НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Герич Мирослава Сергіївна

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ
ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ГРАТЧАСТИХ ПУАССОНІВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ НА ЛАНЦЮГАХ МАРКОВА

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело М. С. Герич

Науковий керівник:
Гусак Дмитро Васильович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ — 2018

АНОТАЦІЯ

Герич М. С. Граничні задачі для одного класу гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика. – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена вивченню граничних задач для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова. Основна частина дисертації складається зі вступу, чотирьох розділів розбитих на підрозділи, висновків, списку використаної літератури та додатку зі списком опублікованих праць здобувача за темою дисертації і наукових семінарів та конференцій, на яких доповідались отримані результати.

У вступі відзначаються: актуальність теми дисертації та її зв'язок з іншими науковими програмами, планами, темами в місці виконання дисертаційної роботи; мета і задачі, об'єкт і предмет та методи дослідження; наукова новизна і практичне значення отриманих результатів; особистий внесок здобувача, а також, де були апробовані і опубліковані основні результати дисертаційної роботи.

В першому розділі вивчаються гратчасті пуассонівські процеси на ланцюгу Маркова та їх основні поняття та властивості. Перший підрозділ містить конструктивне означення досліджуваних в дисертаційній роботі об'єктів та основні матричні позначення, наведено матричний аналог двоїстої основної факторизаційної тотожності. В другому підрозділі отримано твердження, яке базується на оберненні сингулярно

збурених матриць. Доведено матричний аналог узагальнення формули Полячека-Хінчина, яка встановлює зв'язок 1-их компонент основної факторизаційної тотожності та факторизаційних компонент тотожності Боровкова в термінах генератрис початкових сходинкових висот $\{\tau^{\pm}(0), \gamma^{\pm}(0)\}$.

Другий розділ присвячений вивченню питань, пов'язаних із компонентами основної факторизаційної тотожності. В першому підрозділі уточнюються дограничні співвідношення ($s > 0$) для компонент основної факторизаційної тотожності і встановлюється, що одна з компонент основної факторизаційної тотожності має просту форму і виражається через генератрису матричного геометричного розподілу. Інші компоненти основної факторизаційної тотожності мають складнішу форму і виражаються через матричний параметр цього геометричного розподілу та збурення кумулянти $\mathbf{K}(z)$. В другому підрозділі отримано співвідношення розподілів абсолютних екстремумів, залежно від знаку m_1^0 уточнюється їх вигляд при $s \to 0$. Третій підрозділ присвячений вивченню властивостей матриць $\mathbf{R}(0)$ і $\mathbf{R}_0^{-1}$, які є стаціонарними і узагальнюють одиничні корені скалярного рівняння Лундберга для звичайних гратчастих пуассонівських процесів.

В третьому розділі досліджуються розподіли перестрибкових функціоналів для цілочислових гратчастих пуассонівських процесів при $m = 1$. В першому підрозділі ми наводимо спрощення позначень та необхідні надалі твердження для цілочислових гратчастих пуассонівських процесів $\xi(t)$. В другому підрозділі для всіх випадків значень $m_1^0 = E\xi(1)$ при $x = 0$ детально вивчається розподіл $\gamma_k(x)$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів. В третьому підрозділі розглянуто розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x \to \infty$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів, а саме, генератриси $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 \geq 0$, та умовні генератриси $\gamma_k(\infty)$

при $m_1^0 < 0$.

Четвертий розділ містить питання по вивченню спільної і маргінальних генератрис та розподілів перестрибкових функціоналів у випадку майже напівнеперервних знизу процесів на ланцюгу Маркова. В першому підрозділі отримано твердження для спільної матричної генератриси перестрибкових функціоналів, з якого випливають твердження про маргінальні матричні генератриси пар функціоналів. В другому підрозділі для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів на ланцюгу Маркова розглянуто розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ та $x \to \infty$, а саме, генератриси $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 \geq 0$.

Ключові слова: майже напівнеперервні зверху або знизу процеси, генератриси екстремумів, кумулянта, основна факторизаційна тотожність, перестрибкові функціонали, сходинкові висоти, спільний розподіл перестрибкових функціоналів.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в шести статтях у фахових виданнях, дві з яких у журналах, що індексуються наукометричною базою Scopus, та сімох збірках тез, п'ять з яких міжнародні:

1. Герич М. С. Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / Д. В. Гусак, М. С. Герич // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, №2. – С. 54-63.

2. Герич М. С. Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних ґратчастих процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей всеукраїнської наукової кон-

ференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». – Івано-Франківськ, 2012. – С. 14-15.

3. Герич М. С. Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху ґратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта». – Луцьк – Світязь, 2012. – С. 18-19.

4. Герич М. С. Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Карпатські математичні публікації – 2012. – **4**, № 2. – С. 229-240.

5. Герич М. С. Про розподіл абсолютного мінімуму для напівнеперервного зверху ґратчастого процесу на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». – Івано-Франківськ, 2013. – С. 6-7.

6. Herych M. S. Moment generating funtions of extremums and their complemets for upper semi-continuous lattice Poison process on Markov chain / M. S. Herych // Visn. Kiev nats. Un-t them. T.G. Shevchenko Series: Phys.-Math. Science – 2013. – Vol. № 1. – P. 21-27.

7. Герич М. С. Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху ґратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей XV Міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука. – Київ, 2014. – С. 43-44.

8. Герич М. С. Розподіл абсолютних екстремумів для майже напівнеперервних зверху цілочислових пуассонівських процесів на лан-

цюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей IV міжнародної ганської конференції, присвяченої 135 річниці від дня народження Ганса Гана. – Чернівці, 2014. – С. 27-28.

9. Герич М. С. Про генератриси екстремумів та їх доповнень для майже напівнеперервних цілочислових пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, №8. – С. 1034-1049.

10. Herych M. S. On overshoots for the almost semi-continuous Poisson processes defined on a Markov chain / M. S. Herych // International Conference "Stochastic Processes in Abstract Spaces". – Kyiv – 2015. – P. 19.

11. Герич М. С. Розподіли перестрибкових функціоналів для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Матеріали міжнародної наукової математичної конференції «Методика викладання та методи дослідження в математиці» у м. Берегове, 21-23 квітня 2016 р. – Ужгород: ТОВ «РІК-У», 2016. – С. 33.

12. Герич М. С. Розподіли перестрибків для майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Теорія ймовір. та мат. статистика. – 2016. – Вип. 94. – С. 36-49.

13. Герич М. С. Про стрибки через нескінчено віддалений рівень для одного класу гратчастих процесів / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2016. – Вип. 29, №2. – С. 54-63.

ABSTRACT

Herych M. S. Boundary-value problems for one class of lattice Poisson processes on Markov chains. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscripts.

Candidate of Sciences (PhD) Thesis, Physical and Mathematical Sciences, 01.01.05 — Probability Theory and Mathematical Statistics. — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of boundary value problems for lattice Poisson processes on the Markov chains. The main part of the thesis consists of the introduction, four sections, conclusions, the list of references and the appendix with the list of the author's publications and the scientific seminars and conferences, at which the obtained results were reported.

The introduction notes: the actuality of the topic of the dissertation and its connection with other scientific programs, plans, themes at the place of performance of dissertation work; purpose and tasks, object and subject and methods of research; scientific novelty and the practical value of the results obtained; personal contribution of the applicant, as well as where the main results of the dissertation work were tested and published.

In the first section, lattice Poisson processes on the Markov chains and their basic concepts and properties are studied. The first unit contains a constructive definition of objects under study in the dissertation and the main matrix designations, it is resulted a matrix analog of the dual basic factorization identity. In the second subsection we obtain an assertion based on the inversion of singularly perturbed matrices. A matrix analog of the generalization of the Polachek-Khinchin formula is established, whi-

ch establishes the connection between the first components of the basic factorization identity and the factorization components of the Borovkov identity in terms of generators of the initial ladder heights $\{\tau^{\pm}(0), \gamma^{\pm}(0)\}$.

The second section is devoted to the study of issues related to the components of the main factorization identity. The first subsection specifies the boundary relations ($s > 0$) for the components of the main factorization identity and establishes that one of the components of the main factorization identity has a simple form and is expressed through the matrix of geometric distribution generator (moment generating function). Other components of the basic factorization identity have a more complex form and are expressed in terms of the matrix parameter of this geometric distribution and the cumulant of the process $\mathbf{K}(z)$. In the second subdivision we get the relation of distributions of absolute extrema, depending on the sign m_1^0, their form is specified for $s \to 0$. The third section is devoted to the study of the properties of the matrices $\mathbf{R}(0)$ and $\mathbf{R}_0^{-1}$ that are stationary and generalize the unit roots of the scalar Lundberg equation for ordinary lattice Poisson processes.

In the third section, the distributions of overshouts functionals for scalar lattice Poisson processes. In the first subdivision we give simplification of the notation and the subsequent statements for scalar lattice Poisson processes $\xi(t)$. In the second subdivision, for all cases of $m_1^0 = E\xi(1)$ with $x = 0$, the distributions of $\gamma_k(x)$ for the almost lower semi-continuous integer processes was studied in detail. In the third subsection, the distributions of over jump functionals are considered through the level $x \to \infty$ for the almost lower semi-continuous processes, namely, the generatrix of $\gamma_k(\infty)$ for $m_1^0 \geq 0$, and the conditional generatrixe $\gamma_k(\infty)$ with $m_1^0 < 0$.

The fourth section contains questions on the study of common and marginal generatrices and the distribution of overjump functionals in the case of almost lower semi-continuous processes on the Markov chain. In the first subsection we obtain assertions for the joint matrix generatrice of overjump functionals, from which statements of marginal matrix generatrix of pairs of functionals follow. In the second subsection for almost lower semi-continuous lattice processes on the Markov chains the distributions of overjump functionals are considered through the level $x \to \infty$ for these processes, namely, the generatrix $\gamma_k(\infty)$ for $m_1^0 \geq 0$.

Keywords: almost upper or lower semi-continuous processes, moment generating functions of extrema, cumulant function, basic factorization identity, overjump (overshout) functionals, ladder heights, joint distribution of overshouts functionals.

List of publications on the topic of the thesis

The main results of the dissertation work are published in six articles in professional journals, two of which are in the journals indexed by the Scopus science-based base, and seven abstracts of conferences, five of which are international:

1. Herych M. S. The refinement of the components of the fundamental factorization identity for lattice Poisson processes on the Markov chains / D. V. Gusak, M. S. Herych // Nauk. Visn. Uzhgorod Univ. Ser. Mat. Inform. – 2011. – Vol. **22**, № 2. – P. 54-63.

2. Herych M. S. Refinement of the basic factorization identity for almost semicontinuous lattice processes on the Markov chains / M. S. Herych // Abstracts of the all-Ukrainian scientific conference "Modern problems of probability theory and mathematical analysis". – Ivano-Frankivsk, 2012. – P. 14-15.

3. Herych M. S. Generatrixes of the distribution of extremums and their additions for the semicontinuous top of lattice Poisson processes on

the Markov chain / M. S. Herych, D. V. Gusak // Abstracts of the international scientific and practical conference "Mathematics. Information Technology. Education." – Lutsk-Svityaz, 2012. – P. 18-19.

4. Herych M. S. Refinements of basic faktorizational identity for almost semi-continuous lattice processes on Markov chain / M. S. Herych // Carpathian mathematical publish papers – 2012. – V.4, № 2. – P. 229-240.

5. Herych M. S. About the distribution of the absolute minimum for the semicontinuous top of the lattice process on the Markov chain / M. S. Herych // Abstracts of the All-Ukrainian scientific conference "Modern problems of probability theory and mathematical analysis". – Ivano-Frankivsk, 2013. – P. 6-7.

6. Herych M. S. Moment generating funtions of extremums and their complemets for upper semi-continuous lattice Poison process on Markov chain / M. S. Herych // Visn. Kiev nats. Un-t them. T.G. Shevchenko Series: Phys.-Math. Science – 2013. – Vol. № 1. – P. 21–27.

7. Herych M. S. Moment geenerating function of the distribution of extremums and their additions for semicontinuous top of lattice Poisson processes on the Markov chains / M. S. Herych // Abstracts of the XV International Scientific Conference. Academician Mikhail Kravchuk. – Kyiv, 2014. – P. 43-44.

8. Herych M. S. Distribution of absolute extremums for almost semi-continuous integer-valued Poisson process on Markov chains / M. S. Herych // Abstracts of the IV International Scientific Conference, devoted 135 anniversary from the birthday of Hans Ghana. – Chernivtsi, 2014. – P. 27-28.

9. Herych M. S. On moment generating functions of extrema and their complements for almost semi-continuous integer-valued Poisson process on Markov chains / M. S. Herych, D. V. Husak // Ukr. math. journal. – 2015. – **67**, № 8. – P. 1034-1049.

10. Herych M. S. On overshoots for the almost semi-continuous Poisson processes defined on a Markov chain / M. S. Herych // Abstracts of the International Conference "Stochastic Processes in Abstract Spaces". – 2015. – P. 19.

11. Herych M. S. Distributions of overshoots for lattice Poisson processes defined on a Markov chain / M. S. Herych // Materials of international scientific mathematical conference are teaching "Methodology and research methods in mathematics-– 2016. – P. 33.

12. Herych M. S. Distributions of overshoots for the almost semi-continuous processes defined on a Markov chain / M. S. Herych // Probability theory. and mat. statistics. – 2016. – Vol. **94**, – P. 36-49.

13. Herych M. S. On jumps through the infinitely distant level for one class of lattice processes / M. S. Herych, D. V. Husak // Nauk. Visn. Uzhgorod Univ. Ser. Mat. Inform. – 2016. – Vol. **29**, № 2. - P. 54-63

Зміст

Вступ

Актуальність теми.

Дослідження розподілів випадкових процесів та їх граничних функціоналів було, і залишається, актуальним напрямком розвитку теорії випадкових процесів. Останнім часом інтерес до цих задач істотно зріс в зв'язку з їх застосуванням в теорії ризику, в теорії надійності, теорії масового обслуговування та в теорії зберігання запасів. Такі важливі показники теорії ризику, як імовірність банкрутства, розподіл моменту банкрутства, величина вимоги, що надійшла в момент банкрутства, можуть бути виражені через розподіл абсолютного максимуму, розподіли моменту досягнення рівня та перестрибку процесу ризику. В теорії масового обслуговування в термінах розподілів граничних функціоналів виражаються розподіли процесу незайнятості, віртуального часу чекання, періодів зайнятості та числа вимог, що обслуговуються на кожному періоді зайнятості. Для опису надходження товарів в сховище використовується процес зберігання, важливою характеристикою якого є стаціонарний розподіл. В прикладних галузях постановки класичних граничних задач пов'язані з немонотонними складними процесами Пуассона зі стрибками одного знаку. Перші дослідження таких граничних задач проводилися в роботах Ф. Лундберга, Г. Крамера, В. Феллера, Н. Прабху. Узагальненню цих задач присвячені роботи С. Асмуссена [72]-[75], А. А. Боровкова, Б. А. Рогозіна [4]-[6], М. С. Братійчука [7], Д. В. Гусака [27], [29]-[30], В. С. Королюка [40]-[42], [44], Є.В. Карнауха [36] та інших. За останні роки в теорії ризику, теорії масового обслуговування та теорії зберігання проводяться інтенсивні дослідження таких узагальнень класичної моделі, в яких використовуються напівмарковські процеси, випадкові блукання та процеси в марковському середовищі, дробові вінерівські процеси та процеси з субекспоненційно розподіленими стрибками. Деякі некласичні моделі теорії ризику враховують можливість зміни середовища, що обумовлює відповідний вибір більш загальних класів процесів. При такому виборі бажано, щоб для дослідження узагальнених процесів можна було використовувати аналоги методів, розроблених для відповідних процесів без урахування впливу середовища. Такі умови задовольняють процеси з незалежними приростами в марковському середовищі або процеси, задані на ланцюгу Маркова. Найбільш вивченим класом процесів в марковському середовищі є клас напівнеперервних процесів (їх траєкторії мають стрибки лише одного знаку). Проте з практичної точки зору більш привабливим є припущення про можливість стрибків різних знаків, при цьому, якщо припустити, що розподіл або додатних або від'ємних стрибків належить певному класу розподілів, тоді можна отримати аналогічні результати, як і для напівнеперервних процесів.

Наведемо короткий історичний огляд робіт по тематиці дисертаційної роботи. Процеси з незалежними приростами є одним з найбільш вивчених об'єктів теорії ймовірностей, що пояснюється як можливістю отримання точних розв'язків багатьох задач, так і широким спектром практичих застосувань. Фундаментальними роботами, в яких були досліджені основні властивості процесів з незалежними приростами, є роботи А. В. Скорохода [67], Л. Такача [69], І. І. Гіхмана та А. В. Скорохода [21], В. Феллера [70].

Важливим питанням для практичних задач є поняття про розподіл граничних функціоналів від процесів з незалежними приростами та від сум незалежних однаково розподілених випадкових величин. Задачі про вивчення розподілів граничних функціоналів для процесів ще називають граничними задачами для випадкових процесів або блукань. Такі граничні задачі розглядались в роботах А. В. Скорохода [67], Б. А. Рогозина [66], Є. Л. Пресмана [64], Б. А. Рогозина та Є. А. Печерського [63], В. С. Королюка [41], В.С. Королюка, М.С. Братійчука, Б. Пирджанова [46], Б. І. Каплана [34], М. С. Братійчука та Д. В. Гусака [7], Є. В. Карнауха [35]-[38], Д. В. Гусака [29], В. І. Лотова [53] та М. С. Герич [10]-[20].

При дослідженні задач, пов'язаних з розподілом граничних функціоналів використовується багато різних методів, які можна умовно поділити на прямі (імовірнісні) та аналітичні. До прямих методів відносяться комбінаторний метод, який найбільш повно викладений в монографіях Л. Такача [69] та А. В. Скорохода [67], а також метод теорії відновлення, основні положення якого наведені в монографії В. Феллера [70].

При дослідженні граничних функціоналів виникають різницево-інтегральні або інтегро-диференціальні рівняння, які можна розв'язувати наближеними методами (див. А. А. Боровкова [3], В. І. Лотова, Н. Г. Орлової [49, 50], Б. В. Норкіна [61]). Проте більш привабливим є одержання точних формул. При умові неперервного перетину рівня (тобто для напівнеперервного випадку) ефективним є резольвентний метод, який детально викладений в роботах В. С. Королюка, В. Н. Супруна, В. М. Шуренкова [43], В. С. Королюка, М. С. Братійчука, Б. Пирджанова [46], М. С. Братійчука та Д. В. Гусака [7], Д. В. Гусака [29, 30], [87].

Ще одним важливим аналітичним методом дослідження розподілів граничних функціоналів є факторизаційний метод, що базується на ідеї про факторизацію аналітичної функції. Факторизаційний підхід до вивчення граничних задач для блукань та процесів з незалежними приростами викладений в роботах В. А. Малишева [58] А. А. Боровкова [6], М. С. Братійчука та Д. В. Гусака [7]. Широке використання факторизаційно-проекційного методу викликано тим, що ним можна користуватися без істотних обмежень на процес.

В статтях А. А. Боровкова [3] були знайдені повні асимптотичні розклади граничних функціоналів для випадкових блукань, які породжені сумами незалежних однаково розподілених випадкових величин. Як в подальшому вияснилось, цей метод застосовний для дослідження граничних функціоналів і в інших ситуаціях. На його основі були знайдені повні асимптотичні розклади розподілів для деяких двовимірних випадкових блукань (А. А. Боровков, Б. А. Рогозин [5]), а також для випадкових блукань, заданих на ланцюгу Маркова (Э. Л. Пресман [65]).

В роботах новосибірських імовірнисників В. І. Лотова [48], [52], В. І. Лотова та Н. Г. Орлової [49]-[51], В. С. Лугавова, Б.А.Рогозина [54]-[57] для гратчастих випадкових блукань S_n на ланцюгу Маркова використовується матричний аналог факторизаційної тотожності А. А. Боровкова [6] для звичайних блукань S_n, яка в гратчастому випадку має вигляд

$$1-\beta f(z)=R_{\beta_+}(z)D^{-1}(\beta)R_{\beta_-}(z), f(z)=Ez^{S_1}, 0<\beta<1,$$

де

$$R_{\beta_+}(z)=1-E[\beta^{\tau^+(0)}z^{\gamma_+(0)},\tau^+(0)<\infty],$$
$$R_{\beta_-}(z)=1-E[\beta^{\tau^-(0)}z^{\gamma_-(0)},\tau^-(0)<\infty],$$
$$D(\beta)=1-E[\beta^{\tau^{\pm}(0)},\gamma_{\pm}(0)=0,\tau^{\pm}(0)<\infty].$$

Факторизаційні методи в граничних задачах для звичайних випадкових блукань та процесів отримали своє продовження та матричне узагальнення для випадкових блукань та процесів на ланцюгах Маркова в роботах Х. Д. Міллера [95], Й. Кейлсона [92], К. Арндта [1]-[2], А. А. Боровкова [5], В.С. Королюка, М.С. Братійчука, Б. Пирджанова [46], В. С. Лугавова, Б. А. Рогозіна [54]-[57], В. І. Лотова, Н. Г. Орлової [48]-[51], Д. В. Гусака [23]-[30].

В роботах В. І. Лотова, Н. Г. Орлової [49]-[51] для випадкових блукань S_n на ланцюгу Маркова (із стрибками на його переходах)

$$S_n = S_{n-1} + \chi^{(1)}_{\sigma_{n-1},\sigma_n},\ S_0 = 0,\ \mathbf{F}(z) = \|P_{kr} z^{\chi^{(1)}_{kr}}\|$$

матричний аналог тотожності А. А. Боровкова [6] має наступний двоїстий вигляд

$$1 - \beta \mathbf{F}(z) = \begin{cases} \mathbf{R}_{\beta+}(z)\mathbf{R}_{\beta-}(z), \\ \mathbf{L}_{\beta-}(z)\mathbf{L}_{\beta+}(z). \end{cases}$$

В цих роботах наводиться імовірнісна інтерпритація лише для перших компонент факторизації

$$\mathbf{I} - \|E[z^{\gamma_{\pm}(0)}\beta^{\tau^{\pm}(0)}, \tau^{\pm}(0) < \infty]\| = \begin{cases} \mathbf{R}_{\beta+}(z), \\ \mathbf{L}_{\beta-}(z). \end{cases}$$

Для гратчастих пуасонівських процесів на ланцюгу Маркова ми використовуємо основну факторизаційну тотожність для $\mathbf{g}(s,z) = \mathbf{E}z^{\zeta(\theta_s)} = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}$:

$$\mathbf{g}(s,z) = \begin{cases} \mathbf{E}z^{\xi^+(\theta_s)}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)-\xi^+(\theta_s)}, \\ \mathbf{E}z^{\xi^-(\theta_s)}\mathbf{P}_s^{-1}(s,z)\mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)-\xi^-(\theta_s)}. \end{cases}$$

Узагальнена матрична факторизаційна тотожність А. А. Боровкова для гратчастого пуассонівського процесу на ланцюгу Маркова з кумулянтою $\mathbf{K}(z)$ має вигляд

$$s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z) = \begin{cases} \mathbf{R}_1^+(s,z)(\mathbf{D}(s))^{-1}\mathbf{R}_2^-(s,z), \\ \mathbf{R}_1^-(s,z)(\mathbf{D}(s))^{-1}\mathbf{R}_2^+(s,z), \end{cases}$$

де

$$\mathbf{D}(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s) = 0\},$$
$$\mathbf{R}_1^{\pm}(s,z) = \mathbf{I} - \mathbf{E}[z^{\gamma_{\pm}(0)} e^{-s\tau^{\pm}(0)}, \tau^{\pm}(0) < \infty].$$

При вивчені розподілу таких функціоналів як число перетинів додатного (від'ємного) рівня новосибірцями В. І. Лотовим, Н. Г. Орловою [50]-[51], В. С. Лугавовим [54] використовуються перші множники $\mathbf{R}_{\beta+}(z)$, $\mathbf{L}_{\beta-}(z)$ факторизації А. А. Боровкова або $\mathbf{R}_1^{+}(s,z)$, $\mathbf{R}_1^{-}(s,z)$ у термінах генератрис початкових сходинкових висот $\{\tau^{\pm}(0), \gamma^{\pm}(0)\}$. Для числа перетинів смуги $[a,b]$ в роботах В. І. Лотова, Н. Г. Орлової [49], [51], [53] використовуються $\mathbf{R}_{\beta_+}(z)$ $(\mathbf{R}_1^{+}(s,z))$ і $\mathbf{L}_{\beta^-}(z)$ $(\mathbf{R}_1^{-}(s,z))$.

Для вивчення перестрибкових функціоналів для гратчастих пуасонівських процесів на ланцюгу Маркова ми використовуємо всі компоненти факторизації $\mathbf{g}(s,z)$. Для встановлення розподілу верхніх функціоналів $\{\tau^{+}(x), \gamma_{+}(x), \gamma^{+}(x), \gamma_x^{+}(x)\}$ використовуються компоненти верхньої факторизації $\mathbf{E}z^{\xi^{+}(\theta_s)}$, $\mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)-\xi^{-}(\theta_s)}$, а для нижніх функціоналів $\{\tau^{-}(x), \gamma_{-}(x), \gamma^{-}(x), \gamma_x^{-}(x)\}$ – компоненти нижньої факторизації $\mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)-\xi^{+}(\theta_s)}$, $\mathbf{E}z^{\xi^{-}(\theta_s)}$.

В роботах Д. В. Гусака, А. І. Туреніязової [25]-[26], Є. В. Карнауха [35]-[37],[88], М. С. Герич та Д. В. Гусака [13]-[19] для майже напівнеперервних процесів знизу (зверху), другі компоненти основної факторизаційної тотожності в $\mathbf{g}(s,z)$ визначаються матричними геометричними розподілами, параметри яких визначаються матрицями $\mathbf{Z}_s^{-1}$ $(\mathbf{Z}(s))$, $\mathbf{R}_s^{-1}$ $(\mathbf{R}(s))$. Завдяки цьому проекційні дужки $[\mathbf{g}_{-}(s,z)\mathbf{a}(z)]_{+}$ легко розкриваються функціями $\mathbf{W}(s,x)$, які є зрізаними згортками геометричного розподілу $\xi^{-}(\theta_s)$ з функціями $\mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3)$.

Згідно з матричними узагальненнями формули Полячека-Хінчина встановлюється зв'язок між першими компонентами основної факторизаційної тотожності для $\mathbf{g}(s,z)$ та факторизацією Боровкова

$$\mathbf{g}_{+}(s,z) = \mathbf{p}_{+}(s)\mathbf{R}_1^{+}(s,z),\ \mathbf{g}_{-}(s,z) = \mathbf{p}_{-}(s)\mathbf{R}_1^{+}(s,z).$$

Застосування напівнеперервних процесів Леві на ланцюгах Маркова і опис методів дослідженння ризикових характеристик міститься в роботах S. Asmussen, H. Albrecher, Z. F. Henriksen, Cl. Kluppelberg [72]-[75].

На початку нового століття з'являються роботи H. Nyrhinen [96], J. Cai [76]-[77], J. Cai, D. C. M. Dickson [78], W. Wei, Y. Hu [98] з ускладненими узагальненнями класичних процесів ризику, в яких розглядаються моделі ризику з дискретним часом і багатократним перестрахуванням. Воно пов'язане з марковським "reinsurer's rate of interest" (процентним інтересом перестрахувальника). В цих моделях "the rate of interest" визначається регулярним ланцюгом Маркова I_n з матрицею перехідних імовірностей $\mathbf{P} =\| \mathbf{p}_{kr} \|$ $(k,r = \overline{1,m})$ і процентним значенням $\{i_k\}, 0 < i_k < 1, \sum\limits_{k=1}^{m} i_k < 1$. Якщо позначити резервний процес ризику з дискретно розподіленими вимогами $\{X_i\}_{i\geq 1}$ та преміями $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ через

$$U_n = u + \sum_{i\leq n}(Y_i - X_i),\ U_0 = u,$$

то "збурений ланцюгом I_n" процес приймає вигляд

$$\tilde{U_n} = (1 + I_n)\tilde{U}_{n-1} + Y_n - X_n, n \geq 0.$$

Із останнього співвідношення видно, що резерв при n-му страхуванні збільшується на I_nU_{n-1}. Це збільшення резерву визначає стрибок на переходах I_n: $\chi_{kr}^{(n)} = I_nU_{n-1}$ і збільшує імовірність виживання.

Наприклад, можна розглянути середовище Маркова: умови середовища описуються скінченним ланцюгом Маркова і інтенсивність надходження вимог здійснюється у відповідності до зміни стану середовища. Це дозволяє розглядати більшу варіацію ніж та, яку припускає пуассонова модель.

Структура та основні влвстивості процесів Леві, заданих на ланцюгу Маркова, або марковських адитивних процесів вивчається в роботах А. В. Скорохода та І. І. Єжова [31].

У випадку недискретного часу за умови неперервного перетину рівня розподіли граничних функціоналів були розглянуті в роботах Д. В. Гусака та С. І. Пересипкіної [23], К. Арнда [1]-[2], В. С. Лугавова [56]-[57], Д. В. Гусака [27], С. Асмуссена [74], Є. В. Карнауха [35]-[37]. У випадку перетину рівня геометрично розподіленими стрибками розподіли базових граничних функціоналів одержано Д. В. Гусаком та М. С. Герич [17], а також М. С. Герич [19]. У випадку перетину рівня тільки одиничними стрибками аналогічні результати було отримано Д. В. Гусаком та А. І. Туреніязовою [26], а також М. С. Герич [89].

Важливою властивістю марковських адитивних процесів є те, що для них можна узагальнити методи дослідження розподілів граничних функціоналів, розроблені для скалярних однорідних процесів з незалежними приростами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в державному вищому навчальному закладі "Ужгородський національний університет" на кафедрі теорії ймовірностей і математичного аналізу в рамках держбюджетної дослідницької теми "Розробка і дослідження нових методів моделювання випадкових процесів і полів та розв'язків рівнянь математичної фізики", номер державної реєстрації 0115U001101.

Мета та задачі дослідження. Основним завданням роботи є вивчення вигляду компонент матричної основної факторизаційної тотожності та розподілів функціоналів для гратчастих майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова. Тобто марковських адитивних процесів, одна компонента яких перетинає рівень (додатний або від'ємний) лише геметрично розподіленими стрибками, а друга є скінченним ланцюгом Маркова. А саме, розглядаються розподіли та генератриси екстремумів, в тому числі абсолютних екстремумів, перестрибкових функціоналів та функціоналів, пов'язаних з виходом з обмеженого інтервалу. Мета дослідження полягає у подальшому вивчені розподілу граничних функціоналів цих процесів з допомогою методу факторизації. Для досягнення поставленої мети розглядаються наступні задачі:

- дослідження основних властивостей майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова;
- отримання матричного аналога основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова;
- встановлення вигляду компонент основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних цілочислових процесів, заданих на ланцюгу Маркова;
- вивчення граничної поведінки компонент основної факторизаційної тотожності досліджуваних процесів;
- дослідження властивостей матриць $\mathbf{Z}_s^{-1}$, $\mathbf{R}_s^{-1}$, $\mathbf{Z}(s), \mathbf{R}(s)$, що визначають дробово-лінійні компоненти основної факторизаційної тотожності, та їх поведінка при $s \to 0$;
- доведення тверджень про спільну генератрису перестрибкових функціоналів та про маргінальні генератриси пар $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, $k = \overline{1,3}$;

- вивчення граничних розподілів перестрибкових функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, $k = \overline{1,3}$ для введених процесів при $x \to 0$ та $x \to \infty$.

Об'єкт і предмет дослідження. Об'єктом дослідження дисертаційної роботи є цілочислові майже напівнеперервні процеси задані на ланцюгу Маркова, з геометричним розподілом стрибків одного знаку. Предметом дослідження є граничні задачі для визначених функціоналів розглянутих процесів.

