопічних систем.

Особистий внесок здобувача. Значна частина результатів, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. У спільних публікаціях здобувачеві належить вибір методики розв'язання поставлених перед ним задач, аналітичні розрахунки, аналіз отриманих результатів, співавторам — визначення напрямку дослідження, постановка задачі, підбір методів дослідження та участь у обговоренні отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались і обговорювались на міжнародних конференціях: Міжнародна конференція "Моделювання, керування та стійкість MCS-2012"(Крим, Севастополь, 2012); XVI International Conference "Dynamical system modelling and stability investigation"(Kiev, 2013); Міжнародна математична конференція "Боголюбовськи читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування"(Севастополь, 2013); XVIII International Conference "Dynamical system modelling and stability investigation"(Kiev, 2017); та семінарі "Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика"(Інститут математики НАН України, м. Київ, 2017р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 12 роботах. Серед них 8 статей [135, 112, 113, 136, 114, 137, 43, 175] в наукових періодичних фахових виданнях та 4 тези доповідей [115, 116, 117, 138] на міжнародних наукових конференціях.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 185 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 140 сторінок, з них список використаних джерел займає 18 сторінок.

У **вступі** до дисертації обґрунтовано актуальність теми, виділено мету і задачі дослідження, наведено основні результати, визначено їх новизну та практичне значення, зазначено особистий внесок здобувача, апробацію роботи та публікації.

Перший розділ має оглядовий характер. У ньому дано аналіз літератури, пов'язаної з темами досліджень, що проводились здобувачем, а також стислий огляд фундаментальних робіт, тематика яких є близькою до проблем, що досліджуються у дисертаційній роботі. Розділ завершується переліком нерозв'язаних задач, вирішенню яких присвячена дисертаційна робота.

У **другому** розділі дисертації досліджені умови існування керування в не майже консервативних системах за допомогою якого можна отримати неперервну або дискретну майже консервативну систему. Показано, як можна будувати керування, яке одночасно вирішувало б дві задачі: отримання невиродженої кососиметричної матриці та побудови оптимального керування. Доведено коректність розкладання розв'язків матричних рівнянь Ляпунова та Ріккаті в нескінченні ряди. Наведено приклади застосування запропонованих методик та алгоритмів до моделей гіровертикалі, гіроскопа з лінійною характеристикою міжрамкової корекції та об'єкта з виникаючим гіроскопічним ефектом.

У **третьому** розділі дисертації запропоновано модальний підхід отримання майже консервативної асимптотично стійкої системи. Наведено алгоритм застосування модального підходу для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування та його узагальнення на систему порядку $2n$ з m - вимірним вектором керування. Отриманий алгоритм проілюстровано на моделі керованого гіростабілізатора.

У **четвертому** розділі дисертації досліджується задача мінімаксного керування майже консервативними системами зі збуреннями. Сформульовано необхідна умова існування розв'язку відповідного рівняння Ріккаті. Знайдено умова для оцінки параметра, що входить в рівняння Ріккаті. Наведено приклади застосування запропонованих методик та алгоритмів до моделі ротора, що обертається з постійною кутовою швидкістю та моделі двох зв'язаних керованих осциляторів.

Список використаних джерел нараховує 185 найменувань робіт, що цитуються в тексті дисертації.

При нагоді хочу висловити щиру подяку моєму науковому керівнику В.В. Новицькому за визначення напряму досліджень, постановки задач і кон-

сультації; кандидату фіз.-мат. наук, старшому науковому співробітнику М.О. Зінчуку та кандидату фіз.-мат. наук, старшому науковому співробітнику О.П. Коломійчуку за постійний науковий інтерес до проблематики дисертації та всім співробітникам відділу аналітичної механіки за постійну увагу і підтримку при роботі над дисертацією.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В цьому розділі наводиться огляд літератури з необхідним у дисертаційному дослідженні теоретичним матеріалом, а також раніше отримані результати стосовно керування динамічними майже консервативними системами і питаннями, пов'язаними з їх дослідженням. Крім цього, він містить посилання на ті джерела, що служать теоретичною базою для проведення обчислень і розрахунків, та обгрунтування висновків, зроблених при написанні роботи. Основна увага приділена ознайомленню з роботами, в яких досліджуються коливальни системи з малим параметром і питання, пов'язані з керуванням такими системами, зокрема, слабким керуванням.

Результати, отримані А.М.Лєтовим [81] і Р.Калманом [53], дали поштовх новому напрямку синтезу систем оптимальної стабілізації, яке називають аналітичним конструюванням регуляторів. У 1960р. з'явилася робота А.М. Лєтова [82], в якій було отримано чисельний розв'язок задачі про оптимальну стабілізацію лінійних стаціонарних об'єктів при квадратичному функціоналі якості. У тому ж 1960 р. вийшла робота американського математика Р.Калмана [168], в якій вирішувалася задача оптимізації для лінійних нестаціонарних об'єктів.

Калманом Р.Е. була вперше строго поставлена і вирішена задача про знаходження умов керованості для лінійних систем. Він розглянув [53] об'єкт керування, який описувався лінійною стаціонарною системою з постійними коефіцієнтами

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1.1}$$

де $x \in \Re^n$, $u \in \Re^m$, A, B - постійні матриці розміру $n \times n$ і $n \times m$ відповідно. Вирішити завдання про керованість системи - значить відповісти на питання про те, чи можна систему, яка описана рівняннями (1.1), перевести з будь-якого заданого початкового стану в будь-який бажаний стан за кінцевий проміжок часу, вибираючи належним чином закон зміни керуючих сил

$u = u(t)$.

Для системи (1.1) Калман Р. сформулював і довів критерій повної керованості.

В даний час теорія керування для лінійних систем досить добре розроблена. Найбільш важливі результати можна знайти в роботах Красовського М.М. [64], Уонема М. [145], Зубова В.І. [46], [47], Лі Е.Б., Маркуса Л.М. [83]. Методи декомпозиції до питань керованості лінійних систем та їх синтезу були розроблені Новицьким В.В. [106].

Методи оптимізації систем шляхом зведення до мінімуму деякого функціоналу, являють собою один з напрямків теорії керування, заснованої на методі простору станів. Інший напрямок представлено методами модального керування. Сутність, основні результати та приклади побудови модального керування представлені в роботах Кузовкова Н.Т. [67], Кухаренко Н.В. [69], Александрова А.Г. [4], [5], Андрєєва Ю.Н. [6].

Методи модального керування - це методи формування зворотних зв'язків, що надають системі заздалегідь вибране розташування її спектру [67]. Наведемо формулювання задачі модального керування [5].

Нехай задано об'єкт, який описується рівнянням (1.1). Потрібно знайти матрицю C керування

$$u = Cx, \tag{1.2}$$

таку, щоб характеристичний поліном

$$D(s) = det(Es - A - BC) \tag{1.3}$$

замкнутої системи

$$\dot{x} = (A + BC)x, \tag{1.4}$$

мав задані корені (моди).

Бажаний вид характеристичного полінома замкнутої системи можна вибрати із запропонованих в технічній літературі стандартних характеристичних поліномів, з зазначеними для них графіками перехідних процесів і показниками якості [141].

Коротко ознайомимося з роботами, в яких досліджуються системи з малим параметром.

Одна з перших робіт [147] Черноусько Ф.Л. з теорії оптимального керування пов'язана із застосуванням методів малого параметра, розвинених в механіці нелінійних систем, для вирішення задач керування, зокрема коливальними системами. Досліджувані системи автор назвав слабкокерованими. Він розробив ефективний метод, що дозволяє наближено будувати оптимальне керування в аналітичній формі. Цей метод знайшов практичне застосування при розрахунку режимів стабілізації і керування рухом космічних апаратів. Продовженням стала робота Акуленко Л.Д. [2].

Застосування наближених методів для вирішення задач оптимального керування, заснованих на ідеї малого параметра, запропоновано в роботах [56], [180], [178]. В [56] дається загальна постановка задачі оптимального керування, в припущенні, що всі функції, які описують динамічну систему, розкладаються в ряди за ступенями малого параметра. В результаті пропонується алгоритм дослідження слабкокерованих систем, з використанням якого вирішується задача про політ на максимальну дальність. В статті [180], К. Тсумура і І. Кавасаки розглядають проблему знаходження оптимальних точок керування /спостереження багатомасштабних багатоагентних систем. При знаходженні слабкого керування застосовується "принцип поділу". Метод малих параметрів для знаходження наближених аналітичних і чисельних розв'язків задачі на власні значення представлений Степановой Л.В. і Яковлевой Е.М. в роботі [178].

Для дослідження широкого класу систем з малим параметром добре зарекомендували себе розвинуті М.М.Боголюбовим, Ю.О.Митропольским та їх послідовниками асимптотичні методи [15]. Їх використання у відповідних задачах дає достатню для практики точність знаходження оптимального керування та істотну економію обчислювальних операцій у порівнянні із застосуванням загальних методів. Задачу слабкого керування слабкодемпфованими (майже консервативними) системами, за допомогою асимптотичних методів, розв'язав В. Б. Ларін в роботі [72]. Він отримав асимтотичні співвідношення, які дозволяють у першому наближенні знаходити розв'язок матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті спеціального вигляду.

Дослідження були продовжені та спрямовані на дискретні системи. В роботі [73] В. Б. Ларіна та К. І. Науменка наведено алгоритм синтезу системи керування слабкодемпфованим об'єктом, коли керування здійснюється через рівні проміжки часу. Аналізу різних аспектів керування слабкодемпфованими системами присвячені роботи Степаньянца Г. А. [142], Егорова Е.В.[36], Колобашкина Л.В. [60].

В статті [54] досліджено систему двох диференціальних рівнянь першого порядку, яка виникає при усередненні нелінійних коливальних систем по швидким одночастотним коливанням. Розглядається ситуація, коли вихідна система містить малі дисипативні доданки. Побудована асимптотика двопараметричного розв'язку з необмежено зростаючої амплітудою. Методи розв'язування задач оптимального керування з малими параметрами викладаються у монографії Калініна А.І. [52]. Розглянуто широкий клас задач, які досліджуються за єдиною схемою незалежно від типу збурень. Викладені методи проілюстровані на конкретних задачах оптимального керування механічними системами. В [29] вирішується задача стабілізації лінійних нестаціонарних систем, що містять лінійне запізнювання. Методика оцінки адекватності динамічних моделей системи керування вінтовентилятора з урахуванням малих параметрів описується в [68].

В статті [162] А. Буйкаа, Ж. Джинеб, Ж. Ллібрек розглядають нелінійні Т-періодичні диференціальні системи, що залежать від малого параметра. Незбурена система має інваріантне різноманіття періодичних розв'язків. Наводяться вирази біфуркації до другого порядку за малим параметром, щоб прості нулі були початковими значеннями періодичних розв'язків, які зберігаються після збурення. Дослідження збурених рухів твердого тіла навколо його центру мас під дією моментів, що крутять, різної фізичної природи є предметом роботи [184], авторів Ф.Л.Черноусько, Л.Д. Акуленко і Д.Д.Лещенко.

Різним аспектам вивчення динамічної поведінки осциляторів присвячені роботи М. Курта, М. Ерітен, Ф. Ромео, Г. Сігалова, Л. Бергмана, А. Вакакіса, Ю.Н. Бібікова [12], [13], [170], [163],[176], [173].

З метою удосконалення роботи різних навігаційних приладів і систем, а також створення зручного апарату керування такими системами, Новицьким В.В. [108], [109], було вперше застосовано метод [72] в теорії гіроскопічних компасів.

В роботі [103] дослідження [72, 109] узагальнені на гіроскопічні системи і вперше введене означення майже консервативної (слабкодемпфованої) системи.

Нехай маємо стаціонарну динамічну систему вигляду

$$\dot{x} = A_0 x, \tag{1.5}$$

де $x(t) \in \Re_{2n}$ — вектор стану, $A_0 = -A_0^T \in \Re_{2n\times 2n}$ — кососиметрична невироджена матриця. Будемо вважати систему (1.5) консервативною, якщо норма фазового вектора стану постійна.

$$\frac{d}{dt}(x^T x) = x^T(A_0^T + A_0)x \equiv 0, \tag{1.6}$$

звідки

$$\|x\|^2 = const. \tag{1.7}$$

Тоді систему

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x, \tag{1.8}$$

що отримана збуренням системи (1.5), будемо називати майже консервативною. Тут $A_1 \in \Re_{2n\times 2n}$ — матриця-збурення, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Відмітимо [103, 105], що про мализну матриці εA_1 порівняно з матрицею A_0 можна говорити [71], якщо

$$det A_0 \neq 0 \quad (rang A_0 = 2n). \tag{1.9}$$

Дослідженню матричного рівняння Ляпунова для майже консервативних асимптотично стійких систем, присвячені роботи [104], [110], [111]. Застосовано розклад матриці-розв'язку за малим параметром. Знайдено структуру та максимальну кількість довільних параметрів в симетричній P_0 (нульове наближення матриці P), перестановній з кососиметричною матрицею коефіцієнтів системи A_0. Показано, що асимптотичний розклад матриці-розв'язку матричного рівняння Ляпунова для майже консервативних асимптотично стійких систем залежить від структур матриці-збурення і її правої частини.

В роботі [37], авторами запропоновано алгоритм побудови матричного рівняння Ляпунова для майже консервативних систем у випадку кратних власних значень консеративної частини матриці коефіцієнтів і не фіксованою правою частиною рівняння (матриця Q задається тільки структурно).

Розв'язок матричного рівняння Ляпунова для майже консервативної асимптотично стійкої дискретної системи побудовано в роботі [40].

Питанням оптимального керування неперервними та дискретними майже консервативними системами з квадратичним критерієм якості присвячені роботи [41], [107]. Наведено алгоритм розв'язку відповідного матричного рівняння Ріккаті. Сформульовано умови, при яких можна отримати точний розв'язок нескінченної системи рівнянь, що відповідає рівнянню Ріккаті за скінченну кількість кроків. Наведено приклад побудови оптимального керування майже консервативною системою четвертого порядку.

Умови стійкості та оптимального керування системами, з матрицями коефіцієнтів, що залежать від параметра, присвячені роботи [39], [42].

В роботі [5], Александров А.Г. розглянув задачу мінімаксного керування системою

$$\dot{x} = Ax + Bu + \Psi f, \tag{1.10}$$

де f - невідоме збурення з обмеженою енергією.

Задача полягає в тому, щоб знайти керування $u(t)$, яке мінімізує функціонал

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T u - \gamma^2 f^T f) dt, \tag{1.11}$$

і дію збурення.

У роботах [185],[156], [157] Шорікова А.Ф. запропоновані необхідні формалізації і конструктивні рішення програмних і позиційних мінімаксних задач, а також чисельні алгоритми в формі реалізації послідовностей вирішення завдань лінійного і опуклого програмування. Результати, які він отримав, можуть бути використані для комп'ютерного моделювання реальних динамічних процесів і для проектування керуючих і навігаційних систем.

Задача мінімізації зворотного зв'язку для лінійної динамічної системи розглянута в статтях [165], [166]. Проблема формалізована як позиційна диференціальна гра. Наводиться чисельний метод для знаходження наближеного ігрового значення і побудови оптимального (мінімаксного і максимінного) закону керування.

Вирішенню задач, пов'язаних з питаннями мінімаксного керування присвячені роботи [160], [171], [172].

Як приклади, що ілюструють теоретичні висновки зроблених в роботі досліджень, обрані математичні моделі гіроскопічних систем. На сьогоднішній день важко уявити собі об'єкти авіації, космонавтики, морської техніки, які не містили б гіроскопічні прилади. До того ж, гіроскопи застосовуються і на наземних апаратах: при з'ясуванні викривлень бурових скважин, при прокладці тунелів для метро, в системах стабілізації автомобілів та ін.

У цьому зв'язку, зрозуміло, що існує велика кількість літератури, присвяченої конкретним аспектам викладення теоретичних основ, класифікації, конструювання, застосування гіроскопічних приладів і систем [7]-[11],[14, 16], [18, 20], [21, 22], [24]-[27], [31]-[34], [44], [48]-[51], [55, 58, 59], [61]-[63], [65, 66],[78],[79], [80], [84]-[87], [89], [91]-[93], [95]-[97],[100]-[102], [105], [118]-[126], [129]-[134],[139, 140], [154, 155],[174], [177],[164], [167],[169], [161].

Проаналізувавши відповідну літературу, що стосується гіроскопічних систем, можна виділити моделі, які відносяться до майже консервативних систем, або стають такими після застосування неособливого перетворення. Наведемо деяки з них:

— рівняння збуреного руху ротора, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω [94]. Ротор насаджений на вал без зміщення і перекосу.

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + b\dot{x} + k^2 x + b\omega y = 0 \\ &\ddot{y} + b\dot{y} + k^2 y - b\omega x = 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

де k^2 — кругова частота поперечних пружних коливань валу за відсутності внутрішнього тертя, b — коефіцієнт внутрішнього тертя, віднесений до одиниці маси.

— рівняння руху маятникого гірокомпаса, з урахуванням заміни змінних [97]

$$\begin{gathered} A\ddot{\alpha}' + H\Omega_0 cos\theta \cdot \alpha' + H\dot{\beta}' + mglsin\varepsilon \cdot \beta' = 0 \\ -H\dot{\alpha}' + A\ddot{\beta}' + (H\Omega_0 cos\theta + mgl)\beta' = 0. \end{gathered} \tag{1.13}$$

— вільні коливання гіромаятника [122]

$$\begin{gathered} A\ddot{\alpha} + f_1\dot{\alpha} + Pl\alpha - H\dot{\beta} = 0 \\ B\ddot{\beta} + f_2\dot{\beta} + Pl\beta + H\dot{\alpha} = 0. \end{gathered} \tag{1.14}$$

— диференціальні рівняння, що характеризують власні рухи датчика кутової швидкості з механічною пружиною [25]

$$\ddot{\beta} + 2\chi n_0\dot{\beta} + n_0^2\beta = 0. \tag{1.15}$$

— рівняння вільних коливань головної осі гіроширoткомпаса, щодо положення його динамічної рівноваги [14]

$$\begin{gathered} \ddot{\alpha}_0 + a\omega\dot{\alpha}_0 + \omega^2\alpha_0 = 0 \\ \ddot{\theta}_0 + a\omega\dot{\theta}_0 + \omega^2\theta_0 = 0. \end{gathered} \tag{1.16}$$

— лінеаризовані рівняння руху системи корабель - заспокоювач [48]

$$\begin{gathered} A\ddot{\theta} + b_1\dot{\theta} + Dh\theta + H\dot{\beta} = Dh\gamma(t) \\ B\ddot{\beta} + b_2\dot{\beta} + Pl\beta - H\dot{\theta} = 0. \end{gathered} \tag{1.17}$$

— гіроскопічний стабілізатор вагона однорейкової залізниці [48]

$$\begin{gathered} A\ddot{\theta} + b_1\dot{\theta} - Dh\theta + H\dot{\beta} = 0 \\ B\ddot{\beta} + b_2\dot{\beta} - Pl\beta - H\dot{\theta} = 0. \end{gathered} \tag{1.18}$$

— рівняння малих коливань гіроскопа в кардановому підвісі, встановленого на нерухомій основі [51]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x + \frac{D}{J}\Omega^2(x - z) = 0$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} + \Omega^2(z - x) = 0. \tag{1.19}$$

Серед лінійних гіроскопічних систем можна виділити системи з малим параметром, для яких, у разі подання матриці коефіцієнтів у вигляді $\tilde{A} = \tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1$, матриця $\tilde{A}_0$ не є кососиметричною, або $det(\tilde{A}_0) = 0$; тобто ті, для яких не виконуються умови майже консервативності. Нас будуть цікавити тільки системи парного порядку, тому що для кососиметричної матриці непарного порядку визначник завжди дорівнює нулю.

Проведемо класифікацію прикладів, що розглядаються, за структурою загального вигляду матриці коефіцієнтів для зручності подальшого дослідження. Для цього, за допомогою відповідної заміни змінних, приведемо математичні моделі до нормальних систем диференціальних рівнянь першого порядку у матричної формі. Почнемо з найбільш чисельної групи - систем четвертого порядку.

До загальної моделі виду

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ A & B & C & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ E & F & G & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \tag{1.20}$$

можна віднести

при $A = B = C = E = G = H = 0$

— систему диференціальних рівнянь, яка описує поведінку гіроскопічного стабілізатора при малих значеннях x і y [51];

— лінеарізовані рівняння руху вільного гіроскопа [118];

— лінеарізовані рівняння руху гіроскопа в кардановому підвісі без урахування кутових рухів початкової системи координат [16];

— лінеаризовані рівняння руху ротора вільного гіроскопа, при запису їх по відношенню до системи координат, пов'язаної з основою, на якій гіроскоп встановлений, і яка обертається з постійною кутовою швидкістю ω_z [48];

— незгасаючі нутаційні коливання триступеневого астатичного гіроскопа, якому при перпендикулярних рамках наданий початковий імпульс [122];

при $A = C = E = G = 0$

— рівняння другого наближення відходу гіроскопа при кутових коливаннях основи [122];

— лінеаризовані рівняння руху гіроскопа при врахуванні тільки моментів в'язкого тертя [118];

при $C = E = G = H = 0$

— систему рівнянь руху заспокоювача коливань суден пасивного типу [19];

— рівнянь коливань корабля з активним заспокоювачем [48];

при $A = E = G = H = 0$

— рівняння руху гірорами (при деяких припущеннях) [14];

— рівняння руху одноосного силового гіростабілізатора [31];

при $A = E = G = 0$

— рівняння руху гірорами відносно нерухомої системи координат [14];

— лінеаризовані рівняння руху гіроскопа з лінійною характеристикою системи міжрамкової корекції [122];

— лінійну частину рівнянь руху одноосного гіростабілізатора близько нульового положення рівноваги [22];

при $A = B = E = G = 0$

— рівняння гіростабілізатора без моменту в'язкого тертя [31];

при $A = G = 0$

— рівняння руху осі гіровертикалі в першому наближенні [31];

при $B = E = G = 0$

— рівняння малих коливань в околі стаціонарного руху одноосного гіроскопічного стабілізатора, встановленого на нерухомій основі [51].

Декілька прикладів систем другого порядку:

— рівняння руху осі y поплавкого гіроінтегратора кутових швидкостей

[14], при $A = C = 0, B = 1$ можна віднести до загальної схеми виду

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{1.21}$$

а при $B = D = 0$

— рівняння руху гіроскопу з пропорційною міжрамковою корекцією [122];та

— рівняння руху гіроскопа напрямку з пропорційною характеристикою міжрамкової корекції [118].

Декілька прикладів систем шостого порядку. До загальної моделі виду

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

можна віднести при $A_2 = A_3 = A_6 = B_1 = B_3 = B_4 = B_5 = B_6 =$
$= C_2 = C_3 = C_4 = C_6 = 0$

— рівняння руху гіроскопічного пристрою [49];

при $A_1 = A_2 = A_3 = A_5 = B_1 = B_3 = B_4 = B_5 = C_1 = C_3 = C_5 = C_6 = 0$

— рівняння, що характеризують взаємний вплив обертань навколо різних осей у колісних екіпажів і літаків [86];

при $A_3 = A_4 = A_5 = B_1 = B_2 = B_5 = B_6 = C_1 = C_3 = C_4 = C_5 = 0$

— рівняння, що описують дію гіроскопічних моментів, на прикладі колісного пароплава [86].

Цілком природньо виникає задача побудови майже консервативних систем з метою спрощення їх подальшого дослідження.

Характер стійкості динамічної системи значною мірою визначається структурою діючих на неї сил. Тому важливим етапом дослідження моделей систем, що розглядаються в роботі, є аналіз сил по їх математичної структурі. Будемо користуватися класифікацією сил, запропонованою Д.Р.Меркіним

[94]. Для системи, рівняння якої можуть бути записані у вигляді

$$A_0\ddot{q} + (B_0 + H_0)\dot{q} + (C_0 + P_0)q = X(\dot{q}, q, t), \tag{1.23}$$

де $q = [q_1, ..., q_n^T] \in \Re_n$ — вектор узагальнених координат, а

$X(\dot{q}, q, t) \in \Re_n$ — вектор зовнішніх сил, який у нашому випадку є керуванням у вигляді зворотного зв'язку

$$X(\dot{q}, q, t) = -(L_1 q + L_2\dot{q}) = -Kx = -K \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}, \tag{1.24}$$

$L_1, L_2 \in \Re_{n\times n}$, $K = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \end{bmatrix}$.

Маємо наступну класифікацію:

$A_0 = A_0^T \in \Re_{n\times n}$ — додатно визначена матриця інерції, $B_0 = B_0^T \in \Re_{n\times n}$ — матриця дисипативних сил, $H_0 = -H_0^T \in \Re_{n\times n}$ — матриця гіроскопічних сил, $C_0 = C_0^T \in \Re_{n\times n}$ — матриця консервативних (потенційних) сил,$P_0 = -P_0^T \in \Re_{n\times n}$ — матриця непотенційних сил (сил радіальної корекції).

При розв'язанні задач, які ілюструють теоретичні положення дисертації, дотримуємося наступного алгоритму:

1. Аналіз сил, що діють на систему, за їх математичною моделлю у формі Лагранжа;

2. Перетворення системи рівнянь (1.23) за допомогою заміни [158]

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ M\dot{q} \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

у форму Коші

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M(\dot{q})^{\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ MA_0^{-1}(-(B_0 + H_0)\dot{q} - (C_0 + P_0)q) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} M^{-1}x_2 \\ M(-M^{-1}A_0^{-1}(B_0 + H_0)x_2 - A_0^{-1}(C_0 + P_0)x_1) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ -MA_0^{-1}(C_0 + P_0) & -A_0^{-1}(B_0 + H_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Якщо на систему діють великі гіроскопічні та потенційні сили, то її можна записати у вигляді

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & M^{-1}\\ -MA_0^{-1}C_0 & -A_0^{-1}H_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \\ +\varepsilon\begin{bmatrix}0 & M^{-1}\\ -MA_0^{-1}P_0 & -A_0^{-1}B_0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}, \tag{1.27}$$

де $\varepsilon > 0$- деякий малий параметр.

Матриця

$$\begin{bmatrix}0 & M^{-1}\\ -MA_0^{-1}C_0 & -A_0^{-1}H_0\end{bmatrix} \tag{1.28}$$

має чисто уявний спектр, тому еквівалентним перетворенням зводиться до кососиметричної $F_0 = -F_0^T$, а динамічна система (1.27) до майже консервативної

$$\dot{x} = (F_0 + \varepsilon F_1)x. \tag{1.29}$$

3. Перевірка умови повної керованості системи;

4. Побудова керування, що перетворює систему у майже консервативну;

5. Формування матриці коефіцієнтів замкненої системи та перехід до форми Лагранжа для аналізу структури сил, діючих на нову систему.

Зауважимо, що ще залишились не достатньо вивченими задачі, пов'язані з:

• дослідженням умов формування майже консервативних систем за допомогою зворотного зв'язку;

• побудовою майже консервативних систем методами модального керування для подальшого спрощення їх дослідження;

• постановкою та розв'язуванням задачи мінімаксного керування для майже консервативних систем.

РОЗДІЛ 2
КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ ЗА ДОПОМОГОЮ СПРОЩЕНИХ АЛГОРИТМІВ

У цьому розділі дисертації досліджуються питання керування динамичними системами. Зокрема, розглядається задача використання вектора зворотного зв'язку для побудови неперервних та дискретних майже консервативних систем.

Спочатку показується, що за допомогою спеціального вибору вектора керувань можливо отримати майже консервативну систему, для якої можна застосовувати спрощені методи дослідження стійкості, побудови оптимального регулятора та стабілізації системи.

Далі досліджуються умови існування бажаного керування. Для цього застосовуються різні підходи: використання деякої невідомої кососиметричної матриці для формулювання необхідної умови; використання кронекерівського добутку матриць.

Використовується підхід, який застосовується для стабілізації лінійної диференціальної системи з матрицею коефіцієнтів у формі Фробеніуса. В цьому підході спочатку будується необхідна матриця коефіцієнтів (обмежень на матрицю немає), а потім обчислюється вектор зворотного зв'язку.

Доводяться теореми, що вказують на необхідні та достатні умови побудови майже консервативних систем.

Показується, як можна будувати керування, яке одночасно розв'язувало б дві задачі. Перша - отримання невиродженої кососиметричної матриці, а як наслідок - формування майже консервативної системи. Друга - побудова оптимального керування.

Розглядаєтья питання про коректність розкладання розв'язків рівнянь Ляпунова і Ріккаті в нескінченні ряди і їх збіжності.

Наводяться приклади застосування запропонованих методик та алгоритмів до моделей гіровертикалі, гіроскопа з лінійною характеристикою міжрамкової корекції та об'єкта з виникаючим гіроскопічним ефектом.

2.1. Про асимптотичні розв'язки матричних рівнянь Ляпунова та Ріккаті для неперервних майже консервативних систем

У більшості прикладів, які розглядаються в роботі, проводиться дослідження систем на асимптотичну стійкість за допомогою матричного рівняння Ляпунова. У деяких задачах будується оптимальне керування. Дослідження матричного рівняння Ляпунова для майже консервативних систем розглянуто в роботах [37], [40], [104] , а публікації [38], [41], [107] присвячені оптимальному керуванню такими системами та дослідженню відповідного рівняння Ріккаті. Для пошуку розв'язків матричних рівняннь Ляпунова і Ріккаті останні розкладаються в нескінченні системи матричних рівнянь, а відповідні розв'язки в нескінченні ряди. Тому, природньо, постає задача про збіжність цих рядів. В названих роботах це питання освітлено не достатньо широко і строго.

Нижче розглянуто неперервні та дискретні майже консервативні автономні і керовані системи, які за допомогою деякого ортогонального перетворення зводяться до канонічних форм. Потім для перетворених систем побудовано рівняння Ляпунова та Ріккаті і показано при яких значеннях параметра ε їх асимптотичні роз'язки коректні, тобто відповідні ряди збіжні. За допомогою зворотного перетворення легко отримати збіжність аналогічних рядів для початкових систем.

