Інститут прикладної математики і механіки
Національна академія наук України
Інститут математики
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Савченко Ніна Валеріївна

УДК 531.36, 531.38

ДИСЕРТАЦІЯ

Коливання та стійкість руху деяких неконсервативних механічних систем

01.02.01 — Теоретична механіка
113 — Прикладна математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико - математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.
Н. В. Савченко

Науковий керівник
Пузирьов Володимир Євгенович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Слов'янськ — 2018

АНОТАЦІЯ

Савченко Н.В. Коливання та стійкість руху деяких неконсервативних механічних систем. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.02.01 "Теоретична механіка" (113 – Прикладна математика). – Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, 2017. Захист відбудеться у Інституті математики НАН України, Київ.

Дисертаційну роботу присвячено актуальним проблемам сучасної теоретичної механіки, що виникають при дослідженні стійкості руху механічних систем, які описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями.

Тематика дисертації пов'язана з Планами наукових досліджень відділу технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України на 2011 – 2014 роки.

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновку і списку використаних джерел із 118 найменувань джерел вітчизняних і зарубіжних авторів. Загальний обсяг дисертації становить 144 сторінок. У роботі міститься 12 рисунків і 1 таблиця.

Актуальність обраного напряму досліджень підтверджується висновками першого розділу дисертації, в якому наведено огляд літератури з питань стійкості руху нелінійних систем, що містять стійку і нейтральну компоненти; стійкості руху за частиною змінних; стійкості обертань важкого твердого тіла з нерухомою точкою; застосування демпфуючих пристроїв для стабілізації руху механічних систем та дослідження впливу структури сил на динаміку і стійкість руху даних систем.

Загальну методику досліджень викладено у другому розділі дисертації. А саме зазначено, що методи динаміки систем пов'язаних тіл, якісної теорії диференціальних рівнянь та теорії нелінійних коливань використовую-

ться при дослідженні рівнянь руху маятникових систем і обертання твердого тіла, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. При побудові оцінок власних значень механічної системи застосовуються елементи теорії збурень. Для розв'язання задачі про стійкість стану рівноваги нелінійних механічних систем застосовується прямий метод Ляпунова. Достовірність отриманих результатів підтверджено результатами чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху. При порівняльній оцінці результати дисертації підтверджуються відомими результатами.

Основним об'єктом досліджень здобувача є неконсервативні механічні системи. Предметом дослідження виступають задачі стійкості і стабілізації руху цих механічних систем.

У дисертації розв'язано завдання конструктивної побудови функцій Ляпунова для класів неконсервативних нелінійних механічних систем у критичних випадках із застосуванням до дослідження стійкості руху деяких систем твердих тіл.

У третьому розділі запропоновано спосіб побудови функції Ляпунова для системи звичайних диференціальних рівнянь порядку $2m+l$, матриця лінійної частини якої має m пар чисто уявних і l власних значень, які належать відкритій лівій комплексній півплощині, а нелінійна частина системи має спеціальний вигляд. Даний підхід видається більш простим, ніж відомий метод зведення.

У роботі уперше сформульовано і доведено дві теореми, що дозволяють конструктивно встановити асимптотичну стійкість або нестійкість тривіального розв'язку системи зазначеного вигляду. Також досліджено задачу про стійкість стану рівноваги подвійного математичного маятника з динамічним поглиначем коливань. Показано, що введення останнього до системи робить нижній стан рівноваги асимптотично стійким.

Розв'язано задачу стабілізації стану рівноваги маятникового осцилятора за допомогою додавання до нього динамічного абсорбера. З'ясовано, що додавання абсорбера у даному випадку веде до рівномірної асимптотичної стійкості за частиною змінних. У разі подвійного фізичного маятника показано, що приєднання абсорбера забезпечує експоненціальну стійкість руху. Описано основні властивості оптимальної конфігурації абсорбера.

У четвертому розділі розв'язано задачу стійкості руху лінійної механічної системи, що знаходиться під дією структури сил (потенціальні, гіроскопічні, дисипативні та циркуляційні сили). Також знайдено оцінки власних значень для конкретних випадків, що дає змогу оцінити швидкість загасання збурених рухів системи.

У п'ятому розділі отримано необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. Ці умови накладають обмеження на розподіл мас у тілі, величину швидкості обертання і коефіцієнт тертя. Проведено оцінку впливу демпфуючого моменту на стійкість руху гіроскопа. Встановлено, що при обертанні навколо нижнього стану відносної рівноваги, рух стає асимптотично стійким. При обертанні навколо верхнього стану рівноваги вплив демпфуючого моменту є двоїстим – гіроскопічно стабілізоване обертання тіла може втрачати властивість стійкості, але може ставати і асимптотично стійким. Примітним є той факт, що останній ефект стабілізації можливий лише для динамічно несиметричного тіла. Також досліджено критичний за Ляпуновим випадок, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення має пару чисто уявних коренів.

Одержані в дисертації нові результати мають в основному теоретичне значення. Вони представляють інтерес для фахівців у галузі теоретичної механіки, а саме можуть бути використані для подальшого розвитку теорії стійкості руху нелінійних механічних систем.

Ключові слова: асимптотична стійкість, прямий метод Ляпунова, функція Ляпунова, структура сил, рівномірна асимптотична стійкість за частиною змінних, демпфуючий момент, рівномірні обертання, критичний випадок, демпфер пасивного типу, власні значення, швидкість загасання коливань, подвійний маятник, маятниковий осцилятор.

ABSTRACT

Savchenko N.V. Oscillations and stability of the motion of some non-conservative mechanical systems. – Qualifying scientific work on the rights of manuscript.

Dissertation for the degree of a Candidate of Physical and Mathematical Sciences (PhD) in the specialty 01.02.01 "Theoretical mechanics" (113 – Applied mathematics). – Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Slavyansk, 2017. The defense will be held at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev.

The dissertation is devoted to the actual problems of modern theoretical mechanics which arise in the study of the motion stability of mechanical systems, and are described by nonlinear ordinary differential equations.

The subject of the dissertation is connected with the Plans of Scientific Researches of the Technical Mechanics Department of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine for 2011 – 2014.

The dissertation consists of an introduction, five sections, a conclusion and a list of references to 118 scientific works by domestic and foreign authors, used as sources. The total volume of the dissertation is 144 pages. The work contains 12 figures and 1 table.

The relevance of the chosen direction of research is confirmed by the conclusions in the first section of the dissertation, which gives an overview of the literature on the motion stability of nonlinear systems containing stable and neutral components; stability of movement with respect to a part of variables; the rotation stability of a heavy rigid body with a fixed point; the use of damping devices to stabilize the movement of mechanical systems and the study of the forces structure influence on the dynamics and movement stability of these systems.

The general research methodology is described in the second section of the dissertation. Namely, it is indicated that the methods of analytical mechanics are used in the study of the equations of the pendulum systems motion and

the rotation of a heavy rigid body with a fixed point under the influence of the damping torque. When constructing estimates of the eigenvalues of the mechanical system, elements of the perturbation theory are used. Some results of the matrix theory are also used in the course of the study. A Lyapunov's direct method is used to solve the problem of stability of the equilibrium state of nonlinear mechanical systems. The reliability of the obtained results is proved by the results of numerical integration of differential equations of motion. At a comparative evaluation, the findings of the dissertation are confirmed by known results.

The main subject of the applicant's research is non-conservative mechanical systems. The research area contains stability and stabilization problems for these mechanical systems.

In the dissertation the scientific problem of constructive recording of Lyapunov functions for classes of non-conservative nonlinear mechanical systems in critical cases with application to the study of motion stability of stability problem of multibody system's dynamics is solved.

In the third section, we propose a method for constructing the Lyapunov function for the system of ordinary differential equations of order $2m + l$, whose linear part matrix has m pairs of purely imaginary and l eigenvalues belonging to the open left complex half-plane, while the nonlinear part of the system has a special form. This approach seems more simple than the well-known Kamenkov's principle of reduction. In the thesis two theorems were first formulated and proved, which allow us to establish constructively the asymptotic stability or instability of the solution of the system of the specified type. There has also been studied the problem of the equilibrium state stability of a double mathematical pendulum with a dynamic oscillator absorber. It is shown that adding the latter to the system makes the lower equilibrium state asymptotically stable. The dissertation has solved the problem of stabilizing the equilibrium state of a pendulum oscillator by adding a dynamic absorber to it. It was found that in this case the addition of an absorber leads to uniform asymptotic stability with respect to a part of the variables. For a double physical pendulum, it is shown that attachment of the absorber provides exponential stability of motion. Some aspects of the optimal configuration of the oscillations absorber are discussed.

In the fourth section, there has been solved the problem of the motion stability of a linear mechanical system which is under the action of the forces structure (potential, gyroscopic, dissipative and circulating forces). In addition, self-value estimates for specific cases have been found, which allows us to estimate the attenuation rate of perturbed movements of the system.

In the fifth section, we have obtained necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of uniform rotations of the asymmetric gyroscope which is under the influence of the damping torque. These conditions impose restrictions on the distribution of masses in the body, the value of the rotation speed and the friction coefficient. An estimation of the damping torque influence on the gyroscope motion stability has been carried out. It was established that at rotation around the lower state of the relative equilibrium the motion becomes asymptotically stable. At rotation around the upper equilibrium state, the effect of the damping torque is twofold: the gyroscopically stabilized rotation of the body may lose the property of stability, but may become asymptotically stable. It is noteworthy that the last stabilization effect is possible only for a dynamically asymmetric body. The Lyapunov-critical case is also investigated when the characteristic equation of the linear approximation system has a pair of purely imaginary roots.

The new results obtained in the dissertation are basically of theoretical value. They are of interest to specialists in the field of theoretical mechanics, namely, they can be used to further develop the theory of motion stability of nonlinear mechanical systems.

Keywords: asymptotic stability, Lyapunov's direct method, Lyapunov function, structure of forces, uniform asymptotic stability with respect to a part of the variables, damping torque, permanent rotations, the critical case, damper of passive type, eigenvalues, rate of the oscillations fading, double pendulum, the pendulum oscillator.

Список публікацій здобувача

1. Пузырев В.Е., Топчий Н.В. *Оценка собственных значений линейной механической системы с двумя степенями свободы* // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 132—140.

2. Пузырев В.Е., Савченко Н.В. *Устойчивость равномерных вращений несимметричного гироскопа вокруг главной оси, несущей центр масс* // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 168—176.

3. Пузырев В.Е., Савченко Н.В. *Критический случай устойчивости равномерных вращений несимметричного гироскопа, находящегося под действием демпфирующего момента* // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 124-134.

4. Пузырев В.Е., Савченко Н.В. *Асимптотическая устойчивость положения равновесия двойного маятника с присоединенной массой* // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 75-86.

5. Savchenko N., Puzyrev V. *Using dynamic vibration absorber for stabilization of a double pendulum oscillations*// Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2014. – Volume 14, Number 4. – pp. 402-409.

6. Пузырев В.Е., Камынина Е.В., Савченко Н.В. *Использование демпфера пассивного типа для стабилизации малых колебаний маятника переменной длины* // Вістник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. – 2015. – № 1–2. – С. 126-131.

7. Пузырев В.Е. О собственных значениях линейной механической системы с двумя степенями свободы / В.Е. Пузырев, Н.В. Савченко // Устойчивость, управление и динамика твердого тела // Тезисы докладов XI Международной конференции (8 — 12 июня 2011 года). — Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАНУ, 2011. — С. 105.

8. Савченко Н.В. Построение функции Ляпунова для модельной системы в критическом случае чисто мнимых корней/ Н.В. Савченко, В.Е. Пузырев// Dynamical system modelling and stability investigation: XVII International Conference: Modelling and stability: Abstracts o conf. reports, Kiev, Ukraine,

27 — 29 may / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics — Київ: ДП Інформ.-аналіт. агенство, 2015. — С. 47.

9. Савченко Н.В. Асимптотична стійкість стану рівноваги подвійного маятника з приєднаною масою / Н.В. Савченко // International Conference of Young Mathematicians. June 3 — 6, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. — С. 60.

10. Савченко Н.В. Використання динамічного поглинача коливань для стабілізації положення рівноваги подвійного математичного маятника / Н.В. Савченко // International Conference of Young Mathematicians. June 7 — 10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. — С. 109.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. У даний час залишається актуальною задача конструктивного опису і аналізу умов стійкості руху механічних систем, які описуються нелінійними звичайними диференціальними рівняннями. Зазвичай при розв'язанні цієї задачі дослідник стикається з проблемою громіздких обчислень. Тому для аналізу поведінки системи важливим є завдання пошуку шляхів подолання обчислювальних труднощів за рахунок вироблення спеціальних алгоритмів і процедур, спрямованих на редукцію відповідних умов.

Одним із основним підходів до дослідження стійкості руху нелінійних механічних систем є прямий метод Ляпунова.

Особливе місце в теорії стійкості займає дослідження критичних випадків. Теорія критичних випадків бере початок від О. М. Ляпунова і отримала свій розвиток у роботах М. Г. Четаєва, В. Г. Веретенникова, Я. М. Гольцера, Г. В. Каменкова, А. Л. Куніцина, І. Г. Малкіна, А. М. Молчанова, А. С. Озіранера, Л. Сальвадорі, В. А. Пліса, О. В. Анашкіна, E. H. Abed, J.-H. Fu та інших вчених. У критичних випадках актуальним є вивчення асимптотичної поведінки розв'язків системи. Ця задача розглядалася для критичного випадку пари чисто уявних коренів у роботах Л. Сальвадорі, К. Пайффера, О. Я. Савченка, О. О. Ігнатьєва та інших. У той же час, відкритим залишається питання побудови функції Ляпунова в явному вигляді у багатьох випадках.

Задачі стійкості і стабілізації руху динамічних систем не за всіма, а лише по відношенню до деякої частини змінних, природним чином виникають на практиці як з вимоги нормального функціонування, так і при оцінюванні можливостей системи. Зазначені задачі є міждисциплінарними і виникають при моделюванні багатьох явищ і керованих процесів у самих різних розділах науки: механіці, фізиці, економіці, біології та інших.

Забезпечити стійкість за частиною змінних для багатьох класів систем виявляється простішим, ніж за всіма змінними, і тому у теорії автоматичного керування навіть виділився окремий науковий напрямок, який присвячений дослідженню та забезпеченню стійкості за частиною змінних. У даному питанні суттєві результати одержав В. В. Румянцев. Серед численних публікацій із цього напрямку відзначимо також книги В. І. Зубова, М. М. Красовського, В. І. Воротнікова, О. Я. Савченка і О. О. Ігнатьєва.

Головним методом дослідження подібних задач також є метод функцій Ляпунова, який виявився вельми ефективним при аналізі як теоретичних, так і прикладних проблем. Однак, хоча у багатьох важливих прикладних задачах метод функцій Ляпунова і дозволяє отримати жорсткі умови стійкості за частиною змінних, тим не менш, у цілому питання конструктивної побудови функцій Ляпунова залишається маловивченим. У такій ситуації значний інтерес представляє подальший розвиток прямого методу Ляпунова з описом конструктивних шляхів побудови функцій Ляпунова.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з Планами наукових досліджень відділу технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України на 2011 – 2014 роки.

Мета і задачі дослідження. *Об'єктом дослідження* дисертаційної роботи є неконсервативні механічні системи. *Предметом дослідження* виступають задачі стійкості і стабілізації руху цих механічних систем.

При моделюванні багатьох неконсервативних механічних систем важливою складовою частиною є несиметричне тверде тіло з нерухомою точкою, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. У такому випадку основною метою дослідження є визначення умов асимптотичної стійкості рівномірних обертань цього тіла. Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати ряд завдань. До цих завдань належать побудова математичної моделі руху механічної системи і приведення рівнянь руху до канонічного вигляду. Наступними завданнями є дослідження стійкості руху гіроскопа і оцінка впливу демпфуючого моменту на стійкість даного руху.

Якщо механічна система представлена маятниковими системами, то основною метою дослідження є стабілізація коливань системи шляхом додавання до неї динамічних поглиначів коливань різних конфігурацій. У зв'язку з цим виникає ряд завдань, а саме: дослідження станів рівноваги на стійкість за допомогою побудови функцій Ляпунова та отримання умов стабілізації коливань даних маятникових систем.

Методи дослідження. Методи динаміки систем пов'язаних тіл, якісної теорії диференціальних рівнянь та теорії нелінійних коливань використовуються при дослідженні рівнянь руху маятникових систем і обертання твердого тіла, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. При побудові оцінок власних значень механічної системи застосовуються елементи теорії збурень. Також у ході дослідження використовуються деякі результати теорії матриць. Для розв'язання задачі про стійкість станів рівноваги нелінійних механічних систем застосовується прямий метод Ляпунова.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректністю постановок вихідних задач та використанням якісної теорії диференціальних рівнянь. Отримані результати підтверджено також чисельним інтегруванням диференціальних рівнянь руху. При порівняльній оцінці результати дисертації підтверджуються відомими результатами.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації розв'язано наукове завдання конструктивної побудови функцій Ляпунова для класів неконсервативних нелінійних механічних систем у критичних випадках із застосуванням до дослідження стійкості руху деяких систем твердих тіл. У результаті дослідження отримано такі основні результати:

1. Запропоновано спосіб побудови функції Ляпунова для системи звичайних диференціальних рівнянь порядку $2m + l$, матриця лінійної частини якої має m пар чисто уявних і l власних значень, які належать відкритій лівій комплексній півплощині, а нелінійна частина системи має спеціальний вигляд. Даний підхід видається більш простим, ніж

відомий метод зведення.

2. Уперше сформульовано і доведено дві теореми, що дозволяють конструктивно встановити асимптотичну стійкість або нестійкість тривіального розв'язку системи зазначеного вище вигляду.
3. Як приклад застосування наведених теорем досліджено задачу про стійкість стану рівноваги подвійного математичного маятника з лінійним динамічним поглиначем коливань пасивного типу. Показано, що введення останнього до системи робить нижній стан рівноваги асимптотично стійким.
4. Також уперше розв'язано задачу стабілізації стану рівноваги маятникового осцилятора за допомогою додавання до нього динамічного абсорбера. З'ясовано, що додавання абсорбера в даному випадку веде до рівномірної асимптотичної стійкості за частиною змінних.
5. У разі подвійного фізичного маятника показано, що приєднання абсорбера забезпечує експоненціальну стійкість руху. Описано основні властивості оптимальної конфігурації абсорбера.
6. У дисертаційній роботі отримано оцінки власних значень лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що знаходиться під дією сил різних типів.
7. Отримано умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. Також проведено оцінку впливу цього моменту на стійкість руху гіроскопа.
8. Розв'язано задачу стійкості обертань у критичному за Ляпуновим випадку, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення, що описує рух несиметричного гіроскапа, який знаходиться під дією демпфуючого моменту, має пару чисто уявних коренів.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані в дисертації результати мають в основному теоретичне значення. Вони представляють інтерес для фахівців у галузі теоретичної механіки, а саме можуть бути використані для подальшого розвитку теорії стійкості руху нелінійних механічних систем.

Особистий внесок здобувача. Статті [1–6] опубліковані спільно з д.ф.-м.н. В.Є. Пузирьовим, якому належать постановки задач та обговорення отриманих результатів.

Результати розділу 3 опубліковані у статтях [4, 5]. Здобувачеві належить розв'язання задачі стійкості руху у критичному за Ляпуновим випадку, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення має m пар чисто уявних коренів і l коренів з від'ємною дійсною частиною. Запропоновано спосіб побудови функції Ляпунова для системи спеціального виду у критичному випадку пар чисто уявних коренів. Також розв'язано задачу стійкості стану рівноваги подвійного маятника з динамічним поглиначем коливань. Крім того, вивчено питання асимптотичної стійкості за частиною змінних шляхом побудови функції Ляпунова.

Результати розділу 4 відображені у статті [1]. Здобувачеві належить отримання оцінок власних значень лінійної механічної системи з двома ступенями свободи, що знаходиться під дією структури сил.

Результати розділу 5 опубліковані у статтях [2,3]. Особистий внесок здобувача полягає у знаходженні необхідних і достатніх умов асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа, що знаходиться під дією демпфуючого моменту.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися на:

— Міжнародній конференції "Стійкість, керування і динаміка твердого тіла" (ICSCD XI), Донецьк, 2011 р.;

— Семінарах із загальної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України (2013 – 2014 рр.);

— Міжнародній конференції “Моделювання і дослідження стійкості динамічних систем” (DSMSI XVII), Київ, 2015 р.;

— Міжнародних конференціях молодих математиків, Київ, 2015, 2017 рр.;

— Семінарі відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України та за участю кафедри математики ДВНЗ “Донбаський державний педагогічний університет” (2017 р., керівники – проф. О.Л. Зуєв, проф. С.М. Чуйко);

— Математичному семінарі до 100-річчя С.Г. Крейна (2017 р., керівники – проф. С.М. Чуйко, проф. А.Л. Зуєв, В.Ф. Щербак);

— Семінарі “Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика” Інституту математики НАН України (2017 р., керівники – академіки НАН України І.О. Луковський та В.Л. Макаров).

Публикації. Основні результати дисертації опубліковані у 10 роботах [1–10], з яких 6 статей у фахових наукових журналах та збірниках, 4 роботи у матеріалах міжнародних конференцій. Стаття [5] опублікована у науковому журналі, який включено до наукометричної бази Scopus.

Дисертація складається із вступу, п’яти розділів, висновку та списку використаних джерел із 118 найменувань. Обсяг дисертаційної роботи становить 144 сторінок друкованого тексту, з них 11 сторінок займає список використаних джерел. У роботі міститься 12 рисунків і 1 таблиця.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Дослідження впливу структури сил на динаміку і стійкість руху механічних систем

Свій початок дане питання бере у роботах Томсона і Тета, які в 1879 році дали загальне визначення гіроскопічних сил і довели чотири теореми про стійкість руху, відомі в подальшому як класичні теореми Томсона – Тета – Четаєва [11]. У даний час питання впливу структури сил на динаміку і стійкість руху механічних систем є об'єктом дослідження для численних авторів. Поряд із великою кількістю результатів загального характеру, присвячених узагальненню і розвитку класичних теорем Томсона – Тета – Четаєва, велике число робіт пов'язане з дослідженням поведінки конкретних систем, що знаходяться під дією структури сил.

Книга Д. Р. Мєркіна [12] присвячена загальним відомостям про дослідження стійкості руху систем по структурі діючих сил; наведено достатню кількість наочних прикладів. Також багато прикладних задач описано у праці В. М. Рубановського і В. О. Самсонова [13]. У статті В. М. Кошлякова [14] наведені структурні перетворення деяких неконсервативних систем.

О. А. Косов у [15] розглядає механічні системи, які знаходяться під дією істотно нелінійних позиційних сил. Методом декомпозиції визначаються достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги. Вивчаються задачі стабілізації стану рівноваги нелінійних нестаціонарних систем із заданими потенціальними силами за рахунок приєднання сил іншої структури. Для систем із нестаціонарним однорідним додатно визначеним потенціалом доведена можливість її стабілізації лінійними дисипативними силами, що не характерно для лінійних систем. Для систем із парною кількістю координат

$n \geqslant 4$, за наявності дисипативних сил з повною дисипацією енергії, доведена можливість вібраційної стабілізації за рахунок додавання циркуляційних і гіроскопічних сил з коефіцієнтами, що коливаються близько нуля.

Асимптотична стійкість руху системи під дією сил з частковою дисипацією енергії була досліджена в роботі Г. К. Пожарицького [16]. У даній роботі вказані умови за яких додавання дисипації за частиною координат забезпечує асимптотичну стійкість ізольованого стану рівноваги.

У работі [12] по суті міститься доведення теореми про асимптотичну стійкість ізольованого стану рівноваги автономної механічної системи, що знаходиться під дією сил повної дисипації, у загальному випадку. Дещо більш повно воно було записане Л. Сальвадорі, якому і відносять цей результат.

В. Є. Пузирьов у статті [17] дослідив вплив, який здійснюють дисипативні сили з неповною дисипацією енергії, на стійкість стану відносної рівноваги консервативної механічної системи загального вигляду. Доведені у роботі теореми є подальшим розвитком класичних результатів Томсона – Тета – Четаєва – Сальвадорі у випадку часткової дисипації енергії.

Умови асимптотичної стійкості нульового стану рівноваги автономної механічної системи, що знаходиться під дією сил з повною і частковою дисипацією енергії, за швидкостями і за частинами координат отримані у роботі [18] В. В. Румянцева.

О. П. Сейранян і О. М. Кирилов [19] проаналізували вплив малих сил, які пропорційні узагальненому вектору швидкостей, на стійкість руху лінійної автономної механічної системи із неконсервативними позиційними силам. Ними були отримані необхідні і достатні умови, що накладаються на матриці дисипативних і гіроскопічних сил, під дією яких система стає асимптотично стійкою.

Робота О. В. Карапетяна та І. С. Лагутіної [20] присвячена дослідженню впливу дисипативних і сталих сил на вигляд і стійкість усталених рухів механічних систем з циклічними координатами.

У статті [21] Л. Г. Лобас і Л. Л. Лобас встановили залежність меж областей флатерної і дивергентної нестійкості від параметра асиметрії слідкуючої сили. Ними було показано, що за деяких значень даного параметра область флатерної нестійкості зникає, а область дивергентної нестійкості існує завжди. З прикладами дослідження стійкості руху складних механічних систем можна ознайомитися у роботі [22].

Парадоксальний вплив малих дисипативних і гіроскопічних сил на стійкість руху лінійних неконсервативних систем, що полягає у непередбачуваній, на перший погляд, поведінці критичного неконсервативного навантаження вивчається у роботі О. М. Кирилова [23]. За допомогою дослідження біфуркацій кратних коренів характеристичного полінома неконсервативної системи отримано аналітичний опис цього ефекту. У якості механічного прикладу була розглянута модель дискового гальма, що описує виникнення скрипу під час гальмування автомобіля.

У статті [24] С. А. Агафонов дослідив можливість стабілізації до асимптотичної стійкості гіроскопічної системи з двома ступенями свободи за допомогою нелінійних дисипативних і позиційних неконсервативних сил. Стійкість гіроскопічної системи досягнута за рахунок гіроскопічної стабілізації. У термінах параметрів системи отримані умови стабілізації. Указані випадки, коли гіроскопічна стабілізація руйнується цими нелінійними силами.

Ефект дестабілізації стійкої рівноваги неконсервативної системи, що знаходиться під дією як завгодно малої лінійної сили в'язкого тертя, розглядається О. Є. Байковим і П. С. Красильниковим у статті [25]. Отримані необхідні та достатні умови стійкості руху системи з декількома ступенями свободи для випадку малого тертя і, як наслідок, умови існування ефекту дестабілізації (ефекту Циглера). Розглянуто також питання про стабілізацію стану рівноваги системи за допомогою додавання великих сил тертя. Побудовано критерії стійкості стану рівноваги системи з двома ступенями свободи, коли сили тертя приймають довільні значення.

У роботі О. М. Кирилова і F. Verhulst [26] розглядається парадокс дестабілізації консервативної та неконсервативної систем з малою дисипацією (або парадокс Циглера). Для розв'язання цієї задачі застосовується парасолька сингулярності Уїтні. Питання гіроскопічної стабілізації також розглянуто у статті [27] для статично нестійкої лінійної консервативної системи. Показано, що стійкість руху може бути поліпшена або знищена слабким загасанням і додаванням циркуляційних сил. Це регулюється особливостями межі області асимптотичної стійкості парасольки Уїтні для збуреної системи.

Отже, циркуляційні сили можуть здійснювати на рух системи як дестабілізуючий вплив [21, 28], так і стабілізуючий [12, 24]. Таким чином, досить важливою обставиною, яка впливає на складність дослідження стійкості руху системи і його результати, є відсутність або наявність циркуляційних (неконсервативних позиційних) сил. У першому випадку часто можна використовувати вищезгадані теореми Томсона – Тета – Четаєва і їх узагальнення, які зазвичай містять вимоги якісного порядку – повна дисипація енергії, довільні гіроскопічні сили, стійкість стану рівноваги при одних (будь-яких по величині) потенціальних силах [12, теореми 1 – 4 п. 6.5] і т. п. У другому випадку ситуація принципово інша, оскільки стійкість або нестійкість руху залежить від кількісних співвідношень між величинами діючих сил. Зокрема, рух гіроскопічно стабілізованої системи втрачає стійкість при додаванні або одних дисипативних, або одних циркуляційних сил, але може стати асимптотично стійким при їх спільному впливі (прикладом може бути обертання ротора на гнучкому валу, див. [13, п.3.2] або [28]).

У роботі [29] P. Hagedorn та M. Eckstein сформулювали теореми про вплив демпфування на стійкість руху механічних систем, що знаходяться під дією структури сил, і на самозбудні коливання. Також наведено приклади практичного застосування даних теорем для задач машинобудування.

У статті D. Jekel і P. Hagedorn [30] показано, що гіроскопічні члени сприяють зменшенню розмірів областей нестійкості, а явище асимптотичної стійкості руху з нескінченно малим загасанням може зникнути через гіроскопічні ефекти. Також описано, що недіагональні члени матриці демпфування мають дестабілізуючий вплив на систему. У якійсь мірі вони компенсують позитивний ефект діагональних демпфуючих членів.

Результати загальних досліджень впливу структури сил на стійкість стану рівноваги стаціонарної механічної системи з успіхом використовуються для розв'язання багатьох задач про стабілізацію усталених рухів керованих механічних систем, наприклад, у роботах В. В. Крементуло [31], О. М. Лєтова [32], К. Магнуса [33], Г. К. Пожарицкого [34], В. В. Румянцева [35] та інших авторів.

До теперішнього часу залишається мало дослідженою задача стійкості стану рівноваги механічної системи у випадку, коли сили, що діють на систему, залежать від часу або на систему накладено нестаціонарні зв'язки. Це пояснюється як складністю використання у дослідженнях рівняння лінійного наближення, так і складністю побудови спеціальних функцій Ляпунова.

Разом із тим, задача стійкості стану рівноваги нестаціонарної механічної системи є актуальною тому, що вона має широке застосування під час дослідження стійкості програмних рухів механічних систем та при дослідженні стійкості руху гіроскопічних систем, які можуть бути встановлені на об'єкті, що здійснює нестаціонарний просторовий рух.

1.2. Стійкість руху механічних систем

1.2.1. Стійкість обертань важкого твердого тіла з нерухомою точкою. Перманентні обертання важкого твердого тіла з однією нерухомою точкою були відкриті у 1894 р. Б. К. Млодзеєвським [36] і О. Штауде [37]; останньому належить детальне дослідження цих обертань. Спочатку задача пошуку умов їх стійкості при заданому розподілі мас здавалася занадто важкою для розв'язання. Однак у 1920 р. Р. Граммель отримав умови стійкості перманентних обертань тіла шляхом розгляду лінеаризованих рівнянь збуреного руху твердого тіла [38, 39]. Зважаючи на складність отриманих умов, було мало надії на виділення на конусі перманентних осей областей стійкості, внаслідок чого Р. Граммель "обернув" постановку задачі. Він запропонував шукати не напрямні косинуси стійких перманентних обертань при заданому розподілі мас, а, навпаки, виходячи з певного положення осі обертання у твердому тілі та із наперед заданого відношення моментів інерції тіла до його ваги, знайти такі положення центра мас тіла, при яких можливі стійкі перманентні обертання навколо заданої осі. У такій постановці Р. Граммель проаналізував отримані ним умови стійкості руху для загального випадку несиметричного гіроскопа при довільному напрямку осі обертання, а також для випадку, коли вісь обертання належить одній із головних площин інерції твердого тіла для нерухомої точки.

У 1945 р. О. Боттема [40] застосував умови, які отримав Р. Граммель, до дослідження стійкості перманентних обертань твердого тіла у випадку, коли центр мас тіла розташований на одній з головних осей інерції (на підставі однієї з теорем Ляпунова [41]).

Умови, які отримав Р. Граммель, є лише необхідними умовами стійкості перманентних обертань твердого тіла. Для несиметричного гіроскопа і для гіроскопа Лагранжа необхідні умови стійкості обертання твердого тіла навколо головної осі інерції, що проходить через центр мас тіла, були отримані у 1882 р. М. Є. Жуковським [42].

Достатні умови стійкості обертання твердого тіла навколо головної осі інерції, яка містить центр мас тіла, отримані М. Г. Четаєвим [43, 44] для випадку Лагранжа. У роботі [44] вказано деякі достатні умови стійкості перманентних обертань тіла як для загального випадку (при довільному розподілі мас твердого тіла), так і для низки окремих випадків.

W. O. Schichlen і H. I. Weber у роботі [45] розглянули питання стійкості перманентних обертань Штауде для гіроскопа з демпфуванням. Показано, що стійкість руху тіла залежить від поведінки симетричних гіроскопів із загасанням: статичні гіроскопи можуть бути нестійкими через несиметрію, а статично нестійкі гіроскопи можуть бути стабілізовані несиметричними моментами інерції. Отримані результати представлені у вигляді трикутника Магнуса для статично стійких і нестійких гіроскопів.

Стійкість перманентних обертань важкого твердого тіла з нерухомою точкою навколо вертикалі розглянуті О. В. Холостовою [46] у припущенні самого загального розподілу мас у тілі і довільного розміщення точки закріплення. У допустимих областях п'ятимірного простору параметрів задачі проводиться детальний лінійний аналіз стійкості руху. Виписано необхідні умови стійкості, а у деяких випадках знайдено і достатні умови.

Проблема еволюції обертань твердого тіла відносно нерухомої точки продовжує привертати увагу дослідників. У прикладному аспекті аналіз обертальних рухів тіл відносно нерухомої точки важливий для розв'язання задач космонавтики, входження літальних апаратів у атмосферу, руху обертового снаряда, гіроскопії. При цьому у багатьох випадках у якості породжуючого (опорного) руху твердого тіла, що враховує основні моменти сил, які діють на тіло, може розглядатися рух у випадку Лагранжа. У цьому випадку передбачається, що тіло має нерухому точку і знаходиться у полі сили тяжіння, причому центр мас тіла і нерухома точка лежать на осі динамічної симетрії тіла. Відновлюючий момент сил, аналогічний моменту сили тяжіння, створюється також аеродинамічними силами, що діють на тіло у потоці газу. Тому рухи, близькі до випадку Лагранжа, досліджувалися у цілому ряді робіт по динаміці літальних апаратів, де окрім відновлюючого моменту враховувалися різні збурюючі моменти.

У монографії В. С. Асланова [47] досліджено рух твердого тіла, що обертається у атмосфері під дією синусоїдального або бігармонічного відновлюючого моменту, який залежить від часу і малих збурюючих моментів. Вплив на рух гіроскопа екваторіального і аксіального гальмуючого моментів, що відіграють істотну роль при вивченні обертального руху артилерійських снарядів, розглядається у книзі Б. І. Окунєва [48]. У монографії М. М. Моісеєва [49] досліджується задача Лагранжа про рух осесиметричної дзиги, яка знаходиться під дією перекидаючого моменту, спрямованого перпендикулярно площині, що проходить через вісь симетрії дзиги. У статті [50] розглядається вплив зміни напряму сили, що створює перекидаючий або відновлюючий момент, на рух гіроскопа Лагранжа. Вплив дисипативних сил на стійкість перманентних рухів гіроскопа Лагранжа описано у роботі Е. К. Узбек [51]. У статті [52] досліджується вплив в'язкого тертя на стійкість по Ляпунову обертання важкого твердого тіла навколо нерухомої точки. Z. M. Ge і M. H. Wu [53] отримали достатні умови стійкості вертикального обертання дзиги Лагранжа за наявності демпфуючого моменту. У роботі [54] В. Є. Пузирьовим отримані достатні умови асимптотичної стійкості "сплячої" дзиги у середовищі з опором. О. Я. Савченко і В. С. Безручко [55] займалися дослідженням стаціонарних рухів твердого тіла у випадку Лагранжа, яке знаходиться під дією моменту дисипативних сил і дебалансу тяги, що створює відновлюючий момент. Знайдено області виконання умов стійкості рівномірних обертань. У роботі [56] О. Є. Позднякович і В. Є. Пузирьов розглянули задачу пасивної стабілізації обертань навколо вертикалі гіроскопа Лагранжа з двоступеневих демпфером типу "гойдалки". Аналіз умов стійкості рівномірних обертань важкого гіроскопа на пружно закріпленій підставці проведено у роботі [57].

Незважаючи на численну літературу, яка присвячена питанню стійкості руху важкого твердого тіла, дослідження у цій галузі користуються попитом у зв'язку з проблемами руху літальних апаратів (супутників, космічних кораблів, літаків, безпілотних апаратів), небесних тіл (планет, комет), гіроскопів та інших об'єктів сучасної техніки.

Важке тверде тіло з однією нерухомою точкою являє собою консервативну механічну систему, стійкість якої можлива тільки у критичному за Ляпуновим випадку.

1.2.2. Вивчення критичних випадків теорії стійкості руху. Більш строге формулювання теорія стійкості руху набула у роботах О. М. Ляпунова. Він вивчав стійкість розв'язків загальних систем звичайних диференціальних рівнянь відносно збурень початкових даних. Найбільш завершеного вигляду його теорія має для випадку стаціонарних розв'язків. Питання про стійкість руху вихідної системи, згідно О. М. Ляпунову, еквівалентне питанню про стійкість руху лінеаризованої системи. Він довів, що для асимптотичної стійкості тривіального розв'язку вихідної системи достатньо, щоб усі корені її характеристичного рівняння мали від'ємні дійсні частини [41]. Якщо серед коренів цього рівняння є хоча б один з додатною дійсною частиною, то тривіальний розв'язок системи нестійкий.

Однак, побудова характеристичного полінома і оцінка його коренів не завжди дають однозначну відповідь про характер поведінки системи. Можуть мати місце критичні випадки. Випадок, коли характеристичне рівняння системи має корінь з нульовою дійсною частиною і не має коренів з додатною дійсною частиною, називається критичним за Ляпуновим. У критичних випадках властивості стійкості нульового розв'язку повної нелінійної системи не можуть бути встановлені шляхом дослідженням рівнянь першого наближення. У таких випадках на характер стійкості істотний вплив мають нелінійні члени. Залежно від вигляду нелінійних членів, нульовий розв'язок повної системи може бути як стійким, так і нестійким.

З математичної точки зору критичні випадки є винятковими. Однак, при дослідженні механічних систем ці випадки зустрічаються досить часто. Тому значний інтерес представляє також вивчення стійкості руху в критичних випадках, коли із дослідження лінійних членів системи неможливо зробити який-небудь висновок про стійкість руху системи.

У таких задачах одним із основних інструментів для дослідження є функції Ляпунова (ФЛ). Їх побудова може виявитися досить складною в залежності від виду нелінійних доданків.

У даний час досить повно вивчені випадки подвійного нульового кореня і двох пар чисто уявних коренів.

