НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Герич Мирослава Сергіївна

УДК 519.21

Граничні задачі для одного класу гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

А в т о р е ф е р а т

дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Державному вищому навчальному закладі "Ужгородський національний університет".

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
ГУСАК Дмитро Васильович,
Державний вищий навчальний заклад
"Ужгородський національний університет",
професор кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЄЛЕЙКО Ярослав Іванович,
Львівський національний університет ім. Івана Франка,
завідувач кафедри теоретичної та прикладної статистики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
КАРНАУХ Євген Володимирович,
Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара,
доцент кафедри статистики й теорії ймовірностей.

Захист відбудеться "12" червня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "8" травня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Пелюх Г. П.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Дослідження розподілів випадкових процесів та їх граничних функціоналів було, і залишається, актуальним напрямком розвитку теорії випадкових процесів. Останнім часом інтерес до цих задач істотно зріс в зв'язку з їх застосуванням в теорії ризику, в теорії надійності, теорії масового обслуговування та в теорії зберігання запасів. В прикладних галузях постановки класичних граничних задач пов'язані з немонотонними складними процесами Пуассона зі стрибками одного знаку. Перші дослідження таких граничних задач проводилися в роботах Ф. Лундберга, Г. Крамера, В. Феллера, Н. Прабху. Узагальненню цих задач присвячені роботи А. А. Боровкова, Б. А. Рогозіна (1972 – 1986), В. С. Королюка (1974, 1975), С. Асмуссена (1989, 1994), М. С. Братійчука, Д. В. Гусака (1990), Д. В. Гусака (1998, 2007), Є.В. Карнауха (2007).

За останні роки в різних прикладних галузях проводяться інтенсивні дослідження таких узагальнень класичної моделі, в яких використовуються напівмарковські процеси, випадкові блукання та процеси в марковському середовищі. Деякі некласичні моделі теорії ризику враховують можливість зміни середовища, що обумовлює відповідний вибір більш загальних класів процесів. При такому виборі бажано, щоб для дослідження узагальнених процесів можна було використовувати аналоги методів, розроблених для відповідних процесів без урахування впливу середовища. Такі умови задовольняють процеси з незалежними приростами в марковському середовищі або процеси, задані на ланцюгу Маркова.

Процеси з незалежними приростами є одним з найбільш вивчених об'єктів теорії ймовірностей, що пояснюється як можливістю отримання точних розв'язків багатьох задач, так і широким спектром практичих застосувань. Фундаментальними роботами, в яких були досліджені основні властивості процесів з незалежними приростами, є роботи А. В. Скорохода (1964), Л. Такача (1971), І. І. Гіхмана та А. В. Скорохода (1973).

Важливим питанням для практичних задач є поняття про розподіл граничних функціоналів від процесів з незалежними приростами та від сум незалежних однаково розподілених випадкових величин. Задачі про вивчення розподілів граничних функціоналів для процесів ще називають граничними задачами для випадкових процесів або блукань. Такі граничні задачі розглядались в роботах А. В. Скорохода (1964), Б. А. Рогозина та Є. А. Печерського (1969), В.С. Королюка (1976), В.С. Королюка, М.С. Братійчука, Б. Пирджанова (1987), М. С. Братійчука та Д. В. Гусака (1990, 2011), Є. В. Карнауха (2007, 2010), В. І. Лотова (2013).

При дослідженні задач, пов'язаних з розподілом граничних функціоналів використовується багато різних методів, які можна умовно поділити на прямі (імовірнісні) та аналітичні. До прямих методів відносяться комбінаторний метод, який викладений в монографіях А. В. Скорохода (1964) та Л. Такача, а також метод теорії відновлення, який наведений в монографії В. Феллера (1984). При дослідженні граничних функціоналів виникають різницево-інтегральні або інтегро-диференціальні рівняння, які можна розв'язувати прямими і наближеними методами. Проте більш привабливим є одержання точних формул. При умові неперервного перетину рівня ефективним є резольвентний метод, який детально викладений в роботах В. С. Королюка, В. Н. Супруна, В. М. Шуренкова (1976), В. С. Королюка, М. С. Братійчука, Б. Пирджанова (1987), М. С. Братійчука та Д. В. Гусака (1990).

Важливим аналітичним методом дослідження розподілів граничних функціоналів є факторизаційний метод, що базується на ідеї про факторизацію аналітичної функції, який викладений в роботах В. А. Малишева (1976) А. А. Боровкова (1986), М. С. Братійчука та Д. В. Гусака (1990). Його широке використання викликано тим, що ним можна користуватися без істотних обмежень на процес.

Факторизаційні методи в граничних задачах для звичайних випадкових блукань та процесів отримали своє продовження та матричне узагальнення для випадкових блукань та процесів на ланцюгах Маркова в роботах Х. Д. Міллера (1962), Й. Кейлсона (1967), К. Арндта (1980, 1982), А. А. Боровкова (1984), В.С. Королюка, М.С. Братійчука, Б. Пирджанова (1987), В. С. Лугавова, Б. А. Рогозіна (1988 – 2012), В. І. Лотова, Н. Г. Орлової (1989, 2006), Д. В. Гусака (1998, 2007, 2011, 2014).

Для гратчастих пуасонівських процесів на ланцюгу Маркова ми використовуємо матричну основну факторизаційну тотожність $\mathbf{g}(s,z) = \mathbf{E}z^{\zeta(\theta s)} = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}$:

$$\mathbf{g}(s,z) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{E}z^{\xi^+(\theta_s)}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)-\xi^+(\theta_s)}, \\ \mathbf{E}z^{\xi^-(\theta_s)}\mathbf{P}_s^{-1}(s,z)\mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)-\xi^-(\theta_s)} \end{array} \right.$$

і розглядаємо обидва розклади. В роботах В. І. Лотова, Н. Г. Орлової (2004 – 2006) для випадкових блукань S_n на ланцюгу Маркова (із стрибками на його переходах) наводиться імовірнісна інтерпритація лише для перших компонент факторизації. При вивченні таких функціоналів як число перетинів додатного (від'ємного) рівня В. І. Лотовим, Н. Г. Орловою (2005, 2006), В. С. Лугавовим (1988) використовуються перші множники факторизації А. А. Боровкова або у термінах генератрис початкових сходинкових висот $\{\tau^{\pm}(0), \gamma^{\pm}(0)\}$.