1. Розглянемо лінійну стаціонарну неперервну асимптотично стійку майже консервативну систему

$$\dot{y} = (\tilde{A}_0 + \varepsilon \tilde{A}_1)y, \qquad y(t_0) = y_0, \tag{2.1}$$

де $y \in \mathbb{R}_{2n}$ — вектор стану, $\tilde{A}_0 = -\tilde{A}_0^T \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — кососиметрична невироджена матриця загального вигляду, $\tilde{A}_1 \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — стала матриця збурення, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

За допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$ від системи (2.1) перейдемо до наступної [37]:

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.2}$$

де $x_0 = Ty_0$, $A_1 = T\tilde{A}_1T^T$, а матриця $\tilde{A}_0$ зведена до блочно-діагональної форми [146]

$$A_0 = T\tilde{A}_0T^T = \{G_1, G_2, \ldots, G_r\}, \tag{2.3}$$

де $G_i = \operatorname{diag}\{S_i, \ldots, S_i\}$, $G_i \in R_{2n_i \times 2n_i}$, $S_i = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_i \\ -\varphi_i & 0 \end{bmatrix} \in R_{2\times 2}$, $\varphi_i \neq \varphi_j$, для $i \neq j$ $(i, j = 1, ..., r)$, $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

Оскільки система (2.1) асимптотично стійка, то виконується нерівність $\operatorname{Re}(A_0 + \varepsilon A_1) < 0$ та існує додатно означена симетрична матриця-розв'язок $P \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ матричного рівняння Ляпунова [159]

$$P(A_0 + \varepsilon A_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)^T P = -2Q, \tag{2.4}$$

де $Q \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — деяка невід'ємно означена матриця.

В [104] показано, що матриці P і Q можна вибрати у вигляді степеневих рядів за малим параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \ldots, \quad Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \ldots. \tag{2.5}$$

Матричне рівняння (2.4) еквівалентне нескінченній системі матричних алгебраїчних рівнянь [104]:

$$A_0P_0 - P_0A_0 = 0, \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} A_0P_1 - P_1A_0 = P_0A_1 + A_1^TP_0 + 2Q_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0P_i - P_iA_0 = P_{i-1}A_1 + A_1^TP_{i-1} + 2Q_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered} \tag{2.7}$$

Позначимо [37]

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & \ldots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}^T & \ldots & P_{nn} \end{bmatrix}_k, \; D_k = \begin{bmatrix} D_{11} & \ldots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}^T & \ldots & D_{nn} \end{bmatrix}_k = P_{k-1}A_1 + A_1^TP_{k-1} + 2Q_k, \tag{2.8}$$

$D_{ij}, P_{ij} \in R_{2\times 2}$, $i, j = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, \ldots$. Матриця нульового наближення має такий вигляд:

$$P_0 = \operatorname{diag}\{W_1, \ldots, W_r\}, \tag{2.9}$$

де блоки W_l, $l = \overline{1,r}$ спеціальної структури. Тоді блоки $P_{ij} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}_{ij}$ можна визначити за однією з трьох формул

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\varphi_j d_2 - \varphi_i d_3}{\varphi_i^2 - \varphi_j^2}, \quad c_2 = \frac{-\varphi_j d_1 - \varphi_i d_4}{\varphi_i^2 - \varphi_j^2}, \\ c_3 &= \frac{\varphi_i d_1 + \varphi_j d_4}{\varphi_i^2 - \varphi_j^2}, \quad c_4 = \frac{\varphi_i d_2 - \varphi_j d_3}{\varphi_i^2 - \varphi_j^2}; \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$c_4 - c_1 = \frac{d_2}{\varphi_i}, \quad c_3 = c_2 = \frac{d_1}{2\varphi_i}; \tag{2.11}$$

$$c_4 - c_1 = \frac{d_2}{\varphi_i}, \quad c_2 + c_3 = \frac{d_1}{\varphi_i}, \tag{2.12}$$

де $D_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}_{ij}$. Тут блоки P_{ij}, D_{ij} для кожного k свої.

З формул (2.10)–(2.12) випливає, що при нерівностях $\varphi_i \neq \varphi_j$, $\varphi_i \neq 0$, які виконуються за умовою, значення відношення максимального по модулю з обчислених параметрів c_i, $i = \overline{1,4}$ до ненульового мінімального по модулю з параметрів обчислених на попередньому кроці (від них залежать значення d_i, $i = \overline{1,4}$) будуть обмеженими.

Параметри c_i, які не набули значень за формулами (2.11), (2.12), обчислюються з наступної системи рівнянь, що формуються з елементів матриці D_k за необхідними та достатніми умовами розв'язності k-го рівняння [37]

$$\begin{aligned} d_1^{lj} + d_4^{lj} = 0,\ j \geq l = 1, \ldots, n_i, \\ d_2^{lj} - d_3^{lj} = 0, \quad j > l = 1, \ldots, n_i - 1, \end{aligned} \tag{2.13}$$

де $\begin{bmatrix} d_1^{lj} & d_2^{lj} \\ d_3^{lj} & d_4^{lj} \end{bmatrix} = d_{lj}$, $\quad d_2^{ll} = d_3^{ll}$. Матриці Q_k задаються конкретні числові, якщо розв'язність даної системи не залежить від них, або структурно (наприклад, діагональні) з вільними параметрами, яким надаються конкретні значення, виходячи з умов її розв'язності. Відношення максимального по модулю зі значень розв'язку системи (2.13) до ненульвого мінімального по модулю із коефіцієнтів (вони залежать від розв'язку на попередньому кроці) будуть обмеженими, що виконується, враховуючи зауваження щодо c_i, $i = \overline{1,4}$, послідовно для $k = 1, 2, \ldots$. Параметри, що залишаються вільними, вважаємо обмеженими.

Таким чином, з наведених вище міркувань випливає обмеженість відношень матричних норм $\frac{||P_{i+1}||}{||P_i||} \leq \delta < \infty$, $i = 0, 1, \ldots$, де δ — деяке додатне число. Тоді при $\varepsilon\delta < 1$ ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i ||P_i||$ збігається. Дійсно, із послідовності нерівностей

$$\frac{||P_1||}{||P_0||} \leq \delta, \ \frac{||P_2||}{||P_1||} \leq \delta, \ \ldots, \ \frac{||P_{i+1}||}{||P_i||} \leq \delta, \ \ldots, \tag{2.14}$$

помноживши ліві та праві частини, отримуємо

$$||P_i|| \leq \delta^i ||P_0||, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2.15}$$

або

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i ||P_i|| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \delta^i ||P_0|| = \frac{1}{1 - \varepsilon\delta} ||P_0||. \tag{2.16}$$

З (2.16) та [1, с.141] випливає збіжність ряду $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i$. Якщо для деякого l виконується $P_l = 0$, то в ряду (2.14) замість відношень $\frac{||P_l||}{||P_{l-1}||} \leq \delta$, $\frac{||P_{l+1}||}{||P_l||} \leq \delta$ буде стояти $\frac{||P_{l+1}||}{||P_{l-1}||} \leq \delta^2$. В той же час, нерівності (2.15) виконуються всі.

Оскільки матриці Q_i, $i = 1, 2, \ldots$ вибираємо, то для них виконуються нерівності $\frac{||Q_{i+1}||}{||Q_i||} \leq \theta < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$, де θ — деяке додатне число. Тоді ряди $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i ||Q_i||$ та $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i$ при $\varepsilon\theta < 1$ збігаються. Отже, при виборі $\varepsilon < \min\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta}\}$ обидва ряди (2.5) збігаються.

Покажемо, що розв'язки $\tilde{P}, \tilde{Q}$ відповідного матричного рівняння Ляпунова для початкової системи (2.1), записані у вигляді подібному (2.5), збігаються при деяких значеннях параметра ε. Помножимо (2.4) зліва на матрицю T, а справа на T^T отримаємо

$$\tilde{P}(\tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1) + (\tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1)^T \tilde{P} = -2\tilde{Q}, \tag{2.17}$$

де $\tilde{P} = TPT^T, \tilde{Q} = TQT^T$. Тоді із $||T|| < \infty$, $||T^T|| < \infty$ і (2.16) при $\varepsilon\delta < 1$ маємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i ||\tilde{P}_i|| = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i ||TP_iT^T|| \leq \omega ||P_0|| \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \delta^i = \frac{\omega}{1 - \varepsilon\delta} ||P_0||, \tag{2.18}$$

де $\omega = ||T||||T^T|| < \infty$. Співвідношення (2.18) показує збіжність ряду $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{P}_i$. Коректність асимптотичного розкладу для матриці $\tilde{Q}$ показується подібним чином.

2. Розглянемо лінійну стаціонарну неперервну керовану майже консервативну систему

$$\dot{y} = (\tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1)y + \varepsilon\tilde{B}u, \qquad y(t_0) = y_0, \tag{2.19}$$

де $y \in \mathbb{R}_{2n}$ — вектор стану, $\tilde{A}_0 = -\tilde{A}_0^T \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — кососиметрична невироджена матриця, $\tilde{A}_1 \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — стала матриця збурення, $u \in \mathbb{R}_m$ — вектор керування, $\tilde{B} \in \mathbb{R}_{2n\times m}$ — матриця при керуванні, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

Аналогічно попередньому за допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$ від системи (2.19) перейдемо до наступної [38]:

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon Bu, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{2.20}$$

де $x_0 = Ty_0$, $A_1 = T\tilde{A}_1T^T$, $B = T\tilde{B}$, а матриця $\tilde{A}_0$ зведена до блочно-діагональної форми A_0 (2.3).

Будемо шукати оптимальний регулятор для (2.19) у вигляді зворотного зв'язку за станом

$$u = -Kx \tag{2.21}$$

з квадратичним критерієм якості

$$J = \int_0^\infty \left(x^TQx + u^TRu\right) dt, \tag{2.22}$$

де $K \in \mathbb{R}_{m\times 2n}$ — деяка стала матриця, $R \in \mathbb{R}_{m\times m}$ — додатно означена матриця, а $Q \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — невід'ємно означена матриця.

Регулятор (2.21) буде оптимальним [159], якщо

$$K = \varepsilon R^{-1}B^TS, \tag{2.23}$$

де $S \in \mathbb{R}_{2n\times 2n}$ — симетрична додатно означена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^TS + S(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon^2 SBR^{-1}B^TS + Q = 0.$$

Тут Q та R — матриці з (2.22).

Введемо заміну [72] $P = \varepsilon S$, тоді прийдемо до наступного еквівалентного матричного рівняння Ріккаті:

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T P + P(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon PBR^{-1}B^T P + \varepsilon Q = 0. \tag{2.24}$$

Виходячи з (2.24), матрицю-роз'язок P будемо шукати у вигляді розкладу за параметром ε (2.5). Матрицю Q зобразимо у вигляді подібного розкладу.

Від параметричного матричного рівняння Ріккаті, підставляючи (2.5) в (2.24) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, приходимо до нескінченної системи матричних рівнянь типу Ріккаті

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \tag{2.25}$$

$$\begin{gathered}
A_0 P_1 - P_1 A_0 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 - P_0 BR^{-1}B^T P_0 + Q_0, \\
A_0 P_2 - P_2 A_0 = P_1 A_1 + A_1^T P_1 - P_1 BR^{-1}B^T P_0 - \\
- P_0 BR^{-1}B^T P_1 + Q_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_0 P_k - P_k A_0 = P_{k-1} A_1 + A_1^T P_{k-1} - \\
- \sum_{i=1}^{k} P_{i-1} BR^{-1}B^T P_{k-i} + Q_{k-1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered} \tag{2.26}$$

Позначимо [38]

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}^T & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}_k, \quad D_k = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}^T & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}_k = P_{k-1} A_1 + \\
+ A_1^T P_{k-1} - \sum_{i=1}^{k} P_{i-1} BR^{-1}B^T P_{k-i} + Q_{k-1}, \tag{2.27}$$

$D_{ij}, P_{ij} \in R_{2\times 2}$, $i,j = \overline{1,n}$, $k = 1,2,\dots$. Матриця P_0 має структуру (2.9). Оскільки ліві частини рівнянь системи (2.26) збігаються з лівими частинами відповідних рівнянь системи (2.7), то блоки P_{ij} обчислюються за формулами (2.10)–(2.12), а вільні параметри із системи (2.13). При $k = 1$ система

(2.13) складається з нелінійних рівнянь, для якої відношення максимального по модулю зі значень розв'язків до ненульового мінімального по модулю із коефіцієнтів, як і для лінійних рівнянь, будуть обмеженими. Тоді, виходячи з міркувань наведених в попередньому пункті, будемо мати збіжність рядів (2.5) для $\varepsilon < \min\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta}\}$.

Аналогічно попередньому (співвідношення (2.18)) можна показати, що розв'язки $\tilde{P}, \tilde{Q}$ відповідного матричного рівняння Ріккаті для початкової системи (2.19), записані у вигляді подібному (2.5), збігаються при деяких значеннях параметра ε. Для цього необхідно помножити (2.24) зліва на матрицю T^T, а справа на T і розглянути матриці $\tilde{P} = T^T P T,\ \tilde{Q} = T^T Q T$, як це було показано вище.

2.2. Про асимптотичні розв'язки матричних рівнянь Ляпунова та Ріккаті для дискретних майже консервативних систем

1. Розглянемо дискретну лінійну стаціонарну асимптотично стійку майже консервативну систему

$$y(k+1) = (\tilde{F}_0 + \varepsilon \tilde{F}_1) y(k), \quad y(0) = y_0, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{2.28}$$

де $y \in \mathbb{R}_n$ — вектор стану, $\tilde{F}_0$ — ортогональна матриця $\left(\tilde{F}_0^T \tilde{F}_0 = \tilde{F}_0 \tilde{F}_0^T = I\right)$, $\tilde{F}_1 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ — довільна стала матриця, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

За допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$ від системи (2.1) перейдемо до наступної [40]:

$$x(k+1) = (F_0 + \varepsilon F_1) x(k), \quad x(0) = x_0, \tag{2.29}$$

де $x_0 = Ty_0$, $F_1 = T\tilde{F}_1 T^T$, а матриця $\tilde{F}_0$ зведена до блочно-діагональної форми [146]

$$F_0 = T\tilde{F}_0 T^T = \{G_1, G_2, \dots, G_r\}, \tag{2.30}$$

де $G_1 = I \in R_{2n_1\times 2n_1}$, $G_2 = -I \in R_{n_2\times n_2}$, $G_i = \mathrm{diag}\{S_i, \dots, S_i\}$, $G_i \in R_{2n_i\times 2n_i}$, $S_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix} \in R_{2\times 2},\ a_i^2 + b_i^2 = 1,\ b_i \neq b_j$, для $i \neq j$ $(i, j \in \{\overline{1, r}\},\ n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

Перетворена система (2.29) також асимптотично стійка, тому власні значення матриці коефіцієнтів $F_0 + \varepsilon F_1$ лежать в одиничному крузі та існує додатно визначена матриця $P \in \mathbb{R}_{n\times n}$ яка задовольняє матричне рівняння Ляпунова [159]

$$[F_0 + \varepsilon F_1]^T P [F_0 + \varepsilon F_1] - P = -Q, \tag{2.31}$$

де $Q \in \mathbb{R}_{n\times n}$ — деяка невід'ємноно визначена матриця.

Виходячи з вигляду рівняння (2.31), будемо шукати матриці-розв'язки P і Q у вигляді степеневих рядів за малим параметром ε (2.5). Від рівняння (2.31) перейдемо до нескінченної системи матричних рівнянь

$$P_0 - F_0^T P_0 F_0 = 0, \tag{2.32}$$

$$\begin{gathered}
P_1 - F_0^T P_1 F_0 = F_0^T P_0 F_1 + F_1^T P_0 F_0 + Q_1, \\
P_2 - F_0^T P_2 F_0 = F_0^T P_1 F_1 + F_1^T P_1 F_0 + F_1^T P_0 F_1 + Q_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
P_k - F_0^T P_k F_0 = F_0^T P_{k-1} F_1 + F_1^T P_{k-1} F_0 + F_1^T P_{k-2} F_1 + Q_k, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered} \tag{2.33}$$

Позначимо [40]

$$\begin{gathered}
P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}^T & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}_k, \quad D_k = \begin{bmatrix} D_{11} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}^T & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}_k = F_0^T P_{k-1} F_1 + \\
+ F_1^T P_{k-1} F_0 + F_1^T P_{k-2} F_1 + Q_k, \quad P_{-1} = 0, \ k = 1, 2, \dots,
\end{gathered} \tag{2.34}$$

де $D_{ij}, P_{ij} \in R_{2\times 2}, \ j \geq i = 3, ..., m, \ D_{11}, D_{12}, D_{22} \in R, \ D_{ij} \in R_{1\times 2}, \ i = 1, 2, \ j = 3, ..., m$. Матриця P_0 має структуру (2.9). Тоді блоки P_{ij} можна визначити за однією з наступних формул:

$$\begin{gathered}
c1 = \frac{d_1}{2} + \frac{b_i d_3 - b_j d_2}{2(a_i - a_j)}, \quad c2 = \frac{d_2}{2} + \frac{b_i d_4 + b_j d_1}{2(a_i - a_j)}, \\
c3 = \frac{d_3}{2} - \frac{b_i d_1 + b_j d_4}{2(a_i - a_j)}, \quad c4 = \frac{d_4}{2} - \frac{b_i d_2 - b_j d_3}{2(a_i - a_j)};
\end{gathered} \tag{2.35}$$

$$c_1 - c_4 = d_1 - \frac{a_i}{b_i} d_2, \quad c_3 = c_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_i}{b_i} d_1 + d_2\right); \tag{2.36}$$

$$c_1 - c_4 = d_1 - \frac{a_i}{b_i} d_2, \quad c_2 + c_3 = \frac{a_i}{b_i} d_1 + d_2, \tag{2.37}$$

де $P_{ij} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}_{ij}$, $D_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}_{ij}$;

$$P_{12} = \frac{1}{2} D_{12}; \tag{2.38}$$

$$c_1 = \frac{(1 - a_j)d_1 - b_j d_2}{2(1 - a_j)}, \quad c_2 = \frac{(1 - a_j)d_2 + b_j d_1}{2(1 - a_j)}; \tag{2.39}$$

$$c_1 = \frac{(1 + a_j)d_1 + b_j d_2}{2(1 + a_j)}, \quad c_2 = \frac{(1 + a_j)d_2 - b_j d_1}{2(1 + a_j)}, \tag{2.40}$$

де $P_{ij} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}_{2j}$, $D_{ij} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix}_{2j}$, $i = 1, 2$;

$$0 \equiv P_{ii} - P_{ii} = -D_{ii}, \quad i = 1, 2; \tag{2.41}$$

Відзначимо, що блоки P_{ij}, D_{ij} для кожного k свої.

З формул (2.35)–(2.41) випливає, що при нерівностях $a_i \neq a_j$, $a_i \neq \pm 1$, $b_i \neq 0$, які виконуються за умовою, значення відношення максимального по модулю з обчислених параметрів c_i, $i = \overline{1, 4}$ до ненульового мінімального по модулю з параметрів обчислених на попередньому кроці (від них залежать значення d_i, $i = \overline{1, 4}$) будуть обмеженими.

Параметри c_i, які не набули значень за формулами (2.36), (2.37), обчислюються з наступної системи рівнянь, що формуються з елементів матриці D_k за необхідними та достатніми умовами розв'язності k-го рівняння [40]

$$\begin{aligned} &d_{lj} = 0,\ j \geq l = 1, \ldots, n_i,\ d_{lj} \in \mathbb{R}_{1\times 1},\ i = 1, 2; \\ &d_2^{lj} - d_3^{lj} = 0, \quad j > l = 1, \ldots, n_i - 1, \\ &d_1^{lj} + d_4^{lj} = 0, \quad j \geq l = 1, \ldots, n_i, \quad i = 3, \ldots, r, \end{aligned} \tag{2.42}$$

де $d_{lj} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix}_{lj} \in \mathbb{R}_{2\times 2},\ d_{ll} = d_{ll}^T$. Матриці Q_k задаються конкретні числові, якщо розв'язність даної системи не залежить від них, або структурно (наприклад, діагональні) з вільними параметрами, яким надаються конкретні значення, виходячи з умов її розв'язності. Відношення максимального по модулю зі значень розв'язку системи (2.42) до ненульвого мінімального по модулю із коефіцієнтів (вони залежать від розв'язку на попередньому кроці) будуть обмеженими, що виконується, враховуючи зауваження щодо c_i, $i = \overline{1,4}$, послідовно для $k = 1, 2, \ldots$. Параметри, що залишаються вільними, вважаємо обмеженими.

Звідси випливає обмеженість відношень матричних норм $\frac{||P_{i+1}||}{||P_i||} \leq \delta < \infty$, $i = 0, 1, \ldots$, де δ — деяке додатне число, а отже, збіжність ряду $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i$ при $\delta\varepsilon < 1$. Оскільки матриці Q_i, $i = 1, 2, \ldots$ вибираються (для них виконується $\frac{||Q_{i+1}||}{||Q_i||} \leq \theta$, $i = 1, 2, \ldots$), то аналогічно неперервному випадку обидва ряди (2.5) будуть збігатися при $\varepsilon < \min\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta}\}$. Тут θ — деяке додатне число.

Можна показати (співвідношення (2.18)), що розв'язки $\tilde{P}, \tilde{Q}$ відповідного матричного рівняння Ляпунова для початкової системи (2.28), записані у вигляді подібному (2.5), збігаються при деяких значеннях параметра ε. Для цього необхідно помножити (2.31) зліва на матрицю T^T, а справа на T і розглянути матриці $\tilde{P} = T^T P T$, $\tilde{Q} = T^T Q T$.

2. Розглянемо дискретну лінійну стаціонарну керовану майже консервативну систему [73]

$$y(k+1) = (\tilde{F}_0 + \varepsilon \tilde{F}_1) y(k) + \varepsilon \tilde{G} u(k), \quad y(0) = y_0, \quad k = 0, 1, \ldots, \qquad (2.43)$$

де $y \in \mathbb{R}_n$ — вектор стану, $\tilde{F}_0$ — ортогональна матриця $\left(\tilde{F}_0^T \tilde{F}_0 = \tilde{F}_0 \tilde{F}_0^T = I\right)$, $\tilde{F}_1 \in \mathbb{R}_{n\times n}$ — довільна стала матриця, $u(k) \in \mathbb{R}_m$ — вектор керування, $\tilde{G} \in \mathbb{R}_{n\times m}$ — матриця при керуванні, $\varepsilon > 0$ — малий параметр.

За допомогою деякого ортогонального перетворення $x = Ty$ від системи (2.19) перейдемо до наступної [41]:

$$x(k+1) = (F_0 + \varepsilon F_1) x(k) + \varepsilon G u(k), \quad x(0) = x_0, \qquad (2.44)$$

де $x_0 = T y_0$, $F_1 = T \tilde{F}_1 T^T$, $G = T\tilde{G}$, а матриця $\tilde{F}_0$ зведена до блочно-діагональної форми F_0 (2.30).

Поставимо задачу побудови оптимального регулятора у вигляді зворотного зв'язку за станом

$$u(k) = -Hx(k) \tag{2.45}$$

з квадратичним критерієм якості

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) \right], \tag{2.46}$$

де $H \in \mathbb{R}_{m\times n}$ — деяка стала матриця, $R \in \mathbb{R}_{m\times m}$ — додатно означена матриця, а $Q \in \mathbb{R}_{n\times n}$ — невід'ємно означена матриця.

Регулятор (2.45) буде оптимальним [159], якщо

$$H = \varepsilon(\varepsilon^2 G^T SG + R)^{-1} G^T SF, \tag{2.47}$$

де $F = F_0 + \varepsilon F_1$, а $S \in \mathbb{R}_{n\times n}$ — симетрична додатно означена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$S = F^T SF - \varepsilon^2 F^T SG(\varepsilon^2 G^T SG + R)^{-1} G^T SF + Q. \tag{2.48}$$

Тут Q та R — матриці із (2.46).

Для спрощення розв'язання рівняння (2.48), введемо заміну [72] $P = \varepsilon S$, тоді прийдемо до наступного еквівалентного матричного рівняння Ріккаті:

$$P = F^T PF - \varepsilon F^T PG(\varepsilon G^T PG + R)^{-1} G^T PF + \varepsilon Q. \tag{2.49}$$

Будемо шукати матрицю-роз'язок P у вигляді розкладу за малим параметром і нехай матриця Q представлена подібним чином (ряди (2.5)).

Для спрощення рівняння (2.49), застосуємо відомий спосіб обчислення оберненої матриці $(\varepsilon G^T PG + R)^{-1} = M$ шляхом розкладу її у збіжний ряд за малим параметром [71, 41]

$$M = M_0 + \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 + \ldots, \tag{2.50}$$

де $M_0,\ M_1,\ M_2,\ \ldots$ — деякі симетричні матриці. Із властивості оберненої матриці випливає рівність

$$\left[\varepsilon G^T (P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots) G + R\right] (M_0 + \varepsilon M_1 + \ldots) = I. \tag{2.51}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях малого параметра, приходимо до системи рівнянь

$$RM_0 = I,\ RM_1 + G^T P_0 G M_0 = 0,\ \ldots,\ RM_i + \sum_{k=1}^{i} G^T P_k G M_{i-1-k} = 0,\ \ldots.$$

Звідки знаходимо невідомі матриці M_i

$$M_0 = R^{-1},\quad M_i = -R^{-1} \sum_{k=1}^{i} G^T P_{k-1} G M_{i-k},\quad i = 1, 2, \ldots. \qquad (2.52)$$

Підставимо вирази для матриць $F,\ P,\ Q,\ M$ в (2.49) отримаємо рівняння

$$(P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots) = (F_0 + \varepsilon F_1)^T (P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots)(F_0 + \varepsilon F_1) -$$
$$-\varepsilon (F_0 + \varepsilon F_1)^T (P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots) G (M_0 + \varepsilon M_1 + \ldots) G^T \times$$
$$\times (P_0 + \varepsilon P_1 + \ldots)(F_0 + \varepsilon F_1) + \varepsilon (Q_0 + \varepsilon Q_1 + \ldots). \qquad (2.53)$$

Зрівняємо коефіцієнти в (2.53) при однакових степенях ε прийдемо до нескінченної системи матричних рівнянь типу Ріккаті

$$P_0 - F_0^T P_0 F_0 = 0, \qquad (2.54)$$

$$P_1 - F_0^T P_1 F_0 = F_1^T P_0 F_0 + F_0^T P_0 F_1 - F_0^T P_0 G M_0 G^T P_0 F_0 + Q_0,$$

....

$$P_k - F_0^T P_k F_0 = F_1^T P_{k-1} F_0 + F_0^T P_{k-1} F_1 - \sum_{(i,j,q,l,t) \in J(k)} F_i^T P_j G M_q G^T P_l F_t + Q_{k-1},$$

....

$$(2.55)$$

Тут $J(k) = \{(i,j,q,l,t) \,|\, i+j+q+l+t = k-1;\ i,t \in \{0,1\};\ j,q,l \in \{\overline{0, k-1}\}\}$ — множини індексів, $k = 1, 2, \ldots$.

Аналогічно попередньому пункту позначимо [41]

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & \ldots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n}^T & \ldots & P_{nn} \end{bmatrix}_k,\quad D_k = \begin{bmatrix} D_{11} & \ldots & D_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n}^T & \ldots & D_{nn} \end{bmatrix}_k = F_1^T P_{k-1} F_0 + F_0^T P_{k-1} F_1 -$$
$$- \sum_{(i,j,q,l,t) \in J(k)} F_i^T P_j G M_q G^T P_l F_t + Q_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots.$$

$$(2.56)$$

Матриця P_0 має структуру (2.9). Оскільки ліві частини відповідних рівнянь систем (2.55) і (2.33) однакові, то блоки P_{ij} обчислюються за формулами (2.35)–(2.41), а вільні параметри знаходяться із системи (2.42). При $k = 1$ система (2.42) складається з нелінійних рівнянь, для якої відношення максимального по модулю зі значень розв'язків до ненульового мінімального по модулю із коефіцієнтів, як і для лінійних рівнянь, будуть обмеженими. Тоді, виходячи з міркувань наведених вище, будемо мати збіжність рядів (2.5) для $\varepsilon < \min\{\frac{1}{\delta}, \frac{1}{\theta}\}$.

Аналогічно попередньому (співвідношення (2.18)) можна показати, що розв'язки $\tilde{P}, \tilde{Q}$ відповідного матричного рівняння Ріккаті для початкової системи (2.43), записані у вигляді подібному (2.5), збігаються при деяких значеннях параметра ε. Для цього необхідно помножити (2.49) зліва на матрицю T^T, а справа на T і розглянути матриці $\tilde{P} = T^T P T,\ \tilde{Q} = T^T Q T$.

2.3. Формування майже консервативної системи на прикладі моделі гіровертикалі

Розглядається керована лінійна стаціонарна система парного порядку

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 + \varepsilon \widetilde{A}_1)x + Bu, \tag{2.57}$$

де $x = [x_1, ..., x_{2n}]^T$ - $2n$-вимірний вектор стану, $u = [u_1, ..., u_m]^T$- m-вимірний вектор керувань, ε - малий параметр; $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1 \in \Re_{2n\times 2n}$, $B \in \Re_{2n\times m}$. Припустимо, що $\widetilde{A}_0^T \neq -\widetilde{A}_0$ або $det(\widetilde{A}_0) = 0$, тобто система не є майже консервативною [104]. Дослідимо, чи можливо за допомогою спеціального вибору вектора керувань отримати майже консервативну систему? Оберемо вектор u у вигляді зворотного зв'язку

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x, \tag{2.58}$$

тоді матимемо таку замкнену систему:

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 - BK_0 + \varepsilon(\widetilde{A}_1 - BK_1))x. \tag{2.59}$$

Позначимо $\widetilde{A}_0 - BK_0 = A_0, \widetilde{A}_1 - BK_1 = A_1$ і отримаємо

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x \tag{2.60}$$

Для майже консервативної системи $A_0^T = -A_0$ та $det(A_0) \neq 0$ тобто у нашому випадку

$$\widetilde{A}_0^T - K_0^T B^T = -\widetilde{A}_0 + BK_0 \tag{2.61}$$

або

$$BK_0 + K_0^T B^T = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_0^T \tag{2.62}$$

за умови

$$det(\widetilde{A}_0 - BK_0) \neq 0 \tag{2.63}$$

З останніх виразів знаходиться матриця K_0, яка бере участь в формуванні невиродженої кососиметричної матриці A_0, і перетворює систему на майже консервативну.