Так випадок одного нульового кореня і випадок пари чисто уявних коренів були досліджені ще О. М. Ляпуновим [41] для усталених рухів. Він показав, що у випадку одного нульового кореня дослідження вихідної системи зводиться до дослідження стійкості одного рівняння виду $\dot{y}_1 = \widetilde{Y}_1\left(y_1\right)$. У свою чергу, задача стійкості для цього рівняння розв'язується молодшим членом у розкладанні його правої частини. Якщо степінь молодшого члена непарна, а коефіцієнт при ньому від'ємний, то незбурений рух асимптотично стійкий. У всіх інших випадках він нестійкий. Подібним чином досліджений критичний випадок пари чисто уявних коренів.

У роботі М. Г. Четаєва [11] досліджені випадки одного нульового кореня і пари чисто уявних коренів при більш загальних, ніж у О. М. Ляпунова, обмеженнях на коефіцієнти системи. У монографії І. Г. Малкіна [58] досліджені випадки подвійного нульового кореня, двох пар чисто уявних коренів і одного нульового та пари чисто уявних коренів. Теорема Малкіна про особливий випадок декількох нульових коренів була узагальнена О. С. Озиранером [59] на випадок тільки чисто уявних коренів. Системи, для яких усі корені характеристичного рівняння є чисто уявними, вивчалися також Л. Сальвадорі [60], який поширив для них підхід Ляпунова.

Для загального випадку m пар чисто уявних коренів також може бути використаний принцип зведення, згідно якому за допомогою нелінійної заміни вихідну систему можна переписати у спеціальному вигляді, для якого і будується ФЛ.

Значний внесок у розвиток методу дослідження критичних випадків зробив Г. В. Каменков. Для систем, питання про стійкість руху яких розв'язується формами кінцевого порядку, ним сформульований так званий "принцип зведення" за функціями Ляпунова і Четаєва та запропоновано спосіб приведення задачі стійкості у критичному випадку m нульових і q пар чисто уявних коренів до критичного випадку кратного нульового кореня [61].

В. Г. Веретенніков у роботі [62] отримав достатні умови асимптотичної стійкості за формами кінцевого порядку, використовуючи для цього принцип зведення.

В. О. Плісс [63] описав принцип зведення, який справедливий також і для трансцендентних випадків. Він довів, що нелінійна система у критичному випадку може бути приведена до системи меншої розмірності з використанням інваріантної поверхні, при цьому з асимптотичної стійкості або нестійкості укороченої системи випливає асимптотична стійкість або нестійкість вихідної системи.

А. М. Молчанов у роботі [64] розглянув питання стійкості руху у випадку нейтральності лінійного наближення вихідної системи. Також він описав спосіб переходу від вихідної системи до її нормальної форми і сформульовав критерій стійкості руху системи за формами третього порядку у термінах інваріантних променів.

У роботі Г. О. Ярошевича [65] доведено, що, якщо перше наближення для систем збуреного руху побудовано за допомогою полінома Q_2 І. І. Етермана, то теореми О. М. Ляпунова про стійкість руху за першим наближенням залишаються у силі. При цьому не вимагається аналітичність нелінійних членів, але передбачається, що вони мають певний вигляд. У ряді випадків перевагою наведеного методу побудови першого наближення є можливість усунення критичних коренів.

Стійкість тривіального розв'язку автономної нелінійної системи у критичному випадку трьох пар чисто уявних коренів досліджена А. Л. Куніциним [66]. Він сформулював необхідні і достатні умови стійкості руху за першим наближенням. Отримані результати поширені на вироджений випадок.

У статті О. В. Анашкіна [67] отримані достатні умови асимптотичної стійкості стану рівноваги нелінійної системи у випадку, коли укорочена система має стійкий тривіальний розв'язок. Умови стійкості для вихідної системи записані у термінах функцій Ляпунова спеціального виду. Отримані результати застосовано до критичного випадку $2m$ чисто уявних власних значень.

С. В. Мєдвєдєв і В. М. Тхай розглянули критичний випадок одного нульового кореня, m пар чисто уявних коренів і q коренів з від'ємними дійсними частинами. У їх роботі [68] доведено, що наявність нульового кореня, як правило, призводить до нестійкості, яка може бути визначена вже з членів другого порядку розкладання в ряд правих частинах вихідної системи. У виродженому випадку для модельної системи отримані необхідні і достатні умови стійкості; крім того, показано, що за відсутності додаткового виродження нестійкість вихідної системи випливає з нестійкості модельної системи. Для вихідної системи достатні умови асимптотичної стійкості і нестійкості отримані при виконанні необхідних умов стійкості для модельної системи. У роботі [69] В. М. Тхай розглянув критичний випадок m нульових коренів, n пар чисто уявних коренів і q коренів з від'ємними дійсними частинами у припущенні, що m-кратному нульовому кореню відповідає m груп розв'язків, а між чисто уявними коренями немає резонансних співвідношень. За цих умов відокремлюється випадок, у якому асимптотична стійкість неможлива.

У роботі В. В. Грушковської і О. Л. Зуєва [70] розглядається критичний випадок двох пар чисто уявних власних значень. Також побудована асимптотична оцінка розв'язків системи у випадку стійкості за формами третього порядку. Для отримання оцінок використаний принцип зведення з явною побудовою функції Ляпунова для укороченої підсистеми на центральному різноманітті.

Альтернативою принципу зведення є "пряма" побудова ФЛ, яка, у залежності від складності заданої системи, може виявитися значно простішою з технічної точки зору.

Так О. Я. Савченко і О. О. Ігнатьєв у [71] навели результати по дослідженню стійкості незбуреного руху системи у припущенні, що праві частини рівнянь збуреного руху є неавтономними, але система першого наближення автономна і її характеристичне рівняння має m коренів з від'ємними дійсними частинами і q пар чисто уявних коренів.

J.-H. Fu, E. H. Abed [72] побудували функції Ляпунова для вихідної системи у критичному випадку нульового кореня і пари простих чисто уявних коренів. Вони показали, що у критичному випадку нульового кореня функції Ляпунова містять квадратичні і кубічні члени по змінним стану. У випадку пари чисто уявних коренів у функції Ляпунова з'являються члени четвертої степені.

Я. М. Гольцер у роботі [73] за допомогою методів теорії центральних візноманіть привів систему у випадку k пар чисто уявних власних значень до виду

$$\dot{r}_s = r_s \left(\sum_{|m|=N} a_m^{(s)} r^m \right) + O\left(r^{N+\frac{3}{2}} \right),$$

у конусі $r \geqslant 0$. Для отриманої системи доведені достатні умови асимптотичної стійкості і нестійкості нульового розв'язку для довільних N і k. Доведення цих умов включає у себе побудову функцій Ляпунова і Четаєва, які конструктивно описують області тяжіння і нестійкості.

У роботі [74] О. Ю. Олександров розглянув систему, яка має вигляд

$$\dot{x}_1 = af_1^{\lambda}(x_1) + bf_2^{\mu}(x_2), \dot{x}_2 = cf_1^{\eta}(x_1) + df_2^{\zeta}(x_2),$$

де a, b, c, d — константи, $\lambda, \mu, \eta, \zeta$ — деякі раціональні числа, функції f_j неперервні у деякому околі нуля і задовільняють умові $x_j f_j(x_j) > 0$, для $x_j \neq 0$. Для такої системи отримані необхідні і достатні умови існування функцій Ляпунова, що забезпечують асимптотичну стійкість, і знайдено загальний вигляд цих функцій.

К. Пайффер і О. Я. Савченко у статті [75] представили результати щодо пасивної стабілізації, які основані на побудові функції Ляпунова у випадку декількох пар чисто уявних коренів. Як приклад розглянуто простий маятник. А у статті [76] автори розглянули системи, стабілізація яких частково забезпечується квадратичними членами рівнянь руху системи у критичному випадку пари чисто уявних коренів. Вони показали, що критичні змінні асимптотично поводяться як $(Gt)^{-\frac{1}{2}}$, де G — константа. Як приклад розглянуто маятник, до якого прикріплено масивне тіло. Для системи рівнянь руху такого маятника побудована функція Ляпунова. Випадок двох пар чисто уявних коренів досліджено у роботі [77], де описана асимптотична поведінка розв'язків нелінійної системи, а отриманий результат застосовано до задачі нелінійної оптимальної стійкості руху.

1.2.3. Дослідження стійкості руху за частиною змінних. Задачі стійкості та стабілізації руху динамічних систем не по всім, а лише по відношенню до деякої частини змінних, природним чином виникають на практиці, як з вимоги нормального функціонування, так і при оцінці можливостей системи. Зазначені задачі є міждисциплінарними і виникають при моделюванні багатьох явищ і керованих процесів у самих різних розділах науки: механіці, фізиці, економіці, біології та інших. Забезпечити стійкість руху за частиною змінних легше, ніж за всіма змінними, і тому в теорії автоматичного керування навіть виділився окремий науковий напрям, присвячений дослідженню та забезпеченню стійкості руху за частиною змінних.

Уперше задачу про стійкість руху за частиною змінних поставив О. М. Ляпунов, оскільки така задача є більш загальною і дозволяє розглядати стійкість більш складних систем. Однак, сам Ляпунов її не розглядав. На зауваження О. М. Ляпунова звернув увагу І. Г. Малкін [78], який вказав (без доведення) деякі умови перенесення теорем Ляпунова на випадок стійкості руху по відношенню до частини змінних.

У першій половині XX століття значного розвитку зазнало дослідження стійкості руху за частиною змінних для деяких класів лінійних [79–81] і нелінійних систем [78, 82]. Інша гілка розвитку зазначеної задачі пов'язана з дослідженнями механічних систем з циклічними координатами [83], а також з більш пізніми дослідженнями моделей конкуренції видів [84].

А уже з середини XX століття задача стійкості руху за частиною змінних стала більш інтенсивно досліджуватися. При цьому глибокому аналізу було піддано як власне трактування О. М. Ляпунова, так і ряд інших понять стійкості (асимптотичної стійкості) руху по відношенню до частини змінних.

Серед численних публікацій із цього напрямку відзначимо книги В. І. Зубова [85], М. М. Красовського [86], В. І. Воротнікова, В. В. Румянцева [87–89], О. Я. Савченко і О. О. Ігнатьєва [71].

У роботі В. В. Румянцева [90] розпочато систематичне дослідження задачі для скінченновимірних нелінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з неперервною правою частиною загального вигляду, а саме: конкретизована постановка задачі стійкості руху за частиною змінних; введено принципове для цієї задачі поняття знаковизначеної функції за частиною змінних; доведені теореми про стійкість і асимптотичну стійкість руху за частиною змінних, які узагальнюють класичні теореми Ляпунова.

K. Peiffer і N. Rouche [91] відзначили, що задача стійкості руху за частиною змінних в постановці Ляпунова не зводиться, взагалі кажучи, до задач якого-небудь роду стійкості множин (траєкторій). Зазначена обставина призводить до необхідності окремої розробки відповідних методів дослідження цієї задачі, інтерес до якої обумовлюється практичними потребами у самих різних галузях.

Провідним методом дослідження подібних задач є метод функцій Ляпунова, який опинився вельми ефективним при аналізі як теоретичних, так і прикладних проблем. Однак, хоча у багатьох важливих прикладних задачах метод функцій Ляпунова і дозволяє отримати строгі умови стійкості за частиною змінних, тим не менш, у цілому питання конструктивної побудови функцій Ляпунова залишається маловивченим. У такій ситуації значний інтерес представляє як подальший розвиток методу Ляпунова х описом конструктивних шляхів побудови функцій Ляпунова.

1.3. Застосування демпфуючих пристроїв для стабілізації руху механічних систем

Задача усунення або зменшення небажаних вібрацій у механічних системах має давню історію. З цією метою використовують різні методи, у тому числі додавання до механічної системи різних демпфуючих пристроїв – динамічних абсорберів. За принципом дії їх поділяють на пасивні і активні (а також змішаного типу). Демпфери активного типу використовуються у випадках, коли потрібно керувати властивостями механічної системи і передбачають наявність зворотного зв’язку. Вони вимагають встановлення сенсорів, актуаторів і зовнішнього джерела енергії. До пристроїв пасивного типу відносять такі, які, будучи доданими до системи, виконують своє призначення за рахунок природних властивостей матеріалу. Сюди відносяться в'язкопружні матеріали, в'язкі рідини, магнітні пристрої, п'єзокерамічні демпфери та ін. Найбільш поширеним є використання в'язкопружних матеріалів (простота і відносна дешевизна).

Класичним прикладом демпфера пасивного типу є динамічний поглинач коливань (ДПК) [92]. Він являє собою приєднану масу, яка зазвичай моделюється як матеріальна точка і характеризується масою, жорсткістю і коефіцієнтом в'язкого тертя.

Перша математична теорія, яка присвячена ДПК, була представлена J. Ormondroyd і D. Hartog [93]. У роботі [94] D. Hartog першим розв'язав задачу пошуку оптимальних параметрів динамічного абсорбера, який приєднаний до класичної первинної системи, тобто системи без демпфування. У цьому дослідженні використовувалася особливість "фіксованих" частот, тобто частот, при яких амплітуда відгуку первинної маси не залежить від абсорбера. На підставі цих досліджень J. Brock [95] отримав аналітичний розв'язок для оптимального коефіцієнта демпфування ДПК.

ДПК може бути використаний для різних цілей. Так у роботі Chinnery A. E. [96] абсорбер застосовується для заспокоєння вільних коливань, а у статті Liu K., Liu J. [97] — для вібрацій, які викликані дією зовнішньої періодичної сили.

У всіх випадках при розв'язанні задачі оптимального проектування ДПК виникає задача оптимізації його конструкції. Однак при широкому частотному спектрі зовнішніх збурень, які викликаються різними факторами, можлива поява резонансних коливань. Пасивні ДПК тривалий час широко використовуються у будівництві для захисту висотних споруд від вітрових і сейсмічних навантажень. Так, наприклад, технічне застосування абсорберів описано у книзі Б. Г. Коренєва і Л. М. Рєзнікова [98], у статті Klein H. W. [99] та ін.

У роботі T. Dahlberg [100] розглянуто різні типи ДПК: одномасовий, двомасовий і континуальний. Показано перевагу двомасового ДПК над одномассовим і континуального над усіма. У якості прикладу розглядається балка Ейлера з декількома пружинними ДПК. Для аналізу вібрацій балок з різноманітними додатками M. Gurgoze і D. V. Bambill запропонували деякі класичні аналітичні методи [101, 102].

Зачасту ДПК застосовуються для стабілізації коливань систем маятникового типу. Подвійний маятник можна розглядати як спрощену модель зв'язаних тіл. Він знаходить широке застосування у техніці. Хоча його рух описується достатньо простою системою звичайних ДР, маятник може демонструвати динамічний рух, який може бути складним і непередбачуваним [103, 104].

Рух подвійного маятника дуже сильно залежить від початкових збурень. Ці збурення можуть спровокувати зростання амплітуди коливання другої ланки, що у свою чергу може призвести до хаотичного руху [105–107]. Для запобігання цього явища і застосовують ДПК.

У випадку звичайного маятника ДПК використовувався у роботах Peiffer K., Savchenko A. Ya. [75], He C., Liu G. [108], Viet L. D. [109] та інших. Відмітимо, що схожі задачі для маятникових систем розглядалися в роботах О. Я. Савченко, О. Є. Поздняковича [110] і В. Є. Пузирьова [111].

У статті [111] авторами розглянуто задачу пасивної стабілізації дволанкового пружного маятника, верхній стан рівноваги якого є стійким, але не асимптотично. Задача полягає у приєднанні до системи стабілізуючого пристрою (лінійний осцилятор з в'язким тертям) з таким розрахунком, щоб рух вихідної (основної) системи став асимптотично стійким.

Подібна задача розв'язана О. Я. Савченко та В. В. Кравченко [112] для фізичного маятника. При цьому стабілізуючий пристрій моделювався системою матеріальних точок. Разом із тим, система, яка досліджувалася, була істотно нелінійною, а саме — мав місце критичний випадок чисто уявних коренів.

О. Є. Позднякович і В. Є. Пузирьов у роботі [113] розглянули питання вибору параметрів динамічного поглинача коливань, що забезпечують його найбільшу ефективність. У якості ДПК обрано одноступеневий гідравлічний гасильник.

У роботі W. Szyszkowski та D. Stilling [114] ефект демпфування генерується у безмоторному коливальному фізичному маятнику шляхом безперервного руху допоміжної маси. Визначено основні параметри, які впливають на характеристики загасання маятникової системи. Показано, що безперервне загасання може бути досягнуте, якщо рух маси синхронізується з обертанням маятника. У іншому випадку система стає схильною до феномену "биття".

Для того, щоб максимізувати продуктивність звичайних динамічних поглиначів, H. Matsuhisa і M. Yasuda [115] запропонували новий тип динамічного поглинача, який переміщується вертикально. Цей поглинач складається з маси, яку підтримує пружина. Маса рухається вгору і вниз та викликає силу Коріоліса, щоб запобігти хитанню системи. Показано, що такий тип поглинача доцільно використовувати для зменшення розгойдування канатної дороги поривами вітру.

1.4. Висновки

Виконаний у даному розділі аналіз літератури дозволяє зробити наступні висновки.

1. До теперішнього часу залишається мало дослідженою задача про стійкість стану рівноваги системи у випадку, коли діючі сили залежать від часу або на систему накладено нестаціонарні зв'язки.
2. Разом з тим, задача про стійкість стану рівноваги нестаціонарної механічної системи є актуальною тому, що вона має широке застосування у дослідженні стійкості програмних рухів механічних систем та у дослідженні стійкості руху гіроскопічних систем, які можуть бути встановлені на об'єкті, що здійснює нестаціонарний просторовий рух.
3. Незважаючи на наявність різних підходів до дослідження стійкості руху за частиною змінних, основним методом усе ж таки залишається прямий метод Ляпунова. Тому значний інтерес представляє подальший розвиток прямого методу Ляпунова з описом конструктивних шляхів побудови функцій Ляпунова.
4. У критичних випадках стійкості руху актуальною також залишається задача побудови у явному вигляді функцій Ляпунова для нелінійних систем, що містять стійку і нейтральну компоненти.
5. Недостатньо досліджені задачі стабілізації обертань несиметричних твердих тіл, які природним чином виникають у низці прикладних задач.
6. Завдяки широкому практичному застосуванню маятникових систем актуальними залишаються задачі дослідження стійкості та стабілізації руху даних систем. Для стабілізації можна застосовувати ДПК різної конфігурації і обирати найбільш ефективний спосіб.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ

2.1. Вплив структури сил на стійкість руху механічних систем

Наведемо деякі теоретичні відомості, які викладені у [12].

2.1.1. Постановка задачі. Будемо вважати, що положення системи визначається s узагальненими координатами $q_1, ..., q_s$, а її рух описується рівняннями Лагранжа 2-го роду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),\ \frac{dq_k}{dt} = \dot{q}_k,\ (k = 1, ..., s). \tag{2.1}$$

У цих рівняннях кінетична енергія системи

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j \tag{2.2}$$

представляє собою додатно визначену квадратичную форму узагальнених швидкостей $\dot{\boldsymbol{q}}$ з коефіцієнтами інерції $a_{kj}(\boldsymbol{q}) = a_{jk}(\boldsymbol{q})$, які залежать від координат $\boldsymbol{q}$, а узагальнені сили Q_k є функціями координат $\boldsymbol{q}$ і швидкостей $\dot{\boldsymbol{q}}$.

Нехай

$$Q_k(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + D_k + \Gamma_k + R_k,$$

де Π – потенціальна енергія, $\Pi = -K_k\boldsymbol{q}/2$, K_k – потенціальні, D_k – дисипативні, Γ_k – гіроскопічні, R_k – неконсервативні позиційні (циркуляційні) сили.

Передбачається, що при $\boldsymbol{q} = 0$ потенціальна енергія дорівнює нулю. Також при $\boldsymbol{q} = 0$ рівними нулю стають потенціальні і циркуляційні сили, а при $\dot{\boldsymbol{q}} = 0$ – дисипативні і гіроскопічні сили. Передбачається, що сили задовільняють умовам існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння (2.1).

Будемо говорити, що значенням $\boldsymbol{q} = 0, \dot{\boldsymbol{q}} = 0$ відповідає рівновага системи, а рівняння (2.1) описує збурений рух біля стану рівноваги.

Задача ставиться наступним чином: як визначити характер стійкості рівноваги системи за структурою діючих сил?

Розглянемо також випадок, коли розкладання всіх сил за степенями $\boldsymbol{q}$ і $\dot{\boldsymbol{q}}$ містять лінійні частини. Для таких систем рівняння збуреного руху приводиться до вигляду

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{B}_1\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}^{(2)}, \tag{2.3}$$

де $\boldsymbol{A}$ – додатно визначена симетрична матриця, $\boldsymbol{B}_1$ і $\boldsymbol{C}_1$ – деякі квадратні матриці з постійними елементами, складові вектора $\boldsymbol{Q}^{(2)}$ містять координати q_k і швидкості $\dot{q}_k$ у степені вище першої.

Представимо матриці $\boldsymbol{B}_1$ і $\boldsymbol{C}_1$ як суму симетричної та кососиметричної матриць. Тоді отримаємо

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}^{(2)}, \tag{2.4}$$

Кінетична енергія цієї системи визначається рівністю (2.2), у якій коефіцієнти a_{kj} необхідно вважати сталими числами. Потенціальні, циркуляційні, дисипативні та гіроскопічні сили визначаються наступними рівностями

$$\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{C}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{R} = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{D} = -\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}},\ \boldsymbol{\Gamma} = -\boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{q}}.$$

Дисипативна функція Релея запишеться у вигляді

$$F = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}.$$

Рівняння збуреного руху (2.4) можна записати в іншій формі. Для цього перейдемо до нового вектору змінних $\boldsymbol{z}$ за формулою

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z},$$

де $\boldsymbol{\Lambda}$ – ортогональна матриця перетворення.

Підставивши у (2.4), маємо

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}\ddot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda}\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Z}_1.$$

Помножимо зліва обидві частини цього рівняння на транспоновану матрицю $\boldsymbol{\Lambda}^T$.

$$\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}\ddot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Lambda}\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Z}, \tag{2.5}$$

де $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{Z}_1$ – вектор, складові якого містять z_k і $\dot{z}_k$ у степені вище першої.

Теорема 2.1. *Якщо квадратні матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$ порядка s симетричні, причому матриця $\boldsymbol{A}$ знаковизначена, то:*

1) усі корені характеристичного рівняння $\det(\boldsymbol{A}\lambda + \boldsymbol{C}) = 0$ *є дійсними числами;*

2) завжди знайдеться така невласна матриця $\boldsymbol{\Lambda}$, що

$$\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{E},\ \ \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{C}_0,$$

де $\boldsymbol{E}$ – одинична, а $\boldsymbol{C}_0$ – діагональна матриця, $\boldsymbol{C}_0 = \mathtt{diag}(c_1, c_2, ..., c_s)$, причому $c_1, c_2, ..., c_s$ дорівнюють кореням характеристичного рівняння.

Нехай $\boldsymbol{\Lambda}$ саме така матриця. Неважко переконатися, що матриця $\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}$ буде симетричною, а матриці $\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Lambda}$ і $\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$ – кососиметричні.

Враховуючи цей факт і беручи до уваги те, що $\boldsymbol{E}\ddot{\boldsymbol{z}} = \ddot{\boldsymbol{z}}$, рівняння (2.5) перепишеться наступним чином

$$\ddot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{G}\dot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{z} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Z}, \tag{2.6}$$

де для простоти симетрична матриця $\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Lambda}$ і кососиметричні матриці $\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Lambda}$ і $\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$ позначені колишніми буквами $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{G}$ і $\boldsymbol{P}$ відповідно.

Таким чином, за допомогою лінійного ортогонального перетворення $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z}$ рівняння (2.4) можна привести до вигляду (2.6), причому потенціальні, дисипативні, гіроскопічні та циркуляційні сили перетворюються у сили тієї ж структури. Очевидно, що із стійкості (нестійкості) відносно координат $\boldsymbol{z}$ і швидкостей $\dot{\boldsymbol{z}}$ випливає стійкість (нестійкість) відносно координат $\boldsymbol{q}$ і швидкостей $\dot{\boldsymbol{q}}$ і навпаки.

2.1.2. Коефіцієнти стійкості. Нехай на систему діють лише потенціальні сили, які містять лінійну частину, а всі інші сили відсутні

($\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{R} = 0$). Тоді з (2.6) маємо

$$\ddot{\boldsymbol{z}} + \boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{z} = \boldsymbol{Z}.$$

Або

$$\begin{aligned} &\ddot{z}_1 + c_1 z_1 = Z_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ddot{z}_s + c_s z_s = Z_s, \end{aligned} \tag{2.7}$$

де функції z_k містять координати z_j і швидкості $\dot{z}_j$ у степені вище першої.

Лінійна частина кожного з рівнянь (2.7) містить лише одну координату (такі координати називають нормальними). Характеристичні числа k-го рівняння цієї системи дорівнюють $\pm\sqrt{-c_k}$. Звідси випливає, що якщо якенебудь число $c_k > 0$, то за відсутності відповідного нелінійного члена Z_k рух у нормальній координаті буде стійким. Якщо ж $c_k < 0$, то рух є нестійким незалежно від членів вищого порядку. У зв'язку з цим числа c_k називаються коефіцієнтами стійкості системи, а число від'ємних чисел – ступенем нестійкості. Передбачається, що серед коефіцієнтів стійкості немає нульових.

Справедливе просте правило: якщо визначник матриці $\boldsymbol{C}$ потенціальних сил вихідних рівнянь збуреного руху додатний, то ступінь нестійкості системи парна, якщо ж $\det \boldsymbol{C} < 0$, то ступінь нестійкості системи непарна.

2.1.3. Теореми Томсона – Тета – Четаєва.

Теорема 2.2 (Перша теорема Томсона – Тета – Четаєва). *Якщо нестійкість ізольованого стану рівноваги системи при одних потенціальних силах має непарну ступінь, то гіроскопічна стабілізація рівноваги неможлива за будь-яких членів, що містять координати і швидкості у степені вище першої.*

Теорема 2.3 (Друга теорема Томсона – Тета – Четаєва). *Якщо ізольований стан рівноваги системи стійкий при одних потенціальних силах, то при додаванні довільних гіроскопічних і дисипативних сил стійкість рівноваги зберігається.*

Теорема 2.4 (Третя теорема Томсона – Тета – Четаєва). *Якщо ізольований стан рівноваги системи стійкий при одних потенціальних силах, то він стає асимптотично стійким при додаванні довільних гіроскопічних сил і сил опору з повною дисипацією.*

Теорема 2.5 (Четверта теорема Томсона – Тета – Четаєва). *Якщо у околі ізольованого нестійкого стану рівноваги консервативної системи потенціальна енергія може мати від'ємні значення, то при додаванні сил з повною дисипацією і довільних гіроскопічних сил рівновага залишаетъся нестійкою.*

2.1.4. Стійкість дисипативної механічної системи з частковою дисипацією енергії. Наведемо результат із [17], який дозволить більш просто досліджувати стійкість руху механічної системи.

Припустимо, що рівняння руху механічної системи описуються наступною системою диференціальних рівнянь

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}(t, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}_1 + \boldsymbol{N}(t, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}), \tag{2.8}$$

де квадратні матриці $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ порядка $m+n$ і $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ порядка m є симетричними, квадратна матриця $\boldsymbol{B}$ – кососиметрична, $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2)^T$, тобто вектор $\boldsymbol{q}$ ділиться на підвектора $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ порядка m, n відповідно. Вектор $N(t, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q})$ являє собою набір довільних нелінейних членів. Залежність від t є переіодичною або квазіперіодичною.

Припустимо, що система забезпечує стійкий рух:

$$\boldsymbol{q} = 0,\ \dot{\boldsymbol{q}} = 0. \tag{2.9}$$

Передбачається, що матриця $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{F}(t, 0, 0)$ додатно визначена для $t \geqslant 0$. Через $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{d}_{22}$ позначаються лінійні диференціальні оператори

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{A}\frac{d^2}{dt^2} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_0)\frac{d}{dt} + \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{d}_{22} = \boldsymbol{A}_{22}\frac{d^2}{dt^2} + \boldsymbol{B}_{22}\frac{d}{dt} + \boldsymbol{C}_{22},$$

а $\boldsymbol{D}(\lambda), \boldsymbol{D}_{22}(\lambda)$ – відповідні $\lambda-$матриці:

$$\boldsymbol{D}(\lambda) = \boldsymbol{A}\lambda^2 + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{F}_0)\lambda + \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{D}_{22}(\lambda) = \boldsymbol{A}_{22}\lambda^2 + \boldsymbol{B}_{22}\lambda + \boldsymbol{C}_{22}.$$

Нехай λ_0 є власним значенням для $\boldsymbol{d}_{22}$, а $\boldsymbol{\gamma}_{20}$ – відповідний власний вектор. Введемо до розгляду рівність

$$\boldsymbol{D}_{12}(\lambda_0)\boldsymbol{\gamma}_{20} = 0. \tag{2.10}$$

Теорема 2.6. *Розглянемо механічну систему, рух якої описується рівняннями* (2.8)*, і припустимо, що для жодного власного значення оператора* $\boldsymbol{d}_{22}$ *не виконується рівність* (2.10)*. Тоді додавання до системи довільної дисипативної сили, яка забезпечує повну дисипацію енергії (по лінійним членам) по* $\dot{\boldsymbol{q}}_1$*, приводить до наступних результатів:*

I) Якщо всі власні значення матриці $\boldsymbol{C}$ *додатні, то стан рівноваги* (2.9) *стає асимптотично стійким. Стійкість є експоненціальною і рівномірною.*

II) Якщо матриця $\boldsymbol{C}$ *має хоча б одне від'ємне власне значення, то стан рівноваги* (2.9) *є нестійким, навіть у тому випадку, коли попередньо він був стабілізований за допомогою гіроскопічних сил. Серед збурених окремих розв'язків системи принаймні один має від'ємне число Ляпунова.*

2.2. Елементи теорії збурень

Наведемо формули для уточнення коренів рівнянь вищих порядків, викладені у [116].

Розглянемо рівняння вищих порядків, коли малий параметр стоїть множником при найбільшій степені невідомої.

$$\varepsilon x^n = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots + a_1 x + a_0, \tag{2.11}$$

де коефіцієнти a_s не залежать від ε і x, n і m – цілі числа і $n > m$. При $\varepsilon \to 0$ рівняння (2.11) зводиться до рівняння

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{2.12}$$

яке має корені α_s, де $s = 1, 2, ..., m$.

Будемо шукати корені рівняння (2.11) при малому ε. Рівняння (2.11) називається збуреним рівнянням, а (2.12) – незбуреним або виродженим рівнянням. При малому, але скінченному, ε природно очікувати, що корені рівняння (2.11) будуть лише трохи відрізнятися від коренів рівняння (2.12).

Перший крок при знаходженні наближеного розв'язку полягає у виборі форми розкладання. Припустимо, що шукані корені можна представити у вигляді

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ..., \tag{2.13}$$

де багатокрапкою позначено доданки, для яких показник степеня $n \geqslant 3$. У більшості випадків визначають тільки один або два члени розкладання, оскільки обчислення членів вищих порядків виявляється дуже громіздким. Наприклад, у багатьох нелінійних фізичних задачах знаходження членів вищих порядків виявляється достатньо складною процедурою навіть при використанні обчислювальної техніки.

Перший член розкладання x_0 називають членом нульового порядка, другий, εx_1, – членом першого порядка і т.д.

Підставимо (2.13) у (2.11). Маємо

$$\varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + ...)^n = (x_0 + \varepsilon x_1 + ...)^m + a_{m-1}(x_0 + \varepsilon x_1 + ...)^{m-1} +$$
$$+ a_{m-2}(x_0 + \varepsilon x_1 + ...)^{m-2} + ... + a_1(x_0 + \varepsilon x_1 + ...) + a_0$$

або

$$x_0^m + a_{m-1}x_0^{m-1} + a_{m-2}x_0^{m-2} + ... + a_1 x_0 + a_0 + \varepsilon[m x_0^{m-1} + (m-1)a_{m-1}x_0^{m-2} +$$
$$+ (m-2)a_{m-2}x_0^{m-3} + ... + a_1]x_1 - \varepsilon x_0^n + O(\varepsilon^2) = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε, отримуємо

$$x_0^m + a_{m-1}x_0^{m-1} + a_{m-2}x_0^{m-2} + ... + a_1 x_0 + a_0 = 0, \tag{2.14}$$

$$[m x_0^{m-1} + (m-1)a_{m-1}x_0^{m-2} + (m-2)a_{m-2}x_0^{m-3} + ... + a_1]x_1 = x_0^n. \tag{2.15}$$

Рівняння (2.14) співпадає з (2.12) і має ті ж самі корені $x_0 = \alpha_s$, де $s = 1, 2, ..., m$. Тоді із (2.15) випливає, що

$$x_1 = \alpha_s^n [m\alpha_s^{m-1} + (m-1)a_{m-1}\alpha_s^{m-2} + ... + a_1]^{-1}.$$

Таким чином,

$$x = \alpha_s + \varepsilon \alpha_s^n [m\alpha_s^{m-1} + (m-1)a_{m-1}\alpha_s^{m-2} + ... + a_1]^{-1} + ... \, . \tag{2.16}$$

Необхідно зазначити, що розкладання (2.16) стає непридатним щоразу, коли член у квадратних дужках прямує до нуля. Це відповідає випадку кратного кореня рівняння (2.14). У такому разі розкладання має включати у себе дробові степені ε.

Перш ніж приступити до визначення $n - m$ коренів, що ще залишилися невідомими, відмітимо, що вони прямують до нескінченності при $\varepsilon \to 0$, оскільки малий параметр ε стоїть множником при найбільшій степені невідомої x. Тому розкладання для них будемо відшукувати у вигляді

$$x = \frac{y}{\varepsilon^\nu} + x_0 + ..., \;\; \nu > 0. \tag{2.17}$$

Підставивши (2.17) у (2.12), маємо

$$\begin{gathered} \varepsilon\left(\frac{y^n}{\varepsilon^{n\nu}} + \frac{ny^{n-1}x_0}{\varepsilon^{(n-1)\nu}} + ...\right) = \frac{y^m}{\varepsilon^{m\nu}} + \frac{my^{m-1}x_0}{\varepsilon^{(m-1)\nu}} + ... + \\ + \frac{a_{m-1}y^{m-1}}{\varepsilon^{(m-1)\nu}} + \frac{(m-1)a_{m-1}y^{m-2}x_0}{\varepsilon^{(m-2)\nu}} + ... \, . \end{gathered} \tag{2.18}$$

Виокремлюючи головні члени, отримуємо

$$\varepsilon^{(1-n\nu)} y^n = \varepsilon^{-m\nu} y^m.$$

Отже, $1 - n\nu = -m\nu$, тоді

$$\nu = \frac{1}{n-m}, \tag{2.19}$$

$$y^n = y^m. \tag{2.20}$$

Для рівняння (2.20) нуль є коренем кратності m. Окрім того,

$$y^{n-m} = 1 = e^{2\pi i r},$$

де $r = 1, 2, ..., (n-m)$. Звідси

$$y = \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-m}; \;\; \omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{n-m}\right). \tag{2.21}$$

Корінь $y = 0$ ми не беремо до уваги, оскільки він відповідає першим s кореням.

Використовуючи (2.19) і (2.20), перепишемо (2.18) у вигляді

$$ny^{n-1}x_0\varepsilon^\nu = my^{m-1}x_0\varepsilon^\nu + a_{m-1}y^{m-1}\varepsilon^\nu + \dots .$$

Порівняння коефіцієнтів при ε^ν у обох частинах цієї рівності дає

$$ny^{n-1}x_0 = my^{m-1}x_0 + a_{m-1}y^{m-1},$$

звідки

$$x_0 = \frac{a_{m-1}y^{m-1}}{ny^{n-1} - my^{m-1}} = \frac{a_{m-1}}{ny^{n-m} - m} = \frac{a_{m-1}}{n-m}. \tag{2.22}$$

Таким чином, $n - m$ коренів, що залишилися невідомими, задаються розкладаннями

$$x = \frac{\omega^r}{\varepsilon^\nu} + \frac{a_{m-1}}{n-m} + \dots,\ r = 1, 2, \dots, n-m, \tag{2.23}$$

де ν і ω визначаються формулами (2.19) і (2.21) відповідно.

2.3. Елементи теорії стійкості руху механічних систем

Наведемо деякі означення, теореми і факти теорії стійкості руху, викладені у [58].

2.3.1. Основні означення. Рівняння збуреного руху.

Розглянемо довільну динамічну систему і припустимо, що її рух може бути описаний системою диференціальних рівнянь, яка може бути приведена до нормального вигляду

$$\frac{dy_s}{dt} = Y_s(t, y_1, \dots, y_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n), \tag{2.24}$$

де y_s – деякі параметри, які пов'язані з рухом (координати, швидкості або деякі функції цих величин).

Розглянемо який-небудь частковий рух, якому відповідає деякий частковий розв'язок $y_s = f_s(t)$ рівнянь (2.24). Цей рух називається незбуреним, на відміну від інших рухів системи, які називаються збуреними. Різниці значень величин y_s у якомусь збуреному і незбуреному русі називаються збуреннями.

Означення 2.1. *Незбурений рух називається стійким по відношенню до величин y_s, якщо для будь-якого додатного числа ε, яким би малим воно не було, знайдеться інше додатне число $\eta(\varepsilon)$, таке, що для всіх збурених рухів $y_s = y_s(t)$, для яких у початковий момент часу $t = t_0$ виконуються нерівності*

$$|y_s(t_0) - f_s(t_0)| \leqslant \eta, \tag{2.25}$$

будуть при усіх $t > t_0$ виконуватися нерівності

$$|y_s(t) - f_s(t)| < \varepsilon. \tag{2.26}$$

Незбурений рух називається нестійким, якщо він не є стійким. Таким чином, для нестійкості руху достатньо, щоб існувало яке-небудь фіксоване число ε і при будь-якому, як завгодно малому, η хоча б для одного із збурених рухів, для якого виконуються нерівності (2.25), у певний момент часу хоча б одна з нерівностей (2.26) перетворилася у рівність.

Для дослідження стійкості доцільно у рівняннях руху зробити перехід до нових змінних

$$x_s = y_s - f_s(t) \quad (s = 1, 2, ..., n), \tag{2.27}$$

де $f_s(t)$ – частковий розв'язок рівнянь (2.24), який відповідає незбуреному руху і, як наслідок, x_s – збурення.

Отримані таким чином перетворені рівняння

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, ..., x_n) \equiv Y_s(t, x_1 + f_1, ..., x_n + f_n) - Y_s(t, f_1, ..., f_n) \tag{2.28}$$

називаються диференціальними рівняннями збуреного руху. Кожному руху даної системи відповідає частний розв'язок рівнянь (2.28). Зокрема, незбуреному руху відповідає тривіальний розв'язок $x_1 = ... = x_n = 0$, який система (2.28) повинна мати. Для цього необхідно, щоб функції $X_s(t, x_1, ..., x_n)$ дорівнювали нулю при $x_1 = ... = x_n = 0$.