Найбільш вивченим видом однорідних процесів з незалежними приростами є складні пуасонівські процеси зі стрибками одного знаку. Ці процеси в теорії ризику використовуються в зміні капіталу компанії. При цьому стрибки процесу трактуються як вимоги, що мають показниковий розподіл. Проте такі процеси часто не досить точно описують модель реального процесу. Тому розглядають також узагальнення цих процесів, описані в роботах С. Асмусена (2000). В роботах H. Nyrhinen (2001), J. Cai (2002), J. Cai, D. C. M. Dickson (2004), W. Wei, Y. Hu (2008) розглядаються моделі ризику з дискретним часом і багатократним перестраховуванням, з ускладненими узагальненнями класичних процесів ризику.

У випадку не дискретного часу за умови неперервного перетину рівня розподіли граничних функціоналів були розглянуті в роботах Д. В. Гусака та С. І. Пересипкіної (1974), Д. В. Гусака (1998), С. Асмуссена (2000), В. С. Лугавова (2003, 2012), Є. В. Карнауха (2007, 2008), а у гратчастому випадку з перетином рівня тільки одиничними стрибками – Д. В. Гусаком та А. І. Туреніязовою (1987). Важливою властивістю марковських адитивних процесів є те, що для них можна узагальнити методи дослідження розподілів граничних функціоналів, розроблені для скалярних однорідних процесів з незалежними приростами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Державному вищому навчальному закладі "Ужгородський національний університет" на кафедрі теорії ймовірностей і математичного аналізу в рамках держбюджетної дослідницької теми «Розробка і дослідження нових методів моделювання випадкових процесів і полів та розв'язків рівнянь математичної фізики», номер державної реєстрації 0115U001101.

Мета та задачі дослідження. Основним завданням роботи є вивчення вигляду компонент матричної основної факторизаційної тотожності та розподілів функціоналів для гратчастих майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова. Мета дослідження полягає у подальшому вивчені розподілу граничних функціоналів цих процесів за допомогою методу факторизації. Для досягнення поставленої мети розглядаються наступні задачі:

- дослідження основних властивостей майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова;
- встановлення вигляду компонент матричної основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних цілочислових процесів, заданих на ланцюгу Маркова;
- вивчення граничної поведінки компонент матричної основної факторизаційної тотожності досліджуваних процесів;
- дослідження властивостей матриць $\mathbf{Z}_s^{-1}$, $\mathbf{R}_s^{-1}$, $\mathbf{Z}(s), \mathbf{R}(s)$ та їх поведінки при $s \to 0$;
- доведення тверджень про спільну генератрису перестрибкових функціоналів та про їх маргінальні генератриси $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, $k = \overline{1,3}$;
- вивчення граничних розподілів перестрибкових функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, $k = \overline{1,3}$ для введених процесів при $x \to 0$ та $x \to \infty$.

Об'єкт і предмет дослідження. Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є цілочислові майже напівнеперервні процеси задані на ланцюгу Маркова. Предметом дослідження є граничні задачі для визначених функціоналів розглянутих процесів.

Методи дослідження. В роботі використовується аналітичний апарат теорії випадкових процесів та факторизаційно-проекційний метод.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації отримано нові теоретичні результати, основними із яких є наступні:

- досліджено основні властивості класу майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова, що є узагальненим типом напівнеперервних процесів;

- знайдено конкретизовані зображення компонент матричної факторизації, а саме основної факторизаційної тотожності, для цього класу процесів;

- встановлені співвідношення для дограничних ($s > 0$) та граничних ($s \to 0$) розподілів екстремумів і їх доповнень;

- встановлено співвідношення для генератрис перестрибкових функціоналів звичайних гратчастих пуассонівських процесів ($m = 1$) через нульовий та нескінченно віддалений рівень для довільного знаку середнього значення процесу;

- встановлено співвідношення для матричних генератрис перестрибкових функціоналів гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова;

- отримано співвідношення для матричних генератрис перестрибкових функціоналів через нульовий та нескінченно віддалений рівень.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Всі отримані в дисертаційній роботі результати мають теоретичне значення та практичне застосування в теорії ризику, теорії масового обслуговування та інших галузях, в яких використовуються марковські адитивні процеси.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. За результатами дисертації здобувач опублікував шість робіт, з них дві разом з науковим керівником доктором фізико-математичних наук, професором Д. В. Гусаком, в яких Д. В. Гусаку належить постановка задач і вибір методу дослідження та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідались та обговорювалися на слідуючих конференціях та семінарах:

- Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу” (Ворохта, Україна, 20-26 лютого 2012);

- Міжнародній науково-практичній конференції "Математика. Інформаційні технології. Освіта" (Луцьк – Світязь, 7-9 вересня 2012);
- Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" (Ворохта, Україна, 25 лютого - 3 березня 2013);
- XV міжнародній науковій конференція ім. академіка Михайла Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014);
- IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня - 5 липня 2014);
- International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev "Stochastic Processes in Abstract Spaces" (Kyiv, 14-16 October, 2015);
- Міжнародній науковій математичній конференції "Методика викладання та методи дослідження в математиці" (Берегове, 21-23 квітня, 2016);
- Науковому семінарі "Исчисление Маллявена и его приложения" Інститута математики НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора А. А. Дороговцева (2012, 2014);
- Міжкафедральному науковому семінарі математичного факультету державного вищого навчального закладу "Ужгородський національний університет", під керівництвом доктора фіз.-мат. наук Г. І. Сливки-Тилищак (2017).

Публікації. Результати дисертації опубліковані в шести статтях, дві з яких в журналах, що індексуються в наукометричній базі Scopus, і в сімох збірках тез конференцій, п'ять з яких є міжнародними.

Структура диссертації. Диссертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, які розбиті на підрозділи, та висновків до них, списку використаних джерел та додатку. Повний обсяг роботи займає 179 сторінок, список використаних джерел займає 14 сторінок і містить 99 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і сформульовано задачі дослідження, а також висвітлено наукову новизну отриманих результатів. Наведено відомості про апробацію роботи та публікації.

Перший розділ присвячений викладенню основних початкових відомостей та введенню необхідних матричних позначень. Спочатку наводиться конструктивне означення гратчастого пуассонівського процесу з умовно незалежними приростами, заданого на ланцюгу Маркова.

Нехай $\mathbf{Y}(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ двовимірний марковський процес зі значеннями в фазовому просторі $\{\mathbb{Z} \times \mathbb{E}\}$ заданий на $\{\Omega,\, \mathcal{F},\, P\}$. Припустимо, що $x(t)$ – скінченний ергодичний ланцюг Маркова із множиною станів $\mathbb{E} = \{1, ..., m\}$ та матрицею перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{N}(\mathbf{P} - \mathbf{I}),$$

де $\mathbf{N} = \|\delta_{kr} n_k\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $\{n_k > 0, k \in \mathbb{E}\}$ – параметри показниково розподілених випадкових величин ζ_k (час перебування $x(t)$ в стані k). Матриця $\mathbf{P} = \|p_{kr}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $p_{kr} = P\{x(\sigma_n + 0) = r/x(\sigma_n) = k\}$ є матрицею перехідних імовірностей вкладеного ланцюга $y_n = x(\sigma_n + 0)$ зі стаціонарним розподілом $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$, де σ_n - момент n-ої зміни стану $x(t)$, $\mathbf{Q}$ - інфінітезимальна (твірна) матриця.