Приклад 2.1. *Побудувати майже консервативну систему і перевірити її на асимптотичну стійкість.*

Проілюструємо описаний підхід на прикладі моделі гіровертикалі [95]. Розглянемо диференціальні рівняння руху гіровертикалі в першому наближенні

$$\begin{aligned} J\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} - H\dot{\beta} - \chi\beta = 0 \\ J\ddot{\beta} + b\dot{\beta} + H\dot{\alpha} + \chi\alpha = 0 \end{aligned} \tag{2.64}$$

де J — екваторіальний момент інерції гіроскопа, H — його кінетичний момент, b – коефіцієнт сил опору. Матриці дисипативних, гіроскопічних та непотенційних сил будуть такими:

$$B_0 = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, H_0 = \begin{bmatrix} 0 & -H \\ H & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & -\chi \\ \chi & 0 \end{bmatrix} \tag{2.65}$$

Після введення заміни змінних

$$x_1 = \alpha, x_2 = \dot{\alpha}, x_3 = \beta, x_4 = \dot{\beta} \tag{2.66}$$

ситема (2.64) запишеться в матричній формі, яка з урахуванням керуючих моментів у загальному випадку набуде такого вигляду

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{\chi}{J} & \frac{H}{J} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\chi}{J} & -\frac{H}{J} & 0 & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \tag{2.67}$$

Матрицю коефіцієнтів системи подамо у вигляді суми $\widetilde{A} = \widetilde{A}_0 + \varepsilon \widetilde{A}_1$ де

$$\widetilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \varepsilon \widetilde{A}_1 = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & \chi & H \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\chi & -H & 0 & -b \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

Будемо вважати, що система є повністю керованою і її можна записати у вигляді (2.57), а саме

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 + \varepsilon \widetilde{A}_1)x + Bu.$$

Встановимо мінімальний розмір вектора u, для якого умови повної керованості будуть виконуватися і отримаємо розв'язок поставленої задачі.

Припустимо, що керування є одновимірним вектором (скаляром), тобто $u = u_1$, $u_2 = 0$. В загальному вигляді матриці B і K_0 запишуться наступним чином

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix} K_0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

Тоді, згідно з рівністю (2.62) та враховуючи, що

$$\widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.70}$$

отримаємо наступну систему рівнянь для знаходження компонент матриці K_0

$$\begin{gathered} b_{11}k_{12} + b_{21}k_{11} = 1, b_{11}k_{11} = 0, \\ b_{11}k_{13} + b_{31}k_{11} = 0, b_{21}k_{12} = 0, \\ b_{11}k_{14} + b_{41}k_{11} = 0, b_{31}k_{13} = 0, \\ b_{21}k_{13} + b_{31}k_{12} = 0, b_{41}k_{14} = 0, \\ b_{21}k_{14} + b_{41}k_{12} = 0, \\ b_{31}k_{14} + b_{41}k_{13} = 1. \end{gathered} \tag{2.71}$$

Данна система не має розв'язку (при $b_{11} = 0$ або $k_{11} = 0$ з другого рівняння системи (2.71) приходимо до протиріччя з останнім рівнянням).

Отже, якщо вважати, що вектор u - одновимірний, то неможливо знайти керування, за допомогою якого система рівнянь перетворювалась би у майже консервативну.

Припустимо, що u - двовимірний вектор. Нехай

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \\ b_{41} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

та

$$K_0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24}. \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

Після розв'язання рівняння (2.62) з урахуванням (2.70) отримаємо наступний вигляд матриці K_0

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b_{41}} & 0 \\ \frac{1}{b_{22}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

Виконавши нескладні дії, матимемо

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

Отже, у випадку двох керувань, за допомогою відповідного вибору вектора керування домоглися виконання умови (2.63), а саме $det(\widetilde{A}_0 - BK_0) \neq 0$ і отримали майже консервативну систему.

Покажемо, що отримана керована майже консервативна система асимптотично стійка. Для цього знайдемо додатньо визначену симетричну матрицю - розв'язок P матричного рівняння Ляпунова. Застосуємо два підходи. Один - безпосереднє розв'язання рівнння за допомогою математичної системи комп'ютерної алгебри Maple V. Другий - у вигляди розкладу за малим параметром.

Спочатку розглянемо випадок симетричної матриці $A_1 = \widetilde{A}_1 - BK_1$, тобто $\widetilde{A}_1 - BK_1 = \widetilde{A}_1^T - K_1^T B^T$. З цієї умови знайдемо компоненти матриці K_1. Отримаємо

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{\chi}{b_{41}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\chi}{b_{22}} & \frac{2H}{b_{22}} \end{bmatrix}. \tag{2.76}$$

Для замкненої системи матимемо

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & -H \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -H & 0 & -b \end{bmatrix}. \tag{2.77}$$

Знайдемо аналітичний розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T P + P(A_0 + \varepsilon A_1) = -2Q \tag{2.78}$$

для системи (2.60) $\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x$, де A_0, A_1 задани відповідно формулами (2.75),(2.77). Будемо вважати, що $\varepsilon = \frac{1}{J}$. $Q = \varepsilon Q_1$, де $Q_1 = diag\{q_{11}, q_{11}, q_{33}, q_{33}\}$.

За допомогою системи комп'ютерної алгебри Maple V отримаємо такі значення елементів матриці - розв'язку P:

$$
\begin{gathered}
p_{11} = \frac{2q_{11}b^2 - q_{11}H^2 + q_{33}H^2}{b(-H^2+b^2)} + \\
+\frac{1}{2}\cdot\frac{q_{33}b^2H^2 - q_{33}H^4 - 3q_{11}b^2H^2 + 2q_{11}b^4 + q_{11}H^4}{b(-H^2+b^2)}\cdot\frac{1}{J^2} \\
p_{12} = \frac{q_{11}}{J} \\
p_{13} = -\frac{H(q_{11}+q_{33})}{-H^2+b^2} + \frac{1}{2}\cdot H(q_{11}+q_{33})\cdot\frac{1}{J^2} \\
p_{14} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{H(q_{11}-q_{33})}{b}\cdot\frac{1}{J} \\
p_{22} = \frac{-q_{11}H^2 + q_{33}H^2 + 2q_{11}b^2}{b(-H^2+b^2)} \\
p_{23} = \frac{1}{2}\cdot\frac{H(q_{11}-q_{33})}{b}\cdot\frac{1}{J} \\
p_{24} = -\frac{H(q_{11}+q_{33})}{-H^2+b^2} \\
p_{33} = \frac{q_{11}H^2 - q_{33}H^2 + 2q_{33}b^2}{b(-H^2+b^2)} + \\
+\frac{1}{2}\cdot\frac{-q_{11}H^4 + q_{11}b^2H^2 + q_{33}H^4 - 3q_{33}b^2H^2 + 2q_{33}b^4}{b(-H^2+b^2)}\cdot\frac{1}{J^2} \\
p_{34} = \frac{q_{33}}{J} \\
p_{44} = \frac{q_{11}H^2 - q_{33}H^2 + 2q_{33}b^2}{b(-H^2+b^2)}
\end{gathered}
\tag{2.79}
$$

Звідси матриця-розв'язок P запишеться наступним чином

$$
P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2, \tag{2.80}
$$

де

$$
P_0 = \begin{bmatrix} p_{11}^0 & 0 & p_{13}^0 & 0 \\ 0 & p_{22}^0 & 0 & p_{24}^0 \\ p_{13}^0 & 0 & p_{33}^0 & 0 \\ 0 & p_{24}^0 & 0 & p_{44}^0 \end{bmatrix} \tag{2.81}
$$

$$
P_1 = \begin{bmatrix} 0 & p_{12}^1 & 0 & p_{14}^1 \\ p_{12}^1 & 0 & p_{23}^1 & 0 \\ 0 & p_{23}^1 & 0 & p_{34}^1 \\ p_{14}^1 & 0 & p_{34}^1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.82}
$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} p_{11}^2 & 0 & p_{13}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{13}^2 & 0 & p_{33}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

Далі знайдемо матрицю - розв'язок у вигляді розкладу за малим параметром, використовуючи нескінченну матричну систему рівнянь Ляпунова [104]. Однак, завдяки (2.80), будемо шукати тільки P_0, P_1, P_2. $Q = \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2$, де $Q_1 = diag\{q_{11}, q_{11}, q_{33}, q_{33}\}, Q_2 = 0$. Нам знадобляться лише перши три рівняння

$$\begin{gathered} A_0P_0 - P_0A_0 = 0 \\ A_0P_1 - P_1A_0 = P_0A_1 + A_1^TP_0 + 2Q_1 \\ A_0P_2 - P_2A_0 = P_1A_1 + A_1^TP_1 + 2Q_2 \end{gathered} \tag{2.84}$$

Розв'язавши перше рівняння, отримаємо загальний вигляд матриці P_0, а саме

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_{11}^0 & 0 & p_{13}^0 & p_{14}^0 \\ 0 & p_{11}^0 & -p_{14}^0 & p_{13}^0 \\ p_{13}^0 & -p_{14}^0 & p_{33}^0 & 0 \\ p_{14}^0 & p_{13}^0 & 0 & p_{33}^0 \end{bmatrix} \tag{2.85}$$

Розв'язав друге рівняння системи (2.84) знайдемо компоненти матриці P_0, а також загальний вигляд мтариці P_1

$$\begin{gathered} p_{11}^0 = \frac{-q_{11}H^2 + q_{33}H^2 + 2q_{11}b^2}{b(-H^2+b^2)}, \\ p_{13}^0 = -\frac{H(q_{11}+q_{33})}{-H^2+b^2}, p_{14}^0 = 0, \\ p_{33}^0 = \frac{q_{11}H^2 - q_{33}H^2 + 2q_{33}b^2}{b(-H^2+b^2)} \end{gathered} \tag{2.86}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{22}^1 & q_{11} & p_{24}^1 & -p_{23}^1 \\ q_{11} & p_{22}^1 & p_{23}^1 & p_{24}^1 \\ p_{24}^1 & p_{23}^1 & p_{44}^1 & q_{33} \\ -p_{23}^1 & p_{24}^1 & q_{33} & p_{44}^1 \end{bmatrix} \tag{2.87}$$

З третього рівняння (2.84) знайдемо компоненти матриць P_1, P_2

$$
\begin{gathered}
p_{22}^1 = 0, p_{24}^1 = 0, p_{44}^1 = 0,\\
p_{23}^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{H(q_{11}-q_{33})}{b}
\end{gathered}
\tag{2.88}
$$

$$
\begin{gathered}
p_{11}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{-q_{11}H^2 + q_{33}H^2 + 2bp_{22}^2 + 2q_{11}b^2}{b},\\
p_{12}^2 = 0, p_{13}^2 = p_{24}^2 + \frac{1}{2}H(q_{11}+q_{33}, p_{14}^2 = -p_{23}^2,\\
p_{22}^2 = p_{22}^2, p_{23}^2 = p_{23}^2, p_{24}^2 = p_{24}^2,\\
p_{33}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{q_{11}H^2 - q_{33}H^2 + 2bp_{44}^2 + 2q_{33}b^2}{b},\\
p_{34}^2 = 0, p_{44}^2 = p_{44}^2
\end{gathered}
\tag{2.89}
$$

Якщо покласти $p_{22}^2 = 0, p_{23}^2 = 0, p_{24}^2 = 0, p_{44}^2 = 0$ і знайти суму $P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2$, то отримаємо матрицю, елементи якої повністю збігаються з елементами матриці, отриманої в результаті безпосереднього розв'язку матричного рівняння Ляпунова.

2.4. Умови побудови майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку

Знайдемо умови існування розв'язку рівняння (2.62). Додамо до правої частини рівняння (2.62) суму деякої невідомої кососиметричної матриці Q_0 та її транспонованої [159]. Отримаємо

$$BK_0 + K_0^T B^T = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_0^T + Q_0 + Q_0^T \tag{2.90}$$

чи

$$(BK_0 - \widetilde{A}_0 - Q_0) + (K_0^T B^T - \widetilde{A}_0^T - Q_0^T) = 0. \tag{2.91}$$

Звідси

$$BK_0 - \widetilde{A}_0 - Q_0 = 0 \tag{2.92}$$

або

$$BK_0 = \widetilde{A}_0 + Q_0. \tag{2.93}$$

Пояснимо роль матриці Q_0. Зрозуміло, що необхідною умовою існування розв'язку рівняння (2.93) є рівність рангів правої і лівої частин. Матриця Q_0 слугує для зрівнювання рангів у випадках, якщо це дозволяє зробити структура інших заданих матриць.

Проілюструємо сказане на прикладі.

Нехай $B \in \Re_{2\times1}$, $K_0 \in \Re_{1\times2}$, $\widetilde{A}_0, Q_0 \in \Re_{2\times2}$. Тоді рівняння (2.93) в матричному вигляді запишеться так

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} + q_{12} \\ \widetilde{a}_{21} - q_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

З відомої нерівності [71]

$$rang(AB) \leq min\{rang(A), rang(B)\} \tag{2.95}$$

випливає, що ранг лівої частини рівності (2.94) не більший за одиницю, а правої не більший за двійку. Визначимо умови, за яких можливо підібрати значення елемента q_{12} так, щоб ліва та права частини (2.94) мали одиничні ранги. Для лівої частини це умови відмінності від нуля b_{11} або b_{21} та k_{11} або k_{12}. Для правої частини ці умови знайдемо, обчисливши і прирівнявши до нуля її визначник

$$q_{12}^2 + q_{12}(\widetilde{a}_{12} - \widetilde{a}_{21}) + \widetilde{a}_{22}\widetilde{a}_{11} - \widetilde{a}_{12}\widetilde{a}_{21} = 0 \tag{2.96}$$

та розв'язавши

$$q_{12} = \frac{\widetilde{a}_{21} - \widetilde{a}_{12}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\widetilde{a}_{12}^2 + 2\widetilde{a}_{12}\widetilde{a}_{21} + \widetilde{a}_{21}^2 - 4\widetilde{a}_{22}\widetilde{a}_{11}} \tag{2.97}$$

З останнього випливає, що елементи матриці $\widetilde{A}_0$ повинні бути пов'язані умовою

$$(\widetilde{a}_{12} + \widetilde{a}_{21})^2 - 4\widetilde{a}_{22}\widetilde{a}_{11} \geq 0. \tag{2.98}$$

Нехай, наприклад, $\widetilde{a}_{11} = 0$. Тоді

$$q_{12} = \frac{\widetilde{a}_{21} - \widetilde{a}_{12}}{2} \pm \frac{1}{2}(\widetilde{a}_{12} + \widetilde{a}_{21}) \tag{2.99}$$

тобто $q_{12} = \widetilde{a}_{21}$, або $q_{12} = -\widetilde{a}_{12}$. Значить матриця правої частини рівності (2.94) може мати один з двох виглядів

$$(\widetilde{A_0} + Q_0)_1 = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{a}_{12} + \widetilde{a}_{21} \\ 0 & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix}, (\widetilde{A_0} + Q_0)_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{a}_{12} + \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

.

Спробуємо розв'язати рівняння (2.94) зі знайденими матрицями правої частини. У випадку, якщо права частина має вигляд $(\widetilde{A_0} + Q_0)_1$ отримаємо систему рвнянь

$$\begin{gathered} b_{11}k_{11} = 0, b_{11}k_{12} = \widetilde{a}_{12} + \widetilde{a}_{21}, \\ b_{21}k_{11} = 0, b_{21}k_{12} = \widetilde{a}_{22} \end{gathered} \tag{2.101}$$

яка має розв'язок тільки при додаткової умові, а саме $\widetilde{a}_{12} + \widetilde{a}_{21} = 0$.

Якщо права частина має вигляд $(\widetilde{A}_0 + Q_0)_2$, система для знаходження невідомих компонент матриці K_0

$$\begin{gathered} b_{11}k_{11} = 0, b_{11}k_{12} = 0, \\ b_{21}k_{11} = \widetilde{a}_{21} + \widetilde{a}_{12}, b_{21}k_{12} = \widetilde{a}_{22} \end{gathered} \tag{2.102}$$

має розв'язок

$$k_{11} = \frac{\widetilde{a}_{21} + \widetilde{a}_{12}}{b_{21}}, k_{12} = \frac{\widetilde{a}_{22}}{b_{21}} \tag{2.103}$$

при умові, якщо $b_{11} = 0, b_{21} \neq 0$.

З аналізу отриманих результатів (2.101), (2.103) випливає, що умова рівності рангів правої і лівої частин рівності (2.93) є необхідною, але не достатньою.

Покажемо, як у поставленій задачі формування майже консервативної системи можна застосувати кронекерівський добуток матриць. Для цього скористаємося результатами, викладеними в [71]. З них випливає, що рівняння (2.93) еквівалентне рівнянню

$$\widetilde{B}k_0 = \widetilde{a}_0 + q_0 \tag{2.104}$$

де

$$\widetilde{B} = B \otimes I, \tag{2.105}$$

$I \in \Re_{2n\times 2n}$ - одинична матриця, $\widetilde{B} \in \Re_{4n^2\times 2mn}$

$$k_0 = \begin{bmatrix} K_{1*}^T \\ K_{2*}^T \\ \dots \\ K_{m*}^T \end{bmatrix} \widetilde{a}_0 + q_0 = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{1*}^T + Q_{1*}^T \\ \widetilde{A}_{2*}^T + Q_{2*}^T \\ \dots \\ \widetilde{A}_{2n*}^T + Q_{2n*}^T \end{bmatrix} \tag{2.106}$$

K_{i*}, $\widetilde{A}_{i*} + Q_{i*}$ i - ий рядок відповідної матриці. $k_0 \in \Re_{2mn\times 1}$, $\widetilde{a}_0 + q_0 \in \Re_{4n^2\times 1}$

Система (2.104) має $4n^2$ рівнянь з $2mn$ невідомими для матриці K_0 та з $2n^2 - n$ невідомими для матриці Q_0. З іншого боку, якщо (2.62) розв'язувати безпосередньо, число рівнянь для знаходження компонент матриці K_0 буде $2n^2+n$ в силу симетричности правої та лівої частин рівності. Отже, у випадку, коли $2mn > 2n^2+n$, можна $2mn-(2n^2+n)$ компонент задати довільно. Тоді загальна кількість невідомих для K_0 та Q_0 буде дорівнювати $2n^2+n+2n^2-n = 4n^2$, що співпадає з кількістю рівнянь.

Для рівняння, записаного у вигляді (2.104) діють відоми умови існування розв'язку [71]. А саме: необхідною і достатньою умовою існування розв'язку системи рівнянь є рівність рангу матриці, яка стоїть при невідомих, та рангу розширеної матриці. У нашому випадку ця умова запишеться у вигляді

$$rang(\widetilde{B}) = rang(\widetilde{B}/(\widetilde{a}_0 + q_0)) \tag{2.107}$$

де $\widetilde{B}/(\widetilde{a}_0 + q_0)$ - розширена матриця системи, отримана додаванням стовпця $\widetilde{a}_0 + q_0$ до матриці $\widetilde{B}$.

Скориставшись формулою [71] $rang(A \otimes B) = rang(A)rang(B)$, будемо мати

$$rang(\widetilde{B}) = rang(B)rang(I) = 2n \cdot rang(B) \tag{2.108}$$

Отже, необхідна і достатня умова існування розв'язку рівння (2.104) має вигляд

$$rang(\widetilde{B}/(\widetilde{a}_0 + q_0)) = 2n \cdot rang(B) \tag{2.109}$$

Звернемося до прикладу, розглянутому вище, та перевіремо умову (2.109) у випадку, коли матриці B, K_0,$\widetilde{A}_0$, Q_0 мають відповідно вигляд

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & q_{12} \\ -q_{12} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.110}$$

Перепишемо ці матриці, згідно з формулами (2.105) і (2.106) у вигляді

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{11} \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{21} \end{bmatrix}, k_0 = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix}, \widetilde{a}_0 + q_0 = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} \\ \widetilde{a}_{12} + q_{12} \\ \widetilde{a}_{21} - q_{12} \\ \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.111}$$

Зауважимо, що у загальному випадку умова (2.109) не виконується, а саме $rang(\widetilde{B}) = 2$, а $rang(\widetilde{B}/(\widetilde{a}_0 + q_0)) = 3$, де

$$\widetilde{B}/(\widetilde{a}_0 + q_0) = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \widetilde{a}_{11} \\ 0 & b_{11} & \widetilde{a}_{12} + q_{12} \\ b_{21} & 0 & \widetilde{a}_{21} - q_{12} \\ 0 & b_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.112}$$

Розглянемо окремі випадки. Для порівняння відповідей з отриманими вище, покладемо $\widetilde{a}_{11} = 0$, та, згідно з (2.99), $q_{12} = \widetilde{a}_{21}$, або $q_{12} = -\widetilde{a}_{12}$. У першому випадку матимемо

$$\widetilde{B}/(\widetilde{a}_0 + q_0) = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & \widetilde{a}_{12} + \widetilde{a}_{21} \\ b_{21} & 0 & 0 \\ 0 & b_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.113}$$

Навіть якщо $b_{11} = 0$, або $b_{21} = 0$, $rang(\widetilde{B}/(\widetilde{a}_0 + q_0)) = 3$. У другому випадку, коли $q_{12} = -\widetilde{a}_{12}$, матимемо

$$\widetilde{B}/(\widetilde{a}_0 + q_0) = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 & \widetilde{a}_{21} + \widetilde{a}_{12} \\ 0 & b_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.114}$$

І якщо $b_{11} = 0$ отримаємо $rang(\widetilde{B}/(\widetilde{a}_0 + q_0)) = 2$. Тобто умова (2.109) виконана. Знайдемо значення компонент матриці K_0. Запишемо систему (2.104) з урахуванням отриманих елементів

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{21} & 0 \\ 0 & b_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \widetilde{a}_{21} + \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.115}$$

Розв'язавши її одержимо

$$k_{11} = \frac{\widetilde{a}_{21} + \widetilde{a}_{12}}{b_{21}}, k_{12} = \frac{\widetilde{a}_{22}}{b_{21}}, \tag{2.116}$$

що повністю співпадає з (2.103).

Приклад 2.2. Розглядається система (2.57)

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 + \varepsilon \widetilde{A}_1)x + Bu,$$

де $x = [x_1, ..., x_{2n}]^T$ - $2n$-вимірний вектор стану, $u = [u_1, ..., u_m]^T$- m-вимірний вектор керувань, ε - малий параметр; $\widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1 \in \Re_{2n\times 2n}$, $B \in \Re_{2n\times m}$. $\widetilde{A}_0^T \neq -\widetilde{A}_0$.

Задано: $2n = 2$, $m = 2$.

Знайти матрицю керування K_0, таку, що $\widetilde{A}_0 - BK_0 = -(\widetilde{A}_0 - BK_0)^T$ і $det(\widetilde{A}_0 - BK_0) \neq 0$, у випадку коли вектор u представлений у вигляді зворотного зв'язку (2.58)

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x.$$

Іншими словами, отримати замкнену майже консервативну систему:

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 - BK_0 + \varepsilon(\widetilde{A}_1 - BK_1))x.$$

Для цього випадку, у загальному вигляді, матриці $\widetilde{A}_0$, B, K_0 запишуться так:

$$\widetilde{A}_0 = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, K_0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.117}$$

Застосуємо два підходи до знаходження K_0:

1) безпосереднє розв'язання рівняння (2.62)

$$BK_0 + K_0^T B^T = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_0^T,$$

2) використання кронекерівського добутку.

1) При безпосередньому розв'язанні (2.62), яке в нашому випадку має вигляд

$$\begin{bmatrix} b_{11}k_{11} + b_{12}k_{21} & b_{11}k_{12} + b_{12}k_{22} \\ b_{21}k_{11} + b_{22}k_{21} & b_{21}k_{12} + b_{22}k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}k_{11} + b_{12}k_{21} & b_{21}k_{11} + b_{22}k_{21} \\ b_{11}k_{12} + b_{12}k_{22} & b_{21}k_{12} + b_{22}k_{22} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix},$$

або

$$\begin{bmatrix} 2b_{11}k_{11} + 2b_{12}k_{21} & b_{11}k_{12} + b_{12}k_{22} + b_{21}k_{11} + b_{22}k_{21} \\ b_{21}k_{11} + b_{22}k_{21} + b_{11}k_{12} + b_{12}k_{22} & 2b_{21}k_{12} + 2b_{22}k_{22} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2\widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} + \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{21} + \widetilde{a}_{12} & 2\widetilde{a}_{22} \end{bmatrix},$$

в силу симетричності правої та лівої частин рівності, маємо систему трьох рівнянь для знаходження невідомих компонент матриці K_0

$$\begin{cases} b_{11}k_{11} + b_{12}k_{21} - \widetilde{a}_{11} = 0 \\ b_{11}k_{12} + b_{12}k_{22} + b_{21}k_{11} + b_{22}k_{21} - \widetilde{a}_{12} - \widetilde{a}_{21} = 0 \\ b_{21}k_{12} + b_{22}k_{22} - \widetilde{a}_{22} = 0 \end{cases} \tag{2.118}$$

Якщо покласти $k_{22} = 0$, отримаємо наступні значення шуканих елементів

$$\begin{gathered} k_{11} = \frac{-b_{12}b_{21}\widetilde{a}_{12} - b_{12}b_{21}\widetilde{a}_{21} + b_{12}b_{11}\widetilde{a}_{22} + b_{21}b_{22}\widetilde{a}_{11}}{b_{21}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})} \\ k_{12} = \frac{\widetilde{a}_{22}}{b_{21}} \\ k_{21} = \frac{-b_{21}^2\widetilde{a}_{11} + b_{21}b_{11}\widetilde{a}_{12} + b_{21}b_{11}\widetilde{a}_{21} - b_{11}^2\widetilde{a}_{22}}{b_{21}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})} \end{gathered}. \tag{2.119}$$

Отже, отримали

$$\widetilde{A}_0 - BK_0 = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{a}_{12} - \frac{b_{11}}{b_{21}}\widetilde{a}_{22} \\ -\widetilde{a}_{12} + \frac{b_{11}}{b_{21}}\widetilde{a}_{22} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.120}$$

Ця матриця кососиметрична і її визначник відмінний від нуля.

2) При використанні другого підходу задамо кососиметричну матрицю

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & q_{12} \\ -q_{12} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.121}$$

У розгорнутому вигляді рівняння (2.104)

$$\widetilde{B}k_0 = \widetilde{a}_0 + q_0$$

запишеться наступним чином

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & b_{12} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{21} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} \\ \widetilde{a}_{12} + q_{12} \\ \widetilde{a}_{21} - q_{12} \\ \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.122}$$

Умова (2.107) виконується, а саме

$$rang(\widetilde{B}) = rang(\widetilde{B}/(\widetilde{a}_0 + q_0)) = 4 \tag{2.123}$$

а значить існує розв'язок рівняння. Знайдемо його, але спочатку згадаємо, що кількість компонент матриці K_0, які можна знайти з системи, дорівнює $2n^2 + n = 3$, а для матриці Q_0 - $2n^2 - n = 1$. Задамо, як і в попередньому розв'язку, $k_{22} = 0$, та запишемо систему для знаходження невідомих

$$\begin{cases} b_{11}k_{11} + b_{12}k_{21} = \widetilde{a}_{11} \\ b_{11}k_{12} = \widetilde{a}_{12} + q_{12} \\ b_{21}k_{11} + b_{22}k_{21} = \widetilde{a}_{21} - q_{12} \\ b_{21}k_{12} = \widetilde{a}_{22} \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо значення невідомих елементів

$$\begin{gathered} k_{11} = \frac{-b_{12}b_{21}\widetilde{a}_{12} - b_{12}b_{21}\widetilde{a}_{21} + b_{12}b_{11}\widetilde{a}_{22} + b_{21}b_{22}\widetilde{a}_{11}}{b_{21}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})} \\ k_{12} = \frac{\widetilde{a}_{22}}{b_{21}} \\ k_{21} = \frac{-b_{21}^2\widetilde{a}_{11} + b_{21}b_{11}\widetilde{a}_{12} + b_{21}b_{11}\widetilde{a}_{21} - b_{11}^2\widetilde{a}_{22}}{b_{21}(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})} \\ q_{12} = \frac{b_{11}\widetilde{a}_{22} - b_{21}\widetilde{a}_{12}}{b_{21}} \end{gathered} \tag{2.124}$$

Як бачимо, значення компонент матриці K_0 з (2.124) та (2.119) повністю співпадають.

Приклад 2.3. Нехай для системи (2.57)

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 + \varepsilon \widetilde{A}_1)x + Bu.$$

$2n = 2$, $m = 1$. Знайти матрицю керування K_0, таку, що $\widetilde{A}_0 - BK_0 = -(\widetilde{A}_0 - BK_0)^T$ і $det(\widetilde{A}_0 - BK_0) \neq 0$, у випадку коли вектор u представлений у вигляді зворотного зв'язку (2.58)

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x.$$

Загальний вигляд матриць $\widetilde{A}_0$, B, K_0 такий

$$\widetilde{A}_0 = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} \\ \widetilde{a}_{21} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} K_0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix}. \tag{2.125}$$

Застосуємо два підходи для знаходження невідомої матриці K_0 :

1) безпосереднє розв'язання рівняння (2.62)

$$BK_0 + K_0^T B^T = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_0^T,$$

2)знаходження найкращого наближення згідно з методом найменших квадратів.

1) При безпосередньому розв'язанні рівняння (2.62) отримаємо перевизначену систему трьох рівнянь з двома невідомими, а саме

$$\begin{cases} b_{11}k_{11} - \widetilde{a}_{11} = 0 \\ b_{11}k_{12} + b_{21}k_{11} - \widetilde{a}_{12} - \widetilde{a}_{21} = 0 \\ b_{21}k_{12} - \widetilde{a}_{22} = 0 \end{cases} \tag{2.126}$$

Розв'язок цієї системи існує тільки при накладенні додаткових умов на елементи матриць $\widetilde{A}_0, B$, тобто у окремому випадку.

2) Розглянемо ще один спосіб знаходження розв'язку рівняння (2.93)

$$BK_0 = \widetilde{A}_0 + Q_0.$$

Згідно з методом найменших квадратів, найкраще наближення розв'язку для рівняння (2.93) визначається формулою [23]

$$K_0^0 = B^+ \cdot (\widetilde{A}_0 + Q_0) \tag{2.127}$$

де B^+ - псевдообернена матриця для B.