У змінних x_s нерівності (2.25) і (2.26) мають відповідний вигляд

$$|x_s(t_0)| \leqslant \eta, \tag{2.29}$$

$$|x_s(t)| < \varepsilon. \tag{2.30}$$

І, як наслідок, визначення стійкості руху системи формулюється наступним чином.

Означення 2.2. *Незбурений рух називається стійким, якщо для будь-якого додатного числа ε, яким би малим воно не було, можна підібрати інше додатне число $\eta(\varepsilon)$ таке, що для усіх збурених рухів, для яких у початковий момент часу t_0 виконуються нерівності* (2.29), *при усіх $t > t_0$ будуть виконуватися нерівності* (2.30).

Означення 2.3. *Якщо незбурений рух є стійким, і якщо число η можна обрати настільки малим, що для усіх збурених рухів, які задовільняють нерівностям* (2.29), *будуть виконуватися умови*

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0, \tag{2.31}$$

то незбурений рух називається стійким асимптотично.

2.3.2. Прямий метод Ляпунова.

2.3.2.1. Функції Ляпунова. Критерій Сильвестра. Будемо розглядати усталені рухи, для яких диференціальні рівняння збуреного руху мають вигляд

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, ..., x_n) \quad (s = 1, 2, .., n), \tag{2.32}$$

де X_s не залежить явно від t.

Нехай задана область

$$|x_s| \leqslant H \quad (s = 1, 2, .., n), \tag{2.33}$$

де H – деяка стала.

Передбачається, що функції X_s у області (2.33) неперервні і такі, що рівняння (2.32) для кожної системи початкових значень x_s^0 величин x_s, що належать області (2.33), допускають єдиний розв'язок.

Будемо розглядати деякі функції $V(x_1, ..., x_n)$ змінних $x_1, ..., x_n$, які визначені в деякому околі початку координат. Передбачається, що вони однозначні, дорівнюють нулю при $x_1 = ... = x_n = 0$ і мають неперервні частинні похідні. Функції, що мають такі властивості, називаються функціями Ляпунова.

Означення 2.4. *Функція $V(x_1, ..., x_n)$ називаєтъся знаковизначеною (додатно визначеною або від'ємно визначеною), якщо вона при*

$$|x_s| \leqslant h, \tag{2.34}$$

де h – достатньо мале додатне число, може набувати значення тільки одного певного знака і дорівнює нулю тільки при $x_1 = ... = x_n = 0$.

Означення 2.5. *Функція $V(x_1, ..., x_n)$ називаєтъся знакосталою (додатною або від'ємною), якщо вона у області (2.34) може набувати значення тільки одного певного знака, але може дорівнювати нулю і при $x_1^2 + ... + x_n^2 \neq 0$.*

Означення 2.6. *Функція $V(x_1, ..., x_n)$ називаєтъся знакозмінною, якщо вона не є ні знаковизначеною, ні знакопостійною і, отже, яким би малим не було число h, може набувати у області (2.34) як додатні, так і від'ємні значення.*

Для практичного застосування другого (прямого) методу Ляпунова необхідно знати критерії знаковизначенності і знакозмінності функцій. Загальних критеріїв такого роду не існує. Наведемо деякі із них.

Нехай $V(x_1, ..., x_n)$ являє собою однорідну форму m-го порядка. Так при довільному λ виконуєтья тотожність

$$V(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) = \lambda^m V(x_1, ..., x_n),$$

тоді, якщо форма V є знаковизначеною, то знаковизначенність буде мати місце у всьому просторі, а не тільки в околі початка координат. Те ж саме буде справедливе і відносно знакозмінності. Знаковизначеність може мати місце тільки при m парному.

Лема 2.1. *Будь-яка форма непарного порядку є функція знакозмінна.*

Якщо m – парне число, то форма V може бути як знаковизначена, так і знакозмінна.

Нехай має місце квадратична форма

$$2V = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta. \tag{2.35}$$

Теорема 2.7 (Критерій Сильвестра). *Для того, щоб квадратична форма (2.35) була додатно визначеною (від'ємно визначеною), необхідно і достньо, щоб усі головні мінори її дискримінанта, тобто величини*

$$c_{11}, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

були додатними (чергували свій знак, причому $c_{11} < 0$).

2.3.2.2. Теореми про стійкість і нестійкість руху.

Теорема 2.8 (Перша теорема Ляпунова про стійкість). *Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можливо знайти знаковизначену функцію $V(x_1, ..., x_n)$, повна похідна якої за часом, яка записана у силу цих рівнянь, є знакостала функція, знак якої протилежний до V, або тотожно дорівнює нулю, то незбурений рух стійкий.*

Теорема 2.9 (Друга теорема Ляпунова про стійкість). *Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можливо знайти знаковизначену функцію $V(x_1, ..., x_n)$, повна похідна якої за часом, яка записана у силу цих рівнянь, є знаковизначена функція, знак якої протилежний до V, то незбурений рух стійкий асимптотично.*

Теорема 2.10 (Перша теорема Ляпунова про нестійкість). *Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можливо знайти функцію $V(x_1, ..., x_n)$ таку, що її повна похідна за часом dV/dt, яка записана у силу цих рівнянь, є знаковизначена функція, а сама функція V не буде знакосталою, знак якої протилежний до dV/dt, то незбурений рух нестійкий.*

Теорема 2.11 (Друга теорема Ляпунова про нестійкість). *Якщо існує функція V така, що її повна похідна за часом t, яка записана у силу* *рівнянь збуреного руху, має у області $|x_s| \leqslant h \leqslant H$ вигляд*

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W(x_1, ..., x_n),$$

де λ – додатна стала, а W тотожно дорівнює нулю або є знакосталою функцією, і якщо у останньому випадку функція V не є знакосталою, знак якої протилежний до W, то незбурений рух нестійкий.

Теорема 2.12 (М. Г. Четаєва). *Якщо для диференціальних рівнянь збуреного руху можливо знайти таку функцію $V(x_1, ..., x_n)$, що*

1) у як завгодно малому околі початку координат існує область, де $V > 0$, на межі якої $V = 0$, і

2) у всіх точках області $V > 0$ похідна dV/dt набуває додатних значень, то незбурений рух нестійкий.

2.3.2.3. Методика побудови функцій Ляпунова. У даному підпункті будемо використовувати методологію, яка викладена у [71].

Нехай задана система ЗДР порядка $2m + l$, яка має вигляд

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \sum_{s=1}^{l} \xi_s \widetilde{\boldsymbol{C}}^{(s)} \boldsymbol{x}, \quad \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi} + \sum_{s=1}^{2m} x_s \widetilde{\boldsymbol{D}}^{(s)} \boldsymbol{x}, \tag{2.36}$$

де $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2m}$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{l}$, $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \widetilde{\boldsymbol{C}}^{(s)}$ $(s = \overline{1, 2m})$ – дійсні квадратні матриці, $\widetilde{\boldsymbol{D}}^{(j)}$ $(j = \overline{1, 2m})$ – дійсні прямокутні матриці порядка $l \times 2m$. Матриця $\boldsymbol{A}$ має власні значення $\pm i\omega_1, ..., \pm i\omega_m$ $(0 < \omega_1 < ... < \omega_m)$, а дійсні частини власних значень матриці $\boldsymbol{B}$ від'ємні.

Змінні x_s $(s = \overline{1, 2m})$ будемо називати критичними, а ξ_j $(j = \overline{1, l})$ – некритичними.

За допомогою лінійного невиродженого перетворення критичних змінних

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{z}$$

приведемо систему (2.36) до вигляду

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{z} + \sum_{s=1}^{l} \xi_s \boldsymbol{C}_{\star}^{(s)} \boldsymbol{z}, \quad \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi} + \sum_{s=1}^{2m} z_s \boldsymbol{D}^{(s)} \boldsymbol{z}, \tag{2.37}$$

де $\boldsymbol{J} = \operatorname{diag}(i\omega_1, ..., i\omega_m, -i\omega_1, ..., -i\omega_m)$ – жорданова форма матриці $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{y}, \bar{\boldsymbol{y}})^T$, $\boldsymbol{C}_\star^{(s)} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{C}}^{(s)}\boldsymbol{\Lambda}$, елементи матриць $\boldsymbol{D}^{(s)}$ відомим чином виражаються через елементи матриць $\widetilde{\boldsymbol{D}}^{(s)}$, $\boldsymbol{\Lambda}$. Риса зверху означає комплексне спряження, верхній індекс T – транспонування. Очевидно, що j-ий і $j+m$-ий рядки матриць $\boldsymbol{C}_\star^{(s)}$ є комплексно спряженими, тобто $\boldsymbol{C}_\star^{(s)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}^{(s)} \\ \overline{\boldsymbol{C}}^{(s)} \end{pmatrix}$.

Згідно з роботами [62, 75], введемо наступні позначення. Нехай $P = (p_1, ..., p_m)$ – m-вимірний індекс,

$$p = |P| = p_1 + ... + p_m,$$

однорідну форму порядка n запишемо як

$$\sum_{p+q=n} k_{PQ}\boldsymbol{y}^P\bar{\boldsymbol{y}}^Q = \sum_{p+q=n} k_{p_1...p_m q_1...q_m} y_1^{p_1}...y_m^{p_m}\bar{y}_1^{q_1}...\bar{y}_m^{q_m}.$$

Позначимо

$$V_0^{(2)}(\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j \bar{y}_j$$

і оберемо функцію Ляпунова у вигляді

$$\begin{aligned} &V(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) = V_0^{(2)}(\boldsymbol{z}) + \alpha_{m+1}V^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + V^{(3)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) + V^{(4)}(\boldsymbol{z}), \\ &V^{(3)} = \sum_{s=1}^{l} \xi_s \widetilde{V}_s^{(2)}(\boldsymbol{z}), \end{aligned} \tag{2.38}$$

де α_j $(j = \overline{1, m})$, α_{m+1} – деякі дійсні сталі, $V^{(2)}$ – додатно визначена квадратична форма, $\widetilde{V}_s^{(2)} = \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{K}^{(s)}\boldsymbol{z}$, елементи матриць $\boldsymbol{K}^{(s)}$ будуть визначені нижче. Позначимо через $\boldsymbol{\alpha y}$ вектор $(\alpha_1 y_1, ..., \alpha_m y_m)$, тоді

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_j \bar{y}_j = \langle \boldsymbol{\alpha y}, \bar{\boldsymbol{y}} \rangle,$$

де кутові дужки означають скалярний добуток.

Обчислимо похідну dV/dt у силу системи (2.37) і подамо її у вигляді суми

$$\dot{V}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) = \dot{V}^{(2)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) + \dot{V}^{(3)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) + \dot{V}^{(4)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) + ...$$

Запишемо вирази для форм $\dot{V}^{(s)}(s=\overline{2,4})$.

$$\dot{V}^{(2)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi}) = -\alpha_{m+1}U^{(2)}(\boldsymbol{\xi}),$$

при цьому, оскільки спектр матриці $\boldsymbol{B}$ належить дійсній лівій півплощині, то форму $V^{(2)}$ можна обрати таким чином, що $U^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$ буде додатно визначеною.

$$\begin{gathered}\dot{V}^{(3)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{s=1}^{l}[(\boldsymbol{b}_s\boldsymbol{\xi})\widetilde{V}_s^{(2)}(\boldsymbol{z}) + \xi_s(\text{grad }\widetilde{V}_s^{(2)})(\boldsymbol{J}\boldsymbol{z})] + \\ + \langle\boldsymbol{\alpha}\bar{\boldsymbol{y}}, \sum_{s=1}^{l}\xi_s\boldsymbol{C}^{(s)}\boldsymbol{z}\rangle + \langle\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{y}, \sum_{s=1}^{l}\xi_s\overline{\boldsymbol{C}}^{(s)}\bar{\boldsymbol{z}}\rangle + \beta\langle\text{grad }V^{(2)}, \sum_{s=1}^{2m}z_s\boldsymbol{D}^{(s)}\boldsymbol{z}\rangle,\end{gathered} \tag{2.39}$$

$$\dot{V}^{(4)}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\xi}) = (\text{grad }\widetilde{V}^{(4)})(\boldsymbol{J}\boldsymbol{z}) + \sum_{s=1}^{l}\xi_s(\text{grad }\widetilde{V}_s^{(2)})\sum_{s=1}^{l}\xi_s\boldsymbol{C}^{(s)}\boldsymbol{z} + \langle\widetilde{\boldsymbol{V}}^{(2)}, \sum_{s=1}^{2m}z_s\boldsymbol{D}^{(s)}\boldsymbol{z}\rangle, \tag{2.40}$$

де $\boldsymbol{b}_s$ означає s-ий рядок матриці $\boldsymbol{B}$; $\widetilde{\boldsymbol{V}}^{(2)} = (\widetilde{V}_1^{(2)}, ..., \widetilde{V}_l^{(2)})^T$.

Визначимо елементи матриць $\boldsymbol{K}^{(s)}$ таким чином, щоб

$$\dot{V}^{(3)} \equiv 0.$$

Прирівнюючи нулю коефіцієнти при різних доданках виду $\xi_s\boldsymbol{y}^P\bar{\boldsymbol{y}}^Q$ $(s=\overline{1,l}, p+q=2)$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $k_{PQ}^{(s)}$. Ця система розпадається на $2m^2+m$ підсистем s-го порядка з матрицями, що мають вигляд

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}^T + i\Omega_{PQ}\boldsymbol{E},$$

де $\Omega_{PQ} = (p_1-q_1)\omega_1 + ... + (p_m-q_m)\omega_m$, $\boldsymbol{E}$ – одинична матриця порядка l.

Очевидно, що $\det\widetilde{\boldsymbol{B}} \neq 0$, тому шукані коефіцієнти однозначно виражаються через елементи матриць $\boldsymbol{C}^{(s)}$, і є при цьому лінійною комбінацією параметрів $\alpha_1, ..., \alpha_m, \alpha_{m+1}$.

Аналогічно, коефіцієнти форми $V^{(4)}$ можна обрати таким чином, щоб

$$\dot{V}^{(4)} = \sum_{p=2}^{m}G_P\boldsymbol{y}^P\overline{\boldsymbol{y}}^P,$$

де G_P являють собою лінійні комбінації різних добутків коефіцієнтів $k_{PQ}^{(s)}$ на елементи матриць $\boldsymbol{D}^{(s)}$ і, як наслідок, можуть бути записані як

$$G_P = \alpha_1 G_P^{(1)} + ... + \alpha_m G_P^{(m)} + \alpha_{m+1} G_P^{(m+1)}. \tag{2.41}$$

Величини $G_P^{(s)}$, $s = \overline{1,m}$ називають коефіцієнтами стійкості, вони залежать від коефіцієнтів правих частин системи (2.37) (і не залежать від множників α_s) і дозволяють застосовувати теореми Ляпунова або Четаєва, тобто робити висновок про стійкість (нестійкість) розв'язку, що досліджується. Для цієї мети можна використовувати теореми монографії [71], які дають необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості (за винятком деяких граничних випадків) і достатні умови нестійкості.

2.3.3. Стійкість руху за першим наближенням. Нехай диференціальні рівняння збуреного руху мають вигляд

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_n + X_s(x_1, ..., x_n) \quad (s = 1, 2, .., n), \tag{2.42}$$

де p_{sj} – сталі, X_s – функції змінних $x_1, ..., x_n$, які не залежать від t і розкладаються у області $|x| \leqslant H$ у ряди за степенями цих змінних, причому розкладання починаються членами не нижче другого порядку.

Розглянемо рівняння першого наближення

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + ... + p_{sn}x_n \quad (s = 1, 2, .., n).$$

Запишемо рівняння n-го ступеня

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & ... & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22} - \lambda & ... & p_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{1n} & p_{2n} & ... & p_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.43}$$

Це рівняння називається характеристичним рівнянням, а визначник $D(\lambda)$ – характеристичним визначником. Нехай λ_j $(j = 1, 2, ..., n)$ – корені цього рівняння.

Справедливі наступні твердження:

1. Якщо усі корені рівняння (2.43) мають від'ємні дійсні частини, то незбурений рух асимптотично стійкий.

2. Якщо серед коренів рівняння (2.43) є хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений рух нестійкий.

3. Якщо рівняння (2.43) не має коренів з додатною дійсною частиною, але є частина коренів з нульовою дійсною частиною, то може мати місце як стійкість, так і нестійкість. Такі випадки називаються критичними у розумінні Ляпунова і вимагають подальшого дослідження (наприклад, за допомогою прямого методу Ляпунова).

Таким чином, питання про стійкість незбуреного руху зводиться до дослідження характеру коренів рівняння (2.43).

Розкриваючи визначник у (2.43), отримаємо рівняння

$$f(\lambda) = \lambda^4 + p_1\lambda^{n-1} + ... + p_n = 0. \tag{2.44}$$

Із коефіцієнтів полінома $f(\lambda)$ складемо матрицю

$$\begin{pmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & 0 & 0 & ... \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

У записі цієї матриці вважаємо, що $p_m = 0$, якщо $m > n$. Розглянемо визначники

$$\Delta_1 = p_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix},\ ...,\ \Delta_n = a_n\Delta_{n-1}.$$

Теорема 2.13 (Критерій Гурвіца). *Для того, щоб усі корені рівняння* (2.43) *мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо виконання нерівностей* $\Delta_k > 0$ *при* $k = 1, ..., n$.

Ці умови називаються умовами Рауса – Гурвіца.

Теорема 2.14 (Критерій стійкості Льєнара – Шипара). *У тому випадку, коли усі коефіцієнти характеристичного рівняння* (2.43) *додатні* ($p_1 > 0, ..., p_n > 0$)*, із того факту, що визначники* $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5, ...$ *з непарними індексами додатні, випливає і додатність визначників Гурвіца* $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, ...$ *з непарними індексами і навпаки.*

2.3.4. Стійкість за частиною змінних. Теорема Румянцева – Озиранера. Розглянемо механічну систему, рівняння руху якої описуються наступною системою ЗДР

$$\dot{\boldsymbol{x}} = X(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \dot{\boldsymbol{y}} = Y(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{2.45}$$

де X, Y – неперервні функції такі, що

$$X : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n,$$

$$Y : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^m,$$

де $\boldsymbol{I} = [0; +\infty)$, а $\boldsymbol{\Omega}$ – область у $\boldsymbol{R}^n$, яка містить початок координат.

Передбачається, що

$$X(t, 0, 0) \equiv 0, \ Y(t, 0, 0) \equiv 0$$

для усіх $t \in \boldsymbol{I}$ і, крім того, функції $X(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), Y(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ неперервні у області $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^m$, задовільняють умовам, які забезпечують єдність розв'язку системи ДР (2.45).

Розглянемо питання стійкості нульового розв'язку системи (2.45).

Наведемо деякі означення [71] і теорему [88], які необхідні для подальшого дослідження.

Означення 2.7. *Функція* $V(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) : \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}$ *допускає нескінченно малу найвищу границю відносно* $\boldsymbol{x}$*, якщо для деякої функції* $b \in \boldsymbol{K}$ *виконується нерівність*

$$|V(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant b(||\boldsymbol{x}||),$$

де $\boldsymbol{K}$ *– клас функцій Хана,* $||\cdot||$ *– евклідова норма:*

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, ||\boldsymbol{y}|| = \sqrt{y_1^2 + \ldots + y_m^2}.$$

Означення 2.8. *Розв'язок* $\boldsymbol{z} = 0$ *системи* (2.45) *рівномірно стійкий по відношенню до* $\boldsymbol{x}$, *якщо для заданого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *таке, що*

$$||\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{z}_0)|| < \varepsilon$$

для будь-яких $t_0, \boldsymbol{z}_0, t$, *які задовільняють умовам* $t_0 \in \boldsymbol{I}, ||\boldsymbol{z}_0|| < \delta$ *і* $t \geqslant t_0$.

Означення 2.9. *Розв'язок* $\boldsymbol{z} = 0$ *системи* (2.45) *рівномірно асимптотично стійкий по відношенню до* $\boldsymbol{x}$ *(рівномірно* $\boldsymbol{x}$*-стійкий) і область* $\boldsymbol{G}_\delta \subset \boldsymbol{R}^{n+m}$ *лежить у області х-тяжіння, якщо він рівномірно стійкий по відношенню до* $\boldsymbol{x}$, *і виконуються умови*

$$\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{z}_0) \in \boldsymbol{\Gamma}, t \geqslant t_0, \lim_{t\to\infty} ||\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{z}_0)|| = 0, \qquad (2.46)$$

причому співвідношення (2.46) *виконується рівномірно по* $t_0, \boldsymbol{z}_0$ *із області* $t_0 \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{z}_0 \in \boldsymbol{G}_\delta$, *тобто для будь-якого* $\eta > 0$ *знайдеться* $T(\eta) > 0$, *таке, що із* $t_0 \in \boldsymbol{I}, \boldsymbol{z}_0 \in \boldsymbol{G}_\delta$ *слідує*

$$||\boldsymbol{x}(t, t_0, \boldsymbol{z}_0)|| < \eta$$

для усіх $t \geqslant t_0 + T$. *Тут* $\boldsymbol{\Gamma}$ *– деяка певна наперед задана область, що лежить у області* $\boldsymbol{\Omega}$.

Теорема 2.15 (Румянцев В. В., Озиранер О. С.). *Якщо для ДР збуреного руху* (2.45) *у області* $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{R}^m$ *можна підібрати додатно визначену відносно* $\boldsymbol{x}$ *функцію, яка буде мати від'ємно визначену відносно* $\boldsymbol{x}$ *похідну* dV/dt, *яка записана у силу цих рівнянь, то існує область* $\boldsymbol{\Omega}_\delta, (0 \in \boldsymbol{\Omega}_\delta \in \boldsymbol{\Gamma})$, *така, що незбурений рух* $\boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{y} = 0$ *є рівномірно асимптотично стійким відносно* $\boldsymbol{x}$ *і область* $\boldsymbol{\Omega}_\delta \times \boldsymbol{R}^m$ *лежить у області* $\boldsymbol{x}$*-тяжіння.*

РОЗДІЛ 3
ПРЯМИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА І СТІЙКІСТЬ ДЕЯКИХ МАЯТНИКОВИХ СИСТЕМ

3.1. Побудова функції Ляпунова для модельної системи у критичному випадку чисто уявних коренів

3.1.1. Постановка задачі. Нехай задана система звичайних ДР порядку $2m+l$, що має вигляд

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\sum_{s=1}^{l}\xi_s\widetilde{\boldsymbol{C}}^{(s)}\boldsymbol{x},\quad \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\xi}+\sum_{s=1}^{2m}x_s\widetilde{\boldsymbol{D}}^{(s)}\boldsymbol{x},\tag{3.1}$$

де $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{2m}$, $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{l}$, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\widetilde{\boldsymbol{C}}^{(s)}$ $(s=\overline{1,2m})$ – дійсні квадратні матриці, $\widetilde{\boldsymbol{D}}^{(j)}$ $(j=\overline{1,2m})$ – дійсні прямокутні матриці порядку $l\times 2m$. Матриця $\boldsymbol{A}$ має власні значення $\pm i\omega_1,...,\pm i\omega_m$ $(0<\omega_1<\cdots<\omega_m)$, а дійсні частини власних значень матриці $\boldsymbol{B}$ від'ємні.

Розглянемо задачу про стійкість нульового розв'язку системи (3.1).

3.1.2. Дослідження стану рівноваги системи спеціального вигляду на стійкість. Побудуємо функцію Ляпунова згідно з методикою, яка викладена у п. 2.3.2.3. Зауважимо, що для конкретних механічних систем у випадку $m>2$ перевірка умов (2.41) достатньо складна, оскільки коефіцієнти правих частин системи (3.1) зазвичай залежать від декількох параметрів (розподіл мас системи, пружні характеристики та ін.), і задача зводиться до розв'язання системи нерівностей високого ступеня. Тому ми обмежимося випадком $m=2$. Доведемо наступне твердження.

Теорема 3.1. [1] *Нехай для функції Ляпунова, побудованої згідно з описаною вище процедурою, має місце один із наступних випадків:*

[1] У термінах променів стійкості ця теорема відповідає критерію Молчанова.

A1. $G_{20}^{(1)}<0,\ G_{02}^{(2)}<0,\ G_{11}^{(1)}\leqslant 0,\ G_{11}^{(2)}\leqslant 0,$

A2. $G_{20}^{(1)}<0,\ G_{02}^{(2)}<0,\ \min\{G_{11}^{(1)},G_{11}^{(2)}\}\leqslant 0,\ \ \max\{G_{11}^{(1)},G_{11}^{(2)}\}>0,$

Б. $G_{20}^{(1)}<0,\ G_{02}^{(2)}<0,\ G_{11}^{(1)}>0,\ G_{11}^{(2)}>0,\ G_{20}^{(1)}G_{02}^{(2)}>G_{11}^{(1)}G_{11}^{(2)},$

В. $G_{20}^{(1)}>0,$ *або* $G_{02}^{(2)}>0,$ *або* $G_{20}^{(1)}G_{02}^{(2)}<G_{11}^{(1)}G_{11}^{(2)}$ $(G_{11}^{(1)}>0)$.

Тоді у випадках А, Б тривіальний розв'язок системи (2.37) *асимптотично стійкий, а у випадку В - нестійкий.*

Доведення. Покажемо, що у трьох перших випадках ФЛ та її похідна за часом задовільняють умовам теореми Ляпунова про асимптотичну стійкість [41, 58]. Розглянемо квадратичні форми

$$U(\rho_1,\rho_2)=\ G_{20}\rho_1^2+G_{11}\rho_1\rho_2+G_{02}\rho_2^2,\ U_0(\rho_1,\rho_2)=U-\alpha_3\frac{\partial U}{\partial\alpha_3},\ \ \rho_j=y_j\overline{y}_j\ (j=1,2),$$

при цьому

$$G_{20}=\alpha_1G_{20}^{(1)}+\alpha_3G_{20}^{(3)},\ G_{11}=\alpha_1G_{11}^{(1)}+\alpha_2G_{11}^{(2)}+\alpha_3G_{11}^{(3)},\ G_{02}=\alpha_2G_{02}^{(2)}+\alpha_3G_{02}^{(3)}.$$

Очевидно, що у випадку *A1* форма $U_0(\rho_1,\rho_2)$ є від'ємно визначеною при довільних додатних значеннях множників α_1,α_2.

Звернемося до випадку *A2*. Нехай для визначеності $G_{11}^{(1)}\leqslant 0$. Тоді, якщо нерівність строга, то, обираючи α_2 достатньо малим в порівнянні з α_1, можна домогтися від'ємності усіх трьох коефіцієнтів форми U_0. Якщо ж $G_{11}^{(1)}=0$, то, згідно з критерієм Сильвестра, U_0 від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \Delta=4\alpha_1\alpha_2G_{20}G_{02}-(\alpha_1G_{11}^{(1)}+\alpha_2G_{11}^{(2)})^2>0.$$

Обираючи α_2 достатньо малим, у порівнянні з α_1, можна домогтися додатності для Δ.

Нехай тепер виконуються умови випадку *Б*. Обираючи α_1 довільним додатним числом, а α_2 таким, що дорівнює

$$\frac{\alpha_1(2G_{20}^{(1)}G_{02}^{(2)}-G_{11}^{(2)}G_{11}^{(1)})}{{G_{11}^{(2)}}^2},$$

неважко бачити, що

$$\Delta = \frac{4\alpha_1^2 G_{20}^{(1)} G_{02}^{(2)} (G_{20}^{(1)} G_{02}^{(2)} - G_{11}^{(2)} G_{11}^{(1)})}{{G_{11}^{(2)}}^2} > 0.$$

Таким чином, у всіх трьох випадках при належному виборі констант α_1, α_2 форма U_0 є від'ємно визначеною. Але тоді при виборі достатньо малого (додатного) значення α_3 такою ж буде і форма U, а отже і функція dV/dt, оскільки у достатньо малому околі початку $\mathbb{R}^{2m+l}$ вона може бути представлена у вигляді

$$\dot{V} = \dot{V}_0 + o(\dot{V}_0),$$

де $\dot{V}_0 = -\alpha_3 U^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + U(\rho_1, \rho_2)$.

Інакше кажучи, функція $V(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi})$ є додатно визначеною, а її повна похідна за часом у силу рівнянь (2.37) – від'ємно визначеною, і, згідно з теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість, нульовий розв'язок системи (2.37) (і еквівалентної їй системи (3.1)) асимптотично стійкий.

Частина твердження теореми, що стосується нестійкості, доводиться за допомогою теореми Четаєва (з двома функціями) [11]. Формальне доведення досить громіздке, тому ми відзначимо лише, що воно проводиться подібно доведенню теореми 2.1 із [71]. $\square$

Розглянемо також систему

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} &= \boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) + \boldsymbol{X}_1^{(3)}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{X}_2^{(3)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) + ..., \\ \frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} &= \Xi_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) + \Xi_1^{(2)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) + ..., \end{aligned} \tag{3.2}$$

де через $\boldsymbol{X}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}), \Xi_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ позначені праві частини системи (3.1), $\boldsymbol{X}_1^{(3)}, \boldsymbol{X}_2^{(3)}$, $\Xi_1^{(2)}$ – однорідні форми зазначених змінних, $\boldsymbol{X}_2^{(3)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, $\Xi_1^{(2)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, багатокрапкою позначена сукупність доданків більш високого порядку.

Нехай, як і раніше, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda z}$ – лінійне нормалізуюче перетворення для критичних змінних. Позначимо

$$\boldsymbol{Z}_1 = (\boldsymbol{Y}_1, \overline{\boldsymbol{Y}}_1)^T = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{X}_1^{(3)}(\boldsymbol{\Lambda z}),$$

а j-у компоненту вектора $\boldsymbol{Y}_1$ подамо у вигляді

$$\sum_{p+q=n} g_{PQ}^{(j)}\, \boldsymbol{y}^P \overline{\boldsymbol{y}}^Q.$$

Введемо у розгляд також I_j – m-вимірний індекс, компонентами якого є символи Кронекера δ_{js}. Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.2. *Якщо коефіцієнти, обчислені для модельної системи* (2.37), *такі, що* $\sum G_P \boldsymbol{y}^P \overline{\boldsymbol{y}}^P$ *є від'ємно визначеною при деяких додатних множниках* $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m+1}$ *(зокрема, якщо виконані умови А, Б теореми 3.1) і форма* $\boldsymbol{X}_1^{(3)}$ *така, що*

$$Re\ g_{PP-I_j}^{(j)} = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \tag{3.3}$$

то нульовий розв'язок системи (3.2) *асимптотично стійкий при будь-яких* $\boldsymbol{X}_2^{(3)}$, $\Xi_1^{(2)}$.

Доведення. Додамо спочатку у праву частину системи (3.1) тільки $\boldsymbol{X}_1^{(3)}(\boldsymbol{x})$, і виконаємо побудову ФЛ згідно з описаною вище процедурою. Очевидно, що зроблена зміна вплине на вигляд $V^{(4)}(\boldsymbol{z})$, але не вплине на $\widetilde{V}_s^{(2)}(\boldsymbol{z})$. Враховуючи також умови (3.3), можна бачити, що вирази для G_P не зміняться. Зміниться сукупність доданків четвертого порядку у самій функції (позначимо нову форму четвертого порядку через $\widetilde{V}^{(4)}$) і доданки порядку малості вище четвертого у $\dot{V}$. Однак це не вплине на знаковизначеність $V(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi})$ і її похідної, тому умови теореми Ляпунова, як і раніше, будуть виконані.

Візьмемо тепер ФЛ у вигляді (2.38) з $V^{(4)}$, яка замінена на $\widetilde{V}^{(4)}$, і знайдемо повну похідну за часом у силу системи (3.2)

$$\begin{gathered}\dot{V} = \dot{V}_0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) + \langle \mathtt{grad} V_0^{(2)}(\boldsymbol{z}), \boldsymbol{Z}_2^{(3)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi})\rangle + \langle \mathtt{grad} V^{(2)}(\boldsymbol{\xi}), \Xi_1^{(2)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi})\rangle + \\ + \langle \mathtt{grad}_{\boldsymbol{\xi}} V^{(3)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}), \Xi_1^{(2)}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi})\rangle + \ldots,\ \dot{V}_0(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}) = -\alpha_3 U^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{p=2} G_P y^P \bar{y}^P.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Другий і четвертий доданки у правій частині виразу для $\dot{V}$ містять критичні змінні $\boldsymbol{z}$ у третій степені, некритичні $\boldsymbol{\xi}$ – у першій степені і, як наслідок, мають більш високий порядок малості ніж $\dot{V}_0$. Третій доданок містить критичні змінні $\boldsymbol{z}$ у першій степені, некритичні $\boldsymbol{\xi}$ – у другій і мають більш високий порядок малості ніж $U^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$, а отже і $\dot{V}_0$. Таким чином, $\dot{V}$ є від'ємно визначеною функцією відносно змінних $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\xi}$. $\square$

3.1.3. Оцінка швидкості загасання збурених розв'язків нелінійної системи у критичному випадку чисто уявних коренів. Отримаємо степеневу оцінку для розв'язків нелінійної системи у критичному випадку чисто уявних коренів.

Оскільки функція Ляпунова, обрана згідно з п. 2.3.2.3, має вигляд

$$V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = V_0^{(2)}(\boldsymbol{x}) + \alpha_{m+1} V^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{s=1}^{l} \xi_s \tilde{V}_s^{(2)}(\boldsymbol{x}) + ...,$$

де $V^{(2)}, \tilde{V}^{(2)}$ – додатно визначені квадратичні форми,
то для неї у достатньо малому ε_1-околі початку простору $\mathtt{R}^{2m+l}$ справедлива оцінка

$$V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (x_j^2 + x_{m+j}^2) + \tilde{b}||\boldsymbol{\xi}||^2 + \tilde{c}||\boldsymbol{x}||^2||\boldsymbol{\xi}|| \leqslant$$

$$\leqslant \max(\alpha_j)|_{j=1}^{m} ||\boldsymbol{x}||^2 + \tilde{b}||\boldsymbol{\xi}||^2 + \tilde{c}||\boldsymbol{x}||^2||\boldsymbol{\xi}|| \leqslant \beta_1(||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{\xi}||^2) + \tilde{c}||\boldsymbol{x}||^2||\boldsymbol{\xi}|| \leqslant$$

$$\leqslant (\beta_1 + \varepsilon_1)(||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{\xi}||^2),$$

де $\tilde{b}$ – максимальне власне значення матриці квадратичної форми по некритичним змінним, $\tilde{c}$ – деяка додатна стала, яка залежить від коефіцієнтів квадратичної форми $\tilde{V}_s^{(2)}(\boldsymbol{x})$, $\beta_1 = \max(\alpha_j, \tilde{b})|_{j=1}^{m}$.

А для похідної у силу системи виконано

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \leqslant -d||\boldsymbol{\xi}||^2 - g||\boldsymbol{x}||^4,$$

де d, g – деякі додатні сталі, які залежать від коефіцієнтів системи.

Для будь-яких як завгодно малих $\boldsymbol{x}$ і $\boldsymbol{\xi}$ при будь-якому $\tilde{q} \leqslant g$ виконується нерівність

$$-d||\boldsymbol{\xi}||^2 - g||\boldsymbol{x}||^4 \leqslant -\tilde{q}(||\boldsymbol{x}||^4 + ||\boldsymbol{\xi}||^4) \leqslant -\frac{1}{2}\tilde{q}(||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{\xi}||^2)^2.$$

Враховуючи цей факт, отримаємо співвідношення

$$\dot{V} \leqslant -qV^2,$$

де $q = \tilde{q}/[2(\beta_1 + \varepsilon_1)^2]$.

Для отриманої диференціальної нерівності запишемо відповідне рівняння порівняння

$$\dot{V} = -qV^2.$$

Розв'язком цього рівняння з початковою умовою

$$V(t_0) = V_0 \geqslant 0$$

є функція

$$\hat{V}(V_0, t) = \frac{1}{q(t-t_0) + \frac{1}{V_0}} = (q(t-t_0) + V_0^{-1})^{-1}.$$

Тоді на будь-якому розв'язку $\boldsymbol{u}(t) = (\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\xi}(t))$ системи (3.1), що задовольняє початковим умовам $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0$, виконано оцінку

$$V(\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{u}_0) \leqslant (q(t-t_0) + V_0^{-1})^{-1} \quad (t \geqslant t_0). \tag{3.5}$$

Оскільки для функції Ляпунова також виконано

$$V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) \geqslant \min(\alpha_j)|_{j=1}^{m} ||\boldsymbol{x}||^2 + \tilde{\tilde{b}}||\boldsymbol{\xi}||^2 - \tilde{c}||\boldsymbol{x}||^2||\boldsymbol{\xi}||,$$

де $\tilde{\tilde{b}}$ – мінімальне власне значення матриці квадратичної форми по некритичним змінним, то це означає, що у малому ε_2-околі початку простору R^{2m+l} виконана нерівність

$$V \geqslant (\beta_2 - \varepsilon_2)(||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{\xi}||^2), \tag{3.6}$$

де $\beta_2 = \min(\alpha_j, \tilde{\tilde{b}})|_{j=1}^{m}$.

Із (3.5) і (3.6) маємо

$$\beta_2(||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{\xi}||^2) \leqslant (q(t-t_0) + [\beta_1(||\boldsymbol{x}_0||^2 + ||\boldsymbol{\xi}_0||^2)]^{-1})^{-1}.$$

Тоді оцінка (3.5) для розв'язків системи (3.1) матиме вигляд

$$||\boldsymbol{u}(t)|| \leqslant (\gamma_1(t-t_0) + \gamma_2||\boldsymbol{u}_0||^{-2})^{-\frac{1}{2}},\ t \geqslant t_0,\ ||\boldsymbol{u}(t)|| \leqslant \varepsilon,$$

де $\gamma_1 = q\beta_2,\ \gamma_2 = \beta_2/\beta_1,\ \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Зауважимо, що отримана оцінка для швидкості загасання збурених розв'язків системи (3.1) збігається з оцінкою, яка була отримана у роботі [70] з використанням принципу зведення.

3.1.4. Приклад. Подвійний математичний маятник з приєднаним динамічним поглиначем коливань. У якості ілюстрації описаної процедури розглянемо задачу про стійкість подвійного математичного маятника з приєднаним динамічним поглиначем коливань (ДПК)(рис. 3.1). Маси і довжини ланок відповідно дорівнюють m_1, l_1 і m_2, l_2, маса ДПК – m_3, жорсткість пружини – k, коефіцієнт в'язкого тертя – h. У якості узагальненої координати ξ, яка характеризує положення ДПК, візьмемо відношення його відстані до шарніра O_1 до довжини другої ланки.