Нехай $\{\xi_n(t)\}_{n=1}^{m}$ сукупність пуассонівських процесів з довільним розподілом стрибків у $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ та послідовність незалежних сукупностей однаково розподілених цілозначних випадкових величин $\{\chi_{kr}^{(n)}\}_{n\geq 1}$ $(k, r \in \mathbb{E})$, що не залежать від $\xi_r(t)$ та $x(t)$, і розподіл стрибків на переходах ланцюга Маркова $x(t)$, $\mathbf{f}(x) = \|p_{kr} P\{\chi_{kr} = x\}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $\widetilde{\mathbf{f}}(z) = \|p_{kr} E z^{\chi_{kr}}\|$, $\widetilde{\mathbf{f}}(1) = \mathbf{P}$. Компонента $\xi(t)$ – процес з умовно незалежними приростами $\triangle\xi(t) \doteq \triangle\xi_k(t)$, якщо $x(t)$ знаходиться в k-му стані. $\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr}\lambda_k\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $\delta_{kr} = I_{\{k=r\}}$, де λ_k - інтенсивності стрибків пуассонівських процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^{m}$ з розподілом $\mathbf{p}(x) = \|\delta_{kr} P\{\xi_k^{(1)} = x\}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$. Розподіл 1-го сумарного стрибка процесу $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова позначимо через $\mathbf{\Pi}_0(x) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(x) + \mathbf{N}\mathbf{f}(x)$.

Введений таким чином процес $\mathbf{Y}(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ називається складним гратчастим процесом Пуассона з незалежними приростами, заданим на скінченному ланцюгу Маркова.

Еволюція процесу $\mathbf{Y}(t)$ визначається матричною твірною функцією (т. ф.) та кумулянтою

$$\mathbf{g}_t(z) = \mathbf{E}z^{\xi(t)} = e^{t\mathbf{K}(z)},\ |z| = 1,$$

$$\mathbf{K}(z) = \ln \mathbf{E}z^{\xi(1)} = \sum_{x\neq 0}(z^x - 1)\mathbf{\Pi}_0(x) + \mathbf{Q}, \mathbf{K}(1) = \mathbf{Q}.$$

Означення 1.1.2. Процес $\mathbf{Y}(t)$, заданий на ланцюгу Маркова, називається майже напівнеперервним зверху, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає додатний рівень лише додатними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} - \mathbf{I}] +$$
$$+\mathbf{\Lambda_2}\sum_{x<0}(z^x - 1)\mathbf{p}_2(x) + \mathbf{N}\sum_{x<0}(z^x - 1)\mathbf{f}(x) + \mathbf{Q},$$

або

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda_2}[\widetilde{\mathbf{p}}_2(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{N}[\widetilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{P}] + \mathbf{Q},$$

де $\mathbf{C} = \|\delta_{kr}c_k\|$, $0 < c_k < 1$, c_k – параметри геометрично розподілених додатних стрибків процесу $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$, $k = \overline{1, m}$, $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda_1} + \mathbf{\Lambda_2}$, де $\mathbf{\Lambda_1}$ – матриця інтенсивностей додатних стрибків пуассонівських процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^m$ з розподілом $\mathbf{p}_1(x)$, $\mathbf{\Lambda_2}$ – матриця інтенсивностей від'ємних стрибків пуассонівських процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^m$ з розподілом $\mathbf{p}_2(x)$.

Означення 1.1.3. Процес $\mathbf{Y}(t)$, заданий на ланцюгу Маркова, називається майже напівнеперервним знизу, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише від'ємними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}\sum_{x>0}(z^x - 1)\mathbf{p}_1(x) +$$
$$+\mathbf{\Lambda_2}[(\mathbf{I} - \mathbf{B})(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{N}\sum_{x>0}(z^x - 1)\mathbf{f}(x) + \mathbf{Q},$$

або

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[\widetilde{\mathbf{p}}_1(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda_2}[(\mathbf{I} - \mathbf{B})(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{N}[\widetilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{P}] + \mathbf{Q},$$

де $\mathbf{B} = \|\delta_{kr} b_k\|$, $0 < b_k < 1$, b_k – параметри геометрично розподілених від'ємних стрибків процесу $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$, $k = \overline{1,m}$.

Розглянемо відповідно показниково та геометрично розподілені випадкові величини θ_s, $\widetilde{\nu}_\varepsilon$. Тоді генератриса $\xi(\theta_s)$ та матриця переходу записуються

$$\mathbf{g}(s,z) = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}, \quad \mathbf{P}_s = s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}.$$

Введемо позначення функціоналів для $\xi(t)$, що характеризують екстремуми процесу на інтервалі $[0,t]$ та їх доповнення:

$$\xi^+(t) = \sup_{0\le u\le t} \xi(u), \qquad \overline{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t),$$
$$\xi^-(t) = \inf_{0\le u\le t} \xi(u), \qquad \check{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^-(t),$$

та абсолютні екстремуми $\xi^\pm = \sup(inf)_{0\le u\le\infty}\xi(u)$.

Розподіли екстремумів процесу та їх генератриси в момент θ_s позначимо

$$\mathbf{P}_+(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) < x\} = \|P\{\xi^+(\theta_s) < x,\, x(\theta_s) = r | x(0) = k\}\|, x \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\mathbf{P}^+(s,x) = \mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) < x\} = \|P\{\check{\xi}(\theta_s) < x,\, x(\theta_s) = r | x(0) = k\}\|, x \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\mathbf{P}_-(s,x) = \mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s) < x\},\ \mathbf{P}^-(s,x) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) < x\},\ x \in \mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}_x^\pm(s) = \mathbf{P}\{\xi^\pm(\theta_s) = x\} = \|P\{\xi^\pm(\theta_s) = x,\ x(\theta_s) = r | x(0) = k\}\|,\ x \in \mathbb{Z}_\pm,$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) = x\},\ x \in \mathbb{Z}_+,\ \check{\mathbf{p}}_x^-(s) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) = x\},\ x \in \mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}_x(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = x\},\ x \in \mathbb{Z},$$

$$\mathbf{p}_\pm(s) = \mathbf{P}\{\xi^\pm(\theta_s) = 0\},\ \mathbf{p}^-(s) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) = 0\},\ \mathbf{p}^+(s) = \mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) = 0\},$$

$$\mathbf{q}_\pm(s) = \mathbf{P}\{\pm\xi^\pm(\theta_s) > 0\} = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_\pm(s),$$

$$\mathbf{q}^-(s) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) < 0\} = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^-(s),\ \mathbf{q}^+(s) = \mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) > 0\} = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^+(s),$$

$$\mathbf{p}_\pm^*(s) = \mathbf{p}_\pm(s)\mathbf{P}_s^{-1},\ \mathbf{p}_*^\pm(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^\pm(s),$$

$$\mathbf{q}_\pm^*(s) = \mathbf{q}_\pm(s)\mathbf{P}_s^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{p}_\pm^*(s),\ \mathbf{q}_*^\pm(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^\pm(s) = \mathbf{I} - \mathbf{p}_*^\pm(s),$$

$$\mathbf{g}_\pm(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^\pm(\theta_s)}, \mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)}, \mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{E}z^{\overline{\xi}(\theta_s)}.$$