Методи дослідження. В роботі використовується анлітичний апарат теорії випадкових процесів та факторизаційно-проекційний метод.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації отримано нові теоретичні результати, основними із яких є наступні:

- досліджено основні властивості класу майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова, що є узагальненим типом напівнеперервних процесів;
- знайдені конкретизовані зображення компонент матричної факторизації, а саме основної факторизаційної тотожності, для цього класу процесів;
- встановлені співвідношення для дограничних ($s > 0$) та граничних ($s \to 0$) розподілів екстремумів і їх доповнень;
- отримані твірні перетворення дограничних розподілів та генератрис основних граничних функціоналів досліджуваних процесів;
- доведено справедливість співвідношень для генератрис перестрибкових функціоналів скалярних гратчастих пуассонівських процесів ($m = 1$) через нульовий та нескінченно віддалений рівень для довільного знаку їх середніх значень;

- встановлено співвідношення для матричних генератрис перестрибкових функціоналів гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова;
- отримано співвідношення для матричних генератрис перестрибкових функціоналів через нульовий та нескінченно віддалений рівень при $m_1^0 \geq 0$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Всі отримані в дисертаційній роботі результати мають теоретичне значення та практичне застосування в теорії ризику, теорії масового обслуговування та інших галузях, в яких використовуються марковські адитивні процеси. Зокрема, для знаходження ймовірностей банкрутства процесів ризику в марковському середовищі зі стохастичними преміями, а також для процесів з обмеженими резервами.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. За результатами дисертації здобувач опублікував шість робіт, з них дві разом з науковим керівником доктором фізико-математичних наук, професором Д. В. Гусаком, в яких Д. В. Гусаку належить постановка задач і вибір методу дослідження та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорувались на слідуючих конференціях та семінарах:

- Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, Україна, 20-26 лютого 2012);

- Міжнародній науково-практичній конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта» (Луцьк – Світязь, 7-9 вересня 2012);
- Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, Україна, 25 лютого -3 березня 2013);
- XV міжнародній науковій конференції ім. академіка Михайла Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014);
- IV міжнародній ганській конференції, присвяченій 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня - 5 липня 2014);
- International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev "Stochastic Processes in Abstract Spaces"(Kyiv, 14-16 October, 2015);
- Міжнародній науковій математичній конференції «Методика викладання та методи дослідження в математиці» (Берегове, 21-23 квітня, 2016);
- Науковому семінарі "Исчисление Маллявена и его приложения" Інститута математики НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора А. А. Дороговцева (2012, 2014);
- Міжкафедральному науковому семінарі математичного факультету державного вищого навчального закладу "Ужгородський національний університет" під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, доцента Г. І. Сливки-Тилищак (2017).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані в шести статтях [10, 13, 89, 17, 19, 20] у фахових виданнях, дві з яких [17, 19] у журналах, що індексуються науковометричною базою Scopus:

1. Герич М. С. Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / Д. В. Гусак, М. С. Герич // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 54-63.

2. Герич М. С. Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Карпатські математичні публікації – 2012. – **4**, № 2. – С. 229-240.

3. Herych M. S. Moment generating functions of extremums and their complemets for upper semi-continuous lattice Poison process on Markov chain / M. S. Herych // Bul. of Taras Shevchenko Nation. Univer. Ser. Phys.-Mathem. – 2013. – V. № 1. – P. 21–27.

4. Герич М. С. Про генератриси екстремумів та їх доповнень для майже напівнеперервних цілочислових пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 8. – С. 1034-1049.

5. Герич М. С. Розподіли перестрибків для майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Теорія ймовір. та мат. статистика. – 2016. – Вип. 94. – С. 36-49.

6. Герич М. С. Про стрибки через нескінчено віддалений рівень для одного класу гратчастих процесів / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Наук. вісн. Ужгород. у-ту. Серія: матем. і інформ. – 2016. – Вип. 29, № 2. – С. 54-63.

і в семи збірниках тез конференцій [11, 12, 14, 15, 16, 90, 18], п'ять з яких є міжнародними [12, 15, 16, 90, 18].

Структура диссертації. Диссертаційна робота складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, що розбиті на підрозділи, та висновків до них, списку використаних джерел та додатку. Загальний обсяг дисертації – 179 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації – 149 сторінок. Список використаних джерел займає 14 сторінок і містить 99 найменувань. Додаток займає 4 сторінки і містить список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Автор висловлює вдячність своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору Гусаку Дмитру Васильовичу за поставлені задачі, важливі рекомендації і постійну увагу на всіх етапах виконання цієї роботи.

Основний зміст роботи

Для зручності читача нумерація тверджень і формул співпадає з нумерацією в основному тексті роботи. Перший розділ присвячений викладенню основних початкових відомостей та введенню необхідних матричних позначень. Спочатку наводяться необхідні для подальшої роботи означання та деякі основні твердження, наводиться конструктивне означення гратчастого пуассонівського процесу з умовно незалежними приростами, заданого на ланцюгу Маркова.

Нехай $\mathbf{Y}(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ двовимірний марковський процес зі значеннями в фазовому просторі $\{\mathbb{Z}\times\mathbb{E}\}$ заданий на $\{\Omega,\ \mathcal{F},\ P\}$, на якому задано потік σ -алгебр $\{\mathfrak{F}_t\}_{t\geq 0}$ ($\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$, $0 \leq s < t$). $x(t)$ - скінченний ергодичний ланцюг Маркова із множиною станів $\mathbb{E} = \{1, ..., m\}$ та матрицею перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}, \mathbf{Q} = \mathbf{N}(\mathbf{P} - \mathbf{I}),$$

$\mathbf{N} = \|\delta_{kr} n_k\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, де $\delta_{kr} = I_{\{k=r\}}$, $\{n_k > 0, k \in \mathbb{E}\}$ – параметри показниково розподілених випадкових величин $\zeta_k^{(\cdot)}$ (час перебування $x(t)$ в стані k). Матриця $\mathbf{P} = \|p_{kr}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $p_{kr} = P\{x(\sigma_n + 0) = r/x(\sigma_n) = k\}$ є матриця перехідних імовірностей вкладеного ланцюга $y_n = x(\sigma_n+0)$ зі стаціонарним розподілом $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$, де σ_n - момент n-ої зміни стану $x(t)$, $\mathbf{Q}$ - інфінітезимальна (твірна) матриця.

Нехай $\{\xi_n(t)\}_{n=1}^m$ сукупність пуассонівських процесів з довільним розподілом стрибків у $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ та послідовність незалежних сукупностей однаково розподілених цілозначних випадкових величин $\{\chi_{kr}^{(n)}\}_{n\geq 1}$ $(k, r \in \mathbb{E})$. Компонента $\xi(t)$ – процес з умовно незалежними приростами $\triangle\xi(t) \doteq \triangle\xi_k(t)$, якщо $x(t)$ знаходиться в k-му стані.

Сукупність незалежних випадкових величин $\{\chi_{kr}\}_{k,r=1}^m$, що не залежать від $\xi_r(t)$ та $x(t)$, визначаються розподілом стрибків $\chi_{kr}^{(\cdot)}$ на переходах ланцюга Маркова $x(t)$, $\mathbf{f}(x) = \|p_{kr}P\{\chi_{kr}^{(\cdot)} = x\}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $\widetilde{\mathbf{f}}(z) = \|p_{kr}Ez^{\chi_{kr}^{(\cdot)}}\|$, $\widetilde{\mathbf{f}}(1) = \mathbf{P}$.

$\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr}\lambda_k\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, де λ_k - інтенсивності стрибків пуассонівських процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^m$ з розподілом стрибків $\mathbf{p}(x) = \|\delta_{kr}P\{\xi_k^{(1)} = x\}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$.

Розподіл 1-го сумарного стрибка процесу $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова позначимо через $\mathbf{\Pi}_0(x) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(x) + \mathbf{N}\mathbf{f}(x)$.

Матрична твірна функція процесу $\xi(t)$ має вигляд

$$\mathbf{g}_t(z) = \mathbf{E}z^{\xi(t)} = e^{t\mathbf{K}(z)},\ |z| = 1,$$

де

$$\mathbf{K}(z) = \ln \mathbf{E}z^{\xi(1)} = \sum_{x\neq 0}(z^x - 1)\mathbf{\Pi}_0(x) + \mathbf{Q}$$

або в термінах твірних функцій

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda}(\widetilde{\mathbf{p}}(z) - \mathbf{I}) + \mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{f}}(z) - \mathbf{P}) + \mathbf{Q}.$$

Введений таким чином процес $Y(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ називається складним гратчастим процесом Пуассона з незалежними приростами, заданим на скінченному ланцюгу Маркова.

Означення 1.1.2. Складний гратчастий процес Пуассона $Y(t)$, заданий на ланцюгу Маркова, називається майже напівнеперервним зверху, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає додатний рівень лише додатними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}-\mathbf{I}]+$$
$$+\mathbf{\Lambda_2}\sum_{x<0}(z^x-1)\mathbf{p}_2(x)+\mathbf{N}\sum_{x<0}(z^x-1)\mathbf{f}(x)+\mathbf{Q},$$

або

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}-\mathbf{I}]+$$
$$+\mathbf{\Lambda_2}[\widetilde{\mathbf{p}}_2(z)-\mathbf{I}]+\mathbf{N}[\widetilde{\mathbf{f}}(z)-\mathbf{P}]+\mathbf{Q},$$

де $\mathbf{C} = \|\delta_{kr}c_k\|$, $0 < c_k < 1$, c_k – параметри геометрично розподілених додатних стрибків процесу $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$, $k = \overline{1,m}$.

Означення 1.1.3. Складний гратчастий процес Пуассона $Y(t)$, заданий на ланцюгу Маркова, називається майже напівнеперервним знизу, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише від'ємними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}\sum_{x>0}(z^x-1)\mathbf{p}_1(x)+$$
$$+\mathbf{\Lambda_2}[(\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}-\mathbf{I}]+\mathbf{N}\sum_{x>0}(z^x-1)\mathbf{f}(x)+\mathbf{Q},$$

або

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[\widetilde{\mathbf{p}}_1(z)-\mathbf{I}]+\mathbf{\Lambda_2}[(\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}-\mathbf{I}]+$$
$$+\mathbf{N}[\widetilde{\mathbf{f}}(z)-\mathbf{P}]+\mathbf{Q},$$

де $\mathbf{B} = \|\delta_{kr}b_k\|$, $0 < b_k < 1$, b_k – параметри геометрично розподілених від'ємних стрибків процесу $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$, $k = \overline{1,m}$. В подальших викладках для спрощення позначень інтегральних та твірних перетворень будемо користуватися відповідно показниково та геометрично розподіленими випадковими величинами θ_s, $\widetilde{\nu}_\varepsilon$, тоді генератриса $\xi(\theta_s)$

$$\mathbf{g}(s,z) = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{g}_t(z)dt = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1},$$

$$\mathbf{P}_s = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{P}(t)dt = s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}, \mathbf{P}_0 = \lim_{s\to 0}\mathbf{P}_s = \|\delta_{kr}\pi_r\|.$$

Введемо позначення функціоналів для $\xi(t)$, що характеризують екстремуми процесу на інтервалі $[0,t]$ та їх доповнення:

$$\xi^+(t) = \sup_{0\le u\le t}\xi(u), \qquad \overline{\xi}(t) = \xi(t)-\xi^+(t),$$
$$\xi^-(t) = \inf_{0\le u\le t}\xi(u), \qquad \check{\xi}(t) = \xi(t)-\xi^-(t),$$

та абсолютні екстремуми $\xi^\pm = \sup(inf)_{0\le u\le\infty}\xi(u)$.

Розподіли екстремумів процесу в момент θ_s позначимо

$$\mathbf{P}_+(s,x)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)<x\}=\|P\{\xi^+(\theta_s)<x,\, x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\|, x\in\mathbb{Z}_0^+,$$

$$\mathbf{P}^+(s,x)=\mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s)<x\}=\|P\{\check{\xi}(\theta_s)<x,\, x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\|, x\in\mathbb{Z}_0^+,$$

$$\mathbf{P}_-(s,x)=\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)<x\}, \mathbf{P}^-(s,x)=\mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)<x\},\ x\in\mathbb{Z}_-^0,$$

$$\mathbf{p}_x^\pm(s) = \mathbf{P}\{\xi^\pm(\theta_s)=x\} = \|P\{\xi^\pm(\theta_s)=x,\ x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\|,\ x\in\mathbb{Z}_\pm,$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \mathbf{P}\{\,\check{\xi}(\theta_s)=x\},\ x\in\mathbb{Z}_+,\ \check{\mathbf{p}}_x^-(s) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)=x\},\ x\in\mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}_x(s) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s)=x\},\ x\in\mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

$$\mathbf{p}_\pm(s) = \mathbf{P}\{\xi^\pm(\theta_s)=0\},\ \mathbf{p}^-(s) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)=0\},\ \mathbf{p}^+(s) = \mathbf{P}\{\,\check{\xi}(\theta_s)=0\},$$

$$\mathbf{P}(s,x) = \mathbf{P}\{\xi(\theta_s)<x\},\ \overline{\mathbf{P}}(s,x) = \mathbf{P}_s - \mathbf{P}(s,x),$$

$$\mathbf{q}_\pm(s) = \mathbf{P}\{\pm\xi^\pm(\theta_s)>0\} = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_\pm(s),$$

$$\mathbf{q}^-(s) = \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)<0\} = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^-(s),\ \mathbf{q}^+(s) = \mathbf{P}\{\,\check{\xi}(\theta_s)>0\} = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}^+(s),$$

$$\mathbf{p}_\pm^*(s) = \mathbf{p}_\pm(s)\mathbf{P}_s^{-1},\ \mathbf{p}_*^\pm(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^\pm(s),$$

$$\mathbf{q}^*_\pm(s) = \mathbf{q}_\pm(s)\mathbf{P}_s^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{p}^*_\pm(s),\ \mathbf{q}^\pm_*(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^\pm(s) = \mathbf{I} - \mathbf{p}^\pm_*(s).$$

Їх відповідні матричні твірні функції

$$\mathbf{g}(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = \|\mathbf{E}[z^{\xi(\theta_s)}, x(\theta_s) = r|x(0) = k\}\| = \|E_{kr}[z^{\xi(\theta_s)}]\|,$$

$$\mathbf{g}_\pm(s,z) = \mathbf{E}z^{\xi^\pm(\theta_s)}, \mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)}, \mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{E}z^{\bar{\xi}(\theta_s)}.$$

Надалі припускається, що виконується умова $\mathbf{E}|\xi(t)| < \infty$.

Визначимо також операції проектування

$$[\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+ = \sum_{x=1}^{+\infty} z^x \mathbf{R}_x, \qquad [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_- = \sum_{x=-1}^{-\infty} z^x \mathbf{R}_x,$$

$$[\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+^0 = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{R}_x, \qquad [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_-^0 = \sum_{x=-\infty}^{0} z^x \mathbf{R}_x,$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}(z) = [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+ + [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_-^0 = [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_- + [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+^0.$$

Важливим методом дослідження твірних перетворень розподілів граничних функціоналів є метод, заснований на факторизаційному розкладі $\mathbf{g}(s,z)$ на $|z| = 1$ і визначенні цих перетворень у термінах факторизаційних компонент, що допускають аналітичне продовження на $|z| \leq 1$ та $|z| \geq 1$. В підрозділі 1.1 наведено матричний аналог основної факторизаційної тотожності, яка в матричному випадку є двоїстою.

Теорема 1.1.1. Для двовимірного процесу $\mathbf{Y}(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ при $s > 0$ має місце матрична основна факторизаційна тотожність на $|\ z\ | = 1$:

$$\mathbf{g}(s,z) = \mathbf{E}\, z^{\xi(\theta_s)} = \begin{cases} \mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^-(s,z), \\ \mathbf{g}_-(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^+(s,z). \end{cases}$$

Для ергодичного ланцюга Маркова з твірною матрицею $\mathbf{Q}$ та діагонально записаним стаціонарним розподілом $\pi_d = \|\delta_{kr}\pi_r\|$ водиться поняття зворотного ланцюга Маркова $\widehat{x}(t)$.

Означення 1.1.5. Ланцюг Маркова $\widehat{x}(t)$ називається зворотним (оберненим за часом) до ланцюга Маркова $x(t)$, якщо π_d – його початковий розподіл, а матриця перехідних ймовірностей задається за допомогою твірної матриці:

$$\widehat{\mathbf{Q}} = \mathbf{N}(\widehat{\mathbf{P}} - \mathbf{I}) = \mathbf{S}\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1}, \, \mathbf{S} = \mathbf{N}\pi_d^{-1} = \left\| \delta_{kr}\frac{n_r}{\pi_r} \right\|.$$

Усереднені за стаціонарним розподілом математичне сподівання та дисперсія:

$$m_1^0 = \sum_{k=1}^{m} \pi_k \sum_{r=1}^{m} [\delta_{kr} E\xi_k(1) + \sum_{r \neq k}^{m} n_k p_{kr} E\chi_{kr}],$$

$$\sigma_0^2 = \sum_{k=1}^{m} \pi_k \sum_{r=1}^{m} [\delta_{kr} D\xi_k(1) + \sum_{r \neq k}^{m} n_k p_{kr} D\chi_{kr}].$$

Другий розділ присвячений дослідженню майже напівнеперервних процесів, заданих на скінченному ланцюгу Маркова. У підрозділі 2.1 розглядаються дограничні ($s > 0$) уточнення компонент матричної факторизаційної тотожності. Основними результатами даного підрозділу є теореми, які містять уточнення розподілів та генератрис екстремумів та їх доповнень для майже напівнеперервних зверху (знизу) процесів, заданих на скінченному ланцюгу Маркова, за якими хвости розподілів максимуму та доповнення до мінімуму (мінімуму та доповнення до максимуму) мають геометричне представлення.

Теорема 2.1.1. Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова $x(t)$ генератриса та розподіл максимуму $\xi^+(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями

$$\mathbf{g}_+(s,z) = (\mathbf{I} - \mathbf{C}z)[\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1}z]^{-1}\mathbf{p}_+(s),$$

$$\mathbf{p}_x^+(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{Z}_s)\mathbf{Z}_s^{-x}\mathbf{p}_+(s), \; x \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathbf{p}_+(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s,$$

$$\mathbf{q}_+(s) = (\mathbf{Z}_s^{-1} - \mathbf{C})(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s,$$

$$\overline{\mathbf{P}}_+(s,x) = (\mathbf{Z}_s^{-1} - \mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}_+^0;$$

генератрису доповнення до максимуму $\overline{\xi}(\theta_s)$ можна виразити через генератрису від'ємних значень процесу та матричний параметр геометричного розподілу $\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1} + \mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{C}$:

$$\mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_+(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]_-^0 +$$
$$+(\mathbf{Z}_s^{-1} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|} - z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) < 0]),$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^-(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_+(s))^{-1}(\mathbf{p}_x(s)+$$
$$+(\mathbf{C} - \mathbf{Z}_s^{-1})\mathbf{C}^{\,x-1}\mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|},\ \xi(\theta_s) < x]),\ \ x \in \mathbb{Z}_0^-.$$

Теорема 2.1.2. Для майже напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл доповнення до мінімуму $\check{\xi}(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{p}^+(s)[\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}z]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z),$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \mathbf{p}^+(s)\mathbf{R}_s^{-x}[\mathbf{I} - \mathbf{R}_s\mathbf{C}\,],\ \ x \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\mathbf{p}^+(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}),$$

$$\mathbf{q}^+(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{R}_s^{-1} - \mathbf{C}),$$

$$\overline{\mathbf{P}}^{\,+}(s,x) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{R}_s^{-x}(\mathbf{R}_s^{-1} - \mathbf{C}),\ x \in \mathbb{Z}_+^0.$$

Генератрису мінімуму $\xi^-(\theta_s)$ можна виразити через генератрису від'ємних значень процесу та матричний параметр геометричного розподілу $\mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^+(s) + \mathbf{C}\,\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^+(s)$:

$$\mathbf{g}_-(s,z) = \big([\mathbf{g}(s,z)]_-^0 + \mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|} - z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) < 0]\,\cdot$$
$$\cdot(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}z(\mathbf{R}_s^{-1} - \mathbf{C})\big)(\mathbf{p}^+(s))^{-1}\mathbf{P}_s,$$

$$\mathbf{p}_x^-(s) = [\mathbf{p}_x(s) + \mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|},\ \xi(\theta_s) < x]\,\cdot$$
$$\cdot\mathbf{C}^{\,x-1}(\mathbf{C} - \mathbf{R}_s^{-1})](\mathbf{p}^+(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\ \ x \in \mathbb{Z}_-^0.$$

З теореми 2.1.1. та теореми 2.1.2. та матричної основної факторизаційної тотожності отримуємо наступну теорему, яка дозволяє для пар $\{\mathbf{g}_+(s,z),\, \mathbf{g}^-(s,z)\}$ і $\{\mathbf{g}_-(s,z),\, \mathbf{g}^+(s,z)\}$ виразити "непрості" генератриси розподілів.

Теорема 2.1.3. Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху процес на ЛМ $x(t)$, тоді при $|z| \geq 1$ генератриса доповнення до максимуму $\overline{\xi}(\theta_s)$ задовольняє наступні співвідношення

$$\mathbf{g}^-(s,z) = (\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1} = \\ = (\mathbf{I}-\mathbf{C})[\mathbf{I}+(1-z)(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}](\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1},$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^-(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}\Big(\sum_{r=-\infty}^{x}\mathbf{C}^{x-r}\mathbf{p}_r(s) - \\ - \mathbf{Z}_s^{-1}\sum_{r=-\infty}^{x-1}\mathbf{C}^{x-r-1}\mathbf{p}_r(s)\Big),\ x\in\mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}^-(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}s(s\mathbf{C}+\mathbf{\Lambda}_1+(\mathbf{\Lambda}_2+\mathbf{N})\mathbf{C})^{-1}, \mathbf{g}^-(s,1) = \mathbf{P}_s,$$

а генератриса мінімуму $\xi^-(\theta_s)$ виражається через матричний параметр $\mathbf{R}_s^{-1}$ та збурення кумулянти

$$\mathbf{g}_-(s,z) = s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}) = \\ = s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}[\mathbf{I}+(1-z)(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})^{-1}](\mathbf{I}-\mathbf{C}),$$

$$\mathbf{p}_x^-(s) = \Big(\sum_{r=-\infty}^{x}\mathbf{p}_r(s)\mathbf{C}^{x-r} - \mathbf{R}_s^{-1}\sum_{r=-\infty}^{x-1}\mathbf{p}_r(s)\mathbf{C}^{x-r-1}\Big)\cdot \\ \cdot(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}),\ x\in\mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}_-(s) = s(s\mathbf{C}+\mathbf{\Lambda}_1+\mathbf{C}(\mathbf{\Lambda}_2+\mathbf{N}))^{-1}(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}), \mathbf{g}_-(s,1) = \mathbf{P}_s.$$

Також у випадку майже напівнеперервного зверху процесу на ланцюгу Маркова доведено твердження про незалежність розподілу $\gamma^+(x)$ від $\tau^+(x)$.

Аналогічно до теорем 2.1.1-2.1.3 мають місце теореми 2.1.5-2.1.6 у випадку майже напівнеперервного знизу процесу на ланцюгу Маркова.

Теорема 2.1.5. Для майже напівнеперервного знизу процесу, заданого на ланцюгу Маркова, мають місце наступні співвідношення для генератрис екстремумів та їх розподілів:

для $\xi^-(\theta_s)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_-(s,z) &= (z\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}\mathbf{p}_-(s),\\
\mathbf{p}^-_x(s) &= (\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})\big(\mathbf{Z}(s)\big)^{-x-1}\mathbf{p}_-(s),\ \ x\in\mathbb{Z}_-,\\
\mathbf{p}_-(s) &= (\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s,\\
\mathbf{q}_-(s) &= (\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s,\\
\mathbf{P}_-(s,x) &= (\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})\big(\mathbf{Z}(s)\big)^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s, x\in\mathbb{Z}^0_-,
\end{aligned}$$

для $\check{\xi}(\theta_s)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_-(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]^0_+ +\\
+(\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})z(\mathbf{I}-\mathbf{B}z)^{-1}\mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)}-z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)>0]),\\
\check{\mathbf{p}}^+_x(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_-(s))^{-1}(\mathbf{p}_x(s)+\\
+(\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})\mathbf{B}^{-x-1}\mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)>x]), x\in\mathbb{Z}^+_0,
\end{aligned}$$

де $\mathbf{Z}(s)=\mathbf{q}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1}+\mathbf{p}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{B}$.

Генератриса $\overline{\xi}(\theta_s)$ виражається через матричний параметр $\mathbf{R}(s)=\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s)+\mathbf{B}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^-(s,z) &= \mathbf{p}^-(s)[z\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)]^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B}),\\
\check{\mathbf{p}}^-_x(s) &= \mathbf{p}^-(s)(\mathbf{R}(s))^{-x-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}),\ x\in\mathbb{Z}_-,\\
\mathbf{p}^-(s) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)),\\
\mathbf{q}^-(s) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}),\\
\mathbf{P}^-(s,x) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\big(\mathbf{R}(s)\big)^{-x}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}), x\in\mathbb{Z}^0_-.
\end{aligned}$$

Через $\mathbf{R}(s)$ складніше виражається генератриса $\xi^+(\theta_s)$:

$$\mathbf{g}_+(s,z) = ([\mathbf{g}(s,z)]_+^0 + \mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)} - z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) > 0])\cdot$$
$$\cdot(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(s) - \mathbf{B}))(\mathbf{p}^-(s))^{-1}\mathbf{P}_s,$$
$$\mathbf{p}_x^+(s) = (\mathbf{p}_x(s) + \mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) > x])\cdot$$
$$\cdot\mathbf{B}^{-x-1}(\mathbf{B} - \mathbf{R}(s)))(\mathbf{p}^-(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Згідно з результатами теореми 2.1.5 і основної факторизаційної тотожності для компонент, що виражаються за допомогою операції проектування, справедлива

Теорема 2.1.6 Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу процес на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $|z| \leq 1$ генератриса максимуму $\xi^+(\theta_s)$ має вигляд

$$\mathbf{g}_+(s,z) = s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))(\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}) =$$
$$= s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}[\mathbf{I} + (z-1)(\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1}](\mathbf{I} - \mathbf{B}),$$

$$\mathbf{p}_x^+(s) = \Big(\sum_{r=x}^{+\infty} \mathbf{p}_r(s)\mathbf{B}^{r-x} - \sum_{r=x+1}^{+\infty} \mathbf{p}_r(s)\mathbf{B}^{r-x-1}\mathbf{R}(s)\Big)\cdot$$
$$\cdot\,(\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}),\ x \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathbf{p}_+(s) = s(s\mathbf{B} + \mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{N}))^{-1}(\mathbf{R}(s) - \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{B}), \mathbf{g}_+(s,1) = \mathbf{P}_s.$$

Генератриса доповнення до мінімуму $\check{\xi}(\theta_s)$ задовольняє наступні співвідношення

$$\mathbf{g}^+(s,z) = (\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} - \mathbf{Z}(s))^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{Z}(s))(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1} =$$
$$= (\mathbf{I} - \mathbf{B})[\mathbf{I} + (z-1)(\mathbf{I} - \mathbf{Z}(s))^{-1}](z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}s(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1},$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} - \mathbf{Z}(s))^{-1}\Big(\sum_{r=x}^{+\infty} \mathbf{B}^{r-x}\mathbf{p}_r(s) -$$
$$- \mathbf{Z}(s) \sum_{r=x+1}^{+\infty} \mathbf{B}^{r-x-1}\mathbf{p}_r(s)\Big),\ x \in \mathbb{Z}_+,$$

$\mathbf{p}^+(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{B})((\mathbf{Z}(s))^{-1}-\mathbf{I})^{-1}s(s\mathbf{B}+\mathbf{\Lambda}_2+(\mathbf{\Lambda}_1+\mathbf{N})\mathbf{B})^{-1}, \mathbf{g}^+(s,1) = \mathbf{P}_s$.

В підрозділі 2.2 отримано твердження про розподіли абсолютних екстремумів та їх доповнень в залежності від знаку m_1^0.

Нехай $y_*^z = x(\tau^+(z-1))\,(z \geq 1)$, $y_*^0 = x(0)$ – вкладений ланцюг Маркова з матрицею перехідних ймовірностей $\mathbf{P}_*^1 = \|P\{y_*^1 = r|y_*^0 = k\}\| = \mathbf{P}_*$ та твірною матрицею $\mathbf{Q}_* = \mathbf{P}_* - \mathbf{I}$. Зворотній ланцюг Маркова до вкладеного з матрицею перехідних ймовірностей $\widehat{\mathbf{P}}_* = \|P\{\widehat{y}_*^1 = r|\widehat{y}_*^0 = k\}\|$ і твірною матрицею $\widehat{\mathbf{Q}}_* = \mathbf{S}\mathbf{Q}_*^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{Q}}_* = \widehat{\mathbf{P}}_* - \mathbf{I}$. Позначимо $\widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{P}}_*)^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{Q}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{Q}}_*)^T\mathbf{S}^{-1}$. Також $\mathbf{\Pi}_* = \lim\limits_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q}_*)^{-1} = \|\pi_{*kr}\|$, $\pi_{*kr} = \rho_{*r}$, $k, r = \overline{1,m}$, – стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова y_*^1, а усереднення $\mathbf{M}_*$ по стаціонарному розподілу $\mathbf{\Pi}_*$

$$\mu_*^+ = \sum_{k=1}^m \rho_{*k} \sum_{r=1}^m E[\tau^+(0),\, y_*^1 = r|y_*^0 = k].$$

Відповідно $\widehat{\mathbf{\Pi}}_* = \lim\limits_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{Q}}_*)^{-1} = \|\widehat{\pi}_{*kr}\|$, $\widehat{\pi}_{*kr} = \widehat{\rho}_{*r}$, $k, r = \overline{1,m}$, – стаціонарний розподіл зворотного ланцюга Маркова з твірною матрицею $\widehat{\mathbf{Q}}_*$, а усереднення $\widehat{\mathbf{M}}_*$ по стаціонарному розподілу $\widehat{\mathbf{\Pi}}_*$

$$\widehat{\mu}_*^+ = \sum_{k=1}^m \widehat{\rho}_{*k} \sum_{r=1}^m E[\widehat{\tau}^+(0),\, \widehat{y}_*^1 = r|\widehat{y}_*^0 = k].$$

Тоді справедлива

Теорема 2.2.2. Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова $x(t)$ при $|z| \geq 1$ маємо:

1. Якщо $0 < m_1^0 < \infty$, тоді розподіл абсолютного мінімуму ξ^- невироджений і справедливі наступні граничні співвідношення

$$\mathbf{g}_-(z) = \mathbf{E}z^{\xi^-} = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}_-(s,z) = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}(1-z)(-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{P}_0 =$$

$$= \frac{m_1^0}{\nu_0^+}[\mathbf{\Lambda}_1 + (z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{C})(\mathbf{Q}(1-z^{-1})^{-1} - \mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) - \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_-(z))]^{-1}\mathbf{P}_0,$$

$$\mathbf{g}_-(1) = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{\Pi}_* =$$

$$= \frac{\nu_0^+}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{\Pi}_* = \mathbf{P}_0,$$

$$\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{\Pi}_* = \mathbf{P}_0,\ \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+},$$

де $\nu_0^+ = \sum\limits_{k=1}^{m} \pi_k \nu_k^+$, $\nu_k^+ = (1-c_k)^{-1}$,

$$\mathbf{p}_- = \mathbf{P}\{\xi^- = 0\} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{C}(\mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{N}))^{-1}\mathbf{P}_0,$$

де $\mathbf{R}_0^{-1} = \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}} + \mathbf{C}(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}})$, а $\check{\xi}$ має вироджений розподіл;

2. Якщо $-\infty < m_1^0 < 0$, тоді розподіл ξ^- вироджений, а розподіл $\check{\xi}$ невироджений і визначається наступними граничними співвідношеннями при $s \to 0$

$$\mathbf{g}^+(z) = \mathbf{p}^+[\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^{-1}z]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z),$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi} = x\} = \mathbf{p}^+\mathbf{R}_0^{-x}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0\mathbf{C}),\ x \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathbf{p}^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi} = 0\} = \mathbf{P}_0\mathbf{p}_*^+(0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^{-1}),$$

$$\mathbf{q}^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi} > 0\} = \mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{R}_0^{-1} - \mathbf{C}),$$

$$\mathbf{P}\{\check{\xi} > x\} = \mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{R}_0^{-x}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0\mathbf{C}),\ x \in \mathbb{Z}_0^+,$$

де $\mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{q}_*^+(0) + \mathbf{C}\mathbf{p}_*^+(0)$.

3. Якщо $m_1^0 = 0$, тоді розподіли ξ^-, $\check{\xi}$ вироджені.