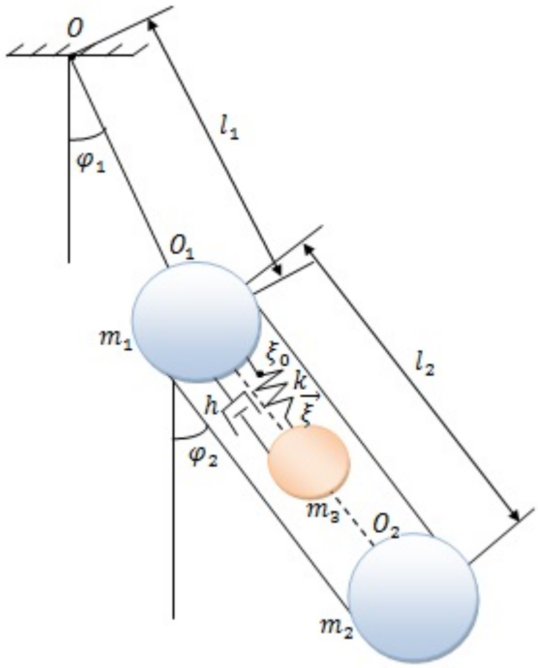

Рис. 3.1. Подвійний маятник з поглиначем коливань у другій ланці.

У цьому випадку маємо наступні співвідношення

$$\overline{OO_1} = l_1(\sin\varphi_1, \cos\varphi_1),\ \overline{O_1O_2} = l_2(\sin\varphi_2, \cos\varphi_2),\ \overline{O_1O_3} = l_2\xi(\sin\varphi_2, \cos\varphi_2).$$

$$\overline{v}_1 = l_1\dot{\varphi}_1(\cos\varphi_1, -\sin\varphi_1),\ \overline{v}_2 = l_2\dot{\varphi}_2(\cos\varphi_2, -\sin\varphi_2) + \overline{v}_1,$$

$$\overline{v}_3 = l_2\dot{\xi}(\sin\varphi_2, \cos\varphi_2) + l_2\dot{\varphi}_2\xi(\cos\varphi_2, -\sin\varphi_2) + \overline{v}_1.$$

Кінетична і потенціальна енергії запишуться відповідно

$$2T = (m_1 + m_2 + m_3)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + l_2^2(m_2 + m_3\xi^2)\dot{\varphi}_2^2 + m_3 l_2^2\dot{\xi}^2 +$$
$$+ 2l_1 l_2\dot{\varphi}_1[\dot{\varphi}_2(m_2 + m_3\xi)\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + m_3\dot{\xi}\sin(\varphi_2 - \varphi_1)],$$

$$\Pi = -g[(m_1 + m_2 + m_3)l_1\cos(\varphi_1) + l_2(m_2 + m_3\xi)\cos(\varphi_2)] + \frac{1}{2}kl_2(\xi - \xi^{(0)})^2.$$

Значення $\xi^{(0)}$ відповідає довжині пружини у недеформованому стані. Функція Релея має вигляд $R = -h\dot{\xi}^2/2$.

Запишемо рівняння руху даної системи у формі Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q}, \tag{3.7}$$

де $L = T - \Pi,\ \boldsymbol{Q} = (0, 0, -h\dot{\xi})$.

Будемо розглядати стійкість руху системи у околі нижнього стану рівноваги

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \xi = \xi_0,\ (\xi_0 = \xi^{(0)} + \frac{m_3 g}{k}). \tag{3.8}$$

Введемо безрозмірні параметри і час за формулами

$$M = m_1 + m_2 + m_3,\ \tilde{m}_2 = \frac{m_2}{M},\ \tilde{m}_3 = \frac{m_3}{M},\ \tilde{h} = \frac{h}{M}\sqrt{\frac{l_2}{g}},\ \tilde{k} = \frac{kl_2}{Mg},\ \tau = \sqrt{\frac{g}{l_2}}t. \tag{3.9}$$

Для зручності у подальшому хвилю зверху будемо опускати.

Запишемо характеристичне рівняння лінійної частини системи (3.7)

$$(a\lambda^4 + b\lambda^2 + c)(m_3\lambda^2 + h\lambda + k) = 0, \tag{3.10}$$

де $a = l_1 m_2 + l_1 m_3\xi_0^2 - l_1 m_2^2 - 2l_1 m_2 m_3\xi_0 - l_1 m_3^2\xi_0^2$, $b = -m_2 - m_3\xi_0^2 - l_1 m_2 - l_1 m_3\xi_0$, $c = m_2 + m_3\xi_0$.

Рівняння (3.10) має дві пари чисто уявних коренів $\lambda_1 = i\omega_1$, $\lambda_2 = i\omega_2, \lambda_3 = -\lambda_1,\ \lambda_4 = -\lambda_2$ і два кореня з від'ємною дійсною частиною. Перевіримо, що $\omega_1 \neq \omega_2$. Справді

$$b^2 - 4ac = [m_2 + m_3\xi_0^2 - l_1(m_3\xi_0 + m_2)]^2 + 12m_2 m_3\xi_0(m_2 + m_3\xi_0) + 4(m_3^3\xi_0^3 + m_3^3) > 0.$$

Зауважимо, що для довільної конфігурації системи формули перетворення досить об'ємні, тому ми обмежимося випадком однакових ланок, тобто $l_1 = l_2 = l$, $m_1 = m_2 = m$, крім того припустимо $m_3 = m/2$, $\xi^0 = 1/2$.

З метою привести рівняння (3.7) до виду (3.1) скористаємося змінними Гамільтона. Введемо звичайним чином [117] узагальнені імпульси

$$p_1 = \frac{5}{2}\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{1}{2}\xi\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) - \frac{1}{2}\dot{\xi}\sin(\varphi_1-\varphi_2),$$

$$p_2 = \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\xi^2\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{1}{2}\xi\dot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2),$$

$$p_3 = \frac{1}{2}\dot{\xi} - \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1\sin(\varphi_1-\varphi_2).$$

Функція Гамільтона має вигляд $H = H^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)} + ...$, де

$$H^{(2)} = \frac{9}{20}p_1^2 - p_1p_2 + p_2^2 + p_3^2 + \frac{5}{4}\varphi_1^2 + \frac{5}{8}\varphi_2^2 + \frac{1}{2}k\xi^2,$$

$$H^{(3)} = \frac{1}{5}p_1^2\xi - \frac{2}{5}p_1\xi p_2 + \frac{9}{10}\varphi_1p_1p_3 - \frac{9}{10}\varphi_2p_1p_3 - \varphi_1p_2p_3 + \varphi_2p_2p_3 + \frac{1}{4}\varphi_2^2\xi,$$

$$H^{(4)} = -\frac{9}{25}\varphi_1^2p_1^2 + \frac{18}{25}\varphi_1\varphi_2p_1^2 - \frac{4}{25}p_1^2\xi^2 - \frac{9}{25}\varphi_2^2p_1^2 + \frac{13}{10}\varphi_1^2p_1p_2 - \frac{13}{5}\varphi_1\varphi_2p_1p_2+$$
$$+\frac{4}{5}p_1p_2\xi^2 + \frac{13}{10}\varphi_2^2p_1p_2 + \frac{2}{5}\varphi_1\xi p_1p_3 - \frac{2}{5}\varphi_1^2\varphi_2\xi p_1p_3 - \varphi_1^2p_2^2 + 2\varphi_1\varphi_2p_2^2 - \frac{4}{5}p_2^2\xi^2-$$
$$-\varphi_2^2p_2^2 - \frac{2}{5}\varphi_1\xi p_2p_3 + \frac{2}{5}\varphi_2\xi p_2p_3 + \frac{9}{20}\varphi_1^2p_3^2 - \frac{9}{10}\varphi_1\varphi_2p_3^2 + \frac{9}{20}\varphi_2^2p_3^2 - \frac{5}{48}\varphi_1^4 - \frac{5}{96}\varphi_2^4.$$

Отримуємо систему виду (3.1) при

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{9}{10} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \widetilde{\boldsymbol{C}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{9}{10} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{9}{10} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{10} & -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ p_3 \end{pmatrix},$$

$$\xi_1' = 2\xi_2 - \frac{9}{10}p_1\varphi_2 + \frac{9}{10}p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 - p_2\varphi_1,$$

$$\xi_2' = -k\xi_1 - \frac{1}{5}p_1^2 + \frac{2}{5}p_1p_2 - \frac{1}{4}\varphi_2^2 - h(2\xi_2 - \frac{9}{10}p_1\varphi_2 + \frac{9}{10}p_1\varphi_1 + p_2\varphi_2 - p_2\varphi_1).$$

Враховуючи, що $\omega_1 = \sqrt{38 - 2\sqrt{201}}/4,\ \omega_2 = \sqrt{38 + 2\sqrt{201}}/4$, отримуємо матрицю перетворення

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1.3177 & -1.5177 & -1.3177 & -1.5177 \\ 3.2199i & 1.2276i & -3.2199i & -1.2276i \\ 2.1215i & -0.9316i & -2.1215i & 0.9316i \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перетворення $\boldsymbol{x} = \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{y}$. Система (2.37) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{J}_1\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}^{(1)}\xi_1\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}^{(2)}\xi_2\boldsymbol{y},\\
&\overline{\boldsymbol{y}}' = \overline{\boldsymbol{J}}_1\overline{\boldsymbol{y}} + \overline{\boldsymbol{C}}^{(1)}\xi_1\overline{\boldsymbol{y}} + \overline{\boldsymbol{C}}^{(2)}\xi_2\overline{\boldsymbol{y}},\\
&\xi_1' = 2\xi_2 + 2.6019i(y_1\bar{y}_2 - y_2\bar{y}_1) - 1.3077i(\bar{y}_1\bar{y}_2 - y_1y_2) - 0.2467i(y_1^2 - \bar{y}_1^2) + \\
&\ + 5.1273i(y_2^2 - \bar{y}_2^2),\\
&\xi_2' = -k\xi_1 - h\xi_2 - 0.7393(y_1\bar{y}_2 + y_2\bar{y}_1) + 2.7393(\bar{y}_1\bar{y}_2 + y_1y_2) + \\
&\ + 0.183(\bar{y}_2^2 + y_2^2) - 1.093(y_1^2 + \bar{y}_1^2) + 0.4495y_1\bar{y}_1 - 2.6695y_2\bar{y}_2,
\end{aligned}$$

де $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{J}_1 = \mathrm{diag}(i\omega_1, i\omega_2)$. Матриці $\boldsymbol{C}^{(1)}$, $\boldsymbol{C}^{(2)}$ – прямокутні матриці 4×2, що складаються з 1 і 2 рядків матриць $\mathbf{\Lambda}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{C}}^{(1)}\mathbf{\Lambda}$ і $\mathbf{\Lambda}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{C}}^{(2)}\mathbf{\Lambda}$ відповідно.

Визначимо квадратичну форму

$$V^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\xi_1^2 + 2k_1\xi_1\xi_2 + k_2\xi_2^2}{2},$$

де $k_1 > 0, k_2 > 0, k_2 > k_1^2$.

Підберемо коефіцієнти k_1, k_2 таким чином, щоб похідна від $V^{(2)}$ у силу лінійної частини системи (2.37) була від'ємно визначеною.

$$\dot{V}^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) = -kk_1\xi_1^2 + (2 - hk_1 - kk_2)\xi_1\xi_2 + (2k_1 - hk_2)\xi_2^2.$$

Нехай

$$k_2 = \frac{2 - k_1h}{k}.$$

Тоді, обриративши довільним достатньо малим значення для k_1, отримуємо від'ємно визначену квадратичну форму $\dot{V}^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$.

З урахуванням вищевикладеного матеріалу ФЛ матиме вигляд

$$V(\boldsymbol{y},\overline{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{\xi}) = \alpha_1 y_1\bar{y}_1 + \alpha_2 y_2\bar{y}_2 + \alpha_3 V^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) + \xi_1(k_{200}^{(1)}y_1^2 + k_{110}^{(1)}y_1y_2 + k_{101}^{(1)}y_1\bar{y}_1 + \\ + k_{020}^{(1)}y_2^2 + k_{011}^{(1)}y_2\bar{y}_1 + k_{010}^{(1)}y_2\bar{y}_2 + \bar{k}_{200}^{(1)}\bar{y}_1^2 + \bar{k}_{110}^{(1)}\bar{y}_1\bar{y}_2 + \bar{k}_{020}^{(1)}\bar{y}_2^2 + \bar{k}_{011}^{(1)}y_1\bar{y}_2) + \\ + \xi_2(k_{200}^{(2)}y_1^2 + k_{110}^{(2)}y_1y_2 + k_{101}^{(2)}y_1\bar{y}_1 + k_{020}^{(2)}y_2^2 + k_{011}^{(2)}y_2\bar{y}_1 + k_{010}^{(2)}y_2\bar{y}_2 + \bar{k}_{200}^{(2)}\bar{y}_1^2 + \\ + \bar{k}_{110}^{(2)}\bar{y}_1\bar{y}_2 + \bar{k}_{020}^{(2)}\bar{y}_2^2 + \bar{k}_{011}^{(2)}y_1\bar{y}_2),$$

де $\alpha_j, (j=1,2,3)$ – деякі дійсні, а $k_{npq}^{(1)},\ k_{npq}^{(2)}$ – комплексні сталі.

Вирази для констант G_{np} матимуть вигляд

$$G_{20} = \mathtt{Re}[k_{200}^{(2)}(-2.186 - 0.4934ih) + 0.899k_{101}^{(2)} + 0.4934i(k_{200}^{(1)} - \bar{k}_{200}^{(1)}) + \\ + \bar{k}_{200}^{(2)}(-2.186 + 0.4934ih)],\ G_{02} = \mathtt{Re}[-10.2546i(k_{020}^{(1)} - \bar{k}_{020}^{(1)} + \bar{k}_{020}^{(2)}h) - \\ - 5.339k_{010}^{(2)} + k_{020}^{(2)}(0.366 + 10.25466ih)],\ G_{11} = \mathtt{Re}[-0.7393(\bar{k}_{011}^{(2)} + k_{011}^{(2)}) + \\ + 2.7393(\bar{k}_{110}^{(2)} + k_{110}^{(2)}) - 2.6695k_{101}^{(2)} - 2.6019i(\bar{k}_{011}^{(1)} - k_{011}^{(1)} - h\bar{k}_{011}^{(2)} + hk_{011}^{(2)}) - \\ - 1.3077i(k_{110}^{(1)} - \bar{k}_{110}^{(1)} - hk_{110}^{(2)} + h\bar{k}_{110}^{(2)}) + 0.4495k_{010}^{(2)}].$$

Сталі $k_{npq}^{(1)},\ k_{npq}^{(2)}$ визначаються з умови

$$V'^{(3)}(\xi_1,\xi_2) = 0.$$

Маємо

$$k_{200}^{(1)} = -\frac{\alpha_1(1.6191k - 0.2002k^2 + 1.4634ikh - 1.6609 - 2.7553h^2)}{23.5476h^2 + 9.7656k^2 - 23.5476k + 14.1949},$$

$$k_{200}^{(2)} = \frac{-4.6829\alpha_1(-37.6762i + 31.25ik - 48.5259h)}{2354.7623h^2 + 976.5625k^2 - 2354.7623k + 1419.4958},$$

$$k_{110}^{(1)} = \frac{\alpha_1(0.0187ikh - 0.1601h^2 - 0.3167 + 0.1338k - 0.0136k^2)}{1.9781h^2 + 0.25k^2 - 1.9781k + 3.9128} + \\ + \frac{\alpha_2(0.0426ihk + 0.3047k - 0.0309k^2 - 0.3646h^2 - 0.7212}{1.9781h^2 + 0.25k^2 - 1.9781k + 3.9128},\ k_{101}^{(2)} = 0,$$

$$k_{110}^{(2)} = \frac{\alpha_1(1.8702ik - 5.2605h - 7.3986i) + \alpha_2(4.2588ik - 11.9796h - 16.8486i)}{197.8069h^2 + 25k^2 - 197.8069k + 391.2759},$$

$$k_{020}^{(1)} = -\frac{\alpha_2(-204.7698k + 29.252 + 24.2626k^2 + 97.0881ikh + 7.0535h^2)}{414.7181h^2 + 25k^2 - 414.7181k + 1719.9109},$$

$$k_{020}^{(2)} = -\frac{\alpha_2[i(0.9709k-8.0528)-3.9543h]}{4.1472h^2+0.25k^2-4.1472k+17.1991},$$

$$k_{011}^{(1)} = -\frac{\alpha_1(1.8702ihk+2.7033k^2-3.1138k+0.7683+1.9356h^2)}{39.6931h^2+25k^2-39.6931k+15.7554}-$$

$$-\frac{\alpha_2(7.0911k-6.1561k^2-1.7496-4.2588ihk-4.4079h^2)}{39.6931h^2+25k^2-39.6931k+15.7554},\ k_{010}^{(2)}=0,$$

$$k_{011}^{(2)} = -\frac{\alpha_1(1.8702ik-1.4846i-2.3565h)+\alpha_2(3.3809i-4.2588ik+5.3664h)}{39.6931h^2+25k^2-39.6931k+15.7554}.$$

З урахуванням цього вирази для G_{np} перепишуться у вигляді

$$G_{20} = -\frac{0.3480\alpha_1 h}{h^2+0.4147k^2-k+0.6028},\ G_{11}=G_{10}+G_{01},$$
$$G_{10} = \alpha_1 h\left(\frac{0.1069}{h^2+0.6298k^2-k+0.3969}-\frac{0.0479}{h^2+0.1264k^2-k+1.9781}\right),$$
$$G_{01} = -\alpha_2 h\left(\frac{0.1090}{h^2+0.1264k^2-k+1.9781}+\frac{0.2433}{h^2+0.6298k^2-k+0.3969}\right),$$
$$G_{02} = -\frac{39.1257\alpha_2 h}{h^2+0.0603k^2-k+4.1472}.$$

Неважко переконатися, що усі знаменники у цих виразах додатні. Таким чином, $G_{20}<0$, $G_{01}<0$, $G_{02}<0$ при будь-яких значеннях k і h, а G_{10} може змінювати знак. Отже, знайдені вирази для констант G задовільняють пункту A теореми 3.1.

Покажемо, що виконані умови теореми 3.2. Для цього необхідно перевірити виконуваність умови (3.3). Використовуючи вираз для $H^{(4)}$, запишемо вектор-функцію $\boldsymbol{X}_1^{(3)}$, компоненти якої є формами третього порядку від критичних змінних

$$\boldsymbol{X}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} \left(-\frac{18}{25}p_1+\frac{13}{10}p_2\right)(\varphi_1-\varphi_2)^2 \\ \\ \left(\frac{13}{10}p_1-2p_2\right)(\varphi_1-\varphi_2)^2 \\ \\ \left(\frac{18}{25}p_1^2-\frac{13}{5}p_1p_2+2p_2^2\right)(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{5}{12}\varphi_1^3 \\ \\ \left(-\frac{18}{25}p_1^2+\frac{13}{5}p_1p_2-2p_2^2\right)(\varphi_1-\varphi_2)+\frac{5}{24}\varphi_2^3 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи перетворення $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda y}$, отримуємо

$$g^{(1)}_{2010} = -0.2388i,\ g^{(1)}_{1101} = 0.6433i,\ g^{(2)}_{1101} = 1.4650i,\ g^{(2)}_{0201} = -14.7693i.$$

Таким чином, умови теореми 3.2 виконані. Отже, розв'язок (3.8) даної механічної системи асимптотично стійкий.

3.2. Стабілізація стану рівноваги маятникового осцилятора у випадку стійкості за частиною змінних

Будемо використовувати означення та теорему, що стосуються стійкості за частиною змінних, які викладені у пункті 2.3.4.

3.2.1. Побудова функції Ляпунова для стійкої компоненти. Розглянемо механічну систему, рівняння руху якої описуються системою звичайних ДР другого порядку

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{3.11}$$

де $\boldsymbol{x} \in R^2$, матриці $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ – симетричні і додатно визначені, $\boldsymbol{B} = \mathtt{diag}(b_1, 0)$, $b_1 > 0$.

Домножимо зліва рівняння (3.11) на обернену матрицю до $\boldsymbol{A}$. Тоді рівняння (3.11) перепишеться наступним чином

$$\ddot{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{B}}\dot{\boldsymbol{x}} + \widetilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x} = 0, \tag{3.12}$$

де

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix},\ b_{11} > 0,\ \widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathtt{det}\widetilde{\boldsymbol{C}} = \frac{\mathtt{det}\boldsymbol{C}}{\mathtt{det}\boldsymbol{A}} > 0.$$

Характеристичне рівняння системи (3.12) має вигляд

$$\lambda^4 + b_{11}\lambda^3 + (c_{11} + c_{22})\lambda^2 + (b_{11}c_{22} - b_{21}c_{12})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = 0. \tag{3.13}$$

3.2.1.1. Випадок різних коренів. Будемо припускати, що рівняння (3.13), має чотири комплексних кореня

$$\lambda_1 = \sigma_1 + i\omega_1,\ \lambda_2 = \overline{\lambda_1},\ \lambda_3 = \sigma_2 + i\omega_2,\ \lambda_4 = \overline{\lambda_3}, \sigma_{1,2} < 0.$$

Риса зверху означає комплексне спряження. Розглянемо задачу стійкості розв'язку системи (3.12).

Приведемо систему другого порядку, яка описується ДР (3.12), до канонічного виду. Для цього введемо заміну

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{x} + \boldsymbol{S}_2\dot{\boldsymbol{x}}, \tag{3.14}$$

де $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ – шукані матриці перетворення. Тоді система (2.46) перепишеться у вигляді

$$\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = 0, \tag{3.15}$$

де

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2\sigma_1 & 0 \\ 0 & 2\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 + \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо вирази для елементів матриць $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$.

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 \\ s_{21}^1 & s_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_2 = \begin{pmatrix} s_{11}^2 & s_{12}^2 \\ s_{21}^2 & s_{22}^2 \end{pmatrix}.$$

Для цього підставимо заміну (3.14) до (3.15). Враховуючи, що

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{S}_1\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{S}_2\ddot{\boldsymbol{x}}, \ddot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{S}_1\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{x}^{(3)}, \boldsymbol{x}^{(3)} = -\boldsymbol{B}\ddot{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}},$$

отримаємо

$$(\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_2)\ddot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{C} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}_2)\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{x} = 0. \tag{3.16}$$

Прирівняємо матриці коефіцієнтів із (3.12) та (3.16), попередньо домноживши (3.12) зліва на $\boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{S}_2$. Враховуючи зв'язок між коренями характеристичного рівняння і коефіцієнтами самої системи, отримуємо наступні вирази для елементів матриць перетворення

$$s_{12}^1 = \frac{s_{11}^1 c_{12}}{c_{11}}, s_{21}^1 = -\frac{s_{21}^2(\omega_1^2 + \sigma_1^2 - c_{11})}{2\sigma_2}, s_{22}^1 = \frac{s_{21}^2 c_{12}}{2\sigma_2},$$

$$s_{11}^2 = \frac{s_{11}^1(\omega_2^2 + 4\sigma_1^2 + 4\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - c_{11})}{2c_{11}\sigma_1}, s_{12}^2 = -\frac{s_{11}^1 c_{12}}{2c_{11}\sigma_1}, s_{22}^2 = 0,$$

де s_{11}^1, s_{21}^2 – ненульові сталі.

Оскільки для (3.15) мають місце нормальні координати, то система розпадається на два незалежних ДР другого порядку. Виконаємо перехід до комплексних змінних шляхом введення заміни

$$\boldsymbol{y} = \widetilde{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{z},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{S}}$ – матриця переходу.

Перепишемо (3.15) у вигляді системи ДР першого порядку

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_2, \\
\dot{y}_2 &= -(\sigma_1^2 + \omega_1^2)y_1 - 2\sigma_1 y_2, \\
\dot{y}_3 &= y_4, \\
\dot{y}_4 &= -(\sigma_2^2 + \omega_2^2)y_3 - 2\sigma_2 y_4.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Не важко бачити, що для першої і останньої пар рівнянь матриці переходу до комплексних змінних матимуть наступний вигляд

$$\widetilde{\boldsymbol{S}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{S}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_2 & \overline{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

відповідно.

Для комплексних змінних загальновідомий факт полягає у тому, що функцію Ляпунова для системи можна обрати у вигляді

$$V = \sum_j \boldsymbol{\alpha}_j \boldsymbol{z}_j \overline{\boldsymbol{z}}_j,$$

де $\boldsymbol{\alpha}_j$ – довільні ненульові множники [71].

Функція, яка узята таким чином, буде знаковизначеною, а її похідна у силу лінійної частини системи рівнянь руху матиме протилежний знак. У нашому випадку

$$V = \alpha_1 z_1 \overline{z}_1 + \alpha_2 z_2 \overline{z}_2. \tag{3.18}$$

Нехай $\alpha_1 = -(\lambda_1 - \overline{\lambda_1})^2, \alpha_2 = -(\lambda_2 - \overline{\lambda_2})^2$.

Повернемося до дійсних змінних $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$, де верхній індекс T означає транспонування. Для цього виконаємо зворотну заміну

$$\boldsymbol{z} = \widetilde{\boldsymbol{S}}^{-1}\boldsymbol{y},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{S}} = \mathtt{diag}(\widetilde{\boldsymbol{S}}_1, \widetilde{\boldsymbol{S}}_2), \boldsymbol{z} = (z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2)^T$.

Функція Ляпунова і її похідна у силу лінійної частини системи (3.17) матимуть вигляд

$$V = V_1 + V_2,$$

де $V_1 = (\omega_1^2 + \sigma_1^2)y_1^2 - 2\sigma_1 y_1 y_2 + y_2^2, V_2 = (\omega_2^2 + \sigma_2^2)y_3^2 - 2\sigma_2 y_3 y_4 + y_4^2,$

$$\dot{V} = 2\sigma_1 V_1 + 2\sigma_2 V_2$$

відповідно.

Для квадратичної форми V_1 запишемо критерій Сильвестра. Матриця квадратичної форми має вигляд

$$\begin{pmatrix} \omega_1^2 + \sigma_1^2 & -\sigma_1 \\ -\sigma_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = \omega_1^2 + \sigma_1^2 > 0, \Delta_2 = \omega_1^2 > 0.$$

Аналогічно маємо для V_2.

Отже, V є додатно визначеною квадратичною формою, а $\dot{V}$ – від'ємно визначена квадратична форма змінних y_1, y_2, y_3, y_4.

Не важко бачити, що усі умови теореми 2.15 виконані (за умови, що розв'язок повної системи є z-продовжуваним). Отже, розв'язок повної системи рівномірно асимптотично стійкий за частиною змінних.

3.2.1.2. Випадок кратних коренів. Будемо вважати, що рівняння (3.13) має кратні корені

$$\lambda_{1,2} = \sigma + i\omega = \lambda, \lambda_{3,4} = \overline{\lambda}_{1,2} = \overline{\lambda}, \sigma < 0.$$

Перепишемо систему (3.12) у вигляді системи ДР першого порядку

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

де

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -c_{11} & -c_{12} & -b_{11} & 0 \\ -c_{12} & -c_{22} & -b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо перехід до комплексних змінних за правилом

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{z},$$

де $\boldsymbol{S}$ – матриця переходу, яка складається з двох власних векторів $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ матриці $\boldsymbol{A}$ і двох кореневих векторів $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$, а $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2})^T$.

Розв'язуючи систему

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{a}_1 = 0,$$

де $\boldsymbol{E}$ – одинична матриця, маємо

$$\boldsymbol{a}_1 = \left(p_1, -\frac{p_1(b_{21}\lambda + c_{12})}{\lambda^2 + c_{22}}, p_1\lambda, -\frac{p_1\lambda(b_{21}\lambda + c_{12})}{\lambda^2 + c_{22}} \right)^T,$$

де p_1 – довільна ненульова стала. Власний вектор $\boldsymbol{a}_2$ отримується із вектора $\boldsymbol{a}_1$ шляхом комплексного спряження.

Для знаходження кореневого вектора $\boldsymbol{b}_1$ розв'яжемо систему

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1.$$

Звідси маємо

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{(b_{11}+2\lambda)p_1 + q_2 c_{12}}{b_{11}\lambda + \lambda^2 + c_{11}} \\ q_2 \\ -\frac{[(b_{11}+2\lambda)p_1 + q_2 c_{12}]\lambda}{b_{11}\lambda + \lambda^2 + c_{11}} + p_1 \\ \lambda q_2 - \frac{(b_{21}\lambda + c_{12})p_1}{\lambda^2 + c_{22}} \end{pmatrix},$$

де q_2 – довільна стала. Кореневий вектор $\boldsymbol{b}_2$ отримується із вектора $\boldsymbol{b}_1$ шляхом комплексного спряження.

Таким чином, матриця переходу матиме вигляд

$$\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix} p_1 & -\frac{(b_{11}+2\lambda)p_1+q_2c_{12}}{b_{11}\lambda+\lambda^2+c_{11}} & p_1 & -\frac{(b_{11}+2\overline{\lambda})p_1+q_2c_{12}}{b_{11}\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+c_{11}} \\ -\frac{p_1(b_{21}\lambda+c_{12})}{\lambda^2+c_{22}} & q_2 & -\frac{p_1(b_{21}\overline{\lambda}+c_{12})}{\overline{\lambda}^2+c_{22}} & q_2 \\ p_1\lambda & -\frac{[(b_{11}+2\lambda)p_1+q_2c_{12}]\lambda}{b_{11}\lambda+\lambda^2+c_{11}}+p_1 & p_1\overline{\lambda} & -\frac{[(b_{11}+2\overline{\lambda})p_1+q_2c_{12}]\overline{\lambda}}{b_{11}\overline{\lambda}+\overline{\lambda}^2+c_{11}}+p_1 \\ -\frac{p_1\lambda(b_{21}\lambda+c_{12})}{\lambda^2+c_{22}} & \lambda q_2-\frac{(b_{21}\lambda+c_{12})p_1}{\lambda^2+c_{22}} & -\frac{p_1\overline{\lambda}(b_{21}\overline{\lambda}+c_{12})}{\overline{\lambda}^2+c_{22}} & \overline{\lambda}q_2-\frac{(b_{21}\overline{\lambda}+c_{12})p_1}{\overline{\lambda}^2+c_{22}} \end{pmatrix}$$

У комплексних змінних система (3.12) перепишеться наступним чином

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{z}, \tag{3.19}$$

де

$$\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Для неї функція Ляпунова матиме вигляд

$$V=\alpha_1 z_1\overline{z_1}+\alpha_2 z_2\overline{z_2}+\beta(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2), \tag{3.20}$$

де α_1,α_2,β – дійсні ненульові сталі.

А похідна функції Ляпунова у силу лінійної частини системи (3.19)

$$\dot{V}=\alpha_1(\lambda+\overline{\lambda})z_1\overline{z_1}+[\beta(\lambda+\overline{\lambda})+\alpha_1](z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)+(\alpha_2(\lambda+\overline{\lambda})+2\beta)z_2\overline{z_2}.$$

Для того, щоб застосувати критерій Сильвестра для даних квадратичних форм, перейдемо до дійсних змінних за правилом

$$\boldsymbol{z}=\hat{\boldsymbol{x}}+i\hat{\boldsymbol{y}},\ \overline{\boldsymbol{z}}=\hat{\boldsymbol{x}}-i\hat{\boldsymbol{y}},$$

де $\hat{\boldsymbol{x}}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2)^T$, $\hat{\boldsymbol{y}}=(\hat{y}_1,\hat{y}_2)^T$.

Маємо

$$\begin{aligned} V&=\alpha_1(\hat{x}_1^2+\hat{y}_1^2)+\alpha_2(\hat{x}_2^2+\hat{y}_2^2)+2\beta(\hat{x}_1\hat{x}_2+\hat{y}_1\hat{y}_2),\\ \dot{V}&=\alpha_1(\lambda+\overline{\lambda})(\hat{x}_1^2+\hat{y}_1^2)+2[\beta(\lambda+\overline{\lambda})+\alpha_1](\hat{x}_1\hat{x}_2+\hat{y}_1\hat{y}_2)+\\ &+[\alpha_2(\lambda+\overline{\lambda})+2\beta](\hat{x}_2^2+\hat{y}_2^2). \end{aligned}$$

Умови критерію Сильвестра для функції Ляпунова мають вигляд

$$\Delta_1 = \alpha_1, \Delta_2 = \alpha_1\alpha_2 - \beta^2, \Delta_3 = \alpha_1(\alpha_1\alpha_2 - \beta^2), \Delta_4 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta^2)^2.$$

Для того, щоб V була додатно визначеною квадратичною формою, будемо вважати, що

$$\alpha_{1,2} > 0,\ \beta < \sqrt{\alpha_1\alpha_2}.$$

Для $\dot{V}$ маємо

$$\Delta_1 = \alpha_1(\lambda + \overline{\lambda}) < 0, \Delta_2 = \alpha_1^2(\lambda + \overline{\lambda})^2 > 0,$$
$$\Delta_3 = \alpha_1(\lambda + \overline{\lambda})[(\alpha_1\alpha_2 - \beta^2)(\lambda + \overline{\lambda})^2 - \alpha_1^2] < 0,$$
$$\Delta_4 = [(\alpha_1\alpha_2 - \beta^2)(\lambda + \overline{\lambda})^2 - \alpha_1^2]^2 > 0.$$

Таким чином, V є додатно визначеною квадратичною формою, а $\dot{V}$ – від'ємно визначена квадратична форма своїх змінних.

Не важко бачити, що усі умови теореми 2.15 виконані (за умови, що розв'язок повної системи є z-продовжуваним). Отже, розв'язок повної системи є рівномірно асимптотично стійким за частиною змінних.

3.2.2. Приклад. Маятниковий осцилятор. Як приклад розглянемо наступну механічну систему. Основна система являє собою маятник (рис. 3.2). До маятника приєднаний динамічний абсорбер (ДА).

Жорсткості пружин маятника і абсорбера дорівнюють відповідно $\widetilde{k}$ і $\widetilde{k_a}$, l – відстань від точки підвісу до центру мас маятника, коефіцієнт в'язкого тертя позначимо через $\widetilde{h_a}$. У якості узагальнених координат візьмемо кут φ між віссю маятника і напрямком сили тяжіння і величини $\widetilde{\eta}$ і $\widetilde{u}$. Зв'яжемо з точкою O прямокутну декартову систему координат, вісь ординат якої спрямована у бік, протилежний вектору сили тяжіння. Маємо

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} \widetilde{\eta}\sin\varphi \\ -\widetilde{\eta}\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} l\sin\varphi \\ -l\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_3 = \begin{pmatrix} \widetilde{d}\sin\varphi + \widetilde{u}\cos\varphi \\ -\widetilde{d}\cos\varphi + \widetilde{u}\sin\varphi \end{pmatrix},$$

а вектори швидкостей

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} \dot{\widetilde{\eta}}\sin\varphi + \widetilde{\eta}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\dot{\widetilde{\eta}}\cos\varphi + \widetilde{\eta}\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} l\dot{\varphi}\cos\varphi \\ l\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix},$$

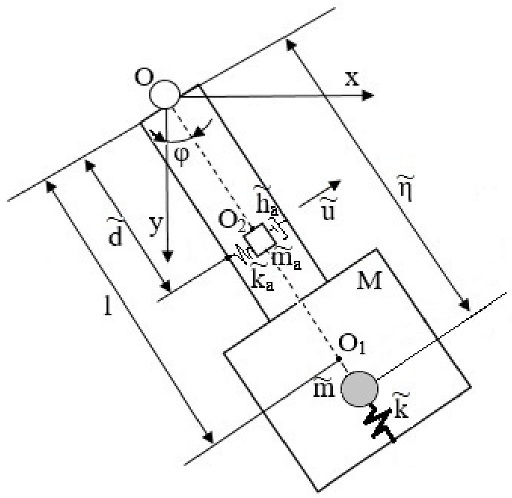

Рис. 3.2. Маятник з ДА.

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} \widetilde{d}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\widetilde{u}}\cos\varphi - \widetilde{u}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \widetilde{d}\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\widetilde{u}}\sin\varphi + \widetilde{u}\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Для кінетичної і потенціальної енергій заданої механічної системи маємо відповідно

$$K = \frac{1}{2}(Ml^2 + \widetilde{m}\widetilde{\eta}^2 + \widetilde{m_a}\widetilde{d}^2 + \widetilde{m_a}\widetilde{u}^2 + \widetilde{J})\dot{\varphi}^2 + \widetilde{m_a}\widetilde{d}\dot{\widetilde{u}}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\widetilde{m}\dot{\widetilde{\eta}}^2 + \frac{1}{2}\widetilde{m_a}\dot{\widetilde{u}}^2,$$

$$\Pi = -(Ml + \widetilde{m}\widetilde{\eta})g\cos\varphi - \widetilde{m_a}g(\widetilde{d}\cos\varphi - \widetilde{u}\sin\varphi) + \frac{1}{2}\widetilde{k_a}\widetilde{u}^2 + \frac{1}{2}\widetilde{k}(\widetilde{\eta} - \widetilde{\eta_0})^2,$$

де g – прискорення сили тяжіння, значення $\widetilde{\eta_0}$ відповідає довжині пружини у недеформованому стані, $\widetilde{J}$ – момент інерції маятника. Функція Релея має вигляд $R = -\widetilde{h_a}\dot{\widetilde{u}}^2$.

Введемо безрозмірні параметри і час за формулами

$$\begin{gathered} \eta = \frac{\widetilde{\eta}}{l}, u = \frac{\widetilde{u}}{l}, d = \frac{\widetilde{d}}{l}, \mu_1 = \frac{\widetilde{m_a}}{M}, \mu_2 = \frac{\widetilde{m}}{M}, k_a = \frac{\widetilde{k_a}l}{Mg}, k = \frac{\widetilde{k}l}{Mg}, \\ h_a = \frac{\widetilde{h_a}}{l\sqrt{gl}}, J = \frac{\widetilde{J}}{Ml^2}, \tau = \sqrt{\frac{g}{l}}t. \end{gathered} \tag{3.21}$$

З урахуванням заміни (3.21), запишемо рівняння руху системи, що розглядається, у формі Лагранжа другого роду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, j = \overline{1,3},$$

де L – функція Лагранжа, $L = K - \Pi$.

$$2L = (\mu_1 d^2 + \eta^2\mu_2 + \mu_1 u^2 + J + 1)\varphi'^2 + \mu_2\eta'^2 + \mu_1 u'^2 + 2\mu_1 d u'\varphi' +$$
$$+ 2(\mu_1 d + \eta\mu_2 + 1)\cos\varphi - 2\mu_1 u \sin\varphi - k_a u^2 - k(\eta - \eta_0)^2.$$

Знайдемо стан рівноваги. Прирівнюючи нулю градієнт потенціальної енергії, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &(\mu_1 d + \eta\mu_2 + 1)\sin\varphi + \mu_1 u\cos\varphi = 0, \\ &-\mu_2\cos\varphi + k(\eta - \eta_0) = 0, \\ &\mu_1\sin\varphi + k_a u = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Оскільки $\eta > 0, u > 0$, то із першої рівності (3.22) отримуємо $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Тоді нижньому стану рівноваги відповідає значення

$$\eta^{(0)} = \frac{k\eta_0 + \mu_2}{k}.$$

Оскільки повна енергія системи додатна знаковизначена функція, а її похідна – не додатна, то нижній стан рівноваги стійкий, а отже, він є продовжуваним по всім змінним.