Визначимо операції проектування

$$[\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+ = \sum_{x=1}^{+\infty} z^x \mathbf{R}_x, [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_- = \sum_{x=-1}^{-\infty} z^x \mathbf{R}_x, [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+^0 = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{R}_x,$$

$$[\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_-^0 = \sum_{x=-\infty}^{0} z^x \mathbf{R}_x, \widetilde{\mathbf{R}}(z) = [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+ + [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_-^0 = [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_- + [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+^0.$$

Надалі припускається, що виконується умова $\mathbf{E}|\xi(t)| < \infty$.

В підрозділі 1.1 наведено матричний аналог основної факторизаційної тотожності, яка в матричному випадку є двоїстою.

Теорема 1.1.1. Для двовимірного процесу $\mathbf{Y}(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ при $s > 0$ має місце матрична основна факторизаційна тотожність на $\mid z \mid = 1$:

$$\mathbf{g}(s,z) = \mathbf{E}\, z^{\xi(\theta_s)} = \begin{cases} \mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^-(s,z), \\ \mathbf{g}_-(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^+(s,z). \end{cases}$$

В *другому* розділі отримано твердження про уточнення компонент матричної факторизаційної тотожності (допограничні та граничні). Основними результатами підрозділу 2.1 є теореми, які містять уточнення розподілів та генератрис екстремумів та їх доповнень для майже напівнеперервних зверху (знизу) процесів, заданих на скінченному ланцюгу Маркова, за якими хвости розподілів максимуму та доповнення до мінімуму (мінімуму та доповнення до максимуму) мають геометричне представлення.

Теорема 2.1.1. Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова $x(t)$ генератриса та розподіл максимуму $\xi^+(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_+(s,z) &= (\mathbf{I} - \mathbf{C}z)[\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1}z]^{-1}\mathbf{p}_+(s), \\ \mathbf{p}_x^+(s) &= (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{Z}_s)\mathbf{Z}_s^{-x}\mathbf{p}_+(s),\ x \in \mathbb{Z}_+, \\ \mathbf{p}_+(s) &= (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s, \\ \mathbf{q}_+(s) &= (\mathbf{Z}_s^{-1} - \mathbf{C})(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s, \\ \overline{\mathbf{P}}_+(s,x) &= (\mathbf{Z}_s^{-1} - \mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}_+^0. \end{aligned}$$

Генератрису доповнення до максимуму $\overline{\xi}(\theta_s)$ можна виразити через генератрису від'ємних значень процесу та матричний параметр геометричного розподілу $\mathbf{Z}_s^{-1}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^{-}(s,z) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_{+}(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]_{-}^{0}+\\ +(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|}-z^{\xi(\theta_s)},\,\xi(\theta_s)<0]),\\ \check{\mathbf{p}}_x^{-}(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_{+}(s))^{-1}(\mathbf{p}_x(s)+\\ (\mathbf{C}-\mathbf{Z}_s^{-1})\mathbf{C}^{\,x-1}\mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|},\,\xi(\theta_s)<x]),\ x\in\mathbb{Z}_0^{-},\end{aligned}$$

де $\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{q}_{+}(s)\mathbf{P}_s^{\,-1} + \mathbf{p}_{+}(s)\mathbf{P}_s^{\,-1}\mathbf{C}$.

Теорема 2.1.2. Для майже напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл доповнення до мінімуму $\check{\xi}(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^{+}(s,z) &= \mathbf{p}^{+}(s)[\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1}z]^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z),\\ \check{\mathbf{p}}_x^{+}(s) &= \mathbf{p}^{+}(s)\mathbf{R}_s^{-x}[\mathbf{I}-\mathbf{R}_s\mathbf{C}\,],\ x\in\mathbb{Z}^{\,+},\\ \mathbf{p}^{+}(s) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1}),\\ \mathbf{q}^{+}(s) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{R}_s^{-1}-\mathbf{C}),\\ \overline{\mathbf{P}}^{\,+}(s,x) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{R}_s^{-x}(\mathbf{R}_s^{-1}-\mathbf{C}),\ x\in\mathbb{Z}_{+}^{0}.\end{aligned}$$

Генератрису мінімуму $\xi^{-}(\theta_s)$ можна виразити через генератрису від'ємних значень процесу та матричний параметр $\mathbf{R}_s^{-1}$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_{-}(s,z) = \big([\mathbf{g}(s,z)]_{-}^{0}+\mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|}-z^{\xi(\theta_s)},\,\xi(\theta_s)<0]\cdot\\ \cdot(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}z(\mathbf{R}_s^{-1}-\mathbf{C})\big)(\mathbf{p}^{+}(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\\ \mathbf{p}_x^{-}(s) = [\mathbf{p}_x(s)+\mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|},\,\xi(\theta_s)<x]\cdot\\ \cdot\mathbf{C}^{\,x-1}(\mathbf{C}-\mathbf{R}_s^{-1})](\mathbf{p}^{+}(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\ x\in\mathbb{Z}_0^{-},\end{aligned}$$

де $\mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^{+}(s) + \mathbf{C}\,\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^{+}(s)$.