З [23]

$$B^+ = C^+ \cdot D^+ = C^*(CC^*)^{-1}(D^*D)^{-1}D^* \tag{2.128}$$

де $B = D \cdot C$ - скелетний розклад матриці.

Обчисливши за формулою (2.127)значення K_0^0 і підставивши його в (2.93) знайдемо значення елементів матриці Q_0, за яких отримана система є тотожністю, або доведемо, що при заданих матрицях $\widetilde{A}_0$ і B рішення K_0 не існує.

Отже, система (2.93) має вигляд

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{12} + q_{12} \\ \widetilde{a}_{21} - q_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix} \tag{2.129}$$

За формулою (2.128)

$$B^+ = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}}{b_{11}^2 + b_{21}^2} & \frac{b_{21}}{b_{11}^2 + b_{21}^2} \end{bmatrix} \tag{2.130}$$

Підставляючи його в (2.127) отримаємо

$$K_0^0 = \begin{bmatrix} \frac{b_{11}\widetilde{a}_{11}}{b_{11}^2 + b_{21}^2} + \frac{b_{21}(\widetilde{a}_{21} - q_{12})}{b_{11}^2 + b_{21}^2} & \frac{b_{11}(\widetilde{a}_{12} + q_{12})}{b_{11}^2 + b_{21}^2} + \frac{b_{21}\widetilde{a}_{22}}{b_{11}^2 + b_{21}^2} \end{bmatrix} \tag{2.131}$$

Для порівняння відповідей покладемо $\widetilde{a}_{11} = 0$ та підставимо знайдене K_0^0 в рівняння (2.129). Отримаємо наступну систему

$$\begin{gathered} \frac{b_{11}b_{21}(\widetilde{a}_{21} - q_{12})}{b_{11}^2 + b_{21}^2} = 0 \\ \frac{b_{11}^2(\widetilde{a}_{12} + q_{12}) + b_{11}b_{21}\widetilde{a}_{22}}{b_{11}^2 + b_{21}^2} = \widetilde{a}_{12} + q_{12} \\ \frac{b_{21}^2(\widetilde{a}_{21} - q_{12})}{b_{11}^2 + b_{21}^2} = \widetilde{a}_{21} - q_{12} \\ \frac{b_{11}b_{21}(\widetilde{a}_{12} + q_{12}) + b_{21}^2\widetilde{a}_{22}}{b_{11}^2 + b_{21}^2} = \widetilde{a}_{22} \end{gathered} \tag{2.132}$$

Розв'язок існує у двух випадках

1) якщо $b_{11} = 0$, тоді $q_{12} = -\widetilde{a}_{12}$ і

$k_{11} = \frac{\widetilde{a}_{21}+\widetilde{a}_{12}}{b_{21}}, k_{12} = \frac{\widetilde{a}_{22}}{b_{21}}$, що повністю співпадає з (2.103) та (2.116);

2) якщо $b_{21} = 0$, тоді $q_{12} = \widetilde{a}_{21}, \widetilde{a}_{22} = 0$ і

$k_{11} = 0, k_{12} = \frac{\widetilde{a}_{12}+\widetilde{a}_{21}}{b_{11}}$.

2.5. Формування майже консервативної системи при попередньо заданій кососиметричній матриці

Для системи (2.57)

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 + \varepsilon\widetilde{A}_1)x + Bu,$$

пропонується ще один можливий підхід формування майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку (2.58)

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x.$$

Нагадаємо, якщо

$$A_0 = \widetilde{A}_0 - BK_0 = -A_0^T, \quad \det A_0 \neq 0; \quad A_1 = \widetilde{A}_1 - BK_1 \tag{2.133}$$

система (2.60)

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x$$

є майже консервативною.

Далі використаємо підхід, який застосовується для стабілізації лінійної диференціальної системи з матрицею коефіцієнтів у формі Фробеніуса [144]. В цьому підході спочатку будується необхідна матриця коефіцієнтів (обмежень на матрицю немає), а потім обчислюється вектор зворотного зв'язку.

Якщо вважати, що невироджена кососиметрична матриця A_0 рівняння (2.60) задана, то з першого рівняння (2.133) легко знаходимо матрицю K_0, оскільки матриця B повного рангу ($rang(B) = m$). Отже, маємо

$$K_0 = (B^T B)^{-1} B^T (\widetilde{A}_0 - A_0). \tag{2.134}$$

Тепер підставимо вираз для K_0 з (2.134) в перше рівняння (2.133) і отримаємо таку рівність

$$\left(I - B(B^TB)^{-1}B^T\right)\widetilde{A}_0 = \left(I - B(B^TB)^{-1}B^T\right)A_0. \qquad (2.135)$$

Зазначимо, що не для всіх кососиметричних матриць A_0 (2.135) є тотожністю.

Таким же способом можна отримати матрицю K_1, якщо задати матрицю A_1

$$K_1 = (B^TB)^{-1}B^T(\widetilde{A}_1 - A_1). \qquad (2.136)$$

Далі підставимо (2.136) в друге рівняння (2.133) і отримаємо рівність аналогічну (2.135), якщо матриця A_1 допустима

$$\left(I - B(B^TB)^{-1}B^T\right)\widetilde{A}_1 = \left(I - B(B^TB)^{-1}B^T\right)A_1. \qquad (2.137)$$

Як і в випадку з матрицею A_0, не всі матриці A_1 будуть допустимими, тобто тільки деякий клас матриць задовольняє (2.137).

Матриця $H = B(B^TB)^{-1}B^T$ є матрицею проектування, вона симетрична та ідемпотентна, тобто її власні значення одиничні та нульові [143]. В [146] показано, що $rang(H) = rang(B)$. Таким чином, отримана матриця проектування має m власних значень, рівних одиниці. Ліва і права частини (2.135) виконують проектування векторів-стовпців матриць $\widetilde{A}_0, A_0$ на ортогональне доповнення простору стовпців матриці B. Формула (2.135) буде тотожністю тоді, коли хоча б для однієї кососиметричної матриці A_0 проекції всіх відповідних векторів-стовпців збігаються.

Матрицею проектування буде також матриця $I - H$ [143]. Тоді з рівностей (2.135), (2.137) випливає, що матриці коефіцієнтів розімкненої та замкненої динамічних систем пов'язані між собою за допомогою метода найменших квадратів [143]. Цей факт сформулюємо для матриць $\widetilde{A}_0, A_0$ у вигляді наступного твердження, яке виконується також для $\widetilde{A}_1, A_1$.

Теорема 2.1. *Нехай* $\widetilde{y_i^0}, y_i^0 \in \Re_m$ *розв'язки відповідних лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$
\begin{gathered}
B\widetilde{y}_i = \widetilde{a}_i, \quad By_i = a_i, \quad i = \overline{1, 2n}, \\
\widetilde{A}_0 = [\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_{2n}], \quad A_0 = [a_1, a_2, ..., a_{2n}], \quad \widetilde{a}_i, a_i \in \Re_{2n}
\end{gathered}
\tag{2.138}
$$

знайдені за методом найменших квадратів.

Тоді для всіх матриць коефіцієнтів A_0, які можна отримати за допомогою зворотного зв'язку (2.58), вектори - нев'язки для розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь (2.138) збігаються

$$
B\widetilde{y_i^0} - \widetilde{a}_i = By_i^0 - a_i, \quad i = \overline{1, 2n}. \tag{2.139}
$$

Відзначимо, що формула (2.139) представляє собою формулу (2.135) в векторному вигляді. Дійсно, знаходячи розв'язки рівнянь (2.138) за методом найменших квадратів, отримаємо

$$
\widetilde{y_i^0} = (B^T B)^{-1} B^T \widetilde{a}_i, \quad y_i^0 = (B^T B)^{-1} B^T a_i, \quad i = \overline{1, 2n}. \tag{2.140}
$$

і, підставляючи їх в (2.139), прийдемо до (2.135).

Оскільки зворотній зв'язок дає матрицю для якої завжди виконується (2.139), то на неї можна накладати додаткові умови, тобто вибирати її з певного класу матриць (наприклад, кососиметричних).Так, відомо [159], що при повній керованості лінійної диференціальної системи завжди можна побудувати оптимальний регулятор зворотного зв'язку, який стабілізує систему, тобто матриця коефіцієнтів замкненої системи вибирається з класу асимптотично стійких матриць.

Для обчислення параметрів кососиметричної матриці A_0 необхідно сформувати систему рівнянь з відповідних елементів матриць $(I-H)\widetilde{A}_0 = \{\widetilde{m}_{ij}\}_1^{2n}$, $(I-H)A_0 = \{m_{ij}\}_1^{2n}$ рівняння (2.135)

$$
\widetilde{m}_{jk} = m_{jk}, \quad i = \overline{1, 2n}. \tag{2.141}
$$

В системі (2.141) принаймні $2nm$ лінійно залежних рівнянь. Ранг матриці $I - H$ дорівнює $2n - m$ і матриця $\widetilde{A}_0$ необов'язково невироджена, тому в кососиметричній невиродженій матриці A_0 загального вигляду з $n(2n-1)$ вільних параметрів не всі можуть бути зв'язаними рівністю (2.135) (рівняннями (2.141)). Вільні параметри матриці A_0 можуть набувати довільних значень в рамках її невиродженості. Якщо таким чином досягти кососиметричності та невиродженості шуканої матриці неможливо, то це можна зробити, якщо є можливість, або переставленням рядків матриці B, або збільшенням числа керувань, що зменшує число зв'язаних параметрів.

Умова однакових проекцій відповідних стовпців матриць $\widetilde{A}_0$, A_0 при загальному вигляді матриці B, як видно з (2.141), не дає ефективного способу отримання кососиметричної матриці. Тому розглянемо випадок, коли в матриці повного рангу B стовпці є одиничними векторами, тобто $B = [e_{i_1}e_{i_2}...e_{i_m}]$, де $e_j \in \Re_{2n}$ - вектор з одиницею на j - му місці і нулями на інших місцях. Із структури матриці B випливає рівність $B^TB = I_m$. Запишемо матрицю B також у такому вигляді

$$B = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^T \\ ... \\ \tilde{e}_{2n}^T \end{bmatrix}, \quad B^T = [\tilde{e}_1...\tilde{e}_{2n}], \quad \tilde{e}_i \in \Re_m, \tag{2.142}$$

причому тільки вектори $\tilde{e}_{il}, \quad l = \overline{1,m}$ є одиничні розмірності m, а інші - нульові. Тоді елементи матриці $H = BB^T = \{h_{ij}\}_1^{2n}$ дорівнюють $h_{ij} = \tilde{e}_i^T\tilde{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \in \{i_1, ..., i_m\} \\ 0 - \text{в інших випадках.} \end{cases}$

Визначимо для яких матриць $\widetilde{A}_0$ рівняння (2.135) буде мати розв'язком, необов'язково невироджену, кососиметричну матрицю A_0. Оскільки матриця H має ненульовими тільки елементи (i_1, i_1),(i_2, i_2),...,(i_m, i_m), то в матриці $I - H$ будуть ненульовими тільки елементи (j, j),$j \in \{\overline{1, 2n}\} \setminus \{i_1, i_2, ..., i_m\}$. Тоді матриці $(I - H)\widetilde{A}_0$, $(I - H)A_0$ матимуть нульовими рядки $i_1, i_2, ..., i_m$, причому це будуть відповідно матриці $\widetilde{A}_0$, A_0 з обнуленими цими рядками. Виходячи з загальної структури невиродженої кососиметричної матриці [23], для виконання (2.135), очевидно, необхідно і достатньо щоб для всіх елементів $\widetilde{a}_{lj}$, $l, j \in \{\overline{1, 2n}\} \setminus \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ матриці $\widetilde{A}_0 = \{\widetilde{a}_{ij}\}_1^{2n}$ виконувалась умова: $\widetilde{a}_{lj} = -\widetilde{a}_{jl}$. Тоді зв'язані елементи матриці $A_0 = \{a_{ij}\}_1^{2n}$ такі: $a_{lj} = \widetilde{a}_{lj}$,

$l \in \{\overline{1,2n}\} \setminus \{i_1, i_2, ..., i_m\}$, $j \in \overline{1,2n}$. Інші елементи залишаються вільними параметрами, але такими, що не порушують кососиметричність і невиродженість матриці A_0.

Отже, виконується твердження.

Теорема 2.2. *Нехай матриця при керуванні системи (2.57) має вигляд* $B = [e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_m}]$, $rang B = m$.

За допомогою зворотного зв'язку (2.58) можна отримати деяку кососиметричну матрицю $A_0 = \{a_{ij}\}_1^{2n}$ *в замкненій системі (2.60) тоді і тільки тоді, коли елементи* $\widetilde{a}_{lj}$, $l, j \in \{\overline{1,2n}\} \setminus \{i_1, i_2, ..., i_m\}$ *матриці коефіцієнтів* $\widetilde{A}_0 = \{\widetilde{a}_{ij}\}_1^{2n}$ *вихідної системи задовольняють умові* $\widetilde{a}_{lj} = -\widetilde{a}_{jl}$. *При цьому елементи шуканої матриці обчислюються наступним чином:* $a_{lj} = \widetilde{a}_{lj}$, $l \in \{\overline{1,2n}\} \setminus \{i_1, i_2, ..., i_m\}$, $j \in \overline{1,2n}$, *а інші елементи, не порушуючи кососиметричності та невиродженості матриці* A_0, *можуть бути довільними.*

Розглядаючи рівняння (2.137), структуру матриці A_1 (також K_1) вибираємо, виходячи з практичної доцільності, наприклад для стабілізації замкненої системи. З іншої сторони матрицю K_1 можна отримати не з рівняння (2.136), а при побудові оптимального регулятора зворотного зв'язку для майже консервативної системи [107, 37] або з системи нерівностей для її стабілізації [39].

Приклад 2.4. *Побудувати майже консервативну систему і перевірити її на асимптотичну стійкість.* Розглянемо систему (2.57)

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 + \varepsilon \widetilde{A}_1)x + Bu,$$

з матрицею коефіцієнтів

$$\widetilde{A}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon s_1 & \varepsilon s_2 & \omega_3 & \omega_4 + \varepsilon a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ \varepsilon s_3 & -\omega_4 - \varepsilon a_2 & 0 & -\varepsilon a_3 \end{bmatrix} \qquad (2.143)$$

і матрицею при керуванні

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.144}$$

$\omega_1 \neq \omega_2$, $a_1, a_2, a_3 > 0$. Тут ε- малий параметр.

Необхідно побудувати майже консервативну систему (2.60)

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x,$$

де $A_0 = \widetilde{A}_0 - BK_0, A_1 = \widetilde{A}_1 - BK_1$, та дослідити її на стійкість за допомогою рівняння Ляпунова.

Представимо матрицю $\widetilde{A}(\varepsilon)$ у вигляді суми двох матриць $\widetilde{A}(\varepsilon) = \widetilde{A}_0 + \varepsilon \widetilde{A}_1$, де

$$\widetilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 & \omega_4 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & -\omega_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_3 & -a_2 & 0 & -a_3 \end{bmatrix}. \tag{2.145}$$

Неважко впевнитись перевіркою, що задана система повністю керована. Нагадаємо, що для цілком керованості стаціонарної системи, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці $S_4 = (B, \widetilde{A}B, \widetilde{A}^2B, \widetilde{A}^3B)$ дорівнював 4 [19]. Для перевірки, достатньо взяти перші чотири стовпці цієї матриці. Маємо

$$S_2 = (B, \widetilde{A}B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon s_2 & \omega_4 + \varepsilon a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 1 & -\omega_4 - \varepsilon a_2 & \varepsilon a_3 \end{bmatrix}, rang(S_2) = 4. \tag{2.146}$$

Матриці B і $\widetilde{A}_0$ задовольняють умови теореми 2.2, тому існує кососиметрична матриця A_0, яка перетворює рівняння (2.135)

$$\left(I - B(B^TB)^{-1}B^T\right)\widetilde{A}_0 = \left(I - B(B^TB)^{-1}B^T\right)A_0.$$

в тотожність.

Покажемо, що кососиметрична матриця канонічної форми [23]

$$A_0 = diag\left\{\begin{bmatrix} 0 & \omega_1 \\ -\omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \omega_2 \\ -\omega_2 & 0 \end{bmatrix}\right\}, detA_0 \neq 0, \tag{2.147}$$

задовольняє рівняння $(I-H)\widetilde{A}_0 = (I-H)A_0$.

Маємо $H = B(B^TB)^{-1}B^T = diag\{0,1,0,1\}$.

$$(I-H)\widetilde{A}_0 = (I-H)A_0 = \begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.148}$$

При цьому матриця K_0 буде такою:

$$K_0 = (B^TB)^{-1}B^T(\widetilde{A}_0 - A_0) = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \omega_3 & \omega_4 \\ 0 & -\omega_4 & \omega_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.149}$$

Для матриці $\widetilde{A}_1$ вірно $(I-H)\widetilde{A}_1 = 0$, тому в якості матриці збурення можна вибрати

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & -a_3 \end{bmatrix}, \tag{2.150}$$

при цьому $(I-H)\widetilde{A}_1 \equiv (I-H)A_1$ і

$$K_1 = (B^TB)^{-1}B^T(\widetilde{A}_1 - A_1) = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & 0 & 0 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.151}$$

Таким чином, за допомогою керування

$$u = \begin{bmatrix} -(\omega_1 + \varepsilon s_1)x_1 - \varepsilon s_2 x_2 - \omega_3 x_3 - \omega_4 x_4 \\ -\varepsilon s_3 x_1 + \omega_4 x_2 - \omega_2 x_3 \end{bmatrix} \tag{2.152}$$

ми отримали наступну майже консервативну систему:

$$\dot{x} = \left(\begin{bmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & -a_3 \end{bmatrix} \right) x. \tag{2.153}$$

Перевіримо побудовану систему на асимптотичну стійкість за допомогою матричного рівняння Ляпунова [159]

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T P + P(A_0 + \varepsilon A_1) = -2Q, \tag{2.154}$$

де $P, Q \in \Re_{2n\times 2n}$ - деякі симетричні матриці, причому для асимптотично стійкої матриці $A_0 + \varepsilon A_1$ вони додатньо визначені. Для пошуку розв'язку матричного рівняння (2.154) будемо використовувати алгоритм описаний в [37]. Матриці P, Q будемо шукати у вигляді розкладів за малим параметром ε

$$\begin{gathered} P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ..., \\ Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + ... \end{gathered} \tag{2.155}$$

Покажемо, що для сформованої майже консервативної системи (2.153) існує розв'язок рівняння (2.154) в рамках розкладів (2.155) з додатньо визначеною матрицею P_0. Запишемо матричне рівняння Ляпунова у вигляді нескінченної системи рівнянь

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0 \tag{2.156}$$

$$\begin{gathered} A_0 P_1 - P_1 A_0 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 P_2 - P_2 A_0 = P_1 A_1 + A_1^T P_1 + 2Q_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered} \tag{2.157}$$

Тут $Q_0 = 0$.

Далі за алгоритмом [37] послідовно розв'язуємо рівняння (2.156), (2.157). Власні значення A_0 різні, тому $P_0 = diag\{p_{10}, p_{10}, p_{20}, p_{20}\}$, $p_{10}, p_{20} > 0$. Виберемо $Q_1 = diag\{q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14}\}$, $q_{11}, q_{12}, q_{13}, q_{14} \geq 0$. Перейдемо до розгляду правої частини першого рівняння (2.157):

$$D_1 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 + 2Q_1 = V_1 + 2Q_1,$$
$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{10}a_1 - p_{20}a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{10}a_1 - p_{20}a_2 & 0 & -2a_3p_{20} \end{bmatrix}.$$

Запишемо умови на діагональні елементи матриці $D_1 = \{d_{ij}\}_1^4$:

$$\begin{aligned} d_{11} + d_{22} = 2q_{11} + 2q_{12} = 0, \\ d_{33} + d_{44} = 2q_{13} + 2q_{14} - 2a_3p_{20} = 0. \end{aligned} \tag{2.158}$$

Звідси $q_{11} = q_{12} = 0$. Якщо покласти $p_{10} = a_2, p_{20} = a_1$, $Q_1 = diag\{0, 0, 0, a_1a_3\}$, то $D_1 \equiv 0$ (випливає зі структури матриці V_1). Матриця Q_1, невід'ємно визначена, а P_0 - додатньо визначена, тому матриці P_k, Q_{k+1},$k = 1, 2, ...$, можна покласти рівними нулю (див. теорему з [37]).

Таким чином, розв'язком задачі буде

$$P = diag\{a_2, a_2, a_1, a_1\} > 0, \quad Q = \varepsilon diag\{0, 0, 0, a_1a_3\} \geq 0. \tag{2.159}$$

З розв'язку (2.159) випливає, що система (2.153) зі сформованими матрицями A_0, A_1 стійка [159]). Для того, щоб показати, що дана система асимптотично стійка, необхідно знайти матрицю - розв'язок $P > 0$ при $Q > 0$.

За допомогою комп'ютерної системи аналітичних обчислень Maple будемо шукати розв'язок цієї задачи, коли матриця Q (сума другого ряду (2.155)) додатньо визначена. З рівняння (2.158) знаходимо: $q_{11} = q_{12} = 0$, $p_{20} = (q_{13} + q_{14})/a_3, q_{13}, q_{14} > 0$. Отже, маємо

$$P = diag\left\{p_{10}, p_{10}, \frac{q_{13}+q_{14}}{a_3}, \frac{q_{13}+q_{14}}{a_3}\right\}, \quad Q = diag\{0, 0, q_{13}, q_{14}\},$$

де p_{10} залишається вільним параметром.

Далі, підставляємо P_0 в рівняння

$$A_0P_1 - P_1A_0 = P_0A_1 + A_1^TP_0 + 2Q_1$$

і знаходимо елементи матриці $P_1 = \{p_{ij}\}_1^4$

$$p_{14} = \frac{\omega_1(p_{10}a_1a_3 - a_2q_{13} - a_2q_{14})}{a_3(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, p_{22} = p_{11}, p_{44} = p_{33},$$
$$p_{23} = \frac{\omega_2(p_{10}a_1a_3 - a_2q_{13} - a_2q_{14})}{a_3(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, p_{34} = \frac{q_{13}}{\omega_2}, p_{12} = p_{13} = p_{14} = 0,$$

а p_{11}, p_{33} - вільні параметри.

Виберемо матрицю Q_2 діагональної структури $Q_2 = diag\{q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24}\}$, $q_{21}, q_{22}, q_{23}, q_{24} \geq 0$ і обчислимо $D_2 = \{d_{ij}^2\}_1^4 = P_1A_1 + A_1^TP_1 + 2Q_2$ (через громіздкість в явному вигляді її не наводимо). Тепер запишемо умови на діагональні елементи знайденої матриці

$$d_{11}^2 + d_{22}^2 = 2q_{21} + 2q_{22} = 0, d_{33}^2 + d_{44}^2 = 2q_{23} + 2q_{24} - 2p_{33}a_3 = 0.$$

З першого рівняння знаходимо $q_{21} = q_{22} = 0$, а в другому рівнянні покладаємо $p_{33} = 0$ і обчислюємо $q_{23} = q_{24} = 0$. Параметри p_{10}, p_{11} залишаємо вільними. Далі підставляємо матрицю P_1 в рівняння $A_0P_2 - P_2A_0 = P_1A_1 + A_1^TP_1 + 2Q_2$ і знаходимо елементи матриці $P_2 = \{v_{ij}\}$:

$$v_{13} = \frac{\omega_1(\omega_2^2p_{10}a_1a_3 - 2\omega_2^2a_2q_{13} - \omega_2^2a_2q_{14} + \omega_1^2a_2q_{13})}{\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)},$$
$$v_{24} = \frac{\omega_1^2p_{10}a_1a_3 - \omega_1^2a_2q_{14} - \omega_2^2a_2q_{13}}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2}, \quad v_{14} = -\frac{\omega_1p_{11}a_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2},$$
$$v_{22} = v_{11} + \frac{(p_{10}a_1a_3 - a_2q_{13} - a_2q_{14})a_2}{a_3(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \quad v_{23} = \frac{\omega_2p_{11}a_1}{\omega_1^2 - \omega_2^2},$$
$$v_{44} = v_{33} + \frac{\omega_2^2a_1^2p_{10}a_3 - \omega_2^2a_1a_2(q_{13} + q_{14}) - q_{13}a_3^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}{a_3(\omega_1^2 - \omega_2^2)\omega_2^2},$$
$$v_{12} = 0, \quad v_{34} = 0,$$

де v_{11}, v_{33}-вільні параметри.

Тепер вибиремо діагональну матрицю $Q_3 = diag\{q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{34}\}$, $q_{31}, q_{32}, q_{33}, q_{34} \geq 0$ і обчислимо $D_3 = \{d_{ij}^3\}_1^4 = P_2A_1 + A_1^TP_2 + 2Q_3$. Умови на діагональні елементи матриці D_3 набудуть вигляду

$$\frac{d_{11}^3+d_{22}^3}{2}=q_{31}-\frac{(\omega_1^2p_{10}a_1a_3-\omega_1^2a_2q_{14}-\omega_2^2a_2q_{13})a_2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}+q_{32}=0,$$

$$\frac{d_{33}^3+d_{44}^3}{2}=q_{33}+q_{34}+\frac{(\omega_1^2p_{10}a_1a_3-\omega_1^2a_2q_{14}-\omega_2^2a_2q_{13})a_1}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2}-$$

$$-\frac{\omega_2^2a_1^2p_{10}a_3-\omega_2^2a_1a_2(q_{13}+q_{14})-q_{13}a_3^2(\omega_1^2-\omega_2^2)}{2(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_2^2}-v_{33}a_3=0.$$

З першого рівняння знаходимо значення вільного параметра p_{10}

$$p_{10}=\frac{(q_{31}+q_{32})(\omega_1^2-\omega_2^2)^2+a_2^2(\omega_1^2q_{14}+\omega_2^2q_{13})}{\omega_1^2a_1a_2a_3}>0,$$

тобто P_0 є додатньо визначена матриця. Далі покладемо $q_{33}=q_{34}=0$ і обчислимо з другого рівняння значення вільного параметра v_{33} матриці P_2

$$v_{33}=\frac{a_2q_{13}(a_3^2\omega_1^2+a_1a_2\omega_2^2)+a_1\omega_2^4(q_{31}+q_{32})}{a_2a_3\omega_1^2\omega_2^2},$$

а v_{11} залишається вільним параметром.

Таким чином, $Q_3=diag\{q_{31},q_{32},0,0\}$ і матриця $\varepsilon Q_1+\varepsilon^3Q_3$ є додатньо визначеною.

З рівняння $A_0P_3-P_3A_0=P_2A_1+A_1^TP_2+2Q_3$ знаходимо невідому матрицю $P_3=\{h_{ij}\}_1^4$:

$$h_{13}=\frac{\omega_1\omega_2p_{11}a_1a_3}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2},\quad h_{24}=\frac{\omega_1^2p_{11}a_1a_3}{(\omega_1^2-\omega_2^2)^2},\quad h_{12}=\frac{q_{31}}{\omega_1},$$

$$h_{22}=h_{11}+\frac{p_{11}a_1a_2}{\omega_1^2-\omega_2^2},\quad h_{44}=h_{33}+\frac{p_{11}a_1^2}{\omega_1^2-\omega_2^2},\quad h_{34}=0,$$

$$h_{14}=\frac{(a_3^2\omega_1^2+a_1a_2\omega_2^2)(q_{31}+q_{32})+a_1a_2(a_2^2q_{13}-v_{11}\omega_1^2a_3)}{a_2a_3(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_1},$$

$$h_{23}=-\frac{\omega_2(a_3^2\omega_1^2+a_1a_2\omega_2^2)(q_{31}+q_{32})+\omega_2a_1a_2(a_2^2q_{13}-v_{11}\omega_1^2a_3)}{a_2a_3(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_1^2}.$$

Оскільки P_0 і $\varepsilon Q_1+\varepsilon^3Q_3$ додатньо визначені матриці, то згідно з теоремою [37] завершуємо процес розв'язання рівнянь системи (2.157) і остаточно обчислюємо матрицю Q_4, прирівнявши до нуля вільні параметри $h_{11},\ h_{33}$ матриці P_3. Також покладемо рівними нулю вільні параметри $p_{11},\ v_{11}$, що спростить обчислення матриць P і Q, але не вплине на їх додатню визначеність.

Отже, маємо

$$Q_4 = \{s_{ij}\}_1^4 = -\frac{1}{2}P_3A_1 - \frac{1}{2}A_1^TP_3,$$

де

$$s_{12} = \frac{(a_3^2\omega_1^2 + a_1a_2\omega_2^2)(q_{31}+q_{32}) + a_1a_2^3q_{13}}{2a_3(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_1},$$

$$s_{14} = -\frac{a_1q_{31}}{2\omega_1} + \frac{(a_3^2\omega_1^2 + a_1a_2\omega_2^2)(q_{31}+q_{32}) + a_1a_2^3q_{13}}{2a_2(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_1},$$

$$s_{34} = \frac{(a_3^2\omega_1^2 + a_1a_2\omega_2^2)(q_{31}+q_{32})a_1\omega_2 + a_1^2a_2^3\omega_2q_{13}}{2a_2a_3(\omega_1^2-\omega_2^2)\omega_1^2},$$

$$s_{11} = s_{13} = s_{22} = s_{23} = s_{24} = s_{33} = s_{44} = 0.$$

Таким чином, ми отримали за скінченне число кроків аналітичний розв'язок рівняння Ляпунова для сформованої асимптотично стійкої матриці $A_0 + \varepsilon A_1$:

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2P_2 + \varepsilon^3P_3, \quad Q = \varepsilon Q_1 + \varepsilon^3Q_3 + \varepsilon^4Q_4.$$

Приклад 2.5. *Побудувати за допомогою зворотного зв'язку майже консервативну систему і перевірити її на асимптотичну стійкість.*

Розглянемо систему диференціальних рівнянь, що описують рух об'єкту з виникаючим гіроскопічним ефектом [86]

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= -\frac{H_3^z}{A}\dot{\theta} + \frac{H_2^z}{A}\dot{\psi} + \frac{M_1}{A} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{H_1^z}{G}\dot{\psi} + \frac{H_3^z}{G}\dot{\varphi} + \frac{M_2}{G} \\ \ddot{\psi} &= -\frac{H_2^z}{C}\dot{\varphi} + \frac{H_1^z}{C}\dot{\theta} + \frac{M_3}{C} \end{aligned} \tag{2.160}$$

де A, G, C - головні моменти інерції об'єкту з урахуванням роторів; H_i^z - сумарний вектор кінетичних моментів всіх роторів при їх обертанні щодо об'єкту.