Дослідимо питання про асимптотичну стійкість нижнього стану рівноваги даної механічної системи, тобто розв'язку

$$\varphi = 0, \eta = \eta^{(0)}, u = 0, \dot\varphi = 0, \dot\eta = 0, \dot u = 0. \tag{3.23}$$

Зробивши перехід до збурень $\varphi = \varphi^*, \eta = \eta^{(0)} + \eta^*, u = u^*$, запишемо рівняння збуреного руху (верхній індекс "*" з метою зручності нижче опускаємо).

$$\begin{aligned} &(\mu_1 d^2 + \eta^2\mu_2 + J + 1)\varphi'' + \mu_1 d u'' + (\mu_1 d + 1)\varphi + \mu_1 u + \mu_2\varphi\eta + ... = 0, \\ &\mu_2\eta'' + k\eta + \frac{1}{2}\mu_2\varphi^2 + ... = 0, \\ &\mu_1 d\varphi'' + \mu_1 u'' + h_a u' + k_a u + \mu_1\varphi + ... = 0. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Багатокрапкою позначені сукупності доданків, що мають порядок малості вище другого відносно збурень і їх похідних, штрихом позначено диференціювання за часом τ.

Система рівнянь першого наближення (3.24) розпадається на дві підсистеми. Із другого рівняння маємо два чисто уявних кореня $\pm i\sqrt{\frac{k}{\mu_2}}$, а для першого і третього запишемо характеристичне рівняння і перевіримо виконання критерія Рауса – Гурвіца.

Введемо наступні позначення

$$a = \frac{\mu_1}{\eta_0^2\mu_2 + J + 1}, k = \frac{k_a}{a(\eta_0^2\mu_2 + J + 1)}, h = \frac{h_a}{a(\eta_0^2\mu_2 + J + 1)}, \widetilde{J} = \frac{J}{\eta_0^2\mu_2 + J + 1}.$$

Надалі хвилю зверху будемо опускати.

Запишемо перше і третє рівняння системи (3.24), відкинувши доданки порядку малості вище першого відносно збурень узагальнених координат і їх похідних.

$$\begin{aligned} &u'' + h(ad^2+1)u' + (Jd - d + 1)\varphi + (ad^2k - ad + k)u = 0, \\ &\varphi'' - ahdu' - (J-1)\varphi - a(kd-1)u = 0. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Характеристичне рівняння для системи (3.25) має вигляд

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0,$$

де

$$\begin{aligned} &a_0 = 1, a_1 = (ad^2+1)h, a_2 = ad^2k - ad - J + k + 1, \\ &a_3 = (ad - J + 1)h, a_4 = (ad - J + 1)k - a. \end{aligned}$$

Усі його коефіцієнти додатні, так само як і визначник Гурвіца

$$a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_4a_1^2 = ah^2[(J-1)d+1]^2 > 0.$$

Тому, згідно з критерієм Льєнара – Шипара [118], усі чотири кореня мають від'ємні дійсні частини. Таким чином, по змінній η – критичний (за Ляпуновим) випадок пари чисто уявних коренів. Покажемо, що для системи (3.24) має місце рівномірна асимптотична стійкість по змінним φ, φ', u і u'.

Відповідно до вищевикладеного теоретичного матеріалу, матриці $\widetilde{\boldsymbol{B}}$, $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ для системи (3.25) матимуть вигляд

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} h(ad^2+1) & 0 \\ -ahd & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} k(ad^2+1) - ad & (J-1)d+1 \\ a(1-kd) & 1-J \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^4 + h(ad^2+1)\lambda^3 + [k(ad^2+1) - ad + 1 - J]\lambda^2 + [h(ad^2+1)(1-J) +$$
$$+ ahd([J-1]d+1)]\lambda + [k(ad^2+1) - ad](1-J) - [(J-1)d+1]^2 = 0.$$

Розглянемо випадок різних коренів. Побудуємо функцію Ляпунова згідно з формулою (3.18). Тоді у початкових змінних функція Ляпунова матиме вигляд

$$V = (\omega_1^2 + \sigma_1^2)(s_{12}^2\varphi' + s_{11}^2u' + s_{12}^1\varphi + s_{11}^1u)^2 -$$
$$- 2\sigma_1(s_{12}^2\varphi' + s_{11}^2u' + s_{12}^1\varphi + s_{11}^1u)(s_{22}^2\varphi' + s_{21}^2u' + s_{22}^1\varphi + s_{21}^1u) +$$
$$+ (s_{22}^2\varphi' + s_{21}^2u' + s_{22}^1\varphi + s_{21}^1u)^2 + (\omega_2^2 + \sigma_2^2)[(-b_{11}s_{11}^2 - b_{21}s_{12}^2 + s_{11}^1)u' + s_{12}^1\varphi' -$$
$$- (c_{11}s_{11}^2 + c_{12}s_{12}^2)u - (c_{12}s_{11}^2 + c_{22}s_{12}^2)\varphi]^2 - 2\sigma_2[(-b_{11}s_{11}^2 - b_{21}s_{12}^2 + s_{11}^1)u' +$$
$$+ s_{12}^1\varphi' - (c_{11}s_{11}^2 + c_{12}s_{12}^2)u - (c_{12}s_{11}^2 + c_{22}s_{12}^2)\varphi][(-b_{11}s_{21}^2 - b_{21}s_{22}^2 +$$
$$+ s_{21}^1)u' + s_{22}^1\varphi' - (c_{11}s_{21}^2 + c_{12}s_{22}^2)u - (c_{12}s_{21}^2 + c_{22}s_{22}^2)\varphi] +$$
$$+ [(-b_{11}s_{21}^2 - b_{21}s_{22}^2 + s_{21}^1)u' + s_{22}^1\varphi' - (c_{11}s_{21}^2 + c_{12}s_{22}^2)u - (c_{12}s_{21}^2 + c_{22}s_{22}^2)\varphi]^2.$$

У силу громіздкості подальших викладок, перейдемо до чисельного прикладу. Нехай $h = 0.4, a = 0.2, d = 0.2,\ k = 2.39, J = 0.3$ Тоді $\sigma_1 = -0.0336, \sigma_2 = -0.1679, \omega_1 = 0.5816, \omega_2 = 1.6367.$

Нехай $s_{11}^1 = 1, s_{21}^2 = 2$. Матриці переходу $\boldsymbol{S}_1$ і $\boldsymbol{S}_2$ матимуть вигляд

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.3630 \\ -12.0824 & -5.1193 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_2 = \begin{pmatrix} -2.2928 & 5.4003 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функція Ляпунова запишеться у вигляді

$$V = 168.3876u^2 + 134.3264u\varphi + 47.4084u\varphi' + 76.2142uu' + 38.9844\varphi^2 +$$
$$+ 16.4292\varphi\varphi' + 11.1129\varphi u' + 173.8353u'^2 + 123.2068\varphi' u' + 35.8379\varphi'^2.$$

Матриця даної квадратичної форми

$$\begin{pmatrix} 168.3876 & 67.1632 & 38.1071 & 23.7042 \\ 67.1632 & 38.9844 & 5.5565 & 8.2146 \\ 38.1071 & 5.5565 & 173.8353 & 61.6034 \\ 23.7042 & 8.2146 & 61.6034 & 35.8379 \end{pmatrix}.$$

Для неї маємо

$$\Delta_1 = 168.3876,\ \ \Delta_2 = 2053.5932,\ \ \Delta_3 = 3.23\cdot 10^5,\ \ \Delta_4 = 4.2\cdot 10^6.$$

Очевидно, що згідно з критерієм Сильвестра, V є додатно визначеною квадратичною формою.

Похідна функції Ляпунова $\dot V$ в силу рівнянь руху:

$$\dot V = -17.467u^2 - 11.989u\varphi - 16.122u\varphi' - 38.477uu' - 6.076\varphi^2 - 5.662\varphi\varphi' -$$
$$- 9.164\varphi u' - 56.934u'^2 - 43.459\varphi' u' - 9.381\varphi'^2 + \eta W^{(2)}(u, u', \varphi, \varphi'),$$

де $W^{(2)}(u, u', \varphi, \varphi')$ – квадратична форма по змінним u, u', φ, φ'.

Останній доданок у похідній лінійний по η і квадратичний по u, u', φ, φ', отже він має порядок вищий, ніж квадратична частина, і не вплине на від'ємну визначеність похідної.

Для матриці квадратичної форми маємо наступні співвідношення

$$\Delta_1 = -17.4671,\ \ \Delta_2 = 70.1973,\ \ \Delta_3 = -2437.816,\ \ \Delta_4 = 2145.509.$$

Таким чином, згідно з критерієм Сильвестра, $\dot V$ є від'ємно визначеною квадратичною формою.

Не важко бачити, що усі умови теореми 2.15 виконані. Отже, розв'язок вихідної системи рівномірно асимптотично стійкий за частиною змінних.

На рис. 3.3, 3.4 представлені результати чисельного інтегрування рівнянь руху вихідної системи.

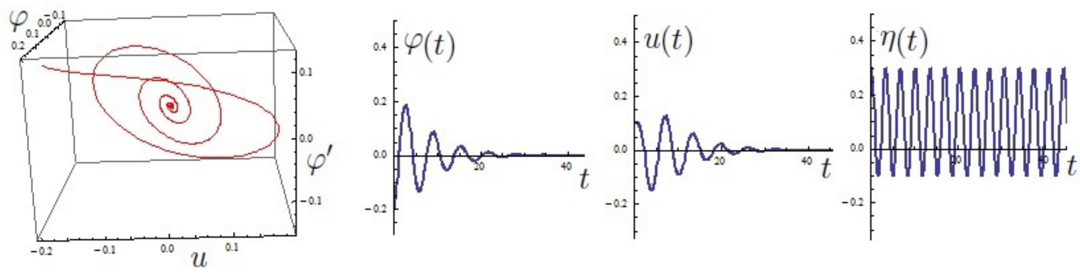

Рис. 3.3. Фазові траєкторії лінійної системи.

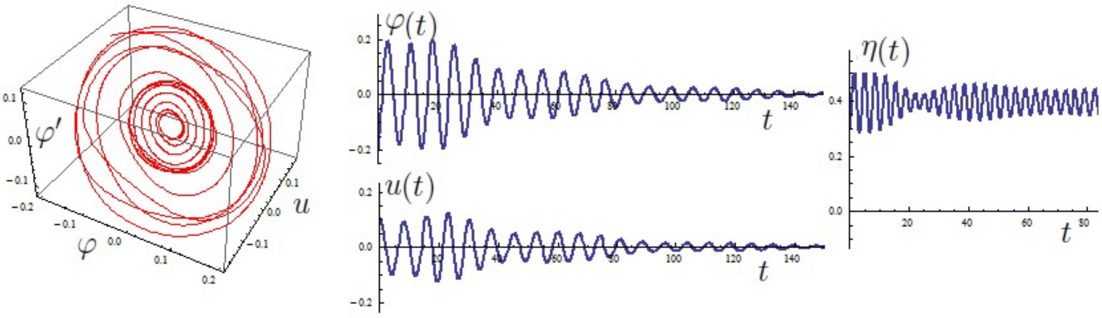

Рис. 3.4. Фазові траєкторії нелінійної системи.

Розглянемо випадок кратних коренів. Побудуємо функцію Ляпунова згідно з формулою (3.20). Тоді у початкових змінних функція Ляпунова матиме вигляд

$$\begin{aligned} V = {}& \alpha_1(\hat{s}_{14}\varphi' + \hat{s}_{13}u' + \hat{s}_{12}\varphi + \hat{s}_{11}u)(\hat{s}_{34}\varphi' + \hat{s}_{33}u' + \hat{s}_{32}\varphi + \hat{s}_{31}u)+ \\ &+ \alpha_2(\hat{s}_{24}\varphi' + \hat{s}_{23}u' + \hat{s}_{22}\varphi + \hat{s}_{21}u)(\hat{s}_{44}\varphi' + \hat{s}_{43}u' + \hat{s}_{42}\varphi + \hat{s}_{41}u)+ \\ &+ \beta[(\hat{s}_{14}\varphi' + \hat{s}_{13}u' + \hat{s}_{12}\varphi + \hat{s}_{11}u)(\hat{s}_{44}\varphi' + \hat{s}_{43}u' + \hat{s}_{42}\varphi + \hat{s}_{41}u)+ \\ &+ (\hat{s}_{34}\varphi' + \hat{s}_{33}u' + \hat{s}_{32}\varphi + \hat{s}_{31}u)(\hat{s}_{24}\varphi' + \hat{s}_{23}u' + \hat{s}_{22}\varphi + \hat{s}_{21}u)], \end{aligned}$$

де $\hat{s}_{ij}$ – елементи оберненої матриці до $\boldsymbol{S}$.

Нехай $a = 0.2, d = 0.2, J = 0.3, h = 2.0411, k = 1.8517$. Тоді $\lambda = -0.5143 + 0.6853i$, $\bar{\lambda} = -0.5143 - 0.6853i$.

Нехай $p_1 = 1, q_2 = 2$. Тоді матриця переходу $\boldsymbol{S}$ матиме вигляд

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & -3.088 + 1.432i & 1 & -3.088 - 1.432i \\ -0.655 - 0.820i & 2 & -0.655 + 0.820i & 2 \\ -0.514 + 0.685i & 1.607 - 2.853i & -0.514 - 0.685i & 1.607 + 2.853i \\ 0.899 - 0.027i & -1.684 + 0.551i & 0.899 + 0.027i & -1.684 - 0.551i \end{pmatrix}.$$

При $\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.8, \beta = 0.1325 < \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ отримаємо

$$\begin{aligned} V = {}& 1.76092u^2 + 1.8645u\varphi + 1.4461uu' - 2.4453\varphi' u + 0.7223\varphi^2 + 0.9383\varphi u' - \\ &- 0.6745\varphi\varphi' + 0.3568u'^2 - 0.7097165677\varphi' u' + 1.3389\varphi'^2. \end{aligned}$$

Для матриці даної квадратичної форми маємо

$$\Delta_1 = 1.7609,\ \Delta_2 = 0.4028,\ \Delta_3 = 0.011,\ \Delta_4 = 0.0004.$$

Згідно критерію Сильвестра, V є додатно визначеною квадратичною формою.

Похідна функції Ляпунова $\dot{V}$ в силу рівнянь руху запишеться наступним чином

$$\dot{V} = -0.5382u^2 - 0.6655u\varphi - 0.346uu' + 0.8576u\varphi' - 0.3348\varphi^2 - 0.2379\varphi u' + \\ + 0.1803\varphi\varphi' - 0.8007u'^2 + 0.1716\varphi' u' - 0.6744\varphi'^2 + \eta W^{(2)}(u, u', \varphi, \varphi').$$

За аналогією з вищевикладеним випадком маємо

$$\Delta_1 = -0.5382,\ \Delta_2 = 0.0694,\ \Delta_3 = -0.0016,\ \Delta_4 = 0.0001.$$

Таким чином $\dot{V}$ є від'ємно визначеною квадратичною формою.

Отже, усі умови теореми 2.15 виконані, а отже розв'язок вихідної системи рівномірно асимптотично стійкий за частиною змінних.

3.3. Використання динамічного абсорбера для стабілізації коливань подвійного фізичного маятника

3.3.1. Постановка задачі. Розглянемо подвійний маятник із розподіленою масою (рис. 3.5), який має нерухому точку O і знаходиться у гравітаційному полі. Припустимо, що центр мас першої ланки розташований у C_1. У точці O_1, яка розташована на осі OC_1, прикріплено другу ланку. Точка C_2 – центр мас другої ланки. У першій ланці (конфігурація A) прикріплено динамічний поглинач коливань (ДПК) з жорсткістю k і коефіцієнтом в'язкого тертя h. Абсорбер коливається вздовж осі O_2x', яка ортогональна до прямої OO_1 і перетинає її у точці O_2. Шарніри у точках $O,\ O_1$ передбачаються без тертя.

Запишемо функцію Лагранжа для даної механічної системи. Для початку запишемо кінетичну енергію K системи у вигляді

$$K = K_p + K_a,$$

де K_p, K_a – кінетичні енергії первинної системи (маятник без поглинача) і

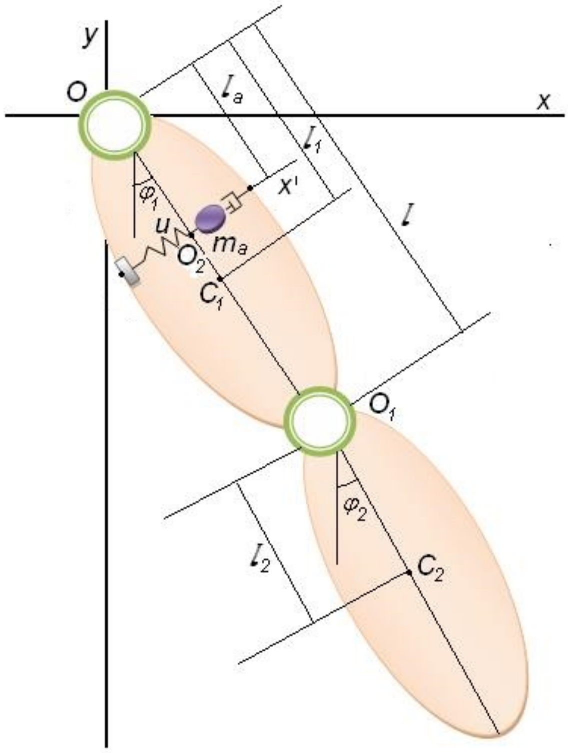

Рис. 3.5. Подвійний маятник з ДПК у першій ланці.

абсорбера, розраховані за формулами

$$K_p = \frac{1}{2}[J_1\dot{\varphi}_1^2 + J_2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l^2\dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

$$K_a = \frac{1}{2}m_a[\dot{\varphi}_1^2(l_a^2 + u^2) + 2l_a\dot{\varphi}_1\dot{u} + \dot{u}^2],$$

де J_1, J_2 – моменти інерції першої і другої ланок маятника відносно полюсів $O,\ O_1$ відповідно, m_1, m_2, m_a – маси першої і другої ланок і поглинача відповідно, u – подовження пружини, φ_1, φ_2 – кути відхилення ланок маятника від вертикальної осі, l – довжина першої ланки, l_1, l_2 – відстані від точок підвісу кожної із ланок до центру мас, l_a – відстань OO_2.

Потенціальна енергія може бути записана у вигляді

$$\Pi = -g\cos\varphi_1(m_a l_a + m_1 l_1 + m_2 l) - m_2 l_2 g\cos\varphi_2 + m_a g u\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}ku^2.$$

Рівняння руху запишемо у вигляді рівнянь Лагранжа другого роду

$$
\begin{gathered}
(J_1+m_2l^2+m_al_a^2)\ddot{\varphi}_1+m_2ll_2[\ddot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1-\\
-\varphi_2)]+m_al_a\ddot{u}+g\sin\varphi_1(m_1l_1+m_2l+m_al_a)+m_agu\cos\varphi_1=0,\\
J_2\ddot{\varphi}_2+m_2ll_2\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi_1-\varphi_2)-m_2ll_2\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_1+\dot{\varphi}_2)\sin(\varphi_1-\varphi_2)+\\
+m_2gl_2\sin\varphi_2=0,\ m_al_a\ddot{\varphi}_1+m_a\ddot{u}+m_ag\sin\varphi_1+ku=-h\dot{u}.
\end{gathered}
\tag{3.26}
$$

Визначимо умови стійкості руху системи (3.26), коли маятник перебуває у нижньому стані рівноваги, тобто розв'язку

$$
\varphi_1=0,\varphi_2=0,u=0,\dot{\varphi}_1=0,\dot{\varphi}_2=0,\dot{u}=0. \tag{3.27}
$$

3.3.2. Отримання умов стабілізації. Для початку запишемо лінійну апроксимацію системи (3.26)

$$
\begin{gathered}
(J_1+m_2l^2+m_al_a^2)\ddot{\varphi}_1+m_2ll_2\ddot{\varphi}_2+m_al_a\ddot{u}+\\
+g(m_1l_1+m_2l+m_al_a)\varphi_1+m_agu=0,\\
J_2\ddot{\varphi}_2+m_2ll_2\ddot{\varphi}_1+m_2gl_2\varphi_2=0,\\
m_al_a\ddot{\varphi}_1+m_a\ddot{u}+m_ag\varphi_1+ku=-h\dot{u}.
\end{gathered}
\tag{3.28}
$$

Введемо безрозмірні параметри за формулами

$$
\begin{gathered}
\widetilde{m}_a=\frac{m_a}{m_1},\ \widetilde{m}_2=\frac{m_2}{m_1},\ \widetilde{l}_a=\frac{l_a}{l_1},\ \widetilde{l}=\frac{l}{l_1},\ \widetilde{l}_2=\frac{l_2}{l_1},\ \tau=\sqrt{\frac{g}{l_1}}t,\\
\widetilde{k}=\frac{kl_1}{m_1g},\ \widetilde{h}=\frac{h}{m_1},\widetilde{u}=\frac{u}{l_1}.
\end{gathered}
\tag{3.29}
$$

Систему (3.28) можна переписати у вигляді

$$
\begin{gathered}
(J_1+\widetilde{m}_2\widetilde{l}^2+\widetilde{m}_a\widetilde{l}_a^2)\widetilde{\varphi}_1''+\widetilde{m}_2\widetilde{l}\widetilde{l}_2\widetilde{\varphi}_2''+\widetilde{m}_a\widetilde{l}_a\widetilde{u}''+\\
+(1+\widetilde{m}_2\widetilde{l}+\widetilde{m}_a\widetilde{l}_a)\widetilde{\varphi}_1+\widetilde{m}_a\widetilde{u}=0,\\
\widetilde{J}_2\widetilde{\varphi}_2''+\widetilde{m}_2\widetilde{l}\widetilde{l}_2\widetilde{\varphi}_1''+\widetilde{m}_2\widetilde{l}_2\widetilde{\varphi}_2=0,\\
\widetilde{m}_a\widetilde{l}_a\widetilde{\varphi}_1''+\widetilde{m}_a\widetilde{u}''+\widetilde{m}_a\widetilde{\varphi}_1+\widetilde{k}\widetilde{u}=-\widetilde{h}\widetilde{u}'.
\end{gathered}
\tag{3.30}
$$

Для простоти запису у подальшому хвилю зверху будемо опускати.

Щоб дослідити питання про стійкість руху (3.27), ми будемо використовувати результати із [17], які викладені у пункті 2.1.4.

Згідно вищенаведеним твердженням, матриці $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{C}$ ($\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$) для системи (3.30) мають вигляд

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} J_1 + m_2 l^2 + m_a l_a^2 & m_2 l l_2 & m_a l_a \\ m_2 l l_2 & J_2 & 0 \\ m_a l_a & 0 & m_a \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 + m_2 l + m_a l_a & 0 & m_a \\ 0 & m_2 l_2 & 0 \\ m_a & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Для перевірки умови (2.10) необхідно дослідити сумісність наступної системи

$$\begin{aligned} &[\lambda^2(J_1 + m_2 l^2 + m_a l_a^2) + 1 + m_2 l + m_a l_a]\gamma_1 + \lambda^2 m_2 l l_2 \gamma_2 = 0, \\ &\lambda^2 m_2 l l_2 \gamma_1 + (\lambda^2 J_2 + m_2 l_2)\gamma_2 = 0, \\ &(\lambda^2 l_a + 1)\gamma_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Із третього рівняння (3.31) випливає, що $\lambda^2 = -1/l_a$. Тоді умова сумісності системи (3.31) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \delta_1 = (m_2 l_2 + m_2^2 l l_2) l_a^2 - (J_1 m_2 l_2 + m_2^2 l^2 l_2 + m_2 l J_2 + J_2) l_a + \\ + J_1 J_2 + m_2 l^2 J_2 - m_2^2 l^2 l_2^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Обираючи довільні l_a ($l_a \leqslant l$), за винятком значень, які перетворюють (3.32) у справжню рівність, отримаємо несумісну систему (3.31). Отже, виконуються умови теореми 2.6 і ми маємо асимптотичну стійкість розв'язку, що досліджується.

Для більшої наочності можна порівняти цей результат з висновками, отриманими за допомогою стандартної процедури, заснованої на критерії Рауса – Гурвіца [118].

Характеристичне рівняння системи (3.30) записується у вигляді

$$a_0\lambda^6 + a_1\lambda^5 + a_2\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda + a_6 = 0,$$

де коефіцієнти задаються формулами

$$a_0 = m_a[J_1J_2 + m_2l^2(J_2 - m_2l_2^2)],\ a_1 = h[m_2l^2(J_2 - m_2l_2^2) + J_2(J_1 + l_a^2m_a)],$$
$$a_2 = m_2l^2k(J_2 - m_2l_2^2) + J_1J_2k + [m_2l_2(J_1 + m_2l^2) + J_2(1 + m_2l)]m_a +$$
$$+ J_2m_al_a(kl_a - m_a),\ a_3 = h[J_2 + J_1m_2l_2 + m_2l(J_2 + m_2ll_2) + m_al_a(J_2 + l_am_2l_2)],$$
$$a_4 = k[m_2l_2(J_1 + m_2l^2) + J_2(1 + m_2l)] + (1 + m_2l)m_am_2l_2 - J_2m_a^2 +$$
$$+ (J_2k - m_am_2l_2)l_am_a + m_2l_2km_al_a^2,\ a_5 = m_2l_2h(1 + m_2l + m_al_a),$$
$$a_6 = m_2l_2k(1 + m_2l) + m_am_2l_2(kl_a - m_a).$$

Розв'язок системи буде асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли виконані наступні умови:

$$a_0 > 0,\ a_3 > 0,\ a_5 > 0,\ a_6 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$
$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 \end{vmatrix} > 0. \tag{3.33}$$

Неважко бачити, що $a_0,\ a_3,\ a_5,\ a_6$ додатні.

$$\Delta_3 = h^2m_a^2\Delta_{30} = h^2m_a^2(p_0 - 2p_1l_a + p_2l_a^2 + m_al_a^4m_2^4l_2^4l^2),$$

де

$$p_0 = J_2[l^2m_2(J_2 - m_2l_2^2) + J_1J_2]^2,$$
$$p_1 = (m_2^3l_2^3l^2 + m_2lJ_2^2 + J_2^2)[l^2m_2(J_2 - m_2l_2^2) + J_1J_2],$$
$$p_2 = J_2(1 + m_2l)[J_2^2(1 + m_2l) + 2m_2^3l_2^3l^2] + m_2^4l^2l_2^4(m_2l^2 + J_1).$$

Перетворимо вираз для Δ_{30} до наступного вигляду

$$\Delta_{30} = p_0(l_a - \frac{p_1}{p_2})^2 + m_2^4l_2^4l^2(J_1J_2 + m_2l^2J_2 - m_2^2l^2l_2^2)^3 + m_am_2^4l_2^4l^2l_a^4.$$

Таким чином, цей вираз, очевидно, додатний, оскільки $p_0 > 0,\ J_2 \geqslant m_2 l_2^2$.

Визначник Δ_5 може бути представлений як

$$\Delta_5 = m_2^4 l^2 l_2^4 h^3 m_a^4 \delta_1^2.$$

Очевидно, що умови критерія Рауса – Гурвіца для системи (3.30) завжди виконуються, за винятком випадків, коли $\delta_1 = 0$.

Отже, $\delta_1 \neq 0$ є необхідною і достатньою умовою асимптотичної стійкості руху системи (3.26). Тобто, обираючи значення параметра l_a, яке не задовольняє (3.32), ми можемо домогтися експоненціальної стійкості руху подвійного маятника з доданою масою.

Розглянемо випадок, коли поглинач коливань розташований у другій ланці маятника (рис. 3.6).

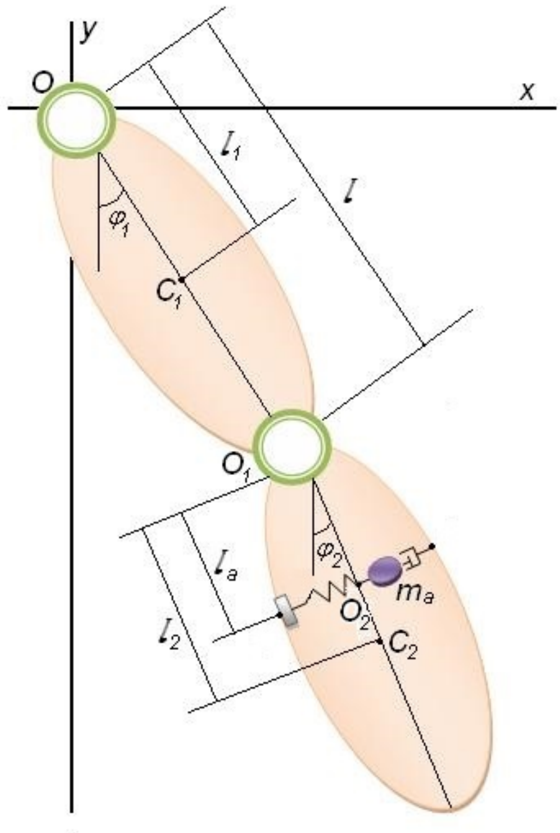

Рис. 3.6. Подвійний маятник з ДПК в другій ланці.

У цій ситуації під час вибору безрозмірних параметрів необхідно замінити

m_1 на m_2 і l_1 на l_2. Тоді матриці приймають вигляд

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} J_1 + l^2 + m_a l^2 & l + m_a l l_a & m_a l \\ l + m_a l l_a & J_2 + m_a l_a^2 & m_a l_a \\ m_a l & m_a l_a & m_a \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} m_1 l_1 + l + m_a l & 0 & 0 \\ 0 & 1 + m_a l_a & m_a \\ 0 & m_a & k \end{pmatrix}.$$

Отримаємо систему умов

$$\begin{aligned} &[\lambda^2(J_1 + l^2 + m_a l^2) + m_1 l_1 + l + m_a l]\gamma_1 + \lambda^2(l + m_a l l_a)\gamma_2 = 0, \\ &\lambda^2(l + m_a l l_a)\gamma_1 + [\lambda^2(J_2 + m_a l_a^2) + 1 + m_a l_a]\gamma_2 = 0, \\ &\lambda^2 l \gamma_1 + \gamma_2 \lambda^2 l_a + \gamma_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Щоб перевірити узгодженість системи, виразимо із другого рівняння (3.34)

$$\gamma_2 = -\frac{\lambda^2 l(1 + m_a l_a)\gamma_1}{\lambda^2 J_2 + \lambda^2 m_a l_a^2 + 1 + m_a l_a}.$$

Підставивши цей вираз у третє рівняння (3.34), отримаємо

$$\frac{\lambda^2 l \gamma_1(\lambda^2 J_2 + 2 + 2m_a l_a - \lambda^2 l_a)}{\lambda^2 J_2 + \lambda^2 m_a l_a^2 + 1 + m_a l_a} = 0.$$

Звідки маємо $\lambda^2 = -2(1 + m_a l_a)/(J_2 - l_a)$.

Умову сумісності системи (3.34) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} \delta_2 = {} & l_a^3 m_a[(4l^2 + 4J_1 + 2l)m_a + 2l + 2m_1 l_1] - l_a^2[(6l^2 + 2lJ_2) - \\ & - (l - 2lJ_2 - 2m_1 l_1 J_2 + 6J_1 + 6l^2)m_a - l - m_1 l_1] + \\ & + l_a[(2l^2 m_a^2 + 2J_1 m_a + 2m_a l^2)J_2 - 10 m_a l^2 + 2J_1 + 2l^2] - \\ & - (m_a l + m_1 l_1 + l)J_2^2 + (2J_1 + 2m_a l^2 + 2l^2)J_2 - 4l^2 = 0. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Аналогічно першому випадку, обираючи l_a таким, щоб не задовольнити рівності (3.35), отримуємо асимптотичну стійкість розв'язку, що досліджується.

Можна перевірити, що умови асимптотичної стійкості, отримані з використанням критерія Рауса – Гурвіца, також виконуються, якщо $\delta_2 \neq 0$.

Зауваження 3.1. *У випадку, коли рівність* (3.31) *або* (3.35) *має місце, цей факт не заважає асимптотичній стійкості рівноваги. Лінійне наближення має пару чисто уявних коренів, і ми отримуємо критичний випадок у розумінні Ляпунова. Для доказу асимптотичної стійкості можна побудувати функцію Ляпунова [75]. Ця функція являє собою суму додатно визначеної квадратичної форми і форми четвертого порядку і має від'ємну похідну за часом. Загалом, ця процедура не складна, але вона призводить до надзвичайно величезних аналітичних виразів для коефіцієнтів функції (і її похідної).*

Зауваження 3.2. *Підхід, який використовуеться для доведення асимптотичної стійкості руху, відносно простий і набагато простіший, ніж використання інших методів. Однак він не дає оцінки швидкості загасання збурених коливань первинної системи. Для цього цей підхід може бути змінений або доповнений деякою спеціальною процедурою оцінки. Очевидно, що замість цього виграшу він (підхід) втратить частину простоти.*

Зараз ми не обговорюємо питання вибору параметрів поглиначів з метою оптимізації швидкості загасання. Для довільної множини параметрів маятника ця задача зводиться до задачі екстремуму функції вищого порядку і, ймовірно, не має явного кінцевого розв'язку. Однак, якщо розподіл маси маятника задано, чисельні розрахунки можуть допомогти. Наші розрахунки свідчать про те, що конфігурація В з невеликою відстанню l_a є кращою, а значення k, h сильно залежать від параметрів первинної системи. Наприклад, при $m_1 = m_2 = m, \quad l_1 = l_2 = l, J_1 = J_2 = ml^2$, $\widetilde{m}_a = 2m/5$, для конфігурації А отримано $\widetilde{l}_a = 0.552$, $\widetilde{k} = 0.45, \widetilde{h} = 0.463$, і $\sigma = \max\{Re\lambda_j\} \approx -0.0140$. Для конфігурації В відповідні значення є $\widetilde{l}_a = 0.05, \widetilde{k} = 0.486, \widetilde{h} = 0.234$, і $\sigma = \max\{Re\lambda_j\} \approx -0.0943$.

3.4. Висновки

У розділі розглянуто питання стійкості станів рівноваги деяких маятникових систем. Перелічимо основні результати розділу.

1. Досліджено задачу стійкості руху у критичному за Ляпуновим випадку, коли характеристичне рівняння лінійного наближення системи має m пар чисто уявних коренів і l коренів з від'ємною дійсною частиною.
2. Запропоновано спосіб побудови функції Ляпунова для системи зазначеного вище вигляду у критичному випадку пар чисто уявних коренів. Даний підхід видається більш простим, ніж відомий метод зведення.
3. Сформульовано і доведено дві теореми, що дозволяють встановити асимптотичну стійкість або нестійкість тривіального розв'язку зазначеної системи.
4. Розв'язано задачу про стійкість стану рівноваги подвійного математичного маятника, до якого приєднано лінійний динамічний поглинач коливань пасивного типу. Показано, що додавання останнього до системи робить нижній стан рівноваги маятника асимптотично стійким.
5. Досліджено задачу асимптотичної стійкості за частиною змінних шляхом побудови функції Ляпунова.
6. Розв'язано задачу стабілізації стану рівноваги маятникового осцилятора за допомогою додавання до нього динамічного абсорбера. З'ясовано, що додавання абсорбера у даному випадку веде до рівномірної асимптотичної стійкості за частиною змінних.
7. Показано, що приєднання ДПК до подвійного фізичного маятника стабілізує його рівновагу – забезпечує експоненціальну стійкість. Для цього застосовується спеціальна проста процедура перевірки умов стабілізації.

РОЗДІЛ 4
ВПЛИВ СТРУКТУРИ СИЛ НА СТІЙКІСТЬ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ДВОМА СТУПЕНЯМИ СВОБОДИ

4.1. Постановка задачі

Обмежимося розглядом рівняння лінійного наближення.

Розглянемо лінійний диференціальний оператор

$$\boldsymbol{L} = \frac{d}{dt^2}\widetilde{\boldsymbol{A}} + \frac{d}{dt}\widetilde{\boldsymbol{B}} + \widetilde{\boldsymbol{C}},$$

де $\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{C}}$ — дійсні квадратні матриці другого порядку, $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ — додатно визначена. Розкладемо $\widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{C}}$ на симетричну і кососиметричну (з нульовою головною діагоналлю) складові:

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{B} \geqslant 0), \widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{P}$$

і запишемо рівняння

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}) = 0, \boldsymbol{x} \in R^2, \tag{4.1}$$

яке можна розглядати як рівняння руху лінеаризованої механічної системи, що знаходиться під дією дисипативної, гіроскопічної, потенціальної і циркуляційної сил (ДС, ГС, ПС і ЦС відповідно). Як відомо [12,118], завжди можна вказати невироджене перетворення

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Lambda}\widetilde{\boldsymbol{x}}$$

таке, що

$$\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{E}, \ \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Lambda} = \mathtt{diag}(c_1, c_2),$$

де $\boldsymbol{E}$ — одинична матриця.

Структура матриць $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{P}$ не зміниться, тому, не обмежуючи спільності, вважаємо, що

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}, \boldsymbol{G} = g\boldsymbol{J}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = p\boldsymbol{J}, \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен для системи (4.1) має вигляд

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \lambda^4 + (b_{11} + b_{22})\lambda^3 + (c_1 + c_2 + g^2 + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)\lambda^2 + \\ + (b_{11}c_2 + c_1 b_{22})\lambda + c_1 c_2 + p^2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Дослідимо вплив структури сил на стійкість руху заданої системи. А для деяких випадків отримаємо оцінки для власних значень (ВЗ) – коренів характеристичного рівняння ($f(\lambda) = 0$).

4.2. Випадок відсутності циркуляційної сили

Зупинимося спочатку на випадку $p = 0$. Проаналізуємо умови стійкості нульового розв'язку системи (4.1). Для того, щоб усі ВЗ мали від'ємні дійсні частини, згідно з критерієм Рауса – Гурвіца [12], необхідна і достатня додатність коефіцієнтів характеристичного многочлена і виразу

$$\begin{aligned} \Delta_3^0 = (c_1 + c_2 + g^2 + b_{11}b_{22} - b_{12}^2)(b_{11} + b_{22})(b_{11}c_2 + c_1 b_{22}) - \\ - (b_{11}c_2 + c_1 b_{22})^2 - c_1 c_2 (b_{11} + b_{22})^2 = b_{11}b_{22}(c_1 - c_2)^2 + \\ + (c_1 b_{22} + c_2 b_{11})(b_{11} + b_{22})(g^2 + b_{11}b_{22} - b_{12}^2). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Якщо механічна система за відсутності дисипативних і гіроскопічних сил стійка ($c_1 > 0,\ c_2 > 0$), то легко бачити, що усі коефіцієнти многочлена (4.2) додатні ($b_{12}^2 \leqslant b_{11}b_{22}$). Очевидною є і невід'ємність визначника Δ_3^0 (сума двох невід'ємних доданків у правій частині (4.3)). Однак є наступні можливості для того, щоб він дорівнював нулю:

1) Якщо $b_{11} > 0,\ b_{22} > 0$, то $c_1 = c_2$. Перші дві дужки у записі другого доданка у правій частині (4.3) строго додатні, а третя дорівнює нулю тільки за умов

$$g = 0,\ b_{12}^2 = b_{11}b_{22}.$$

Тобто гіроскопічна сила відсутня, а дисипація енергії є частковою (функція Релея знакостала). У цьому випадку система (4.1) є стійкою неасимптотично, а її ВЗ дорівнюють

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{c_1}i,\ \lambda_{3,4} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4c_1},$$

де $2b = b_{11} + b_{22}-$ слід матриці $\boldsymbol{B}$.

