НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

САВЧЕНКО Ніна Валеріївна

УДК 531.36, 531.38

КОЛИВАННЯ ТА СТІЙКІСТЬ РУХУ ДЕЯКИХ НЕКОНСЕРВАТИВНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

01.02.01 – теоретична механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
Пузирьов Володимир Євгенович,
Донецький національний університет (м. Вінниця),
професор кафедри прикладної механіки і
комп'ютерних технологій.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Міхлін Юрій Володимирович,
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (м. Харків), професор кафедри прикладної математики;

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Нікітіна Неллі Володимирівна,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (м. Київ), провідний науковий співробітник відділу стійкості процесів.

Захист відбудеться 29 травня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою:
01601, м.Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 26 квітня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Г.П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У даний час залишається актуальною задача конструктивного опису і аналізу умов стійкості руху механічних систем, які описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями. Зазвичай при розв'язанні цієї задачі дослідник стикається з проблемою громіздких обчислень. Тому для аналізу поведінки системи важливим є завдання пошуку шляхів подолання обчислювальних труднощів за рахунок вироблення спеціальних алгоритмів і процедур, спрямованих на редукцію відповідних умов.

Одним із основних підходів до дослідження стійкості руху нелінійних механічних систем є прямий метод Ляпунова.

Особливе місце в теорії стійкості займає дослідження критичних випадків. Теорія критичних випадків бере початок від О. М. Ляпунова і отримала свій розвиток у роботах М. Г. Четаєва, В. Г. Веретенникова, Я. М. Гольцера, Г. В. Каменкова, А. Л. Куніцина, І. Г. Малкіна, А. М. Молчанова, А. С. Озіранера, Л. Сальвадорі, В. А. Пліса, О. В. Анашкіна, E. H. Abed, J.-H. Fu та інших вчених. У критичних випадках актуальним є вивчення асимптотичної поведінки розв'язків системи. Ця задача розглядалася для критичного випадку пари чисто уявних коренів у роботах Л. Сальвадорі, К. Пайффера, О. Я. Савченка, О. О. Ігнатьєва та інших. У той же час, відкритим залишається питання побудови функції Ляпунова в явному вигляді у багатьох випадках.

Задача стійкості і стабілізації руху динамічних систем не за всіма, а лише по відношенню до деякої частини змінних, природним чином виникають на практиці як з вимоги нормального функціонування, так і при оцінюванні можливостей системи. Зазначені задачі є міждисциплінарними і виникають при моделюванні багатьох явищ і керованих процесів в самих різних розділах науки: механіці, фізиці, економіці, біології та інших. Забезпечити стійкість за частиною змінних для багатьох класів систем виявляється простішим, ніж за всіма змінними, і тому у теорії автоматичного керування навіть виділився окремий науковий напрямок, який присвячений дослідженню та забезпеченню стійкості за частиною змінних. У даному питанні суттєві результати одержав В. В. Румянцев. Серед численних публікацій із цього напрямку відзначимо також книги В. І. Зубова, М. М. Красовського, В. І. Воротнікова, О. Я. Савченка і О. О. Ігнатьєва.

Головним методом дослідження подібних задач також є метод функцій Ляпунова, який виявився вельми ефективним при аналізі як теоретичних, так і прикладних проблем. Однак, хоча у багатьох прикладних задачах метод функцій Ляпунова і дозволяє отримати жорсткі умови стійкості за частиною змінних, тим не менш, у цілому питання конструктивної побудови функцій Ляпунова залишається маловивченим. У такій ситуації значний інтерес представляє подальший розвиток прямого методу Ляпунова з описом конструктивних шляхів побудови функцій Ляпунова.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з Планами наукових досліджень відділу технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України на 2011 – 2014 роки.

Мета і задачі дослідження. При моделюванні багатьох неконсервативних механічних систем важливою складовою частиною є несиметричне тверде тіло з нерухомою точкою, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. У такому випадку основною метою дослідження є визначення умов асимптотичної стійкості рівномірних обертань цього тіла. Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати ряд завдань. До цих завдань належать побудова математичної моделі руху механічної системи і приведення рівнянь руху до канонічного вигляду. Наступним завданням є дослідження стійкості руху гіроскопа і оцінка впливу демпфуючого моменту на стійкість даного руху.

Якщо механічна система представлена маятниковими системами, то основною метою дослідження є стабілізація коливань системи шляхом додавання до неї динамічних абсорберів різних конфігурацій. У зв'язку з цим виникає ряд завдань, а саме: дослідження станів рівноваги на стійкість за допомогою побудови функцій Ляпунова та отримання умов стабілізації коливань даних маятникових систем.

Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є неконсервативні механічні системи. *Предметом дослідження* виступають задачі стійкості і стабілізації руху цих механічних систем.

Методи досліджень. Методи динаміки систем пов'язаних тіл, якісної теорії диференціальних рівнянь та теорії нелінійних коливань використовуються при дослідженні рівнянь руху маятникових систем і обертання твердого тіла, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. При побудові оцінок власних значень механічної системи застосовуються елементи теорії збурень. Також для досліджень використовуються деякі результати теорії матриць. Для розв'язання задачі про стійкість станів рівноваги нелінійних механічних систем застосовується прямий метод Ляпунова.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректністю постановок вихідних задач та використанням якісної теорії диференціальних рівнянь. Отримані результати підтверджено також чисельним інтегруванням диференціальних рівнянь руху. При порівняльній оцінці результати дисертації підтверджуються відомими результатами.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації розв'язано наукове завдання конструктивної побудови функцій Ляпунова для класів неконсервативних нелінійних механічних систем у критичних випадках із застосуванням до дослідження стійкості руху деяких систем твердих тіл. У результаті дослідження отримано такі основні результати:

1. Запропоновано спосіб побудови функції Ляпунова для системи звичайних диференціальних рівнянь порядку $2m + l$, матриця лінійної частини якої має m пар чисто уявних і l власних значень, які належать відкритій лівій комплексній півплощині, а нелінійна частина системи має спеціальний вигляд. Даний підхід видається більш простим, ніж відомий метод зведення.
2. Уперше сформульовано і доведено дві теореми, що дозволяють конструктивно встановити асимптотичну стійкість (нестійкість) тривіального розв'язку системи зазначеного вище вигляду.
3. Як приклад застосування наведених теорем досліджено задачу про стійкість стану рівноваги подвійного математичного маятника з лінійним динамічним поглиначем коливань пасивного типу. Показано, що введення останнього до системи робить нижній стан рівноваги асимптотично стійким.

4. У дисертаційній роботі отримано оцінки власних значень лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що знаходиться під дією сил різних типів.
5. Також уперше розв'язано задачу стабілізації стану рівноваги маятникового осцилятора за допомогою додавання до нього динамічного абсорбера. З'ясовано, що додавання абсорбера в даному випадку веде до рівномірної асимптотичної стійкості за частиною змінних.
6. У разі подвійного фізичного маятника показано, що приєднання абсорбера забезпечує експоненціальну стійкість руху. Описані основні властивості оптимальної конфігурації абсорбера.
7. Отримано умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. Також проведено оцінку впливу цього моменту на стійкість руху гіроскопа.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані в дисертації нові результати мають в основному теоретичне значення. Вони представляють інтерес для фахівців у галузі теоретичної механіки, а саме можуть бути використані для подальшого розвитку теорії стійкості руху нелінійних механічних систем.

Особистий внесок здобувача. Статті [1]-[6] опубліковано спільно з науковим керівником, д.ф.-м.н. В.Є. Пузирьовим, якому належать постановки задач та обговорення отриманих результатів. Усі положення, що виносяться на захист, отримано здобувачем самостійно.

У статті [1] здобувачем отримано оцінки власних значень лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що знаходиться під дією структури сил.

У статті [2] особистий внесок здобувача полягає у знаходженні необхідних і достатніх умов асимптотичної стійкості рівномірних обертань твердого тіла з нерухомою точкою, що знаходиться під дією демпфуючого моменту.

У статті [3] здобувачем розв’язана задача стійкості в критичному за Ляпуновим випадку, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення має пару чисто уявних коренів, на прикладі рівномірних обертань несиметричного гіроскопа, що знаходиться під дією демпфуючого моменту, навколо осі, яка містить центр мас тіла, і їх аналіз.

У роботі [4] здобувачеві належить розв’язання задачі стійкості в критичному за Ляпуновим випадку, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення має m пар чисто уявних коренів і l коренів з від’ємною дійсною частиною. Запропоновано спосіб побудови функції Ляпунова для системи спеціального виду в критичному випадку двох пар чисто уявних коренів. Також розв’язана задача про вплив приєднаної маси на стійкість нижнього стану рівноваги подвійного математичного маятника.