Після введення заміни змінних

$$x_1 = \varphi, x_2 = \dot{\varphi}, x_3 = \theta, x_4 = \dot{\theta}, x_5 = \psi, x_6 = \dot{\psi} \tag{2.161}$$

ситема (2.160) в матричної формі буде виглядати наступним чином

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\\ \dot{x}_5\\ \dot{x}_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{H_3^z}{A} & 0 & \frac{H_2^z}{A}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{H_3^z}{G} & 0 & 0 & 0 & -\frac{H_1^z}{G}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{H_2^z}{C} & 0 & \frac{H_1^z}{C} & 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{M_1}{A}\\ 0\\ \frac{M_2}{G}\\ 0\\ \frac{M_3}{C}\end{bmatrix}, \tag{2.162}$$

або, в скороченій формі

$$\dot{x} = \widetilde{A}x + Bu = (\widetilde{A}_0 + \varepsilon\widetilde{A}_1)x + Bu, \tag{2.163}$$

де

$$\widetilde{A}_0 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \varepsilon\widetilde{A}_1 = \frac{1}{l} \cdot \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{H_3^z l}{A} & 0 & \frac{H_2^z l}{A}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{H_3^z l}{G} & 0 & 0 & 0 & -\frac{H_1^z l}{G}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{H_2^z l}{C} & 0 & \frac{H_1^z l}{C} & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{2.164}$$

$l = max\{A, G, C\}$.

Система (2.163) не є майже консервативною [104], тому що $\widetilde{A}_0^T \neq -\widetilde{A}_0$.

Для того щоб застосувати вектор u в побудові кососиметричної матриці, дана система повинна бути керованою.

Перевіримо умову повної керованості [19] системи для можливих випадків розмірності вектора u:

1) Якщо моменти M_1,M_2,M_3 - незалежні (вектор u тривимірний), тоді

$$Bu = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{1}{A} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{G} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{C}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\end{bmatrix}. \tag{2.165}$$

Для цілком керованості стаціонарної системи, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці $S_6 = (B, \widetilde{A}B, \widetilde{A}^2B, \widetilde{A}^3B, \widetilde{A}^4B, \widetilde{A}^5B)$ дорівнював 6 [19]. Для перевірки, достатньо взяти перші шість стовпців цієї матриці. Маємо

$$(B, \widetilde{A}B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A} & 0 & 0 & 0 & -\frac{H_3^z}{AG} & \frac{H_2^z}{AC} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 & \frac{H_3^z}{AG} & 0 & -\frac{H_1^z}{GC} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & -\frac{H_2^z}{AC} & \frac{H_1^z}{GC} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.166}$$

$rang(B, \widetilde{A}B) = 6$, отже система повністю керована.

2) $M_1 = kM_2$, (вектор u двумірний) тоді

$$Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{k}{A} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \tag{2.167}$$

$rang(B, \widetilde{A}B, \widetilde{A}^2B, \widetilde{A}^3B, \widetilde{A}^4B, \widetilde{A}^5B) = 5$, отже система не керована.

3) $M_1 = kM_2 = mM_2$,(вектор u одномірний) тоді

$$Bu = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m}{A} \\ 0 \\ \frac{m}{kG} \\ 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_3 \end{bmatrix} \tag{2.168}$$

$rang(B, \widetilde{A}B, \widetilde{A}^2B, \widetilde{A}^3B, \widetilde{A}^4B, \widetilde{A}^5B) = 4$, або $det(B, \widetilde{A}B, \widetilde{A}^2B, \widetilde{A}^3B, \widetilde{A}^4B, \widetilde{A}^5B) = 0$, отже система не керована.

Таким чином, тільки у випадку, коли моменти M_1,M_2,M_3 - незалежні, система буде повністю керованою. А значить, формування майже консервативної системи можливо, якщо вектор u тривимірний.

Оберемо вектор u у вигляді (2.58)

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x.$$

Тоді система (2.163) пертвориться, після позначення $\widetilde{A}_0 - BK_0 = A_0, \widetilde{A}_1 - BK_1 = A_1$, у систему (2.60)

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x$$

Умова майже консервативної системи: $A_0^T = -A_0$ та $det(A_0) \neq 0$.

Задамо бажаний вигляд матриці A_0

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.169}$$

і знайдемо матрицю при керуванні K_0 за формулою (2.134)

$$K_0 = (B^T B)^{-1} B^T (\widetilde{A}_0 - A_0).$$

Отримаємо

$$K_0 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.170}$$

Відмітимо, що обрана матриця A_0 задовольняє рівнянню

$$(I - H) \cdot \widetilde{A}_0 = (I - H) \cdot A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.171}$$

де

$$H = B(B^T B)^{-1} B^T. \tag{2.172}$$

Оберемо матрицю A_1 таким чином, щоб виконувалась рівність

$$(I - H) \cdot \widetilde{A}_1 = (I - H) \cdot A_1 \tag{2.173}$$

і, крім того, отримана майже консервативна система з матрицею коефіцієнтів $A = A_0 + \varepsilon A_1$, була б асимптотично стійка. Таким умовам задовольняє наступна матриця

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.174}$$

За формулою (2.136)

$$K_1 = (B^T B)^{-1} B^T (\widetilde{A}_1 - A_1)$$

знайдемо другий компонент при керуванні

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & -H_3^z l & 0 & H_2^z l \\ 0 & H_3^z l & 0 & G & 0 & -H_1^z l \\ 0 & -H_2^z l & 0 & H_1^z l & 0 & C \end{bmatrix}. \tag{2.175}$$

Отже, шукане керування u, яке перетворює задану систему на майже консервативну, має вигляд

$$u = -\begin{bmatrix} Ax_1 + \frac{A}{l} x_2 - H_3^z x_4 + H_2^z x_6 \\ H_3^z x_2 + G x_3 + \frac{G}{l} x_4 - H_1^z x_6 \\ -H_2^z x_2 + H_1^z x_4 + C x_5 + \frac{C}{l} x_6 \end{bmatrix}. \tag{2.176}$$

Відмітимо, що для заданої системи (2.160) характеристичний поліном якої має вигляд $\lambda^6 + \frac{H_2^2 G + H_1^2 A + H_3^2 C}{AGC} \lambda^4$, не виконується крітерій Руса-Гурвіца, а значить система не є асимптотична стійкою. Перевіримо на асимптотичну стійкість отриману майже консервативну систему з матрицею коефіцієнтів

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{l} \end{bmatrix}. \tag{2.177}$$

Характеристичний поліном цієї матриці дорівнює

$$det(A-\lambda E) = \lambda^6+\frac{3}{l}\lambda^5+\frac{3(l^2+1)}{l^2}\lambda^4+\frac{6l^2+1}{l^3}\lambda^3+\frac{3(l^2+1)}{l^2}\lambda^2+\frac{3}{l}\lambda+1. \tag{2.178}$$

Визначники матриці Гурвіца додатні, а саме

$$\begin{gathered} a_0 = 1, \Delta_1 = a_1 = \frac{3}{l} > 0, \Delta_2 = \frac{3l^2+8}{l^3} > 0, \\ \Delta_3 = 8\frac{3l^2+1}{l^6} > 0, \Delta_4 = 24\frac{l^4+l^2+1}{l^8} > 0, \\ \Delta_5 = 64\frac{1}{l^9} > 0, \Delta_6 = 1 \cdot \Delta_5 > 0. \end{gathered} \tag{2.179}$$

Отже, отримана замкнена майже консервативна система асимптотично стійка. Значить для неї існує додатньо визначена матриця - розв'язок P матричного рівняння Ляпунова

$$(A_0+\varepsilon A_1)^T P + P(A_0+\varepsilon A_1) = -2Q. \tag{2.180}$$

За допомогою MAPLE V знайдемо точний розв'язок рівняння Ляпунова, поклавши

$$Q = \varepsilon Q_1, \tag{2.181}$$

де

$$Q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} \end{bmatrix}. \tag{2.182}$$

Отримаємо

$$P=\begin{bmatrix} 2q_{11}+q_{11}\frac{1}{l^2} & q_{11}\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0\\ q_{11}\frac{1}{l} & 2q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2q_{33}+q_{33}\frac{1}{l^2} & q_{33}\frac{1}{l} & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_{33}\frac{1}{l} & 2q_{33} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2q_{55}+q_{55}\frac{1}{l^2} & q_{55}\frac{1}{l}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55}\frac{1}{l} & 2q_{55} \end{bmatrix}. \qquad (2.183)$$

Можна побачити, що матриця - розв'язок P подана у вигляді

$$P = P_0 + \frac{1}{l}P_1 + \frac{1}{l^2}P_2. \qquad (2.184)$$

Далі знайдемо матрицю - розв'язок у вигляді розкладу за малим параметром, використовуючи нескінченну матричну систему рівнянь Ляпунова [104]. Однак, завдяки (2.184), будемо шукати тільки P_0, P_1, P_2. $Q = \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2$, де Q_1 задамо згідно з формулою (2.182) ,$Q_2 = 0$. Нам знадобляться лише перші три рівняння

$$\begin{aligned} A_0P_0 - P_0A_0 &= 0\\ A_0P_1 - P_1A_0 &= P_0A_1 + A_1^TP_0 + 2Q_1.\\ A_0P_2 - P_2A_0 &= P_1A_1 + A_1^TP_1 + 2Q_2 \end{aligned} \qquad (2.185)$$

Розв'язавши їх отримаємо

$$P_0=\begin{bmatrix} 2q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2q_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2q_{33} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2q_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 2q_{55} \end{bmatrix}, \qquad (2.186)$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.187}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.188}$$

Якщо просумувати знайдені матриці згідно з (2.184), отримаємо результат (2.183)

2.6. Застосування вектора керування для формування майже консервативної системи та побудови оптимального керування для гіроскопічних систем

Поставимо мету: знайти таке керування u, яке одночасно вирішувало б дві задачі. Перша - отримання невиродженої кососиметричної матриці, а як наслідок - формування майже консервативної системи. Друга - побудова оптимального керування [35, 83].

Для цього розкладемо вектор u (2.58) на суму

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x = -K_0 x - \varepsilon K_1 x = u_0 + \varepsilon u_1. \tag{2.189}$$

Перший доданок - u_0 - будемо використовувати для отримання кососиметричної матриці, а другий - u_1 - для побудови оптимального регулятора системи.

З урахуванням заданого u система (2.57) перепишеться наступним чином

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 - BK_0 + \varepsilon \widetilde{A}_1)x - \varepsilon BK_1 x. \tag{2.190}$$

Якщо покласти

$$\widetilde{A}_0 - BK_0 = A_0, \widetilde{A}_1 = A_1 \tag{2.191}$$

отримаємо найбільш зручну форму запису системи

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x - \varepsilon BK_1 x \tag{2.192}$$

Матрицю K_0 знайдемо з умови $A_0^T = -A_0$, або (2.62).

Оптимальне керування будуватимемо у вигляді

$$u_1 = -K_1 x = -\varepsilon R^{-1} B^T S x \tag{2.193}$$

з квадратичним критерієм якості

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u_1^T R u_1) dt \tag{2.194}$$

де $Q \in \Re_{2n\times 2n}$ - невід'ємно визначена матриця, $R \in \Re_{m\times m}$ - додатно визначена матриця, $S \in \Re_{2n\times 2n}$ - додатно - визначена матриця - розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T S + S(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon^2 SBR^{-1}B^T S + Q = 0 \tag{2.195}$$

Введемо заміну $P = \varepsilon S$, тоді матричне рівняння Ріккаті запишеться наступним чином

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T P + P(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon PBR^{-1}B^T P + \varepsilon Q = 0 \tag{2.196}$$

Використовуючи підхід, який описаний в [105], будемо шукати матрицю - розв'язок P у вигляді розкладу за малим параметром

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ... \tag{2.197}$$

Матрицю Q також розкладемо за степенями ε

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + ... \tag{2.198}$$

Компоненти матриці P знайдемо з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \tag{2.199}$$

$$
\begin{gathered}
A_0P_1 - P_1A_0 = P_0A_1 + A_1^TP_0 - P_0BR^{-1}B^TP_0 + Q_0, \\
A_0P_2 - P_2A_0 = P_1A_1 + A_1^TP_1 - P_1BR^{-1}B^TP_0 - P_0BR^{-1}B^TP_1 + Q_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_0P_i - P_iA_0 = P_{i-1}A_1 + A_1^TP_{i-1} - \sum_{k=1}^{i} P_kBR^{-1}B^TP_{i-k} + Q_{i-1}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
\tag{2.200}
$$

Приклад 2.6. Задані лінеаризовані рівняння руху гіроскопа з лінійною характеристикою системи міжрамкової корекції [122]

$$
\begin{gathered}
A_m\ddot{\alpha} + f_1\dot{\alpha} - H\dot{\beta}\cos\beta_0 - K\beta = 0 \\
B_m\ddot{\beta} + f_2\dot{\beta} + H\dot{\alpha}\cos\beta_0 = 0
\end{gathered}
\tag{2.201}
$$

де f_1, f_2 - еквівалентні коефіцієнти моментів сил в'язкого тертя; A_m - приведений момент інерції всієї системи щодо осі обертання зовнішньої рамки; B_m -момент інерції гіромотора щодо осі обертання внутрішньої рамки; K - коефіцієнт пропорційності системи корекції.

Знайти таке керування u, яке одночасно вирішувало б задачу формування майже консервативної системи, та задачу побудови оптимального керування. Для спрощення розв'язку будемо вважати, що $f_1 = f_2 = 0$. Доданок $K\beta$ належить до моменту зовнішніх сил. Переписавши систему рівнянь в матричній формі та зіставивши із системою виду (2.57)

$$
\dot{x} = (\widetilde{A}_0 + \varepsilon\widetilde{A}_1)x + Bu,
$$

позначимо

$$
\begin{gathered}
\widetilde{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \\ b_{41} & 0 \end{bmatrix} \\
\varepsilon\widetilde{A}_1 = \varepsilon A_1 = \cos\beta_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{H}{A_m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{H}{B_m} & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{gathered}
\tag{2.202}
$$

З урахуванням, що $\widetilde{A}_0 + \varepsilon\widetilde{A}_1 = \widetilde{A}$ знайдемо матрицю

$$S_4 = (B, \widetilde{A}B, \widetilde{A}^2B, \widetilde{A}^3B) =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b_{22} & \frac{H\cos\beta_0 b_{41}}{A} & 0 & 0 & -\frac{H^2\cos^2\beta_0 b_{22}}{A_mB_m} \\ 0 & b_{22} & \frac{H\cos\beta_0 b_{41}}{A_m} & 0 & 0 & -\frac{H^2\cos^2\beta_0 b_{22}}{A_mB_m} & -\frac{H^3\cos^3\beta_0 b_{41}}{A_m^2B_m} & 0 \\ 0 & 0 & b_{41} & 0 & 0 & -\frac{H\cos\beta_0 b_{22}}{B_m} & -\frac{H^2\cos^2\beta_0 b_{41}}{A_mB_m} & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & -\frac{H\cos\beta_0 b_{22}}{B_m} & -\frac{H^2\cos^2\beta_0 b_{41}}{A_mB_m} & 0 & 0 & \frac{H^3\cos^3\beta_0 b_{22}}{A_mB_m^2} \end{bmatrix}. \tag{2.203}$$

Ранг матриці S_4 дорівнює 4, а значить система (2.57) з заданими матрицями (2.202) є повністю керованою [19].

Для розв'язання поставленої задачі задамо вектор u у вигляді суми двох доданків, перший з яких буде відповідати за отримання майже консервативної системи, а другий - за побудову оптимального керування (2.189)

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x = -K_0x - \varepsilon K_1x = u_0 + \varepsilon u_1.$$

Отримана в результаті дії заданого керування система (2.192)

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x - \varepsilon BK_1x,$$

де $\widetilde{A}_0 - BK_0 = A_0$, $\widetilde{A}_1 = A_1$, повинна бути майже консервативною, тобто $A_0^T = -A_0$ та $det(A_0) \neq 0$.

Для знаходження матриці K_0 вчинимо так. Задамо бажаний вид матриці A_0 і з рівняння $\widetilde{A}_0 - BK_0 = A_0$, отримаємо

$$BK_0 = \widetilde{A}_0 - A_0. \tag{2.204}$$

Звідки

$$K_0 = B^+ \cdot (\widetilde{A}_0 - A_0) \tag{2.205}$$

де B^+ - псевдообернена матриця [23], яка обчислюється за формулою

$$B^+ = (B^* \cdot B)^{-1} \cdot B^* \tag{2.206}$$

Отже, оберемо наступний вид матриці A_0

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.207}$$

тоді

$$\widetilde{A}_0 - A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.208}$$

Використовуючи формули (2.206) та (2.205) знайдемо

$$B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b_{41}} \\ 0 & \frac{1}{b_{22}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.209}$$

та

$$K_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b_{41}} & 0 \\ \frac{1}{b_{22}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.210}$$

Знаючи K_0 можна записати вид першого доданка в шуканому керуванні. А саме

$$u_0 = \begin{bmatrix} -\frac{x_3}{b_{41}} \\ -\frac{x_1}{b_{22}} \end{bmatrix}. \tag{2.211}$$

Далі знаходимо другу частину вектору керування. Побудуємо оптимальне керування у вигляді (2.193)

$$u_1 = -K_1 x = -\varepsilon R^{-1} B^T S x$$

з квадратичним критерієм якості (2.194)

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u_1^T R u_1) dt$$

де $Q \in \Re_{2n\times 2n}$ - невід'ємно визначена матриця, $R \in \Re_{m\times m}$ - додатньо визначена матриця, $S \in \Re_{2n\times 2n}$ - додатньо - визначена матриця - розв'язок матричного рівняння Ріккаті (2.195)

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T S + S(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon^2 S B R^{-1} G^T S + Q = 0$$

Введемо заміну $P = \varepsilon S$, тоді матричне рівняння Ріккаті запишеться так (2.196)

$$(A_0 + \varepsilon A_1)^T P + P(A_0 + \varepsilon A_1) - \varepsilon PGR^{-1}B^T P + \varepsilon Q = 0$$

Використовуючи підхід, який описаний в [105], будемо шукати матрицю - розв'язок P у вигляді розкладу за малим параметром

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ...$$

Матрицю Q також розкладемо за степенями ε

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + ...$$

Компоненти матриці P знайдемо з нескінченної системи алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті (2.199) і (2.200)

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0,$$

$$A_0 P_1 - P_1 A_0 = P_0 A_1 + A_1^T P_0 - P_0 BR^{-1}B^T P_0 + Q_0,$$
$$A_0 P_2 - P_2 A_0 = P_1 A_1 + A_1^T P_1 - P_1 BR^{-1}B^T P_0 - P_0 BR^{-1}B^T P_1 + Q_1,$$

....

$$A_0 P_i - P_i A_0 = P_{i-1} A_1 + A_1^T P_{i-1} - \sum_{k=1}^{i} P_k BR^{-1}B^T P_{i-k} + Q_{i-1},$$

....

Знайдемо матрицю P з точністю до першого порядку мализни за ε, тобто $P = P_0 + \varepsilon P_1$. Тоді $Q = Q_0 + \varepsilon Q_1$, $Q_0 = diag\{q_{01}, q_{01}, q_{03}, q_{03}\}, Q_1 = 0$. $R = diag\{r_1, r_1\}$. Розв'язавши, за допомогою математичної системи комп'ютерної алгебри Maple V перше рівняння системи, отримаємо загальний вид матриці P_0

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_{11}^0 & 0 & p_{13}^0 & p_{14}^0 \\ 0 & p_{11}^0 & -p_{14}^0 & p_{13}^0 \\ p_{13}^0 & -p_{14}^0 & p_{33}^0 & 0 \\ p_{14}^0 & p_{13}^0 & 0 & p_{33}^0 \end{bmatrix} \tag{2.212}$$

Після розв'язання другого рівняння системи отримаємо значення компонент матриці P_0, та загальний вигляд матриці P_1. Отже

$$\begin{gathered} p_{11}^0 = \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}}{b_{22}}, p_{13}^0 = 0, p_{14}^0 = 0, \\ p_{33}^0 = \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}B_m}{b_{22}A_m}. \end{gathered} \tag{2.213}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & \frac{1}{2}q_{01} & p_{13}^1 & p_{14}^1 \\ \frac{1}{2}q_{01} & p_{11}^1 & -p_{14}^1 & p_{13}^1 \\ p_{13}^1 & -p_{14}^1 & p_{33}^1 & \frac{1}{2}q_{03} \\ p_{14}^1 & p_{13}^1 & \frac{1}{2}q_{03} & p_{33}^1 \end{bmatrix} \tag{2.214}$$

Крім того,з другого рівняння системи випливає, що

$$q_{03} = \frac{B_m^2 b_{41}^2}{A_m^2 b_{22}^2} q_{01} \tag{2.215}$$

З третього рівняння системи знайдемо компоненти матриці P_1, а саме

$$p_{11}^1 = p_{33}^1 = p_{13}^1 = 0, p_{14}^1 = \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4A_m b_{22}} \tag{2.216}$$

Таким чином, матриця-розв'язок P з точністю до першого наближення має наступний вигляд

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}}{b_{22}} & \varepsilon\frac{1}{2}q_{01} & 0 & \varepsilon\frac{\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4A_m b_{22}} \\ \varepsilon\frac{1}{2}q_{01} & \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}}{b_{22}} & -\varepsilon\frac{\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4A_m b_{22}} & 0 \\ 0 & -\varepsilon\frac{\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4A_m b_{22}} & \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}B_m}{b_{22}A_m} & \varepsilon\frac{q_{01}B_m^2 b_{41}^2}{2A_m^2 b_{22}^2} \\ \varepsilon\frac{\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4A_m b_{22}} & 0 & \varepsilon\frac{q_{01}B_m^2 b_{41}^2}{2A_m^2 b_{22}^2} & \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}B_m}{b_{22}A_m} \end{bmatrix} \tag{2.217}$$

Тоді матриця S, для знаходження оптимального керування, запишеться з точністю до нульового наближення у вигляді

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}}{b_{22}\varepsilon} & \frac{1}{2}q_{01} & 0 & \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4A_m b_{22}} \\ \frac{1}{2}q_{01} & \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}}{b_{22}\varepsilon} & -\frac{\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4A_m b_{22}} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4A_m b_{22}} & \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}B_m}{b_{22}A_m} & \frac{q_{01}B_m^2 b_{41}^2}{2A_m^2 b_{22}^2} \\ \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4A_m b_{22}} & 0 & \frac{q_{01}B_m^2 b_{41}^2}{2A_m^2 b_{22}^2} & \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}B_m}{b_{22}A_m\varepsilon} \end{bmatrix} \tag{2.218}$$

Отримали наступний вигляд матриці K_1

$$K_1 = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon b_{41}\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4r_1 b_{22} A_m} & 0 & \frac{\varepsilon b_{41}^3 q_{01} B_m^2}{2r_1 A_m^2 b_{22}^2} & \frac{b_{41}\sqrt{2q_{01}r_1}B_m}{r_1 b_{22} A_m} \\ \frac{\varepsilon b_{22} q_{01}}{2r_1} & \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}}{r_1} & -\frac{\varepsilon\sqrt{2q_{01}r_1}H}{4r_1 A_m} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.219}$$

а як наслідок - другий доданок вектору керувань

$$u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\varepsilon b_{41}\sqrt{2q_{01}r_1}Hx_1}{4r_1 b_{22} A_m} - \frac{\varepsilon b_{41}^3 q_{01} B_m^2 x_3}{2r_1 A_m^2 b_{22}^2} - \frac{b_{41}\sqrt{2q_{01}r_1}B_m x_4}{r_1 b_{22} A_m} \\ -\frac{\varepsilon b_{22} q_{01} x_1}{2r_1} - \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}x_2}{r_1} + \frac{\varepsilon\sqrt{2q_{01}r_1}Hx_3}{4r_1 A_m} \end{bmatrix} \tag{2.220}$$

Підсумовуючи знайдені компоненти, запишемо остаточний вигляд шуканого керування

$$u = \begin{bmatrix} -\frac{x_3}{b_{41}} + \varepsilon\left(-\frac{\varepsilon b_{41}\sqrt{2q_{01}r_1}Hx_1}{4r_1 b_{22} A_m} - \frac{\varepsilon b_{41}^3 q_{01} B_m^2 x_3}{2r_1 A_m^2 b_{22}^2} - \frac{b_{41}\sqrt{2q_{01}r_1}B_m x_4}{r_1 b_{22} A_m}\right) \\ -\frac{x_1}{b_{22}} + \varepsilon\left(-\frac{\varepsilon b_{22} q_{01} x_1}{2r_1} - \frac{\sqrt{2q_{01}r_1}x_2}{r_1} + \frac{\varepsilon\sqrt{2q_{01}r_1}Hx_3}{4r_1 A_m}\right) \end{bmatrix} \tag{2.221}$$

за допомогою якого розв'язуються дві поставлені задачи.

2.7. Формування лінійної дискретної майже консервативної системи за допомогою вектора керування

В попередніх параграфах вивчався деякий клас лінійних диференціальних систем парного порядку з малим параметром, який можна звести до неперервних майже консервативних систем [104] за допомогою зворотного зв'язку. Аналогічні результати можна отримати і для деякого класу лінійних дискретних динамічних систем з малим параметром. Такий підхід дозволяє застосувати до дискретних майже консервативних систем розроблені раніше спрощені методи дослідження стійкості [40], побудови оптимального регулятора [41] та стабілізації системи [39].

Розглянемо повністю керовану лінійну дискретну систему з малим параметром

$$x(k+1) = F(\varepsilon)x(k) + Gu(k) = (\tilde{F}_0 + \varepsilon\tilde{F}_1)x(k) + Gu(k),\ x(0) = x_0, k = 0, 1, \ldots, \tag{2.222}$$

причому виконується умова

$$\tilde{F}_0 \tilde{F}_0^{\,T} \neq I_n, \tag{2.223}$$

де $x(k) = [x_1(k), \ldots, x_n(k)]^T \in \mathbb{R}_n$ — вектор стану, $\tilde{F}_0, \tilde{F}_1 \in \mathbb{R}_{n\times n}$, $u(k) = [u_1(k), \ldots, u_m(k)]^T \in \mathbb{R}_m$ — вектор керувань, $G \in \mathbb{R}_{n\times m}$, $rangG = m$, ε — малий параметр. Тут I_n — одинична матриця розмірності n.

З умови (2.223) випливає, що система (2.222) не є майже консервативною [40], а для отримання такої побудуємо лінійний статичний зворотній зв'язок за станом

$$u(k) = -(H_0 + \varepsilon H_1)x(k). \tag{2.224}$$

Після підстановки (2.224) в (2.222), отримаємо наступну замкнену систему:

$$x(k+1) = (F_0 + \varepsilon F_1)x(k), \tag{2.225}$$

де, якщо існує відповідна матриця H_0, то

$$F_0 = \tilde{F}_0 - GH_0, \quad F_0F_0^T = F_0^TF_0 = I_n, \quad F_1 = \tilde{F}_1 - GH_1. \tag{2.226}$$

З умов (2.226) випливає, що замкнена система (2.225) є майже консервативною.

Тепер будемо рухатись у зворотному напрямку: спочатку побудуємо необхідну матрицю коефіцієнтів, а потім обчислимо вектор зворотного зв'язку. Якщо вважати, що ортогональна матриця F_0 рівняння (2.225) задана, то з першого рівняння (2.226) легко знаходимо матрицю H_0, оскільки матриця G повного рангу.

Таким чином, маємо

$$H_0 = (G^TG)^{-1}G^T(\tilde{F}_0 - F_0). \tag{2.227}$$

Далі підставимо вираз для H_0 з (2.227) в перше рівняння (2.226) і отримаємо таку рівність

$$\left(I - G(G^TG)^{-1}G^T\right)\tilde{F}_0 = \left(I - G(G^TG)^{-1}G^T\right)F_0. \tag{2.228}$$

Очевидно, що не для всіх ортогональних матриць F_0 (2.228) є тотожністю.

Таким же способом способом можна отримати матрицю H_1, коли задати матрицю F_1

$$H_1 = (G^TG)^{-1}G^T(\tilde{F}_1 - F_1). \tag{2.229}$$

Далі підставимо (2.229) в друге рівняння (2.226) і отримаємо рівність аналогічну (2.228), якщо матриця F_1 допустима

$$\left(I - G(G^TG)^{-1}G^T\right)\tilde{F}_1 = \left(I - G(G^TG)^{-1}G^T\right)F_1. \tag{2.230}$$

І в цьому випадку не всі матриці F_1 будуть допустимими, тобто тільки деякий клас матриць задовольняє (2.230).

Матриця $S = G(G^TG)^{-1}G^T$ є матрицею проектування, вона симетрична та ідемпотентна, тобто її власні значення одиничні та нульові [143] і $rang(S) = rang(G)$. [146]. Таким чином, отримана матриця проектування має m одиничних власних значень. Ліва і права частини (2.228) виконують проектування векторів-стовпців відповідно матриць $\tilde{F}_0, F_0$ на ортогональне доповнення простору стовпців матриці G. Формула (2.228) буде тотожністю тоді, коли хоча б для однієї ортогональної матриці F_0 проекції всіх відповідних векторів-стовпців збігаються.

Матрицею проектування буде також матриця $I - S$ [143]. Можна показати, що матриці коефіцієнтів розімкненої та замкненої динамічних систем пов'язані між собою за допомогою метода найменших квадратів. Теорема, що виражає цей факт, за змістом повністю збігається з теоремою 2.1., але в позначеннях для дискретних систем набуває вигляду

Теорема 2.3. *Нехай $\tilde{y}_i^0, y_i^0 \in \mathbb{R}_m$ розв'язки відповідних лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{gathered} G\tilde{y}_i = \tilde{f}_i, \quad Gy_i = f_i, \quad i = \overline{1,n}, \\ \tilde{F}_0 = \left[\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_n\right], \;\; F_0 = \left[f_1, f_2, \ldots, f_n\right], \;\; \tilde{f}_i, f_i \in \mathbb{R}_n, \end{gathered} \tag{2.231}$$

знайдені за методом найменших квадратів.