2) За умови $c_1 \neq c_2$, маємо $b_{11}b_{22} = 0$. Якщо один із співмножників не нульовий, то $b_{12} = 0$ — інакше порушиться припущення $\det \boldsymbol{B} \geqslant 0$. Тоді другий доданок у правій частині (4.3) буде дорівнювати нулю тільки за умови $g = 0$. Система (4.1) розпадається на два рівняння, одне із яких описує коливання звичайного осцилятора, а інше — осцилятора з в'язким тертям. Якщо ж $b_{11} = 0$, $b_{22} = 0$, і, як наслідок, $b_{12} = 0$, то характеристичне рівняння (4.2) — біквадратне, його дискримінант дорівнює

$$D = (c_1 - c_2)^2 + 2g^2(c_1 + c_2) + g^4$$

і строго додатний, отже ВЗ чисто уявні і різні, рух є стійким неасимптотично. Останній висновок випливає також із першої теореми Томсона – Тета – Четаєва [12].

Обидва описані випадки можливі тільки за умови, що гіроскопічна сила відсутня, а дисипація енергії є неповною. Іншими словами, якщо ГС не дорівнює нулю, або функція Релея додатно визначена, то будь-який рух системи (4.1) стійкий асимптотично.

Якщо механічна система за відсутності дисипативних і гіроскопічних сил нестійка, і ступінь нестійкості непарна ($c_1c_2 < 0$), то вільний член характеристичного многочлена від'ємний. Якщо ж $c_1 < 0, c_2 < 0$ (парна ступінь нестійкості потенціальної системи), то коефіцієнт при λ від'ємний. Як наслідок, у обох випадках хоча б одне ВЗ має додатну дійсну частину. Рух нестійкий за будь-яких гіроскопічних і дисипативних сил.

Перейдемо до отримання оцінок для власних значень. Нехай

$$0 \leqslant c_2 \leqslant c_1 = \omega_0^2\ (\omega_0 > 0),\ b > 0.$$

Позначимо

$$b_{11} = 2b\delta_1,\ b_{22} = 2b(1-\delta_1),\ b_{12} = 2b\delta_2\sqrt{\delta_1(1-\delta_1)},$$
$$0 \leqslant \delta_1 \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \delta_2 \leqslant 1 \tag{4.4}$$

і введемо безрозмірні параметри і час за формулами

$$b = \omega_0\widetilde{b},\ g = \omega_0\widetilde{g},\ c_2 = \omega_0^2\widetilde{c}_2, \lambda = \omega_0\widetilde{\lambda},\ t = \widetilde{t}/\omega_0. \tag{4.5}$$

Для зручності хвилю зверху надалі опускаємо.

Позначимо $v = \max(b, g)$ і розглянемо випадок $v >> 1$. Характеристичне рівняння $f(\lambda) = 0$ можна розглядати як рівняння з великим параметром або, розділивши обидві частини на v, як сингулярно збурене рівняння з малим параметром $\varepsilon = 1/v$. Щоб позбутися від малого параметра при старшому ступені, зробимо підстановку

$$\lambda = \sigma/\varepsilon,\ b = b_1/\varepsilon,\ g = g_1/\varepsilon.$$

Очевидно, що $\max(b_1, g_1) = 1,\ \varepsilon > 0$.

За допомогою методів теорії збурень [116] знайдемо асимптотичні розкладання коренів многочлена

$$f_1(\sigma,\varepsilon) = \sigma^4 + 2b_1\sigma^3 + [4b_1^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2) + g_1^2 + \varepsilon^2(1+c_2)]\sigma^2+$$
$$+ 2b_1\varepsilon^2[1-\delta_1(1-c_2)]\sigma + \varepsilon^4 c_2.$$

Відповідний породжуючий многочлен $f_1(\sigma, 0)$ має двократний корінь

$$(\sigma_0)_{1,2} = 0.$$

Визначимо порядок коренів $\sigma_{1,2}(\varepsilon)$. З цією метою підставимо

$$\sigma = \sigma_1\varepsilon^m\ (m > 0)$$

до многочлена $f_1(\sigma,\varepsilon)$ і виділимо головну частину.

Розглядаючи послідовність степенів ε для кожного із доданків, випишемо їх показники:

$$4m,\ 3m,\ 2m, 2m+2, m+2, 4.$$

Серед перших чотирьох показників найменшим є $2m$, і для визначення m отримуємо умову

$$2m = \min(m+2, 4),$$

тобто $m = 2$.

Для другої пари коренів породжуючого рівняння знаходимо

$$(\sigma_0)_{3,4} = -b_1 \pm \sqrt{D_1},\ D_1 = b_1^2[1 - 4\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2)] - g_1^2. \tag{4.6}$$

Неважко бачити, що, внаслідок умов (4.4), вираз у квадратних дужках невід'ємний. Він дорівнює нулю тільки за умови $\delta_1 = 1/2,\ \delta_2 = 0$, і приймає найбільше значення 1, якщо одне (і тільки одне) із значень $\delta_1,\ 1-\delta_1,\ 1-\delta_2^2$ дорівнює нулю, що відповідає неповній дисипації енергії. У першому із цих випадків корені $(\sigma_0)_{3,4}$ комплексно спряжені (і різні), тому корені многочлена f_1 можна шукати у вигляді рядів відносно цілих степенів ε, точніше ε^2, оскільки малий параметр представлений у f_1 тільки своїми парними степенями. Для всіх інших пар значень $\delta_1,\ \delta_2$ дискримінант D_1 може дорівнювати нулю при відповідному співвідношенні між коефіцієнтами b_1 і g_1, що характеризують величини (відносно часу $\widetilde{t}$) дисипативної і гіроскопічної сил відповідно. Тоді

$$(\sigma_0)_3 = (\sigma_0)_4 = -b_1,$$

і, як це було зроблено вище, підставимо

$$\sigma = -b_1 + \alpha\varepsilon^n$$

до f_1 і виділимо головну частину:

$$\alpha^4\varepsilon^{4n} - 2b_1\alpha^3\varepsilon^{3n} + \alpha^2\varepsilon^{2+2n}(1+c_2) - 2b_1\alpha\varepsilon^{2+n}[\delta_1 + (1-\delta_1)c_2] +$$
$$+ b_1^2\alpha^2\varepsilon^{2n} + c_2\varepsilon^4 + b_1^2\varepsilon^2(1-c_2)(2\delta_1 - 1).$$

Якщо $\delta_1 \neq 1/2$, то найменшими показниками будуть $2n$ і 2, звідки маємо $n = 1$. Значення α буде при цьому дійсним, якщо $\delta_1 \in [0, 1/2)$ і уявним при $\delta_1 \in (1/2, 1]$. При $\delta_1 = 1/2$ найменшими показниками будуть $2n,\ n+2$ і 4, звідки маємо $n = 2$. Отже, для пошуку коренів $f_1(\sigma, \varepsilon)$ можна користуватися розкладанням у ряд по цілим степеням ε, хоча, виключаючи частковий випадок $D_1 = 0$ ($\delta_1 \neq 1/2$), ці розкладання будуть містити тільки парні степені малого параметра. Коефіцієнти розкладань легко обчислюються з використанням будь-якої системи аналітичних обчислень (MAPLE, MATLAB, Mathematica). Так, за допомогою пакета MAPLE 12 маємо

$$(\sigma_2)_{3,4} = -\frac{\sigma_0(1 + c_2) + b_1(1 - \delta_1 + \delta_1 c_2)}{4\sigma_0^2 + 3b_1\sigma_0 + 2[b_1^2\delta_1(1 - \delta_1)(1 - \delta_2^2) + g_1^2]},$$

де відповідне значення σ_0 береться із формули (4.6). Таким чином, з урахуванням заміни (4.5) у якості шуканих оцінок для ВЗ отримуємо

$$\begin{aligned} &\lambda_{1,2} \approx -\frac{b[c_1(1 - \delta_1) + c_2\delta_1] \pm R}{b^2\delta_1(1 - \delta_1)(1 - \delta_2^2) + g^2}, \lambda_{3,4} \approx -(b \pm R\sqrt{D_1}) + R^{-1}(\sigma_2)_{3,4}, \\ &R = \sqrt{b^2c_1^2(1 - \delta_1)^2 - 2c_1c_2[b^2\delta_1(1 - \delta_1)(1 - 2\delta_2^2) + 2g^2] + b^2c_2^2\delta_1^2}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Як випливає з формул (4.7), максимальний характеристичний показник для системи (4.1) (при $p = 0$) не перевищує виразу

$$-b[c_1(1 - \delta_1) + c_2\delta_1]/[b^2\delta_1(1 - \delta_1)(1 - \delta_2^2) + g^2],$$

який при $b \geqslant g$ має порядок b^{-1}, у супротивному випадку – порядок b/g^2. Це означає, що при заданих ПС системи додавання великих ДС і ГС хоча і гарантує асимптотичну стійкість, але забезпечує слабку швидкість прагнення збурених рухів до нуля, тим меншу, чим більше $\max(b, g)$.

4.3. Врахування впливу циркуляційної сили. Випадок $p \gg 1$

Циркуляційні сили можуть здійснювати на рух системи як дестабілізуючий вплив [21, 28], так і стабілізуючий [12, 24]. Запишемо вираз для $\Delta_3 = F(p, b, g)$:

$$F = -4p^2(b^2+g^2)+4bgp[4b^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2)+g^2+(c_1-c_2)(2\delta_1-1)]+\Delta_3^0. \tag{4.8}$$

Якщо рух за відсутності ЦС асимптотично стійкий, то

$$F = \Delta_3^0 > 0,$$

і стійкість, очевидно, збережеться при достатньо малих по модулю значеннях p. У той же час із (4.8) випливає, що $F < 0$ при достатньо великих за модулем значеннях p, що гарантує існування хоча б одного додатного характеристичного показника, при цьому рух нестійкий. Ця ситуація видається найцікавішою з прикладної точки зору, і ми розглянемо її детальніше.

Із (4.8) можна бачити, що компенсувати дестабілізуючий вплив ЦС можна або великою величиною ГС, або ДС (або спільно ГС і ДС). Обмежимося випадком $p > 0, g \gg 1$, а b, c_1, c_2 вважатимемо величинами порядку одиниці.

А) Припустимо спочатку, що величина g не перевершує порядку $p^{1/2}$. Тоді можна припустити, що

$$p = 1/\varepsilon^2, g = \gamma/\varepsilon(\gamma > 0).$$

Характеристичне рівняння (4.2) має чотири різних комплексних кореня порядку $1/\varepsilon$. Справді, аналогічно п. 4.2 припустимо $\lambda = \widetilde{\lambda}/\varepsilon$ (“тильду” опускаємо). Породжуюче рівняння

$$f_0(\lambda) = \lambda^4 + \gamma^2\lambda^2 + 2\gamma\lambda + 1 = 0$$

має корені

$$\begin{gathered} \lambda_{01} = -\frac{1}{r} + \frac{1}{2}i(\gamma - r), \lambda_{02} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2}i(\gamma + r), \lambda_{03} = \overline{\lambda_{01}}, \lambda_{04} = \overline{\lambda_{02}}, \\ r = \sqrt{\gamma^2 + \sqrt{\gamma^4 + 16}}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Наступні коефіцієнти $\lambda_{sj}(s = 1, 2, ...)$ разкладання $\lambda_j(\varepsilon)$ $(j = \overline{1, 4})$ у ряди Тейлора знаходяться як розв’язки лінійних рівнянь, коефіцієнти яких є цілими функціями від $\lambda_{0j}, ..., \lambda_{s-1j}$. Зокрема,

$$\lambda_{1j} = -b\lambda_{0j}^3/\rho,$$

де $\rho = 2\lambda_{0j}^3 + \gamma^2\lambda_{0j} + \gamma$.

Відмітимо, що $\rho \neq 0$. У цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою у $\rho(\lambda)$ виразів із (4.9), але значно простіше обчислити результант многочленів $f_0(\xi)$ і $\rho(\xi)$. Він дорівнює

$$\gamma^4 + 16 > 0,$$

отже, жоден із коренів $f_0(\xi)$ не може бути коренем $\rho(\xi)$. Таким чином, для коренів рівняння (4.2) отримуємо

$$\lambda_j = \lambda_{0j} p^{1/2} + \lambda_{1j} + O(p^{-1/2}). \tag{4.10}$$

Із (4.9) і (4.10) видно, що при зроблених припущеннях система (4.1) має два великих додатних характеристичних показника порядку

$$p^{1/2}/r = p(g^2 + \sqrt{g^4 + 16p^2})^{-1/2},$$

що гарантує швидке зростання збурених розв'язків (незалежно від виду дисипативної і потенціальної сил).

Б) Нехай тепер переважаючою є ГС (у випадках, коли переважаючою є ПС, ДС або дві будь-які сили, техніка розрахунку така ж), тобто $g \gg \max(b, p, c_1, c_2)$. Вводячи позначення

$$b = g\widetilde{b}\varepsilon, p = g^2\widetilde{p}\varepsilon, c_1 = g^2\widetilde{c_1}\varepsilon, c_2 = g^2\widetilde{c_2}\varepsilon, \lambda = g\widetilde{\lambda}, \tag{4.11}$$

отримаємо многочлен

$$\widetilde{\lambda}^4 + 2\widetilde{b}\varepsilon\widetilde{\lambda}^3 + [1 + \varepsilon(\widetilde{c_1} + \widetilde{c_2}) + 4\varepsilon^2\widetilde{b}^2\delta_1(1-\delta_1)(1-\delta_2^2)]\widetilde{\lambda}^2 +$$
$$+ 2\varepsilon[\widetilde{p} + \varepsilon\widetilde{b}(\widetilde{c_1} - \widetilde{c_1}\delta_1 + \widetilde{c_2}\delta_1)]\widetilde{\lambda} + \varepsilon^2(\widetilde{p}^2 + \widetilde{c_1}\widetilde{c_2}),$$

який має пару чисто уявних коренів

$$(\widetilde{\lambda_0})_{1,2} = \pm i$$

і подвійний нульовий корінь

$$(\widetilde{\lambda_0})_{3,4} = 0.$$

Аналогічно тому, як це робилося вище, підставляємо

$$\widetilde{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2$$

і знаходимо вирази для λ_1, λ_2. Виконуючи перехід до первинних параметрів згідно (4.11), отримуємо для ВЗ наступні наближення:

$$\lambda_{1,2} \approx \pm i[g + \frac{1}{2g}(c_1 + c_2)] - b + \frac{1}{g}p + \frac{1}{g^2}b[c_1(1-\delta_1) + c_2\delta_1],$$
$$\lambda_{3,4} \approx \frac{1}{g} - p \pm R_1 - \frac{1}{g}b[c_1(1-\delta_1) + c_2\delta_1] - \frac{1}{2g^2}(c_1 + c_2)(p \mp R_1)^2,$$

де $R_1 = \sqrt{-c_1c_2}$.

4.4. Випадок відсутності гіроскопічної сили

Розглянемо механічну систему, яка знаходиться під дією ДС, ПС і ЦС (ГС відсутня). Відповідні матриці мають вигляд

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix}.$$

Будемо припускати, що $\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E}$. Тоді рівняння руху системи запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + c_1 x_1 + p x_2 = 0, \\ &\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 - p x_1 + c_2 x_2 = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Введемо позначення

$$b_1 = 2b\delta_1,\ b_2 = 2b(1-\delta_1),\ c_1 = 2c\delta_2,\ c_2 = 2c(1-\delta_2), \tag{4.13}$$

де $b > 0,\ c > 0,\ 0 \leqslant \delta_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant \delta_2 \leqslant 1.$

Тоді характеристичне рівняння для системи (4.12) має вигляд

$$\begin{aligned} &f(\lambda) = \lambda^4 + 2b\lambda^3 + [4b^2\delta_1(1-\delta_1) + 2c]\lambda^2 + 4bc(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2)\lambda + \\ &+ 4c^2\delta_2(1-\delta_2) + p^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Покажемо, що коефіцієнт при λ додатний. Дійсно,

$$4bc(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2) = 4bc(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2 + \delta_1^2 - \delta_1^2 + \delta_2^2 - \delta_2^2) =$$

$$= 4bc[\delta_1 + (\delta_1 - \delta_2)^2 + \delta_2(1-\delta_2)] > 0.$$

Не важко бачити, що усі коефіцієнти рівняння (4.14) додатні (за винятком, коли δ_1 и δ_2 одночасно приймають однакові граничні значення).

Запишемо визначник Гурвіца Δ_3.

$$\Delta_3 = -4b^2p^2 + 16\delta_1(1-\delta_1)b^2[(2\delta_2 - 1)^2c^2 + 2(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2)b^2c].$$

Із запису Δ_3 видно, що у випадку неповної дисипації (при $\delta_1 = 0$ або $\delta_1 = 1$) випливає порушення асимптотичної стійкості ($\Delta_3 < 0$). Таким чином, повна дисипація енергії є однією із необхідних умов наявності асимптотичної стійкості у даному випадку. З цією метою граничні умови для δ_1 виключаємо, тобто

$$0 < \delta_1 < 1.$$

Знайдемо умову, за якої виконано $\Delta_3 > 0$. Це можливо якщо

$$p^2 < 4\delta_1(1-\delta_1)[(2\delta_2-1)^2c^2 + 2(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2)b^2c]. \qquad (4.15)$$

Відзначимо, що згідно з критерієм Льєнара – Шипара розглядати визначники Гурвіца парного порядку не доцільно. Їх додатність випливає з додатності визначників непарного порядку.

Розділимо нерівність (4.15) на c^2 і введемо нові змінні

$$\widetilde{p} = \frac{p^2}{c^2},\ \widetilde{b} = \frac{b^2}{c}.$$

Маємо

$$\widetilde{p} < 4\delta_1(1-\delta_1)[(2\delta_2-1)^2 + 2(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2)\widetilde{b}]. \qquad (4.16)$$

Надалі для зручності знак "$\widetilde{\ }$" будемо опускати.

Розглянемо умову (4.16) більш детально і зобразимо область асимптотичної стійкості вихідної системи.

Розглянемо поверхню

$$p(\delta_1, \delta_2) = 4\delta_1(1-\delta_1)[(2\delta_2-1)^2 + 2(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2)b].$$

Дослідимо її на наявність екстремумів.

Розв'язуючи систему

$$\frac{\partial p}{\partial \delta_1} = 0,\ \frac{\partial p}{\partial \delta_2} = 0,$$

отримуємо стаціонарну точку $M_0 = (1/2, 1/2)$.

Знайдемо значення часткових похідних другого порядку у точці M_0

$$A = \frac{\partial^2 p}{\partial \delta_1^2},\ B = \frac{\partial^2 p}{\partial \delta_1 \partial \delta_2},\ C = \frac{\partial^2 p}{\partial \delta_2^2},$$

$$AC - B^2 = -16b(b+4) < 0,$$

Отже, точка M_0 є сідловою для даної поверхні.

На рис. 4.1 зображений вигляд поверхні $p = p(\delta_1, \delta_2)$. Нижче цієї поверхні знаходиться область асимптотичної стійкості, а вище – область нестійкості.

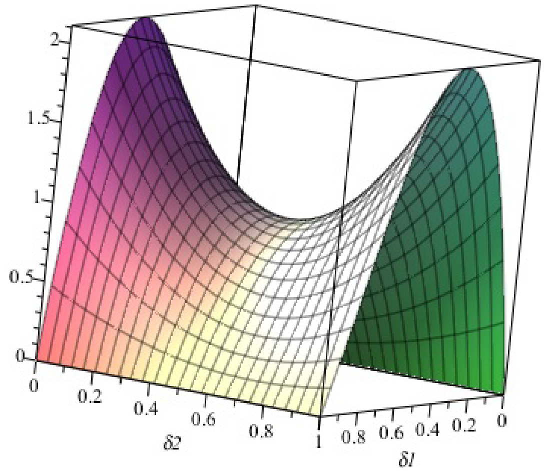

Рис. 4.1. Вигляд поверхні $p = p(\delta_1, \delta_2)$ при $b = 1$.

Таким чином, якщо значення параметрів системи такі, що виконана умова (4.16), має місце асимптотична стійкість руху системи, що розглядається.

4.4.1. Стійкість руху системи у випадку малої дисипації. У випадку $b = 0$ може бути як стійкість, так і не стійкість. Дослідимо це питання більш детально. Для цього перепишемо характеристичне рівняння (4.14) у вигляді

$$\lambda^4 + 2c\lambda^2 + 4c^2\delta_2(1 - \delta_2) + p^2 = 0. \tag{4.17}$$

Воно є біквадратним по λ.

Його дискримінант дорівнює

$$\frac{D}{4} = c^2(2\delta_2 - 1)^2 - p^2.$$

У випадку, коли $D > 0$, із теореми Вієта випливає, що квадратне рівняння відносно λ^2 має два різних від'ємних кореня, а отже для λ мають місце дві пари чисто уявних коренів. Як наслідок, рух заданої системи буде стійким неасимптотично.

При $D = 0$ має місце випадок кратних чисто уявних коренів з однією групою розв'язків. Жорданова клітина для системи має другий порядок, що означає флатерну нестійкість розв'язку системи.

Якщо ж $D < 0$, то знайдеться хоча б одна додатна дійсна частина λ, що спричиняє дивергентну нестійкість руху, що досліджується.

Перейдемо до отримання оцінок для власних значень. Розглянемо випадок малої ДС, тобто знайдемо оцінки для ВЗ рівняння (4.14) при малому значенні параметра b.

Отримуємо многочлен

$$\lambda^4 + 2\lambda^3\varepsilon + [4\delta_1(1-\delta_1)\varepsilon^2 + 2c]\lambda^2 + 4\varepsilon(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2)\lambda + 4c^2\delta_2(1-\delta_2) + p^2,$$

який при $\varepsilon = 0$ має чотири корені

$$\lambda_0 = \pm\sqrt{-c \pm \sqrt{c^2(2\delta_2 - 1)^2 - p^2}}.$$

Аналогічно тому, як це робилося вище, підставляємо

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1$$

і знаходимо вираз для λ_1.

$$\lambda_1 = -\frac{2c(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2) + \lambda_0^2}{2(\lambda_0^2 + c)}.$$

Тоді для ВЗ маємо наступні оцінки

$$\lambda \approx -\frac{b}{2}[1 \mp \frac{1 - 2(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2)}{R}] \pm \sqrt{c}\sqrt{1 \mp R}\; i, \tag{4.18}$$

де $R = \sqrt{(2\delta_2 - 1)^2 - (p/c)^2}$.

Як можна бачити із формули (4.18), максимальний характеристичний показник для системи (4.12) не перевищує виразу

$$-\frac{b}{2}[1 - \frac{1 - 2(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2)}{2R}],$$

який при малому значенні $b = \varepsilon$ також має порядок малості ε. Також із (4.18) слідує, що значення b не впливає на частоту коливань розв'язку системи. Найбільша частота коливань не перевищує значення $\sqrt{2c}$, а найменша – може бути достатньо близькою до нуля.

4.4.2. Врахування впливу потенціальної сили. Випадок $c \gg 1$. Перейдемо до розгляду випадка, коли переважаючою є потенціальна сила, тобто $c >> 1$. Параметр b вважатимемо величиною порядку одиниці, а p – одного порядку з величиною c.

Розділимо (4.14) на c^2 і введемо наступні позначення

$$\sigma = \lambda\varepsilon,\ \varepsilon = \frac{1}{c^2},\ \widetilde{p} = \frac{p}{c}. \tag{4.19}$$

Отримаємо характеристичне рівняння, яке має вигляд

$$f(\sigma) = \sigma^4 + 2\varepsilon\sigma^3 + [4\varepsilon^2\delta_1(1-\delta_1) + 2]\sigma^2 + 4\varepsilon(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2)\sigma +$$

$$+4\delta_2(1-\delta_2) + \widetilde{p}^2 = 0.$$

Відповідний породжуючий многочлен при $\varepsilon = 0$ має чотири кореня

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{-1 \pm \sqrt{(2\delta_2 - 1)^2 - \widetilde{p}^2}}.$$

Як і раніше, підставляємо замість σ вираз $\sigma_0 + \varepsilon\sigma_1$ і знаходимо σ_1.

$$\sigma_1 = -\frac{2(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2) + \sigma_0^2}{2(\sigma_0^2 + 1)}.$$

Виконуючи перехід до початкових параметрів згідно (4.19), отримуємо для ВЗ наступні наближення

$$\lambda \approx -\frac{1}{2}[1 \mp \frac{2(\delta_1 - 2\delta_1\delta_2 + \delta_2) - 1}{R}] + c^2\sqrt{1 \mp R}\, i, \tag{4.20}$$

де $R = \sqrt{(2\delta_2 - 1)^2 - (p/c)^2}$.

4.5. Приклад. Важкий гіроскоп

Розглянемо рівняння руху важкого твердого тіла, що знаходиться під дією демпфуючого моменту $\boldsymbol{M} = -k(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0)$:

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + P\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{M}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} = 0, \tag{4.21}$$

де $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор інерції, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор кутової швидкості тіла у зв'язаній системі координат, $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикалі, $\boldsymbol{s}$ – вектор, спрямований із нерухомої точки до центру мас тіла, P – вага тіла, $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)^T$, ω_0 — константа; верхній індекс T означає транспонування.

Оберемо у якості незбуреного руху рівномірні обертання тіла навколо головної осі, що містить центр мас

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)^T, \quad \boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)^T \tag{4.22}$$

і запишемо рівняння у варіаціях:

$$\begin{pmatrix} \dot{\widetilde{\omega}}_1 \\ \dot{\widetilde{\omega}}_2 \\ \dot{\widetilde{\omega}}_3 \\ \dot{\widetilde{\nu}}_1 \\ \dot{\widetilde{\nu}}_2 \\ \dot{\widetilde{\nu}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k/J_1 & \omega_0(J_2 - J_3)/J_1 & 0 & 0 & P/J_1 & 0 \\ \omega_0(J_3 - J_1)/J_2 & -k/J_2 & 0 & -P/J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k/J_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \omega_0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_1 \\ \widetilde{\omega}_2 \\ \widetilde{\omega}_3 \\ \widetilde{\nu}_1 \\ \widetilde{\nu}_2 \\ \widetilde{\nu}_3 \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

значком “тильда” позначені збурення. Очевидно, без обмеження спільності, можна вважати $\omega_0 > 0$. Вводячи безрозмірні параметри і час за формулами

$$\alpha = J_2/J_1,\ \beta = J_3/J_1,\ \mu = P/(J_1\omega_0^2), \varkappa = k/(J_1\omega_0),\ \tau = \omega_0 t \tag{4.24}$$

і, виражаючи із четвертого і п’ятого рівнянь (4.23) змінні $\widetilde{\omega}_1$, $\widetilde{\omega}_2$, отримуємо

$$\begin{gathered} \widetilde{\nu}_2'' + \varkappa\widetilde{\nu}_2' + (\alpha - \beta + 1)\widetilde{\nu}_1' + (\beta - \alpha - \mu)\widetilde{\nu}_2 + \varkappa\widetilde{\nu}_1 = 0, \\ \alpha\widetilde{\nu}_1'' + \varkappa\widetilde{\nu}_1' - (\alpha - \beta + 1)\widetilde{\nu}_2' + (\beta - 1 - \mu)\widetilde{\nu}_1 - \varkappa\widetilde{\nu}_2 = 0, \end{gathered}$$

тобто систему вигляду (4.1) при

$$\begin{gathered} \boldsymbol{x} = (\widetilde{\nu}_2, \sqrt{\alpha}\widetilde{\nu}_1)^\star, \boldsymbol{A} = \mathtt{diag}(1, 1), \boldsymbol{B} = \mathtt{diag}(\varkappa, \frac{\varkappa}{\alpha}), \boldsymbol{G} = g\boldsymbol{J}, \\ \boldsymbol{C} = \mathtt{diag}(\beta - \alpha - \mu, (\beta - 1 - \mu)/\alpha), \boldsymbol{P} = \varkappa\boldsymbol{J}, g = \frac{\alpha + 1 - \beta}{\sqrt{\alpha}}. \end{gathered}$$

Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{gathered} \alpha\lambda^4 + \varkappa(\alpha + 1)\lambda^3 + [\varkappa^2 + 2\alpha + \beta^2 - (\alpha + 1)(\beta + \mu)]\lambda^2 + \\ + \varkappa(\alpha + 1 - 2\mu)\lambda + (\beta - 1 - \mu)(\beta - \alpha - \mu) + \varkappa^2 = 0. \end{gathered} \tag{4.25}$$

Запишемо умови асимптотичної стійкості руху (4.22) системи (4.21). Критерій Рауса – Гурвіца для рівняння (4.25) дає наступні умови:

$$\varkappa^2 + 2\alpha + \beta^2 - (\alpha+1)(\beta+\mu) > 0, \quad (\alpha + 1 - 2\mu) > 0, \tag{4.26}$$

$$(\beta - 1 - \mu)(\beta - \alpha - \mu) + \varkappa^2 > 0, \tag{4.27}$$

$$\Delta_3 = -\mu\varkappa^2[-\mu(\alpha-1)^2 + 2(\alpha+1)(\varkappa^2 + (\alpha+1-\beta)^2)] > 0. \tag{4.28}$$

Детальний аналіз нерівностей (4.26) — (4.28) буде проведено у Розділі 5. Тому тут обмежимося констатацією наступного факту.

За відсутності демпфуючого моменту ($k = 0$) [1], якщо вільний член характеристичного рівняння від'ємний (нерівність (4.27) має протилежний знак), то розв'язок (4.22) нестійкий: є одне додатне (дійсне) ВЗ. Покажемо, що можна підібрати таке значення $\varkappa$, що усі корені рівняння (4.25), будуть мати від'ємні дійсні частини.

Так, при $\alpha < \beta < 1$ (обертання навколо середньої осі) і $\beta - 1 < \mu < \beta - \alpha$ (при цьому $\mu < 0$ — "висячий" гіроскоп [39]) нерівності (4.26) — (4.28) виконані у тому і тільки тому випадку, якщо

$$\varkappa^2 > \varkappa_0 = \max(\varkappa_1, \varkappa_2), \tag{4.29}$$

де

$$\varkappa_1 = \alpha(\beta + \mu - 2) - \beta^2 + \beta + \mu,$$

$$\varkappa_2 = (1 - \beta + \mu)(\beta - \mu - \alpha).$$

Наприклад, при $\alpha = 0.5, \beta = 0.7, \mu = -0.25$ маємо $\varkappa_1 = -0.815$, $\varkappa_2 = 0.0225$, $\varkappa_0 = 0.15$. Зокрема, при $\varkappa = 0.14$ умови (4.26) — (4.28) не виконані і корені рівняння (4.25) мають вигляд

$$\lambda_{1,2} \approx -0.0398 \pm 1.2822i, \ \lambda_3 \approx -0.3505, \lambda_4 \approx 0.0101 > 0.$$

При $\varkappa = 0.16$ ці умови виконані; корені характеристичного рівняння (4.25) дорівнюють

$$\lambda_{1,2} \approx -0.0452 \pm 1.2807i, \ \lambda_3 \approx -0.3796, \lambda_4 \approx -0.0099.$$

[1] Аналіз необхідних умов стійкості міститься в [39]

Знайдемо асимптотичні оцінки ВЗ у випадку швидких обертань ($\omega_0 >> 1$). Нехай

$$\mu = \delta\varepsilon^2, \ (\delta = \mathtt{sgn}P), \ \varkappa = \kappa\varepsilon. \tag{4.30}$$

При $\varepsilon = 0$ характеристичний многочлен має корені

$$(\lambda_0)_{1,2} = \pm i, \ (\lambda_0)_{3,4} = \pm\sqrt{(\beta-1)(\alpha-\beta)/\alpha}.$$

Зауважимо, що підкореневий вираз для другої пари коренів не дорівнює -1, оскільки інакше було б $\alpha - \beta + 1 = 0$ — порушення нерівності трикутника для моментів інерції. Тому, не залежно від того, додатний він (обертання тіла навколо середньої осі і $(\lambda_0)_{3,4}$ додатні) або від'ємний (усі корені чисто уявні) корені породжуючого рівняння для (4.25) різні. Розв'язки (4.25) шукаються згідно зі стандартною процедурою у вигляді степеневих рядів відносно ε. Якщо ж $(\beta-1)(\alpha-\beta) = 0$, то породжуюче рівняння має кратні корені, і ці два випадки ($\alpha = \beta, \ \beta = 1$) потрбебують окремого розгляду.

Для першої пари коренів рівняння (4.25) маємо

$$(\lambda)_{1,2} = (\frac{\delta\kappa_0}{\beta^2}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)) \pm i(1 - \frac{\delta}{\beta}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)),$$

або, з урахуванням позначень (4.30),

$$(\lambda_\star)_{1,2} = \frac{1}{\beta^2}[\varkappa\mu \pm i\beta(\beta-\mu)]. \tag{4.31}$$

Зірочка означає наближене значення ВЗ.

Для другої пари коренів отримуємо

$$\begin{aligned}(\lambda)_{3,4} = \pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha(\beta-1)(\alpha-\beta)} - \frac{\alpha+1}{2\alpha}\varkappa_0\varepsilon + \\ + \frac{\varepsilon^2}{8\alpha\beta\sqrt{\alpha(\beta-1)(\alpha-\beta)}}[\beta\varkappa_0^2(\alpha-1)^2 + 4\alpha\delta(\alpha\beta+\beta-2\alpha)] + O(\varepsilon^3),\end{aligned}$$

тоді

$$\begin{aligned}(\lambda_\star)_{3,4} = \pm\frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha(\beta-1)(\alpha-\beta)} - \frac{\alpha+1}{2\alpha}\varkappa + \\ + \frac{1}{8\alpha\beta\sqrt{\alpha(\beta-1)(\alpha-\beta)}}[\beta\varkappa(\alpha-1)^2 + 4\alpha\mu(\alpha\beta+\beta-2\alpha)].\end{aligned} \tag{4.32}$$

Із формул (4.31), (4.32) можна бачити, зокрема, що для висячого гіроскопа ($\mu < 0$), у випадку обертання навколо більшої або меншої головної осі інерції, перший доданок у правій частині (4.32) є чисто уявним, тому найбільшому характеристичному показнику відповідає значення

$$\varkappa\mu/\beta^2.$$

З урахуванням (4.24) це означає, що рух, який досліджувався, є асимптотично стійким, але швидкість загасання має порядок ω_0^{-2}.

4.6. Висновки

Перелічимо основні результати розділу.

1. Розглянуто задачу про стійкість руху лінійної механічної системи, що знаходиться під дією потенціальних, гіроскопічних, дисипативних і циркуляційних сил.
2. Знайдено оцінки власних значень характеристичного рівняння даної системи у випадках відсутності та наявності циркуляційної сили, відсутності гіроскопічної сили (розглянуто випадки малої дисипації та переважання потенціальної сили). Це дає можливість оцінити швидкість загасання збурених рухів системи.
3. Вивчено питання про вплив деякого допоміжного параметра, що характеризує співвідношення значень зазначених сил, на величину мінімального характеристичного показника Ляпунова (МХПЛ) і частот системи.
4. Описано можливі варіанти, коли спектр системи лежить у лівій півплощині – виконується критерій Рауса – Гурвіца, але загасання збурених рухів відбувається “занадто повільно”.
5. У якості приклада розглянуто задачу про рівномірні обертання важкого твердого тіла, що знаходиться під дією демпфуючого моменту.

РОЗДІЛ 5
СТІЙКІСТЬ РІВНОМІРНИХ ОБЕРТАНЬ НЕСИМЕТРИЧНОГО ГІРОСКОПА, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ ПІД ДІЄЮ ДЕМПФУЮЧОГО МОМЕНТУ

5.1. Попередні зауваження

Розглянемо рівняння руху важкого твердого тіла, яке знаходиться під дією демпфуючого моменту $\boldsymbol{M} = -k(\widetilde{\boldsymbol{\omega}} - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_0)$:

$$\boldsymbol{J}\dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{J}\widetilde{\boldsymbol{\omega}} + P\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{M}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\nu} = 0. \tag{5.1}$$

У розділі 4 отримані умови стійкості рівномірних обертань тіла навколо головної осі, що містить центр мас, яким відповідає розв'язок

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_0 = (0, 0, \omega_0)^T, \qquad \boldsymbol{\nu} = (0, 0, 1)^T. \tag{5.2}$$

Відповідні рівняння у варіаціях зводяться до системи

$$\boldsymbol{A}\ddot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{G})\dot{\boldsymbol{x}} + (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{P})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \tag{5.3}$$

де $\boldsymbol{x} = (\widetilde{\nu}_2, \sqrt{a}\widetilde{\nu}_1)^T$, $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(1, 1)$, $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(\varkappa, \frac{\varkappa}{a})$, $\boldsymbol{G} = \frac{b}{\sqrt{a}}\,\boldsymbol{\Lambda}$,

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}(1 - b + \mu, (a - b + \mu)/a), \ \boldsymbol{P} = \frac{\varkappa}{\sqrt{a}}\,\boldsymbol{\Lambda}, \ \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

значком "тильда" позначені збурення. Тут використані наступні позначення

$$a = \frac{J_2}{J_1}, \quad b = \frac{J_1 + J_2 - J_3}{J_1}, \quad \mu = \frac{P|\boldsymbol{s}|e}{J_1\omega_0^2}, \quad \varkappa = \frac{k}{J_1\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t. \tag{5.4}$$

Якщо центр мас тіла розташований вище точки опори, то $e = 1$ і $e = -1$ — в іншому випадку. Очевидно, без обмеження спільності, можна вважати $\omega_0 > 0$.