Особистий внесок здобувача у статті [5] полягає в отриманні необхідних і достатніх умов асимптотичної стійкості станів рівноваги подвійного фізичного маятника з приєднаною масою.

У статті [6] здобувач провів аналіз умов стабілізації малих коливань маятникового осцилятора.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародній конференції «Стійкість, керування і динаміка твердого тіла» (ICSCD'XI), Донецьк, 2011 р.;
- Міжнародній конференції «Моделювання і дослідження стійкості динамічних систем» (DSMSI XVII), Київ, 2015 р.;
- Міжнародних конференціях молодих математиків, Київ, 2015, 2017 рр.;
- Семінар із загальної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України (2013 – 2014 рр.);
- Математичному семінарі до 100-річчя С.Г. Крейна (2017 р., керівники – проф. С.М. Чуйко, проф. А.Л. Зуєв, В.Ф. Щербак).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася на:

- Семінарі відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України та за участю кафедри математики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» (2017 р., керівники – проф. О.Л. Зуєв, проф. С.М. Чуйко);
- Семінарі «Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика» Інституту математики НАН України, (2017 р., керівники – академіки НАН України І.О. Луковський та В.Л. Макаров).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 10 роботах, з яких 6 статей у фахових наукових журналах та збірниках, 4 роботи у матеріалах міжнародних конференцій. Стаття [5] опублікована у науковому журналі, який включено до наукометричної бази Scopus.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається із вступу, п’яти розділів, висновків та списку використаних джерел із 118 найменувань. Обсяг дисертаційної роботи становить 144 сторінок друкованого тексту, з них 11 сторінок займає список використаних джерел. У роботі міститься 12 рисунків і 1 таблиця.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі до дисертації обґрунтовується актуальність досліджуваної проблеми, розкривається зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами, формулюються мета, задачі та методи дослідження. Крім того, у вступі відзначена наукова новизна результатів, їхнє практичне значення, особистий внесок здобувача, надається інформація про апробацію результатів дисертації та публікації за темою дисертації.

У першому розділі подається огляд літературних джерел, які мають безпосереднє відношення до теми дисертації. У підрозділі 1.1 перелічено основні результати праць, що стосуються дослідження впливу структури сил на динаміку і стійкість руху механічних систем. У підрозділі 1.2 наведено огляд праць з питань стійкості руху механічних систем: вивчення критичних за Ляпуновим випадків та дослідження стійкості руху за частиною змінних. У підрозділі 1.3 викладено деякі результати досліджень щодо застосування демпфуючих пристроїв для стабілізації руху механічних систем.

У другому розділі описано загальну методику дисертаційних досліджень. У підрозділі 2.1 поставлено задачу про вплив структури сил на стійкість руху механічних систем та наведені формулювання теорем Томсона – Тета – Четаєва, які можна застосовувати для розв'язання цієї задачі. У підрозділі 2.2 викладено деякі елементи теорії збурень. Представлені у даному підрозділі формули використовуються при побудові оцінок власних значень механічних систем. У підрозділі 2.3 описані поняття стійкості тривіального розв'язку системи за усіма змінними та за частиною змінних, а також викладено необхідні результати по застосуванню методу функцій Ляпунова для дослідження стійкості руху нелінійних механічних систем.

Третій розділ присвячено конструктивній побудові функцій Ляпунова для деяких класів неконсервативних нелінійних механічних систем у критичних випадках.

У підрозділі 3.1 розглянуто механічну систему звичайних диференціальних рівнянь порядку $2m+l$, що має вигляд

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \sum_{s=1}^{l} \xi_s \, \tilde{\mathbf{C}}^{(s)}\mathbf{x}, \quad \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{B}\boldsymbol{\xi} + \sum_{s=1}^{2m} x_s \tilde{\mathbf{D}}^{(s)}\mathbf{x}, \tag{1}$$

де $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2m}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{l}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{C}}^{(s)}$ $(s = \overline{1,2m})$ – дійсні квадратні матриці, $\tilde{\mathbf{D}}^{(j)}$ $(j = \overline{1,2m})$ – дійсні прямокутні матриці порядка $l \times 2m$. Матриця $\mathbf{A}$ має власні значення $\pm i\omega_1, ..., \pm i\omega_m$ $(0 < \omega_1 < \cdots < \omega_m)$, а дійсні частини власних значень матриці $\mathbf{B}$ від'ємні.

Змінні x_s $(s = \overline{1,2m})$ називаються критичними, а ξ_j $(j = \overline{1,l})$ – некритичними.

За допомогою лінійного невиродженого перетворення критичних змінних $\mathbf{x} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}$ приведено систему (1) до вигляду

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{J}\mathbf{z} + \sum_{s=1}^{l} \xi_s \mathbf{C}_{\star}^{(s)}\mathbf{z}, \quad \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \mathbf{B}\boldsymbol{\xi} + \sum_{s=1}^{2m} z_s \mathbf{D}^{(s)}\mathbf{z}\,, \tag{2}$$

де $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(i\omega_1, ..., i\omega_m, -i\omega_1, ..., -i\omega_m)$ – жорданова форма матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{z} = (\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}})^T$, $\mathbf{C}_{\star}^{(s)} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}^{(s)}\mathbf{\Lambda}$, елементи матриць $\mathbf{D}^{(s)}$ відомим чином виражаються через елементи матриць $\tilde{\mathbf{D}}^{(s)}, \mathbf{\Lambda}$. Риса зверху означає комплексне спряження, верхній індекс T – транспонування. Очевидно, що j-ий і $j+m$-ий рядки матриць $\mathbf{C}_{\star}^{(s)}$ є комплексно спряженими, тобто $\mathbf{C}_{\star}^{(s)} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{(s)} \\ \bar{\mathbf{C}}^{(s)} \end{pmatrix}$.

Введено наступні позначення: $P = (p_1, ..., p_m)$ – m-вимірний індекс, $p = |P| = p_1 + ... + p_m$, однорідну форму порядка n представлено у вигляді

$$\sum_{p+q=n} k_{PQ}\mathbf{y}^P \bar{\mathbf{y}}^Q = \sum_{p+q=n} k_{p_1 \dots p_m q_1 \dots q_m} y_1^{p_1} \dots y_m^{p_m} \bar{y}_1^{q_1} \dots \bar{y}_m^{q_m}.$$

Досліджено задачу про стійкість нульового розв'язку системи (2), і, як наслідок, системи (1).

З цією метою побудовано функцію Ляпунова, яка має вигляд

$$V(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) = V_0^{(2)}(\mathbf{z}) + \alpha_{m+1} V^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + V^{(3)}(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}) + V^{(4)}(\mathbf{z}), \tag{3}$$

де $V_0^{(2)}(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j \bar{y}_j$; α_j $(j = \overline{1,m})$, α_{m+1} – деякі дійсні сталі, $V^{(2)}$ – додатно визначена квадратична форма, $V^{(3)} = \sum_{s=1}^{l} \xi_s \tilde{V}_s^{(2)}(\mathbf{z})$, $\tilde{V}_s^{(2)} = \mathbf{z}^T \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{z}$, елементи матриць $\mathbf{K}^{(s)}$ визначаються із умови $\dot{V}^{(3)} \equiv 0$. Коефіцієнти форми четвертого порядку $V^{(4)}$ обираються таким чином, щоб $\dot{V}^{(4)} = \sum_{p=2}^{m} G_P \mathbf{y}^P \bar{\mathbf{y}}^P$, де G_P являють собою лінійні комбінації різних добутків коефіцієнтів $k_{PQ}^{(s)}$ на елементи матриць $\mathbf{D}^{(s)}$ і, як наслідок, можуть бути записані у вигляді $G_P = \alpha_1 G_P^{(1)} + ... + \alpha_m G_P^{(m)} + \alpha_{m+1} G_P^{(m+1)}$.

Величини $G_P^{(s)}, s = \overline{1,m}$ називають коефіцієнтами стійкості, вони залежать від коефіцієнтів правих частин системи (2) (і не залежать від множників α_s) і дозволяють застосовувати теореми Ляпунова або Четаєва, тобто робити висновок про стійкість (нестійкість) розв'язку, що досліджується.

Для конкретних механічних систем у випадку $m > 2$ знаходження коефіцієнтів $G_P^{(s)}, s = \overline{1,m}$ стає достатньо складним завданням, оскільки коефіцієнти правих частин системи (1) зазвичай залежать від декількох параметрів (розподіл мас системи, пружні характеристики та ін.), і задача зводиться до розв’язання нерівностей високого ступеня. Тому обмежимося випадком $m = 2$.