Теорема 2.1.5. Для майже напівнеперервного знизу процесу, заданого на ланцюгу Маркова генератриси екстремумів та їх розподіли визначаються співвідношеннями мінімуму $\xi^-(\theta_s)$:

$$\mathbf{g}_-(s,z) = (z\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}\mathbf{p}_-(s),$$
$$\mathbf{p}_x^-(s) = (\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})\big(\mathbf{Z}(s)\big)^{-x-1}\mathbf{p}_-(s),\ \ x\in\mathbb{Z}_-,$$
$$\mathbf{p}_-(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s,$$
$$\mathbf{q}_-(s) = (\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s,$$
$$\mathbf{P}_-(s,x)=(\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})\big(\mathbf{Z}(s)\big)^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s, x\in\mathbb{Z}_-^0.$$

Генератриса доповнення до мінімуму $\check{\xi}(\theta_s)$ виражається через генератрису додатних значень $\xi(\theta_s)$ та матричний параметр геометричного розподілу $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{q}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1} + \mathbf{p}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{B}$:

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_-(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]_+^0+$$
$$+(\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})z(\mathbf{I}-\mathbf{B}z)^{-1}\mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)}-z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)>0]),$$
$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_-(s))^{-1}(\mathbf{p}_x(s)+$$
$$+(\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})\mathbf{B}^{-x-1}\mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s)>x]), x\in\mathbb{Z}_0^+.$$

Для доповнення до максимуму $\overline{\xi}(\theta_s)$ маємо:

$$\mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{p}^-(s)[z\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)]^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B}),$$
$$\check{\mathbf{p}}_x^-(s) = \mathbf{p}^-(s)(\mathbf{R}(s))^{-x-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}),\ x\in\mathbb{Z}_-,$$
$$\mathbf{p}^-(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)),$$
$$\mathbf{q}^-(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}),$$
$$\mathbf{P}^-(s,x)=\mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\big(\mathbf{R}(s)\big)^{-x}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}), x\in\mathbb{Z}_-^0.$$

Генератриса максимуму $\xi^+(\theta_s)$ виражається через генератрису додатних значень $\xi(\theta_s)$ та матричний параметр геометричного розподілу $\mathbf{R}(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s) + \mathbf{B}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s)$

$$\mathbf{g}_+(s,z) = ([\mathbf{g}(s,z)]_+^0 + \mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)}-z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)>0])\cdot$$
$$\cdot(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}))(\mathbf{p}^-(s))^{-1}\mathbf{P}_s,$$
$$\mathbf{p}_x^+(s) = (\mathbf{p}_x(s) + \mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)}, \xi(\theta_s)>x])\cdot$$
$$\cdot\mathbf{B}^{-x-1}(\mathbf{B}-\mathbf{R}(s)))(\mathbf{p}^-(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\ x\in\mathbb{Z}_0^+.$$

Теореми 2.1.1 – 2.1.2 та теорема 2.1.5, а також матрична основна факторизаційна тотожність, дозволяють отримати твердження для пар $\{\mathbf{g}_+(s,z),\ \mathbf{g}^-(s,z)\}$ і $\{\mathbf{g}_-(s,z),\ \mathbf{g}^+(s,z)\}$ виразити "непрості" генератриси розподілів.

В підрозділі 2.2 отримано твердження про розподіли абсолютних екстремумів та їх доповнень в залежності від знаку m_1^0.

Зокрема в теоремі 2.2.2 встановлено, що для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ заданого на ланцюгу Маркова $x(t)$ при $|z| \geq 1$ маємо:

1. при $0 < m_1^0 < \infty$, генератриса ξ^- виражається через обернення кумулянти $\mathbf{K}(z)$, а розподіл $\check{\xi}$ вироджений;

2. при $-\infty < m_1^0 < 0$, розподіл ξ^- вироджений, а розподіл $\check{\xi}$ невироджений і виражається дробово-лінійною функцією

$$\mathbf{g}^+(z) = \mathbf{p}^+[\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^{-1}z]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z),$$

$$\mathbf{p}^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi} = 0\} = \mathbf{P}_0\mathbf{p}_*^+(0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^{-1}),$$

   де $\mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{q}_*^+(0) + \mathbf{C}\mathbf{p}_*^+(0)$;

3. при $m_1^0 = 0$, розподіли ξ^-, $\check{\xi}$ вироджені.

В теоремі 2.2.3 встановлено, що для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ заданого на ланцюгу Маркова $x(t)$ при $|z| \geq 1$ маємо:

1. при $0 < m_1^0 < \infty$, генератриса $\overline{\xi} = \lim\limits_{s\to 0}(\xi(\theta_s) - \xi^+(\theta_s))$ визначається через кумулянту $\mathbf{K}(z)$, а ξ^+ має вироджений розподіл;

2. при $-\infty < m_1^0 < 0$, розподіл $\overline{\xi}$ вироджений, а генератриса ξ^+ визначається дробово-лінійною функцією

$$\mathbf{g}_+(z) = (\mathbf{I} - \mathbf{C}z)[\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0^{-1}z]^{-1}\mathbf{p}_+,$$

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = \mathbf{p}_+^*(0)\mathbf{P}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0^{-1})(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0,$$

   де $\mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{q}_+^*(0) + \mathbf{p}_+^*(0)\mathbf{C}$;

3. при $m_1^0 = 0$, розподіли $\overline{\xi}$, ξ^+ вироджені.

У випадку майже напівнеперервного знизу процесу на ланцюгу Маркова мають місце аналогічні твердження і поняття.

В підрозділі 2.3 доведено стаціонарність матриць $\mathbf{R}(0)$, $\mathbf{R}_0^{-1}$.

Третій розділ присвячений вивченню розподілів перестрибкових функціоналів для пуассонівських процесів у незмінному середовищі $(m = 1)$. В підрозділі 3.1 наведено основні твердження та спрощення позначень для пуассонівських процесів $\xi(t)$ в скалярному випадку, а також розглядається цілозначний пуассонівський процес $\{\xi(t),\ t \geq 0,\ \xi(0) = 0\}$ з кумулянтою

$$k(z) = \lambda_1(p_1(z) - 1) + \lambda_2 \frac{1 - z}{z - b}\, (0 < b < 1,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0),\ |m_1^0| < \infty.$$

Основна факторизаційна тотожність для генератриси $g(s, z) = Ez^{\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s-k(z)},\ |z| = 1$, має простий вигляд $g(s, z) = g_+(s, z)g_-(s, z)$, де $g_\pm(s, z) = Ez^{\xi^\pm(\theta_s)}$ $(|z|^{\pm 1} \leq 1)$.

Позначимо функціонали, однакові для скалярного і матричного випадку, пов'язані з перетином рівня $x \in \mathbb{Z}_0^+$:

$$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}, \qquad \gamma^+(x) = \gamma_1(x) = \xi(\tau^+(x)) - x,$$
$$\gamma_+(x) = \gamma_2(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0), \qquad \gamma_x^+ = \gamma_3(x) = \gamma^+(x) + \gamma_+(x).$$

В підрозділах 3.2 – 3.3 отримано співвідношення для генератрис введених функціоналів через рівень $x = 0$ для всіх значень $m_1^0 = E\xi(1)$ та $\sigma_1^2 = D\xi(1) < \infty$ і встановлено співвідношення для $\gamma_k(\infty)$ при всіх знаках $m_1^0 \geq 0$.