Теорема 2.2.3. Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху процес заданий на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $|z| \geq 1$ маємо:

1. При $0 < m_1^0 < \infty$, тоді розподіл $\overline{\xi} = \lim\limits_{s\to 0}(\xi(\theta_s) - \xi^+(\theta_s))$ невироджений і генератриса визначається граничним співвідношенням при $s \to 0$

$$\mathbf{g}^-(z) = \mathbf{E}z^{\overline{\xi}} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}\mathbf{P}_0(1-z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}(-\mathbf{K}(z))^{-1} =$$

$$= \frac{m_1^0}{\nu_0^+}\mathbf{P}_0[\mathbf{\Lambda}_1 + (\mathbf{Q}(1-z^{-1})^{-1} - \mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) - \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_-(z))(z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{C})]^{-1},$$

$$\mathbf{g}^-(1) = \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0 = \frac{\nu_0^+}{\mu_*^+ m_1^0}\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0,$$

$$\frac{1}{\mu_*^+} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+},$$

$$\mathbf{p}^- = \mathbf{P}\{\overline{\xi} = 0\} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}\mathbf{P}_0(\mathbf{\Lambda}_1 + (\mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{N})\mathbf{C})^{-1},$$

де $\mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{P}_*(0) + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_*)\mathbf{C}$, а ξ^+ має вироджений розподіл.

2. При $-\infty < m_1^0 < 0$, тоді розподіл $\overline{\xi}$ вироджений, а розподіл ξ^+ невироджений і визначається наступними співвідношеннями

$$\mathbf{g}_+(z) = (\mathbf{I}-\mathbf{C}z)[\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0^{-1}z]^{-1}\mathbf{p}_+,$$

$$\mathbf{p}_x^+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = x\} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{Z}_0)\mathbf{Z}_0^{-x}\mathbf{p}_+,\ x \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = \mathbf{p}_+^*(0)\mathbf{P}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0^{-1})(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0,$$

$$\mathbf{q}_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = (\mathbf{Z}_0^{-1} - \mathbf{C})(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0,$$

$$\mathbf{P}\{\xi^+ > x\} = (\mathbf{Z}_0^{-1} - \mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0, x \in \mathbb{Z}_+^0,$$

де $\mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{q}_+^*(0) + \mathbf{p}_+^*(0)\mathbf{C}$.

3. Якщо $m_1^0 = 0$, тоді розподіли $\overline{\xi}$, ξ^+ вироджені.

У випадку майже напівнеперервного знизу процесу $y_z^* = x(\tau^-(1-z))\,(z \geq 1)$, $y_0^* = x(0)$ – вкладений ланцюг Маркова з матрицею перехідних ймовірностей $\mathbf{P}_1^* = \|P\{y_1^* = r|y_0^* = k\}\| = \mathbf{P}^*$ та твірною матрицею $\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}^* - \mathbf{I}$. Зворотній ланцюг Маркова до вкладеного з матрицею перехідних ймовірностей $\widehat{\mathbf{P}}^* = \|P\{\widehat{y}_1^* = r|\widehat{y}_0^* = k\}\|\,(k, r = \overline{1,m}\,)$ та твірною матрицею $\widehat{\mathbf{Q}}^* = \mathbf{S}(\mathbf{Q}^*)^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{Q}}^* = \widehat{\mathbf{P}}^* - \mathbf{I}$. $\widehat{\mathbf{P}}_\mathbf{S}^* = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{P}}^*)^T\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{Q}}_\mathbf{S}^* = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{Q}}^*)^T\mathbf{S}^{-1}$; $\widehat{\mathbf{M}}_\mathbf{S}^* = \mathbf{S}(\mathbf{E}[\widehat{\tau}^-(0)])^T\mathbf{S}^{-1}$, $\mathbf{\Pi}^* = \lim\limits_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q}^*)^{-1} = \|\pi_{kr}^*\|$, $\pi_{kr}^* = \rho_r^*$, $k, r = \overline{1,m}$, – стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова, а усереднення $\mathbf{M}^*$ по ρ_r^*

$$\mu_*^- = \sum_{k=1}^m \rho_k^* \sum_{r=1}^m E[\tau^-(0),\, y_1^* = r|y_0^* = k].$$

$\widehat{\mathbf{\Pi}}^* = \lim\limits_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{Q}}^*)^{-1} = \|\widehat{\pi}_{kr}^*\|$, $\widehat{\pi}_{kr}^* = \widehat{\rho}_r^*$, $k, r = \overline{1,m}$, – стаціонарний розподіл зворотного ланцюга, а усереднення $\widehat{\mathbf{M}}^*$ по $\widehat{\rho}_r^*$

$$\widehat{\mu}_*^- = \sum_{k=1}^m \widehat{\rho}_k^* \sum_{r=1}^m E[\widehat{\tau}^-(0),\, \widehat{y}_1^* = r|\widehat{y}_0^* = k].$$

Тоді справедлива

Теорема 2.2.4. Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу процес на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $|z| \leq 1$ генератриси абсолютних екстремумів та їх доповнень мають вигляд:

1. Якщо $-\infty < m_1^0 < 0$, тоді розподіл абсолютного максимуму ξ^+ невироджений і справедливі наступні граничні співвідношення

$$\mathbf{g}_+(z) = \mathbf{E}z^{\xi^+} = \lim_{s\to 0} \mathbf{g}_+(s,z) =$$
$$= \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}(1-z)(-\mathbf{K}(z))^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_0 =$$
$$= \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}[\mathbf{\Lambda}_2 + (\mathbf{I} - \mathbf{B}z^{-1})(\mathbf{Q}(z^{-1}-1)^{-1} - z(\mathbf{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{F}}_1(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_+(z))]^{-1}\mathbf{P}_0,$$

$$\mathbf{g}_+(1) = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^- |m_1^0|}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{\mathbf{S}}^* = \frac{1}{\widehat{\mu}_* |m_1^0|}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{\Pi}^* =$$

$$= \frac{\nu_0^-}{\widehat{\mu}_*^- |m_1^0|}\mathbf{\Pi}^* = \mathbf{P}_0,$$

$$\widehat{\mathbf{\Pi}}_{\mathbf{S}}^* = \mathbf{\Pi}^* = \mathbf{P}_0,\ \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-},\ \nu_0^- = \sum_{k=1}^{m}\pi_k\nu_k^-,\ \nu_k^- = (1-b_k)^{-1},$$

$$\mathbf{p}_x^+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = x\} =,\ x \in \mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}(\mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{N}))^{-1}\mathbf{P}_0,$$

а $\overline{\xi}$ має вироджений розподіл.

2. Якщо $0 < m_1^0 < \infty$, тоді розподіл ξ^+ вироджений, а розподіл $\overline{\xi}$ невироджений і визначається співвідношеннями

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^-(z) = \mathbf{p}^-(z\mathbf{I}-\mathbf{R}(0))^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B}),\\ \check{\mathbf{p}}_x^- = \mathbf{P}\{\overline{\xi} = x\} = \mathbf{p}^-(\mathbf{R}(0))^{-x-1}(\mathbf{R}(0)-\mathbf{B}),\ x \in \mathbb{Z}_-,\\ \mathbf{p}^- = \mathbf{P}\{\overline{\xi} = 0\} = \mathbf{P}_0\mathbf{p}_*^-(0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}(0)),\\ \mathbf{q}^- = \mathbf{P}\{\overline{\xi} < 0\} = \mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(0)-\mathbf{B}),\\ \mathbf{P}\{\overline{\xi} < x\} = \mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(0))^{-x}(\mathbf{R}(0)-\mathbf{B}), x \in \mathbb{Z}_-^0.\end{aligned}$$

3. Якщо $m_1^0 = 0$, тоді розподіли ξ^+, $\overline{\xi}$ вироджені.

Теорема 2.2.5. Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу процес на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $|z| \leq 1$ генератриси абсолютних екстремумів та їх доповнень мають вигляд

1. Якщо $-\infty < m_1^0 < 0$, тоді розподіл $\check{\xi} = \lim\limits_{s\to 0}(\xi(\theta_s) - \xi^-(\theta_s))$ невироджений і його генератриса визначається співвідношенням при

$s \to 0$

$$\mathbf{g}^+(z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}} = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}^+(s,z) =$$
$$= \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}\mathbf{P}_0(1-z)(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(-\mathbf{K}(z))^{-1} =$$
$$= \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}\mathbf{P}_0[\mathbf{\Lambda}_2+(\mathbf{Q}(z^{-1}-1)^{-1}-z(\mathbf{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{F}}_1(z)+\mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_+(z)))(\mathbf{I}-\mathbf{B}z^{-1})]^{-1},$$

$$\mathbf{g}^+(1) = \frac{1}{\mu_*^-}\mathbf{\Pi}^*(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\frac{1}{|m_1^0|}\mathbf{P}_0 = \frac{\nu_0^-}{\mu_*^-|m_1^0|}\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0,\ \frac{1}{\mu_*^-} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-},$$
$$\mathbf{p}^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi}=0\} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}\mathbf{P}_0(\mathbf{\Lambda}_2+(\mathbf{\Lambda}_1+\mathbf{N})\mathbf{B})^{-1},$$

а ξ^- має вироджений розподіл.

2. Якщо $0 < m_1^0 < \infty$, тоді розподіл $\check{\xi}$ вироджений, а розподіл ξ^- невироджений і визначається співвідношеннями

$$\mathbf{g}_-(z) = (z\mathbf{I}-\mathbf{B})[z\mathbf{I}-\mathbf{Z}(0)]^{-1}\mathbf{p}_-,$$

$$\mathbf{p}_x^- = (\mathbf{Z}(0)-\mathbf{B})[\mathbf{Z}(0)]^{-x-1}\mathbf{p}_-,\ x\in\mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}_- = \mathbf{P}\{\xi^-=0\} = \mathbf{p}_-^*(0)\mathbf{P}_0 = (\mathbf{I}-\mathbf{Z}(0))(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_0,$$

$$\mathbf{q}_- = \mathbf{P}\{\xi^-<0\} = \mathbf{q}_-^*(0)\mathbf{P}_0 = (\mathbf{Z}(0)-\mathbf{B})(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_0,$$

$$\mathbf{P}\{\xi^-<x\} = (\mathbf{Z}(0)-\mathbf{B})(\mathbf{Z}(0))^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_0, x\in\mathbb{Z}_-^0.$$

3. Якщо $m_1^0 = 0$, тоді розподіли $\check{\xi}$, ξ^- вироджені.

В підрозділі 2.3 доведено стаціонарність матриць $\mathbf{R}(0)$, $\mathbf{R}_0^{-1}$.

Третій розділ присвячений вивченню розподілів перестрибкових функціоналів для пуассонівських процесів у незмінному середовищі ($m = 1$). В підрозділі 3.1 наведено основні твердження та спрощення позначень для пуассонівських процесів $\xi(t)$ в скалярному випадку, а також розглядається цілозначний пуассонівський процес $\{\xi(t), \, t \geq 0, \, \xi(0) = 0\}$ з кумулянтою

$$k(z) = \lambda_1(p_1(z) - 1) + \lambda_2 \frac{1 - z}{z - b} \, (0 < b < 1, \; \lambda_1, \lambda_2 > 0), \; |m_1^0| < \infty.$$

Генератриса якого

$$g(s, z) = Ez^{\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s - k(z)}, \; |z| = 1.$$

Крім того, для скалярного випадку, замість двоїстої факторизаційної тотожності (2.1.12), маємо

$$g(s, z) = g_+(s, z) g_-(s, z), \; |z| = 1,$$

де $g_\pm(s, z) = Ez^{\xi^\pm(\theta_s)}$ $(|z|^{\pm 1} \leq 1)$, $P_s = s(s - Q)^{-1} = 1$.

Позначимо функціонали, пов'язані з перетином додатного рівня $x \in \mathbb{Z}_0^+$:

$$\tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}, \qquad \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x,$$
$$\gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0), \qquad \gamma_x^+ = \gamma^+(x) + \gamma_+(x).$$

Основними твердженнями даного розділу є співвідношення для генератрис перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів, а саме, генератриси та розподіли $\gamma_k(0)$, $(k = \overline{1,3})$ для всіх значень $m_1^0 = E\xi(1)$ та $\sigma_1^2 = D\xi(1) < \infty$. Встановлено співвідношення для розподілів $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 \geq 0$, та умовні генератриси $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 < 0$.

Теорема 3.2.1 Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (3.1.3) генератриси перестрибків мають вигляд

1. Якщо $m_1^0 = 0$, то

$$E\,[u_1^{\gamma_1(0)}] = [b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) + (1 - b)a_1(1, u_1)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1},$$
$$E\,[u_2^{\gamma_2(0)}] = [b\Pi(0) + (1 - b)a_2(1, u_2)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1},$$
$$E\,[u_3^{\gamma_3(0)}] = [b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1 - b)a_3(1, u_3)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1},$$

де $\widetilde{\Pi}_0^+(z) = \lambda_1 \widetilde{p}_1(z), \widetilde{\Pi}(z) = \sum\limits_{r\geq 0}^{\infty} z^r \Pi(r)$, $\Pi(r) = \sum\limits_{k\geq r+1}^{\infty} \Pi_0^+(k)$, $\Pi(0) = \lambda_1$, $a_1(1,u_1) = u_1\widetilde{\Pi}(u_1)$, $a_2(1,u_2) = \widetilde{\Pi}(u_2)$, $a_3(1,u_3) = \lambda_1 u_3 \widetilde{p}\,'_1(u_3)$.

2. Якщо $m_1^0 < 0$, тоді
$$E\,[u_1^{\gamma_1(0)}, \tau^+(0) < \infty] = p_+ p'_-(0)[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) + (1-b)a_1(1,u_1)],$$
$$E\,[u_2^{\gamma_2(0)}, \tau^+(0) < \infty] = p_+ p'_-(0)[b\Pi(0) + (1-b)a_2(1,u_2)],$$
$$E\,[u_3^{\gamma_3(0)}, \tau^+(0) < \infty] = p_+ p'_-(0)[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1-b)a_3(1,u_3)].$$

3. Якщо $m_1^0 > 0$, тоді
$$E\,[u_1^{\gamma_1(0)}] = z_0^{-1} p'_+(0) p_-[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) + (z_0-b)a_1(z_0,u_1)],$$
$$E\,[u_2^{\gamma_2(0)}] = z_0^{-1} p'_+(0) p_-[b\Pi(0) + (z_0-b)a_2(z_0,u_2)],$$
$$E\,[u_3^{\gamma_3(0)}] = z_0^{-1} p'_+(0) p_-[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (z_0-b)a_3(z_0,u_3)],$$
де $a_1(z,u_1) = \frac{u_1}{u_1-z}(\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) - \widetilde{\Pi}_0^+(z))$, $a_2(z,u_2) = \frac{1}{1-zu_2}(\widetilde{\Pi}_0^+(1) - \widetilde{\Pi}_0^+(zu_2))$, $a_3(z,u_3) = \frac{1}{1-z}(\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) - \widetilde{\Pi}_0^+(zu_3))$.

Теорема 3.3.1. Якщо процес $\xi(t)$ має кумулянту (3.1.3), тоді

1. При $m_1^0 = 0$
$$E\,u_1^{\gamma_1(\infty)} = \left[bu_1\widetilde{\Pi}(u_1) + \lambda_1 \frac{u_1(1-b)}{u_1-1}\left(\widetilde{p}\,'_1(u_1) - \widetilde{p}\,'_1(1)\right)\right] m^0(1),$$
$$E\,u_2^{\gamma_2(\infty)} = \left[b\widetilde{\Pi}(u_2) + (1-b)u_2\widetilde{\Pi}\,'(u_2)\right] m^0(1),$$
$$E\,u_3^{\gamma_3(\infty)} = \lambda_1\left[bu_3\widetilde{p}\,'_1(u_3) + \frac{1-b}{2}u_3^2\widetilde{p}\,''_1(u_3)\right] m^0(1),$$
де $m^0(1) = \frac{1}{\sigma_1^2(1-b)}$.

2. Якщо $m_1^0 > 0$, тоді
$$E\,u_1^{\gamma_1(\infty)} = p_- z_0^{-1}[ba_1(1,u_1) + (z_0-b)u_1\frac{a_1(1,u_1) - a_1(1,z_0)}{u_1-z_0}] m_+(1),$$
$$E\,u_2^{\gamma_2(\infty)} = p_-[b\widetilde{\Pi}(u_2) + \frac{z_0-b}{z_0-1}\left(\widetilde{\Pi}(z_0u_2) - \widetilde{\Pi}(u_2)\right)] m_+(1),$$
$$E\,u_3^{\gamma_3(\infty)} = p_- z_0^{-1}[ba_3(1,u_3) + (z_0-b)\frac{a_3(1,u_3) - a_3(z_0^{-1}, u_3z_0)}{1-z_0}] m_+(1),$$

де $m_+(1) = \frac{1}{m_1^0}$.

3. Якщо $m_1^0 < 0$, тоді умовні генератриси

$$E\left[u_1^{\gamma_1(\infty)}|\tau^+(\infty) < \infty\right] = [bu_1\widetilde{\Pi}(u_1) + \lambda_1\frac{u_1(1-b)}{u_1-1}\cdot$$
$$\cdot(\widetilde{p}'_1(u_1) - \widetilde{p}'_1(1))]m_-(1),$$
$$E\left[u_2^{\gamma_2(\infty)}|\tau^+(\infty) < \infty\right] = \left[b\widetilde{\Pi}(u_2) + (1-b)u_2\widetilde{\Pi}'(u_2)\right)]m_-(1),$$
$$E\left[u_3^{\gamma_3(\infty)}|\tau^+(\infty) < \infty\right] = \lambda_1[bu_3\widetilde{p}'_1(u_3) + \frac{1-b}{2}u_3^2\widetilde{p}''_1(u_3)]m_-(1),$$

де $m_-(1) = p'_-(0)[E\xi^+]^{-1}$.

В четвертому розділі отримано співвідношення для твірного перетворення спільної генератриси функціоналів $\{\tau^+(x),\ \gamma^+(x),\ \gamma_+(x),\ \gamma_x^+\}$ та деякі допоміжні твердження, згідно з якими отримується

Теорема 4.2.1. Якщо $Y(t)$ майже напівнеперервний знизу процес з на ланцюгу Маркова, тоді

1. При $m_1^0 > 0$,

$$\mathbf{E}[u_1^{\gamma_1(\infty)}] = \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Big[\mathbf{a}_1(1,u_1)+$$
$$+(\mathbf{I} - u_1^{-1}\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\left(u_1^x - (\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\right)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}(x)\Big],$$

$$\mathbf{E}[u_2^{\gamma_2(\infty)}] = \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Big[\mathbf{a}_2(1,u_2)+$$
$$+(\mathbf{I} - u_2\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}u_2^x\sum_{l=x+1}^{\infty}\left(\mathbf{I} - (\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x u_2^{l-x}\right)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big],$$

$$\mathbf{E}[u_3^{\gamma_3(\infty)}] = \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Big[\mathbf{a}_3(1,u_3)+$$
$$+(\mathbf{p}_*^-(0))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{l=x+1}^{\infty}\left(u_2^l\mathbf{I} - (\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\right)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big],$$

де $\mathbf{m}_+(1) = \frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0$, $\mathbf{R}(0) = \mathbf{q}_-^*(0) + \mathbf{B}\mathbf{p}_-^*(0)$, $\mathbf{\Pi}(x) = \sum\limits_{l\geq x+1} \mathbf{\Pi}_0^+(l)$, $\mathbf{\Pi}_0^+(l) = \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{p}_1(l) + \mathbf{N}\mathbf{f}(l)$, $\mathbf{a}_1(1, u_1) = \frac{u_1}{u_1-1}(\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_1) - \widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(1))$, $\mathbf{a}_2(1, u_2) = \widetilde{\mathbf{\Pi}}(u_2), \mathbf{a}_3(1, u_3) = u_3(\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_3))'$.

2. При $m_1^0 = 0,\ \sigma_0^2 < \infty$,

$$\mathbf{E}[u_1^{\gamma_1(\infty)}] = \mathbf{m}^0(1)\Bigg[\mathbf{a}_1(1, u_1) + (\mathbf{I} - u_1^{-1}\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\Big(u_1^x - (\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\Big)(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{P}^*\mathbf{\Pi}(x)\Bigg],$$

$$\mathbf{E}[u_2^{\gamma_2(\infty)}] = \mathbf{m}^0(1)\Bigg[\mathbf{a}_2(1, u_2) + (\mathbf{I} - u_2\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty} u_2^x \sum_{l=x+1}^{\infty}\Big(\mathbf{I} - (\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x u_2^{l-x}\Big)(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{P}^*\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Bigg],$$

$$\mathbf{E}[u_3^{\gamma_3(\infty)}] = \mathbf{E}[u_3^{\gamma_1(\infty)+\gamma_2(\infty)}],$$

де $\mathbf{m}^0(1) = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}$, $\mathbf{R}(0) = \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}}^* + \mathbf{B}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}}^*)$.

3. При $m_1^0 < 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 1}\mathbf{E}\Bigg[u_1^{\gamma^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}\, u_2^{\gamma_+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}\, u_3^{\gamma^+_{\widetilde{\nu}_\varepsilon}},\ \tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon) < \infty\Bigg] = \mathbf{0}.$$

Розділ 1

Гратчасті пуассонівські процеси на ланцюгу Маркова

1.1 Основні поняття та матричні позначення. Матричний аналог основної факторизаційної тотожності

Нехай $\mathbf{Y}(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ двовимірний марковський процес зі значеннями в фазовому просторі $\{\mathbb{Z} \times \mathbb{E}\}$ заданий на повному імовірнісному просторі $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, на якому визначено потік σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ ($\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, $0 \leq s \leq t$). Припустимо також, що компонента $x(t)$ - скінченний ергодичний ланцюг Маркова із множиною станів $\mathbb{E} = \{1, ..., m\}$ та матрицею перехідних імовірностей

$$\mathbf{P}(t) = \|P\{x(t) = r|x(0) = k\}\|_{k,r\in\mathbb{E}} = e^{\mathbf{Q}t}, \tag{1.1.1}$$

і твірною матрицею $\mathbf{Q}$ (див. [6]). Для детальнішого опису $\xi(t)$, "керованого" ланцюгом Маркова $x(t)$ з m станами в $\mathbb{E}$, слід задати набір пуассонівських процесів $\{\xi_n(t)\}_{n=1}^m$ з довільним розподілом стрибків у $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ та послідовність незалежних сукупностей однаково розподілених цілозначних випадкових величин $\{\chi_{kr}^{(n)}\}_{n\geq 1}$ ($k, r \in \mathbb{E}$). Як і для випадку дійснозначного $\xi(t)$ (див.[31], [27], [36]), $\mathbf{Y}(t)$ є марковським адитивним процесом відносно $\{\mathcal{F}_t\}$– σ-алгебри подій, породжених $\{\mathbf{Y}(s),\, 0 \le s \le t\}$, а компонента $\xi(t)$– процесом з умовно незалежними приростами. В [31] $\mathbf{Y}(t)$ називався марковським процесом "однородным по компоненте $\xi(t)$".

Позначимо матрицю $\mathbf{\Lambda} = \|\delta_{kr}\lambda_k\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $\delta_{kr} = I_{\{k=r\}}$, де λ_k - інтенсивності стрибків пуассонівських процесів $\{\xi_k(t)\}_{k=1}^m$ з розподілом стрибків $\mathbf{p}(x) = \|\delta_{kr}P\{\xi_k^{(1)} = x\}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$. $\mathbf{N} = \|\delta_{kr}n_k\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, де $\{n_k > 0, k \in \mathbb{E}\}$ – параметри показниково розподілених випадкових величин $\zeta_k^{(\cdot)}$ – часів перебування $x(t)$ в стані k. Матриця $\mathbf{P} = \|p_{kr}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, $p_{kr} = P\{x(\sigma_n+0) = r/x(\sigma_n) = k\}$ є матрицею перехідних ймовірностей вкладеного ланцюга $y_n = x(\sigma_n+0)$ зі стаціонарним розподілом $\pi = (\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m)$, де σ_n - момент n-ої зміни стану $x(t)$. Матриця Q називається інфінітезимальною (твірною) і має вигляд

$$\mathbf{Q} = \mathbf{N}(\mathbf{P} - \mathbf{I}).$$

Перша компонента $\{\xi(t),\, t \ge 0\}$ визначається сукупністю незалежних однорідних процесів з генератрисами

$$g_r(t,z) = Ez^{\xi_r(t)} = e^{tk_r(z)},\ |z| = 1,\ \xi_r(0) = 0.$$

Сукупність незалежних випадкових величин $\{\chi_{kr}\}_{k,r=1}^m$, що не залежать від $\xi_r(t)$ та $x(t)$, визначаються розподілом стрибків $\chi_{kr}^{(\cdot)}$ на переходах ланцюга Маркова $x(t)$, $\mathbf{f}(x) = \|p_{kr}P\{\chi_{kr}^{(\cdot)} = x\}\|_{k,r\in\mathbb{E}}$, незалежним від верхнього індексу, $\widetilde{\mathbf{f}}(z) = \|p_{kr}Ez^{\chi_{kr}^{(\cdot)}}\|$, $\widetilde{\mathbf{f}}(1) = \mathbf{P}$, якщо $P\{\chi_{kr}^{(\cdot)} = x\} = 0$ при $x \ne 0$ або $P\{\chi_{kr}^{(\cdot)} = 0\} = 1$, тобто при відсутності стрибків $\chi_{kr}^{(\cdot)}$.

Розподіл 1-го сумарного стрибка процесу $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова позначимо через $\mathbf{\Pi}_0(x) = \mathbf{\Lambda}\mathbf{p}(x) + \mathbf{N}\mathbf{f}(x)$, що є дискретним аналогом стрибкової міри Леві $\Pi(dx) = \lambda dF(x)$ для числового складного пуассонівського процесу (див. (1.7) в [30]).

Якщо $\xi(0)=0$, то значення $\xi(t)$ можна описати таким чином:
$\xi(t)=\xi_k(t),\ 0\le t<\zeta_k^{(1)}=\sigma_1,\ P\{\zeta_k^{(1)}>t\}=e^{-n_k t}$ $(n_k>0,\ k=\overline{1,m})$,
$\xi(\sigma_1)=\xi_k(\sigma_1-0)+\chi_{kr}^{(1)}$, якщо σ_1 – момент 1-го переходу ЛМ із k в r,
$\xi(t)=\xi(\sigma_1)+\xi_r(t)-\xi_r(\sigma_1),\ \sigma_1\le t<\sigma_1+\zeta_r^{(2)}=\sigma_2$, якщо $x(t)$ в стані r,
$\xi(\sigma_2)=\xi_l(\sigma_2-0)+\chi_{rl}^{(2)}$, якщо $x(t)$ переходить із r в l,
$\xi(t)=\xi(\sigma_2)+\xi_l(t)-\xi_l(\sigma_2),\ \sigma_2\le t<\sigma_2+\zeta_l^{(3)}=\sigma_3$,
де $\xi_r(t)-\xi_r(\sigma_1)\doteq\xi_r(t-\sigma_1)$, $\xi_l(t)-\xi_l(\sigma_2)\doteq\xi_l(t-\sigma_2)$,...; $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots$ – відповідно моменти 1-ї, 2-ї, 3-ї, ... зміни станів ЛМ $x(t)$, послідовність яких позначимо $\{\sigma_n\}_{n\ge1}$.

В силу однорідності $\mathbf{Y}(t)$ за часом по компоненті $\xi(t)$ для опису розподілу цього процесу достатньо розглянути матричну твірну функцію

$$\mathbf{g}_t(z)=\mathbf{E}z^{\xi(t)}=e^{t\mathbf{K}(z)},\ |z|=1,$$

де $\mathbf{K}(z)=\ln\mathbf{E}z^{\xi(1)}$ будемо називати кумулянтою процесу і вона має наступний вигляд

$$\mathbf{K}(z)=\ln\mathbf{E}z^{\xi(t)}=\sum_{x\neq0}(z^x-1)\mathbf{\Pi}_0(x)+\mathbf{Q} \tag{1.1.2}$$

або в термінах твірних функцій

$$\mathbf{K}(z)=\mathbf{\Lambda}(\widetilde{\mathbf{p}}(z)-\mathbf{I})+\mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{f}}(z)-\mathbf{P})+\mathbf{Q}. \tag{1.1.3}$$

Означення 1.1.1. Введений таким чином процес $Y(t)=\{\xi(t),x(t)\}$ називається складним гратчастим процесом Пуассона з незалежними приростами, заданим на скінченному ланцюгу Маркова.

Означення 1.1.2. Складний гратчастий процес Пуассона $Y(t)$, заданий на ланцюгу Маркова, називається майже напівнеперервним зверху, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає додатний рівень лише додатними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(z) = (\mathbf{\Lambda_1} + \mathbf{NP})[(\mathbf{I} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} - \mathbf{I}] + \\ + \mathbf{\Lambda_2} \sum_{x<0} (z^x - 1)\mathbf{p}_2(x) + \mathbf{N} \sum_{x<0} (z^x - 1)\mathbf{f}(x) + \mathbf{Q}, \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

або

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(z) = (\mathbf{\Lambda_1} + \mathbf{NP})(z-1)(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} + \\ + \mathbf{\Lambda_2}[\widetilde{\mathbf{p}}_2(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{N}[\widetilde{\mathbf{f}}_-(z) - \mathbf{P}] + \mathbf{Q}, \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

де $\mathbf{C} = \|\delta_{kr} c_k\|$, $0 < c_k < 1$, c_k – параметри геометрично розподілених додатних стрибків процесу $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$, $k = \overline{1, m}$, а $\widetilde{\mathbf{f}}_-(z) = \|p_{kr} E[z^{\chi_{kr}}, \chi_{kr} < 0]\|$, $k, r = \overline{1, m}$.

Для простоти ми обмежимось випадком, коли кумулянта $\mathbf{K}(z)$ має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[(\mathbf{I} - \mathbf{C})z(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} - \mathbf{I}] + \\ + \mathbf{\Lambda_2} \sum_{x<0} (z^x - 1)\mathbf{p}_2(x) + \mathbf{N} \sum_{x<0} (z^x - 1)\mathbf{f}(x) + \mathbf{Q}, \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

або

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}(z-1)(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} + \\ + \mathbf{\Lambda_2}[\widetilde{\mathbf{p}}_2(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{N}[\widetilde{\mathbf{f}}_-(z) - \mathbf{P}] + \mathbf{Q}. \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Означення 1.1.3. Складний гратчастий процес Пуассона $Y(t)$, заданий на ланцюгу Маркова, називається майже напівнеперервним знизу, якщо компонента $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише від'ємними геометрично розподіленими стрибками, тобто кумулянта якого має вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1} \sum_{x>0} (z^x - 1)\mathbf{p}_1(x) + \\ +(\mathbf{\Lambda_2} + \mathbf{NP})[(\mathbf{I} - \mathbf{B})(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{N} \sum_{x>0} (z^x - 1)\mathbf{f}(x) + \mathbf{Q}, \tag{1.1.8}$$

або

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[\widetilde{\mathbf{p}}_1(z) - \mathbf{I}] + (\mathbf{\Lambda_2} + \mathbf{NP})(1 - z)(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} + \\ +\mathbf{N}[\widetilde{\mathbf{f}}_+(z) - \mathbf{P}] + \mathbf{Q}, \tag{1.1.9}$$

де $\mathbf{B} = \|\delta_{kr} b_k\|$, $0 < b_k < 1$, b_k – параметри геометрично розподілених від'ємних стрибків процесу $\xi(t)$, якщо $x(t) = k$, $k = \overline{1, m}$, а $\widetilde{\mathbf{f}}_+(z) = \|p_{kr} E[z^{\chi_{kr}}, \chi_{kr} > 0]\|$, $k, r = \overline{1, m}$.

Для простоти ми обмежимось випадком, коли кумулянта $\mathbf{K}(z)$ має вигляд

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1} \sum_{x>0} (z^x - 1)\mathbf{p}_1(x) + \\ +\mathbf{\Lambda_2}[(\mathbf{I} - \mathbf{B})(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}] + \mathbf{N} \sum_{x>0} (z^x - 1)\mathbf{f}(x) + \mathbf{Q}, \tag{1.1.10}$$

або

$$\mathbf{K}(z) = \mathbf{\Lambda_1}[\widetilde{\mathbf{p}}_1(z) - \mathbf{I}] + \mathbf{\Lambda_2}(1 - z)(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} + \\ +\mathbf{N}[\widetilde{\mathbf{f}}_+(z) - \mathbf{P}] + \mathbf{Q}. \tag{1.1.11}$$

$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{\Lambda}_2$, $\mathbf{\Lambda}_1 = \|\delta_{kr}\lambda_k^{(1)}\|$, $\mathbf{\Lambda}_2 = \|\delta_{kr}\lambda_k^{(2)}\|$, де $\lambda_k^{(1)}$ – інтенсивності додатніх стрибків $\xi_k^{(1)} > 0$, $\lambda_k^{(2)}$ – інтенсивності від'ємних стрибків $\xi_k^{(1)} < 0$;

$$\mathbf{p}(x) = \begin{cases} \mathbf{p}_1(x), \ \xi_k^{(1)} > 0, \\ \mathbf{p}_2(x), \ \xi_k^{(1)} < 0; \end{cases}$$

$$\widetilde{\mathbf{p}}(z) = \begin{cases} \widetilde{\mathbf{p}}_1(z), \ \xi_k^{(1)} > 0, \\ \widetilde{\mathbf{p}}_2(z), \ \xi_k^{(1)} < 0. \end{cases}$$

Означення 1.1.4. Складний гратчастий процес Пуассона $\mathbf{Y}(t)$, заданий на ланцюгу Маркова, називається напівнеперервним зверху (знизу) якщо $\mathbf{C} = 0$ ($\mathbf{B} = 0$), тобто додатні (від'ємні) стрибки процесу одиничні.