Основним результатом підрозділу 3.1 є дві теореми, що дозволяють конструктивно встановити асимптотичну стійкість або нестійкість розв'язку системи зазначеного виду.

Теорема 1.[1] *Нехай для функції Ляпунова, побудованої згідно з описаною вище процедурою, має місце один із наступних випадків:*

А1. $G_{20}^{(1)} < 0, G_{02}^{(2)} < 0, G_{11}^{(1)} \le 0, G_{11}^{(2)} \le 0,$

А2. $G_{20}^{(1)} < 0, G_{02}^{(2)} < 0, \min\{G_{11}^{(1)}, G_{11}^{(2)}\} \le 0, \ \max\{G_{11}^{(1)}, G_{11}^{(2)}\} > 0,$

Б. $G_{20}^{(1)} < 0, G_{02}^{(2)} < 0, G_{11}^{(1)} > 0, G_{11}^{(2)} > 0, G_{20}^{(1)} G_{02}^{(2)} > G_{11}^{(1)} G_{11}^{(2)},$

В. $G_{20}^{(1)} > 0$ *або* $G_{02}^{(2)} > 0,$ *або* $G_{20}^{(1)} G_{02}^{(2)} < G_{11}^{(1)} G_{11}^{(2)}$ $(G_{11}^{(1)} > 0)$.

Тоді у випадках А, Б тривіальний розв'язок системи (2) асимптотично стійкий, а у випадку В - нестійкий.

Розглянуто також систему

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{X}_1^{(3)}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}_2^{(3)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + ..., \qquad \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{\Xi}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{\Xi}_1^{(2)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + ..., \tag{4}$$

де через $\mathbf{X}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\Xi}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ позначені праві частини системи (1), $\mathbf{X}_1^{(3)}, \mathbf{X}_2^{(3)}, \boldsymbol{\Xi}_1^{(2)}$ – однорідні форми зазначених змінних, $\mathbf{X}_2^{(3)}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\Xi}_1^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \mathbf{0},$ багатокрапкою в рівняннях (4) позначена сукупність доданків більш високого порядку.

Нехай $\mathbf{Z}_1 = (\mathbf{Y}_1, \bar{\mathbf{Y}}_1)^T = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \mathbf{X}_1^{(3)}(\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{z})$, а j-ту компоненту вектора $\mathbf{Y}_1$ подано у вигляді $\sum_{p+q=n} g_{PQ}^{(j)} \mathbf{y}^P \bar{\mathbf{y}}^Q$. Введено до розгляду також I_j – m-вимірний індекс, компонентами якого є символи Кронекера δ_{js}. Справедливе наступне твердження.

[1] У термінах променів стійкості ця теорема відповідає критерію Молчанова.

Теорема 2. *Якщо коефіцієнти, обчислені для модельної системи (2), такі, що* $\sum G_P \mathbf{y}^P \overline{\mathbf{y}}^P$ *є від'ємно визначеною при деяких додатних множниках* $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}$ *(зокрема, якщо виконані умови А, Б теореми 1) і форма* $\mathbf{X}_1^{(3)}$ *така, що* $\operatorname{Re} g_{PP-I_j}^{(j)} = 0$ $(j = \overline{1,m})$, *то нульовий розв'язок системи (4) асимптотично стійкий при будь-яких* $\mathbf{X}_2^{(3)}, \mathbf{\Xi}_1^{(2)}$.

Одержані результати застосовано у пункті 3.1.4 для дослідження стійкості стану рівноваги подвійного математичного маятника з приєднаним динамічним абсорбером.

У підрозділі 3.2 розглянуто задачу стійкості руху за частиною змінних. Виконано побудову функції Ляпунова для стійкої компоненти у явному вигляді.

Розглянуто механічну систему, рівняння руху якої описуються системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

де $\mathbf{x} \in R^2$, матриці $\mathbf{A}, \mathbf{C}$ – симетричні і додатно визначені, $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(b_1, 0)$, $b_1 > 0$.

Помножимо зліва обидві частини рівняння (5) на обернену матрицю до $\mathbf{A}$, тоді маємо

$$\ddot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

де $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$, $b_{11} > 0$, $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$, $\det \tilde{\mathbf{C}} = \dfrac{\det \mathbf{C}}{\det \mathbf{A}} > 0$.

Характеристичне рівняння системи (6):

$$\lambda^4 + b_{11}\lambda^3 + (c_{11} + c_{22})\lambda^2 + (b_{11}c_{22} - b_{21}c_{12})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0. \tag{7}$$

Розглянуто випадок, коли рівняння (7) має ***різні корені***. Нехай вони дорівнюють $\lambda_1 = \sigma_1 + i\omega_1, \lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_3 = \sigma_2 + i\omega_2, \lambda_4 = \overline{\lambda_3}, \sigma_{1,2} < 0.$

Заміною $\mathbf{y} = \mathbf{S}_1\mathbf{x} + \mathbf{S}_2\dot{\mathbf{x}}$ приведено систему (6) до канонічного вигляду

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}\mathbf{y} = 0, \tag{8}$$

де матриці $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ задаються співвідношеннями

$$s_{12}^1 = \frac{s_{11}^1 c_{12}}{c_{11}}, s_{21}^1 = -\frac{s_{21}^2(\omega_1^2 + \sigma_1^2 - c_{11})}{2\sigma_2}, s_{22}^1 = \frac{s_{21}^2 c_{12}}{2\sigma_2},$$

$$s_{11}^2 = \frac{s_{11}^1(\omega_2^2 + 4\sigma_1^2 + 4\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - c_{11})}{2c_{11}\sigma_1}, s_{12}^2 = -\frac{s_{11}^1 c_{12}}{2c_{11}\sigma_1}, s_{22}^2 = 0,$$

s_{11}^1, s_{21}^2 – деякі ненульові сталі, а матриці $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 & 0 \\ 0 & 2\sigma_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix}$.

Для системи (8) побудовано функцію Ляпунова у вигляді

$$V = V_1 + V_2,$$

де $V_1 = (\omega_1^2 + \sigma_1^2)y_1^2 - 2\sigma_1 y_1 y_2 + y_2^2, V_2 = (\omega_2^2 + \sigma_2^2)y_3^2 - 2\sigma_2 y_3 y_4 + y_4^2.$

Її похідна за часом у силу системи (8) має вигляд

$$\dot{V} = 2\sigma_1 V_1 + 2\sigma_2 V_2.$$

Згідно з теоремою Румянцева – Озиранера про стійкість за частиною змінних (за умови, що розв'язок повної системи є z -продовжуваним) маємо рівномірну асимптотичну стійкість за частиною змінних для повної системи.

Розглянуто також випадок, коли рівняння (7) має ***кратні корені***. Нехай вони дорівнюють $\lambda_{1,2} = \sigma + i\omega = \lambda, \lambda_{3,4} = \overline{\lambda}_{1,2} = \overline{\lambda}, \sigma < 0.$

Систему (6) переписано у вигляді системи ДР першого порядку $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$,

де $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_{11} & -c_{12} & -b_{11} & 0 \\ -c_{12} & -c_{22} & -b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$

Виконано перехід до комплексних змінних за правилом $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{z}$, де $\mathbf{S}$ – матриця переходу, яка складається з двох власних векторів $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ і двох кореневих векторів $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ матриці $\mathbf{A}$, а $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2})^T$.

Виконуючи певні обчислення, отримано

$$\mathbf{a}_1 = \left(p_1, -\frac{p_1(b_{21}\lambda + c_{12})}{\lambda^2 + c_{22}}, p_1\lambda, -\frac{p_1\lambda(b_{21}\lambda + c_{12})}{\lambda^2 + c_{22}} \right)^T,$$

де p_1 – довільна ненульова стала. Власний вектор $\mathbf{a}_2$ отримується із вектора $\mathbf{a}_1$ шляхом комплексного спряження.

Для кореневого вектора із системи $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$ маємо

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{(b_{11} + 2\lambda)p_1 + q_2 c_{12}}{b_{11}\lambda + \lambda^2 + c_{11}} \\ q_2 \\ -\dfrac{[(b_{11} + 2\lambda)p_1 + q_2 c_{12}]\lambda}{b_{11}\lambda + \lambda^2 + c_{11}} + p_1 \\ \lambda q_2 - \dfrac{(b_{21}\lambda + c_{12})p_1}{\lambda^2 + c_{22}} \end{pmatrix},$$

де q_2 – довільна стала. Кореневий вектор $\mathbf{b}_2$ отримується із вектора $\mathbf{b}_1$ шляхом комплексного спряження.