З урахуванням нерівностей трикутника для моментів інерції множина можливих значень параметрів $a,\ b$ визначається нерівностями

$$a > 0,\ 0 < b < 2,\ b < 2a. \tag{5.5}$$

Характеристичне рівняння для (5.3) має вигляд

$$\begin{gathered} a\lambda^4 + \varkappa(a+1)\lambda^3 + [\varkappa^2 + 2a + b^2 - (a+1)(b+\mu)]\lambda^2 + \\ + \varkappa(a+1-2\mu)\lambda + (b-1+\mu)(b-a+\mu) + \varkappa^2 = 0. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Згідно з критерієм Рауса – Гурвіца [118] усі корені мають від'ємні дійсні частини тоді і тільки тоді, коли

$$\varkappa^2 + 2a + b^2 - (a+1)(b+\mu) > 0, \quad (a+1-2\mu) > 0; \tag{5.7}$$

$$(b-1+\mu)(b-a+\mu) + \varkappa^2 > 0; \tag{5.8}$$

$$\Delta_3 = -\mu\varkappa^2\{-\mu(a-1)^2 + 2(a+1)[\varkappa^2 + b^2]\} > 0. \tag{5.9}$$

Знайдемо умови сумісності системи (5.7) – (5.9). Нагадаємо [39], що необхідні умови стійкості звичайного важкого гіроскопа (без демпфуючого моменту, тобто при $\varkappa = 0$) є

$$c_2 = -(a+1)(\mu-\mu_0) > 0,\ c_0 = (\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2) > 0,\ \ d = c_2^2 - 4ac_0 > 0, \tag{5.10}$$

де

$$\mu_0 = b - (2a+b^2)/(a+1),\ \mu_1 = \min(a,1) - b,\ \mu_2 = \max(1,a) - b. \tag{5.11}$$

5.2. Умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа

5.2.1. Випадок висячого гіроскопа. Розглянемо спочатку більш простий випадок висячого гіроскопа ($\mu < 0$). Вираз для d із (5.10) можна представити наступним чином:

$$d = [\mu(a-1) - b(a+1-b)]^2 - 4ab\mu\delta_1 \tag{5.12}$$

або

$$d = [\mu(a-1) + b(a+1-b)]^2 - 4ab\mu\delta_2, \tag{5.13}$$

де $\delta_1 = -a + b + 1$, $\delta_2 = a + b - 1$.

Якщо $\delta_1 > 0$, то додатність d випливає із першого подання (5.12). У супротивному випадку маємо $a \geqslant b + 1$, тоді

$$\delta_2 \geqslant b + 1 + b - 1 = 2b > 0,$$

і $d > 0$ в силу (5.13). Як наслідок, зокрема, маємо $\mu_1 < \mu_0 < \mu_2$. Справді, якщо $\mu = \mu_0$, то $c_2 = 0$, а $c_0 < 0$ (інакше порушується умова $d > 0$). Отже, нерівності (5.10) виконані тоді і тільки тоді, якщо

$$\mu \in (-\infty, \mu_1) \bigcup (\mu_2, 0).$$

Легко бачити, що у цьому випадку умови (5.7) – (5.9) також виконані при будь-якому значенні коефіцієнта $\varkappa \neq 0$ – стійкі у першому наближенні рівномірні обертання висячого гіроскопа стають асимптотично стійкими.

Припустимо тепер, що $\mu \in [\mu_1, \mu_2]$, $\mu_2 < 0$. Тоді друга з умов (5.10) порушується (обертання гіроскопа без тертя нестійке), однак при значеннях $\varkappa$ більших, ніж

$$\varkappa_2 = [(\mu_1 - \mu)(\mu - \mu_2)]^{1/2}$$

вільний член характеристичного рівняння додатний. При цьому коефіцієнт при λ^2 також додатний, оскільки

$$\varkappa^2 + c_2 > -c_0 + c_2 = -\mu^2 - 2b\mu + a = f(\mu).$$

На даному інтервалі зміни змінної μ (і при будь-яких допустимих значеннях a, b) похідна функції $f(\mu)$ від'ємна, так як

$$\mu + b \in [\min(a, 1), \max(a, 1)].$$

Отже функція спадає і приймає своє найменше значення на правому кінці проміжку

$$f(\mu_2) = -\max(a^2, 1) + b^2 + a > 0,$$

оскільки $\mu_2 < 0$, тобто $b > \max(a, 1)$.

Таким чином, усі умови (5.7) — (5.9) виконані при $\varkappa > \varkappa_2$. Цей результат не зміниться, якщо $\mu \in [\mu_1, 0)$, $\mu_2 > 0$. Якщо ж $\mu_1 > 0$, то умови асимптотичної стійкості виконані для будь-яких значень $\varkappa$. Демпфуючий момент має стабілізуючий вплив на рух твердого тіла: стійкі у першому наближенні обертання завжди переводить у асимптотично стійкі, а нестійкі – при додатковому обмеженні знизу на величину коефіцієнта демпфування.

5.2.2. Випадок випрямленого гіроскопа. Перейдемо до розгляду випадку випрямленого гіроскопа ($\mu > 0$). Тепер уже нерівність (5.9) не виконується автоматично для будь-яких допустимих значень параметрів. Вираз у фігурних дужках має бути від'ємним, звідки маємо обмеження на $\varkappa$:

$$\varkappa^2 = \kappa < \kappa_3 = \frac{(a-1)^2\mu}{2(a+1)} - b^2. \tag{5.14}$$

Оскільки ліва частина (5.14) додатна, то повинна виконуватися умова $\kappa_3 > 0$. Інакше, система нерівностей (5.7) – (5.9) буде несумісна. Отже, необхідною умовою сумісності системи (5.7) – (5.9) є умова

$$\mu > \mu_3 = \frac{2b^2(a+1)}{(a-1)^2}. \tag{5.15}$$

Із першої нерівності (5.7) і (5.8) маємо

$$\kappa > \kappa_1 = (a+1)(\mu + b) - 2a - b^2, \tag{5.16}$$

$$\kappa > \kappa_2 = -\mu^2 + (a - 2b + 1)\mu - (b-a)(b-1). \tag{5.17}$$

Якщо $\kappa_{1,2} < 0$, то умови (5.16), (5.17) виконуються і при аналізі їх можна не враховувати.

Об'єднуючи умови (5.14), (5.16) і (5.17), отримаємо:

$$\kappa_0 = \max(\kappa_1, \kappa_2, 0) < \kappa < \kappa_3. \tag{5.18}$$

Відмітимо, що $\kappa_2 > \kappa_1$, якщо

$$0 < \mu < \sqrt{a + b^2} - b$$

і $\kappa_1 > \kappa_2$, якщо

$$\mu > \sqrt{a+b^2} - b.$$

Для того, щоб подвійна нерівність (5.18) мала місце, необхідною є додатність двох виразів

$$\begin{aligned} \kappa_{31} &= \kappa_3 - \kappa_1 = -\frac{a^2+6a+1}{2(a+1)}\mu + 2a - 2b(a+1), \\ \kappa_{32} &= \kappa_3 - \kappa_2 = \mu^2 + [2b - \frac{a^2+6a+1}{2(a+1)}]\mu + a - b(a+1). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Розв'язуючи першу нерівність (5.19) відносно μ, маємо

$$\mu < \mu_{31} = \frac{-2(ab-2a+b)(a+1)}{a^2+6a+1}. \tag{5.20}$$

Так як має виконуватися умова $\mu > 0$, то нерівність (5.20) має сенс при

$$0 < b < \frac{2a}{a+1}.$$

Аналогічним чином із другої нерівності (5.19) маємо наступні обмеження на μ:

$$\mu < \mu_{32} = \frac{2(a-ab-b)}{a+1}, \tag{5.21}$$

$$\mu > \frac{1}{2}(a+1). \tag{5.22}$$

Нерівність (5.21) має сенс при

$$0 < b < \frac{a}{1+a}.$$

Не важко бачити, що виконання нерівності (5.22) суперечить другій умові (5.7) і вона може бути виключена із розгляду. Об'єднуючи зазначені обмеження на μ, отримаємо умови сумісності системи нерівностей (5.7) — (5.9):

$$\mu_3 < \mu < \min(\mu_1, \mu_{31}, \mu_{32}). \tag{5.23}$$

Вид і розташування поверхонь $\mu = \mu_1, \mu = \mu_{31}, \mu = \mu_{32}$ представлені на рис. 5.1.

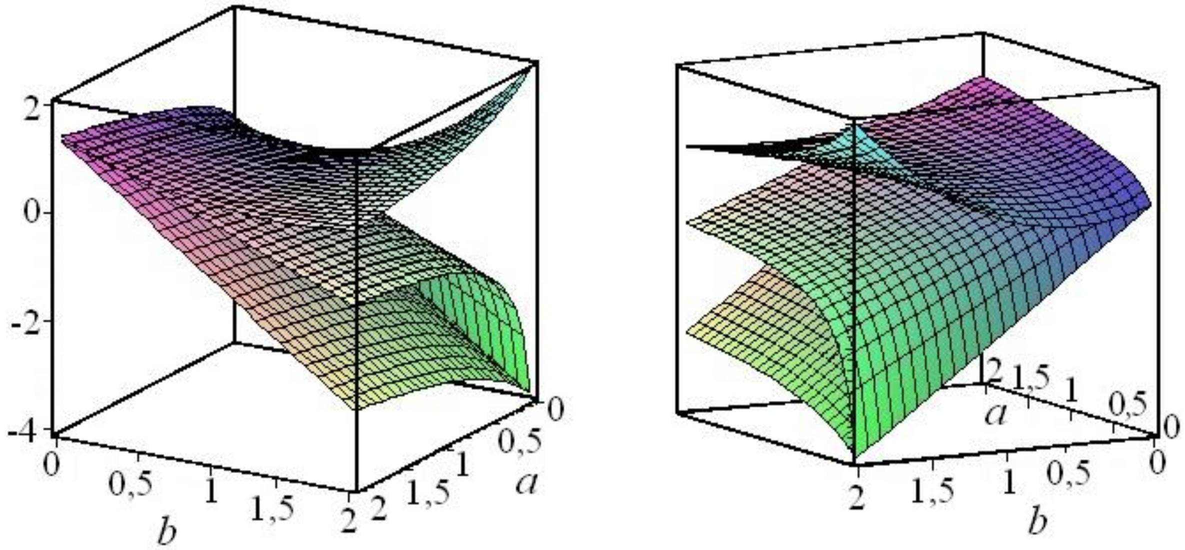

Рис. 5.1. Вид поверхонь: $\mu = \mu_1(a,b)$ – верхня, $\mu = \mu_{31}(a,b)$ – середня, $\mu = \mu_{32}(a,b)$ – нижня.

Оскільки

$$\mu_{31} - \mu_{32} = \frac{2a(4b(a+1) + (a-1)^2)}{(1+a^2+6a)(a+1)} > 0, \quad \mu_1 - \mu_{32} = \frac{b(a+1+b)}{a+1} > 0,$$

то $\mu_{31} > \mu_{32}$ і $\mu_1 > \mu_{32}$ для будь-яких значень a і b. Отже, (5.23) перепишеться наступним чином:

$$\mu_3 < \mu < \mu_{32}. \tag{5.24}$$

Розташування поверхонь $\mu = \mu_3, \mu = \mu_{32}$ представлено на рис. 5.2.

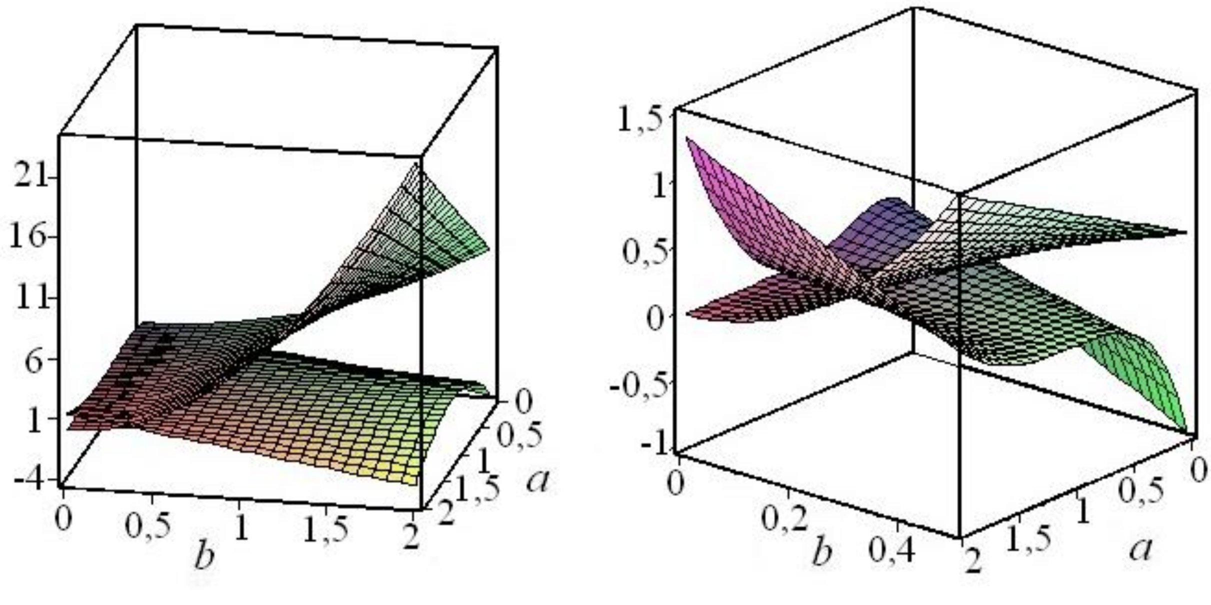

Рис. 5.2. Вид поверхонь $\mu = \mu_{32}(a,b), \mu = \mu_3(a,b)$.

Для виконання умови (5.24) необхідно, щоб

$$\mu_{32} - \mu_3 = \frac{2a(a-1)^2 - 2b^2(a+1)^2 - 2b(a-1)(a^2-1)}{(a+1)(a-1)^2} > 0. \tag{5.25}$$

1. Якщо $0 < a < 1$, то

$$\frac{a-1}{a+1} < 0 < \frac{a(1-a)}{a+1}.$$

І тоді виконання умови (5.25) буде при

$$0 < b < \frac{a(1-a)}{a+1}.$$

2. При $a > 1$ має місце нерівність

$$\frac{a(1-a)}{a+1} < 0 < \frac{a-1}{a+1},$$

тоді умова (5.25) справедлива при

$$0 < b < \frac{a-1}{a+1}.$$

Отже, множина, на якій сумісна система (5.7), не порожня і описується нерівностями (5.24) з урахуванням обмеження (5.25).

Таким чином, необхідною і достатньою (випадок, коли хоча б одна з нерівностей перетворюється у рівність є критичним у розумінні Ляпунова і вимагає додаткового дослідження) умовами асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа є система нерівностей (5.18), (5.24) і (5.25). Остання із них накладає обмеження на розподіл мас у тілі і є необхідною для асимптотичної стійкості. Друга умова визначає діапазон допустимих значень кутової швидкості обертання. Перша умова визначає інтервал значень (κ_0, κ_3) коефіцієнта κ, які переводять стійкі (неасимптотично) обертання випрямленого важкого гіроскопа у асимптотично стійкі.

Область виконання умов (5.7) – (5.9) представлена на рис. 5.3.

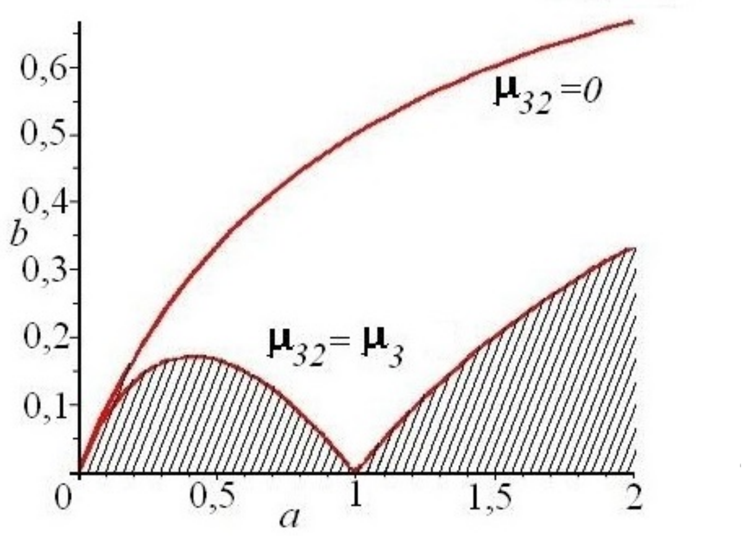

Рис. 5.3. Область виконання умов (5.7) – (5.9).

5.3. Оцінка впливу демпфуючого моменту на стійкість руху системи

Порівняємо отримані умови з умовами стійкості рівномірних обертань випрямленого гіроскопа (без демпфуючого моменту), які наведені у [57]. Ці умови представлені у вигляді таблиці.

Таблиця у інших позначеннях наведена у [39], там же введено термін "тонкий" ("товстий"), який у наших позначеннях відповідає випадку $a < 1 - b^2$ $(a > 1 - b^2)$.

Область	Вид гироскопа	Обертання стійке при
$D_1 : b < a < 1 - b^2$	короткоосний, тонкий	$\omega \in (\omega_1, \infty)$
$D_2 : a < b < \sqrt{1 - a}$	середньоосний, тонкий	$\omega \in \varnothing$
$D_3 : 1 - b^2 < a < b, b < 1$	середньоосний, товстий	$\omega \in (\omega_\star, \omega_2)$
$D_4 : \sqrt{1 - a} < b < a$	короткоосний, товстий	$\omega \in (\omega_\star, \omega_2) \cup (\omega_1, \infty)$
$D_5 : b > 1$	довгоосний	$\omega \in (\omega_\star, \infty)$

Межі інтервалів ω_1, ω_2, $\omega_\star$ відповідають значенням $\mu_1 = a - b$, $\mu_2 = 1 - b$, і меншому із коренів рівняння $d(\mu) = 0$

$$\mu_\star = \frac{b}{(1-a)^2}[b(a+1) - (1-a)^2 - 2\sqrt{a(a+b-1)(1+b-a)}].$$

Легко переконатися у тому, що $\mu_\star > 0$ у областях D_3, D_4, D_5. Їх явні вирази через параметри вихідної системи можуть бути отримані за допомогою формул (5.4).

У областях D'_j $(j = \overline{1;5})$ умови стійкості отримуються із наведених у таблиці за допомогою заміни $(a, b, \mu) \longrightarrow (1/a, b/a, \mu/a)$.

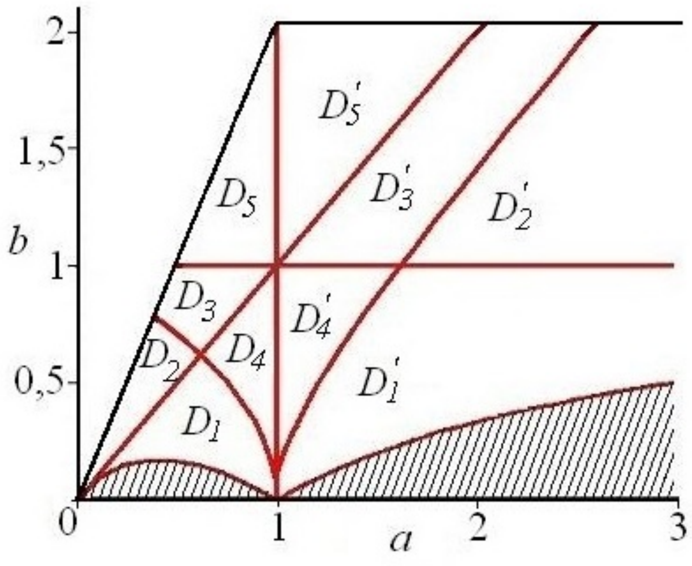

Рис. 5.4. Розбиття на підобласті.

Як можна бачити на рис. 5.4, область значень $a,\ b$, у якій виконані умови асимптотичної стійкості, належить області D_1 (D'_1). Проміжок $(\mu_3,\ \mu_{32})$ допустимих значень μ належить проміжку $(0,\ \mu_1)$ (раніше було показано, що $\mu_{32} < \mu_1$). Інтервал значень кутової швидкості, при яких обертання буде стійким, звужується – нижня межа збільшується, і з'являється обмеження зверху. Для точок $(a,\ b)$, що належать незаштрихованій частині рисунка, має місце нестійкість, незалежно від швидкості обертання тіла і величини демпфуючого моменту. Вплив останнього на стійкість обертань випрямленого гіроскопа, таким чином, в основному негативний, тобто у більшості випадків стійкість обертань руйнується. Разом із тим, як було показано у [57], для *симетричного* гіроскопа дисипація енергії "руйнує" стійкість ***будь-яких*** обертань випрямленого гіроскопа (не важко переконатися у тому, що при $a = 1,\ \mu > 0$ нерівність (5.9) не виконується). Таким чином, несиметрія тіла може здійснювати позитивний вплив на стійкість рівномірних обертань.

5.4. Дослідження критичного випадку пари чисто уявних коренів

Отримані вище умови накладають обмеження на розподіл мас у тілі, величину кутової швидкості обертання і на величину коефіцієнта демпфування, а саме:

$$b < b_1 = \frac{|1-a|}{a+1}\min(a,1), \tag{5.26}$$

$$\mu_1 < \mu < \mu_2, \tag{5.27}$$

$$\varkappa_1 < \varkappa < \varkappa_2, \tag{5.28}$$

де $\mu_1, \mu_2, \varkappa_1, \varkappa_2$ обчислюються за формулами

$$\mu_1 = \frac{2b^2(a+1)}{(a-1)^2},\ \mu_2 = \frac{2(a-ab-b)}{a+1},$$

$$\varkappa_1 = \sqrt{-\mu^2+(a-2b+1)\mu-(b-a)(b-1)},\ \varkappa_2 = \sqrt{\frac{(a-1)^2\mu}{2(a+1)} - b^2}.$$

Характеристичний многочлен системи рівнянь руху (5.1), яка лінеаризована у околі рівномірних обертань, має вигляд

$$f(\lambda) = (\lambda + \frac{\varkappa}{1-b+a})f_1(\lambda), \tag{5.29}$$

де $f_1(\lambda) = a\lambda^4 + \varkappa(a+1)\lambda^3 + [\varkappa^2 + 2a + b^2 - (a+1)(b+\mu)]\lambda^2 +$ $+\varkappa(a+1-2\mu)\lambda + (b-1+\mu)(b-a+\mu) + \varkappa^2$.

Зауважимо, що перестановка місцями індексів 1 і 2 у формулах (5.4) рівнозначна заміні вектора параметрів $(a, b, \mu, \varkappa)$ на $(1/a, b/a, \mu/a, \varkappa/a)$. Це означає, що можна обмежитися випадком $J_2 < J_1$, тобто $a < 1$. При цьому будь-яка отримана умова стійкості поширюється на випадок $J_2 > J_1$ за допомогою вказаного перетворення параметрів. Випадок $a = 1$ із розгляду виключається, оскільки при цьому значенні порушується умова стійкості (5.26) і хоча б один власний корінь характеристичного рівняння (5.29) лінеаризованої системи має додатну дійсну частину, що означає експоненціальну нестійкість розв'язку, що досліджується.

Нерівності (5.26) – (5.28) являють собою умови асимптотичної стійкості руху за першим наближенням, тобто умови того, що усі корені характеристичного рівняння (5.29) мають від'ємні дійсні частини. Ці умови є необхідними і достатніми у тому розумінні, що зміна будь-якого із знаків нерівності на протилежний гарантує наявність додатної дійсної частини у кореня $f_1(\lambda)$ і експоненціальне зростання збурених розв'язків. Розглянемо можливості заміни знака нерівності у (5.26) – (5.28) на знак рівності.

1) Якщо $b = b_1$, то $\mu_1 = \mu_2$. Умова (5.27) переходить в умову $\mu = \mu_1$. Остання рівність означає, що $\varkappa_2(\mu, a, b) = \varkappa_2(\mu_1, a, b_1) = 0$, і для будь-якого $\varkappa \neq 0$ маємо порушення умови (5.28). Висновок: існує корінь з додатною дійсною частиною.

2) Якщо умова (5.26) виконана, а $\mu = \mu_2$, то $\varkappa_1 = \varkappa_2$. Єдина можливість, при якій не відбувається зміна знака у (5.28), це $\varkappa = \varkappa_1$. Остання рівність перетворює у нуль вільний член характеристичного многочлена. З точки зору теорії стійкості руху маємо критичний випадок одного нульового кореня.

3) Якщо $\mu_1 = \mu < \mu_2$, то $\varkappa_2 = 0$. Аналогічно випадку 1), отримуємо зміну знака у (5.28) і корінь з додатною дійсною частиною.

4) Якщо $\varkappa = \varkappa_1$ (і виконується строго умова (5.27)), то многочлен $f_1(\lambda)$ має нульовий корінь і пару чисто уявних коренів.

5) Якщо виконані умови (5.26), (5.27) і $\varkappa = \varkappa_2$, то многочлен $f_1(\lambda)$ має пару чисто уявних коренів $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ і два комплексно спряжених кореня з від'ємними дійсними частинами $\lambda_{3,4} = \sigma_2 \pm i\omega_2$. Маємо критичний випадок пари чисто уявних коренів, який і є об'єктом нашого дослідження.

Перейдемо до збурень за формулами

$$\omega_1 = x_1, \quad \omega_2 = x_2, \quad \nu_1 = x_3, \quad \nu_2 = x_4, \quad \omega_3 = 1 + x_5.$$

Представимо вираз для ν_3 у вигляді

$$\nu_3 = 1 - F_1(\nu_1, \nu_2) + F_2(\nu_1, \nu_2),$$

де $F_1(\nu_1, \nu_2) = (\nu_1^2 + \nu_2^2)/2, \quad F_2(\nu_1, \nu_2) = \sqrt{1 - \nu_1^2 - \nu_2^2} - 1 + (\nu_1^2 + \nu_2^2)/2.$

Тоді, якщо виконанні умови (5.26), (5.27) і $\varkappa = \varkappa_2$, вихідна система диференціальних рівнянь матиме вигляд

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= -\varkappa_2 x_1 + \mu x_4 + (b-1)x_2 x_5,\\
\dot{x_2} &= -\frac{\varkappa_2}{a}x_2 - \frac{\mu}{a}x_3 + \frac{a-b}{a}x_1 x_5,\\
\dot{x_3} &= -x_2 + x_4 + x_4 x_5 + x_2 F_1(x_3, x_4) - x_2 F_2(x_3, x_4),\\
\dot{x_4} &= x_1 - x_3 - x_3 x_5 - x_1 F_1(x_3, x_4) + x_1 F_2(x_3, x_4),\\
\dot{x_5} &= -\frac{\varkappa_2}{1-b+a}x_5 + F_3(x_1, x_2),
\end{aligned} \tag{5.30}$$

де $F_3(x_1, x_2) = (1-a)x_1 x_2/(1-b+a)$.

Необхідно дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи (5.30).

5.4.1. Зведення лінійної частини системи (5.30) **до канонічного виду.** Матриця правої частини лінеаризованої системи (5.30) може бути записана у вигляді блочно-діагональної матриці diag $(\boldsymbol{A}, \sigma_3)$, де

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\varkappa_2 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & -\frac{\varkappa_2}{a} & \frac{-\mu}{a} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = -\frac{\varkappa_2}{1-b+a}.$$

Зведемо матрицю $\boldsymbol{A}$ до жорданової форми:

$$\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}\,(i\omega_1, -i\omega_1, \sigma_2 + i\omega_2, \sigma_2 - i\omega_2).$$

Нехай $\boldsymbol{S} = (s_{lj})$ $(l, j = \overline{1,4})$ – матриця перетворення, яка може бути визначена із рівняння

$$\boldsymbol{AS} - \boldsymbol{SJ} = 0. \tag{5.31}$$

Знайдемо явні вирази для $\omega_1, \sigma_2, \omega_2$. Корені характеристичного рівняння мають вигляд

$$\lambda_1 = i\omega_1,\ \lambda_2 = \overline{\lambda_1},\ \lambda_3 = \sigma_2 + i\omega_2,\ \lambda_4 = \overline{\lambda_3}.$$

За допомогою теореми Вієта отримаємо

$$\begin{aligned} &\sigma_2 = -\frac{(a+1)\varkappa_2}{2a}, \ \omega_1^2 = \frac{a+1-2\mu}{a+1}, \\ &\omega_2^2 = \frac{4a[\varkappa_2^2 + (b+\mu-a)(b+\mu-1)] - \varkappa_2^2\omega_1^2(a+1)^2}{4a^2\omega_1^2}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Розв'язуючи (5.31) відносно елементів матриці $\boldsymbol{S}$, з урахуванням формул (5.32), маємо

$$\begin{aligned} &s_{11} = \frac{2s_{31}}{a+2b-1}[b + \mu\frac{a-1}{a+1} + i\varkappa_2\omega_1], \\ &s_{13} = \frac{s_{33}}{4(1-a+ab+b)}(a+1)[(a-1)[(a+1)\mu - 2(b^2+2)] + \\ &+ \frac{i\omega_2}{\sigma_2}[(a-1)^2\mu - 2(a+1)b^2], \ s_{21} = s_{31}\frac{2(\varkappa_2 - ib\omega_1)}{a-1+2b}, \\ &s_{23} = -s_{33}\frac{2\varkappa_2(a+1)[\sigma_2[(a+1)(a+1-b)-2] + i\omega_2(a+1)(a-1-b)]}{4a\sigma_2[1-a+(a+1)b]}, \\ &s_{41} = s_{31}\frac{2\varkappa_2 + i\omega_1(a-1)}{a-1+2b}, \ s_{43} = -s_{33}\frac{2\varkappa_2(a+1)[(a+1)\sigma_2 + i\omega_2(a-1)]}{4\sigma_2[1-a+(a+1)b]}. \end{aligned} \tag{5.33}$$

Вирази для елементів з другим парним індексом отримуються із формул (5.33) шляхом заміни у правій частині множника $s_{3,j-1}$ на $s_{3\ j}$, $(j = 2, 4)$, а відповідного комплексного виразу – на спряжений йому. Елементи $s_{3\ j}$, $(j = \overline{1,4})$ можуть обиратися довільно, за винятком нульових значень (у цьому випадку матриця $\boldsymbol{S}$ буде виродженою). Оберемо $s_{32} = s_{31}$, $s_{34} = s_{33}$, де s_{31}, s_{33} – довільні дійсні числа.

Виконуючи перетворення $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{z}$, зводимо (5.30) до системи наступного вигляду:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{J}_1\boldsymbol{z} + x_5\boldsymbol{C}\boldsymbol{z} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{z}(\Phi_1(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}) + \Phi_2(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})), \\ &\overline{\boldsymbol{z}'} = \overline{\boldsymbol{J}_1}\overline{\boldsymbol{z}} + x_5\overline{\boldsymbol{C}}\overline{\boldsymbol{z}} + \overline{\boldsymbol{D}}\overline{\boldsymbol{z}}(\Phi_1(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}) + \Phi_2(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})), \\ &x_5' = \sigma_3 x_5 + \Phi_3(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}), \end{aligned} \tag{5.34}$$

де $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{J}_1 = \mathrm{diag}(i\omega_1, \sigma_2 + i\omega_2)$, риса зверху означає комплексне спряження. Матриці $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}-$ прямокутні матриці 4×2, які складаються із 1 і 3 рядків матриць $\boldsymbol{S}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S}$ і $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}$ відповідно, де

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 0 & b-1 & 0 & 0 \\ (a-b)/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\Phi_1(\boldsymbol{z}, \overline{\boldsymbol{z}}),\ \Phi_2(\boldsymbol{z}, \overline{\boldsymbol{z}}),\ \Phi_3(\boldsymbol{z}, \overline{\boldsymbol{z}})$ отримані із $F_1(x_3, x_4),\ F_2(x_3, x_4),\ F_3(x_1, x_2)$ шляхом заміни у рівняннях (5.30) змінних $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{z}$. Коефіцієнти функції $\Phi_1(z, \overline{z})$ задаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \text{при } z_j^2 &: \ s_{3j}^2 + s_{4j}^2, \quad j = 1,2; \\ \text{при } z_j z_l &: \ 2(s_{3j}s_{3l} + s_{4j}s_{4l}), \quad j,l = 1,2; j \neq l; \\ \text{при } z_j \overline{z_l} &: \ 2(s_{3j}\overline{s_{3l}} + s_{4j}\overline{s_{4l}}), \quad j,l = 1,2. \end{aligned}$$

5.4.2. Дослідження стійкості розв'язку системи. Запишемо функцію Ляпунова у вигляді

$$\begin{aligned} &V(z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, x_5) = \alpha_1 z_1 \overline{z_1} + \alpha_2 z_2 \overline{z_2} + \alpha_3 x_5^2 + z_2(k_{12}z_1^2 + k_{11}z_1\overline{z_1} + k_{10}\overline{z_1}^2) + \\ &+ \overline{z_2}(k_{22}z_1^2 + k_{21}z_1\overline{z_1} + k_{20}\overline{z_1}^2) + x_5(k_{32}z_1^2 + k_{31}z_1\overline{z_1} + k_{30}\overline{z_1}^2) + \\ &+ V^{(4)}(z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, x_5), \end{aligned}$$

де α_l – деякі дійсні, а k_{lj} $(l = \overline{1,3},\ j = \overline{0,2})$ – комплексні сталі.

Відомо, що функцію V можна підібрати таким чином [71], що її повна похідна у силу рівнянь збуреного руху матиме вигляд

$$V' = V_0' + o(V_0'),$$

де

$$V_0' = V'^{(2)}(z_2, \overline{z_2}, x_5) + Gz_1^2\overline{z_1}^2,$$

при цьому форма $V'^{(2)}(z_2, \overline{z_2}, x_5)$ є знаковизначеною, а стала G визначається зі співвідношення

$$V'^{(4)}(z_1, \overline{z_1}) = Gz_1^2\overline{z_1}^2.$$

Коефіцієнти $k_{lj},\ l = \overline{1,3}, j = \overline{0,2}$ знаходяться із умови

$$V'^{(3)}(z_2, \overline{z_2}, x_5) = 0. \tag{5.35}$$

Зауважимо, що вираз для G можна подати у вигляді

$$G = \alpha_1 G_{\alpha_1} + \alpha_2 G_{\alpha_2} + \alpha_3 G_{\alpha_3}.$$

При достатньо малих значеннях α_2, α_3 знак G збігається зі знаком $\alpha_1 G_{\alpha_1}$. Без обмеження спільності, вважаємо $\alpha_1 = 1$. Для G_{α_1} знайдемо вираз

$$G_{\alpha_1} = \mathrm{Re}(\frac{1-a}{1-b+a}(k_{31}s_{12}s_{21} + k_{32}s_{12}s_{22} + k_{31}s_{11}s_{22} + k_{30}s_{11}s_{21}) +$$
$$+ (s_{31}s_{32} + s_{41}s_{42})(d_{22} + d_{11}) + \frac{d_{21}}{2}(s_{42}^2 + s_{32}^2) + \frac{d_{12}}{2}(s_{41}^2 + s_{31}^2)),$$

де d_{lj}, c_{lj} – елементи матриць D і C відповідно.

Перейдемо до обчислення коефіцієнта стійкості G. Із умови (5.35) знаходимо коефіцієнти k_{lj}, $l = \overline{1,3}, j = \overline{0,2}$:

$$k_{30} = \frac{c_{12}(1-b+a) + 2\alpha_2 s_{12}s_{22}(1-a)}{\varkappa_2 + 2i\omega_1(1-b+a)},$$
$$k_{31} = (c_{11} + c_{22})(1-b+a) + 2\alpha_2(1-a)(s_{12}s_{21} + s_{11}s_{22}),$$
$$k_{32} = -\frac{c_{21}(1-b+a) + 2\alpha_2 s_{11}s_{21}(1-a)}{-\varkappa_2 + 2i\omega_1(1-b+a)},$$
$$k_{lj} = 0, \quad l \neq 3, j = \overline{0,2}.$$

Приймаючи до уваги вирази для s_{lj}, d_{lj}, c_{lj} через параметри системи, маємо

$$G_{\alpha_1} = 8\mu s_{31}^2(a-1)^3(a+2b-1)(\mu-\mu_1)g_1(a,b,\mu)\ g_2(a,b,\mu)\ g_3(a,b,\mu), \quad (5.36)$$

де

$$g_1 = [(128a+128)b^4 - (280a^2+528a+280)b^3 + (148a^3+492a^2+492a+$$
$$+148)b^2 + (7a^4-72a^3-126a^2-72a+7)b - 9a^5 - 5a^4 + 14a^3 + 14a^2 5a-$$
$$-9]\mu - (56a^2+112a+56)b^4 + (158a^3+474a^2+474a+158)b^3 - (88a^4+$$
$$+384a^3+592a^2+384a+88)b^2 + (-10a^5+22a^4+116a^3+116a^2+22a-$$
$$-10)b + 4a^6 + 8a^5 - 4a^4 - 16a^3 - 4a^2 + 8a + 4,\ g_2 = -(3a^4+4a^3-14a^2+$$
$$+4a+3)\mu + (a+1)^2[8(a+1)b^2 + 4(a-1)^2 b + 2(a^3-a^2-a+1)],$$
$$g_3 = (-34a + 32ab - 15 + 32b - 16b^2 - 15a^2)\mu + 2(a+1)(2a-b+2)\times$$
$$\times (2a-3b+2).$$

Зауважимо, що

$$1 - a - 2b = 1 - a - 2b + 2b_1 - 2b_1 = 2(b_1 - b) + \frac{(1-a)^2}{1+a} > 0.$$

Враховуючи, що $b < b_1$, згідно з умовою (5.26) робимо висновок, що

$$a + 2b - 1 < 0.$$

Запишемо вираз для g_1 у вигляді

$$g_1 = g_{11}(a,b)\mu + g_{10}(a,b), \quad g_{11} = 128b^4(1+a) - 8b^3(35a^2 + 66a + 35) +$$
$$+ 4b^2(a+1)(37a^2 + 86a + 37) + b(7a^4 - 72a^3 - 126a^2 - 72a + 7) -$$
$$-(a+1)(a-1)^2(9a^2 + 14a + 9), g_{10} = (a+1)^2(2a + 2 - b)[56b^3 -$$
$$-46b^2(a+1)4b(a^2 - 6a + 1) + 2(1-a)(a+1)^2].$$

Покажемо, що $g_1(a, b, \mu)$ є монотонно спадною функцією аргумента μ в області (5.26), (5.27). Для цього достатньо показати, що $g_{11} < 0$ скрізь у області D – частини першого квадранта площини Oab, обмеженої кривою $b = b_1(a)$. Неперервна функція двох аргументів $g_{11}(a, b)$ набуває найменшого значення у замкнутій області $\overline{D}$ або у точках екстремуму, або на межі цієї області. В області D функція $g_{11}(a, b)$ має дві стаціонарні точки

$$P_1(0.263, 0.038), \; P_2(0.607, 0.086),$$

перша із яких є точкою мінімуму, а друга не є точкою екстремуму. Отже, найбільше значення досягається на межі області. При $b = 0$ маємо

$$g_{11}(a, 0) = -(a+1)(a-1)^2(9a^2 + 14a + 9) \leqslant 0.$$

При $b = b_1(a)$ отримуємо

$$g_{11}(a, b_1) = (a-1)(540a^7 + 93a^6 + 426a^5 - 145a^4 + 88a^3 - 21a^2 + 34a + 9)/(a+1)^3.$$

Даний вираз є від'ємним при $a \in (0, 1)$, оскільки многочлен сьомої степені у чисельнику має один від'ємний і шість комплексних коренів. Таким чином, найбільше значення функції $g_{11}(a, b)$ дорівнює нулю і досягається на межі області D при $a = 1, b = 0$, тому скрізь у самій області D виконується нерівність $g_{11} < 0$.