Введемо позначення основних функціоналів для $\xi(t)$:
функціонали, що характеризують екстремуми процесу на інтервалі $[0, t]$ та їх доповнення:

$$\begin{aligned} \xi^+(t) &= \sup_{0\le u\le t} \xi(u), \qquad \overline{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^+(t), \\ \xi^-(t) &= \inf_{0\le u\le t} \xi(u), \qquad \check{\xi}(t) = \xi(t) - \xi^-(t), \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

та абсолютні екстремуми

$$\xi^\pm = \sup(inf)_{0\le u\le\infty}\xi(u)$$

функціонали, пов'язані з перетином додатного рівня $x \in \mathbb{Z}_0^+$:

$$\begin{aligned} \tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) > x\}, \qquad \gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x)) - x, \\ \gamma_+(x) = x - \xi(\tau^+(x) - 0), \qquad \gamma_x^+ = \gamma^+(x) + \gamma_+(x), \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

та функціонали, пов'язані з перетином від'ємного рівня $x \in \mathbb{Z}_-^0$:

$$\begin{aligned} \tau^-(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) < x\}, \qquad \gamma^-(x) = x - \xi(\tau^-(x)), \\ \gamma_-(x) = \xi(\tau^-(x) - 0) - x, \qquad \gamma_x^- = \gamma^-(x) + \gamma_-(x). \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

З останніх позначень випливає, що:

$$\xi(\tau^+(x) - 0) = x - \gamma_+(x),\ \xi(\tau^+(x) + 0) = x + \gamma^+(x),$$

$$\gamma^+(x) = \xi(\tau^+(x) + 0) - \xi(\tau^+(x) - 0).$$

Дослідження подібних функціоналів в теорії масового обслуговування і в теорії ймовірностей базується на аналізі рівнянь, або систем рівнянь на півосі. В монографіях Ф. Д. Гахова [9] та Б. Нобла [60] використовується метод Вінера-Хопфа для дослідження цих рівнянь. В граничних задачах для випадкових блукань в [5]-[6] використовуються 1-ша та 2-га факторизаційні тотожності А. А. Боровкова. Для систем рівнянь типу згортки в роботах И. Ц. Гохберга, М. Г. Крейна [22], М. Г. Крейна [47], вводиться поняття факторизації деякого класу аналітичних функцій на осі для інтегральних перетворень функцій. При дослідженні систем різницевих рівнянь в [22] вводиться поняття факторизації матричних аналітичних функцій на одиничному колі та необхідні для нього поняття кілець та півкілець твірних перетворень

Для твірних перетворень дискретних матричних послідовностей $\{\mathbf{R}_x, x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ вводиться спочатку поняття кільця та розширеного кільця. А саме, позначимо кільце твірних функцій $\widetilde{\mathbf{R}}(z)$

$$\mathbb{L} : \{\widetilde{\mathbf{R}}(z) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} z^x \mathbf{R}_x, \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \mid \mathbf{R}_x \mid < \infty, |z| = 1\}$$

із звичайною операцією множення та звичайною операцією додавання. А розширення кільця $\mathbb{L}$:

$$\mathbb{L}_{\mathbf{I}} : \{\mathbf{I} \pm \widetilde{\mathbf{R}}(z) = \widetilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{I}}(z),\ \det \widetilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{I}}(z) \neq 0\}.$$

Аналогічно позначимо підкільце на $|z|^{\pm 1} \leq 1$ та їх розширення

$$\mathbb{L}^{\pm} : \left\{ \widetilde{\mathbf{R}}_{\pm}(z) = \sum_{x=0}^{\pm\infty} z^x \mathbf{R}_x \right\}, \mathbb{L}_{\mathbf{I}}^{\pm} : \{\mathbf{I} \pm \widetilde{\mathbf{R}}_{\pm}(z), \det[\mathbf{I} \pm \widetilde{\mathbf{R}}_{\pm}(z)] \neq 0\},$$

які допускають аналітичне продовження на $|z| \geq 1$ ($|z| \leq 1$) $\widetilde{\mathbf{R}}_{\pm}^{\pm 1}(z) \in \mathbb{L}_{\mathbf{I}}^{\pm}$. Визначимо також операції проектування

$$[\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+ = \sum_{x=1}^{+\infty} z^x \mathbf{R}_x, \qquad [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_- = \sum_{x=-1}^{-\infty} z^x \mathbf{R}_x,$$

$$[\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+^0 = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{R}_x, \qquad [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_-^0 = \sum_{x=-\infty}^{0} z^x \mathbf{R}_x,$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}(z) = [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+ + [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_-^0 = [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_- + [\widetilde{\mathbf{R}}(z)]_+^0.$$

Основна мета нашої роботи полягає у вивченні розподілу граничних функціоналів (1.1.12)-(1.1.13) для цілочислових майже напівнеперервних пуассонівських процесів. Дослідження цих функціоналів основується на їх стохастичних співвідношеннях при $x \in \mathbb{Z}_0^+$:

$$\tau_{kr}^+(x) \doteq \begin{cases} \zeta_k' + \tau_{kr}^+(x - \xi_k^{(1)}),\ \zeta_k' < \zeta_k,\ \xi_k^{(1)} \leq x, \\ \zeta_k',\ \zeta_k' < \zeta_k,\ \xi_k^{(1)} > x, \\ \zeta_k + \tau_{jr}^+(x - \chi_{kj}),\ \zeta_k' > \zeta_k,\ \chi_{kj} \leq x, \\ \zeta_k,\ \zeta_k' > \zeta_k,\ \chi_{kr} > x; \end{cases} \tag{1.1.15}$$

$$[\gamma_1(x)]_{kr} = \gamma_{kr}^+(x) \doteq \begin{cases} \gamma_{kr}^+(x - \xi_k^{(1)}),\ \zeta_k' < \zeta_k,\ \xi_k^{(1)} \leq x, \\ \xi_k^{(1)} - x,\ \zeta_k' < \zeta_k,\ \xi_k^{(1)} > x, \\ \gamma_{jr}^+(x - \chi_{kj}),\ \zeta_k' > \zeta_k,\ \chi_{kj} \leq x, \\ \chi_{kr} - x,\ \zeta_k' > \zeta_k,\ \chi_{kr} > x; \end{cases} \tag{1.1.16}$$

$$[\gamma_2(x)]_{kr} = [\gamma_+(x)]_{kr} \doteq \begin{cases} [\gamma_+(x - \xi_k^{(1)})]_{kr},\ \zeta_k' < \zeta_k,\ \xi_k^{(1)} \leq x, \\ x,\ \zeta_k' < \zeta_k,\ \xi_k^{(1)} > x, \\ [\gamma_+(x - \chi_{kj})]_{jr},\ \zeta_k' > \zeta_k,\ \chi_{kj} \leq x, \\ x,\ \zeta_k' > \zeta_k,\ \chi_{kr} > x; \end{cases} \tag{1.1.17}$$

$$[\gamma_3(x)]_{kr} = [\gamma_x^+]_{kr} \doteq \begin{cases} [\gamma_{x-\xi_k^{(1)}}^+]_{kr},\ \zeta_k' < \zeta_k,\ \xi_k^{(1)} \leq x, \\ \xi_k^{(1)},\ \zeta_k' < \zeta_k,\ \xi_k^{(1)} > x, \\ \left[\gamma_{x-\chi_{kj}}^+\right]_{jr},\ \zeta_k' > \zeta_k,\ \chi_{kj} \leq x, \\ \chi_{kr},\ \zeta_k' > \zeta_k,\ \chi_{kr} > x. \end{cases} \tag{1.1.18}$$

Ці граничні функціонали при $x \in \mathbb{Z}_0^+$ називаються верхніми. Аналогічні стохастичні співвідношення мають місце для нижніх граничних функціоналів (1.1.14) при $x \in \mathbb{Z}_-^0$.

В подальших викладках для спрощення позначень інтегральних та твірних перетворень будемо користуватися відповідно показниково та геометрично розподіленими випадковими величинами θ_s, $\widetilde{\nu}_\varepsilon$:

$$P\{\theta_s > t\} = e^{-st},\ s > 0,\ t \geq 0,$$

$$P\{\widetilde{\nu}_\varepsilon = k\} = (1-\varepsilon)\varepsilon^k,\ 0 < \varepsilon < 1,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Після застосування інтегрального перетворення Лапласа-Карсона по t до $\mathbf{P}(t)$ та $\mathbf{g}_t(z)$ отримаємо

$$\mathbf{P}_s = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{P}(t)dt = s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1},\ \lim_{s\to 0}\mathbf{P}_s = \mathbf{P}_0. \tag{1.1.19}$$

$$\mathbf{g}(s,z) = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\mathbf{g}_t(z)dt = \mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)} = s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}. \tag{1.1.20}$$

На основі стохастичних співвідношень (1.1.15)-(1.1.18) встановлюються інтегральні рівняння, які після перетворень Лапласа-Карсона зводяться до матричного операторного рівняння, зокрема, для $\mathbf{P}_t(x) = \|P_{kr}\{\xi(t) = x)\}\|$ рівняння має вигляд

$$\mathbf{P}_t(x) = \mathbf{I}_{\{x=0\}}e^{-(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N})t} + \int_0^t \sum_y e^{-(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N})u}\mathbf{\Pi}_0(y)\mathbf{P}_{t-u}(x-y)du. \tag{1.1.21}$$

Після перетворення Лапласа-Карсона по t з (1.1.21) випливає матрично-операторне рівняння для $\mathbf{P}(s,x) = \|P_{kr}\{\xi(\theta_s) = x\}\|$:

$$\mathbf{L}_s\mathbf{P}(s,x) = s\mathbf{I}_{\{x=0\}}, x \in \mathbb{Z},\ \mathbf{L}_s = s\mathbf{I} - \mathbf{L}. \tag{1.1.22}$$

Твірний оператор $\mathbf{L}$ визначається ядром $\mathbf{\Pi}_0(x)$ на класі обмежених, вимірних в $\{\mathbb{Z}\times\mathbb{E}\}$ матричних функцій $\mathcal{F}(x)$

$$\mathbf{L}\mathcal{F}(x) = \sum_y \mathbf{\Pi}_0(y)[\mathcal{F}(x-y) - \mathcal{F}(x)] + \mathbf{Q}\mathcal{F},\ x \in \mathbb{Z}. \tag{1.1.23}$$

Слід відзначити, що після твірного перетворення по x:

$$\mathbf{L}\mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathbf{K}(z)\widetilde{\mathcal{F}}(x).$$

Тому кумулянту $\mathbf{K}(z)$ називають символом оператора $\mathbf{L}$ (див. [41], [46]). $s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z)$ – символом оператора $\mathbf{L}_s = s\mathbf{I}-\mathbf{L}$. Отже, з (1.1.22) після твірного перетворення по x одержимо

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))\mathbf{g}(s,z)=s\mathbf{I},\, \mathbf{g}(s,z)=s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}.$$

Розподіли екстремумів процесу в момент θ_s позначимо

$$\mathbf{P}_+(s,x)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)<x\}=\|P\{\xi^+(\theta_s)<x,\, x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\|, x\in\mathbb{Z}^+,$$

$$\mathbf{P}^+(s,x)=\mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s)<x\}=\|P\{\check{\xi}(\theta_s)<x,\, x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\|, x\in\mathbb{Z}^+,$$

$$\mathbf{P}_-(s,x)=\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)<x\},\, \mathbf{P}^-(s,x)=\mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)<x\},\, x\in\mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}_x^+(s)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)=x\}=\|P\{\xi^+(\theta_s)=x,\ x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\|,\, x\in\mathbb{Z}^+,$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s)=\mathbf{P}\{\,\check{\xi}(\theta_s)=x\},\ x\in\mathbb{Z}^+,$$

$$\mathbf{p}_x^-(s)=\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)=x\},\ \check{\mathbf{p}}_x^-(s)=\mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)=x\},\, x\in\mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}_x(s)=\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)=x\},\ x\in\mathbb{Z},$$

$$\mathbf{p}_+(s)=\mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s)=0\},\ \mathbf{p}_-(s)=\mathbf{P}\{\xi^-(\theta_s)=0\},$$

$$\mathbf{p}^-(s)=\mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)=0\},\, \mathbf{p}^+(s)=\mathbf{P}\{\,\check{\xi}(\theta_s)=0\},$$

$$\mathbf{P}(s,x)=\mathbf{P}\{\xi(\theta_s)<x\},\ \overline{\mathbf{P}}(s,x)=\mathbf{P}_s-\mathbf{P}(s,x),$$

$$\mathbf{q}_\pm(s)=\mathbf{P}\{\,\pm\,\xi^\pm(\theta_s)>0\}=\mathbf{P}_s-\mathbf{p}_\pm(s),$$

$$\mathbf{q}^-(s)=\mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s)<0\}=\mathbf{P}_s-\mathbf{p}^-(s),\, \mathbf{q}^+(s)=\mathbf{P}\{\,\check{\xi}(\theta_s)>0\}=\mathbf{P}_s-\mathbf{p}^+(s),$$

$$\mathbf{p}_\pm^*(s)=\mathbf{p}_\pm(s)\mathbf{P}_s^{-1},\ \mathbf{p}_*^\pm(s)=\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^\pm(s),$$

$$\mathbf{q}_\pm^*(s)=\mathbf{q}_\pm(s)\mathbf{P}_s^{-1}=\mathbf{I}-\mathbf{p}_\pm^*(s),\ \mathbf{q}_*^\pm(s)=\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^\pm(s)=\mathbf{I}-\mathbf{p}_*^\pm(s).$$

Їх відповідні матричні твірні функції позначимо

$$\mathbf{g}(s,z)=\mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)}=\|\mathbf{E}[z^{\xi(\theta_s)},x(\theta_s)=r|x(0)=k\}\|=\|E_{kr}[z^{\xi(\theta_s)}]\|,$$

$$\mathbf{g}_+(s,z)=\mathbf{E}z^{\xi^+(\theta_s)},\mathbf{g}_-(s,z)=\mathbf{E}z^{\xi^-(\theta_s)},\mathbf{g}^+(s,z)=\mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)},\mathbf{g}^-(s,z)=\mathbf{E}z^{\overline{\xi}(\theta_s)}.$$

Надалі будемо позначати

$$\mathbf{T}_*^{\pm}(s,x)=\mathbf{E}[e^{-s\tau^{\pm}(x)},\ \tau^{\pm}(x)<\infty]=$$
$$=\|E[e^{-s\tau^{\pm}(x)},\ x(\tau^{\pm}(x))=r|x(0)=k,\tau^{\pm}(x)<\infty]\|,$$

$$\mathbf{T}_*^{\pm}(s,x,z)=\mathbf{E}[e^{-s\tau^{\pm}(x)}z^{\gamma^{\pm}(x)},\tau^{\pm}(x)<\infty]=$$
$$=\|E[e^{-s\tau^{\pm}(x)}z^{\gamma^{\pm}(x)},\ x(\tau^{\pm}(x))=r|x(0)=k,\tau^{\pm}(x)<\infty]\|,$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}_*^{+}(s,\varepsilon,z)=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{+\infty}\varepsilon^x\mathbf{T}_*^{+}(s,x,z)=\mathbf{E}[e^{-s\tau^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}z^{\gamma^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)},\tau^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)<\infty],$$

беручи до уваги, що генератриси $\tau^{\pm}(x)$ розглядаються на ланцюгах $x(\tau^{\pm}(x))$, відповідно. Необхідно зазначити, що множина значень ланцюга $x(\tau^{\pm}(x))$ може звузитися за рахунок недосяжності рівня $x\in\mathbb{Z}_0^+$ $(x\in\mathbb{Z}_-^0)$ процесом $\xi(t)$. Тому будемо накладати наступну умову:

$$\forall k\in\mathbb{E}:\ P\{y_x^*=k\}=P\{x(\tau^{\pm}(x))=k\}>0.$$

Лема 1.1.1. *(Аналог леми 3.1. в [27] для $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова в $\mathbb{R}^1$.) Зв'язок між розподілами $\xi^{\pm}(\theta_s)$ та генератрисами $\tau^{\pm}(x)$ визначається наступними співвідношеннями:*

$$\mathbf{P}\{\xi^{+}(\theta_s)>x\}=\mathbf{E}[e^{-s\tau^{+}(x)},\tau^{+}(x)<\infty]\mathbf{P}_s=\mathbf{T}_*^{+}(s,x)\mathbf{P}_s,\qquad(1.1.24)$$

$$\mathbf{P}\{\xi^{-}(\theta_s)<x\}=\mathbf{E}[e^{-s\tau^{-}(x)},\tau^{-}(x)<\infty]\mathbf{P}_s=\mathbf{T}_*^{-}(s,x)\mathbf{P}_s,\qquad(1.1.25)$$

$$\mathbf{g}_{\pm}(s,z)=(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^{\pm}(s,z))\mathbf{P}_s,\widetilde{\mathbf{T}}_*^{\pm}(s,z))=\mathbf{I}-\mathbf{g}_{\pm}(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}.\qquad(1.1.26)$$

Надалі будемо припускати, що

$$\|E\left[|\xi(t)|^l,\,x(t)=r|x(0)=k\right]\|<\infty,\,l=1,2.\qquad(1.1.27)$$

Важливим методом дослідження твірних перетворень розподілів граничних функціоналів є метод, заснований на факторизаційному розкладі $\mathbf{g}(s,z)$ на $|z|=1$ і визначенні цих перетворень у термінах факторизаційних компонент, що допускають аналітичне продовження на $|z|\leq 1$ та $|z|\geq 1$. Має місце матричний аналог основної факторизаційної тотожності, (див. [29], теорема 7.1 (7.11)), яка в матричному випадку є двоїстою.

Теорема 1.1.1. *[10] Для двовимірного процесу* $\mathbf{Y}(t)=\{\xi(t),\,x(t)\}$ *при* $s>0$ *має місце матрична основна факторизаційна тотожність на* $|\,z\,|=1$*:*

$$\mathbf{g}(s,z)=\mathbf{E}\,z^{\xi(\theta_s)}=\begin{cases}\mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^-(s,z),\\ \mathbf{g}_-(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{g}^+(s,z).\end{cases}\tag{1.1.28}$$

В термінах компонент факторизації $\mathbf{g}_+(s,z)=\mathbf{E}z^{\xi^+(\theta_s)}$, $\mathbf{g}^-(s,z)=\mathbf{E}z^{\check{\xi}(\theta_s)}$ описуються розподіли "верхніх" функціоналів, пов'язаних з перетином рівня $x\in\mathbb{Z}_0^+$. Розподіли "нижніх" функціоналів, пов'язаних з перетином рівня $x\in\mathbb{Z}_-^0$ виражаються через компоненти $\mathbf{g}_-(s,z)=\mathbf{E}z^{\xi^-(\theta_s)},\quad \mathbf{g}^+(s,z)=\mathbf{E}z^{\overline{\xi}(\theta_s)}$.

В наступному твердженні встановлюється 2-га факторизаційна тотожність, в якій спільна генератриса пари функціоналів $\{\tau^+(x),\gamma^+(x)\}$ виражається тільки через першу компоненту факторизації.

Теорема 1.1.2. *[25] Для процесу* $\xi(t)$ *пара функціоналів* $\{\tau^+(x),\,\gamma^+(x)\}$ *зв'язана з розподілом* $\xi^+(\theta_s)$ *наступними співвідношеннями:*

$$\mathbf{T}_*^+(s,x,z)=\mathbf{E}[z^{\xi^+(\theta_s)-x},\,\xi^+(\theta_s)\geq x](\mathbf{g}_+(s,z))^{-1},\tag{1.1.29}$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,\varepsilon,z)=\frac{(1-\varepsilon)z}{z-\varepsilon}(\mathbf{g}_+(s,z)-\mathbf{g}_+(s,\varepsilon))(\mathbf{g}_+(s,z))^{-1}.\tag{1.1.30}$$

Співвідношення (1.1.29) є матричним аналогом другої факторизаційної тотожності (2 ф. т. див. (2.26) в [30]), а (1.1.30) – твірним перетворенням 2 факторизаційної тотожності, яке дає можливість знаходити прості співвідношення для спільної генератриси $\{\tau^+(x), \gamma^+(x)\}$, якщо перша компонента факторизації має простіший вигляд.

Оскільки ланцюг Маркова $x(t)$ – ергодичний, тоді

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(t) = \lim_{s\to 0} \mathbf{P}(\theta_s) = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \mathbf{P}_0,$$
$$\mathbf{P}_0 = \|p^0_{kr}\|^m_{k,r=1},\ p^0_{kr} = \pi_r > 0.$$

Для ергодичного ланцюга Маркова з твірною матрицею $\mathbf{Q} = \mathbf{N}(\mathbf{P} - \mathbf{I})$ та діагонально записаним стаціонарним розподілом $\pi_d = \|\delta_{kr}\pi_r\|$ в [39] вводиться поняття зворотного ЛМ $\widehat{x}(t)$.

Означення 1.1.5. Ланцюг Маркова $\widehat{x}(t)$ називається зворотним (оберненим за часом) до ланцюга Маркова $x(t)$, якщо π_d – його початковий розподіл, а матриця перехідних ймовірностей задається за допомогою твірної матриці:

$$\widehat{\mathbf{Q}} = \mathbf{N}(\widehat{\mathbf{P}} - \mathbf{I}) = \mathbf{S}\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{S} = \mathbf{N}\pi_d^{-1} = \left\|\delta_{kr}\frac{n_r}{\pi_r}\right\|.$$

Зауважимо, що процес $x(t)$ є еквівалентним зворотному процесу $\widehat{x}(t)$, якщо виконується умова симетризації: $p_{kr} = \frac{\pi_r}{\pi_k}p_{rk},\ k, r = \overline{1, m}$.

Зворотний процес $\widehat{\xi}(t)$ ($\widehat{\xi}(0) = 0,\ t \geq 0$) на ланцюгу Маркова $\widehat{x}(t)$ визначається кумулянтою і генератрисою $\widehat{\xi}(\theta_s)$:

$$\widehat{\mathbf{K}}(z) = \mathbf{S}\mathbf{K}^T(z)\mathbf{S}^{-1},\ \widehat{\mathbf{g}}(s,z) = \mathbf{E}z^{\widehat{\xi}(\theta_s)} = s(s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{K}}(z))^{-1},$$
$$\widehat{\mathbf{K}}(1) = \mathbf{S}\mathbf{K}^T(1)\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1} = \widehat{\mathbf{Q}},$$
$$\widehat{\mathbf{g}}(s,1) = s(s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{K}}(1))^{-1} = \widehat{\mathbf{P}}_s.$$

Основна факторизаційна тотожність (1.1.28) в термінах генератрис екстремумів зворотного процесу $\widehat{\mathbf{g}}_\pm(s,z) = \mathbf{E}z^{\widehat{\xi}^\pm(\theta_s)}$ набуває вигляду

$$\mathbf{g}(s,z) = \begin{cases} \mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{g}}_-^T(s,z)\mathbf{S}^{-1}; \\ \mathbf{g}_-(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{g}}_+^T(s,z)\mathbf{S}^{-1}. \end{cases} \tag{1.1.31}$$

З (1.1.28) та (1.1.33) випливають наступні співвідношення зв'язку між розподілами екстремумів звичайного та зворотного процесів

$$\mathbf{g}^{\pm}(s,z) = \mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{g}}^{T}_{\pm}(s,z)\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{P}_s = \mathbf{S}\,(\widehat{\mathbf{P}}_s)^{T}\mathbf{S}^{-1};$$

$$\mathbf{q}^{+}(s) = \mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{q}}^{T}_{+}(s)\mathbf{S}^{-1},\ \mathbf{q}^{-}(s) = \mathbf{S}\,\widehat{\mathbf{q}}^{T}_{-}(s)\mathbf{S}^{-1}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) < x\} &= \mathbf{S}\left(\mathbf{P}\{\widehat{\xi}^{-}(\theta_s) < x\}\right)^{T}\mathbf{S}^{-1}, x \in \mathbb{Z}^{0}_{-}, \\ \mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) < x\} &= \mathbf{S}\left(\mathbf{P}\{\widehat{\xi}^{+}(\theta_s) < x\}\right)^{T}\mathbf{S}^{-1}, x \in \mathbb{Z}^{+}_{0}. \end{aligned} \tag{1.1.32}$$

$$\mathbf{P}\{\check{\xi}(\theta_s) > x\} = \mathbf{P}_s\widehat{\mathbf{T}}^{+}_{*}(s,x), \tag{1.1.33}$$

$$\mathbf{P}\{\overline{\xi}(\theta_s) < x\} = \mathbf{P}_s\widehat{\mathbf{T}}^{-}_{*}(s,x). \tag{1.1.34}$$

Позначимо спільну генератрису перестрибкових функціоналів (1.1.13) через

$$\mathbf{V}(s,x,u_1,u_2,u_3) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{+}(x)}u_1^{\gamma^{+}(x)}u_2^{\gamma_{+}(x)}u_3^{\gamma^{+}_{x}}, \tau^{+}(x) < \infty], \tag{1.1.35}$$

а її твірне перетворення по x:

$$\mathbf{v}(s,z,u_1,u_2,u_3) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^{x}\mathbf{V}(s,x,u_1,u_2,u_3),$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3) = (1-\varepsilon)\mathbf{v}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3) =$$

$$=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{+\infty}\varepsilon^{x}\mathbf{V}(s,x,u_1,u_2,u_3)=\mathbf{E}[e^{-s\tau^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u_1^{\gamma^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u_2^{\gamma_{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u_3^{\gamma^{+}_{\widetilde{\nu}_\varepsilon}}, \tau^{+}(\widetilde{\nu}_\varepsilon) < \infty],$$

маргінальні генератриси та їх твірні перетворення

$$\mathbf{V}_i(s,x,u_i) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{+}(x)}u_i^{\gamma_i(x)}, \tau^{+}(x) < \infty] = \mathbf{V}_i(s,x,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\, r\neq i},$$

$$\mathbf{v}_i(s,z,u_i) = \mathbf{v}_i(s,z,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\, r\neq i},$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}_i(s,\varepsilon,u_i) = \widetilde{\mathbf{v}}_i(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\, r\neq i}.$$

Функції

$$\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)=\sum_{l=x+1}^{+\infty}u_1^{l-x}u_2^{x}u_3^{l}\mathbf{\Pi}_0^+(l),x\in\mathbb{Z}_0^+,\tag{1.1.36}$$

є правими частинами різницевих рівнянь для спільних генератрис (1.1.35) розподілу перестрибкових функціоналів з оператором $\mathbf{L}_s$ і виражаються через відповідні твірні перетворення розподілу $\mathbf{\Pi}_0^+(l)$ додатних стрибків, де $\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(z)=\sum\limits_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{\Pi}_0^+(x)$.

$$\mathbf{a}(z,u_1,u_2,u_3)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3),$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}(\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{+\infty}\varepsilon^x\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3),$$

$$\mathbf{A}(x,1,1,1)=\mathbf{A}_x(1)=\sum_{l=x+1}^{+\infty}\mathbf{\Pi}_0^+(l)=\mathbf{\Pi}(x),\mathbf{a}(z)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{\Pi}(x)=\widetilde{\mathbf{\Pi}}(z).$$

$$\mathbf{A}_i(x,u_i)=\mathbf{A}_i(x,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\,r\neq i},\widetilde{\mathbf{a}}_i(\varepsilon,u_i)=\widetilde{\mathbf{a}}_i(\varepsilon,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\,r\neq i},$$

$$\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3)=\sum_{y=-\infty}^{0}\check{\mathbf{p}}_y^-(s)\mathbf{A}(x-y,u_1,u_2,u_3),$$

$$\mathbf{w}(s,z,u_1,u_2,u_3)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3),$$

$$\widetilde{\mathbf{w}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{+\infty}\varepsilon^x\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3),$$

$$\mathbf{W}_i(s,x,u_i)=\mathbf{W}_i(s,x,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\,r\neq i},$$

$$\widetilde{\mathbf{w}}_i(s,\varepsilon,u_i)=\widetilde{\mathbf{w}}_i(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)|_{u_r=1,\,r\neq i},$$

$$\mathbf{K}(s,x)=\mathbf{W}(s,x,1,1,1)=\sum_{y=-\infty}^{0}\check{\mathbf{p}}_y^-(s)\mathbf{A}_{x-y}(1),\ \mathbf{k}(s,z)=\sum_{x=0}^{+\infty}z^x\mathbf{K}(s,x).$$

1.2 Допоміжні твердження.

Якщо $x(t)$ – однорідний регулярний ланцюг Маркова з твірною матрицею $\mathbf{Q}$ і матрицею $\mathbf{P}(t)$, то згідно із (1.1.1) її перетворення Лапласа-Карсона є оберненням сингулярно збуреної матриці $(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}$ ($|s\mathbf{I}-\mathbf{Q}|\neq 0$ при достатньо малих $s>0$).

Для $x(t)$ існує стаціонарний розподіл $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}_0=\|p^0_{kr}\|$, $p^0_{kr}=\pi_r, \forall\, k$, що визначається як границя обернення (1.1.19) при $s\to 0$

$$\mathbf{P}_0=\lim_{s\to 0}s(s\mathbf{I}-\mathbf{Q})^{-1}. \tag{1.2.1}$$

При цьому мають місце співвідношення

$$\mathbf{Q}\mathbf{P}_0=\mathbf{0},\ \mathbf{P}_0\mathbf{Q}=\mathbf{0}; \tag{1.2.2}$$

перше з них очевидне, а друге визначає єдиний розв'язок відповідної системи лінійних рівнянь для значень стаціонарних імовірностей $\{\pi_k\}$ (див. [6]).

Позначимо для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (1.1.2) через

$$\mathbf{M}^0_1=\mathbf{E}\xi(1)=\sum_{x\neq 0}x\mathbf{\Pi}_0(x),\ \mathbf{D}_0=\mathbf{D}\xi(1)=\sum_{x\neq 0}x^2\mathbf{\Pi}_0(x),$$

які надалі вважаємо обмеженими.

Ще позначимо $\widetilde{\mathbf{K}}(z)=\sum\limits_{x\neq 0}(z^x-1)\mathbf{\Pi}_0(x)$, і відмітимо, що при $z=1+\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$ $\widetilde{\mathbf{K}}(1+\varepsilon)\approx\varepsilon\widetilde{\mathbf{K}}'(1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\widetilde{\mathbf{K}}''(1)$, де $\widetilde{\mathbf{K}}'(1)=\mathbf{E}\xi(1)=\mathbf{M}^0_1$, $\widetilde{\mathbf{K}}''(1)=\mathbf{D}\xi(1)=\mathbf{D}_0$.