У комплексних змінних система (6) переписана у вигляді

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}\mathbf{z}, \tag{9}$$

де $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$

Для системи (9) функція Ляпунова має вигляд

$$V = \alpha_1 z_1 \overline{z_1} + \alpha_2 z_2 \overline{z_2} + \beta(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2),$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ – дійсні ненульові сталі.

Похідна функції Ляпунова за часом у силу системи (9):

$$\dot{V} = \alpha_1(\lambda + \overline{\lambda}) z_1 \overline{z_1} + [\beta(\lambda + \overline{\lambda}) + \alpha_1](z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) + (\alpha_2(\lambda + \overline{\lambda}) + 2\beta) z_2 \overline{z_2}.$$

Зробивши зворотний перехід до дійсних змінних, не важко переконатися, що у припущенні $\alpha_{1,2} > 0, \beta < \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ згідно з критерієм Сильвестра маємо: ФЛ – додатно визначена квадратична форма, а $\dot{V}$ – від'ємно визначена квадратична форма своїх змінних. Згідно з теоремою Румянцева – Озиранера маємо рівномірну асимптотичну стійкість за частиною змінних для повної системи.

Одержані результати застосовано у пункті 3.2.2 для задачі про стійкість коливань маятникового осцилятора, до якого приєднано динамічний абсорбер.

У підрозділі 3.3 розглянуто задачу стабілізації коливань подвійного фізичного маятника шляхом приєднання до нього динамічного поглинача коливань (ДПК).

Розглянуто подвійний фізичний маятник, який має нерухому точку O і знаходиться у гравітаційному полі (Рис. 1). Припускається, що центр мас першої ланки розташований у C_1. У точці O_1, яка розташована на осі OC_1, прикріплено другу ланку. Точка C_2 – центр мас другої ланки. У першій ланці прикріплено динамічний поглинач коливань з жорсткістю k і коефіцієнтом в'язкого тертя h. Абсорбер коливається вздовж осі O_2x', яка ортогональна до прямої OO_1 і перетинає її у точці O_2. Шарніри у точках O, O_1 передбачаються без тертя.

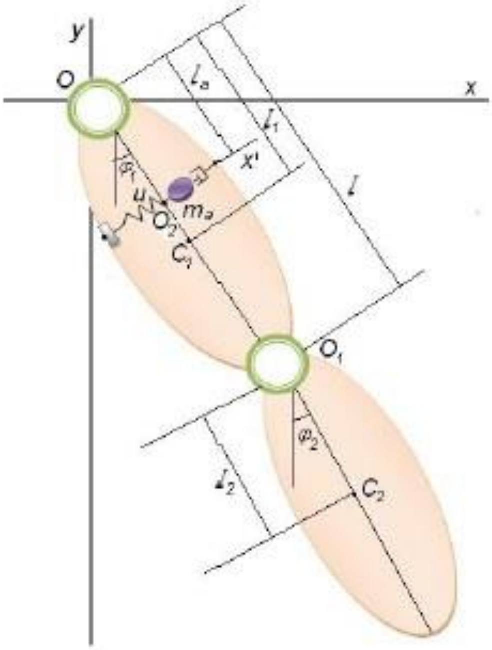

Рис. 1. Подвійний фізичний маятник з ДПК у першій ланці

Кінетична енергія даної системи дорівнює

$$K = K_p + K_a,$$

де K_p, K_a – кінетичні енергії первинної системи (маятник без поглинача) і абсорбера;

$$K_p = \frac{1}{2}[J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l^2\dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)],\quad K_a = \frac{1}{2}m_a[\dot{\varphi}_1^2(l_a^2 + u^2) + 2l_a\dot{\varphi}_1\dot{u} + \dot{u}^2],$$

де J_1, J_2 – моменти інерції першої і другої ланок маятника відносно полюсів O, O_1 відповідно, m_1, m_2, m_a – маси першої і другої ланок і поглинача відповідно, u – подовження пружини, φ_1, φ_2 – кути відхилення ланок маятника від вертикальної осі, l – довжина першої ланки, l_1, l_2 – відстані від точок підвісу кожної із ланок до центру мас, l_a – відстань OO_2.

Потенціальна енергія записана у вигляді

$$\Pi = -g\cos\varphi_1(m_a l_a + m_1 l_1 + m_2 l) - m_2 l_2 g\cos\varphi_2 + m_a g u\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}ku^2.$$

Рівняння руху подані у вигляді рівнянь Лагранжа другого роду

$$\begin{gathered}(J_1+m_2l^2+m_al_a^2)\ddot{\varphi}_1+m_2ll_2[\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)]+\\+m_al_a\ddot{u}+g\sin\varphi_1(m_1l_1+m_2l+m_al_a)+m_agu\cos\varphi_1=0,\\J_2\ddot{\varphi}_2+m_2ll_2\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)-m_2ll_2\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)+m_2gl_2\sin\varphi_2=0,\\m_al_a\ddot{\varphi}_1+m_a\ddot{u}+m_ag\sin\varphi_1+ku=-h\dot{u}.\end{gathered}\qquad(10)$$

Отримано умови стійкості нижнього стану рівноваги системи (10), тобто розв'язку $\varphi_1=0,\varphi_2=0,u=0,\dot{\varphi}_1=0,\dot{\varphi}_2=0,\dot{u}=0$.

Введено безрозмірні параметри і час за формулами

$$\tilde{m}_a=\frac{m_a}{m_1},\ \tilde{m}_2=\frac{m_2}{m_1},\ \tilde{l}_a=\frac{l_a}{l_1},\ \tilde{l}=\frac{l}{l_1},\ \tilde{l}_2=\frac{l_2}{l_1},\ \tau=\sqrt{\frac{g}{l_1}}t,\ \tilde{k}=\frac{kl_1}{m_1g},\ \tilde{h}=\frac{h}{m_1},\ \tilde{u}=\frac{u}{l_1}$$

та записано лінійну апроксимацію системи (10)

$$\begin{gathered}(J_1+\tilde{m}_2\tilde{l}^2+\tilde{m}_a\tilde{l}_a^2)\tilde{\varphi}_1''+\tilde{m}_2\tilde{l}\tilde{l}_2\tilde{\varphi}_2''+\tilde{m}_a\tilde{l}_a\tilde{u}''+(1+\tilde{m}_2\tilde{l}+\tilde{m}_a\tilde{l}_a)\tilde{\varphi}_1+\tilde{m}_a\tilde{u}=0,\\\tilde{J}_2\tilde{\varphi}_2''+\tilde{m}_2\tilde{l}\tilde{l}_2\tilde{\varphi}_1+\tilde{m}_2\tilde{l}_2\tilde{\varphi}_2=0,\\\tilde{m}_a\tilde{l}_a\tilde{\varphi}_1''+\tilde{m}_a\tilde{u}''+\tilde{m}_a\tilde{\varphi}_1+\tilde{k}\tilde{u}=-h\tilde{u}'.\end{gathered}$$

У подальшому для простоти запису хвилю зверху опущено. Для дослідження руху на стійкість застосовано теорему про стійкість дисипативної системи з частковою дисипацією енергії[2].

У результаті отримано необхідну і достатню умову асимптотичної стійкості руху системи (10)

$$(m_2l_2+m_2^2ll_2)l_a^2-(J_1m_2l_2+m_2^2l^2l_2+m_2lJ_2+J_2)l_a+J_1J_2+m_2l^2J_2-m_2^2l^2l_2^2\neq0.\qquad(11)$$

Тобто, обираючи значення параметра l_a таким, щоб виконувалася умова (11), можна домогтися експоненціальної стійкості руху подвійного маятника з доданою масою.

Також розглянуто випадок, коли поглинач коливань розташований у другій ланці маятника. У цій ситуації під час вибору безрозмірних параметрів необхідно замінити m_1 на m_2, l_1 на l_2. Тоді необхідну і достатню умову асимптотичної стійкості руху системи (10) можна подати у вигляді

$$\begin{gathered}l_a^3m_a[(4l^2+4J_1+2l)m_a+2l+2m_1l_1]-l_a^2[(6l^2+2lJ_2)-(l-2lJ_2-2m_1l_1J_2+6J_1+6l^2)m_a-\\-l-m_1l_1]+l_a[(2l^2m_a^2+2J_1m_a+2m_al^2)J_2-10m_al^2+2J_1+2l^2]-(m_al+m_1l_1+l)J_2^2+\\+(2J_1+2m_al^2+2l^2)J_2-4l^2\neq0\end{gathered}\qquad(12)$$

Аналогічно першому випадку, обираючи l_a таким, щоб виконувалася умова (12), ми отримуємо асимптотичну стійкість розв'язку, що досліджується.