Обчислимо тепер вираз $\psi_1(a, b) = g_1(a, b, \mu_1)$:

$$\psi_1 = 128b^6(a+1)^2 - 8b^5(a+1)(35a^2 + 66a + 35) + 4b^4(a+1)^2(37a^2 + 86a + \\ + 37) + b^3(7a^5 - 65a^4 - 198a^3 - 170a^2 - 121a + 35) - b^2(a+1)(a-1)^2 \times \\ \times (9a^3 + 23a^2 + 23a + 32) - 2b(a-1)^2(a^2 - 6a + 1) + (a+1)(a-1)^4.$$

Крива восьмого порядку $\psi_1(a, b) = 0$ має у першій чверті площини Oab чотири вітки, одна (і тільки одна) із яких перетинає межу області D (рис. 5.5). Позначимо цю вітку через C_1 і знайдемо точки перетину кривих C_1 і C_0 : $b = b_1(a)$. Отримаємо умову

$$(3a+1)(a-1)^4(132a^7 + 3a^6 + 73a^5 - 64a^4 - 2a^3 - 21a^2 + 5a + 2) = 0.$$

Многочлен сьомої степені має три дійсних кореня, один із них – від'ємний. Два додатних кореня $a_1 \approx 0.390$, $a_2 \approx 0.660$ визначають точки перетину $M_1\{a_1, b_1(a_1)\}, M_2\{a_2, b_1(a_2)\}$ кривих C_0 і C_1. Крива C_1 розбиває область D на підобласті D_1 і $D\backslash\overline{D}_1$. Оскільки $g_1(a, b, \mu)$ є лінійною функцією аргумента μ, то у кожній із областей D_1, $D\backslash\overline{D}_1$ знак виразу $\psi_1(a, b)$ сталий, і ці знаки протилежні. Легко переконатися у тому, що $\operatorname{sgn}(\psi_1) = 1$ у області $D\backslash\overline{D}_1$, оскільки

$$\lim_{b \to +0} \psi_1(a, b) = (a+1)(a-1)^4 > 0.$$

Таким чином, у області D_1 маємо $\psi_1(a, b) < 0$, і, як наслідок, $g_1(a, b, \mu) < 0$ для будь-яких $\mu > \mu_1$.

Проведемо аналогічні міркування для $\psi_2(a, b) = g_1(a, b, \mu_2)$:

$$\psi_2(a, b) = -256b^5(a+1)^2 + 24b^4(a+1)(21a^2 + 50a + 21) - 2b^3(69a^4 + 604a^3 + \\ + 1038a^2 + 604a + 69) - 2b^2(a+1)(51a^4 - 28a^3 - 174a^2 - 28a + 51) + \\ + 2b(a-1)^2(4a^4 + 35a^3 + 54a^2 + 35a + 4) + 2(a+1)(a-1)^4(2a^2 + 3a + 2).$$

Отримано криву C_2, яка розбиває область $D\backslash\overline{D}_1$ на підобласті D_2, D_3. У області D_3 маємо $\psi_2(a, b) > 0$, а отже, $g_1(a, b, \mu) > 0$ для будь-яких

$\mu < \mu_2$. У той же час, для будь-якої точки із області D_2 виконуються нерівності $\psi_1(a,b) > 0$, $\psi_2(a,b) < 0$, а значення

$$\mu_\star = -\frac{g_{10}(a,b)}{g_{11}(a,b)}$$

належить інтервалу (5.27). Відповідно, $g_1 > 0$ при $\mu < \mu_\star$ і $g_1 < 0$ при $\mu > \mu_\star$.

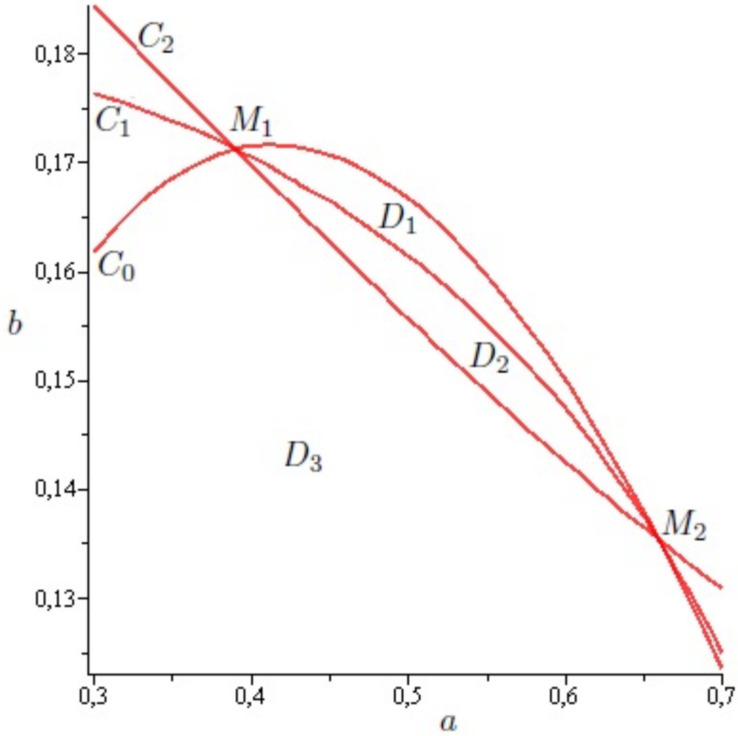

Рис. 5.5. Розбиття області D на підобласті.

Для визначення знака виразу g_2 дослідимо його знак на межі $\mu = \mu_2$. Отримуємо, що

$$g_2(a,b,\mu_2) = \frac{2(b(a+1)^3 + (a-1)^2(a^2+3a+1))(4b+(a-1)^2)}{a+1} > 0.$$

Оскільки g_2 є монотонно спадною функцією по μ, вона приймає значення $g_2 > 0$ для всіх $\mu < \mu_2$, зокрема, і на інтервалі (5.27).

Аналогічно обчислюємо вираз g_3:

$$g_3(a,b,\mu_2) = (a+1)b(16b^2+7a^2+50a+7)-(29a^2+74a+29)b^2+(a-1)^2(4a^2+9a+4).$$

Після тотожних перетворень маємо

$$g_3(a,b,\mu_2) = \frac{b}{a+1}[16(b_1-b)^2(1+a)^2 + (b_1-b)(61a^3+103a^2+71a+29)+$$
$$+52a^4+77a^3+28a^2+35a+64] + (a-1)^2(4a^2+9a+4) > 0.$$

Таким чином, $g_3 > 0$ для всіх μ на інтервалі (5.27).

При $\mu > \mu_*$ виконано нерівність $G_{\alpha_1} < 0$. Зауважимо, що при достатньо малих значеннях α_2, α_3 знак G збігається зі знаком G_{α_1}. Таким чином, при додатних значеннях α_2, α_3 функція $V(z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}, x_5)$ є додатно визначеною, а V' – від'ємно визначена. Отже, усі умови другої теореми Ляпунова про стійкість руху [41, 58] виконані. Тому нульовий розв'язок системи (5.34), а отже і системи (5.30), асимптотично стійкий.

При $\mu < \mu_*$ виконано нерівність $G_{\alpha_1} > 0$. Тоді у випадку $\alpha_2 < 0, \alpha_3 < 0$ функція V' – додатно визначена, а сама функція V – знакозмінна. Отже, усі умови першої теореми Ляпунова про нестійкість руху виконані і нульовий розв'язок системи (5.30) нестійкий.

5.5. Чисельний приклад

Проілюструємо обчислювальну процедуру на чисельному прикладі. Візьмемо точку $M_3(0.5,\ 0.165)$ із області D_1. Для неї отримаємо

$$\mu_1 = 0.3267,\ \mu_2 = 0.3366,\ \mu_\star = 0.2825,\ \mu_\star \notin (\mu_1, \mu_2),\ \varkappa_2 = 0.0165.$$

Оберемо $\mu = 0.33$, що задовольняє умові (5.27). Тоді

$$V = z_1\overline{z_1} + \alpha_2 z_2\overline{z_2} + \alpha_3 x_5^2 + (0.6314 - 10.3529\alpha_3)x_5 z_1\overline{z_1} + (0.4575\alpha_3 - 0.5215+$$
$$+ 0.1126i - 0.1655i\alpha_3)x_5\overline{z_1}^2 + (0.4575\alpha_3 - 0.5215 - 0.1126i + 0.1655i\alpha_3)x_5 z_1^2+$$
$$+ (0.3072 - 0.15i + 0.0451\alpha_3 - 0.0382i\alpha_3)\overline{z_1}^4 + (0.0451\alpha_3 + 0.3072 + 0.15i+$$
$$+ 0.0382i\alpha_3)z_1^4 + (0.8961i\alpha_3 - 2.3542\alpha_3 - 2.2345 + 0.5367i)\overline{z_1}^3 z_1-$$
$$- (2.3542\alpha_3 + 2.2345 + 0.5367i + 0.8961i\alpha_3)z_1^3\overline{z_1},$$
$$V' = -0.0497\alpha_2 z_2\overline{z_2} - 0.0248\alpha_3 x_5^2 + (-0.003 + 0.6686\alpha_3)z_1^2\overline{z_1}^2 + V'^{(3)} + V'^{(4)},$$

де $V'^{(3)}$ є квадратичною по некритичним змінним, а $V'^{(4)}$ має порядок не нижче першого по некритичним змінним.

При достатньо малих додатних значеннях α_2, α_3 функція Ляпунова додатно визначена, а її похідна має протилежний знак. Отже, рух системи (5.30) при даному виборі параметрів асимптотично стійкий.

Візьмемо точку $M_4(0.5,\ 0.16)$ із області D_2. Тоді

$$\mu_1 = 0.3072,\ \mu_2 = 0.3466,\ \mu_\star = 0.3236,\ \varkappa_2 = 0.0326.$$

Зауважимо, що $\mu_1 < \mu_\star < \mu_2$. Оберемо $\mu = 0.32 < \mu_\star$. Функція Ляпунова матиме вигляд

$$V = z_1\overline{z_1} + \alpha_2 z_2\overline{z_2} + \alpha_3 x_5^2 + (0.3485\alpha_3 + 0.2826i\alpha_3 - 0.4707 - 0.2082i)x_5 z_1^2 +$$
$$+ (-0.4707 + 0.2082i + 0.3485\alpha_3 - 0.2826i\alpha_3)x_5\overline{z_1}^2 + (0.6057 -$$
$$- 9.4814\alpha_3)x_5 z_1\overline{z_1} + (1.393i\alpha_3 - 1.9034 + 0.9494i - 1.609\alpha_3)\overline{z_1}^3 z_1 +$$
$$+ (0.0096\alpha_3 - 0.0494i\alpha_3 + 0.197 - 0.2429i)\overline{z_1}^4 + (-1.393i\alpha_3 - 1.609\alpha_3 -$$
$$- 1.9034 - 0.9494i)z_1^3\overline{z_1} + (0.0096\alpha_3 + 0.197 + 0.2429i + 0.0494i\alpha_3)z_1^4,$$
$$V' = -0.0979\alpha_2 z_2\overline{z_2} - 0.0487\alpha_3 x_5^2 + (0.0004 + 1.1004\alpha_3)z_1^2\overline{z_1}^2 + V'^{(3)} + V'^{(4)}.$$

Обираючи значення α_2 і α_3 від'ємними, отримуємо похідну функції Ляпунова від'ємно визначену, а саму функцію Ляпунова – знакозмінну. Тобто за першою теоремою Ляпунова про нестійкість [58] розв'язок системи (5.30) нестійкий.

Оберемо $\mu = 0.33 > \mu_\star$. Тоді $\varkappa_2 = 0.0435$ і

$$V = z_1\overline{z_1} + \alpha_2 z_2\overline{z_2} + \alpha_3 x_5^2 - 0.4551x_5 z_1^2 + 0.3683ix_5 z_1^2\alpha_3 + 0.2890x_5 z_1^2\alpha_3 +$$
$$+ 0.6123x_5 z_1\overline{z_1} - 9.7777\alpha_3 x_5 z_1\overline{z_1} + 0.2816ix_5\overline{z_1}^2 - 0.4551x_5\overline{z_1}^2 -$$
$$- 0.3683ix_5\overline{z_1}^2\alpha_3 + +0.2890x_5\overline{z_1}^2\alpha_3 - 0.2816ix_5 z_1^2 + (-1.7964 - 1.2699i -$$
$$- 1.3346\alpha_3 - 1.8620i\alpha_3)z_1^3\overline{z_1} + (-1.7964 + 1.2699i - 1.3346\alpha_3 +$$
$$+ 1.8620i\alpha_3)z_1\overline{z_1}^3 + (0.1238 + 0.3036i)z_1^4 + (0.1238 + 0.3036i - 0.0141\alpha_3)\overline{z_1}^4,$$
$$V' = -0.1307\alpha_2 z_2\overline{z_2} - 0.0650\alpha_3 x_5^2 + (-0.001 + 1.5621\alpha_3)z_1^2\overline{z_1}^2 + V'^{(3)} + V'^{(4)}.$$

При достатньо малих додатних значеннях α_2, α_3 функція Ляпунова і її похідна задовільняють другій теоремі Ляпунова про стійкість. Отже, рух, який досліджується, є асимптотично стійким.

Візьмемо точку $M_5(0.5,\ 0.14)$ із області D_3. При цьому виборі параметрів системи маємо

$$\mu_1 = 0.2352,\ \mu_2 = 0.3866,\ \mu_\star = 0.4482,\ \varkappa_2 = 0.0889.$$

Оберемо $\mu = 0.33 < \mu_\star$. Тоді

$$V = z_1\overline{z_1} + \alpha_2 z_2\overline{z_2} + \alpha_3 x_5^2 + (0.3953i\alpha_3 - 0.0951\alpha_3 - 0.2461 - 0.4827i)x_5 z_1^2 +$$
$$+ (-0.3953i\alpha_3 - 0.0951\alpha_3 - 0.2461 + 0.4827i)x_5\overline{z_1}^2 + (0.5302 -$$
$$- 7.9999\alpha_3)x_5 z_1\overline{z_1} + (-1.5481i\alpha_3 - 0.6347 - 1.7927i + 0.5187\alpha_3)\overline{z_1}z_1^3 +$$
$$+ (1.5481i\alpha_3 - 0.6347 + 1.7927i + 0.5187\alpha_3)\overline{z_1}^3 z_1 + (-0.2004 + 0.2031i -$$
$$- 0.0359\alpha_3 - 0.0204i\alpha_3)z_1^4 + (0.0204i\alpha_3 - 0.2004 - 0.2031i - 0.0359\alpha_3)\overline{z_1}^4,$$
$$V' = -0.2666\alpha_2 z_2\overline{z_2} - 0.1307\alpha_3 x_5^2 + (0.0426 + 2.1021\alpha_3)z_1^2\overline{z_1}^2 + V'^{(3)} + V'^{(4)}.$$

При $\alpha_2 < 0,\ \alpha_3 < 0$ виконуються умови першої теореми Ляпунова про нестійкість.

Можна бачити, що розглянуті часткові випадки узгоджуються з результатами п. 5.4.2.

Таким чином, досліджена задача про стійкість рівномірних обертань несиметричного твердого тіла у критичному випадку пари чисто уявних коренів. Встановлено, що якщо виконані умови (5.26) – (5.28), тоді при $\mu > \mu_*$ має місце асимптотична стійкість нульового розв'язку системи (5.30), а отже і асимптотична стійкість руху, що досліджувався, а при $\mu < \mu_*$ – нестійкість.

5.6. Висновки

До основних результатів розділу варто віднести наступні положення.

1. Розглянуто задачу про вплив демпфуючого моменту на стійкість обертань важкого твердого тіла з нерухомою точкою навколо головної осі інерції, що містить центр мас.
2. Знайдено необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості руху даної системи, які накладають обмеження на розподіл мас у тілі, величину швидкості обертання і коефіцієнт тертя.
3. Встановлено, що при обертанні навколо нижнього стану відносної рівноваги рух стає асимптотично стійким. При обертанні навколо верхнього стану рівноваги вплив демпфуючого моменту є двоїстим – гіроскопічно стабілізоване обертання тіла може втрачати властивість стійкості, але може ставати і асимптотично стійким. Примітним є той факт, що останній ефект стабілізації можливий лише для динамічно несиметричного тіла.
4. Розв'язано задачу стійкості руху у критичному за Ляпуновим випадку, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення, що описує обертання важкого гіроскопа, який знаходиться під дією демпфуючого моменту, має пару чисто уявних коренів.

ЗАКЛЮЧНІ ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано наукове завдання конструктивної побудови функцій Ляпунова для класів неконсервативних нелінійних механічних систем у критичних за Ляпуновим випадках із застосуванням до дослідження стійкості руху деяких систем твердих тіл. Перерахуємо найбільш важливі наукові результати, отримані у дисертації.

1. У підрозділі 3.1 розглянуто задачу стійкості руху механічної системи, яка описується системою звичайних диференціальних рівнянь порядку $2m + l$, матриця лінійної частини якої має m пар чисто уявних і l власних значень, які належать відкритій лівій комплексній півплощині, а нелінійна частина системи має спеціальний вигляд. Запропоновано спосіб побудови функції Ляпунова для системи зазначеного вигляду у критичному випадку двох пар чисто уявних коренів. Даний підхід видається більш простим, ніж відомий метод зведення.
2. У підрозділі 3.1.2 уперше сформульовано і доведено дві теореми, що дозволяють встановити асимптотичну стійкість або нестійкість тривіального розв'язку системи даного спеціального виду.
3. У підрозділі 3.1.4 розв'язано задачу про стійкість стану рівноваги подвійного математичного маятника, до якого приєднано динамічний поглинач коливань. Показано, що додавання останнього до системи робить нижній стан рівноваги асимптотично стійким.
4. У підрозділі 3.2 уперше конструктивно побудовано функцію Ляпунова для стійкої компоненти у явному вигляді. За допомогою цього розв'язано задачу стабілізації стану рівноваги маятникового осцилятора з приєднаним до нього динамічним абсорбером. З'ясовано, що додавання абсорбера у даному випадку веде до рівномірної асимптотичної стійкості за частиною змінних.

5. У підрозділі 3.3 у випадку подвійного фізичного маятника показано, що приєднання абсорбера забезпечує експоненціальну стійкість руху. Описано основні властивості оптимальної конфігурації абсорбера.
6. У підрозділах 4.2, 4.3 та 4.4 досліджено вплив структури сил на стійкість руху лінійної механічної системи з двома ступенями свободи та отримано оцінки власних значень характеристичного рівняння даної системи для конкретних випадків, що дає змогу оцінити швидкість загасання збурених рухів.
7. У підрозділі 5.2 отримано необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості рівномірних обертань несиметричного гіроскопа, що знаходиться під дією демпфуючого моменту. А у підрозділі 5.3 зроблено оцінку впливу демпфуючого моменту на стійкість руху гіроскопа.
8. У підрозділі 5.4 розв'язано задачу стійкості у критичному за Ляпуновим випадку, коли характеристичне рівняння системи лінійного наближення, що описує рух несиметричного гіроскапа, який знаходиться під дією демпфуючого моменту, має пару чисто уявних коренів.

Таким чином, досягнута головна мета дисертаційної роботи і розв'язані усі поставлені завдання. Результати дисертації мають в основному теоретичне значення. Вони можуть бути використані для подальшого розвитку теорії стійкості нелінійних механічних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Пузырев В.Е., Топчий Н.В. *Оценка собственных значений линейной механической системы с двумя степенями свободы* // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 132—140.

[2] Пузырев В.Е., Савченко Н.В. *Устойчивость равномерных вращений несимметричного гироскопа вокруг главной оси, несущей центр масс* // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 168—176.

[3] Пузырев В.Е., Савченко Н.В. *Критический случай устойчивости равномерных вращений несимметричного гироскопа, находящегося под действием демпфирующего момента* // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 124-134.

[4] Пузырев В.Е., Савченко Н.В. *Асимптотическая устойчивость положения равновесия двойного маятника с присоединенной массой* // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 75-86.

[5] Savchenko N., Puzyrev V. *Using dynamic vibration absorber for stabilization of a double pendulum oscillations*// Nonlinear Dynamics and Systems Theory. – 2014. – Volume 14, Number 4. – pp. 402-409.

[6] Пузырев В.Е., Камынина Е.В., Савченко Н.В. *Использование демпфера пассивного типа для стабилизации малых колебаний маятника переменной длины* // Вістник ДонНУ. Сер. А: Природничі науки. – 2015. – № 1–2. – С. 126-131.

[7] Пузырев В.Е. О собственных значениях линейной механической системы с двумя степенями свободы / В.Е. Пузырев, Н.В. Савченко // Устойчивость, управление и динамика твердого тела // Тезисы докладов XI Международной конференции (8 — 12 июня 2011 года). — Донецк: Ин-т прикладной математики и механики НАНУ, 2011. — С. 105.

[8] Савченко Н.В. Построение функции Ляпунова для модельной систе-

мы в критическом случае чисто мнимых корней / Н.В. Савченко, В.Е. Пузырев // Dynamical system modelling and stability investigation: XVII International Conference: Modelling and stability: Abstracts o conf. reports, Kiev, Ukraine, 27 — 29 may / National Committee of Ukraine by Theoretical and Applied Mechanics — Київ: ДП Інформ.-аналіт. агенство, 2015. — С. 47.

[9] Савченко Н.В. Використання динамічного поглинача коливань для стабілізації положення рівноваги подвійного математичного маятника / Н.В. Савченко // International Conference of Young Mathematicians. June 7 — 10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. — С. 109.

[10] Савченко Н.В. Асимптотична стійкість стану рівноваги подвійного маятника з приєднаною масою / Н.В. Савченко // International Conference of Young Mathematicians. June 3 — 6, 2015, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015. — С. 60.

[11] Четаев Н.Г. *Устойчивость движения. Работы по аналитической механике.* — М.: Издательство АН СССР, 1962. — 536 с.

[12] Меркин Д.Р.*Введение в теорию устойчивости движения.* — М.: Наука, 1976. — 320 с.

[13] Рубановский В. Н., Самсонов В.А. *Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах*/ Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука, 1988. — 304 с.

[14] Кошляков В.Н. *О структурных преобразованиях неконсервативных систем*// Прикл. математика и механика. — 2000. — 64, вып. 6. — С. 933 — 941.

[15] Косов А.А. *Об экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами* // Прикл. математика и механика. — 2007. — 71, вып. 3. — С. 411 — 426.

[16] Пожарицкий Г.К. *Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной*

диссипацией // Прикл. математика и механика. — 1961. — 25, № 4. — С. 657 — 667.

[17] Пузырев В.Е. *Влияние сил вязкого трения на устойчивость стационарных движений механических систем при наличии частичной диссипации энергии* // Докл. НАН Украины. — 2004. — №8. — С. 61 — 65.

[18] Румянцев В.В. *О развитии исследований в СССР по теории устойчивости движения.* // Диффер. уравнения. – 1983. – Т.19. – N5. – С.739 – 776.

[19] Seiranyan A. P. and Kirillov O. N. *Effect of small dissipative and gyroscopic forces on the stability of nonconservative systems* // Doklady Physics. — Vol. 48. — No. 12. — 2003. — P. 679 -– 684.

[20] Карапетян А.И., Лагутина И.С. *О влиянии диссипативного и постоянного моментов на вид и устойчивость стационарных движений волчка Лагранжа* // Изв. РАН. Механика твердого тела. — 1998. — № 5. — С. 29 — 33.

[21] Лобас Л.Г., Лобас Л.Л. *Влияние ориентации следящей силы на устойчивость верхнего положения перевернутого двухзвенного маятника* // Механика твердого тела. — 2001. — Вып. 31. — С. 83 — 89.

[22] Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. *Исследование устойчивости сложных механических систем.* — М.: Наука, 2002. — 300 с.

[23] Кириллов О.Н. *Об устойчивости неконсервативных систем с малой диссипацией* // Современная математика и ее приложения. — 2005. — 36. — С. 107 — 117.

[24] Агафонов С.А. *Об устойчивости и стабилизации движения неконсервативных механических систем* // Прикл. математика и механика. — 2010. — 74, вып. 4. — С. 560 — 566.

[25] Байков А.Е., Красильников П.С. *Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе* // Прикл. математика и механика. —

2010. — 74, вып. 1. — С. 74 — 88.

[26] Kirillov O .N., Verhulst F. *Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella?* // Z. angew. Math. Mech. — 2010. — 90, №6. — P. 462 — 488.

[27] Kirillov O.N. *Gyroscopic stabilization of non-conservative systems* // Physics Letters A. — 2006. — 359. — P. 204 – 210.

[28] Стороженко В.О. *До дослідження дії неконсервативних позиційних сил в системах з обертанням* // Доповіді НАН України, сер. Математ., природн., техн. науки. — 1998. — № 7. — С. 67 — 70.

[29] Hagedorn P., Eckstein M., Heffel E., Wagner A. *Self-excited vibrations and damping in circulatory systems* // Journal of applied mechanics. — 2014. — Vol. 81. — P. 101009-1 – 101009-9.

[30] Jekel D., Hagedorn P. *Stability of weakly damped MDGKN-systems: The role of velocity proportional terms* // Z. angew. Math. Mech. — 2017. — 97, №9. — P. 1128 — 1135.

[31] Крементуло В.В. *Стабилизация стационарных движений твердого тела при помощи вращающихся масс.* – М.: Наука, 1977.– 263 с.

[32] Летов А.М.*Динамика полета и управления.* – М.: Наука, 1969. – 359 с.

[33] Магнус К. *Гироскоп. Теория и применение.* – М.: Мир, 1974. – 528 с.

[34] Пожарицкий Г.К. *О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения.* // Прикл. математика и механика. – 1958. – Т.22. – Вып.2. – С. 145 – 154.

[35] Румянцев В.В. *О влиянии гироскопических сил на устойчивость стационарного движения.* // Прикл. математика и механика. – 1975. – Т.36. – Вып.3. – С. 963 – 973.

[36] Млодзеевский Б.К. *О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки.* // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания. – т. VII. – 1894.

[37] Staude O. *Uber permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Korpers um einen festen.* // Punkt. Journal fur die reine und

angewandte Mathematatik. – Bd. 113 – 1894. – S. 318–334.

[38] Grammel R. *Die Stabilitat der Staudeschen Kreiselbewegungen.* // Mathematische Zeitschrift. – Bd. 6 – 1920.

[39] Граммель Р. *Гироскоп, его теория и применения: В 2-х т.* — М.: Изд-во иностр. лит., 1952. — Т.1. — 351 с.

[40] Bottema O. *De stabiliteit van de tolbewegingen van Staude.* // Proceedings Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen. – Vol. XLVIII. – dec. 1945. – P. 316–325.

[41] Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* — М. – Л.: ГИТТЛ, 1950. — 472 с.

[42] Жуковский Н.Е. *О прочности движения.* // Учен. зап. Моск. ун-та, отдел физ.-матем. – 1882. – Вып.4.

[43] Четаев Н.Г. *О достаточных условиях устойчивости вращательных движений снаряда.* // Прикл. математика и механика. – т. VII. – 1943.

[44] Четаев Н.Г. *Об утойчивости вращений твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа.* // Прикл. математика и механика. – т. XVIII. – вып. 1. – 1954.

[45] Schichlen W.O, Weber H.I. *On the stability of Staude's permanent rotations of a gyroscope with damping.* // Ingenier Archiv. – V. 46. – 1977. – P. 284–292.

[46] Холостова О.В. *Об устойчивости перманентных вращений Штауде в общем случае геометрии масс твердого тела* // Нелинейная динамика. – Т. 5, № 3. – 2009. – С. 357–375.

[47] Асланов В. С. *Пространственное движение тела при спуске в атмосфере.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 160 с.

[48] Окунев Б. Н. *Свободное движение гироскопа.* – М.– Л.: Гостехиздат, 1951. – 379 с.

[49] Моисеев Н. Н. *Асимптотические методынелинейной механики.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.

[50] Погосян Т. И., Савченко А. Я. *О движении гироскопа Лагранжа в переменном по направлению поле сил* // Механика твердого тела. – 1980. – Вып. 12. – С. 85–90.

[51] Узбек Е. К. *Об устойчивости перманентных вращений твердого тела в переменном по направлению поле сил* // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26 (1). – С. 40–46.

[52] McGill D. J., Long L. S. *The Effect of Viscous Damping on Spin Stability of a Rigid Body with a Fixed Point* // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – Vol. 44, № 2. – P. 349–352.

[53] Ge Z. M., Wu M. H. *The Stability of a Sleeping Top with Damping Torque* // International Journal of Engineering Science. – 1989. – Vol. 27, № 3. – P. 285–288.

[54] Пузырев В. Е. *К устойчивости неравномерных вращений гироскопа Лагранжа вокруг главной оси при наличии сил сопротивления среды*// Механика твердого тела. – 1985. – Вып. 17. – С. 66–70.

[55] Савченко А. Я., Безрученко В. С. *Исследование стационарных движений гироскопа Лагранжа при наличии диссипации и дебаланса тяги* // Механика твердого тела. – 1993. – Вып. 25. – С. 75–80.

[56] Позднякович А.Е., Пузырев В.Е. *Устойчивость равномерных вращений вокруг главной оси гироскопа Лагранжа с демпферами-балансирами* // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 153 – 162.

[57] Пузырев В.Е. *Анализ условий устойчивости равномерных вращений тяжелого гироскопа на упруго закрепленном основании* // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 124–127.

[58] Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения.* — М.: Наука, 1966. — 531 с.

[59] Oziraner A. S. *On the stability of motion in critical cases.* //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. —1975. —Vol. 39. —N. 3. — P. 415–421.

[60] Salvadori L. *Sulla ricerca di una funzione di Liapounoff per un sistema differentiale interessante la meccanica dei sistemi olonomi* //Ricerche Mat. — 1962. — V. 11,N. 2 — P. 271–295.

[61] Каменков Г. В. *Устойчивость и колебания нелинейных систем.*— М.: Наука, 1972. — 214 с.

[62] Веретенников В. Г. *Устойчивость и колебания нелинейных систем.*— М.: Наука, 1984. — 320 с.

[63] Плисс В.А. *Принцип сведения в теории устойчивости движения* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – Т. 28. – Вып. 6. – С. 1297–1324.

[64] Молчанов А. М. *Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения* // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 141. – №. 1.– С. 24–27.

[65] Ярошевич О.Г. *О критических случаях в задачах на устойчивость движения* // Изв. вузов Матем. — 1967. — № 8. — С. 106–110.

[66] Kunitsyn A. L. *Stability in the critical case of three pairs of purely imaginary roots in the presence of internal resonance* //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. —1971. —Vol. 35. —N. 1. —P. 164–167.

[67] Анашкин О.В. *Асимптотическая устойчивость в нелинейных системах и критический случай $2m$ чисто мнимых корней в теории устойчивости движения* // Дифференциальные уравнения. — 1978.— Т.14.— № 9.— С. 1689–1691,1725.

[68] Medvedev S. V. Tkhai V. N. *On stability in one critical case.* //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. —1979. —Vol. 43. —N. 6. —P. 963–969.

[69] Tkhai V. N. *On the problem of stability in the critical case.* //Journal of Applied Mathematics and Mechanics. —1981. —Vol. 45. —P. 317–320.

[70] Грушковская В. В., Зуев А. Л. *Асимптотическое поведение решений системы с критическими переменными в случае двух пар чисто мнимых корней.* // Динамические системы. – 2011. – Т. 1(29), Вып. 2. – С. 207 -– 218.

[71] Савченко А. Я., Игнатьев А. О. *Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем.* — К.: Наукова думка, 1989. — 208 с.

[72] Fu J.-H., Abed E. H. *Families of Lyapunov functions for nonlinear systems in critical cases* //IEEE Transactions on automatic control. —1993. —V. 38, N. 1—P. 3–16.

[73] Гольцер Я. *Об устойчивости систем дифференциальных уравнений со спектром на мнимых осях*// Функционально-дифференциальные уравнения. — 1998.— Т.4.— № 1–2.— С. 47–63.

[74] Александров А.Ю. *О построении функций Ляпунова для нелинейных систем* // Дифференциальные уравнения. — 2005.— Т.41.— № 3.— С. 291–297,429.

[75] Peiffer K., Savchenko A. Ya. *On Passive Stabilization in Critical Cases* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. —2000. —V. 244.— P. 106–119.

[76] Peiffer K., Savchenko A. Ya. *On the asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable*// Rend.Acc.Sc.fis.mat.Napoli. — 2000. —V. 67.— P. 157–168.

[77] Peiffer K., Savchenko A. Ya., Zuyev A. L. *On the asymptotic behavior of solutions in the critical case of two pairs of purely imaginary roots* //Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. —2003. — V. 9, N. (18).— P. 1–10.

[78] Малкин И.Г. *Об устойчивости движения в смысле Ляпунова* // Математический сборник. – 1938. – Т.3(45). – №1. С.47—100.

[79] Esclangon E. *Nouvelles recherches sur les fonctions quasiperiodiques* // Ann. Obs. Bordeaux. – 1917. – Vol.16. – P.51–226.

[80] Armellini G. *Sopra un'equazione differenziale della dinamica* // Rend. Acc. Naz. del Lincei. – 1935. – Vol. 21. № 1–2. – P.111–116.

[81] Tonelli L. *Estratto di lettera al prof. G. Sansone* // Scritti Matematici offerti a Luigi Berzolari. Pavia. – 1936. – P.404–405.

[82] Avakumovic V. G. *Sur l'equation differentielle de Thomas-Fermi* // Bull. Inst. Math. Belgrade. – 1947. – Vol.1. – P.223-233.

[83] Routh E.J. *A Triatise on the Stability of a Given State of Motion.* – London: Macmillan and Co, 1877. – 108p.

[84] Вольтерра В. *Математическая теория борьбы за существование.* – М.: Наука, 1976. – 286 с.

[85] Зубов В.И. *Проблема устойчивости процессов управления.* — Л.: Судостроение, 1980. — 256 с.

[86] Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* — М.: Физматгиз, 1959. — 211 с.

[87] Воротников В.И. *К задачам устойчивости по части переменных* // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 736–745.

[88] Румянцев В.В., Озиранер А.С. *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных.* – М.: Наука, 1987. – 256 с.

[89] Воротников В.И., Румянцев В.В. *Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения.* – М.: Научный мир, 2001. – 320 с.

[90] Румянцев В.В. *Об устойчивости движения по отношению к части переменных.* // Вестн. МГУ. Сер. Мат., Механ., Физ., Астрон., Хим. – 1957. – № 4. – С. 9–16

[91] Peiffer K., Rouche N. *Liapounov's second method applied to partial stability* // J. Mecanique. – 1969. – Vol.8. – №2. – P.323—334

[92] *Encyclopedia of vibrations* / Ed.-in-Chief Brown S. – San Diego etc.: Academic Press, 2002. – 1685 p.

[93] Ormondroyd, J. and Den Hartog, J.P. *The theory of the dynamic vibration absorber* // Trans. ASME. – 1928. – **50**, No 1. – pp. 9 – 22.

[94] Den Hartog, J.P. *Mechanical vibrations*, 4-th Edition. – McGraw-Hill, 1956. – P.87–106.

[95] Brock, J. E. *A note on the damped vibration absorber.* // Journal of Applied Mechanics. – 1946. – Vol. 68 – P. A–284.

[96] Chinnery A.E., Hall C.D. *Motion of a Rigid Body with an Attached Spring-Mass Damper* // J. of Guidance, Control, and Dynamics. – 1995. –

18, No. 6. – P. 1404 – 1409.

[97] Liu K., Liu J. *The damped dynamic vibration absorbers: revisited and new result* // J. of Sound and Vibration. – 2005. – **284**. – P. 1181 -– 1189.

[98] Коренев Б. Г., Резников Л. М. *Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения.* – М. : Наука, 1988. – 304 с.

[99] Klein H. W. *A new vibration damping facility for steel chimneys*: Proc. Conf. / H. W. Klein, W. Kaldenbach // Mechanics in Design, Trent University of Nottingham, UK, 1998. -– P. 265—273.

[100] Dahlberg T. *On optimal use of the mass of a dynamic vibration absorber* // Journal of Sound and Vibration. — 1989. — Vol. 132, Issue 3. — P. 518—522.

[101] Gurgoze M. *On the alternative formulations of the frequency equations of a Bernoulli–Euler beam to which several spring–mass systems are attached in span*// Journal of Sound and Vibration. — 1998. — Vol. 217, Issue 3. -– P. 585-–595.

[102] Bambill D. V., Rossit C. A. *Forced vibrations of a beam elastically restrained against rotation and carrying a spring–mass system*// Ocean Engineering. -– 2002. -– Vol. 29, Issue 6. -– P. 605-–626.

[103] Лобас Л.Г., Ильшанский В.Ю. *Влияние типа характеристик упругих элементов на двойные маятниковые предельные циклы*// Доповіді НАН України. — 2010. – No 3. – С. 65 -– 69.

[104] Палош В.Е. *Исследование динамики двойного маятника со следящей и консервативной силами* // Известия РАН. Теория и ситемы управления. – 2008. – No 3. – С. 64–74.

[105] Moon F.C. *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers.* – Wiley, 1987. – 309 p.

[106] Nikitina, N.V. *Estimating the chaos boundaries of a double pendulum*// Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, No 5. – P.600 — 607.

[107] Zhou Z., Whiteman Ch. *Motions of a double pendulum* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. – 1996. – V. 26(7). – P.1177–1191.

[108] He C., Liu G., Yang L., Tian Y. *On the passive stabilization of the equilibrium state of Lagrangian systems* //Acta Mechanica. – 1999. -– **134**, No. 1. – P. 17 – 26.

[109] Viet L.D., Anh N.D., Matsuhisa H. *The effective damping approach to design a dynamic vibration absorber using Coriolis force*// Journal of sound and vibration. – 2011. – 330. – P.1904–1916.

[110] Савченко А.Я., Позднякович А.Е. *Пассивная стабилизация малых колебаний физического маятника относительно наклонной оси* // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 97 – 100.

[111] Савченко А.Я., Позднякович А.Е., Пузырев В.Е. *Пассивная стабилизация положения равновесия двузвенного маятника с упругими связями* // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 104 – 113.

[112] Савченко А.Я., Кравченко В.В *О скорости затухания малых колебаний физического маятника в окрестности положения его равновесия в режиме пассивной стабилизации* // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 106 – 111.

[113] Позднякович А.Е., Пузырев В.Е. *О выборе параметров динамического поглотителя колебаний* // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 167 – 172.

[114] Szyszkowski W., Stilling D. *On damping properties of a frictionless physical pendulum with a moving mass*// International Journal of Non-Linear Mechanics – 2005. – Vol. 40 – No. 5 – P. 669—681.

[115] Matsuhisa H., Yasuda M. *Dynamic fdsorber for ropeway gondola using coriolis force*// Vietnam Journal of Mechanics, VAST. – 2008. – Vol.30 – No.4 – P. 291-–298.

[116] Найфе А. *Введение в методы возмущений.* — М.: Мир, 1984. — 535 с.

[117] Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике (2-е изд.).* – М.: Наука, 1966. – 300 с.

[118] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* — М.: Наука, 1966. — 576 с.