Тоді при $z=1+\varepsilon$ має місце наближення

$$-\mathbf{K}(z)=(1-z)\mathbf{M}^0_1-\frac{1}{2}(1-z)^2\mathbf{D}_0-\mathbf{Q}+o(\varepsilon^2). \tag{1.2.3}$$

Відповідно усереднені по стаціонарному розподілу $\mathbf{P}_0$ моменти позначимо

$$m^0_1=\sum_{k=1}^m\pi_k\sum_{r=1}^m[\delta_{kr}E\xi_k(1)+\sum_{r\neq k}^m n_k p_{kr}E\chi_{kr}], \tag{1.2.4}$$

$$\sigma_0^2 = \sum_{k=1}^{m} \pi_k \sum_{r=1}^{m} [\delta_{kr} D\xi_k(1) + \sum_{r\neq k}^{m} n_k p_{kr} D\chi_{kr}]. \tag{1.2.5}$$

Лема 1.2.1. *[44] Нехай* $\mathbf{Q}_0$ *- вироджена матриця* m*-го порядку,* $\nu \neq 0$. *Тоді обернення збуреної зворотної матриці* $\mathbf{Q}_0 + \nu \mathbf{I}$ *має розклад*

$$(\mathbf{Q}_0 + \nu \mathbf{I})^{-1} = \nu^{-1} \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{T}_0 (\mathbf{I} + \nu \mathbf{T}_0)^{-1} \tag{1.2.6}$$

де $\mathbf{\Pi}_1$*–власний проектор матриці* $\mathbf{Q}_0$, $r = dimN(\mathbf{Q}_0) < m$, $\mathbf{\Pi}_1 = \sum_{k=1}^{r} u^k \bigotimes \rho^k$, u^k, ρ^k *-правий та лівий власні вектори оператора* $\mathbf{Q}_0$*, що відповідають нульовому власному значенню:* $(\rho^{(i)}, u^{(j)}) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, r}$. *Крім того* $\mathbf{T}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_1)((\mathbf{\Pi}_1 - \mathbf{Q}_0)^{-1} - \mathbf{\Pi}_1)(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}_1)$,

$$\mathbf{\Pi}_1 \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0 \mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{0},\ \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{T}_0 = \mathbf{T}_0 \mathbf{\Pi}_1 = \mathbf{0}. \tag{1.2.7}$$

На основі (1.2.3) та (1.2.6) із леми 1.2.1 встановлюється

Лема 1.2.2. *Для процесу* $\mathbf{Y}(t)$ *з кумулянтою (1.1.2) із* $|m_1^0| < \infty$, $\sigma_0^2 < \infty$ *мають місце наступні співвідношення*

$$\lim_{z\to 1}(-(1-z)\mathbf{K}^{-1}(z)) =$$
$$= \lim_{z\to 1}(1-z)((1-z)\mathbf{M}_1^0 - \mathbf{Q})^{-1} = \frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0,\ m_1^0 \neq 0, \tag{1.2.8}$$

$$\lim_{z\to 1}(1-z)^2\mathbf{K}^{-1}(z) =$$
$$= \lim_{z\to 1}(1-z)^2(\frac{1}{2}(1-z)^2\mathbf{D}_0 - \mathbf{Q})^{-1} = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0,\ m_1^0 = 0,\ \sigma_0^2 < \infty. \tag{1.2.9}$$

Як і для звичайних ґратчастих пуассонівських процесів має місце аналогічний матричний результат. З леми 1.1.1 при $x = 0$ випливає

Лема 1.2.3. *Для гратчастого процесу Пуассона заданого на ланцюгу Маркова, мають місце наступні представлення матриць* $\mathbf{p}_*^{\pm}(s)$ *та* $\mathbf{p}^*_{\pm}(s)$*:*

$$\mathbf{p}^*_{\pm}(s) = \mathbf{I} - \mathbf{E}[e^{-s\tau^{\pm}(0)}, \tau^{\pm}(0) < \infty] = \mathbf{I} - \mathbf{T}_*^{\pm}(s,0); \quad (1.2.10)$$

$$\mathbf{p}_*^{\pm}(s) = \mathbf{I} - \mathbf{S}(\mathbf{E}[e^{-s\widehat{\tau}^{\pm}(0)}, \widehat{\tau}^{\pm}(0) < \infty])^T\mathbf{S}^{-1} = \\ = \mathbf{I} - \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{T}}_*^{\pm}(s,0))^{\mathbf{T}}\mathbf{S}^{-1}; \quad (1.2.11)$$

де

$$\mathbf{T}_*^{\pm}(s,0) = \mathbf{q}_{\pm}(s)\mathbf{P}_s^{-1}, \ \widehat{\mathbf{T}}_*^{\pm}(s,0) = \widehat{\mathbf{q}}_{\pm}(s)\widehat{\mathbf{P}}_s^{-1}. \quad (1.2.12)$$

Із стохастичних співвідношень (1.1.15)–(1.1.18) аналогічно до рівняння (1.1.22) виводиться рівняння для генератрис (1.1.35)

Теорема 1.2.1. *[25] Для довільного цілозначного пуассонівського процесу* $\xi(t)$ *на ЛМ* $x(t)$ *твірне перетворення спільної генератриси функціоналів* $\{\tau^+(x), \gamma^+(x), \gamma_+(x), \gamma_x^+\}$ *виражається наступним чином*

$$s\mathbf{v}(s,z,u_1,u_2,u_3) = \mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}[\mathbf{g}^-(s,z)\mathbf{a}(z,u_1,u_2,u_3)]_+^0, \quad (1.2.13)$$

де $\mathbf{a}(z,u_1,u_2,u_3)$ *має вигляд*

$$\mathbf{a}(s,x,u_1,u_2,u_3) = \frac{u_1}{u_1 - zu_2}(\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_1u_3) - \widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_2u_3z)). \quad (1.2.14)$$

З теореми 1.2.1 після обернення (1.2.13) по z випливає

Наслідок 1.2.1. Спільна генератриса (1.1.35) функціоналів $\{\tau^+(x), \gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x)\}$ визначається через згортку

$$s\mathbf{V}(s,x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{y=0}^{x} \mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s,x-y,u_1,u_2,u_3), \quad (1.2.15)$$

де функція $\mathbf{W}(s, x-y, u_1, u_2, u_3)$ є оберненням проекційної дужки в (1.2.13).

Згідно теореми 1.2.1 та наслідку 1.2.1 встановлюється

Наслідок 1.2.2. Якщо виконується умова (1.1.27), тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_+(s,z) &= \left[\mathbf{I} + (1-z)s^{-1}\mathbf{k}(s,z)\right]^{-1}\mathbf{P}_s, \\ \mathbf{p}_+(s) &= \left[\mathbf{I} + s^{-1}\mathbf{k}(s,0)\right]^{-1}\mathbf{P}_s. \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

$$\mathbf{g}_+(s,z) = (\mathbf{I} - \mathbf{V}_1(s,0,z))^{-1}\,\mathbf{p}_+(s). \tag{1.2.17}$$

Доведення. Підставимо замість $u_1 = u_2 = u_3 = 1$ в (1.2.13) і отримаємо

$$s\mathbf{v}(s,z,1,1,1) = \mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}[\mathbf{g}^-(s,z)\mathbf{a}(z)]_+^0. \tag{1.2.18}$$

Розглянемо множник

$$\left[\mathbf{g}^-(s,z)\mathbf{a}(z)\right]_+^0 = \left[\sum_{x=0}^{+\infty} z^x \check{\mathbf{p}}_x^-(s) \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{A}_x(1)\right]_+^0 =$$

$$= \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \sum_{k=-\infty}^{0} \check{\mathbf{p}}_k^-(s)\mathbf{A}_{x-k}(1) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{K}(s,x) = \mathbf{k}(s,z).$$

Використовуючи (1.1.24) та (1.1.27) і означення $\mathbf{v}(s,z,u_1,u_2,u_3)$ отримаємо

$$\mathbf{v}(s,z,1,1,1) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{V}(s,x,1,1,1) = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)},\, \tau^+(x) < \infty\right] =$$

$$= \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \mathbf{P}\{\xi^+(\theta_s) > x\}\mathbf{P}_s^{-1} = \sum_{x=0}^{+\infty} z^x \sum_{k=x+1}^{+\infty} \mathbf{p}_k^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{p}_k^+(s) \sum_{x=0}^{k-1} z^x \mathbf{P}_s^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1-z}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{p}_k^+(s) - \sum_{k=0}^{+\infty} z^k\mathbf{p}_k^+(s)\right]\mathbf{P}_s^{-1} = \frac{1}{z-1}\left[\mathbf{g}_+(s,z)\mathbf{P}_s^{-1} - \mathbf{I}\right].$$

Підсталяючи отримані співвідношення в (1.2.18) одержимо перше співвідношення в (1.2.16). Друге співвідношення в (1.2.16) випливає з першого при граничному переході $z \to 0$. (1.2.17) отримаємо з (1.1.30) при граничному переході $\varepsilon \to 0$. $\square$

Співвідношення (1.2.17) є матричним аналогом узагальнення формули Полячека-Хінчина. Вона встановлює зв'язок перших компонент факторизаційної тотожності Боровкова для $\mathbf{E}z^{\xi(\theta_s)}$, що виражаються в термінах генератрис початкових сходинкових висот $\{\tau^{\pm}(0), \gamma^{\pm}(0)\}$

$$\mathbf{R}_1^{\pm}(s,z) = \mathbf{I} - \mathbf{E}[e^{-s\tau^{\pm}(0)}z^{\gamma^{\pm}(0)}, \tau^{\pm}(0) < \infty], \tag{1.2.19}$$

з першими компонентами основної факторизаційної тотожності: $\mathbf{g}_{\pm}(s,z) = [\mathbf{R}_1^{\pm}(s,z)]^{-1}\mathbf{p}_{\pm}(s)$. Згідно зі співвідношенням (1.2.17) маємо $\mathbf{R}_1^{\pm}(s,z) = \mathbf{I} - \mathbf{V}_1(s,0,z)$.

Висновки до розділу 1

1. Наводяться основні поняття, матричні позначення та допоміжні твердження, що є необхідними для подальшого дослідження.
2. Отримано твердження про граничні значення збуреної кумулянти.
3. Встановлюється матричний аналог узагальнення формули Полячека-Хінчина, яка встановлює зв'язок 1-их компонент основної факторизаційної тотожності та факторизаційних компонент тотожності А. А. Боровкова в термінах генератрис початкових сходинкових висот $\{\tau^{\pm}(0), \gamma^{\pm}(0)\}$.

Розділ 2

Розподіли екстремумів та їх доповнень для майже напівнеперервних процесів

2.1 Дограничні уточнення $(s > 0)$ компонент основної матричної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних процесів

В теоремі 1.1.1 наведена двоїста матрична основна факторизаційна тотожність, згідно якої уточнюються компоненти основної факторизаційної тотожності (1.1.28). Встановлюється, що одна з компонент основної факторизаційної тотожності виражається через генератрису матричного геометричного розподілу, а інша має складнішу форму і виражається через матричний параметр цього геометричного розподілу та збурення кумулянти $\mathbf{K}(z)$.

В роботах [27] – [28] були отримані уточнення компонент факторизації (1.1.28) для неперервних знизу або зверху процесів $\xi(t)$ з неперервним розподілом стрибків визначених на ланцюгу Маркова. Дані результати було узагальнено для майже напівнеперервних процесів в роботі [35]–[37]. Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності одержано в спільних роботах [25], [26] для напівнеперервних процесів, стрибки яких в одну сторону лише одиничні. Розглянемо питання про конкретизацію представлень компонент основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова, яке для скалярного випадку вивчалося в [29] (див. теореми 7.5–7.6).

Зауважимо, що кожній з цих теорем відповідають два допграничні та граничні матричні узагальнення з відповідними наслідками. Спочатку встановлюються твердження для майже напівнеперервних процесів про "прості" (дробово-лінійні) компоненти основної факторизаційної тотожності при $s > 0$ (допграничний випадок). Залежно від знаку m_1^0 уточнюється їх вигляд при $s \to 0$ (граничний випадок).

Теорема 2.1.1. *Для майже напівнеперервного зверху процесу* $\xi(t)$ *на ланцюгу Маркова* $x(t)$ *генератриса та розподіл максимуму* $\xi^+(\theta_s)$ *визначаються співвідношеннями*

$$\mathbf{g}_+(s,z) = (\mathbf{I} - \mathbf{C}z)[\mathbf{I} - z\mathbf{Z}_s^{-1}]^{-1}\mathbf{p}_+(s), \tag{2.1.1}$$

$$\mathbf{p}_x^+(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{C}\mathbf{Z}_s)\mathbf{Z}_s^{-x}\mathbf{p}_+(s),\ x \in \mathbb{Z}^+, \tag{2.1.2}$$

$$\mathbf{p}_+(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s, \tag{2.1.3}$$

$$\mathbf{q}_+(s) = (\mathbf{Z}_s^{-1} - \mathbf{C})(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s, \tag{2.1.4}$$

$$\overline{\mathbf{P}}_+(s,x) = (\mathbf{Z}_s^{-1} - \mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{2.1.5}$$

Генератрису доповнення до максимуму $\overline{\xi}(\theta_s)$ *можна виразити через генератрису від'ємних значень процесу та матричний параметр гео-*

метричного розподілу $\mathbf{Z}_s^{-1}$*:*

$$\begin{gathered}\mathbf{g}^{-}(s,z)=\mathbf{P}_s(\mathbf{p}_+(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]_-^0+\\+(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|}-z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)<0]),\end{gathered}\tag{2.1.6}$$

$$\begin{gathered}\check{\mathbf{p}}_x^{-}(s)=\mathbf{P}_s(\mathbf{p}_+(s))^{-1}(\mathbf{p}_x(s)+\\(\mathbf{C}-\mathbf{Z}_s^{-1})\mathbf{C}^{\,x-1}\mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|},\ \xi(\theta_s)<x]),\ \ x\in\mathbb{Z}_-^0,\end{gathered}\tag{2.1.7}$$

де

$$\mathbf{Z}_s^{-1}=\mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}+\mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{C}.\tag{2.1.8}$$

Доведення. Здійснивши граничний перехід у (1.1.29) при $\varepsilon\to 0$, дістанемо

$$\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z)=\mathbf{I}-\mathbf{p}_+(s)(\mathbf{g}_+(s,z))^{-1}.$$

Внаслідок чого отримуємо наступне співвідношення для $\mathbf{g}_+(s,z)$:

$$\mathbf{g}_+(s,z)=(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1}\mathbf{p}_+(s).\tag{2.1.9}$$

Розглянемо множник $(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1}$. Віднімемо від нього одиничну матрицю та виконаємо наступні перетворення:

$$\begin{aligned}\Big(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z)\Big)^{-1}-\mathbf{I}&=\big(\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0)\widetilde{\mathbf{p}}_1(z)\big)^{-1}-\mathbf{I}=\\&=\mathbf{T}_*^+(s,0)\widetilde{\mathbf{p}}_1(z)\left[\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0)\widetilde{\mathbf{p}}_1(z)\right]^{-1}.\end{aligned}\tag{2.1.10}$$

За умови майже напівнеперервності зверху, співвідношення (2.1.10) набуває вигляду

$$\begin{gathered}\Big(\mathbf{I}-\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z)\Big)^{-1}-\mathbf{I}=\\=\mathbf{T}_*^+(s,0)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z\left[\mathbf{I}-\mathbf{C}z-\mathbf{T}_*^+(s,0)z+\mathbf{T}_*^+(s,0)\mathbf{C}z\right]^{-1}=\\=\mathbf{T}_*^+(s,0)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z\left[\mathbf{I}-(\mathbf{T}_*^+(s,0)+(\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0))\mathbf{C})z\right]^{-1}.\end{gathered}\tag{2.1.11}$$

Позначимо через

$$\mathbf{Z}_s^{-1} = (\mathbf{T}_*^+(s,0) + (\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^+(s,0))\mathbf{C}. \tag{2.1.12}$$

Згідно умови (1.1.24)

$$\mathbf{T}_*^+(s,0) = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}. \tag{2.1.13}$$

Із (2.1.13), після врахування зв'язку між матрицями $\mathbf{p}_+(s)$ і $\mathbf{q}_+(s)$, отримаємо

$$\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0) = \mathbf{I}-\mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1} = \mathbf{I}-(\mathbf{P}_s-\mathbf{p}_+(s))\mathbf{P}_s^{-1} = \mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}. \tag{2.1.14}$$

Підставивши в (2.1.12) співвідношення (2.1.13) і (2.1.14), дістанемо (2.1.8).

Використовуючи формули (2.1.12) – (2.1.14) із (2.1.11), мтимемо:

$$(\mathbf{I} - \widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,0,z))^{-1} = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C})z[\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1}z]^{-1} + \mathbf{I}. \tag{2.1.15}$$

Підставляючи (2.1.15) в (2.1.9), після деяких простих перетворень, отримаємо (2.1.1). Формулу (2.1.2) одержимо із (2.1.1) оберненням по z. Співвідношення (2.1.3) отримаємо як розв'язок матричного рівняння із (2.1.8) відносно $\mathbf{p}_+(s)$, а (2.1.4) випливає із (2.1.3) і співвідношення $q_+(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_+(s)$.

Формулу для $\mathbf{g}^-(s,z)$ можна одержати із першого співвідношення в (1.1.28), підставляючи представлення (2.1.2) для $\mathbf{g}_+(s,z)$. Врахувавши властивість

$$\mathbf{g}(s,z) = [\mathbf{g}(s,z)]_-^0 + [\mathbf{g}(s,z)]_+ \,,$$

та після застосування операції проектування на $[\ ]_-^0$, маємо

$$\mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_+(\mathbf{s}))^{-1}\big[[\mathbf{g}(s,z)]_-^0 + \\ + (\mathbf{C} - \mathbf{Z}_s^{-1})\big\{(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} z[\mathbf{g}(s,z)]_-^0\big\}_-^0\big]. \quad (2.1.16)$$

Розглянемо окремо множник

$$\big[(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1} z[\mathbf{g}(s,z)]_-^0\big]_-^0 = \left[\sum_{x=0}^{+\infty} \mathbf{C}^x z^{x+1} \sum_{y=-\infty}^{0} z^y \mathbf{p}_y(s)\right]_-^0 =$$

$$= \left[\sum_{x=0}^{+\infty} \mathbf{C}^x \sum_{y=-\infty}^{+\infty} z^{y+x+1} \mathbf{p}_y(s)\right]_-^0 = \sum_{x=0}^{+\infty} \mathbf{C}^x \sum_{y=-\infty}^{-x-1} z^{y+x+1} \mathbf{p}_y(s) =$$

$$= \sum_{y=-\infty}^{0} z^y \sum_{x=1}^{+\infty} \mathbf{C}^{x-1} \mathbf{p}_{y-x}(s).$$

Тоді після врахування останнього співвідношення та (2.1.8) із (2.1.16), дістаємо (2.1.6). Співвідношення (2.1.7) може бути отримане обертанням (2.1.6) по z. □

З попередньої теореми випливає

Наслідок 2.1.1. Для напівнеперервних зверху процесів ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$) генератриса та розподіл $\xi^+(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями

$$\mathbf{g}_+(s,z) = [\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1} z]^{-1} \mathbf{p}_+(s), \mathbf{p}_x^+(s) = \mathbf{Z}_s^{-x} \mathbf{p}_+(s),\ x \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\mathbf{p}_+(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})\mathbf{P}_s,\ \mathbf{q}_+(s) = \mathbf{Z}_s^{-1}\mathbf{P}_s,$$

$$\overline{\mathbf{P}}_+(s,x) = \mathbf{Z}_s^{-x-1}\mathbf{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Для $\overline{\xi}(\theta_s)$ маємо

$$\mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_+(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]_-^0 - \mathbf{Z}_s^{-1} z[\mathbf{g}(s,z)]_-),$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^-(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_+(s))^{-1}(\mathbf{p}_x(s) - \mathbf{Z}_s^{-1}\mathbf{p}_{x-1}(s)),\ x \in \mathbb{Z}_-^0,$$

де $\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}$.

Теорема 2.1.2. *Для майже напівнеперервних зверху процесів генератриса та розподіл доповнення до мінімуму $\check{\xi}(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями*

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{p}^+(s)[\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}z]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z), \tag{2.1.17}$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \mathbf{p}^+(s)\mathbf{R}_s^{-x}[\mathbf{I} - \mathbf{R}_s\mathbf{C}\,],\ x \in \mathbb{Z}^+, \tag{2.1.18}$$

$$\mathbf{p}^+(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}), \tag{2.1.19}$$

$$\mathbf{q}^+(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{R}_s^{-1} - \mathbf{C}), \tag{2.1.20}$$

$$\overline{\mathbf{P}}^{\,+}(s,x) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{R}_s^{-x}(\mathbf{R}_s^{-1} - \mathbf{C}),\ x \in \mathbb{Z}_0^+. \tag{2.1.21}$$

Генератрису мінімуму $\xi^-(\theta_s)$ можна виразити через генератрису від'ємних значень процесу та матричний параметр геометричного розподілу $\mathbf{R}_s^{-1}$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_-(s,z) = \big([\mathbf{g}(s,z)]_-^0 + \mathbf{E}[\mathbf{C}^{\,|\xi(\theta_s)|} - z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s) < 0]\,\cdot \\ \cdot(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}z(\mathbf{R}_s^{-1} - \mathbf{C})\big)(\mathbf{p}^+(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_x^-(s) = [\mathbf{p}_x(s) + \mathbf{E}[\,C^{|\xi(\theta_s)|},\ \xi(\theta_s) < x]\,\cdot \\ \cdot\mathbf{C}^{\,x-1}(\mathbf{C} - \mathbf{R}_s^{-1})](\mathbf{p}^+(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}_-^0,\end{aligned} \tag{2.1.23}$$

де

$$\mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^+(s) + \mathbf{C}\,\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^+(s). \tag{2.1.24}$$

Доведення. На основі стохастичних співвідношень для $\tau^-_{kr}(x)$, $(x\in\mathbb{Z}^0_-)$, де нижні індекси означають початкове значення ланцюга $x(t)$ та значення $x(t)$ в момент досягнення рівня x, $(x(0)=k,\ x(\tau^-(x))=r)$. Розглядаємо тільки ті траєкторії процесу, для яких $\tau^-(x)<\infty$, тобто

$$\tau^-_{kr}(x) \doteq \begin{cases} \zeta'_k, \ \ \xi_1^{(k)}<x,\ \zeta'_k<\zeta_k, \\ \zeta_k, \ \ \chi_{kr}<x,\ \zeta'_k>\zeta_k, \\ \zeta'_k+\tau^-_{kr}(x-\xi_k),\ \xi_1^{(k)}\geq x,\ \zeta'_k<\zeta_k, \\ \zeta_k+\tau^-_{kr}(x-\chi_{kj}),\ \chi_{kj}\geq x,\ \zeta'_k>\zeta_k,\ (x(\zeta_k)=j). \end{cases} \tag{2.1.25}$$

На основі стохастичних співвідношень (2.1.25) запишемо рівняння

$$\begin{aligned} &T^-_{*kr}(s,x)=E[e^{-s\tau^-(x)},\ x(\tau^-(x))=r|x(0)=k]= \\ &=\lambda_k\int\limits_0^{+\infty}e^{-(s+\lambda_k+n_k)y}dy\sum_{l=-\infty}^{x-1}P\{\xi_k=l\}+ \\ &+n_k\int\limits_0^{+\infty}e^{-(s+\lambda_k+n_k)y}dy\sum_{l=-\infty}^{x-1}p_{kr}P\{\chi_{kr}=l\}+ \\ &+\lambda_k\int\limits_0^{+\infty}e^{-(s+\lambda_k+n_k)y}dy\sum_{l=x}^{+\infty}e^{-s\tau^-_{kr}(x-l)}P\{\xi_k=l\}+ \\ &+n_k\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^{+\infty}e^{-(s+\lambda_k+n_k)y}dy\sum_{l=x}^{+\infty}e^{-s\tau^-_{kr}(x-l)}p_{kj}P\{\chi_{kj}=l\}= \\ &=(s+\lambda_k+n_k)^{-1}\Big[\sum_{l=-\infty}^{x-1}\big(\lambda_kP\{\xi_k=l\}+n_kp_{kr}P\{\chi_{kr}=l\}\big)+ \\ &+\sum_{l=x}^{+\infty}\big(\lambda_kP\{\xi_k=l\}e^{-s\tau^-_{kr}(x-l)}+n_k\sum_{j=1}^{n}p_{kj}P\{\chi_{kj}=l\}e^{-s\tau^-_{kr}(x-l)}\big)\Big]. \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

Запишемо (2.1.26) в матричній формі:

$$(s\mathbf{I}+\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{N})\mathbf{T}_*^-(s,x)=\sum_{l=-\infty}^{x-1}\boldsymbol{\Pi}_0(l)+\sum_{l=x}^{+\infty}\mathbf{T}_*^-(s,x-l)\boldsymbol{\Pi}_0(l). \quad (2.1.27)$$

Застосуємо до (2.1.27) твірне перетворення по $x\in\mathbb{Z}_-^0$, і врахувавши умову майже напівнеперервності зверху процесу, отримаємо

$$\begin{gathered}(s\mathbf{I}+\boldsymbol{\Lambda}+\mathbf{N})\widetilde{\mathbf{T}}_*^-(s,z)=\\ =\frac{z}{z-1}\left[-\boldsymbol{\Lambda}_2(\widetilde{\mathbf{p}}_2(z)-\mathbf{I})-\mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{f}}(z)-\mathbf{P})\right]+\\ +\left[\boldsymbol{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{p}}_2(z)+\mathbf{N}\widetilde{\mathbf{f}}(z)+\mathbf{NP}-\mathbf{NP}\right]\widetilde{\mathbf{T}}_*^-(s,z)+\\ +\boldsymbol{\Lambda}_1(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\left[\widetilde{\mathbf{T}}_*^-(s,z)-\widetilde{\mathbf{T}}_*^-(s,\mathbf{C}^{-1})\right],\end{gathered} \quad (2.1.28)$$

де

$$\widetilde{\mathbf{T}}_*^-(s,z)=\sum_{x=-\infty}^{0}z^x\mathbf{T}_*^-(s,x)=\frac{z}{z-1}\left(\mathbf{I}-\mathbf{g}_-(s,z)\mathbf{P}_s^{-1}\right). \quad (2.1.29)$$

Перетворимо (2.1.28) до вигляду

$$\begin{gathered}(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))\widetilde{\mathbf{T}}_*^-(s,z)=\\ =\frac{z}{z-1}[-\boldsymbol{\Lambda}_2(\widetilde{\mathbf{p}}_2(z)-\mathbf{I})-\mathbf{N}(\widetilde{\mathbf{f}}(z)-\mathbf{P})]-\\ -\boldsymbol{\Lambda}_1(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\widetilde{\mathbf{T}}_*^-(s,\,\mathbf{C}^{-1}).\end{gathered} \quad (2.1.30)$$

Підставимо (2.1.29) в (2.1.30) і врахуємо (1.1.6), то після деяких перетворень отримаємо

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))\mathbf{g}_-(s,z)=[s\mathbf{I}+\boldsymbol{\Lambda}_1(1-z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{g}_-(s,\mathbf{C}^{-1})]. (2.1.31)$$

З (2.1.31) згідно (1.1.20) та другого співвідношення (1.1.28), одержимо

$$\mathbf{g}^+(s,z)=\mathbf{P}_s[\mathbf{I}+\boldsymbol{\Lambda}_1s^{-1}(1-z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{g}_-(s,\mathbf{C}^{-1})]^{-1}. \quad (2.1.32)$$

Після граничного переходу при $z \to 0$ в (2.1.32), отримаємо

$$\mathbf{p}^{+}(s) = \mathbf{P}_s[\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})]^{-1}. \tag{2.1.33}$$

Із (2.1.33), одержимо

$$\mathbf{q}^{+}(s) = \mathbf{P}_s\mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})[\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})]^{-1}. \tag{2.1.34}$$

Згідно (2.1.33) з (2.1.32)

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^{+}(s,z) = \mathbf{P}_s[\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})]^{-1}[\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})]\cdot \\
\cdot [\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}(1-z)(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})]^{-1} = \\
= \mathbf{p}_{+}(s)\Big[\Big(\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1}) + \\
+ \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}(1-z)(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1}) - \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})\Big)\cdot \\
\cdot \Big(\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})\Big)^{-1}\Big]^{-1} = \\
= \mathbf{p}_{+}(s)\Big[\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C})z\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})\cdot \\
\cdot \big(\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})\big)^{-1}\Big]^{-1} = \\
= \mathbf{p}_{+}(s)\Big[\mathbf{I} - \Big(\mathbf{C} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})\cdot \\
\cdot \big(\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})\big)^{-1}\Big)z\Big]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z).
\end{aligned} \tag{2.1.35}$$

Позначимо через

$$\mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{C} + (\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})\big(\mathbf{I} + \mathbf{\Lambda}_1 s^{-1}\mathbf{g}_{-}(s, \mathbf{C}^{-1})\big)^{-1}, \tag{2.1.36}$$

після чого (2.1.17) доведено. Згідно (2.1.33) та (2.1.34) із (2.1.36) випливає (2.1.24), з якого виражається (2.1.19). Із (2.1.19) та співвідношення $\mathbf{q}^{+}(s) = \mathbf{P}_s - \mathbf{p}_{+}(s)$ одержуємо (2.1.20). Обернувши (2.1.17) по z, отримуємо (2.1.18). Використовуючи (2.1.17) та друге співвідношення

(1.1.28), отримаємо, попередньо застосувавши операцію проектування на $[\ ]_-^0$, співвідношення (2.1.22). Формула (2.1.23) випливає з (2.1.22) після обертання по z. $\square$

З теореми 2.1.2, з врахуванням умови майже напівнеперервності зверху, випливає

Наслідок 2.1.2. Для напівнеперервних зверху процесів $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ генератриса та розподіл доповнення до мінімуму $\check{\xi}(\theta_s)$ визначаються співвідношеннями

$$\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{p}^+(s)[\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}z]^{-1},$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \mathbf{p}_+(s)\mathbf{R}_s^{-x},\ x \in \mathbb{Z}^+,$$

$$\mathbf{p}^+(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1}),\ \mathbf{q}^+(s) = \mathbf{P}_s\mathbf{R}_s^{-1},$$

$$\overline{\mathbf{P}}^+(s,x) = \mathbf{P}_s\mathbf{R}_s^{-x-1},\ x \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Для мінімуму $\xi^-(\theta_s)$ маємо

$$\mathbf{g}_-(s,z) = ([\mathbf{g}(s,z)]_-^0 - [\mathbf{g}(s,z)]_-\mathbf{R}_s^{-1}z)(\mathbf{p}_+(s))^{-1}\mathbf{P}_s,$$

$$\mathbf{p}_x^-(s) = (\mathbf{p}_x(s) - \mathbf{p}_{x-1}(s)\mathbf{R}_s^{-1})(\mathbf{p}_+(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\ x \in \mathbb{Z}_-^0,$$

де $\mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^+(s)$.

Як бачимо в теоремі 2.1.1 і теоремі 2.1.2 показано, що одна з пари компонент основної факторизаційної тотожності (1.1.28) є матричною дробово-лінійною функцією відносно z, а інша компонента цих пар визначається застосуванням операції проектування до генератриси розподілу самого процесу. Наступне наше завдання полягає в тому, щоб із пар $\{\mathbf{g}_+(s,z),\, \mathbf{g}^-(s,z)\}$ і $\{\mathbf{g}_-(s,z),\, \mathbf{g}^+(s,z)\}$ виразити "непрості" генератриси розподілів після розкриття операції проектування.

Зауважимо, що для "простих" генератрис та відповідних розподілів в теоремах 7.5, 7.6 (див. [29]) встановлені подвоєні матричні узагальнення, так і для непростих генератрис і розподілів одержані подвійні матричні узагальнення з відповідними наслідками.