Результати третього розділу опубліковано у роботах [4], [5], [8 – 10].

У четвертому розділі досліджено вплив структури сил на стійкість руху лінійної механічної системи з двома ступенями свободи.

Розглянуто лінійний диференціальний оператор

$$\mathbf{L}=\frac{d}{dt^2}\tilde{\mathbf{A}}+\frac{d}{dt}\tilde{\mathbf{B}}+\tilde{\mathbf{C}},$$

[2] Пузырев В.Е. *Влияние сил вязкого трения на устойчивость стационарных движений механических систем при наличии частичной диссипации энергии* // Докл. НАН Украины. – 2004. – № 8. – С. 61 – 65.

де $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}$ – дійсні квадратні матриці другого порядку, $\tilde{\mathbf{A}}$ – додатно визначена. Матриці $\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}$ розкладено на симетричну і кососиметричну (з нульовою головною діагоналлю) складові: $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{G} (\mathbf{B} \geq 0)$, $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{P}$ і записано рівняння

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in R^2, \tag{13}$$

яке можна розглядати як рівняння руху лінеаризованої механічної системи, що знаходиться під дією дисипативної, гіроскопічної, потенціальної і циркуляційної сил (ДС, ГС, ПС і ЦС відповідно).

Як відомо, завжди можна вказати невироджене перетворення $\mathbf{x} = \mathbf{\Lambda}\, \tilde{\mathbf{x}}$ таке, що $\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{A} \mathbf{\Lambda} = \mathbf{E}, \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(c_1, c_2)$, де $\mathbf{E}$ – одинична матриця. Структура матриць $\mathbf{G}, \mathbf{P}$ не зміниться, тому, не обмежуючи спільності, вважається, що

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{E},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix},\ \mathbf{G} = g\mathbf{J},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},\ \mathbf{P} = p\mathbf{J},\ \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен для системи (14) має вигляд

$$f(\lambda) = \lambda^4 + (b_{11} + b_{22})\lambda^3 + (c_1 + c_2 + g^2 + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\lambda^2 + (b_{11}c_2 + c_1 b_{22})\lambda + c_1 c_2 + p^2. \tag{14}$$

Досліджено вплив структури сил на стійкість руху заданої системи, а для деяких випадків отримано оцінки для власних значень (ВЗ) – коренів характеристичного рівняння $f(\lambda) = 0$.

У випадку відсутності циркуляційної сили ($p = 0$) для того, щоб усі ВЗ мали від'ємні дійсні частини, згідно з критерієм Рауса – Гурвіца, необхідна і достатня додатність коефіцієнтів характеристичного многочлена і виразу

$$\Delta_3^0 = b_{11}b_{22}(c_1 - c_2)^2 + (c_1 b_{22} + c_2 b_{11})(b_{11} + b_{22})(g^2 + b_{11}b_{22} - b_{12}^2).$$

Якщо механічна система за відсутності дисипативних і гіроскопічних сил стійка ($c_1 > 0,\ c_2 > 0$), то легко бачити, що усі коефіцієнти многочлена (14) додатні ($b_{12}^2 \leq b_{11}b_{22}$). Очевидною є і невід'ємність визначника Δ_3^0. Однак є наступні можливості для того, щоб він дорівнював нулю:

- Якщо ГС відсутня, а дисипація енергії є частковою (функція Релея знакопостійна), то система (13) є стійкою неасимптотично;
- Якщо ГС не дорівнює нулю, або функція Релея додатно визначена, то будь-який рух системи (13) стійкий асимптотично;
- Якщо механічна система за відсутності ДС і ГС нестійка, і ступінь нестійкості потенціальної системи є непарною ($c_1 c_2 < 0$), то вільний член характеристичного многочлена від'ємний. Якщо ж парною ($c_1 < 0,\ c_2 < 0$), то коефіцієнт при λ у (14) від'ємний. Як наслідок, у обох випадках хоча б одне ВЗ має додатну дійсну частину. Рух системи нестійкий за будь-яких гіроскопічних і дисипативних сил.

Введені позначення $b_{11} = 2b\delta_1, b_{22} = 2b(1-\delta_1), b_{12} = 2b\delta_2\sqrt{\delta_1(1-\delta_1)},\ 0 \leq \delta_1 \leq 1,\ -1 \leq \delta_2 \leq 1$ і безрозмірні параметри і час за формулами $b = \omega_0 \tilde{b},\ g = \omega_0 \tilde{g},\ c_2 = \omega_0^2\ \tilde{c}_2, \lambda = \omega_0 \tilde{\lambda}, t = \ \tilde{t} / \omega_0$. Для зручності хвилю зверху надалі опущено. Позначено $v = \max(b, g)$ і розглянуто випадок, коли $v \gg 1$. За допомогою теорії збурень знайдені наступні оцінки ВЗ:

$$\lambda_{1,2} \approx -\frac{b[c_1(1-\delta_1) + c_2\delta_1] \pm R}{b^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2) + g^2},$$

$$\lambda_{3,4} \approx -(b \pm R\sqrt{D_1}) + R^{-1}(\sigma_2)_{3,4},$$

де $R=\sqrt{b^2c_1^2(1-\delta_1)^2-2c_1c_2[b^2\delta_1(1-\delta_1)(1-2\delta_2^2)+2g^2]+b^2c_2^2\delta_1^2}$,

$(\sigma_2)_{3,4}=-\dfrac{\sigma_0(1+c_2)+b_1(1-\delta_1+\delta_1c_2)}{4\sigma_0^2+3b_1\sigma_0+2[b_1^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2)+g_1^2]}$,

$(\sigma_0)_{3,4}=-b_1\pm\sqrt{D_1}$, $D_1=b_1^2[1-4\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2)]-g_1^2$.

Зазначимо, що $\lambda_{1,2}$ мають порядок $1/\nu$.

Максимальний характеристичний показник для системи (13) (при $p=0$) не перевищує виразу $-b[c_1(1-\delta_1)+c_2\delta_1]/[b^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2)+g^2]$, що при $b\geq g$ має порядок b^{-1}, у супротивному випадку – порядок b/g^2. Тобто при заданих ПС системи додавання великих ДС і ГС хоча і гарантує асимптотичну стійкість, але забезпечує слабку швидкість наближення збурених рухів до нуля, тим меншу, чим більше $\max(b,g)$.

Аналогічним чином розглянуто випадок врахування впливу циркуляційної сили. Знайдені оцінки ВЗ у припущенні, що величина g не перевершує порядку $p^{1/2}$ і у випадку, коли переважаючою є ГС (у випадках, коли переважаючою є ПС, ДС або дві будь-які сили, техніка розрахунку така ж).

У підрозділі 4.4 описано випадок відсутності гіроскопічної сили.

Розглянуто механічну систему, яка знаходиться під дією ДС, ПС і ЦС. Відповідні матриці мають вигляд $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix},\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_1 & 0\\ 0 & c_2\end{pmatrix},\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & p\\ -p & 0\end{pmatrix}$.

Припускається, що $\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{E}$. Рівняння руху системи записані у вигляді

$$\ddot{x}_1+b_1\dot{x}_1+c_1x_1+px_2=0,\quad \ddot{x}_2+b_2\dot{x}_2-px_1+c_2x_2=0. \tag{15}$$

Введено позначення

$$b_1=2b\delta_1,\, b_2=2b(1-\delta_1),\, c_1=2c\delta_2,\, c_2=2c(1-\delta_2),$$

де $b>0, c>0, 0<\delta_1<1, 0\leq\delta_2\leq1.$

З'ясовано, що якщо значення параметрів системи такі, що виконана умова

$$p^2<4\delta_1(1-\delta_1)[(2\delta_2-1)^2c^2+2(\delta_1-2\delta_1\delta_2+\delta_2)b^2c],$$

то має місце асимптотична стійкість руху системи (15).

У рамках відсутності гіроскопічної сили досліджені випадки малої дисипації та врахування впливу потенціальної сили.

У випадку малої дисипації характеристичне рівняння системи (15) має вигляд

$$\lambda^4+2c\lambda^2+4c^2\delta_2(1-\delta_2)+p^2=0.$$

Воно є біквадратним по λ. Його дискримінант дорівнює $\dfrac{D}{4}=c^2(2\delta_2-1)^2-p^2.$

Коли $D>0$ із теореми Вієта випливає, що квадратне рівняння відносно λ^2 має два різних від'ємних кореня, а отже для λ мають місце дві пари чисто уявних коренів. Як наслідок, рух заданої системи буде стійким неасимптотично. При $D=0$ має місце випадок кратних чисто уявних коренів з однією групою розв'язків. Жорданова клітина для системи має другий порядок, що означає флатеру нестійкість розв'язку системи. Якщо ж $D<0$, то знайдеться хоча б одна додатна дійсна частина λ, що спричиняє дивергентну нестійкість руху, що досліджується.