Теорема 3.2.1 Для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ генератриси перестрибків мають вигляд

1. Якщо $m_1^0 = 0$, то

$$E\,[u_1^{\gamma_1(0)}] = [b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) + (1 - b)a_1(1, u_1)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1},$$
$$E\,[u_2^{\gamma_2(0)}] = [b\Pi(0) + (1 - b)a_2(1, u_2)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1},$$
$$E\,[u_3^{\gamma_3(0)}] = [b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1 - b)a_3(1, u_3)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1},$$

де $\widetilde{\Pi}_0^+(z) = \lambda_1 \widetilde{p}_1(z), \widetilde{\Pi}(z) = \sum\limits_{r \geq 0}^{\infty} z^r \Pi(r), \Pi(r) = \sum\limits_{k \geq r+1}^{\infty} \Pi_0^+(k), \Pi(0) = \lambda_1,\ a_1(1, u_1) = u_1 \widetilde{\Pi}(u_1),\ a_2(1, u_2) = \widetilde{\Pi}(u_2),\ a_3(1, u_3) = \lambda_1 u_3 \widetilde{p}\,'_1(u_3)$.

2. Якщо $m_1^0 < 0$, тоді

$$E\,[u_1^{\gamma_1(0)}, \tau^+(0) < \infty] = p_+ p'_-(0)[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) + (1-b)a_1(1, u_1)],$$
$$E\,[u_2^{\gamma_2(0)}, \tau^+(0) < \infty] = p_+ p'_-(0)[b\Pi(0) + (1-b)a_2(1, u_2)],$$
$$E\,[u_3^{\gamma_3(0)}, \tau^+(0) < \infty] = p_+ p'_-(0)[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1-b)a_3(1, u_3)].$$

3. Якщо $m_1^0 > 0$, тоді

$$E\,[u_1^{\gamma_1(0)}] = z_0^{-1} p'_+(0) p_-[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) + (z_0 - b)a_1(z_0, u_1)],$$
$$E\,[u_2^{\gamma_2(0)}] = z_0^{-1} p'_+(0) p_-[b\Pi(0) + (z_0 - b)a_2(z_0, u_2)],$$
$$E\,[u_3^{\gamma_3(0)}] = z_0^{-1} p'_+(0) p_-[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (z_0 - b)a_3(z_0, u_3)],$$

де $a_1(z, u_1) = \frac{u_1}{u_1 - z}(\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) - \widetilde{\Pi}_0^+(z))$, $a_2(z, u_2) = \frac{1}{1 - zu_2}(\widetilde{\Pi}_0^+(1) - \widetilde{\Pi}_0^+(zu_2))$, $a_3(z, u_3) = \frac{1}{1-z}(\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) - \widetilde{\Pi}_0^+(zu_3))$.

Теорема 3.3.1. Якщо процес $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу, тоді

1. Якщо $m_1^0 = 0$, то

$$E\,u_1^{\gamma_1(\infty)} = \left[bu_1\widetilde{\Pi}(u_1) + \lambda_1 \frac{u_1(1-b)}{u_1 - 1}\left(\widetilde{p}\,'_1(u_1) - \widetilde{p}\,'_1(1)\right)\right] \frac{1}{\sigma_1^2(1-b)},$$
$$E\,u_2^{\gamma_2(\infty)} = \left[b\widetilde{\Pi}(u_2) + (1-b)u_2\widetilde{\Pi}\,'(u_2)\right] \frac{1}{\sigma_1^2(1-b)},$$
$$E\,u_3^{\gamma_3(\infty)} = \lambda_1 \left[bu_3\widetilde{p}\,'_1(u_3) + \frac{1-b}{2}u_3^2\widetilde{p}\,''_1(u_3)\right] \frac{1}{\sigma_1^2(1-b)}.$$

2. Якщо $m_1^0 > 0$, тоді

$$E\,u_1^{\gamma_1(\infty)} = p_- z_0^{-1}[ba_1(1, u_1) + (z_0 - b)u_1 \frac{a_1(1, u_1) - a_1(1, z_0)}{u_1 - z_0}] \frac{1}{m_1^0},$$
$$E\,u_2^{\gamma_2(\infty)} = p_-[b\widetilde{\Pi}(u_2) + \frac{z_0 - b}{z_0 - 1}\left(\widetilde{\Pi}(z_0 u_2) - \widetilde{\Pi}(u_2)\right)] \frac{1}{m_1^0},$$
$$E\,u_3^{\gamma_3(\infty)} = p_- z_0^{-1}[ba_3(1, u_3) + (z_0 - b)\frac{a_3(1, u_3) - a_3(z_0^{-1}, u_3 z_0)}{1 - z_0}] \frac{1}{m_1^0}.$$

3. Якщо $m_1^0 < 0$, тоді умовні генератриси

$$E\left[u_1^{\gamma_1(\infty)}\,|\tau^+(\infty)<\infty\right]=[bu_1\widetilde{\Pi}(u_1)+\lambda_1\frac{u_1(1-b)}{u_1-1}\cdot$$
$$\cdot(\widetilde{p}\,'_1(u_1)-\widetilde{p}\,'_1(1))]m_-(1),$$
$$E\left[u_2^{\gamma_2(\infty)}\,|\tau^+(\infty)<\infty\right]=\left[b\widetilde{\Pi}(u_2)+(1-b)u_2\widetilde{\Pi}\,'(u_2)\right)]m_-(1),$$
$$E\left[u_3^{\gamma_3(\infty)}\,|\tau^+(\infty)<\infty\right]=\lambda_1[bu_3\widetilde{p}\,'_1(u_3)+\frac{1-b}{2}u_3^2\widetilde{p}\,''_1(u_3)]m_-(1),$$

де $m_-(1)=p'_-(0)[E\xi^+]^{-1}$.