Далі кумулянту (1.1.6) зведемо до вигляду

$$\mathbf{K}(z)=(z-1)\big[\mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}-z^{-1}(\mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)+\mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_-(z))\big]+\mathbf{Q}, \quad (2.1.37)$$

де $\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)=\sum\limits_{x\le 0} z^x\mathbf{P}\{\xi_k^{(1)}<x\}$, $\widetilde{\mathbf{F}}_-(z)=\sum\limits_{x\le 0} z^x\|p_{kr}P\{\chi_{kr}^{(1)}<x\}\|$, $|z|\ge 1$,

$$\mathbf{K}(1)=\mathbf{Q},\ \mathbf{K}(\infty)=-(\mathbf{\Lambda}_1+(\mathbf{\Lambda}_2+\mathbf{N})\mathbf{C})\mathbf{C}^{-1}.$$

Теорема 2.1.3. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху процес на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $|z|\ge 1$ генератриса доповнення до максимуму $\overline{\xi}(\theta_s)$ задовольняє наступні співвідношення*

$$\mathbf{g}^-(s,z)=(\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}=$$
$$=(\mathbf{I}-\mathbf{C})[\mathbf{I}+(1-z)(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}](\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}, \quad (2.1.38)$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^-(s)=(\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}\Big(\sum_{r=-\infty}^{x}\mathbf{C}^{x-r}\mathbf{p}_r(s)-$$
$$-\mathbf{Z}_s^{-1}\sum_{r=-\infty}^{x-1}\mathbf{C}^{x-r-1}\mathbf{p}_r(s)\Big),\ x\in\mathbb{Z}_-, \quad (2.1.39)$$

$$\mathbf{p}^-(s)=(\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}s(s\mathbf{C}+\mathbf{\Lambda}_1+(\mathbf{\Lambda}_2+\mathbf{N})\mathbf{C})^{-1}, \quad (2.1.40)$$

$$\mathbf{g}^-(s,1)=\mathbf{P}_s, \quad (2.1.41)$$

а генератриса мінімуму $\xi^-(\theta_s)$ виражається через матричний параметр $\mathbf{R}_s^{-1}$ геометричного розподілу та збурення кумулянти $\mathbf{K}(z)$

$$\mathbf{g}_-(s,z)=s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C})=$$
$$=s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}[\mathbf{I}+(1-z)(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})^{-1}](\mathbf{I}-\mathbf{C}), \quad (2.1.42)$$

$$\mathbf{p}_x^-(s) = \Big(\sum_{r=-\infty}^{x} \mathbf{p}_r(s)\mathbf{C}^{x-r} - \mathbf{R}_s^{-1}\sum_{r=-\infty}^{x-1} \mathbf{p}_r(s)\mathbf{C}^{x-r-1}\Big)\cdot$$

$$\cdot(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}),\ x\in\mathbb{Z}_-, \quad (2.1.43)$$

$$\mathbf{p}_-(s) = s(s\mathbf{C}+\mathbf{\Lambda}_1+\mathbf{C}(\mathbf{\Lambda}_2+\mathbf{N}))^{-1}(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}), \quad (2.1.44)$$

$$\mathbf{g}_-(s,1) = \mathbf{P}_s. \quad (2.1.45)$$

Доведення. З першої рівності в (1.1.28) отримаємо

$$\mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{P}_s(\mathbf{g}_+(s,z))^{-1}\mathbf{g}(s,z).$$

Тоді згідно з (1.1.11) і (2.1.1):

$$\mathbf{g}^-(s,z) = (\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}.$$

Отже, перше співвідношення в (2.1.38) доведено. Друге співвідношення в (2.1.38) отримуємо із першого співвідношення, шляхом перетворення множника до виду

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1}z) = (\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I}z) =$$

$$= (\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I}+\mathbf{I}-\mathbf{I}z) = [\mathbf{I}+(1-z)(\mathbf{Z}_s-\mathbf{I})^{-1}].$$

Обернувши (2.1.38) по z, одержимо (2.1.39). (2.1.40) і (2.1.41) отримуємо із (2.1.38) після граничного переходу відповідно при $z\to\infty$ і $z\to 1$, врахувавши значення $\mathbf{K}(1)$ та $\mathbf{K}(\infty)$.

Аналогічно з другої рівності в (1.1.28) в силу (1.1.11) і (2.1.17) отримаємо перше співвідношення у (2.1.42).

Для доведення другого співвідношення в (2.1.42) множник $(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1}$ зведемо до вигляду

$$(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1}z)(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1}=(\mathbf{R}_s-\mathbf{I}z)(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})^{-1}=$$
$$=(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})^{-1}+(1-z)(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})^{-1}=[\mathbf{I}+(1-z)(\mathbf{R}_s-\mathbf{I})^{-1}].$$

Обернувши (2.1.42) по z, одержимо (2.1.43). (2.1.44) і (2.1.45) отримаємо із першого співвідношення (2.1.42) після граничного переходу відповідно при $z\to\infty$ та $z\to 1$, врахувавши $\mathbf{K}(1)$ та $\mathbf{K}(\infty)$. $\square$

З другої факторизаційної тотожності для майже напівнеперервного процесу $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова випливає важливе твердження про незалежність розподілу $\gamma^+(x)$ від $\tau^+(x)$.

Теорема 2.1.4. *Якщо процес $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху, тоді $\gamma^+(x)$ не залежить від $\tau^+(x)$ і має незалежний від x геометричний розподіл з параметром $\mathbf{C}$*

$$\mathbf{T}_*^+(s,x,z)=(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{E}z^{\gamma^+(x)}=$$
$$=\mathbf{T}_*^+(s,x)(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1},\quad (2.1.46)$$

$$\mathbf{T}_*^+(s,x)=(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1},\mathbf{E}z^{\gamma^+(x)}=(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}.$$

Доведення. Легко довести, що в загальному випадку

$$\frac{\mathbf{g}_+(s,z)-\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)}{z-\varepsilon}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k-\varepsilon^k}{z-\varepsilon}\mathbf{p}_k^+(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{p}_k^+(s)\sum_{r=0}^{k-1}z^{k-1-r}\varepsilon^r=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{z}\right)^r\sum_{k=r+1}^{\infty}\mathbf{p}_k^+(s)z^{k-1}.\quad (2.1.47)$$

При умові майже напівнеперервності зверху і згідно з (2.1.2), друга сума в (2.1.47) набуде вигляду

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(\mathbf{I}-\mathbf{C}\mathbf{Z}_s)\mathbf{Z}_s^{-k}\mathbf{p}_+(s)z^{k-1}=(\mathbf{I}-\mathbf{C}\mathbf{Z}_s)\sum_{k=r}^{\infty}z^k\mathbf{Z}_s^{-k-1}\mathbf{p}_+(s). \quad (2.1.48)$$

Після підстановки (2.1.48) в праву частину (2.1.47), врахувавши (2.1.3), одержимо

$$\frac{\mathbf{g}_+(s,z)-\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)}{z-\varepsilon}=(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})\sum_{r=0}^{\infty}\left(\varepsilon\mathbf{Z}_s^{-1}\right)^r(\mathbf{I}-z\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}\mathbf{p}_+(s)=$$

$$=(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-z\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}\mathbf{p}_+(s). \quad (2.1.49)$$

Домноживши рівність (2.1.49) на $(1-\varepsilon)z$ та на $(\mathbf{g}_+(s,z))^{-1}$ справа, врахувавши попередньо (2.1.1), отримаємо твірне перетворення (1.1.30) другої факторизаційної тотожності

$$\widetilde{\mathbf{T}}_*^+(s,\varepsilon,z)=(1-\varepsilon)z(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}. \quad (2.1.50)$$

Обернувши (2.1.50) по ε, отримаємо

$$\mathbf{T}_*^+(s,x,z)=(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}=$$

$$=(\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C})z(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}=$$

$$=\mathbf{T}_*^+(s,x)\mathbf{E}z^{\gamma^+(x)},$$

і таким чином (2.1.46) доведено. □

Нехай $Z(t)=\{\xi(t),\,x(t)\}$ – майже напівнеперервний знизу процес, тоді $Z_1(t)=\{\xi_1(t),\,x_1(t)\}=\{-\xi(t),\,x(t)\}$ є майже напівнеперервним зверху. Використовуючи наступні співвідношення між генератрисами екстремумів та доповнень процесів $Z(t)$ і $Z_1(t)$, а також їх розподілів:

$$\mathbf{g}_\mp(s,z)=\mathbf{g}^1_\pm(s,z^{-1}),\ \mathbf{g}^\mp(s,z)=\mathbf{g}_1^\pm(s,z^{-1}),$$

$$\mathbf{p}_{\mp}(s)=\mathbf{p}^1_{\pm}(s),\ \mathbf{p}^{\mp}(s)=\mathbf{p}^{\pm}_1(s),$$
$$\mathbf{q}_{\mp}(s)=\mathbf{q}^1_{\pm}(s),\ \mathbf{q}^{\mp}(s)=\mathbf{q}^{\pm}_1(s),$$
$$\mathbf{p}^{\mp}_x(s)=(\mathbf{p}^{\pm}_{-x}(s))_1,\ \check{\mathbf{p}}^{+}_x(s)=(\check{\mathbf{p}}^{-}_{-x}(s))_1,\ \check{\mathbf{p}}^{-}_x(s)=(\check{\mathbf{p}}^{+}_{-x}(s))_1,$$

можна отримати твердження про уточнення компонент факторизації (1.1.28) для майже напівнеперервних знизу процесів.

Теорема 2.1.5. *Для майже напівнеперервного знизу процесу, заданого на ланцюгу Маркова генератриси екстремумів та їх розподіли визначаються співвідношеннями.*

Мінімуму $\xi^-(\theta_s)$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_-(s,z)&=(z\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}\mathbf{p}_-(s),\\ \mathbf{p}^-_x(s)&=(\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})\big(\mathbf{Z}(s)\big)^{-x-1}\mathbf{p}_-(s),\ \ x\in\mathbb{Z}_-,\\ \mathbf{p}_-(s)&=(\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s,\\ \mathbf{q}_-(s)&=(\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s,\\ \mathbf{P}_-(s,x)&=(\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})\big(\mathbf{Z}(s)\big)^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s, x\in\mathbb{Z}^0_-.\end{aligned}\tag{2.1.51}$$

Генератриса доповнення до мінімуму $\check{\xi}(\theta_s)$ *виражається через генератрису додатних значень* $\xi(\theta_s)$ *та матричний параметр геометричного розподілу* $\mathbf{Z}(s)=\mathbf{q}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1}+\mathbf{p}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{B}$*:*

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^+(s,z)&=\mathbf{P}_s(\mathbf{p}_-(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]^0_+ +\\ &+(\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})z(\mathbf{I}-\mathbf{B}z)^{-1}\mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)}-z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)>0]),\\ \check{\mathbf{p}}^+_x(s)&=\mathbf{P}_s(\mathbf{p}_-(s))^{-1}(\mathbf{p}_x(s)+\\ &+(\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})\mathbf{B}^{-x-1}\mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)>x]), x\in\mathbb{Z}^+_0.\end{aligned}\tag{2.1.52}$$

Для доповнення до максимуму $\overline{\xi}(\theta_s)$ маємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^{-}(s,z) &= \mathbf{p}^{-}(s)[z\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)]^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B}),\\
\check{\mathbf{p}}_x^{-}(s) &= \mathbf{p}^{-}(s)(\mathbf{R}(s))^{-x-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}),\ x\in\mathbb{Z}_{-},\\
\mathbf{p}^{-}(s) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)),\\
\mathbf{q}^{-}(s) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}),\\
\mathbf{P}^{-}(s,x) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\big(\mathbf{R}(s)\big)^{-x}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}), x\in\mathbb{Z}_{-}^{0}.
\end{aligned} \tag{2.1.53}$$

Генератриса максимуму $\xi^{+}(\theta_s)$ виражається через генератрису додатних значень $\xi(\theta_s)$ та матричний параметр геометричного розподілу $\mathbf{R}(s)=\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^{-}(s)+\mathbf{B}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^{-}(s)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{+}(s,z) &= ([\mathbf{g}(s,z)]_{+}^{0}+\mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)}-z^{\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)>0])\cdot\\
&\cdot(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}))(\mathbf{p}^{-}(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\\
\mathbf{p}_x^{+}(s) &= (\mathbf{p}_x(s)+\mathbf{E}[\mathbf{B}^{\,\xi(\theta_s)},\ \xi(\theta_s)>x])\cdot\\
&\cdot\mathbf{B}^{-x-1}(\mathbf{B}-\mathbf{R}(s)))(\mathbf{p}^{-}(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\ x\in\mathbb{Z}_{0}^{+}.
\end{aligned} \tag{2.1.54}$$

Оскільки $\mathbf{g}_{-}(s,z)$ в (2.1.51) не є генетрисою "строгого" геометричного розподілу, то її можна записати таким чином

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{-}(s,z) &= (z\mathbf{I}-\mathbf{B})(z\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s=\\
&= (z\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{g}_{-}^{*}(s,z)(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s,
\end{aligned} \tag{2.1.55}$$

де $\mathbf{g}_{-}^{*}(s,z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))$ генератриса геометричного розподілу на $\mathbb{Z}_{-}$ з матричним параметром $\mathbf{Z}(s)$.

Оскільки $\mathbf{g}^{-}(s,z)$ в (2.1.53) не є також генетрисою "строгого" геометричного розподілу, то її теж можна записати таким чином

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^{-}(s,z) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))(z\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B})=\\
&= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{g}_{*}^{-}(s,z)(z\mathbf{I}-\mathbf{B}),
\end{aligned} \tag{2.1.56}$$

де $\mathbf{g}_*^-(s,z) = (\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))(z\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1}$ генератриса геометричного розподілу на $\mathbb{Z}_-$ з матричним параметром $\mathbf{R}(s)$.

Співвідношення (2.1.55) можна переписати

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_-(s,z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{g}_-^*(s,z)(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s = \\ = \mathbf{B}_-^*(z)(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{g}_-^*(s,z)(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s. \end{aligned} \tag{2.1.57}$$

Лінійну функцію $\mathbf{B}_-^*(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}$ назвемо матричною діагональною квазігенератрисою з бернуллівськими імовірностями

$$\mathbf{p}_{\mathbf{B}}^0 = -\mathbf{B}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} < \mathbf{0},\ \mathbf{q}_{\mathbf{B}}^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} > \mathbf{0}.$$

Аналогічно (2.1.56) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{g}_*^-(s,z)(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{B}) = \\ = \mathbf{P}_s(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{g}_*^-(s,z)(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{B}_*^-(z). \end{aligned} \tag{2.1.58}$$

Лінійна функція $\mathbf{B}_*^-(z) = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{B})$ називається матричною діагональною квазігенератрисою з бернуллівськими імовірностями

$$\check{\mathbf{p}}_{\mathbf{B}}^0 = -(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} < \mathbf{0},\ \check{\mathbf{q}}_{\mathbf{B}}^0 = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} > \mathbf{0}.$$

За рахунок квазірозподілу Бернуллі, множина значень ξ^- та $\overline{\xi}$ поповнюється значенням $\mathbf{0}$.

Зауважимо, що генератриса $\xi^+(\theta_s)$ в (2.1.54) використовується при визначенні генератрис $\{\tau^+(x), \gamma_k(x)\}$, $k = \overline{1,3}$.

З теореми 2.1.5 випливає

Наслідок 2.1.3. Для напівнеперервних знизу процесів $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ генератриси та розподіли екстремумів і їх доповнень визначаються співвідношеннями: для мінімуму $\xi^-(\theta_s)$

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_-(s,z) = z(z\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}\mathbf{p}_-(s),\\ \mathbf{p}_x^-(s) = \big(\mathbf{Z}(s)\big)^x\mathbf{p}_-(s),\ \ x\in\mathbb{Z}_-,\\ \mathbf{p}_-(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))\mathbf{P}_s,\ \mathbf{q}_-(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{P}_s,\\ \mathbf{P}_-(s,x) = \big(\mathbf{Z}(s)\big)^{-x+1}\mathbf{P}_s, x\in\mathbb{Z}_-^0,\end{aligned}$$

для доповнення до мінімуму $\check{\xi}(\theta_s)$ маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_-(s))^{-1}([\mathbf{g}(s,z)]_+^0 - z\mathbf{Z}(s)[\mathbf{g}(s,z)]_+),\\ \check{\mathbf{p}}_x^+(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{p}_-(s))^{-1}(\mathbf{p}_x(s)-\mathbf{Z}(s)\mathbf{p}_{x+1}(s)),\ x\in\mathbb{Z}_0^+,\end{aligned}$$

де $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{q}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1}$.

Для доповнення до максимуму $\overline{\xi}(\theta_s)$ маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^-(s,z) = \mathbf{p}^-(s)[z\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)]^{-1}z,\\ \check{\mathbf{p}}_x^-(s) = \mathbf{p}^-(s)(\mathbf{R}(s))^{-x},\ x\in\mathbb{Z}_-,\\ \mathbf{p}^-(s) = \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)),\ \mathbf{q}^-(s) = \mathbf{P}_s\mathbf{R}(s),\\ \mathbf{P}^-(s,x) = \mathbf{P}_s\big(\mathbf{R}(s)\big)^{-x+1}, x\in\mathbb{Z}_-^0,\end{aligned}$$

для максимуму $\xi^+(\theta_s)$ маємо:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_+(s,z) = ([\mathbf{g}(s,z)]_+^0 - [\mathbf{g}(s,z)]_+z^{-1}\mathbf{R}(s))(\mathbf{p}^-(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\\ \mathbf{p}_x^+(s) = (\mathbf{p}_x(s)-\mathbf{p}_{x+1}(s)\mathbf{R}(s))(\mathbf{p}^-(s))^{-1}\mathbf{P}_s,\ x\in\mathbb{Z}_0^+,\end{aligned}$$

де $\mathbf{R}(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s)$.

Згідно з результатами теореми 2.1.5 деякі "нескладні" компоненти основної факторизаційної тотожності в (1.1.28) є матричними дробово-лінійними функціями, а інші виражаються за допомогою операції проектування. Тому, як і у випадку майже напівнеперервних зверху процесів, розглянемо кумулянту (1.1.10), яка представляється у вигляді

$$\mathbf{K}(z) = (1-z)[\mathbf{\Lambda}_2(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} - (\mathbf{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{F}}_1(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_+(z))] + \mathbf{Q}, \quad (2.1.59)$$

де $\widetilde{\mathbf{F}}_1(z) = \sum\limits_{x\geq 0} z^x \mathbf{P}\{\xi_k^{(1)} > x\}$, $\widetilde{\mathbf{F}}_+(z) = \sum\limits_{x\geq 0} z^x \|p_{kr} P\{\chi_{kr}^{(1)} > x\}\|$, $|z| \leq 1$,

$$\mathbf{K}(1) = \mathbf{Q},\ \mathbf{K}(0) = -\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{\Lambda}_1 - \mathbf{N}.$$

Аналогічну теорему до теореми 2.1.3 наведемо без доведення.

Теорема 2.1.6. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу процес на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $|z| \leq 1$ генератриса максимуму $\xi^+(\theta_s)$ має вигляд*

$$\mathbf{g}_+(s,z) = s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B}) =$$
$$= s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}[\mathbf{I}+(z-1)(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}](\mathbf{I}-\mathbf{B}), \quad (2.1.60)$$

$$\mathbf{p}_x^+(s) = \Big(\sum_{r=x}^{+\infty} \mathbf{p}_r(s)\mathbf{B}^{r-x} - \sum_{r=x+1}^{+\infty} \mathbf{p}_r(s)\mathbf{B}^{r-x-1}\mathbf{R}(s)\Big)\cdot$$
$$\cdot (\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B}),\ x \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.1.61)$$

$$\mathbf{p}_+(s) = s(s\mathbf{B} + \mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{N}))^{-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B}), \quad (2.1.62)$$

$$\mathbf{g}_+(s,1) = \mathbf{P}_s. \quad (2.1.63)$$

Генератриса доповнення до мінімуму $\check{\xi}(\theta_s)$ задовольняє наступні співвідношення

$$\mathbf{g}^+(s,z) = (\mathbf{I}-\mathbf{B})(\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1} =$$
$$= (\mathbf{I}-\mathbf{B})[\mathbf{I}+(z-1)(\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}](z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(z))^{-1}, \quad (2.1.64)$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{B})(\mathbf{I}-\mathbf{Z}(s))^{-1}\Big(\sum_{r=x}^{+\infty}\mathbf{B}^{r-x}\mathbf{p}_r(s) - \\ - \mathbf{Z}(s)\sum_{r=x+1}^{+\infty}\mathbf{B}^{r-x-1}\mathbf{p}_r(s)\Big),\ x\in\mathbb{Z}_+, \quad (2.1.65)$$

$$\mathbf{p}^+(s) = (\mathbf{I}-\mathbf{B})((\mathbf{Z}(s))^{-1}-\mathbf{I})^{-1}s(s\mathbf{B}+\mathbf{\Lambda}_2+(\mathbf{\Lambda}_1+\mathbf{N})\mathbf{B})^{-1}, \quad (2.1.66)$$

$$\mathbf{g}^+(s,1) = \mathbf{P}_s. \quad (2.1.67)$$

2.2 Розподіли абсолютних екстремумів процесу та їх доповнень для майже напівнеперервних процесів

Для отримання співвідношень розподілів абсолютних екстремумів нам знадобиться навести деякі нові відомості про уточнення вигляду граничних матриць $\mathbf{Z}_s^{-1}$, $\mathbf{R}_s^{-1}$, $\mathbf{Z}(s)$, $\mathbf{R}(s)$ при $s\to 0$.

Для майже напівнеперервного зверху цілочислового пуассонівського процесу $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова $x(t)$ з кумулянтою (2.1.37) розглянемо вкладений ланцюг Маркова $y_*^z = x(\tau^+(z-1))$ $(z\geq 1)$, $y_*^0 = x(0)$ з матрицею перехідних ймовірностей $\mathbf{P}_*^1 = \|P\{y_*^1 = r|y_*^0 = k\}\| = \mathbf{P}_*$ та твірною матрицею $\mathbf{Q}_* = \mathbf{P}_* - \mathbf{I}$. Тоді

$$\mathbf{P}_*^n = \|P\{y_*^n = r|y_*^0 = k\}\| = (\mathbf{P}_*)^n,\ n\geq 1,$$

а після усереднення по $\widetilde{\nu}_\varepsilon$ одержимо

$$(1-\varepsilon)\sum_{n\geq 0}\varepsilon^n(\mathbf{P}_*)^n = (1-\varepsilon)\left(\mathbf{I}-\varepsilon\mathbf{P}_*\right)^{-1}; \quad (2.2.1)$$

де $\mathbf{P}\{\tau^+(0)<\infty\} = \|P\{\tau^+(0)<\infty,\ y_*^1 = r|y_*^0 = k\}\|$,

$$\mathbf{T}_*^+(s,0) = \|E[e^{-s\tau^+(0)},\ y_*^1 = r|y_*^0 = k, \tau^+(0)<\infty]\|,\ \ k,r=\overline{1,m}.$$

Зворотній ланцюг Маркова до вкладеного з матрицею перехідних ймовірностей $\widehat{\mathbf{P}}_* = \|P\{\widehat{y}^1_* = r|\widehat{y}^0_* = k\}\|$ і твірною матрицею $\widehat{\mathbf{Q}}_* = \mathbf{S}\mathbf{Q}^T_*\mathbf{S}^{-1}$, $\widehat{\mathbf{Q}}_* = \widehat{\mathbf{P}}_* - \mathbf{I}$,

$$\mathbf{P}\{\widehat{\tau}^+(0) < \infty\} = \|P\{\widehat{\tau}^+(0) < \infty, \, \widehat{y}^1_* = r|\widehat{y}^0_* = k\}\|,$$

$$\widehat{\mathbf{T}}^+_*(s,0) = \|E[e^{-s\widehat{\tau}^+(0)}, \, \widehat{y}^1_* = r|\widehat{y}^0_* = k, \widehat{\tau}^+(0) < \infty]\|, \; k, r = \overline{1,m}.$$

Введемо позначення

$$\widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{P}}_*)^T\mathbf{S}^{-1}, \, \widehat{\mathbf{Q}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{Q}}_*)^T\mathbf{S}^{-1},$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{S}(\mathbf{E}[\widehat{\tau}^+(0)])^T\mathbf{S}^{-1}, \widehat{\mathbf{T}}^+_{*\mathbf{S}}(s,0) = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{T}}^+_*(s,0))^T\mathbf{S}^{-1}.$$

Згідно з (1.2.10)-(1.2.12) та співвідношень (2.1.8) і (2.1.24), матричні параметри $\mathbf{Z}_s^{-1}$, $\mathbf{R}_s^{-1}$ виражаються через генератриси $\mathbf{T}^+_*(s,0)$, $\widehat{\mathbf{T}}^+_{*\mathbf{S}}(s,0)$:

$$\mathbf{Z}_s^{-1} = \mathbf{T}^+_*(s,0) + (\mathbf{I} - \mathbf{T}^+_*(s,0))\mathbf{C}, \tag{2.2.2}$$

$$\mathbf{R}_s^{-1} = \widehat{\mathbf{T}}^+_{*\mathbf{S}}(s,0) + \mathbf{C}(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}^+_{*\mathbf{S}}(s,0)). \tag{2.2.3}$$

Розглянемо випадки:

1. Якщо $m^0_1 \geq 0$, тоді $\mathbf{T}^+_*(0,0) = \mathbf{P}_*$, $\widehat{\mathbf{T}}^+_{*\mathbf{S}}(0,0) = \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}$ і генератриса $\tau^+(0)$ при $s \to 0$ задовольняє наближення

$$\mathbf{I} - \mathbf{T}^+_*(s,0) = -\mathbf{Q}_* + s\mathbf{M}_* + o(s), \; \mathbf{M}_* = \mathbf{E}\tau^+(0) > 0. \tag{2.2.4}$$

Позначимо стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова y^1_* через

$$\mathbf{\Pi}_* = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q}_*)^{-1} = \|\pi_{*kr}\|, \, \pi_{*kr} = \rho_{*r}, \, k, r = \overline{1,m},$$

а усереднення $\mathbf{M}_*$ по стаціонарному розподілу $\mathbf{\Pi}_*$

$$\mu^+_* = \sum_{k=1}^m \rho_{*k} \sum_{r=1}^m E[\tau^+(0), \, y^1_* = r|y^0_* = k].$$

Генератриса $\widehat{\tau}^+(0)$ при $s \to 0$ задовольняє наближення

$$\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_*^+(s,0) = -\widehat{\mathbf{Q}}_* + s\widehat{\mathbf{M}}_* + o(s),\ \widehat{\mathbf{M}}_* = \mathbf{E}\widehat{\tau}^+(0) > 0. \tag{2.2.5}$$

Перепишемо (2.2.5) у вигляді

$$\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(s,0) = -\widehat{\mathbf{Q}}_{*\mathbf{S}} + s\widehat{\mathbf{M}}_{*\mathbf{S}} + o(s). \tag{2.2.6}$$

Відповідно стаціонарний розподіл зворотного ланцюга Маркова з твірною матрицею $\widehat{\mathbf{Q}}_*$ позначимо через

$$\widehat{\mathbf{\Pi}}_* = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{Q}}_*)^{-1} = \|\widehat{\pi}_{*kr}\|,\ \widehat{\pi}_{*kr} = \widehat{\rho}_{*r},\ k,r = \overline{1,m},$$

а усереднення $\widehat{\mathbf{M}}_*$ по стаціонарному розподілу $\widehat{\mathbf{\Pi}}_*$

$$\widehat{\mu}_*^+ = \sum_{k=1}^m \widehat{\rho}_{*k} \sum_{r=1}^m E[\widehat{\tau}^+(0),\ \widehat{y}_*^1 = r|\widehat{y}_*^0 = k].$$

При $s \to 0$ співвідношення (2.2.2) та (2.2.3) будуть мати наступний вигляд

$$\begin{gathered} \mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{P}_* + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_*)\mathbf{C}, \\ \mathbf{R}_0^{-1} = \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}} + \mathbf{C}(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}), \end{gathered} \tag{2.2.7}$$

$$\mathbf{q}_+^*(0) = \mathbf{P}_*,\ \mathbf{p}_+^*(0) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_*,\ \mathbf{q}_*^+(0) = \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}},\ \mathbf{p}_*^+(0) = \mathbf{I} - \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}.$$

2. Якщо $m_1^0 < 0$, тоді $\mathbf{T}_*^+(0,0) < \mathbf{P}_*$, $\widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(0,0) < \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}}$. З (2.1.1) та (2.1.2) при $s \to 0$:

$$\begin{gathered} \mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{q}_+^*(0) + \mathbf{p}_+^*(0)\mathbf{C}, \\ \mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{q}_*^+(0) + \mathbf{C}\mathbf{p}_*^+(0), \end{gathered} \tag{2.2.8}$$

$$\mathbf{q}_+^*(0) < \mathbf{P}_*,\ \mathbf{p}_+^*(0) = \mathbf{I} - \mathbf{q}_+^*(0),\ \mathbf{q}_*^+(0) < \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{S}},\ \mathbf{p}_*^+(0) = \mathbf{I} - \mathbf{q}_*^+(0).$$

Розглянемо майже напівнеперервний знизу цілочисловий процес $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова з кумулянтою (2.1.53).

Аналогічно до випадку майже напівнеперервного зверху процесу розглянемо для майже напівнеперервного знизу процесу вкладений ланцюг Маркова $y_z^* = x(\tau^-(1-z))\,(z \geq 1)$, $y_0^* = x(0)$ з матрицею перехідних ймовірностей

$$\mathbf{P}_1^* = \|P\{y_1^* = r | y_0^* = k\}\| = \mathbf{P}^*$$

та твірною матрицею $\mathbf{Q}^* = \mathbf{P}^* - \mathbf{I}$. Тоді

$$\mathbf{P}_n^* = \|P\{y_n^* = r | y_0^* = k\}\| = (\mathbf{P}^*)^n\,,\, n \geq 1.$$

Після усереднення по $\widetilde{\nu}_\varepsilon$ одержимо

$$(1-\varepsilon)\sum_{n\geq 0}\varepsilon^n(\mathbf{P}^*)^n = (1-\varepsilon)\left(\mathbf{I} - \varepsilon\mathbf{P}^*\right)^{-1},$$

де $\mathbf{P}\{\tau^-(0) < \infty\} = \|P\{\tau^-(0) < \infty,\, y_*^1 = r | y_*^0 = k\}\|$,

$$\mathbf{T}_*^-(s,0) = \|E[e^{-s\tau^-(0)},\, y_1^* = r | y_0^* = k, \tau^-(0) < \infty]\|.$$

Зворотній ланцюг Маркова до вкладеного з матрицею перехідних ймовірностей $\widehat{\mathbf{P}}^* = \|P\{\widehat{y}_1^* = r | \widehat{y}_0^* = k\}\|$ $(k, r = \overline{1,m}\,)$ та твірною матрицею

$$\widehat{\mathbf{Q}}^* = \mathbf{S}(\mathbf{Q}^*)^T\mathbf{S}^{-1},\ \widehat{\mathbf{Q}}^* = \widehat{\mathbf{P}}^{\,*} - \mathbf{I},$$

$$\mathbf{P}\{\widehat{\tau}^-(0) < \infty\} = \|P\{\widehat{\tau}^-(0) < \infty,\, \widehat{y}_1^* = r | \widehat{y}_0^* = k\}\|,$$
$$\widehat{\mathbf{T}}_*^-(s,0) = \|E[e^{-s\widehat{\tau}^-(0)},\, \widehat{y}_1^* = r | \widehat{y}_0^* = k, \widehat{\tau}^{\,-}(0) < \infty]\|.$$

Позначимо

$$\widehat{\mathbf{P}}_{\mathbf{S}}^* = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{P}}^*)^T\mathbf{S}^{-1},\ \widehat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{S}}^* = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{Q}}^*)^T\mathbf{S}^{-1},$$
$$\widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{S}}^* = \mathbf{S}(\mathbf{E}[\widehat{\tau}^-(0)])^T\mathbf{S}^{-1}, \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^-(s,0) = \mathbf{S}(\widehat{\mathbf{T}}_*^-(s,0))^T\mathbf{S}^{-1}.$$

Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (2.1.53), згідно співвідношень (1.2.10)-(1.2.12) в теоремі 2.1.6, матричні параметри $\mathbf{Z}(s)$, $\mathbf{R}(s)$ виражаються через генератриси $\mathbf{T}_*^-(s,0)$, $\widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^-(s,0)$:

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{T}_*^-(s,0) + (\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^-(s,0))\mathbf{B}, \tag{2.2.9}$$

$$\mathbf{R}(s) = \widehat{\mathbf{T}}^{-}_{*\mathbf{S}}(s,0) + \mathbf{B}(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}^{-}_{*\mathbf{S}}(s,0)). \tag{2.2.10}$$

Стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова

$$\mathbf{\Pi}^* = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \mathbf{Q}^*)^{-1} = \|\pi^*_{kr}\|,\ \pi^*_{kr} = \rho^*_r,\ k,r = \overline{1,m},$$

а усереднення $\mathbf{M}^*$ по ρ^*_r

$$\mu^-_* = \sum_{k=1}^{m} \rho^*_k \sum_{r=1}^{m} E[\tau^-(0),\ y^*_1 = r | y^*_0 = k].$$

Відповідно для зворотного ланцюга Маркова з твірною матрицею $\widehat{\mathbf{Q}}^*$ стаціонарний розподіл

$$\widehat{\mathbf{\Pi}}^* = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{Q}}^*)^{-1} = \|\widehat{\pi}^*_{kr}\|,\ \widehat{\pi}^*_{kr} = \widehat{\rho}^*_r,\ k,r = \overline{1,m},$$

а усереднення $\widehat{\mathbf{M}}^*$ по $\widehat{\rho}^*_r$

$$\widehat{\mu}^-_* = \sum_{k=1}^{m} \widehat{\rho}^*_k \sum_{r=1}^{m} E[\widehat{\tau}^-(0),\ \widehat{y}^*_1 = r | \widehat{y}^*_0 = k].$$

Аналогічно до майже напівнеперервного зверху процесу мають місце наступні аналогічні випадки для майже напівнеперервних знизу процесів:

1. Якщо $m^0_1 \leq 0$, тоді має місце $\mathbf{T}^-_*(0,0) = \mathbf{P}^*$, $\widehat{\mathbf{T}}^-_*(0,0) = \widehat{\mathbf{P}}^*$ і співвідношення (2.2.9) та (2.2.10) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(0) &= \mathbf{P}^* + (\mathbf{I} - \mathbf{P}^*)\mathbf{B}, \\ \mathbf{R}(0) &= \widehat{\mathbf{P}}^*_{\mathbf{S}} + \mathbf{B}(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{P}}^*_{\mathbf{S}}), \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

$$\mathbf{q}^*_-(0) = \mathbf{P}^*,\ \mathbf{p}^*_-(0) = \mathbf{I} - \mathbf{P}^*,\ \mathbf{q}^-_*(0) = \widehat{\mathbf{P}}^*_{\mathbf{S}},\ \mathbf{p}^-_*(0) = \mathbf{I} - \widehat{\mathbf{P}}^*_{\mathbf{S}}.$$

2. Якщо $m^0_1 > 0$, тоді $\mathbf{T}^-_*(0,0) < \mathbf{P}^*$, $\widehat{\mathbf{T}}^-_*(0,0) < \widehat{\mathbf{P}}^*$. З (2.2.9), (2.2.10) при $s \to 0$ випливає, що

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(0) &= \mathbf{q}^*_-(0) + \mathbf{p}^*_-(0)\mathbf{B}, \\ \mathbf{R}(0) &= \mathbf{q}^-_*(0) + \mathbf{B}\mathbf{p}^-_*(0), \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

$$\mathbf{q}^*_-(0) < \mathbf{P}^*,\ \mathbf{p}^*_-(0) = \mathbf{I} - \mathbf{q}^*_-(0),\ \mathbf{q}^-_*(0) < \widehat{\mathbf{P}}^*_{\mathbf{S}},\ \mathbf{p}^-_*(0) = \mathbf{I} - \mathbf{q}^-_*(0).$$

Згідно властивостей матричних параметрів встановлюється

Теорема 2.2.1. *Для майже напівнеперервного зверху процесу:*

1) Якщо $m_1^0 \geq 0$*, тоді* $|\mathbf{p}_+^*(0)| = |\mathbf{p}_*^+(0)| = 0$*;*

2) Якщо $m_1^0 < 0$*, тоді* $|\mathbf{p}_+^*(0)| \neq 0$ *та* $|\mathbf{p}_*^+(0)| \neq 0$*.*

Для майже напівнеперервного знизу процесу:

3) Якщо $m_1^0 \leq 0$*, тоді* $|\mathbf{p}_-^*(0)| = |\mathbf{p}_*^-(0)| = 0$*;*

4) Якщо $m_1^0 > 0$*, тоді* $|\mathbf{p}_-^*(0)| \neq 0$ *та* $|\mathbf{p}_*^-(0)| \neq 0$*.*

Доведення. Розлянемо майже напівнеперервний зверху процес. Якщо $m_1^0 \geq 0$, тоді при $s \to 0$ із (2.1.3) та (2.1.19), врахувавши відповідно (2.2.7), маємо

$$\mathbf{p}_+^*(0) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0^{-1}\right)(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_* = -\left(\mathbf{P}_* - \mathbf{I}\right) = -\mathbf{Q}_*,$$

$$\mathbf{p}_*^+(0) = (\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^{-1}\right) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_* = -\mathbf{Q}_*.$$

А звідси випливає, що $|\mathbf{p}_+^*(0)| = |\mathbf{p}_*^+(0)| = 0$.