Методами теорії збурень знайдені оцінки ВЗ, що дає змогу оцінити швидкість загасання збурених рухів системи.

Аналогічним чином розглянуто випадок врахування впливу потенціальної сили.

У підрозділі 4.5 отриманий результат проілюстровано на прикладі важкого гіроскопа, що знаходиться під дією демпфуючого моменту.

Результати розділу 4 опубліковано у роботах [1], [7].

У п'ятому розділі розглянуто задачу стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. Також досліджено критичний за Ляпуновим випадок, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення має пару чисто уявних коренів.

Розглянуто рівняння руху важкого твердого тіла, яке знаходиться під дією демпфуючого моменту $\mathbf{M} = -k(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0)$:

$$\mathbf{J}\,\dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{J}\,\tilde{\boldsymbol{\omega}} + P\mathbf{s} \times \mathbf{v} = \mathbf{M}, \quad \dot{\mathbf{v}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{v} = 0,$$

де $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор інерції, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ – вектор кутової швидкості тіла у зв'язаній системі координат, $\mathbf{v}$ – орт вертикалі, $\mathbf{s}$ – вектор, спрямований із нерухомої точки до центру мас тіла, P – вага тіла, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 = (0, 0, \omega_0)^T$, ω_0 – константа; верхній індекс T означає транспонування.

У якості незбуреного руху обрано рівномірні обертання тіла навколо головної осі, що містить центр мас

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)^T, \quad \mathbf{v} = (0, 0, 1)^T.$$

Відповідні рівняння у варіаціях зводяться до системи

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{B} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \mathbf{P})\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

де $\mathbf{x} = (\tilde{v}_2, \sqrt{a}\tilde{v}_1)^T$, $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(1,1)$, $\mathbf{B} = \mathrm{diag}(\varkappa, \frac{\varkappa}{a})$, $\mathbf{G} = \frac{b}{\sqrt{a}}\boldsymbol{\Lambda}$, $\mathbf{C} = \mathrm{diag}(1 - b + \mu, (a - b + \mu)/a)$,

$\mathbf{P} = \frac{\varkappa}{\sqrt{a}}\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, значком «тильда» позначені збурення.

Тут використані наступні позначення

$$a = \frac{J_2}{J_1}, \quad b = \frac{J_1 + J_2 - J_3}{J_1}, \quad \mu = \frac{P|\mathbf{s}|e}{J_1\omega_0^2}, \quad \varkappa = \frac{k}{J_1\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t.$$

Отримано необхідні і достатні умови стійкості рівномірних обертань важкого гіроскопа навколо головної осі, що містить центр мас. Ці умови мають вигляд

$$\varkappa^2 + 2a + b^2 - (a+1)(b+\mu) > 0, \quad (a + 1 - 2\mu) > 0; \quad (b - 1 + \mu)(b - a + \mu) + \varkappa^2 > 0;$$
$$\Delta_3 = -\mu\varkappa^2\{-\mu(a-1)^2 + 2(a+1)[\varkappa^2 + b^2]\} > 0. \qquad (16)$$

У випадку висячого гіроскопа ($\mu < 0$) з'ясовано, що демпфуючий момент має стабілізуючий вплив на рух твердого тіла: стійкі у першому наближенні обертання завжди стають асимптотично стійкими, а нестійкі – при додатковому обмеженні знизу на величину коефіцієнта демпфування

$$\varkappa > [(\mu_1 - \mu)(\mu - \mu_2)]^{1/2},$$

де $\mu_1 = \min(a, 1) - b$, $\mu_2 = \max(1, a) - b$.

Для випрямленого гіроскопа ($\mu > 0$) умови (16) переписано у вигляді

$$\varkappa_0 = \max(\varkappa_1, \varkappa_2, 0) < \varkappa < \varkappa_3, \quad \frac{2b^2(a+1)}{(a-1)^2} < \mu < \frac{2(a - ab - b)}{a+1},$$
$$\frac{2a(a-1)^2 - 2b^2(a+1)^2 - 2b(a-1)(a^2-1)}{(a+1)(a-1)^2} > 0, \qquad (17)$$

де $\varkappa_1 = \sqrt{(a+1)(\mu+b) - 2a - b^2}$, $\varkappa_2 = \sqrt{-\mu^2 + (a-2b+1)\mu - (b-a)(b-1)}$, $\varkappa_3 = \sqrt{\dfrac{(a-1)^2\mu}{2(a+1)} - b^2}$.

Остання із цих умов накладає обмеження на розподіл мас у тілі і є необхідною для асимптотичної стійкості. Друга умова визначає діапазон допустимих значень кутової швидкості обертання. Перша умова визначає інтервал значень ($\varkappa_0, \varkappa_3$) коефіцієнта $\varkappa$, які переводять стійкі (неасимптотично) обертання випрямленого важкого гіроскопа у асимптотично стійкі.

Після проведеного аналізу умови (17) записані наступним чином:

$$b < b_1 = \frac{|1-a|}{a+1}\min(a,1), \quad \mu_1 = \frac{2b^2(a+1)}{(a-1)^2} < \mu < \frac{2(a-ab-b)}{a+1},$$

$$\sqrt{-\mu^2 + (a-2b+1)\mu - (b-a)(b-1)} < \varkappa < \sqrt{\frac{(a-1)^2\mu}{2(a+1)} - b^2}. \tag{18}$$

Нерівності (18) являють собою умови асимптотичної стійкості руху за першим наближенням, тобто умови того, що усі корені характеристичного рівняння системи лінійного наближення мають від'ємні дійсні частини. Ці умови є необхідними і достатніми у тому розумінні, що зміна будь-якого із знаків нерівності на протилежний гарантує наявність додатної дійсної частини у власного значення λ і експоненціальне зростання збурених розв'язків.

У підрозділі 5.3 проведено оцінку впливу демпфуючого моменту на стійкість руху заданої системи. З'ясовано, що цей вплив на стійкість обертань випрямленого гіроскопа в основному негативний, тобто у більшості випадків стійкість обертань руйнується. Для симетричного гіроскопа дисипація енергії «руйнує» стійкість будь-яких обертань випрямленого гіроскопа.

Підрозділ 5.4 присвячено дослідженню критичного за Ляпуновим випадку, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення, яка описує рух випрямленого гіроскопа, має пару чисто уявних коренів. Це можливо у випадку, коли

$$\varkappa = \sqrt{\frac{(a-1)^2\mu}{2(a+1)} - b^2}.$$

Перейдемо до збурень за формулами $\omega_1 = x_1,\ \omega_2 = x_2,\ \nu_1 = x_3,\ \nu_2 = x_4,\ \omega_3 = 1 + x_5$.

Вираз для ν_3 представлено у вигляді

$$\nu_3 = 1 - F_1(\nu_1, \nu_2) + F_2(\nu_1, \nu_2),$$

де $F_1(\nu_1,\nu_2) = (\nu_1^2 + \nu_2^2)/2$, $F_2(\nu_1,\nu_2) = \sqrt{1-\nu_1^2-\nu_2^2} - 1 + (\nu_1^2+\nu_2^2)/2$.

Вихідна система диференціальних рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\varkappa_2 x_1 + \mu x_4 + (b-1)x_2 x_5,\\
\dot{x}_2 &= -\frac{\varkappa_2}{a}x_2 - \frac{\mu}{a}x_3 + \frac{a-b}{a}x_1 x_5,\\
\dot{x}_3 &= -x_2 + x_4 + x_4 x_5 + x_2 F_1(x_3,x_4) - x_2 F_2(x_3,x_4),\\
\dot{x}_4 &= x_1 - x_3 - x_3 x_5 - x_1 F_1(x_3,x_4) + x_1 F_2(x_3,x_4),\\
\dot{x}_5 &= -\frac{\varkappa_2}{1-b+a}x_5 + F_3(x_1,x_2),
\end{aligned} \tag{19}$$

де $F_3(x_1,x_2) = (1-a)x_1 x_2/(1-b+a)$.

Досліджується на стійкість нульовий розв'язок системи (19).