В *четвертому* розділі отримано співвідношення для твірного перетворення спільної генератриси функціоналів $\{\tau^+(x),\gamma^+(x),\gamma_+(x),\gamma_x^+\}$ та деякі допоміжні твердження, згідно з якими отримується

Теорема 4.2.1. Якщо $Y(t)$ майже напівнеперервний знизу процес з на ланцюгу Маркова, тоді

1. При $m_1^0>0$,

$$\mathbf{E}[u_1^{\gamma_1(\infty)}]=\mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Big[\mathbf{a}_1(1,u_1)+$$
$$+(\mathbf{I}-u_1^{-1}\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\Big(u_1^x-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}(x)\Big],$$
$$\mathbf{E}[u_2^{\gamma_2(\infty)}]=\mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Big[\mathbf{a}_2(1,u_2)+$$
$$+(\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}u_2^x\sum_{l=x+1}^{\infty}\Big(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x u_2^{l-x}\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big],$$
$$\mathbf{E}[u_3^{\gamma_3(\infty)}]=\mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Big[\mathbf{a}_3(1,u_3)+$$
$$+(\mathbf{p}_*^-(0))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{l=x+1}^{\infty}\Big(u_2^l\mathbf{I}-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big],$$

де $\mathbf{m}_+(1)=\frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0$, $\mathbf{R}(0)=\mathbf{q}_-^*(0)+\mathbf{B}\mathbf{p}_-^*(0)$, $\mathbf{\Pi}(x)=\sum\limits_{l\geq x+1}\mathbf{\Pi}_0^+(l)$,

$\mathbf{\Pi}_0^+(l) = \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{p}_1(l) + \mathbf{N}\mathbf{f}(l)$, $\mathbf{a}_1(1,u_1) = \frac{u_1}{u_1-1}(\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_1) - \widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(1))$,
$\mathbf{a}_2(1,u_2) = \widetilde{\mathbf{\Pi}}(u_2), \mathbf{a}_3(1,u_3) = u_3(\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_3))'$.

2. При $m_1^0 = 0,\ \sigma_0^2 < \infty$,

$$\mathbf{E}[u_1^{\gamma_1(\infty)}] = \mathbf{m}^0(1)\Big[\mathbf{a}_1(1,u_1) +$$

$$(\mathbf{I} - u_1^{-1}\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\Big(u_1^x - (\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{P}^*\mathbf{\Pi}(x)\Big],$$

$$\mathbf{E}[u_2^{\gamma_2(\infty)}] = \mathbf{m}^0(1)\Big[\mathbf{a}_2(1,u_2) +$$

$$(\mathbf{I} - u_2\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}u_2^x\sum_{l=x+1}^{\infty}\Big(\mathbf{I} - (\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x u_2^{l-x}\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{P}^*\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big],$$

$$\mathbf{E}[u_3^{\gamma_3(\infty)}] = \mathbf{E}[u_3^{\gamma_1(\infty)+\gamma_2(\infty)}],$$

де $\mathbf{m}^0(1) = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}$, $\mathbf{R}(0) = \hat{\mathbf{P}}^*_{\mathbf{S}} + \mathbf{B}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{P}}^*_{\mathbf{S}})$.

3. При $m_1^0 < 0$, генератриса $\mathbf{E}\Big[u_1^{\gamma^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}\, u_2^{\gamma_+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}\, u_3^{\gamma^+_{\widetilde{\nu}_\varepsilon}},\ \tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon) < \infty\Big]$ вироджена.

Автор висловлює вдячність своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Гусаку Дмитру Васильовичу за поставлені задачі, важливі рекомендації і постійну увагу на всіх етапах виконання цієї роботи.

Висновки

Дисертаційну роботу присвячено вивченню граничних задач для одного класу гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова.

- Отримано твердження про граничні значення збуреної кумулянти, а також твердження, що базуються на оберненні сингулярно збурених матриць.

- Встановлюється матричний аналог узагальнення формули Полячека-Хінчина, яка встановлює зв'язок 1-их компонент основної факторизаційної тотожності та факторизаційних компонент тотожності А. А. Боровкова в термінах генератрис початкових сходинкових висот $\{\tau^{\pm}(0), \gamma^{\pm}(0)\}$.

- Отримано дограничні ($s > 0$) та граничні ($s \to 0$) співвідношення для компонент матричної основної факторизаційної тотожності у випадку майже напівнеперервних гратчастих процесів на ланцюгу Маркова.

- Доведено властивість стаціонарності матриць $\mathbf{R}(0)$ і $\mathbf{R}_0^{-1}$.

- Отримано співвідношення для скалярних та матричних розподілів перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ та $x = \infty$ у випадку майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Герич М. С. Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / Д. В. Гусак, М. С. Герич // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, №2. – С. 54-63.

2. Герич М. С. Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних ґратчастих процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу". – Івано-Франківськ, 2012. – С. 14-15.

3. Герич М. С. Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху ґратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції "Математика. Інформаційні технології. Освіта". – Луцьк – Світязь, 2012. – С. 18-19.

4. Герич М. С. Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Карпатські математичні публікації – 2012. – **4**, № 2. – С. 229-240.

5. Герич М. С. Про розподіл абсолютного мінімуму для напівнеперервного зверху ґратчастого процесу на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”. – Івано-Франківськ, 2013. – С. 6-7.

6. Herych M. S. Moment generating funtions of extremums and their complemets for upper semi-continuous lattice Poison process on Markov chain / M. S. Herych // Visn. Kiev nats. Un-t them. T.G. Shevchenko Series: Phys.-Math. Science – 2013. – Vol. № 1. – P. 21-27.

7. Герич М. С. Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху ґратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей XV Міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука. – Київ, 2014. – С. 43-44.

8. Герич М. С. Розподіл абсолютних екстремумів для майже напівнеперервних зверху цілочислових пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей IV міжнародної ганської конференції, присвяченої 135 річниці від дня народження Ганса Гана. – Чернівці, 2014. – С. 27-28.

9. Герич М. С. Про генератриси екстремумів та їх доповнень для майже напівнеперервних цілочислових пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, №8. – С. 1034-1049.

10. Herych M. S. On overshoots for the almost semi-continuous Poisson processes defined on a Markov chain / M. S. Herych // International Conference “Stochastic Processes in Abstract Spaces”. – 2015. – P. 19.

11. Герич М. С. Розподіли перестрибкових функціоналів для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Матеріали міжнародної наукової математичної конференції “Методика викладання та методи дослідження в математиці” у м. Берегове, 21-23 квітня 2016 р. – Ужгород: ТОВ «РІК-У», 2016. – С. 33.

12. Герич М. С. Розподіли перестрибків для майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Теорія ймовір. та мат. статистика. – 2016. – Вип. 94. – С. 36-49.

13. Герич М. С. Про стрибки через нескінчено віддалений рівень для одного класу гратчастих процесів / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2016. – Вип. 29, №2. – С. 54-63.

Анотація

Герич М. С. Граничні задачі для одного класу гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика. Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена вивченню граничних задач для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова.

Введено конструктивне означення досліджуваних процесів та основні матричні позначення. Наведено двоїстий аналог основної матричної факторизаційної тотожності. Доведено матричний аналог узагальнення формули Полячека-Хінчина, яка встановлює зв'язок 1-их компонент основної факторизаційної тотожності та факторизаційних компонент тотожності Боровкова в термінах генератрис початкових сходинкових висот $\{\tau^{\pm}(0), \gamma^{\pm}(0)\}$.