Тоді для всіх матриць коефіцієнтів F_0, які можна отримати за допомогою зворотного зв'язку (2.224)*, вектори-нев'язки для розв'язків лінійних алгебраїчних рівнянь* (2.231) *збігаються*

$$G\tilde{y}_i^0 - \tilde{f}_i = Gy_i^0 - f_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.232}$$

Ця теорема виконується також для матриць $\tilde{F}_1, F_1$.

Оскільки за допомогою зворотного зв'язку отримуємо матрицю для якої завжди виконується (2.232), то на неї можна накладати додаткові умови, тобто вибирати її з певного класу матриць (наприклад, ортогональних). При повній керованості лінійної дискретної системи завжди можна побудувати оптимальний регулятор зворотного зв'язку, який стабілізує систему, тобто матриця коефіцієнтів замкненої системи вибирається з класу асимптотично стійких матриць [159].

Умова однакових проекцій відповідних стовпців матриць $\tilde{F}_0, F_0$ (рівняння (2.228)) при загальному вигляді матриці G, як і для неперервних систем, не дає ефективного способу отримання ортогональної матриці. Тому розглянемо випадок, коли в матриці повного рангу G стовпці є одиничними векторами, тобто $G = \begin{bmatrix} e_{i_1} & e_{i_2} & \cdots & e_{i_m} \end{bmatrix}$, де $e_j \in \mathbb{R}_n$ — вектор з одиницею на j-му місці і нулями на інших місцях. Із структури матриці G випливає рівність $G^T G = I_m$. Запишемо матрицю G також у такому вигляді $G = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^T \\ \cdots \\ \tilde{e}_n^T \end{bmatrix}$, $G^T = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 & \cdots & \tilde{e}_n \end{bmatrix}$, $\tilde{e}_i \in \mathbb{R}_m$, причому тільки вектори $\tilde{e}_{i_j},\ j = \overline{1,m}$ є одиничні розмірності m, а інші — нульові. Тоді елементи матриці $U = GG^T = \{u_{ij}\}_1^n$ дорівнюють $u_{ij} = \tilde{e}_i^T \tilde{e}_j = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \in \{i_1, \ldots, i_m\} \\ 0 \text{ — в інших випадках} \end{cases}$.

Визначимо для яких матриць $\tilde{F}_0$ рівняння (2.228) буде мати розв'язком ортогональну матрицю F_0. Оскільки матриця S має ненульовими тільки елементи $(i_1, i_1), (i_2, i_2), \ldots, (i_m, i_m)$, то в матриці $I - S$ будуть ненульовими тільки елементи $(j, j),\ j \in \{\overline{1,n}\} \backslash \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$. Тоді матриці $(I - S)\tilde{F}_0$, $(I - S)F_0$ матимуть нульовими рядки $i_1, i_2, \ldots, i_m$, причому це будуть відповідно матриці $\tilde{F}_0$, F_0 з обнуленими цими рядками. Виходячи із загальної структури ортогональної матриці [23], для виконання (2.228) необхідно і достатньо щоб для рядків $l, j \in \{\overline{1,n}\} \backslash \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ матриці $\tilde{F}_0 = \{\tilde{f}_{ij}\}_1^n$ виконувалась умова: $\tilde{F}_{0,l*} \tilde{F}_{0,j*}^T = \delta_{lj}$, де $\delta_{lj} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad l = j, \\ 0, & \text{якщо} \quad l \neq j \end{cases}$. Тоді зв'язані елементи матриці $F_0 = \{f_{ij}\}_1^n$ такі: $f_{lj} = \tilde{f}_{lj},\ l \in \{\overline{1,n}\} \backslash \{i_1, i_2, \ldots, i_m\},\ j = \overline{1,n}$. Інші елементи залишаються вільними параметрами, які можуть набувати тільки таких значень, що забезпечують ортогональність матриці F_0.

Отже, виконується

Теорема 2.4. *Нехай матриця при керуванні системи* (2.222) *має вигляд* $G = [e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_m}]$, $\operatorname{rang} G = m$, $e_{i_j} \in \mathbb{R}_n$, $j = \overline{1, m}$.

Тоді за допомогою зворотного зв'язку (2.224) *можна отримати деяку ортогональну матрицю* $F_0 = \tilde{F}_0 - GH_0$, $F_0^T F_0 = F_0 F_0^T = I$ *в тому і тільки в тому випадку, коли рядки* $\{\overline{1, n}\} \backslash \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$ *матриці* $\tilde{F}_0$ *ортогональні. Відповідні рядки матриці* F_0 *мають збігатися з ними, а рядки* $i_1, i_2, \ldots, i_m$ *— довільні, але такі, що забезпечують ортогональність шуканої матриці.*

Розглядаючи рівняння (2.230), структуру матриці F_1 (також H_1) вибираємо, виходячи з практичної доцільності, наприклад для стабілізації замкненої системи. З другої сторони матрицю H_1 можна отримати не з рівняння (2.229), а при побудові оптимального регулятора зворотного зв'язку для майже консервативної системи [41] чи з системи нерівностей для її стабілізації [39].

Приклад 2.7. Розглянемо систему (2.222) з матрицями коефіцієнтів

$$F(\varepsilon) = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 + \varepsilon & m_4 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 2\,\varepsilon \\ 0 & 3\,\varepsilon & 12/13 & 5/13 \\ l_1 + 4\,\varepsilon & l_2 & l_3 & l_4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тут $m_i, l_i, i = \overline{1, 4}$ — деякі параметри, ε — малий параметр.

Необхідно побудувати майже консервативну систему за допомогою зворотного зв'язку (2.224) (матриця H_0) та знайти для неї оптимальний регулятор (матриця H_1) з квадратичним критерієм якості

$$\hat{J} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right], \tag{2.233}$$

де $Q = I_4$, $R = 2I_2$.

Неважко впевнитись в тому,що задана система повністю керована. Матрицю $F(\varepsilon)$ запишемо у вигляді суми двох матриць $F(\varepsilon) = \tilde{F}_0 + \varepsilon F_1$, де

$$\tilde{F}_0 = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/13 & 5/13 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тут ми зобразили матрицю збурення через F_1 замість $\tilde{F}_1$, виходячи з подальших спрощень.

Оскільки рядки $\tilde{F}_{0,2*}$ $\tilde{F}_{0,3*}$ матриці $\tilde{F}_0$ ортогональні та нормовані, а також в матриці $(I-S)\tilde{F}_0$ перший і четвертий рядки нульові, то за допомогою зворотного зв'язку (2.224) можна отримати ортогональну матрицю. Для цього розв'язуємо систему рівнянь $\tilde{F}_{0,i*}\tilde{F}^T_{0,j*} = \delta_{ij},\ i \le j,\ i,j \in \{\overline{1,4}\}$ з вилученням тотожностей $\tilde{F}_{0,2*}\tilde{F}^T_{0,2*} = 1,\ \tilde{F}_{0,2*}\tilde{F}^T_{0,3*} = 0,\ \tilde{F}_{0,3*}\tilde{F}^T_{0,3*} = 1$, при невідомих $\tilde{F}_{0,1*},\ \tilde{F}_{0,4*}$ і вибираємо один з її роз'язків $\tilde{F}_{0,1*} = [4/5, 3/5, 0, 0],\ \tilde{F}_{0,4*} = [0, 0, -5/13, 12/13]$. Побудована ортогональна матриця канонічної форми та матриця коефіцієнтів зворотного зв'язку (формула (2.227)) мають вигляд

$$F_0 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12/13 & 5/13 \\ 0 & 0 & -5/13 & 12/13 \end{bmatrix},\ H_0 = \begin{bmatrix} m_1 - \frac{4}{5} & m_2 - \frac{3}{5} & m_3 & m_4 \\ l_1 & l_2 & l_3 + \frac{5}{13} & l_4 - \frac{12}{13} \end{bmatrix}.$$

Відзначимо, що знайдений регулятор зворотного зв'язку виконує певні робасні функції — компенсує параметри $m_i,\ l_i,\ i = \overline{1,4}$.

Матриця F_0 зображена в канонічній формі, тому для побудови оптимального регулятора застосуємо алгоритм [41]. Регулятор буде оптимальним, якщо вибрати [144]

$$H_1 = \left(\varepsilon G^T P G + R\right)^{-1} G^T P F, \tag{2.234}$$

де $F = F_0 + \varepsilon F_1$, а $\mathbb{R}_{n\times n} \ni P$ — симетрична додатно визначена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті

$$P = F^T P F - \varepsilon F^T P G \left(\varepsilon G^T P G + R\right)^{-1} G^T P F + \varepsilon Q. \tag{2.235}$$

Тут Q та R — матриці з (2.233).

Виходячи з (2.235), будемо шукати матрицю-роз'язок P та матрицю Q у вигляді розкладу за параметром ε

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ..., \quad Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots . \tag{2.236}$$

З (2.235) отримаємо нескінченну систему матричних рівнянь типу Ріккаті [41]

$$P_0 - F_0^T P_0 F_0 = 0, \tag{2.237}$$

$$P_i - F_0^T P_i F_0 = F_1^T P_{i-1} F_0 + F_0^T P_{i-1} F_1 - \sum_{(k,j,q,l,t)\in J(i)} F_k^T P_j G M_q G^T P_l F_t + Q_{i-1}, \quad i = 1, 2, ..., \tag{2.238}$$

де

$$M_0 = R^{-1}, \quad M_i = -R^{-1} \sum_{k=1}^{i} G^T P_{k-1} G M_{i-k}, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Тут $J(i) = \{(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) \,|\, i_1, i_5 \in \{0, 1\};\ i_2, i_3, i_4 \in \{\overline{0, i-1}\};\ \sum_{j=1}^{5} i_j = i - 1\}$ — множини індексів, $i = 1, 2, \dots$. Покладаємо $Q_0 = I_4$, $Q_i = 0$, $i = 1, 2, \dots$.

Матриця F_0 має різні власні власні значення, тому матриця P_0, як переставна з нею (2.237), має таку структуру $P_0 = \{c_{10}, c_{10}, c_{20}, c_{20}\}$, де

$$\begin{aligned} c_{10} &= \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 + (b_{11} + b_{22})(v_{11} + v_{22})}}{b_{11} + b_{22}} = 2, \\ c_{20} &= \frac{a_{33} + a_{44} + \sqrt{(a_{33} + a_{44})^2 + (b_{33} + b_{44})(v_{33} + v_{44})}}{b_{33} + b_{44}} = 2, \end{aligned} \tag{2.239}$$

$A = \{a_{ij}\}_1^4 = F_0 F_1^T$, $B = \{b_{ij}\}_1^4 = G R^{-1} G^T$, $V_0 = \{v_{ij}\}_1^4 = F_0 Q_0 F_0^T$.

Далі обчислюємо елементи матриці $P_1 = \{p_{ij}\}_1^4$ з першого рівняння системи (2.238) за формулами

$$p_{22} = p_{11} + d_{11} - \frac{f_{11}}{f_{12}} d_{22} = p_{11} - 1, \quad p_{12} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f_{11}}{f_{12}} d_{11} + d_{22}\right) = \frac{2}{3},$$

$$p_{44} = p_{33} + d_{33} - \frac{f_{33}}{f_{34}} d_{44} = p_{33} + 1, \quad p_{34} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f_{33}}{f_{34}} d_{33} + d_{44}\right) = -\frac{6}{5},$$

$$p_{13} = -\frac{d_{13}}{2} - \frac{f_{12} d_{23} - f_{34} d_{14}}{2(f_{11} - f_{33})} = \frac{2043}{520},$$

$$p_{14} = -\frac{d_{14}}{2} - \frac{f_{12} d_{24} + f_{34} d_{13}}{2(f_{11} - f_{33})} = \frac{1557}{520},$$

$$p_{23} = -\frac{d_{23}}{2} + \frac{f_{12}d_{13} + f_{34}d_{24}}{2(f_{11} - f_{33})} = -\frac{7651}{520},$$
$$p_{24} = -\frac{d_{24}}{2} + \frac{f_{12}d_{14} - f_{34}d_{23}}{2(f_{11} - f_{33})} = -\frac{1699}{520},$$

де $F_0 = \{f_{ij}\}_1^4,\ D_1 = \{d_{ij}\}_1^4 = AP_0 + P_0A^T - P_0BP_0 + V_0$.

Зобразимо матрицю-розв'язок $P = P_0 + \varepsilon P_1$ матричного рівняння Ріккаті (2.235) для $\varepsilon = .01$

$$P = \begin{bmatrix} 1.931826923 & 0.0066666667 & 0.0392884615 & 0.0299423077 \\ 0.0066666667 & 1.921826923 & -0.1471346154 & -0.0326730769 \\ 0.0392884615 & -0.1471346154 & 1.88125 & -0.012 \\ 0.0299423077 & -0.0326730769 & -0.012 & 1.89125 \end{bmatrix},$$

$\lambda_1 = 1.738399549$, $\lambda_2 = 1.888223322$, $\lambda_3 = 1.942988817$, $\lambda_4 = 2.056542158$ та матрицю зворотного зв'язку H_1 (2.234)

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.7639417761 & 0.5772291817 & 0.0218775563 & 0.0211087093 \\ 0.0589321977 & -0.0043121793 & -0.3656363992 & 0.8620948477 \end{bmatrix}.$$

Тоді матриця коефіцієнтів замкненої системи $F_z = F(\varepsilon) - G(H_0 + \varepsilon H_1)$ при $\varepsilon = .01$ набуде вигляду

$$F_z = \begin{bmatrix} 0.7923605822 & 0.5942277082 & 0.0097812244 & -0.0002110871 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.03 & 12/13 & 5/13 \\ 0.0394106780 & 0.0000431218 & -0.3809590206 & 0.9144559746 \end{bmatrix},$$

власні значення якої дорівнюють $\lambda_{1,2} = .7957519546 \pm .5972509677i$, $\lambda_{3,4} = .9191947853 \pm .3826620915i$ і за модулем менші одиниці.

Таким чином, задана система четвертого порядку за допомогою побудованого з точністю до першого наближення оптимального регулятора стабілізована.

2.8. Висновки до розділу

Основні результати даного розділу опубліковано в роботах [135, 112, 113, 114, 43, 137] і полягають у наступному:

- показано, що за допомогою спеціального вибору вектора керувань можливо отримати майже консервативну систему, для якої можна застосовувати спрощені методи дослідження стійкості, побудови оптимального регулятора та стабілізації системи, які дозволяють отримати також аналітичні результати у досить складних випадках;
- досліджені умови існування бажаного керування, за допомогою якого можна отримати майже консервативну систему;
- використаний підхід, який застосовується для стабілізації лінійної диференціальної системи з матрицею коефіцієнтів у формі Фробеніуса, де спочатку будується необхідна матриця коефіцієнтів, а потім обчислюється вектор зворотного зв'язку.;
- доведені теореми, що вказують на необхідні та достатні умови побудови майже консервативних систем;
- показано, як можна будувати керування, яке одночасно вирішувало б дві задачі: отримання невиродженої кососиметричної матриці та побудова оптимального керування;
- побудована лінійна дискретна майже консервативна система та наведені відповідні теореми;
- доведено коректність розкладання розв'язків матричних рівнянь Ляпунова та Ріккаті в нескінченні ряди та досліджена їх стійкість;
- наведено приклади застосування запропонованих методик та алгоритмів до моделей гіровертикалі, гіроскопа з лінійною характеристикою міжрамкової корекції та об'єкта з виникаючим гіроскопічним ефектом.

РОЗДІЛ 3
МОДАЛЬНИЙ ПІДХІД ДО ФОРМУВАННЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНОЇ СИСТЕМИ

У даному розділі дисертації вирішується задача отримання майже консервативної системи методами модального керування, при якому заздалегідь можна задати бажане розташування коренів характеристичного рівняння [4], [6], [67], [69].

Запропоновано покроковий опис застосування модального підходу для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування.

Отримано узагальнення алгоритму застосування модального підходу для системи порядку $2n$ з m - вимірним вектором керування;

Застосування модального підходу, з метою отримання асимптотично стійкої майже консервативної системи, проілюстровано на моделі керованого гіростабілізатора.

3.1. Побудова алгоритму, який реалізує модальний підхід до формування майже консервативної системи

Розглянемо процес побудови модального керування для лінійної стаціонарної системи вигляду (2.57)

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 + \varepsilon\widetilde{A}_1)x + Bu,$$

Задамося метою отримати в результаті досліджень, майже консервативну та асимптотично стійку систему. Вектор u оберем у вигляді (2.58)

$$u = -(K_0 + \varepsilon K_1)x = -Kx.$$

Перший доданок цього вектора буде відповідати за отримання майже консервативної системи, а другий - за асимптотичну стійкість. Система (2.57) перетвориться у вигляд (2.60)

$$\dot{x} = (\tilde{A}_0 - BK_0 + \varepsilon(\tilde{A}_1 - BK_1))x = (A_0 + \varepsilon A_1)x = Ax.$$

При цьому бажано, щоб матриця A_0 була кососиметричною або зводилася до такої за допомогою неособливого перетворення. Також нехай $det(A_0) \neq 0$.

Згідно з теорією модального керування [4], [6], [67], [69] можна для керованих систем заздалегідь вибрати бажаний вид характеристичного многочлена системи, замкненої зворотним зв'язком за станом. Тому вимагатимемо, щоб корені характеристичного многочлена матриці A_0 були чисто уявні, а матриці A -комплексно спряженими з від'ємними дійсними частинами.

Запропонуємо покроковий опис застосування модального підходу для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування.

I. Перевірка умови повної керованості системи $\{\tilde{A}, B\}$,де $\tilde{A} = \tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1$, як необхідної та достатньої.

II. Побудова матриці K_0, з метою отримання характеристичного многочлена матриці $\tilde{A}_0 - BK_0$ вигляду

$$A_0(\lambda) = (\lambda^2 + \omega_1^2) \cdot (\lambda^2 + \omega_2^2) = \lambda^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot \lambda^2 + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \qquad (3.1)$$

Зауваження 1. Необхідною умовою визначення K_0, є виконання умови повної керованості системи $\{\tilde{A}_0, B\}$.

Зауваження 2. Розв‘язок задачі побудови модального керування для системи з двома входами виконують у два етапи. На першому, підбирається такий зворотний зв‘язок за станом, щоб отримана система була б керована за допомогою одного входу. Цей факт випливає з теореми [6].

На другому етапі будується керування для системи з одним входом.

Отже,

1. Матрицю K_0 представляємо у вигляді

$$K_0 = M_0 + M_1, \tag{3.2}$$

причому M_0 повинна бути обрана таким чином, щоб пара матриць $\{\tilde{A}_0 - BM_0, b_i\}$ була керована. b_i - відмінний від нуля стовпець матриці B; $i = 1$, або $i = 2$.

2. Складаємо матрицю керованості для пари $\{\tilde{A}_0 - BM_0, b_i\}$ за формулою

$$R_0 = (b_i, (\tilde{A}_0 - BM_0) \cdot b_i, (\tilde{A}_0 - BM_0)^2 \cdot b_i, (\tilde{A}_0 - BM_0)^3 \cdot b_i). \tag{3.3}$$

3. Позначаємо через M_{11} перший рядок матриці M_1, яка має вигляд

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & m_{13}^1 & m_{14}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

4. Далі застосовуємо алгоритм синтезу одновимірних модальних регуляторів. Обчислюємо коефіцієнти передачі регулятора в канонічному базисі, як різницю відповідних коефіцієнтів бажаного характеристичного многочлена $A_0(\lambda)$ (3.1) і характеристичного многочлена матриці $\tilde{A}_0 - BM_0$

$$\lambda^4 + m_3\lambda^3 + m_2\lambda^2 + m_1\lambda + m_0. \tag{3.5}$$

Результати записуємо у вигляді вектора - рядка

$$\widetilde{M_{11}} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 - m_0 & -m_1 & \omega_1^2 + \omega_2^2 - m_2 & -m_3 \end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

5. Для полінома (3.5) складаємо канонічну пару $\{\widetilde{\tilde{A}_0 - BM_0}, \widetilde{b}\}$ виду

$$\widetilde{\tilde{A}_0 - BM_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -m_0 & -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{bmatrix}, \widetilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

і обчислюємо для неї матрицю керованості $\widetilde{R_0}$ в канонічному базисі.

6. За формулою $P_0 = \widetilde{R_0} \cdot R_0^{-1}$, обчислюємо матрицю перетворення пари $\{\tilde{A}_0 - BM_0, b_i\}$ в пару $\{\widetilde{\tilde{A}_0 - BM_0}, \widetilde{b}\}$.

7. Знайшовши M_{11} за формулою $M_{11} = \widetilde{M_{11}} \cdot P$, запишемо другий компонент матриці K_0, а саме M_1.

8. Обчислюємо K_0.

III. Побудова асимптотично стійкої системи. Для цього бажаний вид характеристичного многочлена матриці $A = A_0 + \varepsilon A_1$, задаємо у вигляді

$$A(\lambda) = [(\lambda + \lambda_1)^2 + \omega_1^2] \cdot [(\lambda + \lambda_1)^2 + \omega_2^2] \tag{3.8}$$

Зауваження 3. Відзначимо, що послідовність виконання всіх кроків по знаходженню K, повністю збігається з послідовністю знаходження K_0.

Зауваження 4. Як вже зазначалося вище, для системи з двома входами, матрицю керування розшукують у вигляді суми двох матриць (3.2). Пропонується, в якості першого доданка використовувати вже знайдену матрицю K_0 і далі будувати модальне керування для системи $\{\tilde{A} - BK_0, b_i\}$ з одним входом.

3.2. Узагальнення алгоритму застосування модального підходу до $2n$-вимірних лінійних систем

Узагальнимо алгоритм модального підходу для системи (2.57)

$$\dot{x} = (\widetilde{A}_0 + \varepsilon \widetilde{A}_1)x + Bu,$$

с $2n$-вимірним вектором стану, та m-вимірним вектором керувань.

I. Перевірка умови повної керованості системи $\{\tilde{A}, B\}$,де $\tilde{A} = \tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1$, як необхідної та достатньої.

II. Побудова матриці K_0, з метою отримання характеристичного многочлена матриці $\tilde{A}_0 - BK_0$ вигляду

$$\begin{gathered} A_0(\lambda) = (\lambda^2 + \omega_1^2) \cdot (\lambda^2 + \omega_2^2) \cdot ... \\ \cdot(\lambda^2 + \omega_n^2) = \lambda^{2n} + (\omega_1^2 + \omega_2^2 + ... + \omega_n^2) \cdot \lambda^{2n-2} + ... + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \cdot ... \cdot \omega_n^2 \end{gathered} \tag{3.9}$$

Зауваження 1. Необхідною умовою визначення K_0, є виконання умови повної керованості системи $\{\tilde{A}_0, B\}$.

Зауваження 2. Розв‘язок задачі побудови модального керування виконують у два етапи. На першому, підбирається такий зворотний зв‘язок за станом, щоб отримана система була б керована за допомогою одного входу. На другому етапі будується керування для системи з однім входом.

Отже,

1. Матрицю K_0 представляємо у вигляді

$$K_0 = M_0 + M_1, \tag{3.10}$$

причому M_0 повинна бути обрана таким чином, щоб пара матриць $\{\tilde{A}_0 - BM_0, b_i\}$ була керована. b_i - відмінний від нуля стовпець матриці B; $i = \overline{1, m}$.

2. Складаємо матрицю керованості для пари $\{\tilde{A}_0 - BM_0, b_i\}$ за формулою

$$R_0 = (b_i, (\tilde{A}_0 - BM_0) \cdot b_i, (\tilde{A}_0 - BM_0)^2 \cdot b_i, ..., (\tilde{A}_0 - BM_0)^{2n-1} \cdot b_i). \tag{3.11}$$

3. Позначаємо через M_{11} перший рядок матриці $M_1 \in \Re_{m\times 2n}$, яка має вигляд

$$M_1 = \begin{bmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 & ... & m_{12n}^1 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ .... & & & \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

4. Далі застосовуємо алгоритм синтезу одновимірних модальних регуляторів. Обчислюємо коефіцієнти передачі регулятора в канонічному базисі, як

різницю відповідних коефіцієнтів бажаного характеристичного многочлена $A_0(\lambda)$ (3.9) і характеристичного многочлена матриці $\tilde{A}_0 - BM_0$

$$\lambda^{2n} + m_{2n-1}\lambda^{2n-1} + m_{2n-2}\lambda^{2n-2} + ... + m_1\lambda + m_0. \tag{3.13}$$

Результати записуємо у вигляді вектора - рядка $\widetilde{M_{11}}$

$$\widetilde{M_{11}}^T = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \cdot ... \cdot \omega_n^2 - m_0 \\ -m_1 \\ ... \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 + ... + \omega_n^2 - m_{2n-2} \\ -m_{2n-1} \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

5. Для полінома (3.13) складаємо канонічну пару $\{\tilde{A}_0 \widetilde{- BM_0}, \widetilde{b}\}$ виду

$$\tilde{A}_0 \widetilde{- BM_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -m_0 & -m_1 & -m_2 & ... & -m_{2n-1} \end{bmatrix}, \widetilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

і обчислюємо для неї матрицю керованості $\widetilde{R_0}$ в канонічному базисі.

6. За формулою $P_0 = \widetilde{R_0} \cdot R_0^{-1}$, обчислюємо матрицю перетворення пари $\{\tilde{A}_0 - BM_0, b_i\}$ в пару $\{\tilde{A}_0 - BM_0, \widetilde{b}\}$.

7. Знайшовши M_{11} за формулою $M_{11} = \widetilde{M_{11}} \cdot P$, запишемо другий компонент матриці K_0, а саме M_1.

8. Обчислюємо K_0.

III. Побудова асимптотично стійкої системи. Для цього бажаний вид характеристичного многочлена матриці $A = A_0 + \varepsilon A_1$, задаємо у вигляді

$$A(\lambda) == \lambda^{2n} + 2n\lambda^{2n-1}\omega + n(2n-1)\lambda^{2n-2}\omega^2 + ... + \omega^{2n}. \tag{3.16}$$

Зауваження 3. Відзначимо, що послідовність виконання всіх кроків по знаходженню K, повністю збігається з послідовністю знаходження K_0.

Зауваження 4. Як вже зазначалося вище, для системи з двома входами, матрицю керування розшукують у вигляді суми двох матриць (3.10). Пропонується, в якості першого доданка використовувати вже знайдену матрицю K_0 і далі будувати модальне керування для системи $\{\tilde{A} - BK_0, b_i\}$ з одним входом.

3.3. Застосування модального підходу до моделі керованого гіростабілізатора

Для ілюстрації пропонованого підходу побудови модального керування, виберемо за основу систему диференціальних рівнянь, яка описує поведінку гіроскопічного стабілізатора при малих значеннях змінних x і y [51]

$$\begin{aligned} J(\beta_0)\frac{d^2x}{dt^2} + H\cos\beta_0\frac{dy}{dt} = M \\ B_0\frac{d^2y}{dt^2} - H\cos\beta_0\frac{dx}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Переписавши дану систему у вигляді, відповідному (2.57), отримаємо матрицю коефіцієнтів

$$\tilde{A}_0 + \varepsilon\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \cos\beta_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{H}{J(\beta_0)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H}{B_0} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.18}$$

та керування $u = M$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J(\beta_0)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

(Для скорочення запису, у подальшому, замінемо $J(\beta_0)$ на J).

Але, у такому вигляді система не є керованою. Матриця керованості

$$U = (B, \tilde{A}B, \tilde{A}^2B, \tilde{A}^3B) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J} & 0 & -\frac{H^2 \cdot \cos^2(\beta_0)}{J^2 B_0} \\ \frac{1}{J} & 0 & -\frac{H^2 \cdot \cos^2(\beta_0)}{J^2 B_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H \cdot \cos(\beta_0)}{J B_0} & 0 \\ 0 & \frac{H \cdot \cos(\beta_0)}{J B_0} & 0 & -\frac{H^3 \cdot \cos^3(\beta_0)}{J^2 B_0^2} \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

має ранг рівний трьом.

Будемо вважати, що на гіростабілізатор діє також момент N. Він і буде другим керуванням, тобто $u_1 = M$, $u_2 = N$.

$$\begin{aligned} J(\beta_0)\frac{d^2x}{dt^2} + H\cos\beta_0\frac{dy}{dt} = M \\ B_0\frac{d^2y}{dt^2} - H\cos\beta_0\frac{dx}{dt} = N. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Тоді

$$Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{B_0} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \tag{3.22}$$

Для нової матриці B умова повної керованості виконується, а значить можна переходити до виконання пункту II нашого алгоритму - конструювання матриці K_0. (Система $\{\tilde{A}_0, B\}$ - також повністю керована).

Отже,

1. Виберемо матрицю M_0 у вигляді

$$M_0 = \begin{bmatrix} m_{11}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{23}^0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Запишемо

$$\tilde{A}_0 - BM_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-m_{23}^0}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-m_{11}^0}{B_0} & 0 & 0 & \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{B_0} \end{bmatrix}. \tag{3.24}$$

b_1- перший стовпець матриці B.