Виконаємо перетворення $\mathbf{x}=\mathbf{S}\mathbf{z}$, тоді система (19) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= \mathbf{J}_1\mathbf{z}+x_5\mathbf{C}\mathbf{z}+\mathbf{D}\mathbf{z}(\Phi_1(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}})+\Phi_2(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}})),\\ \overline{\mathbf{z}}' &= \overline{\mathbf{J}}_1\overline{\mathbf{z}}+x_5\overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{z}}+\overline{\mathbf{D}}\overline{\mathbf{z}}(\Phi_1(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}})+\Phi_2(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}})),\\ x_5' &= \sigma_3 x_5+\Phi_3(\mathbf{z},\overline{\mathbf{z}}), \end{aligned} \tag{20}$$

де $\mathbf{S}=(s_{lj})\ (l,j=\overline{1,4})$ – матриця перетворення, яка визначається із рівняння

$$\mathbf{AS}-\mathbf{SJ}=0.$$

Обрано функцію Ляпунова у вигляді

$$V(z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2},x_5)=\alpha_1 z_1\overline{z_1}+\alpha_2 z_2\overline{z_2}+\alpha_3 x_5^2+z_2(k_{12}z_1^2+k_{11}z_1\overline{z_1}+k_{10}\overline{z_1}^2)+\overline{z_2}(k_{22}z_1^2+k_{21}z_1\overline{z_1}+k_{20}\overline{z_1}^2)+$$
$$+x_5(k_{32}z_1^2+k_{31}z_1\overline{z_1}+k_{30}\overline{z_1}^2)+V^{(4)}(z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2},x_5),$$

де α_l – деякі дійсні, а $k_{lj}\ (l=\overline{1,3},\ j=\overline{0,2})$ – комплексні сталі.

$$V'=V'^{(2)}(z_2,\overline{z_2},x_5)+Gz_1^2\overline{z_1}^2+o(V_0').$$

Як і раніше сталу G визначено з умови $V'^{(4)}(z_1,\overline{z_1})=Gz_1^2\overline{z_1}^2$. Коефіцієнти k_{lj} знайдено з рівності $V'^{(3)}(z_2,\overline{z_2},x_5)=0$.

Вираз для G представлено у вигляді $G=\alpha_1 G_{\alpha_1}+\alpha_2 G_{\alpha_2}+\alpha_3 G_{\alpha_3}$. При достатньо малих значеннях α_2,α_3 знак G співпадає зі знаком $\alpha_1 G_{\alpha_1}$. Без обмеження спільності вважаємо, що $\alpha_1=1$. Для G_{α_1} знайдено вираз

$$G_{\alpha_1}=8\mu s_{31}^2(a-1)^3(a+2b-1)(\mu-\mu_1)g_1(a,b,\mu)\ g_2(a,b,\mu)\ g_3(a,b,\mu),$$

де

$$g_1=[(128a+128)b^4-(280a^2+528a+280)b^3+(148a^3+492a^2+492a+148)b^2+(7a^4-72a^3-126a^2-72a+7)b-$$
$$-9a^5-5a^4+14a^3+14a^2 5a-9]\mu-(56a^2+112a+56)b^4+(158a^3+474a^2+474a+158)b^3-(88a^4+384a^3+592a^2+$$
$$+384a+88)b^2+(-10a^5+22a^4+116a^3+116a^2+22a-10)b+4a^6+8a^5-4a^4-16a^3-4a^2+8a+4,$$
$$g_2=-(3a^4+4a^3-14a^2+4a+3)\mu+(a+1)^2\times[8(a+1)b^2+4(a-1)^2b+2(a^3-a^2-a+1)],$$
$$g_3=(-34a+32ab-15+32b-16b^2-15a^2)\mu+2(a+1)(2a-b+2)(2a-3b+2).$$

Після проведення аналізу даного виразу на знак отримано величину

$$\mu_\star=-\frac{g_{10}(a,b)}{g_{11}(a,b)},$$

де $g_{11}=128b^4(1+a)-8b^3(35a^2+66a+35)+4b^2(a+1)(37a^2+86a+37)+b(7a^4-72a^3-126a^2-72a+7)-$ $-(a+1)(a-1)^2(9a^2+14a+9)$, $g_{10}=(a+1)^2(2a+2-b)[56b^3-46b^2(a+1)4b(a^2-6a+1)+2(1-a)(a+1)^2]$.

З’ясовано, що при $\mu>\mu_\star$ маємо $G_{\alpha_1}<0$. Отже при $\alpha_2>0,\alpha_3>0$ функція $V(z_1,\overline{z_1},z_2,\overline{z_2},x_5)$ є додатно визначеною, а V' – від'ємно визначена. Таким чином, нульовий розв'язок системи (20), а отже і системи (19), асимптотично стійкий (друга теорема Ляпунова про стійкість руху).

Якщо $\mu<\mu_\star$, то $G_{\alpha_1}>0$. Тоді при $\alpha_2<0,\alpha_3<0$ функція V' – додатно визначена, а сама функція V – знакозмінна. Отже, усі умови першої теореми Ляпунова про нестійкість руху виконані і нульовий розв'язок системи (19) нестійкий.

У підрозділі 5.5 отриманий результат проілюстровано на чисельному прикладі.

Результати п’ятого розділу опубліковані у роботах [2], [3].

ВИСНОВКИ

У дисертації розв'язано наукове завдання конструктивної побудови функцій Ляпунова для класів неконсервативних нелінійних механічних систем у критичних випадках із застосуванням до дослідження стійкості руху деяких систем твердих тіл. Перерахуємо найбільш важливі наукові результати, отримані у дисертації.

1. Запропоновано спосіб побудови функції Ляпунова для системи звичайних диференціальних рівнянь порядку $2m + l$, матриця лінійної частини якої має m пар чисто уявних і l власних значень, які належать відкритій лівій комплексній півплощині, а нелінійна частина системи має спеціальний вигляд. Даний підхід видається більш простим, ніж відомий метод зведення.
2. Уперше сформульовано і доведено дві теореми, що дозволяють конструктивно встановити асимптотичну стійкість або нестійкість тривіального розв'язку системи зазначеного вище вигляду.
3. Досліджено задачу про стійкість стану рівноваги подвійного математичного маятника з динамічним поглиначем коливань. Показано, що введення останнього до системи робить нижній стан рівноваги асимптотично стійким.
4. Також уперше розв'язано задачу стабілізації стану рівноваги маятникового осцилятора за допомогою додавання до нього динамічного абсорбера. З'ясовано, що додавання абсорбера у даному випадку веде до рівномірної асимптотичної стійкості за частиною змінних.
5. У разі подвійного фізичного маятника показано, що приєднання абсорбера забезпечує експоненціальну стійкість руху. Описані основні властивості оптимальної конфігурації абсорбера.
6. У дисертаційній роботі отримано оцінки власних значень лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що знаходиться під дією сил різних типів.
7. Уперше отримано умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа, що знаходиться під дією демпфуючого моменту спеціального вигляду. Також проведено оцінку впливу цього моменту на стійкість руху гіроскопа.
8. Уперше досліджено критичний за Ляпуновим випадок, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення, яка описує рух випрямленого гіроскопа, має пару чисто уявних коренів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Пузырев В.Е., Топчий Н.В. *Оценка собственных значений линейной механической системы с двумя степенями свободы* // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 132 – 140.
2. Пузырев В.Е., Савченко Н.В. *Устойчивость равномерных вращений несимметричного гироскопа вокруг главной оси, несущей центр масс* // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 168 – 176.
3. Пузырев В.Е., Савченко Н.В. *Критический случай устойчивости равномерных вращений несимметричного гироскопа, находящегося под*

действием демпфирующего момента // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 124 – 134.
4. Пузырев В.Е., Савченко Н.В. *Асимптотическая устойчивость положения равновесия двойного маятника с присоединенной массой* // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 75 – 86.
5. Savchenko N., Puzyrev V. *Using dynamic vibration absorber for stabilization of a double pendulum oscillations*//Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2014. – Volume 14, Number 4. – pp. 402 – 409.
6. Пузырев В.Е., Камынина Е.В., Савченко Н.В. *Использование демпфера пассивного типа для стабилизации малых колебаний маятника переменной длины* // Вісник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. – 2015. – № 1 – 2. – С. 126 – 131.
7. Пузырев В.Е. О собственных значениях линейной механической системы с двумя степенями свободы / В.Е. Пузырев, Н.В. Савченко // Устойчивость, управление и динамика твердого тела // Тезисы докладов XI Международной конференции (8 – 12 июня 2011 года). – Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАНУ, 2011. – С. 105.
8. Савченко Н.В. Построение функции Ляпунова для модельной системы в критическом случае чисто мнимых корней/ Н.В. Савченко, В.Е. Пузырев// Dynamical system modelling and stability investigation: XVII International Conference: Modelling and stability: Abstracts o conf. reports, Kiev, Ukraine, 27 – 29 may / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics – Київ: ДП Інформ.- аналіт. агенство, 2015. – С. 47.
9. Савченко Н.В. Асимптотична стійкість стану рівноваги подвійного маятника з приєднаною масою / Н.В. Савченко // International Conference of Young Mathematicians. June 3 – 6, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. – С. 60.
10. Савченко Н.В. Використання динамічного поглинача коливань для стабілізації положення рівноваги подвійного математичного маятника / Н.В. Савченко // International Conference of Young Mathematicians. June 7 – 10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. – Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. – С. 109.