Отримано дограничні $(s > 0)$ співвідношення для компонент основної факторизаційної тотожності і встановлюється, що одна з компонент виражається через генератрису матричного геометричного розподілу, а друга компонента виражається через матричний параметр цього геометричного розподілу та збурення кумулянти $\mathbf{K}(z)$. Отримано граничні співвідношення при $s \to 0$ для розподілів абсолютних екстремумів, залежно від знаку m_1^0. Для матриць $\mathbf{R}(0)$ і $\mathbf{R}_0^{-1}$ доведено властивість стаціонарності.

Досліджено розподіли перестрибкових функціоналів для цілочислових гратчастих пуассонівських процесів у випадку $m = 1$. Для всіх випадків значень $m_1^0 = E\xi(1)$ при $x = 0$ детально вивчається розподіл $\gamma_k(x)$ і отримано співвідношення для розподілів перестрибкових функціоналів через рівень $x \to \infty$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів, а саме, генератриси $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 \geq 0$, та умовних генератрис $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 < 0$.

Доведено твердження про матричний вигляд спільної і маргінальних генератрис, розподілів перестрибкових функціоналів у випадку майже напівнеперервних знизу процесів на ланцюгу Маркова.

Для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів на ланцюгу Маркова розглянуто розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ та $x \to \infty$, а саме, генератриси $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 \geq 0$.

Ключові слова: майже напівнеперервні зверху або знизу процеси, генератриси екстремумів, кумулянта, основна факторизаційна тотожність, сходикові висоти, спільний розподіл перестрибкових функціоналів.

Герич М. С. Предельные задачи для одного класса решетчатых пуассоновских процессов на цепях Маркова. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика. Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена изучению предельных задач для решетчатых пуассоновских процессов на цепях Маркова.

Введено конструктивное определение исследуемых в диссертационной работе процессов и основные матричные обозначения. Приведено двойственное основное матричное факторизационное тождество, доказано матричный аналог обобщения формулы Полячека-Хинчина, которая устанавливает связь между первыми компонентами основного факторизационного тождества и компонентами факторизации тождества Боровкова в терминах производящих функций начальных лестничных высот $\{\tau^{\pm}(0), \gamma^{\pm}(0)\}$.

Получены допредельные $(s > 0)$ соотношения для компонент основного факторизационного тождества и устанавливается, что одна из компонент выражается через производящую функцию матричного геометрического распределения, а вторая компонента основного факторизационного тождества выражается через матричный параметр этого геометрического распределения и возмущения кумулянты $\mathbf{K}(z)$. Получены предельные соотношения при $s \to 0$ для распределений абсолютных экстремумов, в зависимости от знака m_1^0. Для матриц $\mathbf{R}(0)$ и $\mathbf{R}_0^{-1}$ доказано свойство стационарности.

Исследованы распределения лестничных функционалов для целочисленных решетчатых пуассоновских процессов в случае $m = 1$. Для всех значений знака $m_1^0 = E\xi(1)$ при $x = 0$ подробно изучается распределение $\gamma_k(x)$ и получены соотношения для распределений лестничных функционалов через уровень $x \to \infty$ для почти полунепрерывных снизу целочисленных процессов, а именно, производя-

щие функции $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 \geq 0$, и условных производящих функций $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 < 0$.

Доказано утверждение об матричной совместной и маргинальных производящих функциях расматриваемых функционалов, а также их распределение в случае почти полунепрерывных снизу процессов на цепи Маркова. Подробно изучается матричные распределения $\gamma_k(x)$ и получены матричные соотношения для производяших функций $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 \geq 0$.

Ключевые слова: почти полунепрерывные сверху или снизу процессы, производящая функция экстремумов, кумулянта, основное факторизационное тождество, лестничные высоты, общее распределение лестничных функционалов.

Herych M. S. Boundary-value problems for one class of lattice Poisson processes on Markov chains. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscripts. – Manuscript.

Candidate of Science Thesis, Probability Theory and Mathematical Statistics – 01.01.05. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The dissertation is devoted to the study of boundary value problems for lattice Poisson processes on the Markov chains.

The constructive definition of the studied processes in the dissertation and the main matrix notations are introduced. In the introduction the actuality of the topic of the dissertation and its connection with other scientific programs, plans, themes at the place of performance of dissertation work, are noted, the purpose and tasks and methods of research. Scientific novelty and the practical value of the results obtained are designated. Also it is indicated personal contribution of the applicant and where the main results of the dissertation work were tested and published.

In the first chapter, lattice Poisson processes on the Markov chains and their description introduced and properties. There is contained a constructive definition of objects under study in the dissertation and the main matrix designations, it is resulted a matrix analog of the dual basic factorization identity.

The second chapter is devoted to the study of issues related to the components of the main factorization identity. The first subsection specifies the relations ($s > 0$) for the components of the main factorization identity and establishes that one of the components of the main factorization identity is expressed by the linear franctional functions. Other com-

ponents of the basic factorization identity are expressed in terms of the matrix parameter of this geometric distribution and the cumulant of the process $\mathbf{K}(z)$. In the second subdivision we get the relation of distributions of absolute extrema, depending on the sign m_1^0, their form is specified for $s \to 0$. The third section is devoted to the study of the properties of the matrices $\mathbf{R}(0)$ and $\mathbf{R}_0^{-1}$ that are stationary.

In the third section, the distributions of overshouts functionals for scalar lattice Poisson processes. In the first subdivision we give simplification of the notation and the subsequent statements for scalar lattice Poisson processes $\xi(t)$. In the second subdivision, for all cases of $m_1^0 = E\xi(1)$ with $x = 0$, the distributions of $\gamma_k(x)$ for the almost lower semi-continuous integer processes was studied in detail. In the third subsection, the distributions of overjump functionals are $\gamma_k(\infty)$, $\gamma_k(0)$ are studied.

The fourth chapter contains questions on the study of common and marginal generatrices and the distribution of overjump functionals in the case of almost lower semi-continuous processes on the Markov chain. In the first subsection we obtain assertions for the joint matrix generatrice of overjump functionals, from which statements of marginal matrix generatrised of pairs of functionals follow. In the second subsection for the distributions and generatrices of overjump functionals, of $\gamma_k(\infty)$ and $\gamma_k(0)$ are studied for $m_1^0 \geq 0$.

Keywords: almost upper or lower semi-continuous processes, moment generating functions of extrema, cumulant function, basic factorization identity, ladder heights, joint distribution of overshouts functionals.

Підп. до друку 15.03.2018. Формат $60 \times 84/16$.
Папір офс. Офс. друк. Фіз. друк. арк. 1,5.
Ум. друк. арк. 1,4. Тираж 100 пр. Зам. .

Інститут математики НАН України,
01004 Київ-4, вул. Терещенківська, 3