2. Складемо матрицю керованості для пари $\{\tilde{A}_0 - BM_0, b_1\}$

$$R_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{m_{23}^0}{JB_0} \\ 0 & 0 & -\frac{m_{23}^0}{JB_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{B_0} & 0 & 0 \\ \frac{1}{B_0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.25}$$

3. Позначимо через M_{11} перший рядок матриці M_1, яка має вигляд (3.4)

4. Обчисливши характеристичний поліном матриці $\tilde{A}_0 - BM_0$

$$\lambda^4 - \frac{m_{23}^0 m_{11}^0}{JB_0} \tag{3.26}$$

запишемо

$$\widetilde{M_{11}} = \left[\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 + \frac{m_{23}^0 m_{11}^0}{JB_0} \;\; 0 \;\; \omega_1^2 + \omega_2^2 \;\; 0\right]. \tag{3.27}$$

5. Для полінома (3.26) складемо канонічну пару $\{\tilde{A}_0 \widetilde{- BM_0}, \widetilde{b_1}\}$, де

$$\tilde{A}_0 \widetilde{- BM_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{m_{23}^0 m_{11}^0}{JB_0} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \widetilde{b_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.28}$$

і обчислимо для неї матрицю керованості $\widetilde{R_0}$ в канонічному базисі:

$$\widetilde{R_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.29}$$

6. Знаходимо матрицю P_0 перетворення пари $\{\tilde{A}_0 - BM_0, b_1\}$ в пару $\{\tilde{A}_0 \widetilde{- BM_0}, \widetilde{b_1}\}$,

$$P_0 = \widetilde{R_0} \cdot R_0^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{B_0 J}{m_{23}^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{B_0 J}{m_{23}^0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_0 \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

7. Обчисливши

$$M_{11} = \widetilde{M_{11}} \cdot P_0 = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 B_0 J}{m_{23}^0} - m_{11}^0 & 0 & (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot B_0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.31}$$

запишемо другий компонент матриці K_0, а саме

$$M_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 B_0 J}{m_{23}^0} - m_{11}^0 & 0 & (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot B_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.32}$$

8. Шукана матриця K_0 має вигляд

$$K_0 = \begin{bmatrix} -\frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 B_0 J}{m_{23}^0} & 0 & (\omega_1^2 + \omega_2^2) \cdot B_0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{23}^0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.33}$$

тому можна обчислити перший доданок нової замкнутої системи, а саме матрицю A_0. Маємо

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{23}^0}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2 J}{m_{23}^0} & 0 & -\omega_1^2 - \omega_2^2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Визначник цієї матриці $det(A_0) = \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 \neq 0$, характеристичний поліном співпадає з (3.1).

При виконанні пункту III запишемо тільки основні проміжні результати та остаточну шукану матрицю K.

Отже, характеристичний многочлен матриці $\tilde{A} - BK_0$ має вигляд

$$\begin{gathered} \lambda^4 + \lambda^2 \cdot (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{H^2 \cos^2 \beta_0}{B_0 J}) + \\ +\lambda \cdot (\frac{H \cos \beta_0 m_{23}^0}{B_0 J} + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 H \cos \beta_0}{m_{23}^0}) + \omega_1^2 \omega_2^2. \end{gathered} \tag{3.35}$$

Матриця P перетворення пари $\{\tilde{A} - BK_0, b_1\}$ в канонічну пару $\{\widetilde{\tilde{A} - BK_0}, \widetilde{b_1}\}$ дорівнює

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{B_0 J}{m_{23}^0} & \frac{B_0 J H \cos \beta_0}{m_{23}^{02}} & \frac{B_0 H^2 \cos^2 \beta_0}{m_{23}^{02}} & 0 \\ 0 & -\frac{B_0 J}{m_{23}^0} & -\frac{B_0 H \cos \beta_0}{m_{23}^0} & 0 \\ 0 & 0 & B_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_0 \end{bmatrix}. \tag{3.36}$$

І, нарешті, другий доданок матриці K:

$$\varepsilon K_1 = \begin{bmatrix} -\frac{(\omega^4-\omega_1^2\omega_2^2)B_0 J}{m_{23}^0} & \frac{\omega^4 B_0 J H\cos\beta_0}{m_{23}^{02}} - \frac{4\omega^3 B_0 J}{m_{23}^0} + H\cos\beta_0 B_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix.$$
$$\begin{matrix} \frac{\omega^4 B_0 H^2\cos^2\beta_0}{m_{23}^{02}} - \frac{4\omega^3 B_0 H\cos\beta_0}{m_{23}^0} + (6\omega^2-\omega_1^2-\omega_2^2)B_0 & 4\omega B_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.37}$$

Підсумовуючи знайдені K_0 і εK_1 запишемо вид шуканої матриці

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{\omega^4 B_0 J}{m_{23}^0} & \frac{\omega^4 B_0 J H\cos\beta_0}{m_{23}^{02}} - \frac{4\omega^3 B_0 J}{m_{23}^0} + H\cos\beta_0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix.$$
$$\begin{matrix} \frac{\omega^4 B_0 H^2\cos^2\beta_0}{m_{23}^{02}} - \frac{4\omega^3 B_0 H\cos\beta_0}{m_{23}^0} + 6\omega^2 B_0 & 4\omega B_0 \\ m_{23}^0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

В результаті дії знайденого керування, отримали замкнену асимптотично стійку систему, з матрицею коефіцієнтів $A = A_0 + \varepsilon A_1$ виду

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_{23}^0}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\omega_1^2\omega_2^2 J}{m_{23}^0} & 0 & -\omega_1^2-\omega_2^2 & 0 \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\omega^4 J}{m_{23}^0} - \frac{\omega_1^2\omega_2^2 J}{m_{23}^0} & -\frac{\omega^4 J H\cos\beta_0}{m_{23}^{02}} + \frac{4\omega^3 J}{m_{23}^0} \end{matrix} \tag{3.39}$$
$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{H\cos\beta_0}{J} \\ 0 & 0 \\ -\frac{\omega^4 H^2\cos^2\beta_0}{m_{23}^{02}} + \frac{4\omega^3 H\cos\beta_0}{m_{23}^0} - 6\omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 & -4\omega \end{bmatrix}$$

Зауважимо, якщо в (3.23) покласти $m_{23}^0 = -J$, то значно спрощується вид усіх матриць. А саме

$$K_0 = \begin{bmatrix} \omega_1^2\omega_2^2 B_0 & 0 & (\omega_1^2+\omega_2^2)B_0 & 0 \\ 0 & 0 & -J & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.40}$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2\omega_2^2 & 0 & -\omega_1^2 - \omega_2^2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.41}$$

$$K = \left[\begin{matrix} \omega^4 B_0 & \frac{\omega^4 B_0 H\cos\beta_0}{J} + 4\omega^3 B_0 + H\cos\beta_0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right. \\ \left.\begin{matrix} \frac{\omega^4 B_0 H^2\cos^2\beta_0}{J^2} + \frac{4\omega^3 B_0 H\cos\beta_0}{J} + 6\omega^2 B & 4\omega B_0 \\ -J & 0 \end{matrix}\right] \tag{3.42}$$

І, нарешті, матриця коефіцієнтів замкнутої системи

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_1^2\omega_2^2 & 0 & -\omega_1^2 - \omega_2^2 & 0 \end{bmatrix} + \\ + \left[\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\omega^4 + \omega_1^2\omega_2^2 & -\frac{\omega^4 H\cos\beta_0}{J} - 4\omega^3 \end{matrix}\right. \\ \left.\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{H\cos\beta_0}{J} \\ 0 & 0 \\ -\frac{\omega^4 H^2\cos^2\beta_0}{J^2} - \frac{4\omega^3 H\cos\beta_0}{J} - 6\omega^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 & -4\omega \end{matrix}\right] \tag{3.43}$$

Проаналізуємо сили, що діють на початкову і нову замкнуту системи. Згідно класифікації сил, описаної в [94] маємо, що на початкову систему діють тільки гіроскопічні сили. Відповідна матриця має вигляд

$$G = \begin{bmatrix} 0 & H\cos\beta_0 \\ -H\cos\beta_0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.44}$$

На нову систему, з матрицею коефіцієнтів (3.43) діють дисипативні, гіроскопічні, потенційні сили та сили радиальної корекції з відповідними матрицями:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H\cos\beta_0}{2} + \frac{\omega^4 H\cos\beta_0 J}{2} + 2\omega^3 J^2 \\ \frac{H\cos\beta_0}{2} + \frac{\omega^4 H\cos\beta_0 J}{2} + 2\omega^3 J^2 & 4\omega J^2 \end{bmatrix}, \tag{3.45}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{H\cos\beta_0}{2} - \frac{\omega^4 H\cos\beta_0 J}{2} - 2\omega^3 J^2 \\ -\frac{H\cos\beta_0}{2} + \frac{\omega^4 H\cos\beta_0 J}{2} + 2\omega^3 J^2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.46}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-J+J^2\omega^4}{2} \\ \frac{-J+J^2\omega^4}{2} & \frac{\omega^4 J^2\cos^2\beta_0}{2} - 2\omega^3 H\cos\beta_0 J + 3\omega^2 J^2 \end{bmatrix}, \tag{3.47}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-J-J^2\omega^4}{2} \\ \frac{J+J^2\omega^4}{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

3.4. Висновки до розділу

Основні результати даного розділу опубліковано в роботі [136] і полягають у наступному:

- запропоновано модальний підхід отримання майже консервативної асимптотично стійкої системи;
- наведено алгоритм застосування модального підходу для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування;
- отримано узагальнення алгоритму застосування модального підходу для системи порядку $2n$ з m - вимірним вектором керування;
- наведено приклад застосування запропонованого алгоритму до моделі керованого гіростабілізатора.

РОЗДІЛ 4
МІНІМАКСНЕ КЕРУВАННЯ МАЙЖЕ КОНСЕРВАТИВНИМИ СИСТЕМАМИ

У цьому розділі дисертації досліджується задача мінімаксного керування для майже консервативних систем.

Формулюється необхідна умова існування розв'язку рівняння Ріккаті відповідного вигляду.

Знаходиться умова для оцінки параметра, що входить в рівняння Ріккаті.

Використовується один з ефективних підходів до знаходження розв'язку рівняння Ріккаті для майже консервативних систем.

Наводяться приклади застосування запропонованих методик та алгоритмів до моделі ротора, що обертається з постійною кутовою швидкістю та моделі двох зв'язаних керованих осциляторів.

4.1. Постановка задачі

Нехай на керовану лінійну стаціонарну майже консервативну систему [105] діє невідомє збурення $f(t)$ з обмеженою енергією. Модель матиме вигляд

$$\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon Bu + \varepsilon \Psi f, \tag{4.1}$$

де $x = [x_1, ..., x_{2n}]^T$ - $2n$-вимірний вектор стану, $u = [u_1, ..., u_m]^T$- m-вимірний вектор керувань, ε - малий параметр; $A_0, A_1 \in \Re_{2n\times 2n}$, причому $A_0 = -A_0^T$ та $det(A_0) \neq 0$, $B \in \Re_{2n\times m}$- матриця при керуванні, $\Psi \in \Re_{2n\times k}$- матриця при збуренні.

Проблема мінімаксного керування [5] полягає в тому, щоб знайти керування $u(t)$, яке мінімізує функціонал

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T u - \gamma^2 f^T f)dt, \tag{4.2}$$

і збурення $f(t)$, що його максимізує.

В функціоналі (4.2)- γ -задане число, $Q > 0$ - додатньо визнечена матриця.

Бажане оптимальне керування будемо шукати у вигляді

$$u = -\varepsilon B^T S x, \tag{4.3}$$

а найгірше збурення

$$f = K_f x, K_f = \varepsilon \gamma^{-2} \Psi^T S. \tag{4.4}$$

Тут S - додатньо визначена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті наступного вигляду

$$SA + A^T S - \varepsilon^2 SBB^T S + \gamma^{-2}\varepsilon^2 S\Psi\Psi^T S + Q = 0, \tag{4.5}$$

де $A = A_0 + \varepsilon A_1$.

Якщо покласти

$$P = \varepsilon S \tag{4.6}$$

матричне рівняння (4.5) перепишеться таким чином

$$PA + A^T P - \varepsilon PBB^T P + \gamma^{-2}\varepsilon P\Psi\Psi^T P + \varepsilon Q = 0. \tag{4.7}$$

При $\gamma \to \infty$ рівняння (4.7) співпадає з рівнянням Ріккаті, яке отримане для розв'язання задачи оптимального керування майже консервативними системами [104].

Відмітимо, що не для всіх значень γ існує додатно визначена матриця P, яка є розв'язком рівняння Ріккаті (4.7). Відомо [5], що існує мінімальне значення $\gamma = \gamma_{min}$ таке, що для всіх значень γ, які належать інтервалу $[\gamma_{min}, \infty)$ матриця P додатно визначена, а при $\gamma < \gamma_{min}$ матриця P знакозмінна.

Перепишемо рівняння (4.7) у зручному для подальшого дослідження вигляді

$$PA + A^T P - \varepsilon P(BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T)P + \varepsilon Q = 0. \tag{4.8}$$

Виходячи з формулювання задачі мінімаксного керування зрозуміло, що керування $u(t)$ повинно діяти на систему по тих же $m \leq n$ каналах, що і збурення $f(t)$. Іншими словами, ненульові елементи матриці $\Psi \in \Re_{2n\times k}$, можуть розташовуватися тільки в тих рядках, в яких знаходяться ненульові елементи матриці $B \in \Re_{2n\times m}$, яка має максимальни ранг m. З цього, очевидно, випливає така умова

$$2n \geq m = rang(B) \geq rang(\Psi). \tag{4.9}$$

Відомо [146], що $rang(AA^T) = rang(A)$. Тоді, умова (4.9) може бути записана у вигляді

$$2n \geq m = rang(BB^T) \geq rang(\Psi\Psi^T). \tag{4.10}$$

Оцінимо параметр γ. Припустимо, що

$$BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T \tag{4.11}$$

з (4.8) є невід'ємно визначеною матрицею рангу m.

Знайдемо конструктивні умови для оцінки параметра γ, що входить в рівняння Ріккаті (4.8).

З викладеного вище випливає, що

$$N = BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T = B(I_m - \gamma^{-2}HH^T)B^T. \tag{4.12}$$

Матриця N матиме максимальний ранг m тоді та тільки тоді, коли буде невиродженою матриця

$$M = I_m - \gamma^{-2} H H^T. \tag{4.13}$$

Для існування додатно визначеного розв'язку $P > 0$ рівняння Ріккаті (4.8) M повинна бути теж додатно визначеною, що буде тоді і тільки тоді, коли виконано умову [90], [146]

$$|\gamma| \geq \sqrt{\lambda_{max}(H H^T)}. \tag{4.14}$$

4.2. Знаходження розв'язку рівняння Ріккаті для майже консервативних систем

Для розв'язання рівняння (4.8) застосуємо викладений в роботі [105] підхід, який був запропонований для розв'язання задачі оптимального керування майже консервативними системами з малим параметром. А саме, шукатимемо матрицю-розв'язок P у вигляді розкладу за малим параметром

$$P = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i. \tag{4.15}$$

У такому ж вигляді представимо і матрицю Q

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i. \tag{4.16}$$

Підставивши (4.15) і (4.16) у (4.8), одержуємо

$$\begin{gathered}(P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ...) \cdot (A_0 + \varepsilon A_1) + (A_0 + \varepsilon A_1)^T \cdot (P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ...) - \\ -\varepsilon \cdot (P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ...) \cdot (B B^T - \gamma^{-2} \Psi \Psi^T) \cdot (P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + ...) + \\ +\varepsilon \cdot (Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + ...) = 0\end{gathered} \tag{4.17}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε, отримаємо нескінченну систему алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті:

$$A_0 P_0 - P_0 A_0 = 0, \tag{4.18}$$

$$
\begin{gathered}
A_0P_1 - P_1A_0 = P_0A_1 + A_1^TP_0 - P_0\cdot(BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T)\cdot P_0 + Q_0,\\
A_0P_2 - P_2A_0 = P_1A_1 + A_1^TP_1 -\\
-P_0\cdot(BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T)\cdot P_1 - P_1\cdot(BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T)\cdot P_0 + Q_1,\\
\dots\dots\dots\dots\\
A_0P_i - P_iA_0 = P_{i-1}A_1 + A_1^TP_{i-1} -\\
-\sum_{k=0}^{i-1} P_k\cdot(BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T)\cdot P_{i-1-k} + Q_{i-1},\\
\dots\dots\dots\dots
\end{gathered}
\tag{4.19}
$$

Для знаходження бажаного наближення матриці - розв'язку P потрібно послідовне розв'язати відповідну кількість рівнянь даної системи.

4.3. Приклади розв'язання задачі мінімаксного керування для гіроскопічних систем

Приклад 1. Розглянемо систему диференціальних рівнянь, яка описує рух ротора, що обертається з постійною кутовою швидкістю ω [94] . Ротор насаджений на вал без зміщення і перекосу

$$
\begin{gathered}
\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k^2x + \alpha\omega y = \varepsilon b_1u_1 + \varepsilon\psi_1 f_1\\
\ddot{y} + \alpha\dot{y} + k^2y - \alpha\omega y = \varepsilon b_2u_2,
\end{gathered}
\tag{4.20}
$$

де k^2 - кругова частота поперечних пружних коливань валу за відсутності внутрішнього тертя, α - коефіцієнт внутрішнього тертя, віднесений до одиниці маси.

Модель (4.20) відповідає по формі (4.1)

$$
\dot{x} = (A_0 + \varepsilon A_1)x + \varepsilon Bu + \varepsilon\Psi f,
$$

де

$$
B = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ b_1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1\\ u_2 \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} 0\\ \psi_1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} f_1 \end{bmatrix}
\tag{4.21}
$$

Після застосування заміни змінних $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = y, x_4 = \dot{y}$, та з урахуванням (4.21) запишемо систему (4.20) у матричної формі

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k^2 & -\alpha & -\alpha\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha\omega & 0 & -k^2 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Але, для повної відповідності системи (4.22) системі (4.1) потрібно, щоб один з доданків матриці при змінної x був кососиметричною матрицею. Для виконання цієї умови представимо матрицю коефіцієнтів системи (4.22) у вигляді суми $\bar{A}_0 + \varepsilon\bar{A}_1$, де

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2 & 0 \end{bmatrix}, \ \varepsilon\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & -\alpha\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\omega & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

Застосував перетворення

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

знайдемо, з урахуванням рівності $T\bar{A}_0 = A_0 T$, кососиметричну матрицю A_0, подібну до матриці $\bar{A}_0$

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & -k & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Матриця $\varepsilon\bar{A}_1$ після перетворення запишеться у вигляді

$$\varepsilon A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & -\frac{\alpha\omega}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha\omega}{k} & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}. \tag{4.26}$$

Будемо вважати, що $\varepsilon = \frac{1}{k}$. Тоді

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha k & -\alpha\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha\omega & 0 & 0 & -\alpha k \end{bmatrix}. \tag{4.27}$$

Для спрощення подальшого розв'язку, покладемо, $b_1 = 1, b_2 = 1, \psi_1 = 1$.

Для отриманої системи потрібно знайти керування $u(t)$, яке мінімізує функціонал (4.2)

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T u - \gamma^2 f^T f) dt,$$

і збурення $f(t)$, максімізірующее його.

Нагадаємо, що бажане оптимальне керування будемо шукати у вигляді (4.3)

$$u = -\varepsilon B^T S x,$$

а найгірше збурення

$$f = K_f x, K_f = \varepsilon \gamma^{-2} \Psi^T S.$$

Тут S - додатно визначена матриця-розв'язок матричного рівняння Ріккаті (4.5), яке після застосування заміни $P = \varepsilon S$ перепишеться у вигляді (4.8)

$$PA + A^T P - \varepsilon P(BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T)P + \varepsilon Q = 0.$$

Нагадаємо, що додатно визначена матриця P існує тільки для значень γ, які належать інтервалу $[\gamma_{min}, \infty)$. Отже, займемося оцінкой параметра γ. Для невід'ємної визначеності матриці $BB^T - \frac{1}{\gamma^2}\Psi\Psi^T$ потрібно, щоб виконувалась умова (4.14)

$$|\gamma| \geq \sqrt{\lambda_{max}(HH^T)},$$

де H знаходиться з виразу

$$\Psi = BH.$$

При заданих матрицях B, Ψ, а саме

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

маємо

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Власні значення матриці HH^T дорівнюють 0 та 1. Значить $|\gamma| \geq 1$. Відзначимо, що для матриць

$$BB^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, BB^T - \frac{1}{\gamma^2}\Psi\Psi^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{\gamma^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

ранги повинні бути однаковими. Тому додатно визначеная матриця P - розв'язок рівняння (4.8) буде існувати коли $|\gamma| > 1$.

Будемо шукати матрицю P з точністю до першого порядку мализни за ε, тобто у вигляді $P = P_0 + \varepsilon P_1$. Задамо матриці

$$Q_0 = \begin{bmatrix} q_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{03} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{04} \end{bmatrix}, Q_i = 0, i = 1, 2, ... \tag{4.29}$$

$q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{04} > 0$. Для спрощення рішення покладемо $\alpha = 0$.

Після розв'язання рівняння (4.18) та перших двох рівнянь (4.19) отримаємо

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{02})}{\gamma^2-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{02})}{\gamma^2-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{q_{03}+q_{04}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{q_{03}+q_{04}} \end{bmatrix}, \tag{4.30}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{q_{01}}{2k} & 0 & 0 \\ \frac{q_{01}}{2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{q_{03}}{2k} \\ 0 & 0 & \frac{q_{03}}{2k} & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

Таким чином, з точністю до першого порядку мализни за ε отримали

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{02})}{\gamma^2-1}} & \frac{q_{01}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{q_{01}}{2} & \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{02})}{\gamma^2-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{q_{03}+q_{04}} & \frac{q_{03}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{q_{03}}{2} & \sqrt{q_{03}+q_{04}} \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

Тоді

$$S = \begin{bmatrix} k\sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{02})}{\gamma^2-1}} & \frac{q_{01}k}{2} & 0 & 0 \\ \frac{q_{01}k}{2} & k\sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{02})}{\gamma^2-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k\sqrt{q_{03}+q_{04}} & \frac{q_{03}k}{2} \\ 0 & 0 & \frac{q_{03}k}{2} & k\sqrt{q_{03}+q_{04}} \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

Шукане керування буде мати вигляд

$$u = \begin{bmatrix} -\frac{q_{01}}{2}x_1 - \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{02})}{\gamma^2-1}}x_2 \\ -\frac{q_{03}}{2}x_3 - \sqrt{q_{03}+q_{04}}x_4 \end{bmatrix}, \tag{4.34}$$

а найгірше обурення

$$f = \left[\frac{q_{01}}{2\gamma^2}x_1 + \sqrt{\frac{q_{01}+q_{02}}{\gamma^2(\gamma^2-1)}}x_2\right]. \tag{4.35}$$

Приклад 2. Розглянемо систему четвертого порядку, яка відповідає моделі двох зв'язаних керованих осциляторів з матрицями

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_1 = 0, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$Q_0 = \begin{bmatrix} q_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{02} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{03} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{04} \end{bmatrix}, Q_i = 0, i = 1, 2, ..., \tag{4.36}$$

$\omega_1, \omega_2 > 0, \omega_1 \neq \omega_2, q_{01}, q_{02}, q_{03}, q_{04} > 0$. Оберемо матрицю Ψ при збуренні у вигляді, що задовольняє умовам існування рішення рівняння. Нехай

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.37}$$

Оцінимо параметр γ. Для цього обчислимо матрицю (4.11)

$$BB^T - \gamma^{-2}\Psi\Psi^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{\gamma^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

Для невід'ємної визначеності цієї матриці необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова $\gamma^2 \geq 1$. Але, враховуючи умову рівності рангів матриць BB^T і $BB^T - \frac{1}{\gamma^2}\Psi\Psi^T$ остаточно отримаємо $\gamma^2 > 1$, або $|\gamma| > 1$ Будемо шукати матрицю-розв'язок P з точністю до першого порядку мализни за ε, тобто у вгляді $P = P_0 + \varepsilon P_1$.

Після розв'язання рівняння (4.18), отримаємо загальний вигляд матриці

P_0, а саме

$$P_0 = \begin{bmatrix} p_{11}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{11}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{22}^0 \end{bmatrix}. \tag{4.39}$$

При розв'язанні першого рівняння з системи (4.19) знайдемо значення

$$p_{11}^0 = \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}}, p_{22}^0 = \sqrt{q_{02}+q_{04}}, \tag{4.40}$$

та загальний вигляд матриці P_1, а саме

$$P_1 = \begin{bmatrix} p_{11}^1 & 0 & \frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 \\ 0 & p_{22}^1 & 0 & \frac{q_{02}}{2\omega_2} \\ \frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 & p_{11}^1 & 0 \\ 0 & \frac{q_{02}}{2\omega_2} & 0 & p_{22}^1 \end{bmatrix}. \tag{4.41}$$

З другого рівняння (4.19) знайдемо значення

$$p_{11}^1 = 0, p_{22}^1 = 0. \tag{4.42}$$

Остаточно, з точністю до першого наближення, матриця-розв'язок P буде мати наступний вигляд

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}} & 0 & \varepsilon\frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{02}+q_{04}} & 0 & \varepsilon\frac{q_{02}}{2\omega_2} \\ \varepsilon\frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 & \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}} & 0 \\ 0 & \varepsilon\frac{q_{02}}{2\omega_2} & 0 & \sqrt{q_{02}+q_{04}} \end{bmatrix}. \tag{4.43}$$

Тоді

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}} & 0 & \frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{q_{02}+q_{04}} & 0 & \frac{q_{02}}{2\omega_2} \\ \frac{q_{01}}{2\omega_1} & 0 & \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}} & 0 \\ 0 & \frac{q_{02}}{2\omega_2} & 0 & \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{q_{02}+q_{04}} \end{bmatrix}. \tag{4.44}$$

Шукане керування буде мати вигляд

$$u = \begin{bmatrix} -\varepsilon\frac{q_{01}}{2\omega_1}x_1 - \sqrt{\frac{\gamma^2(q_{01}+q_{03})}{\gamma^2-1}}x_3 \\ -\varepsilon\frac{q_{02}}{2\omega_2}x_2 - \sqrt{q_{02}+q_{04}}x_4 \end{bmatrix}, \tag{4.45}$$

а найгірше збурення

$$f = \left[\frac{\varepsilon q_{01}}{2\gamma^2\omega_1}x_1 + \sqrt{\frac{q_{01}+q_{03}}{\gamma^2(\gamma^2-1)}}x_3\right]. \tag{4.46}$$

4.4. Висновки до розділу

Основні результати даного розділу опубліковано в роботі [175] і полягають у наступному:

- розв'язана задача мінімаксного керування для майже консервативних систем;
- сформульована необхідна умова існування розв'язку рівняння Ріккаті відповідного вигляду;
- отримано умова для оцінки параметра, що входить в рівняння Ріккаті;
- застосовано один з ефективних підходів до знаходження розв'язку рівняння Ріккаті для майже консервативних систем;
- наведено приклади розв'язання задачі мінімаксного керування до моделі ротора, що обертається з постійною кутовою швидкістю та моделі двох зв'язаних керованих осциляторів.

ВИСНОВКИ

Основні результати проведених досліджень, які представлені в дисертації, полягають у наступному:

1. Проведені дослідження, які стосуються побудови керованих майже консервативних динамічних систем за допомогою спеціального вибору вектора керувань. Доведені теореми про необхідні та достатні умови побудови неперервних та дискретних майже консервативних систем.

2. Отримані теоретичні результати побудови майже консервативних динамічних систем застосовано до моделей гіровертикалі, гіроскопа з лінійною характеристикою міжрамкової корекції та об'єкта з виникаючим гіроскопічним ефектом.

3. Застосовано модальний підхід отримання майже консервативної асимптотично стійкої системи та наведено алгоритм використання модального підходу для системи четвертого порядку з двовимірним вектором керування та його узагальнення на систему порядку $2n$ з m - вимірним вектором керування. Отриманий алгоритм застосовано до моделі керованого гіростабілізатора.

4. Досліджена задача мінімаксного керування для майже консервативних систем. Сформульована необхідна умова існування розв'язку рівняння Ріккаті з параметром та знайдена умова для оцінки цього параметра.

5. Отримані в дисертації результати з мінімаксного керування застосовано до моделі ротора, що обертається з постійною кутовою швидкістю та моделі двох зв'язаних керованих осциляторів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Абгарян К.А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем / К.А. Абгарян. — М.: Наука, 1973. — 432 с.
2. *Акуленко Л. Д.* Оптимальное управление движением квазилинейной колебательной системы при помощи малых сил / Л. Д. Акуленко // ПММ. — 1975. — Т. 39, Вып. 6. — С. 995 — 1005.
3. *Акуленко Л. Д.* Асимптотические методы оптимального управления / Л. Д. Акуленко. — М.: Наука, 1987. — 368с.
4. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы / А. Г. Александров. — М.: Высш.шк., 1989. —263 с.
5. *Александров А.Г.* Методы построения систем автоматического управления / А. Г. Александров. —М.: Физматлит, 2008. —232. с.
6. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами / Ю. Н. Андреев. —М.: Наука, 1976. — 424 с.
7. *Андрейченко К. П.* Динамика гироскопов с цилиндрическим поплавковым подвесом / К. П. Андрейченко, Л. И. Могилевич; Под ред. В. В. Петрова.— Саратов: СГТУ, 1987. — 160 с.
8. *Андрейченко К. П.* Динамика поплавковых гироскопов и акселерометров/ К. П. Андрейченко. — М.: Машиностроение, 1987. — 128 с.
9. *Андриевский Б. Р.* Методы подавления нелинейных колебаний в астатических системах автопилотирования летательных аппаратов /Б. Р. Андриевский, Н. В. Кузнецов, Г. А. Леонов // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2017. - № 3. - С. 118-134.
10. *Бабаева Н. Ф.* Основы теории гироскопа и современные гироскопические приборы. Уч.пособие / Н. Ф. Бабаева. — Ленинград, 1964. — 95 с.
11. *Бабаева Н. Ф.* Гироскопы / Н. Ф. Бабаева. — Л.: Машиностроение, 1973. — 104 с.
12. *Бибиков Ю. Н.* Регулярные и сингулярные периодические возмущения осциллятора с кубической восстанавливающей силой / Ю. Н. Бибиков,

В. Р. Букаты, А. А. Дороденков // Вестник СПбГУ. - 2010. - Сер.1, Вып.2 - С. 79-89.