Якщо $m_1^0 < 0$, то при $s \to 0$ маємо

$$\mathbf{p}_+^*(0) = \mathbf{I} - \mathbf{q}_+^*(0) = \mathbf{I} - \mathbf{T}_*^+(0,0)\mathbf{P}_0,$$

причому

$$\mathbf{T}_*^+(0,0) < \mathbf{P}_*,\ \sum_{r=1}^{m} t_{kr}^0 = t_k^0 < 1,\ \mathbf{T}_*^+(0,0)\mathbf{P}_0 = \|t_k^0 \delta_{kr}\| = \mathbf{T}_{dg}^0 \mathbf{P}_0,\ k, r = \overline{1,m}.$$

Позначимо норму

$$\|\mathbf{T}_*^+(0,0)\| = \max_k t_k^0 = t_+^0 < 1,\ \|\mathbf{P}_0\| = \sum_{r=1}^{m} \pi_r = 1,\ k = \overline{1,m}.$$

При цих умовах

$$\|\mathbf{T}_*^+(0,0)\mathbf{P}_0\| = t_+^0 < 1$$

і матричний ряд

$$\sum_{l \geq 0} \big(\mathbf{T}_*^+(0,0)\mathbf{P}_0\big)^l = \big(\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^+(0,0)\mathbf{P}_0\big)^{-1}$$

збіжний.

Отже, існує $(\mathbf{p}_+^*(0))^{-1}$, тому $|\mathbf{p}_+^*(0)| \neq 0$. Аналогічно доводиться, що $|\mathbf{p}_*^+(0)| \neq 0$.

Нехай $Y(t) = \{\xi(t),\, x(t)\}$ – майже напівнеперервний знизу процес, тоді $\acute{Y}(t) = \{-\xi(t),\, x(t)\}$ – майже напівнеперервний зверху процес, при цьому $m_1^0 = -\acute{m}_1^0$ та $\acute{\mathbf{p}}_+^*(s) = \mathbf{p}_-^*(s)$, $\acute{\mathbf{p}}_*^+(s) = \mathbf{p}_*^-(s)$. Тому з 1), 2) випливає 3), 4) відповідно. □

Із леми 1.2.1 -1.2.2 і співвідношень (2.1.1)-(2.1.3) та (2.1.7) випливає

Лема 2.2.1. *Якщо $\xi(t)$ – майже напівнеперервний зверху процес, тоді при $0 \leq m_1^0 < \infty$ мають місце наступні граничні співвідношення*

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^+(s,0))^{-1} = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{M}_* - \mathbf{Q}_*)^{-1} = \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*, \\ \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})^{-1} = \frac{1}{\mu_*^+}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{\Pi}_*, \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^+(s,0))^{-1} = \lim_{s\to 0} s(s\widehat{\mathbf{M}}_* - \widehat{\mathbf{Q}}_*)^{-1} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}, \\ \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{R}_s^{-1})^{-1} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Доведення. При $m_1^0 \geq 0$, згідно леми 1.2.1, із співвідношень (2.2.4) та (2.2.6) при $s \to 0$ відповідно отримуємо перші співвідношення в (2.2.13) та (2.2.14).

Розглянемо $s(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}$, $s(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1}$, які згідно (2.2.2) і (2.2.3) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} s(\mathbf{I}-\mathbf{Z}_s^{-1})^{-1} &= s(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{T}_*^+(s,0))^{-1}, \\ s(\mathbf{I}-\mathbf{R}_s^{-1})^{-1} &= s(\mathbf{I}-\mathbf{T}_{*\mathbf{S}}^+(s,0))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Із (2.2.15) у випадку $m_1^0 \geq 0$ при $s \to 0$, згідно перших співвідношень в (2.2.13) та (2.2.14) відповідно, отримуємо другі співвідношення в (2.2.13) та (2.2.14). $\square$

Зауважимо, що $\mathbf{\Pi}_*\mathbf{P}_* = \mathbf{\Pi}_*$, $\mathbf{P}_*\mathbf{\Pi}_* = \mathbf{\Pi}_*$, $\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{\Pi}_*$.

Теорема 2.2.2. *Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова $x(t)$ при $|z| \geq 1$ маємо:*

1. *Якщо $0 < m_1^0 < \infty$, тоді розподіл абсолютного мінімуму ξ^- невироджений і згідно з (2.2.14) справедливі наступні граничні співвідношення*

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_-(z) = \mathbf{E}z^{\xi^-} = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}_-(s,z) = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}(1-z)(-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}\mathbf{P}_0 = \\ = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}[\mathbf{\Lambda}_1 + (z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{C})(\mathbf{Q}(1-z^{-1})^{-1} - \mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) - \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_-(z))]^{-1}\mathbf{P}_0, \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_-(1) = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{\Pi}_* = \\ = \frac{\nu_0^+}{\widehat{\mu}_*^+ m_1^0}\mathbf{\Pi}_* = \mathbf{P}_0, \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

$$\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{\Pi}_* = \mathbf{P}_0,\ \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}, \tag{2.2.18}$$

де $\nu_0^+ = \sum\limits_{k=1}^{m} \pi_k \nu_k^+$, $\nu_k^+ = (1-c_k)^{-1}$,

$$\mathbf{p}_- = \mathbf{P}\{\xi^- = 0\} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{C}(\mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{N}))^{-1}\mathbf{P}_0, \qquad (2.2.19)$$

$\mathbf{R}_0^{-1}$ *визначається в (2.2.7), а* $\check{\xi}$ *має вироджений розподіл.*

2. *Якщо* $-\infty < m_1^0 < 0$, *тоді розподіл* ξ^- *вироджений, а розподіл* $\check{\xi}$ *невироджений і визначається наступними граничними співвідношеннями при* $s \to 0$

$$\mathbf{g}^+(z) = \mathbf{p}^+[\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^{-1}z]^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z), \qquad (2.2.20)$$

$$\check{\mathbf{p}}_x^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi} = x\} = \mathbf{p}^+\mathbf{R}_0^{-x}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0\mathbf{C}),\ x \in \mathbb{Z}_+, \qquad (2.2.21)$$

$$\mathbf{p}^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi} = 0\} = \mathbf{P}_0\mathbf{p}_*^+(0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0^{-1}), \qquad (2.2.22)$$

$$\mathbf{q}^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi} > 0\} = \mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}(\mathbf{R}_0^{-1} - \mathbf{C}), \qquad (2.2.23)$$

$$\mathbf{P}\{\check{\xi} > x\} = \mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{R}_0^{-x}(\mathbf{I} - \mathbf{R}_0\mathbf{C}),\ x \in \mathbb{Z}_0^+, \qquad (2.2.24)$$

де $\mathbf{R}_0^{-1}$ *визначається згідно з (2.2.8).*

3. *Якщо* $m_1^0 = 0$, *тоді розподіли* ξ^-, $\check{\xi}$ *вироджені.*

Доведення. У випадку $0 < m_1^0 < \infty$ генератриса абсолютного мінімуму згідно з (2.2.14) визначається із другого співвідношення в (2.1.42) при $s \to 0$, після використання вигляду (2.1.37) кумулянти $\mathbf{K}(z)$

$$\mathbf{g}_-(z) = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}_-(s,z) =$$

$$= (1-z)(-\mathbf{K}(z))^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{P}}_{*\mathbf{s}}z)\frac{1}{\widehat{\mu}_*^+}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{s}} =$$

$$= \frac{1}{\widehat{\mu}_*^+}[\mathbf{\Lambda}_1 + (z^{-1}\mathbf{I} - \mathbf{C})(\mathbf{Q}(1-z^{-1})^{-1} - \mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) - \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_-(z))]^{-1}\mathbf{\Pi}_*. \qquad (2.2.25)$$

Першу рівність в (2.2.17) отримуємо після граничного переходу при $z \to 1$ у другому рядку (2.2.25) та врахування умови леми 1.2.2. Із умови $\widehat{\mathbf{\Pi}}_{*\mathbf{S}} = \mathbf{\Pi}_*$, отримаємо другу рівність в (2.2.17). Перетворивши добуток

$$\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{\Pi}_* = \nu_0^+\mathbf{\Pi}_*,$$

запишемо третю рівність в (2.2.17). Здійснивши граничний перехід у (2.1.45) (див. теорему 2.1.3) при $s \to 0$, отримуємо $\mathbf{g}_-(1) = \mathbf{P}_0$. Таким чином, (2.2.17) і (2.2.18) доведено.

Врахувавши умови (2.2.18) в (2.2.25), отримаємо (2.2.16). Співвідношення (2.2.19) визначаємо із (2.1.44) при $s \to 0$, але попередньо врахувавши (2.2.14) та (2.2.18).

Остання частина в (2.2.16) виражена через $\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)$, $\widetilde{\mathbf{F}}_-(z) \in \mathbb{L}_-^0$, згідно з одержаними граничними значеннями $\mathbf{g}^-(s,1)$ та $\mathbf{g}^-(1)$, $\mathbf{g}^-(s,\infty)$, $\mathbf{g}^-(\infty)$ (які не дорівнюють 0 та ∞), які належать до класу $\mathbb{L}_-^0$, дає підставу стверджувати, що операція проектування $[\cdot]_-^0$ не впливає на її складові $\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)$ і $\widetilde{\mathbf{F}}_-(z)$.

Легко довести, що $\check{\xi}$ має вироджений розподіл. З (2.1.19) при $s \to 0$, отримаємо $\lim\limits_{s\to 0}\mathbf{p}^+(s) = \mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{R}_0^{-1}) = \mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{P}_*) = \mathbf{0}$, отже, $\mathbf{g}_+(s,z) \to \mathbf{0}$ при $s \to 0$.

При $-\infty < m_1^0 < 0$, співвідношення (2.2.20)-(2.2.24) випливають відповідно із (2.1.17)-(2.1.21) при $s \to 0$, з врахуванням всіх викладок та позначень.

Якщо $m_1^0 = 0$, то при $s \to 0$ із (2.1.3), (2.1.19) згідно (2.2.7) та умови (1.2.2) $\mathbf{p}_+(s) = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}^+(s) = \mathbf{0}$, отже, $\mathbf{g}_+(s,z) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{0}$ при $s \to 0$. Таким чином, ξ^+ та $\overline{\xi}$ мають вироджені розподіли. $\square$

Майже аналогічно встановлюється

Теорема 2.2.3. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху процес заданий на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $|z| \geq 1$ маємо:*

1. *При $0 < m_1^0 < \infty$ розподіл $\overline{\xi} = \lim_{s\to 0}(\xi(\theta_s) - \xi^+(\theta_s))$ невироджений і згідно з (2.2.13) генератриса визначається граничним співвідношенням при $s \to 0$*

$$\mathbf{g}^-(z) = \mathbf{E}z^{\overline{\xi}} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}\mathbf{P}_0(1-z)(\mathbf{I}-\mathbf{C}z)^{-1}(-\mathbf{K}(z))^{-1} =$$
$$= \frac{m_1^0}{\nu_0^+}\mathbf{P}_0[\mathbf{\Lambda}_1 + (\mathbf{Q}(1-z^{-1})^{-1} - \mathbf{\Lambda}_2\widetilde{\mathbf{F}}_2(z) - \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_-(z))(z^{-1}\mathbf{I}-\mathbf{C})]^{-1}, \tag{2.2.26}$$

$$\mathbf{g}^-(1) = \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0 = \frac{\nu_0^+}{\mu_*^+ m_1^0}\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0, \tag{2.2.27}$$

$$\frac{1}{\mu_*^+} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}, \tag{2.2.28}$$

$$\mathbf{p}^- = \mathbf{P}\{\overline{\xi} = 0\} = \frac{m_1^0}{\nu_0^+}\mathbf{P}_0(\mathbf{\Lambda}_1 + (\mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{N})\mathbf{C})^{-1}, \tag{2.2.29}$$

а ξ^+ має вироджений розподіл.

2. *При $-\infty < m_1^0 < 0$ розподіл $\overline{\xi}$ вироджений, а розподіл ξ^+ невироджений і визначається наступними співвідношеннями*

$$\mathbf{g}_+(z) = (\mathbf{I}-\mathbf{C}z)[\mathbf{I}-\mathbf{Z}_0^{-1}z]^{-1}\mathbf{p}_+, \tag{2.2.30}$$

$$\mathbf{p}_x^+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = x\} = (\mathbf{I}-\mathbf{C}\mathbf{Z}_0)\mathbf{Z}_0^{-x}\mathbf{p}_+,\ x \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.2.31}$$

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = \mathbf{p}_+^*(0)\mathbf{P}_0 = (\mathbf{I}-\mathbf{Z}_0^{-1})(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0, \tag{2.2.32}$$

$$\mathbf{q}_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = (\mathbf{Z}_0^{-1}-\mathbf{C})(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0, \tag{2.2.33}$$

$$\mathbf{P}\{\xi^+ > x\} = (\mathbf{Z}_0^{-1} - \mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0, x \in \mathbb{Z}_+^0, \qquad (2.2.34)$$

де $\mathbf{Z}_0^{-1}$ *визначається згідно (2.2.8).*

3. Якщо $m_1^0 = 0$, *то розподіли* $\overline{\xi}$, ξ^+ *вироджені.*

Доведення. У випадку $0 < m_1^0 < \infty$ генератриса $\mathbf{g}^-(z)$, згідно з (2.2.13), визначається із (2.1.38) при $s \to 0$ та врахування попередніх викладок:

$$\mathbf{g}^-(z) = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}^-(s,z) =$$
$$= \lim_{s\to 0}(\mathbf{I} - \mathbf{C})s(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_s^{-1}z)(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}(s\mathbf{I} - \mathbf{K}(z))^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0^{-1}z)(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}(-\mathbf{K}(z))^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\mu_*^+}\mathbf{\Pi}_*(1 - z)(\mathbf{I} - \mathbf{C}z)^{-1}(-\mathbf{K}(z))^{-1}. \quad (2.2.35)$$

Першу рівність в (2.2.27) отримуємо із (2.2.35) при $z \to 1$ та результатів леми 1.2.2.

Значення добутку $\mathbf{\Pi}_*(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0 = \nu_0^+\mathbf{P}_0$, де $(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1} = \|E\xi_1^+\| = \|\delta_{kr}\nu_k^+\|$ дає можливість записати другу рівність в (2.2.27). Остання рівність в (2.2.27) випливає з (2.1.41) після граничного переходу при $s \to 0$ із якої отримуємо (2.2.28). Перше співвідношення в (2.2.26) отримуємо із (2.2.35), попередньо підставивши (2.2.28) та (2.2.18). Друге співвідношення в (2.2.26) випливає із першого після підстановки замість $\mathbf{K}(z)$ (2.1.37).

Остання частина рівності (2.2.26) виражена через $\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)$, $\widetilde{\mathbf{F}}_-(z) \in \mathfrak{L}_-^0$, згідно з одержаними граничними значеннями $\mathbf{g}^-(s,1)$ та $\mathbf{g}^-(1)$, $\mathbf{g}^-(s,\infty)$, $\mathbf{g}^-(\infty)$ (які не дорівнюють 0 та ∞), дає підставу стверджувати, що вона належать до класу $\mathbb{L}_-^0$ і тому операція проектування $[\cdot]_-^0$ не впливає на її складові $\widetilde{\mathbf{F}}_2(z)$, $\widetilde{\mathbf{F}}_-(z)$.

Абсолютний максимум ξ^+ має вироджений розподіл, оскільки здійснивши граничний перехід при $s \to 0$ у (2.1.3) і врахувавши умову (1.2.2) та попередні викладки, отримаємо

$$\lim_{s\to 0} \mathbf{p}_+(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_0^{-1})(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{P}_*)\mathbf{P}_0 = \mathbf{0}.$$

Отже, $\mathbf{g}_+(s,z) \to \mathbf{0}$ при $s \to 0$.

Розглянемо випадок $-\infty < m_1^0 < 0$. Співвідношення (2.2.30)-(2.2.34) випливають відповідно із (2.1.1)-(2.1.5) при $s \to 0$, з врахуванням усіх викладок та позначень.

Якщо $m_1^0 = 0$, то $\mathbf{p}_+(s) = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}^+(s) = \mathbf{0}$ відповідно випливає із (2.1.3), (2.1.19) та умови (1.2.2), а отже, $\mathbf{g}_+(s,z) = \mathbf{0}$, $\mathbf{g}^+(s,z) = \mathbf{0}$ при $s \to 0$. Таким чином, ξ^+ та $\overline{\xi}$ мають вироджені розподіли. $\square$

Для майже напівнеперервних знизу процесів з кумулянтою (2.1.53) справедливі аналогічні твердження до тих, які ми сформулювали у випадку майже напівнеперервних зверху процесів. Доведення яких проводиться аналогічно з врахуванням відповідних понять та позначень, тому тільки сформулюємо їх.

Лема 2.2.2. *Якщо $\xi(t)$ – майже напівнеперервний знизу процес на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $-\infty < m_1^0 \leq 0$ мають місце наступні співвідношення*

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{T}_*^-(s,0))^{-1} = \lim_{s\to 0} s(s\mathbf{M}^* - \mathbf{Q}^*)^{-1} = \frac{1}{\mu_*^-}\mathbf{\Pi}^*, \\ \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{Z}(s))^{-1} = \frac{1}{\mu_*^-}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{\Pi}^*, \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{T}}_{*\mathbf{S}}^-(s,0))^{-1} = \lim_{s\to 0} s(s\widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{S}}^* - \widehat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{S}}^*)^{-1} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{\mathbf{S}}^*, \\ \lim_{s\to 0} s(\mathbf{I} - \mathbf{R}(s))^{-1} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-}\widehat{\mathbf{\Pi}}_{\mathbf{S}}^*(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}. \end{aligned} \tag{2.2.37}$$

Зауважимо, що $\widehat{\mathbf{\Pi}}^*_{\mathbf{S}} = \mathbf{\Pi}^*$, $\mathbf{P}^*\mathbf{\Pi}^* = \mathbf{\Pi}^*$, $\mathbf{\Pi}^*\mathbf{P}^* = \mathbf{\Pi}^*$.

Мають місце аналогічні теореми, які наведемо без доведення.

Теорема 2.2.4. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу процес на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $|z| \le 1$ генератриси абсолютних екстремумів та їх доповнень мають вигляд:*

1. *Якщо $-\infty < m_1^0 < 0$, тоді розподіл абсолютного максимуму ξ^+ невироджений і згідно з (2.2.37) справедливі наступні граничні співвідношення*

$$\mathbf{g}_+(z) = \mathbf{E}z^{\xi^+} = \lim_{s\to 0} \mathbf{g}_+(s,z) =$$
$$= \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}(1-z)(-\mathbf{K}(z))^{-1}(z\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_0 =$$
$$= \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}[\mathbf{\Lambda}_2 + (\mathbf{I}-\mathbf{B}z^{-1})(\mathbf{Q}(z^{-1}-1)^{-1} - z(\mathbf{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{F}}_1(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_+(z))]^{-1}\mathbf{P}_0, \tag{2.2.38}$$

$$\mathbf{g}_+(1) = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-|m_1^0|}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\widehat{\mathbf{\Pi}}^*_{\mathbf{S}} = \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-|m_1^0|}\mathbf{P}_0(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{\Pi}^* =$$
$$= \frac{\nu_0^-}{\widehat{\mu}_*^-|m_1^0|}\mathbf{\Pi}^* = \mathbf{P}_0, \tag{2.2.39}$$

$$\widehat{\mathbf{\Pi}}^*_{\mathbf{S}} = \mathbf{\Pi}^* = \mathbf{P}_0,\ \frac{1}{\widehat{\mu}_*^-} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-},\ \nu_0^- = \sum_{k=1}^m \pi_k\nu_k^-,\ \nu_k^- = (1-b_k)^{-1},$$

$$\mathbf{p}_x^+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = x\} =,\ x \in \mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}_+ = \mathbf{P}\{\xi^+ = 0\} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}(\mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{N}))^{-1}\mathbf{P}_0,$$

а $\overline{\xi}$ має вироджений розподіл.

2. *Якщо* $0 < m_1^0 < \infty$, *тоді розподіл* ξ^+ *вироджений, а розподіл* $\overline{\xi}$ *невироджений і визначається співвідношеннями*

$$\mathbf{g}^-(z) = \mathbf{p}^-(z\mathbf{I} - \mathbf{R}(0))^{-1}(z\mathbf{I} - \mathbf{B}),$$
$$\check{\mathbf{p}}_x^- = \mathbf{P}\{\overline{\xi} = x\} = \mathbf{p}^-(\mathbf{R}(0))^{-x-1}(\mathbf{R}(0) - \mathbf{B}),\ x \in \mathbb{Z}_-,$$
$$\mathbf{p}^- = \mathbf{P}\{\overline{\xi} = 0\} = \mathbf{P}_0\mathbf{p}_*^-(0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}(0)),$$
$$\mathbf{q}^- = \mathbf{P}\{\overline{\xi} < 0\} = \mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(0) - \mathbf{B}),$$
$$\mathbf{P}\{\overline{\xi} < x\} = \mathbf{P}_0(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(0))^{-x}(\mathbf{R}(0) - \mathbf{B}), x \in \mathbb{Z}_-^0,$$

де $\mathbf{R}(0)$ *визначається в (2.2.12).*

3. *Якщо* $m_1^0 = 0$, *тоді розподіли* ξ^+, $\overline{\xi}$ *вироджені.*

Теорема 2.2.5. *Якщо* $\xi(t)$ *майже напівнеперервний знизу процес на ланцюгу Маркова* $x(t)$, *тоді при* $|z| \leq 1$ *генератриси абсолютних екстремумів та їх доповнень мають вигляд*

1. *Якщо* $-\infty < m_1^0 < 0$, *тоді розподіл* $\check{\xi} = \lim\limits_{s\to 0}(\xi(\theta_s) - \xi^-(\theta_s))$ *невироджений і згідно з (2.2.36) його генератриса визначається співвідношенням при* $s \to 0$

$$\mathbf{g}^+(z) = \mathbf{E}z^{\check{\xi}} = \lim_{s\to 0}\mathbf{g}^+(s,z) =$$
$$= \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}\mathbf{P}_0(1-z)(z\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}(-\mathbf{K}(z))^{-1} =$$
$$= \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}\mathbf{P}_0[\mathbf{\Lambda}_2 + (\mathbf{Q}(z^{-1}-1)^{-1} - z(\mathbf{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{F}}_1(z) + \mathbf{N}\widetilde{\mathbf{F}}_+(z)))(\mathbf{I} - \mathbf{B}z^{-1})]^{-1}, \tag{2.2.40}$$

$$\mathbf{g}^+(1) = \frac{1}{\mu_*^-}\mathbf{\Pi}^*(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\frac{1}{|m_1^0|}\mathbf{P}_0 = \frac{\nu_0^-}{\mu_*^-|m_1^0|}\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0,\ \frac{1}{\mu_*^-} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-},$$

$$\mathbf{p}^+ = \mathbf{P}\{\check{\xi} = 0\} = \frac{|m_1^0|}{\nu_0^-}\mathbf{P}_0(\mathbf{\Lambda}_2 + (\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{N})\mathbf{B})^{-1},$$

а ξ^- *має вироджений розподіл.*

2. *Якщо* $0 < m_1^0 < \infty$, *тоді розподіл* $\check{\xi}$ *вироджений, а розподіл* ξ^- *невироджений і визначається співвідношеннями*

$$\mathbf{g}_-(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{B})[z\mathbf{I} - \mathbf{Z}(0)]^{-1}\mathbf{p}_-,$$

$$\mathbf{p}_x^- = (\mathbf{Z}(0) - \mathbf{B})[\mathbf{Z}(0)]^{-x-1}\mathbf{p}_-,\ x \in \mathbb{Z}_-,$$

$$\mathbf{p}_- = \mathbf{P}\{\xi^- = 0\} = \mathbf{p}_-^*(0)\mathbf{P}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}(0))(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_0,$$

$$\mathbf{q}_- = \mathbf{P}\{\xi^- < 0\} = \mathbf{p}_-^*(0)\mathbf{P}_0 = (\mathbf{Z}(0) - \mathbf{B})(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_0,$$

$$\mathbf{P}\{\xi^- < x\} = (\mathbf{Z}(0) - \mathbf{B})(\mathbf{Z}(0))^{-x}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_0, x \in \mathbb{Z}_-^0,$$

де $\mathbf{R}(0)$ *визначається в (2.2.12).*

3. *Якщо* $m_1^0 = 0$, *тоді розподіли* $\check{\xi}$, ξ^- *вироджені.*

Зауважимо, що згідно з (2.1.57)

$$\mathbf{g}_-(z) = (\mathbf{I}z - \mathbf{B})\mathbf{g}_-^*(z)(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_0.$$

Зауваження 2.2.1. Матричні співвідношення в теоремах 2.2.2-2.2.5 для $\mathbf{g}_\pm(s,z)$ та $\mathbf{g}^\pm(s,z)$ мають складніший вигляд ніж у випадку звичайних цілозначних пуассонівських процесів. Це ускладнення обумовлене тим, що в нашому випадку виникає потреба в розгляді зворотного процесу на ланцюгу Маркова та його відповідних характеристик, необхідних для вияснення двоїстості основної факторизаційної тотожності (1.1.28) та (1.1.33) та імовірнісної інтерпретації компонент основної факторизаційної тотожності. Крім того, деякі з характеристик зворотного процесу вимагають додаткового вивчення (леми 2.2.1-2.2.2) з метою встановлення відповідних граничних співвідношень (2.2.16), (2.2.38) та (2.2.26), (2.2.40) для $\mathbf{g}_{\mp}(z) = \lim_{s\to 0} \mathbf{g}_{\mp}(s,z)$, $\mathbf{g}^{\mp}(z) = \lim_{s\to 0} \mathbf{g}^{\mp}(s,z)$ при $\pm m_1^0 > 0$.

В скалярному випадку відповідні скорочення для майже напівнеперервного зверху цілочислового процесу $\xi(t)$ ($\mathbf{C} = c$) випливають з того, що $Z_s^{-1} = R_s^{-1} = q_+(s) + cp_+(s)$, оскільки $p^+(s) = p_+(s)$, $P_s = P_0 = 1$, $\xi^+(\theta_s) \doteq \overline{\xi}(\theta_s)$, $\xi^-(\theta_s) \doteq \check{\xi}(\theta_s)$. Для майже напівнеперервного знизу цілочислового процесу $\xi(t)$ ($\mathbf{B} = b$) мають місце аналогічні спрощення, оскільки $p^-(s) = p_-(s)$, то $Z(s) = R(s) = q_-(s) + bp_-(s)$.