АНОТАЦІЇ

Савченко Н.В. Коливання та стійкість руху деяких неконсервативних механічних систем. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.01 «Теоретична механіка» (113 – Прикладна математика). – Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, 2017.

Дисертаційну роботу присвячено актуальним проблемам сучасної теоретичної механіки, що виникають при дослідженні стійкості руху механічних систем, які описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями.

У дисертації розв'язано завдання конструктивної побудови функцій Ляпунова для класів неконсервативних нелінійних механічних систем у критичних випадках із застосуванням до дослідження стійкості руху деяких систем твердих тіл. Запропоновано спосіб побудови функції Ляпунова для системи звичайних диференціальних рівнянь порядку $2m + l$, матриця лінійної частини якої має m пар чисто уявних і l власних значень, які належать відкритій лівій комплексній півплощині, а нелінійна частина системи має спеціальний вигляд. Даний підхід видається більш простим, ніж відомий метод зведення. У роботі уперше сформульовані і доведені дві теореми, що дозволяють конструктивно встановити асимптотичну стійкість або нестійкість розв'язку системи зазначеного виду. У якості прикладу досліджено задачу про стійкість стану рівноваги подвійного математичного маятника з динамічним поглиначем коливань. Розв'язано задачу стабілізації стану рівноваги маятникового осцилятора за допомогою додавання до нього лінійного динамічного абсорбера пасивного типу. З'ясовано, що додавання абсорбера у даному випадку веде до рівномірної асимптотичної стійкості за частиною змінних. У разі подвійного фізичного маятника показано, що приєднання динамічного поглинача коливань забезпечує експоненціальну стійкість руху. Також розв'язано задачу стійкості руху лінійної механічної системи, що знаходиться під дією структури сил. Знайдені оцінки власних значень для конкретних випадків, що дає змогу оцінити швидкість загасання збурених рухів системи. Отримано необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. Також досліджено критичний за Ляпуновим випадок, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення має пару чисто уявних коренів.

Ключові слова: асимптотична стійкість, прямий метод Ляпунова, функція Ляпунова, структура сил, рівномірна асимптотична стійкість за частиною змінних, демпфуючий момент, рівномірні обертання, критичний випадок, демпфер пасивного типу, власні значення, швидкість загасання коливань, подвійний маятник, маятниковий осцилятор.

Савченко Н.В. Колебания и устойчивость движения некоторых неконсервативных механических систем. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.02.01 «Теоретическая механика» (113 - Прикладная математика). – Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Славянск, 2017.

Диссертационная работа посвящена актуальным проблемам современной теоретической механики, которые возникают при исследовании устойчивости движения механических систем, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В диссертации решена задача конструктивного построения функций Ляпунова для классов неконсервативных нелинейных механических систем в критических по Ляпунову случаях с применением к исследованию устойчивости движения некоторых систем твердых тел. Предложен способ построения функции Ляпунова для системы ОДУ порядка $2m + l$, матрица линейной части которой имеет m пар чисто мнимых и l собственных значений, принадлежащих открытой левой комплексной полуплоскости, а нелинейная часть системы имеет специальный вид. Данный подход представляется более простым, чем известный метод сведения. В работе впервые сформулированы и доказаны две теоремы, позволяющие конструктивно установить асимптотическую устойчивость или неустойчивость решения системы данного вида. В качестве примера исследовано задачу об устойчивости состояния равновесия двойного математического маятника с линейным динамическим гасителем колебаний пассивного типа. Решена задача стабилизации состояния равновесия маятникового осциллятора с помощью добавления к нему динамического абсорбера. Установлено, что добавление абсорбера в данном случае ведет к равномерной асимптотической устойчивости по части переменных. В случае двойного физического маятника показано, что присоединение динамического гасителя колебаний обеспечивает экспоненциальную устойчивость движения. Также решена задача устойчивости движения линейной механической системы, находящейся под действием структуры сил. Найденные оценки собственных значений для конкретных случаев, что позволяет оценить скорость затухания возмущенных движений системы. Получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости равномерных вращений несимметричного гироскопа, находящегося под действием демпфирующего момента. Также исследован критический по Ляпунову случай, когда характеристическое уравнение системы линейного приближения имеет пару чисто мнимых корней.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, прямой метод Ляпунова, функция Ляпунова, структура сил, равномерная асимптотическая устойчивость по части переменных, демпфирующий момент, равномерные вращения, критический случай, демпфер пассивного типа, собственные значения, скорость затухания колебаний, двойной маятник, маятниковый осциллятор.

Savchenko N.V. Oscillations and stability of the motion of some non-conservative mechanical systems. – Manuscript.

Dissertation for the degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD) on the specialty 01.02.01 “Theoretical mechanics” (113 – Applied mathematics). – Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, 2017.

The dissertation is devoted to the actual problems of modern theoretical mechanics which arise in the study of the motion stability of mechanical systems, and are described by nonlinear ordinary differential equations. The main subject of the applicant's research is non-conservative mechanical systems. The research area contains stability and stabilization problems for these mechanical systems. In the dissertation the scientific problem of constructive recording of Lyapunov functions for classes of non-conservative nonlinear mechanical systems in critical cases with application to the study of motion stability of stability problem of multibody system’s dynamics is solved.

We propose a method for constructing the Lyapunov function for the system of ordinary differential equations of order $2m + l$, whose linear part matrix has m pairs of purely imaginary eigenvalues and l eigenvalues belonging to the open left complex half-plane, while the nonlinear part of the system has a special form. This approach seems more con-

venient than the well-known Kamenkov's principle of reduction. In the thesis two theorems were first formulated and proved, which allow us to establish constructively the asymptotic stability or instability of the solution of the system of the specified type. There has also been studied the problem of the equilibrium state stability of a double mathematical pendulum with a dynamic oscillator absorber. It is shown that adding the latter to the system makes the lower equilibrium state asymptotically stable. The dissertation has solved the problem of stabilization the equilibrium state of a pendulum oscillator by adding a dynamic absorber to it. It was found that in this case the addition of an absorber leads to uniform asymptotic stability with respect to a part of the variables. For a double physical pendulum, it is shown that attachment of the absorber provides exponential stability of motion. Some aspects of the optimal configuration of the oscillations absorber are discussed. There has been solved the problem of the motion stability of a linear mechanical system which is under the action of the forces structure (potential, gyroscopic, dissipative and circulating forces). In addition, self-value estimates for specific cases have been found, which allows us to estimate the attenuation rate of perturbed movements of the system. We have obtained necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of uniform rotations of the asymmetric gyroscope which is under the influence of the damping torque. These conditions impose restrictions on the distribution of masses in the body, the value of the rotation speed and the friction coefficient. An estimation of the damping torque influence on the gyroscope motion stability has been carried out. It was established that at rotation around the lower state of the relative equilibrium the motion becomes asymptotically stable. At rotation around the upper equilibrium state, the effect of the damping torque is twofold: the gyroscopically stabilized rotation of the body may lose the property of stability, but may become asymptotically stable. It is noteworthy that the last stabilization effect is possible only for a dynamically asymmetric body. The Lyapunov-critical case is also investigated when the characteristic equation of the linear approximation system has a pair of purely imaginary roots.

The new results obtained in the dissertation are basically of theoretical value. They are of interest to specialists in the field of theoretical mechanics, namely, they can be used to further develop the theory of motion stability of nonlinear mechanical systems.

Keywords: asymptotic stability, Lyapunov's direct method, Lyapunov function, structure of forces, uniform asymptotic stability with respect to a part of the variables, damping torque, permanent rotations, the critical case, damper of passive type, eigenvalues, rate of the oscillations fading, double pendulum, the pendulum oscillator.

Підп. до друку 17.04.2018. Формат $60 \times 84/16$. Папір друк. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,3. Ум. друк. арк. 1,2. Тираж 100 прим. Зам. 14.

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»
61070, м. Харків-70, вул. Чкалова, 17.