13. *Бибиков Ю. Н.* Периодические возмущения нелинейного осциллятора / Ю. Н. Бибиков, А. Г. Савельева // Дифференциальные уравнения. - 2016. - Т.52, №4 - С. 411.
14. *Богданович М. М.* Гироскопические приборы и устройства. Основы теории / М. М. Богданович, П. А. Ильин. — Л.: Судпромгиз, 1961. — 360 с.
15. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. — М.: Физматгиз, 1963. — 356 с.
16. *Бороздин В. Н.* Гироскопические приборы. Ч.1./ В. Н. Бороздин. — М., 1970. — 138 с.
17. *Браславский Д. А.* Авиационные приборы и автоматы / Д. А. Браславский, С. С. Логунов, Д. С. Пельпор.- 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1978. — 432 с.
18. *Брозгуль Л. И.* Вибрационные гироскопы / Л. И. Брозгуль, Е. Л. Смирнов; Под ред. Б. А. Рябова. — М.: Машиностроение, 1970. — 215 с.
19. *Бублик Б. Н.* Основы теории управления / Б. Н. Бублик, Н. Ф. Кириченко. —К.: Издательское объединение «Вища школа», 1975. — 328 с.
20. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов / Б. В. Булгаков.- 2-е изд. — М.: Гос. изд-во техн.- теорет. лит-ры, 1955. — 356 с.
21. *Виниченко Н. Т.* Теория гироскопических приборов. Уч. пособие / Н. Т. Виниченко, Д. А. Кацай, А. А. Лысова. — Челябинск: ЮурГу, 2010. — 141 с.
22. *Ганиев Р. Ф.* Резонансные колебания гироскопических систем / Р. Ф. Ганиев, В. М. Воробьев, А. И. Лютый. — К.: Наук. думка, 1979. — 186 с.
23. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1967. — 576 с.
24. Гиродвигатели / Ю. В. Арбузов, Б. А. Делекторский, В. Б. Никаноров и др.; Под ред. И. Н. Орлова. —М.: Машиностроение, 1983. — 176 с.

25. Гироскопические системы. Проектирование гироскопических систем (в двух частях). Ч.1. Системы ориентации и навигации / Под ред. Д. С. Пельпора. Уч. пособие для вузов. — М.: Высш.шк., 1977. — 216 с.

26. Гироскопические системы. Проектирование гироскопических систем (в двух частях). Ч.2. Гироскопические стабилизаторы / Под ред. Д. С. Пельпора. Уч. пособие для вузов. — М.: Высш.шк., 1977. — 223 с.

27. Гироскопические и навигационные устройства и их элементы. Ч.2. Сб. статей / Под ред. Б. А. Рябова. // Труды ин-та. Вып.№204 —М.:МАИ, 1970. — 128 с.

28. *Голуб Дж.* Матричные вычисления / Дж. Голуб , Ч. Лоун Ван. — М.: Мир, 1999. — 548 с.

29. *Гребенщиков В. Г.* О стабилизации линейных систем с малым параметром, содержащих линейное запаздывание / В. Г. Гребенщиков // Известия РАН. Теория и системы управления. - 2001. - N 5. - С. . 5-15.

30. *Гроп Д.* Методы идентификации систем / Д. Гроп. — М.: Мир, 1979. — 304 с.

31. *Данилин В. П.* Гироскопические приборы / В. П. Данилин. — М.: Высшая школа, 1965. — 540 с.

32. *Джашитов В. Э.* Математические модели теплового дрейфа гироскопических датчиков инерциальных систем / В. Э. Джашитов, В. М. Панкратов. — СПб.: ГНЦ РФ - ЦНИИ «Электроприбор», 2001. — 150 с.

33. Динамика гироскопических приборов, систем стабилизации и управления: Сб. науч. трудов / Отв. ред. В. К. Карпов. — Тула: ТПИ, 1980. — 159 с.

34. Динамика гибких роторов: Сб. статей / Отв. ред. Ф. М. Диментберг — М.: Наука, 1972. — 136 с.

35. *Егоров А. И.* Оптимальное управление линейными системами / А. И. Егоров. — К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. — 278 с.

36. *Егорова Е. В.* Синтез модального управления цифровыми высокоразмерными слабодемпфированными системами / Е. В. Егорова, В. В.

Третьяков, Д.Н. Баранов // Электромагнитные волны и электронные системы.— 2014. — Т. 19, №6.— С. 30 –36.

37. *Зінчук М. О.* Дослідження рівняння Ляпунова для неперервних майже консервативних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький, Т. Г. Положий // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — 2, №1. — С. 84-96.
38. *Зінчук М. О.* Оптимальне керування неперервними майже консервативними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Проблеми аналітичної механіки: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — 3, №1. — С. 75-89.
39. *Зінчук М. О.* Стійкість та стабілізація лінійних параметричних динамічних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2007. — 4, №2. — С. 58-71.
40. *Зінчук М. О.* Дослідження рівняння Ляпунова для дискретних майже консервативних систем / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Аналітичні дослідження моделей механічних систем — К, 2005. — 50 с. (Препр./ НАН України. Ін-т математики; 2005.8)
41. *Зінчук М. О.* Оптимальне керування дискретними майже консервативними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008.— Т.5, №2. — С. 124-140.
42. *Зінчук М. О.* Оптимальне керування лінійними параметричними системами / М. О. Зінчук, В. В. Новицький // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010.—Т.7, №3. — С. 171-185.
43. *Зінчук М. О.* Про асимптотичні розв'язки матричних рівнянь Ляпунова та Ріккаті для майже консервативних систем. / М.О. Зінчук М. О. І. Ф. Святовець, О.В. Тетерятник // Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. — 2016. —№2.— С. 110-121.
44. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем / В. И. Зубов. — Л.: Судостроение, 1970. — 317 с.

45. *Зубов В. И.* Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение) / В. И. Зубов. — М.: Высшая шк., 1984. — 232 с.

46. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления / В. И. Зубов. — М.: Наука, 1975. — 495 с.

47. *Зубов В. И.* Динамика управляемых систем / В. И. Зубов. — М.: Высшая шк., 1982. — 285 с.

48. История механики гироскопических систем. Сб. статей. — М.: Наука, 1975. — 128 с.

49. *Ишлинский А. Ю.* Механика гироскопических систем / А. Ю. Ишлинский. — М.: Изд-во АН СССР, 1963. — 482 с.

50. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация / А. Ю. Ишлинский. — М.: Наука, 1976. — 672 с.

51. *Ишлинский А. Ю.* Лекции по теории гироскопов / А. Ю. Ишлинский, В. И. Борзов, Н. П. Степаненко. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — 248 с.

52. *Калинин А.И.* Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. / А. И. Калинин. –Мн.: "Экоперспектива 2000. — 183 с.

53. *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления / Р. Е. Калман // Труды I конгресса ИФАК. Т.2 — М.: Изд. АН СССР. —1961. —С.521-547.

54. *Калякин Л. А.* Авторезонансные асимптотики в осциллирущей системе со слабой диссипацией / Л. А. Калякин, М. А. Шамсутдинов // Теоретическая и математическая физика.— 2009. — Т. 160, №1.— С. 102 –111.

55. *Карпов В. К.* Моделирование и испытание гироскопических приборов и систем: Уч. пособие / В. К. Карпов, В. И. Родионов, О. Г. Корякин. — Тула: ТулПИ, 1987. — 93 с.

56. *Кацаран Т. К.* Метод малого параметра в задачах оптимального управления. Учебное пособие для вузов / Т. К. Кацаран, Л. Ю. Кабанцова. –Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. —41 с.

57. *Квакернаак Х.* Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Мир, 1972. — 650 с.

58. *Климов Д. М.* Динамика гироскопа в кардановом подвесе / Д. М. Климов, С. А. Харламов. — М.: Наука, 1978. — 208 с.

59. *Ковалев М. П.* Динамическое и статическое уравновешивание гироскопических устройств / М. П. Ковалев, С. П. Моржаков, К. С. Терехова. — М.: Машиностроение, 1974. — 252 с.

60. *Колобашкина Л. В.* Синтез оптимальных законов коррекции цифровых высокоразмерных слабодемпфированных систем / Л. В. Колобашкина, М. В. Алюшин, В. М. Алюшин // Мехатроника, автоматизация, управление.— 2011. — №3.— С. 7 –14.

61. *Коновалов С. Ф.* Гироскопические системы. Проектирование гироскопических систем. Ч.3. Акселерометры, датчики угловой скорости, интегрирующие гироскопы и гироинтеграторы: Уч. пособие / С. Ф. Коновалов, Е. А. Никитин, Л. М. Селиванова; Под ред. Д. С. Пельпора — М.: Высш. шк., 1980. — 128 с.

62. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гирокомпасов / В. Н. Кошляков. — М.: Наука, 1985. — 288 с.

63. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. / В. Н. Кошляков — М.:Наука, 1972. — 344 с.

64. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М.:Наука, 1968. — 476 с.

65. *Кудревич Б. И.* Теория гироскопических приборов. Избранные труды. Том 1 / Б. И. Кудревич. — Л.: Судпромгиз, 1963. — 328 с.

66. *Кудревич Б. И.* Теория гироскопических приборов. Избранные труды. Том 2 / Б. И. Кудревич. — Л.: Судпромгиз, 1965. — 296 с.

67. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства / Н.Т. Кузовков.— М.:Машиностроение, 1976.—184 с.

68. *Куликов Г. Г.* Учет малых параметров модели системы управления винтовентилятора ТВВД / Г. Г. Куликов, А. И. Абдулнагимов, Б. И. Бадамшин, А. С. Чепайкин // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 10. - С. 72-81.

69. *Кухаренко Н.В.* Синтез модальных регуляторов при неполной управляемости объектов / Н.В.Кухаренко // Техническая кибернетика.— 1992.— №2.— С.3-10.
70. *Ла-Салль Ж.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец.— М.: Мир, 1964. — 168 с.
71. *Ланкастер П.* Теория матриц / П. Ланкастер. — М.: Наука, 1978. — 280 с.
72. *Ларин В. Б.* О слабом управлении слабодемпфированными системами / В. Б. Ларин // ПММ.— 1978. — Т. 42, Вып. 6.— С.1000 — 1005.
73. *Ларин В. Б.* Слабое управление слабодемпфированными дискретными системами / В. Б. Ларин, К. И. Науменко // Навигация и управление движением механических систем. Ин-т математики АН УССР. — 1980. —С. 90 — 100.
74. *Ларин В. Б.* Слабое управление слабодемпфированными системами / В. Б. Ларин // Укр.мат.журн.— 1987. — Т. 39, № 1.— С.52 — 56.
75. *Ларин В. Б.* Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью / В. Б. Ларин, К. И. Науменко, В. Н. Сунцев. —Киев: Наукова думка, 1971. —106 с.
76. *Ларин В. Б.* Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью / В. Б. Ларин, К. И. Науменко, В. Н. Сунцев. —Киев: Наукова думка, 1973. —150 с.
77. *Ларин В. Б.* Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления / В. Б. Ларин, К. И. Науменко, В. Н. Сунцев, Ф. А. Алиев. —Киев: Наукова думка, 1978. —327 с.
78. *Ларин В. Б.* О компенсации погрешностей датчиков навигационной системы / В. Б. Ларин // Прикладная механика. - 2016. - Т. 52, № 1. - С. 127-133.
79. *Ларин В. Б.* О задаче синтеза системы управления квадрокоптером / В. Б. Ларин, А. А. Туник // Прикладная механика. - 2017. - Т. 53, № 3. - С. 121-127.

80. *Лестев А. М.* Нелинейные гироскопические системы / А. М. Лестев. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. — 228 с.

81. *Летов А. М.* Динамика полета и управления / А. М. Летов. — М.: Наука, 1969. — 360 с.

82. *Летов А. М.* Аналитическое конструирование регуляторов I-IV / А. М. Летов // Автоматика и телемеханика.—1960.—№4.—С.436-441;—№5.—С.561-568;—№6.—С.661-665.—1961.№4.—С.425-435.

83. *Ли Э. Б.* Основы теории оптимального управления / Э. Б. Ли, Л. Маркус. — М.: Наука, 1972. — 576 с.

84. *Лукъянов Д. П.* Основы теории гироскопов / Д. П. Лукъянов, В. Я. Располов, Ю. В. Филатов.—СПб.:ГНЦ РФ ОАО "Концерн"ЦНИИ"Электроприбор 2015.—339 с.

85. *Лунц Я. Л.* Введение в теорию гироскопов / Я. Л. Лунц. — М.: Наука, 1972. — 296 с.

86. *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение / К. Магнус. — М.: Мир, 1974. — 528 с.

87. *Малеев П. И.* Новые типы гироскопов / П. И. Малеев. — Л.: Судостроение, 1971. — 160 с.

88. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. — М.: Наука, 1966. —530 с.

89. *Малышев В. В.* Орбитальные коррекции космических аппаратов при выполнении динамических операций / В. В. Малышев, А. В. Старков, А. В. Федоров// Известия РАН. Теория и системы управления. – 2013. – № 2. - С. 154-166.

90. *Маркус М.* Обзор по теории матриц и матричным неравенствам / М. Маркус, Х. Минк. — М.: Наука, 1972. — 232 с.

91. *Мартыненко Ю. Г.* Тенденции развития современной гироскопии / Ю. Г. Мартыненко // Соросовский образовательный журнал. — 1997. —№11.— С.120-127.

92. *Матвеев В. А.* Гироскоп - это просто / В. А. Матвеев. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2012. — 195 с.
93. *Матвеев В. В.* Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В. В. Матвеев, В. Я. Распопов; Под ред. В. Я. Распопова.- 2-е изд. — СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2009. — 280 с.
94. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. — М.: Наука, 1971. — 312 с.
95. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы / Д. Р. Меркин. — М.: Наука, 1974. — 344 с.
96. *Меркурьев И. В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов / И. В. Меркурьев, В. В. Подалков. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 228 с.
97. *Метелицын И. И.* Теория гироскопа. Теория устойчивости. Избранные труды / И. И. Метелицын. — М.: Наука, 1977. — 130 с.
98. *Михайловский В. Н.* Измерение кривизны скважин / В. Н. Михайловский, С. К. Иванов. — К.: Изд-во АН УССР, 1960. — 144 с.
99. *Наумекно К.И.* Коррекция бесплатформенной инерциальной навигационной системы / К. И. Науменко // Проблемы управления и информатики.— 1996. — № 6.— С. 123 –134.
100. *Неусыпин А. К.* Гироскопические приводы / А. К. Неусыпин. — М.: Машиностроение, 1978. — 192 с.
101. *Никитин Е. А.* Гироскопические системы: элементы гироскопических приборов / Е. А. Никитин, С. А. Шестов, В. А. Матвеев; Под ред. Д. С. Пельпора. — М.: Высш. шк., 1972. — 470 с.
102. *Никитин Е. А.* Проектирование дифференцирующих и интегрирующих гироскопов и акселерометров / Е. А. Никитин, А. А. Балашова — М.: Машиностроение, — 1969. — 216 с.
103. *Новицкий В. В.* Управление гироскопическими системами / В. В. Новицкий. — Киев, 1982. — 44 с. — (Препр./ АН УССР, Ин-т математики; 82.39).

104. *Новицкий В.В.* Уравнение Ляпунова для почти консервативных систем / В. В. Новицкий.—Київ, 2004. — 33 с. — (Препринт/ Ін-т математики НАН України; 2004.7).

105. *Новицький В.В.* Керування гіроскопічними системами та інші задачі аналітичної механіки / В. В. Новицький // Праці Ін-ту математики НАН України. Математика та її застосування. — 2008. — Т.78. — 124 с.

106. *Новицький В. В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах / В. В. Новицький // Праці Ін-ту математики НАН України. Математики та її застосування. — 2008. — Т. 77. — 252 с.

107. *Новицький В. В.* Оптимальное управление почти консервативными системами / В. В. Новицький, Хуан Чень // Сучасні проблеми аналітичної механіки: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — 1, №2. — С. 152-157.

108. *Новицький В. В.* Слабое управление гироскопическим компасом / В. В. Новицький — В кн: Прикладные методы иследования физико-механических процессов. —Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979.— С. 146-169.

109. *Новицкий В. В.* Метод слабого управления в теории гироскопических компасов / В. В. Новицкий // Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. — 21 с.

110. *Новицький В.В.* Рівняння Ляпунова для майже консервативних асимптотично стійких систем / В.В. Новицький // Вопросы механики и её приложений: Праці ін-ту математики НАН України. — 2002. — Т. 44.— С. 215-224.

111. *Новицький В. В.* Асимтотичний розклад розв'язку рівняння Ляпунова для майже консервативних асимптотично стійких систем / В. В. Новицький // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем: Праці ін-ту математики НАН України. — 2003. — Т. 47. — С. 202-206.

112. *Новицький В. В.* Моделювання майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / В. В. Новицький, О. П. Коломійчук,

І. Ф. Святовець // Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. — 2013. —№2.— С. 76-82.

113. *Новицький В. В.* Керування рухом гіроскопа з лінійною характеристикою системи міжрамкової корекції / В. В. Новицький, О. П. Коломійчук, І. Ф. Святовець // Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. — 2014. —№1.— С. 98-105.

114. *Новицький В. В.* Умови формування майже консервативної системи за допомогою вектора керування / В. В. Новицький, М. О. Зінчук, І. Ф. Святовець // Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. — 2016. —№1.— С.174 –183.

115. *Новицький В. В.* Гіроскопічний компас як майже консервативна спостережна і керована механічна система / В. В. Новицький, О. П. Коломійчук, І. Ф. Святовець // Международная конференция ”Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012)”, Севастополь, 10-14 сентября 2012р.: Тези доповідей. — Симферопіль: Таврійський національний університет, 2012. — С. 134.

116. *Новицький В. В.* Формування майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / В. В. Новицький, І. Ф. Святовець, О. П. Коломійчук // XVI International Conference ”Dynamical system modelling and stability investigation”, Kyiv, May 29-31, 2013: Тези доповідей. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2013. — С. 376.

117. *Новицький В. В.* Умови формування майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / В. В. Новицький, О. П. Коломійчук, І. Ф. Святовець // Міжнародна математична конференція ”Боголюбовськи читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування”, Севастополь, 23-30 червня 2013р.: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2013. — С. 304.

118. *Одинцов А. А.* Теория гироскопов и гироскопических приборов. Практикум / А. А. Одинцов, М. А. Павловский, Г. Ф. Бублик, В. С. Евгеньев, П. М. Бондарь; Под ред. Б. А. Рябова. — К.: Вища школа, 1976. — 264 с.

119. *Одинцов А. А.* Теория и расчет гироскопических приборов. Уч. пособие / А. А. Одинцов. — К.: Вища школа, 1985. — 392 с.

120. *Окунев Б. В.* Свободное движение гироскопа / Б. В. Окунев. — М.Л.:Гос.изд-во техн.-теорет.лит., 1951. — 380 с.

121. *Павлов В. А.* Гироскопический эффект. Его проявление и использование / В. А. Павлов. -3-е изд., перераб. и доп. — Л.: Судостроение, 1972. — 284 с.

122. *Павловский М. А.* Теория гироскопов / М. А. Павловский. — К.: Вища школа. Головное изд-во, 1986. — 303 с.

123. *Пельпор Д. С.* Гироскопические приборы и автопилоты / Д. С. Пельпор. — М.: Машиностроение, 1964. — 390 с.

124. *Пельпор Д. С.* Динамически настраиваемые гироскопы: Теория и конструкция / Д. С. Пельпор, В. А. Матвеев, В. Д. Арсеньев. — М.: Машиностроение, 1988. — 264 с.

125. *Пельпор Д. С.* Гироскопические приборы систем ориентации и стабилизации / Д. С. Пельпор, Ю. А. Осокин, Е. Р. Рахтеенко. — М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.

126. *Пельпор Д. С.* Гироскопические системы. Гироскопические приборы и системы / Д. С. Пельпор, И. А. Михалев, В. А. Бауман; Под ред. Д. С. Пельпора. — М.: Высшая шк., 1988. — 424 с.

127. *Поляк Б. Т.* Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.

128. *Прасолов В. В.* Задачи и теоремы линейной алгебры / В. В. Прасолов. — М.: Наука, 1996. — 304 с.

129. *Распопов В. Я.* Теория гироскопов с бескардановыми подвесами / В. Я. Распопов. — Тула: ТПИ , 1990. —– 89 с.

130. *Рахтеенко Е. Р.* Гироскопические системы ориентации / Е. Р. Рахтеенко. — М.: Машиностроение , 1989. — 232 с.

131. *Ривкин С. С.* Теория гироскопических устройств. Ч.1 / С. С. Ривкин. — Л.: Судпромгиз , 1962. — 507 с.

132. *Ривкин С. С.* Теория гироскопических устройств. Ч.2 / С. С. Ривкин. — Л.: Судпромгиз , 1964. — 545 с.

133. *Ригли У.* Теория, проектирование и испытание гироскопов / У. Ригли, У. Холлистер, У. Денхард; Перевод с англ. под ред. С. А. Харламова. — М.: Мир, 1972. — 416 с.

134. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы / Я. Н. Ройтенберг. — М.: Нука, 1975. — 592 с.

135. *Святовець І.Ф.* Формування майже консервативної системи за допомогою вектора керувань./ І. Ф. Святовець, О. П. Коломійчук, В. В. Новицький // Аналітична механікиа та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — Т.9, №1. — С. 301-307.

136. *Святовець І.Ф.* Модальний підхід до задачи керування./ І. Ф. Святовець // Аналітична механікиа та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т.11, №5. — С. 199-209.

137. *Святовець І.Ф.* Формування лінійної дискретної майже консервативної системи за допомогою вектора керування. / І. Ф. Святовець // Вісник Запорізького національного університету: Зб. наукових статей. Фізико-математичні науки. — 2016. —№2.— С. 229-236.

138. *Святовець І. Ф.* Формування майже консервативної системи за допомогою зворотного зв'язку / І. Ф. Святовець // XVI International Conference "Dynamical system modelling and stability investigation" ,Kyiv, May 29-31, 2017: Тези доповідей. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2013. — С. 376.

139. *Серегин В. В.* Прикладная теория и принципы построения гироскопических систем / В. В. Серегин. — СПб.: СПбГУ ИТМО, 2007. — 78 с.

140. *Скарборо Д. Б.* Гироскоп. Теория и применение / Д. Б. Скарборо; Под ред. Б.А. Рябова. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. —247 с.

141. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат.лит., 1987. — 712 с.

142. *Степаньянц Г. А.* Стабилизация систем управления неустойчивыми и слабодемпфированными объектами / Г. А. Степаньянц. — Москва : Изд-во МАИ, 2011. — 162 с.

143. *Стренг Г.* Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг. — М.:Мир, 1980. — 454 с.

144. *Стрейц В.* Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / В. Стрейц. — М.:Наука, 1985. — 296 с.

145. *Уонем М.* Линейные многомерные системы управления: геометрический подход / М. Уонем. — М.: Наука. 1980. — 347 с.

146. *Хорн Р.* Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — 655 с.

147. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи управления с малым параметром / Ф. Л. Черноусько // ПММ.— 1968. — Т. 32, Вып. 1.— С. 15 –26.

148. *Черноусько Ф. Л.* Управление колебаниями / Ф. Л. Черноусько, Л. Д. Акуленко, Б. Н.Соколов. —М.: Наука. Гл. редакция физико - математической литературы, 1980. —384 с.

149. *Черноусько Ф. Л.* Оптимальное управление для одного класса систем, подверженных возмущениям / Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика.— 2004. — Т. 68, Вып. 4.— С. 564 –572.

150. *Черноусько Ф. Л.* Минимаксное управление для одного класса систем, подверженных возмущениям / Ф. Л. Черноусько // Доклады АН.— 2002. — Т. 383.— С. 468 –471.

151. *Черноусько Ф. Л.* Игровые задачи управления и поиска / Ф. Л. Черноусько, А. А. Меликян. —М.: Наука, 1978. —272 с.

152. *Черноусько Ф. Л.* Оптимальное управление при случайных возмущениях / Ф. Л. Черноусько, В. Б. Колмановский. –М.: Физматлит, 1978. —352 с.

153. *Черноусько Ф. Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем / Ф. Л. Черноусько. —М.: Наука, 1988. —320 с.

154. *Шепелев Н. И.* Сборка, регулировка и испытание гироскопических систем / Н. И. Шепелев. — М.: Машиностроение, 1977. — 192 с.

155. *Шестов С. А.* Гироскоп на земле, в небесах и на море / С. А. Шестов. — М.: Знание, 1989. — 192 с.

156. *Шориков А. Ф.* Минимаксное программное управление процессом сближения в двухуровневой иерархической дискретной динамической системе / А. Ф. Шориков// Автомат. и телемех. – 2014. – № 3. - С. 58–72.

157. *Шориков А. Ф.* Адаптивное минимаксное управление процессом преследования в дискретных динамических системах с несколькими преследователями / А. Ф. Шориков// Тр. ИММ УрО РАН. – 2005. – Т.11,№ 1. - С. 225–240.

158. *Якубович В. А.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. — М.: Наука, 1972. — 718 с.

159. *Barnett S.* Introduction to Mathematical Control Theory/ S. Barnett, R.G. Cameron. — Oxford: Clarendon press, 1985. — 404 p.

160. *Biryukov R. S.* Minimax control of linear object in the external disturbance and undefined initial conditions on a finite time interval / R. S. Biryukov // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo. Seriia: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie.—2013.—Vol 3,Issue 1.—pp. 206–211.

161. *Bouakrif F.* Trajectory tracking control for perturbed robot manipulators using iterative learning method / F. Bouakrif, M. Zasadzinski // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology.—2016.—Vol 87,Issue 5-8.—pp. 2013–2022.

162. *Buica A.* A second order analysis of the periodic solutions for nonlinear periodic differential systems with a small parameter / A. Buica, J. Gine, J. Llibre // Physica D.—2012.—Vol 241.—pp. 528–523.

163. *Fidlin A.* On the Averaging in Strongly Damped Systems: The General Approach and its Application to Asymptotic Analysis of the Sommerfeld

Effect / A. Fidlin, O. Drozdetskaya // Procedia IUTAM.—2016.—Vol 19.—pp. 43–52.

164. *Gaias G.* Model of J_2 perturbed satellite relative motion with time-varying differential drag / G. Gaias, J.-S. Ardaens, O. Montenbruck // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy.—2015.—Vol 123,Issue 4.—pp. 411–433.

165. *Gomoyunov M. I.* On the numerical solution of a minimax control problem with a positional functional / M. I. Gomoyunov, D. V. Kornev, N. Yu. Lukoyanov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.—2015.—Vol 291,Supplement 1.—pp. 77–95.

166. *Gomoyunov M. I.* On the stability of a procedure for solving a minimax control problem for a positional functional / M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.—2015.—Vol 288,Supplement 1.—pp. 54–69.

167. *How J. P.* Linear Flight Control Techniques for Unmanned Aerial Vehicles / J. P. How, E. Frazzoli, G. V. Chowdhary. — Springer Link, 2014

168. *Kalman R. E.* Contributions to the Teory of Optimal Control / R. E. Kalman // Bullet. Soc. Mat. Mech.—1960.—Vol 5,-No 1,—pp.102–119.

169. *Koofigar H.* Robust Adaptive Motion Control with Environmental Disturbance Rejection for Perturbed Underwater Vehicles / H. R. Koofigar // Journal of Marine Science and Technology.—2014.—Vol 22,No 4,—pp. 455–462.

170. *Kurt M.* Frequency-energy plots of steady-state solutions for forced and damped systems, and vibration isolation by nonlinear mode localization / M. Kurt, M. Eriten, D.M. McFarland, L.A. Bergman, A.F. Vakakis// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.—2014.—Vol 19,Issue 8,—pp. 2905–2917.

171. *Moon J.* Minimax estimation with intermittent observations/ Jun Moon,Tamer Basar // Automatica.—2015.—Vol 62,—pp. 122–133.

172. *Moon J.* Minimax control over unreliable communication channels/ Jun Moon,Tamer Basar // Automatica.—2015.—Vol 59,—pp. 182–193.

173. *Romeo F.* Dynamics of a Linear Oscillator Coupled to a Bistable Light Attachment: Numerical Study / F. Romeo, G. Sigalov,L.A. Bergman, A.F. Vakakis// Journal of Computational and Nonlinear Dynamics.—2015.—Vol 10,-No 1.

174. *Rosengren A. J.* Chaos in navigation satellite orbits caused by the perturbed motion of the Moon / Aaron J. Rosengren, Elisa Maria Alessi, Alessandro Rossi, Giovanni B. Valsecchi// Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2015. – Vol 449, Issue 4. - pp. 3522–3526.

175. *Svyatovets I.* Construction of minimax control for almost conservative controlled dynamic systems with the limited perturbations / Iryna Svyatovets // Eureka: Physics and Engineering.—2017.—Volume 2(9).—pp. 9–15.

176. *Sigalov G.* Alternation of regular and chaotic dynamics in a simple two-degree-of-freedom system with nonlinear inertial coupling / G. Sigalov, O.V. Gendelman, M.A.AL-Shudeifat, L.I. Manevitch, A.F. Vakakis, L.A. Bergman // Physics Today.Chaos 22.—2012.

177. *Scheeres D. J.* Orbital Motion in Strongly Perturbed Environments: Applications to Asteroid, Comet and Planetary Satellite Orbiters / Daniel J. Scheeres. — Springer Praxis Books, 2012.

178. *Stepanova L. V.* Asymptotics of the stress field near a crack tip under mixed-mode loading: small parameter method / L. V. Stepanova, E. M. Yakovleva// Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya.—2015.—Issue 10(132),—pp. 77–90.

179. *Tkhai V.N.* Periodic motions of a perturbed reversible mechanical system / V.N. Tkhai // Journal of Applied Mathematics and Mechanics.—2015.—Vol 79,Issue 2.—pp. 122–131.

180. *Tsumura K.* Optimal Control/Observation Points Problem and Separation Principle of Weakly Controlled Large-scaled Multi-agent Systems / K. Tsumura, I. Kawasaki // 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control ,Las Vegas, USA, December 12-14, 2016. — pp. 5110–5115.

181. *Chernousko, F.L.* State estimation for dynamic systems / Felix L. Chernousko.— Boca Raton: CRC Press, 1994. — 304 p.

182. *Chernousko, F.L.* Control of Nonlinear Dynamical Systems: Methods and Applications / Felix L. Chernousko, I. M. Ananievski, S. A. Reshmin.— Springer Berlin Heidelberg, 2009. — 396 p.

183. *Chernousko, F.L.* Manipulation Robots: Dynamics, Control and Optimization / Felix L. Chernousko, N. N. Bolotnik, V. G. Gradetsky.— Boca Raton: CRC Press, 1994. — 268 p.

184. *Chernousko, F.L.* Evolution of Motions of a Rigid Body About Its Center of Mass. Equations of Perturbed Motion of a Rigid Body About Its Center of Mass / Felix L. Chernousko, Leonid D. Akulenco, Dmytro D. Leshchenko.— Springer International Publishing, 2017. — 241 p.

185. *Shorikov A. F.* Minimax program terminal control in two-level hierarchic nonlinear discrete dynamical system / A. F. Shorikov // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz..—2017.—Vol 132.—pp.153-156.