Зауваження 2.2.2. Одержані в теоремах 2.2.2-2.2.5 компоненти факторизації $\mathbf{g}_{\pm}(s,z)$ та $\mathbf{g}^{\pm}(s,z)$, що визначають генератриси розподілів екстремумів та їх доповнень, необхідні для знаходження генератрис перестрибкових функціоналів $\gamma_1(x) = \gamma^+(x)$, $\gamma_2(x) = \gamma_+(x)$:

$$\mathbf{E}[e^{-s\tau^+(x)} z^{\gamma_i(x)},\, \tau^+(x) < \infty], i = 1, 2.$$

Ці генератриси визначають першу та другу дисконтну (при $s > 0$) функції банкрутства (при $s \to 0$ і $m_1^0 < 0$ відповідні граничні функції банкрутства). Генератриси $\xi^{\pm}(\theta_s)$, що виражаються матричними дробово-лінійними функціями (див. (2.1.1) та (2.1.51)), визначають геометричний розподіл екстремумів (а також і генератрис $\tau^{\pm}(x)$), на підставі якої обчислюються дисконтні функції банкрутства. Крім того, при $\pm m_1^0 < 0$ генератриси $\mathbf{g}_{\pm}(z)$ (див. (2.2.16) і (2.2.38)) визначають розподіли $\xi^{\pm}$:

$$\mathbf{p}_k^+ = \mathbf{P}\{\xi^{\pm} = k\}, \pm k \geq 0.$$

Для процесу ризику з дискретним розподілом вимог та з геометрично розподіленими преміями хвіст розподілу ξ^+ визначає функцію банкрутства

$$\mathbf{\Psi}(u) = \mathbf{P}\{\xi^+ > u\} = \sum_{k>u} \mathbf{p}_k^+, \ (\mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{q}_+ < \mathbf{P}_0), \, u \geq 0.$$

Далі для майже напівнеперервних зверху процесів розглянемо

$$\mathbf{m}_-(\varepsilon) = \lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_-(s,\varepsilon), \quad \text{якщо} \quad m_1^0 < 0,$$

$$\mathbf{m}_0(\varepsilon) = \lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_-(s,\varepsilon)\mathbf{p}_*^+(s), \quad \text{якщо} \quad m_1^0 = 0,$$

а для майже напівнеперервних знизу процесів

$$\mathbf{m}_+(\varepsilon) = \lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_+(s,\varepsilon), \quad \text{якщо} \quad m_1^0 > 0,$$

$$\mathbf{m}^0(\varepsilon) = \lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s). \quad \text{якщо} \quad m_1^0 = 0,$$

Тоді з теорем 2.2.2-2.2.5 випливає

Наслідок 2.2.1. Для майже напівнеперервного знизу процесу справедливі наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_+(1) &= \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}_+(\varepsilon) = \frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0, \, m_1^0 > 0, \\ \mathbf{m}^0(1) &= \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}^0(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0 \left(\mathbf{I} - \mathbf{B}\right)^{-1}, \, m_1^0 = 0. \end{aligned} \tag{2.2.41}$$

Для майже напівнеперервного зверху процесу справедливі наступні співвідношення

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_-(1) &= \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}_-(\varepsilon) = -\frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0, \, m_1^0 < 0, \\ \mathbf{m}_0(1) &= \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}_0(\varepsilon) = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0 \left(\mathbf{I} - \mathbf{C}\right)^{-1}, \, m_1^0 = 0. \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

Доведення. Розглянемо майже напівнеперервний знизу процес. Згідно з лемою 1.2.2 та співвідношення (2.1.60) (див. теорему 2.1.6), у випадку $m_1^0 > 0$ маємо

$$\mathbf{m}_+(1) = \lim_{\varepsilon\to 1} \mathbf{m}_+(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 1}\lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_+(s,\varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)\lim_{s\to 0}(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)(-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\lim_{s\to 0} s^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[s\mathbf{I} + s(\varepsilon-1)(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}\right](\mathbf{I}-\mathbf{B}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)(-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B}) = \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)(-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1} = \frac{1}{m_1^0}\mathbf{P}_0.$$

При $m_1^0 = 0$ згідно з лемою 1.2.2 після врахування співвідношення (2.1.60) (див. теорему 2.1.6), отримаємо

$$\mathbf{m}^0(1) = \lim_{\varepsilon\to 1}\mathbf{m}^0(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 1}\lim_{s\to 0} s^{-1}(1-\varepsilon)\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)\lim_{s\to 0} s^{-1}s(s\mathbf{I}-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\cdot$$

$$\cdot(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)(-\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\lim_{s\to 0}(\mathbf{I}+(\varepsilon-1)(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1})(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s)) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 1}(1-\varepsilon)^2(\mathbf{K}(\varepsilon))^{-1}(\varepsilon\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} = \frac{2}{\sigma_0^2}\mathbf{P}_0\left(\mathbf{I}-\mathbf{B}\right)^{-1}.$$

Формули (2.2.42) отримуємо із (2.2.41) після відповідних перепозначень, якщо розглянути замість $Y(t) = \{\xi(t), x(t)\}$ – майже напівнеперервного зверху процесу, $\acute{Y}(t) = \{-\xi(t), x(t)\}$ – майже напівнеперервний знизу процес. $\square$

2.3 Граничні матриці $\mathbf{Z}_0^{-1}$, $\mathbf{R}_0^{-1}$, $\mathbf{Z}(0)$, $\mathbf{R}(0)$ та їх властивості

Означення 2.3.1. Стохастичні матриці $\mathbf{T}_{1,2}$ з однаковими рядками називаються матрицями стаціонарного типу, якщо

$$\mathbf{T}_{1,2} = \|t_{kr}^{1,2}\|, \ \sum_{r=1}^{m} t_{kr}^{1,2} = 1, \ k = \overline{1,m}. \tag{2.3.1}$$

Ці матриці мають такі властивості:

1. $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_2, \ \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1$, зокрема $\mathbf{T}_k\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0, \ \mathbf{T}_k^r = \mathbf{T}_k, \ k = 1, 2$.
2. Якщо $\mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1$, то $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1$; якщо $\mathbf{P}_0\mathbf{T}_k = \mathbf{P}_0$, то $\mathbf{T}_k = \mathbf{P}_0, \ k = 1, 2$.
3. Якщо $\mathbf{D}$ - діагональна матриця, то $\mathbf{T}_1\mathbf{D}\mathbf{T}_2 = d_0\mathbf{T}_2$, $d_0 = \sum\limits_{r=1}^{m} t_{1r}^{(1)} d_r$.
4. $\mathbf{P}_0\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^*$.

Нагадаємо, що в загальному випадку розподіли екстремумів та їх доповнень пов'язані з відповідними генератрисами функціоналів $\tau^{\pm}(x)$, $\widehat{\tau}^{\pm}(x)$:

$$\overline{\mathbf{P}}_{+}(s,x) = \mathbf{T}_*^{+}(s,x)\mathbf{P}_s, \mathbf{T}_*^{+}(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{+}(x)}, \tau^{+}(x) < \infty], x \in \mathbb{Z}_0^{+}; \tag{2.3.2}$$

$$\mathbf{P}_{-}(s,x) = \mathbf{T}_*^{-}(s,x)\mathbf{P}_s, \mathbf{T}_*^{-}(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\tau^{-}(x)}, \tau^{-}(x) < \infty], x \in \mathbb{Z}_{-}^{0}; \tag{2.3.3}$$

$$\overline{\mathbf{P}}^{+}(s,x) = \mathbf{P}_s\widehat{\mathbf{T}}_*^{+}(s,x), \widehat{\mathbf{T}}_*^{+}(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\widehat{\tau}^{+}(x)}, \widehat{\tau}^{+}(x) < \infty], x \in \mathbb{Z}_0^{+}; \tag{2.3.4}$$

$$\mathbf{P}^{-}(s,x) = \mathbf{P}_s\widehat{\mathbf{T}}_*^{-}(s,x), \widehat{\mathbf{T}}_*^{-}(s,x) = \mathbf{E}[e^{-s\widehat{\tau}^{-}(x)}, \widehat{\tau}^{-}(x) < \infty], x \in \mathbb{Z}_{-}^{0}. \tag{2.3.5}$$

При $x = 0$ з (2.3.2)–(2.3.5) випливає, що

$$\mathbf{q}_{\pm}(s) = \mathbf{T}_*^{\pm}(s,0)\mathbf{P}_s, \ \mathbf{q}^{\pm}(s) = \mathbf{P}_s\widehat{\mathbf{T}}_*^{\pm}(s,0). \tag{2.3.6}$$

Розподіли (2.3.2)-(2.3.5) у випадку майже напівнеперервності зверху або знизу мають показникову форму

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{P}}_{+}(s,x) &= (\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_s, x\in\mathbb{Z}_0^{+},\\
\overline{\mathbf{P}}^{+}(s,x) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}\mathbf{R}_s^{-x}(\mathbf{R}_s^{-1}-\mathbf{C}), x\in\mathbb{Z}_0^{+},\\
\mathbf{P}_{-}(s,x) &= (\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})(\mathbf{Z}(s))^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\mathbf{P}_s, x\in\mathbb{Z}_{-}^{0},\\
\mathbf{P}^{-}(s,x) &= \mathbf{P}_s(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{R}(s))^{-x}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}), x\in\mathbb{Z}_{-}^{0},
\end{aligned}
\tag{2.3.7}
$$

які визначають перетворення Лапласа-Карсона розподілів $\mathbf{P}\{\xi^{+}(t)>x\}$, $\mathbf{P}\{\overline{\xi}(t)>x\}$ $x\in\mathbb{Z}_0^{+}$ для майже напівнеперервних зверху процесів, та розподілів $\mathbf{P}\{\xi^{-}(t)<x\}$, $\mathbf{P}\{\check{\xi}(t)>x\}$ $x\in\mathbb{Z}_{-}^{0}$ для майже напівнеперервних знизу процесів. В теорії ризику розподіли

$$\mathbf{F}\{\pm\xi^{\pm}<x\}, x\in\mathbb{Z}_{-}^{0}$$

при $\mp m_1^0<0$ називаються імовірностями банкрутства на скінченному інтервалі $[0,t]$ майже напівнеперервних зверху або знизу надлишкових процесів вимог.

Подібний показниковий вигляд мають і генератриси $\tau^{\pm}(x)$ моментів першого банкрутства

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_{*}^{+}(s,x) &= (\mathbf{Z}_s^{-1}-\mathbf{C})\mathbf{Z}_s^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{C})^{-1}, x\in\mathbb{Z}_0^{+},\\
\mathbf{T}_{*}^{-}(s,x) &= (\mathbf{Z}(s)-\mathbf{B})(\mathbf{Z}(s))^{-x}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}, x\in\mathbb{Z}_{-}^{0}.
\end{aligned}
\tag{2.3.8}
$$

Якщо $\pm m_1^0\geq 0$, тоді з першого співвідношення в (2.3.6) при $s\to 0$ випливає, що

$$\mathbf{q}_{\pm}(0)=\mathbf{P}_0=\mathbf{T}_{*}^{\pm}(0,0)\mathbf{P}_0=\mathbf{T}_{*}^{\pm}(0,0)=\mathbf{P}_{*}^{\pm}, \tag{2.3.9}$$

отже, $\mathbf{P}_{*}^{\pm}=\|P\{x(\tau^{\pm}(0))=r|x(0)=k\}\|$ – стохастичні матриці.

Розподіли (2.3.2)-(2.3.5) мають показникову форму.

Якщо $\pm m_1^0\geq 0$, тоді з другого співвідношення в (2.3.6) при $s\to 0$ випливає, що

$$\mathbf{q}^{\pm}(0)=\mathbf{P}_0=\mathbf{P}_0\widehat{\mathbf{T}}_{*}^{\pm}(0,0)=\widehat{\mathbf{T}}_{*}^{\pm}(0,0)=\widehat{\mathbf{P}}_{*}^{\pm}, \tag{2.3.10}$$

отже, $\widehat{\mathbf{P}}_*^{\pm} = \|P\{\widehat{x}(\widehat{\tau}^{\pm}(0)) = r|\widehat{x}(0) = k\}\|$ – стохастичні матриці.

У випадку майже напівнеперервності процесу розподіли (2.3.2)–(2.3.5) виражаються через матриці $\mathbf{Z}_s^{-1}$, $\mathbf{R}_s^{-1}$, $\mathbf{Z}(s)$, $\mathbf{R}(s)$. Згідно результатів теорем 2.1.1 та 2.1.2, для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_s^{-1} &= \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1} + \mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{C}, \\ \mathbf{R}_s^{-1} &= \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^+(s) + \mathbf{C}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^+(s), \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

а у випадку майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}(s) &= \mathbf{q}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1} + \mathbf{p}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{B}, \\ \mathbf{R}(s) &= \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s) + \mathbf{B}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s). \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ розподіли (2.3.2) і (2.3.4), визначаються, згідно теорем 2.1.1–2.1.2, співвідношеннями (2.1.5) і (2.1.21). Для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ розподіли (2.3.3) і (2.3.5), визначаються, згідно теореми 2.1.5, співвідношеннями (2.1.51) і (2.1.53).

Лема 2.3.1. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху процес, тоді при $m_1^0 \geq 0$ мають місце наступні представлення матриць:*

$$\mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{C} + \mathbf{P}_*^{+}(\overline{\mathbf{C}}\,)^{-1},\, \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{I} - \mathbf{C}, \tag{2.3.13}$$

$$\mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{C} + (\overline{\mathbf{C}}\,)^{-1}\widehat{\mathbf{P}}_*^{+},\, \widehat{\mathbf{P}}_*^{+} = \mathbf{P}_0. \tag{2.3.14}$$

Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу процес, тоді при $m_1^0 \leq 0$ мають місце наступні представлення матриць:

$$\mathbf{Z}(0) = \mathbf{B} + \mathbf{P}_*^{-}(\overline{\mathbf{B}}\,)^{-1},\, \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{I} - \mathbf{B}, \tag{2.3.15}$$

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{B} + (\overline{\mathbf{B}}\,)^{-1}\widehat{\mathbf{P}}_*^{-},\, \widehat{\mathbf{P}}_*^{-} = \mathbf{P}_0. \tag{2.3.16}$$

Доведення. Із (2.3.6) запишемо відповідно $\mathbf{T}_*^+(s,0)$ та $\widehat{\mathbf{T}}_*^+(s,0)$ у вигляді

$$\mathbf{T}_*^+(s,0) = \mathbf{q}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}, \tag{2.3.17}$$

$$\widehat{\mathbf{T}}_*^+(s,0) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^+(s). \tag{2.3.18}$$

При $m_1^0 \geq 0$ у випадку майже напівнеперервності зверху процесу $\xi(t)$ із (2.3.17) та (2.3.18), після врахування відповідно (2.1.4) та (2.1.20), випливає, що

$$\mathbf{T}_*^+(s,0) = (\mathbf{Z}_s^{-1} - \mathbf{C})(\overline{\mathbf{C}})^{-1}, \tag{2.3.19}$$

$$\widehat{\mathbf{T}}_*^+(s,0) = (\overline{\mathbf{C}})^{-1}(\mathbf{C} - \mathbf{R}_s^{-1}). \tag{2.3.20}$$

Після врахування (2.3.9) із (2.3.19) отримаємо (2.3.13), а після врахування (2.3.10) із (2.3.20) отримаємо (2.3.14).

Аналогічно у випадку майже напівнеперервного знизу процесу при $m_1^0 \leq 0$ з (2.3.6) та (2.3.9), після врахуванння співвідношень для $\mathbf{q}_-(s)$ у (2.1.51) та $\mathbf{q}^-(s)$ у (2.1.53), отримаємо:

$$\mathbf{T}_*^-(s,0) = \mathbf{q}_-(s)\mathbf{P}_s^{-1} = (\mathbf{Z}(s) - \mathbf{B})(\overline{\mathbf{B}})^{-1}, \tag{2.3.21}$$

$$\widehat{\mathbf{T}}_*^-(s,0) = (\overline{\mathbf{B}})^{-1}(\mathbf{R}(s) - \mathbf{B}). \tag{2.3.22}$$

Із представлень (2.3.21) і (2.3.22) після врахування відповідно (2.3.9), (2.3.10) отримуємо (2.3.14). □

При $m_1^0 < 0$ матриці $\mathbf{Z}_0^{-1}$ та $\mathbf{R}_0^{-1}$ є невиродженими і через них визначаються розподіли абсолютного екстремуму та доповнення до мінімуму для майже напівнеперервних зверху процесів $\xi(t)$. Аналогічно через невироджені матриці $\mathbf{Z}(0)$ та $\mathbf{R}(0)$ при $m_1^0 > 0$ визначаються розподіли абсолютного мінімуму та доповнення до максимуму для майже напівнеперервних знизу процесів $\xi(t)$, а також умовні генератриси перестрибкових функціоналів через нескінченно віддалений рівень.

Зауваження 2.3.1. При $\mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ матриці $\mathbf{Z}_0^{-1}$, $\mathbf{Z}(0)$ дуже просто виражаються через $\mathbf{P}_0$. Із співвідношень (2.3.13) та (2.3.15) випливає, що при $m_1^0 \geq 0$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0\mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{Z}_0^{-1},\ \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}(0),\ \mathbf{Z}_0^{-1} = \mathbf{Z}(0) = \mathbf{P}_0. \qquad (2.3.23)$$

Зауваження 2.3.2. При $\mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$ матриці $\mathbf{R}_0^{-1}$, $\mathbf{R}(0)$ дуже просто виражаються через $\mathbf{P}_0$. Із співвідношень (2.3.14) та (2.3.16) випливає, що при $m_1^0 \leq 0$

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_0^{-1}\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_0^{-1},\ \mathbf{P}_0 = \mathbf{R}(0)\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}(0),\ \mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0. \quad (2.3.24)$$

Введемо позначення при $m_1^0 \leq 0$ і $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}(\overline{\mathbf{B}})^{-1} = \|\delta_{kr} d_k\|,\ d_k = b_k(1-b_k)^{-1} = E|\xi_{b_k}| - 1,\ k = \overline{1,m},$$

$$d_0 = \sum_{k=1}^{m} \pi_k d_k,\ d_0 + 1 = (\bar{b}_0)^{-1} = \sum_{k=1}^{m} \pi_k E|\xi_{b_k}|,\ k = \overline{1,m},$$

де ξ_{b_k} – геометрично розподілені випадкові величини від'ємних стрибків $\xi(t)$.

Проаналізуємо поведінку матриці $\mathbf{R}(s)$ при $s \to 0$ для $m_1^0 \leq 0$. Для цього ще раз нагадаємо вигляд матриці $\mathbf{R}(s)$, що отриманий в теоремі 2.1.5

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{q}^-(s) + \mathbf{B}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s). \qquad (2.3.25)$$

Лема 2.3.2. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний знизу процес на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $m_1^0 \leq 0$ матриця $\mathbf{R}(0)$ є матрицею стаціонарного типу і для неї справедливо*

$$\mathbf{R}(0) = (\bar{b}_0)^{-1}\mathbf{P}_0(\overline{\mathbf{B}})^{-1},\ \mathbf{0} < \mathbf{B} < \mathbf{I},\ (\bar{b}_0)^{-1} = \sum_{k=1}^{m} \pi_k b_k^{-1}. \qquad (2.3.26)$$

Доведення. В силу (2.3.24) залишається довести (2.3.26) при $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$. Домножимо матрицю $\mathbf{R}(s)$ в (2.3.25) зліва на $\mathbf{P}_s$

$$\mathbf{P}_s\mathbf{R}(s) = \mathbf{q}^-(s) + \mathbf{X}(s),\ \mathbf{X}(s) = \mathbf{P}_s\mathbf{B}\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s). \tag{2.3.27}$$

Після підстановки $\mathbf{p}^-(s) = \mathbf{P}_s(\overline{\mathbf{B}})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{R}(0))$ в $\mathbf{X}(s)$ при $s \to 0$ одержуємо

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{P}_0\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{R}(0)),$$

після підстановки якого в граничне співвідношення (2.3.27) знаходимо, що при $s \to 0$

$$\mathbf{P}_0\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0\mathbf{D}(\mathbf{I} - \mathbf{R}(0)) = \mathbf{P}_0(\overline{\mathbf{B}})^{-1} - \mathbf{P}_0\mathbf{D}\mathbf{R}(0).$$

Оскільки $\mathbf{P}_0\mathbf{D}\mathbf{R}(0) = d_0\mathbf{R}(0)$, то з останнього співвідношення випливає, що

$$(\mathbf{I}d_0 + \mathbf{P}_0)\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0(\overline{\mathbf{B}})^{-1}, d_0 > 1,$$

тому

$$\mathbf{R}(0) = d_0^{-1}(\mathbf{I} + d_0^{-1}\mathbf{P}_0)^{-1}\mathbf{P}_0(\overline{\mathbf{B}})^{-1} = d_0^{-1}\sum_{k\geq 0}(-d_0^{-1})^k\mathbf{P}_0(\overline{\mathbf{B}})^{-1}. \tag{2.3.28}$$

З (2.3.28) випливає (2.3.26). □

Аналогічне твердження справедливе для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$, яке наведемо без доведення.

Лема 2.3.3. *Якщо $\xi(t)$ майже напівнеперервний зверху процес на ланцюгу Маркова $x(t)$, тоді при $m_1^0 \geq 0$ матриця $\mathbf{R}_0^{-1}$ є матрицею стаціонарного типу і визначається співвідношенням*

$$\mathbf{R}_0^{-1} = (\overline{c}_0)^{-1}\mathbf{P}_0(\overline{\mathbf{C}})^{-1}, \mathbf{0} < \mathbf{C} < \mathbf{I}, (\overline{c}_0)^{-1} = \sum_{k=1}^{m}\pi_k c_k^{-1} = \sum_{k=1}^{m}\pi_k E\xi_{c_k}, \tag{2.3.29}$$

де ξ_{c_k} – геометрично розподілені випадкові величини додатних стрибків $\xi(t)$.

Стохастичні матриці $\mathbf{R}(0)$ в (2.3.26) ($\mathbf{R}_0^{-1}$ в (2.3.29)) використовуються при визначені розподілів перестрибкових функціоналів через нескінченно віддалений рівень для майже напівнеперервних знизу процесів $\xi(t)$, коли $m_1^0 \geq 0$ (для майже напівнеперервних зверху процесів $\xi(t)$, коли $m_1^0 \leq 0$).

Слід окремо зауважити, що для майже напівнеперервних знизу дійснозначних процесів Леві нульові корені рівняння ($\mathcal{L}_0$) $\rho(0) = 0$ при $\pm m_1^0 \leq 0$ узагальнюються для таких же $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова матрицями $\mathbf{R}(0)$ та $\mathbf{R}_0^{-1}$ інфінітизимального типу (з нульовими сумами елементів кожного рядка): $\mathbf{P}_0\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_0^{-1}\mathbf{P}_0 = \mathbf{0}$. Для майже напівнеперервних знизу (зверху) гратчастих пуассонівських процесів одиничні корені рівняння ($\mathcal{L}_0$) $z(0) = 1$ при $\pm m_1^0 \leq 0$ узагальнюються для таких же $\xi(t)$ на ланцюгу Маркова матрицями $\mathbf{R}(0)$, $\mathbf{R}_0^{-1}$ стаціонарного типу:

$$\mathbf{R}(0)\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0, \mathbf{R}_0^{-1}\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0\mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{P}_0. \tag{2.3.30}$$

Висновки до розділу 2

1. Отримано допграничні співвідношення ($s > 0$) для компонент основної факторизаційної тотожності у випадку майже напівнеперервних гратчастих процесів на ланцюгу Маркова.

2. Встановлюються співвідношення без проектування для генератрис екстремумів та їх доповнень. Нові співвідношення для генератрис визначаються через обернення збуреної матричної ку-

мулянти, що виражаються в термінах генератрис розподілу відповідних стрибків.

3. Доведено твердження, що базуються на оберненні сингулярно збурених матриць.

4. Одержано співвідношення для генератрис абсолютних екстремумів та їх доповнень.

5. Доведено властивість стаціонарності матриць $\mathbf{R}(0)$ і $\mathbf{R}_0^{-1}$, які узагальнюють одиничні корені скалярного рівняння Лундберга для звичайних гратчастих пуассонівських процесів.

Розділ 3

Майже напівнеперервні гратчасті пуассонівські процеси у скалярному випадку, $m = 1$

Даний розділ присвячений вивченню розподілів перестрибкових функціоналів для цілочислових пуассонівських гратчастих процесів при $m = 1$. Зауважимо, що в розділі 7 монографії [29] та [30] для цілочислових гратчастих пуассонівських процесів $\xi(t)$ розподіли $\gamma_k(\infty)$ розглядалися не для всіх випадків значень $m_1^0 = E\xi(1)$ і лише при скінченних $x < \infty$ там детально вивчався розподіл $\gamma_k(x)$. Щоб усунути цю прогалину, ми детальніше розглянемо розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x = 0$ та $x \to \infty$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів, а саме, генератриси $\gamma_k(0)$ та $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 \geq 0$, та умовні генератриси $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 < 0$.

3.1 Спрощення позначень і основних тверджень

Розглянемо складний пуассонівський процес

$$\xi(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k \,,$$

де $\nu(t)$ – процес Пуассона з параметром $\lambda > 0$.

Означення 3.1.1. Однорідний процес з незалежними приростами $\{\xi(t), t \ge 0, \xi(0) = 0\}$ називається гратчастим пуассонівським процесом, якщо стрибкова міра Леві зосереджена в послідовності точок $\{x_r = rh\}$ ($h > 0, r \neq 0$ – ціле) і визначається співвідношенням

$$\Pi_0(r) = \Pi_0(x_r) = \lambda p_r,\ p_r = P\{\xi_1 = rh\},\ r = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots,$$

а генератриса такого процесу визначається співвідношенням

$$g_t(z) = Ez^{\xi(t)} = e^{tk(z)},\ |z| = 1,$$

$$k(z) = \lambda(p(z) - 1),\ p(z) = Ez^{\xi_1} = \sum_{r \neq 0} z^{rh} p_r,\ |z| = 1. \tag{3.1.1}$$

Без обмеження загальності можна вважати, що $h = 1$ і розглядати тільки цілозначні процеси. Як і раніше функцію $k(z) = \ln g_1(z)$ називаємо кумулянтою процесу.

Означення 3.1.2. Цілозначний пуассонівський процес $\{\xi(t),\ t \ge 0,$ $\xi(0) = 0\}$ називається майже напівнеперервним зверху, якщо $\xi(t)$ перетинає додатний рівень лише геометрично розподіленими стрибками, а його кумулянта має вигляд

$$k(z) = \lambda_1 \frac{z - 1}{1 - cz} + \lambda_2(p_2(z) - 1)\,(0 < c < 1,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0),\ |m_1^0| < \infty. \tag{3.1.2}$$

Означення 3.1.3. Цілозначний пуассонівський процес $\{\xi(t),\, t \geq 0,$ $\xi(0) = 0\}$ називається майже напівнеперервним знизу, якщо $\xi(t)$ перетинає від'ємний рівень лише геометрично розподіленими стрибками, а його кумулянта має вигляд

$$k(z) = \lambda_1(p_1(z) - 1) + \lambda_2 \frac{1 - z}{z - b}\, (0 < b < 1,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0),\ |m_1^0| < \infty. \tag{3.1.3}$$

Означення 3.1.4. Цілозначний пуассонівський процес $\{\xi(t),\, t \geq 0,$ $\xi(0) = 0\}$ називається напівнеперервним зверху або знизу, відповідно, при $c = 0$ або $b = 0$.

Зауважимо, що при $m > 1$ еволюція $\xi(t)$ проходить у змінному середовищі з m різними станами і розподіли процесу $\xi(t)$ та його функціоналів визначаються матричними співвідношеннями. При $m = 1$ еволюція $\xi(t)$ проходить в незмінному середовищі і розподіли процесу $\xi(t)$ та його функціоналів визначаються скалярними співвідношеннями. Тому випадок $m = 1$ коротко назвемо скалярним.

Зауважимо, що при $m = 1$ замість матричних співвідношень для розподілів $\xi(t)$ та перестрибкових функціоналів маємо скалярні спрощенні співвідношення.

Зокрема при $m = 1$ (тобто в скалярному випадку) $\xi(\theta_s)$ має генератрису

$$g(s, z) = Ez^{\xi(\theta_s)} = \frac{s}{s - k(z)},\ |z| = 1. \tag{3.1.4}$$

Крім того, для скалярного випадку $\xi^-(\theta_s) \doteq \overline{\xi}(\theta_s)$, $\xi^+(\theta_s) \doteq \check{\xi}(\theta_s)$, тому двоїста факторизаційна тотожність (2.1.12), спрощується

$$g(s, z) = g_+(s, z) g_-(s, z),\ |z| = 1, \tag{3.1.5}$$

де $g_\pm(s, z) = Ez^{\xi^\pm(\theta_s)}$ $(|z|^{\pm 1} \leq 1)$.

В позначеннях $V(...)$ та $V_k(...)$ у випадку $m_1^0 \geq 0$ $P\{\tau^+(x) < \infty\} = 1$, тому в них достовірна подія пропускається.

Спільна генератриса всіх перестрибкових функціоналів визначається при довільному знаку m_1^0, згідно з теоремою 7.7. в [30], таким чином

$$sV(s,x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{y=0}^{x} p_y^+(s) W(s,x-y,u_1,u_2,u_3), x \in \mathbb{Z}_0^+, \quad (3.1.6)$$

$$p_{\pm y}^{\pm}(s) = P\{\xi^{\pm}(\theta_s) = \pm y\}, y \in \mathbb{Z}_0^+,$$

$$W(s,x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{y \geq 0} A(x+y,u_1,u_2,u_3) p_{-y}^-(s), \ x \in \mathbb{Z}_0^+,$$

$$A(x,u_1,u_2,u_3) = \sum_{k \geq x+1} u_1^{k-x} u_2^x u_3^k \Pi_0^+(k), \ \Pi_0^+(k) = \lambda_1 p_k, \ x \in \mathbb{Z}_0^+.$$

Ми обмежимось розглядом генератрис маргінальних розподілів. Зокрема, згідно з теоремою 7.7. в [30], для маргінальних генератрис

$$V_k(s,x,u_k) = E\left[e^{-s\tau^+(x)} u_k^{\gamma_k(x)}, \ \tau^+(x) < \infty\right] = \\ = E\left[u_k^{\gamma_k(x)}, \ \xi^+(\theta_s) > x\right], \ 0 < x < \infty, \ k = \overline{1,3}$$

та їх твірних перетворень

$$v_k(s,z,u_k) = \sum_{x=0}^{\infty} z^x V_k(s,x,u_k), \ k = \overline{1,3}$$

одержані співвідношення

$$V_k(s,x,u_k) = s^{-1} \sum_{y=0}^{x} p_y^+(s) W_k(s,x-y,u_k), x \geq 0, \ k = \overline{1,3}, \quad (3.1.7)$$

$$v_k(s,z,u_k) = s^{-1} w_k(s,z,u_k) g_+(s,z), \ k = \overline{1,3}. \quad (3.1.8)$$

Функції $W_k(s,x,u_k)$ визначаються таким чином

$$W_k(s,x,u_k) = \sum_{y \geq 0} A_k(x+y,u_k) p_{-y}^-(s), \ x \geq 0, \quad (3.1.9)$$

де

$$A_1(x,u_1)=\sum_{k\ge x+1}u_1^{k-x}\Pi_0^+(k),\ A_2(x,u_2)=\sum_{k\ge x+1}u_2^x\Pi_0^+(k)=u_2^x\Pi(x),$$

$$A_3(x,u_3)=\sum_{k\ge x+1}u_3^k\Pi_0^+(k),\ a_k(z,u_k)=\sum_{x\ge 0}z^xA_k(x,u_k),$$

які остаточно виражаються через генератрису додатних стрибків

$$\widetilde{\Pi}_0^+(z)=\sum_{x\ge 0}^{\infty}z^x\Pi_0^+(x)=\lambda_1\widetilde{p}_1(z),$$

де $\widetilde{\Pi}_0^+(1)=\lambda_1$, та генератриси хвостів розподілу

$$\widetilde{\Pi}(z)=\sum_{r\ge 0}^{\infty}z^r\Pi(r),\ \Pi(r)=\sum_{k\ge r+1}^{\infty}\Pi_0^+(k),\ \Pi(0)=\lambda_1,$$

$\widetilde{\Pi}(1)=\sum\limits_{r\ge 0}^{\infty}\Pi(r)=\lambda_1\sum\limits_{r>0}rp_r$. Причому генератриса хвостів зв'язана з розподілом стрибків наступним співвідношенням

$$\widetilde{\Pi}(z)=\frac{\lambda_1}{1-z}(1-\widetilde{p}_1(z)),\tag{3.1.10}$$

$$A_1(0,u_1)=\lambda_1\widetilde{p}_1(u_1)=\widetilde{\Pi}_0^+(u_1),\ A_1(0,1)=\lambda_1,\ A_1(x,1)=\Pi(x),$$

$$a_1(z,u_1)=\frac{u_1}{u_1-z}(\widetilde{\Pi}_0^+(u_1)-\widetilde{\Pi}_0^+(z))=\frac{\lambda_1u_1}{u_1-z}(\widetilde{p}_1(u_1)-\widetilde{p}_1(z)),$$

$$a_1(1,u_1)=u_1\widetilde{\Pi}(u_1),$$

$$A_2(0,u_2)=\Pi(0)=\lambda_1,\ A_2(0,1)=\lambda_1,\ A_2(x,1)=\Pi(x),$$

$$a_2(z,u_2)=\frac{1}{1-zu_2}(\widetilde{\Pi}_0^+(1)-\widetilde{\Pi}_0^+(zu_2))=\frac{\lambda_1}{1-zu_2}(1-\widetilde{p}_1(zu_2))=\widetilde{\Pi}(zu_2),$$

$$a_2(1,u_2)=\widetilde{\Pi}(u_2),$$

$$A_3(0,u_3)=\widetilde{\Pi}_0^+(u_3),\ A_3(0,1)=\lambda_1,\ A_3(x,1)=\Pi(x),$$

$$a_3(z,u_3)=\frac{1}{1-z}(\widetilde{\Pi}_0^+(u_3)-\widetilde{\Pi}_0^+(zu_3))=\frac{\lambda_1}{1-z}(\widetilde{p}_1(u_3)-\widetilde{p}_1(zu_3)),$$

$$a_3(1,u_3)=\lambda_1 u_3 \widetilde{p}'_1(u_3).$$

Твірні перетворення функцій (3.1.9) мають вигляд

$$w_k(s,z,u_k)=\sum_{x\geq 0} z^x W_k(s,x,u_k). \qquad (3.1.11)$$

Якщо $\xi(t)\,(\xi(0)=0)$ – майже напівнеперервний знизу цілозначний процес Пуасона з кумулянтою (3.1.3), тоді $\xi^-(\theta_s)$ має геометричний розподіл, завдяки якому вдається конкретизувати представлення (3.1.9) для $W_k(s,x,u_k)$ $(k=\overline{1,3})$.

Для дослідження розподілу перестрибків через рівень $x=0$ та $x\to\infty$ використаємо лему, що випливає з результатів розділу 7 в [30], про асимптотичну поведінку коренів кумулянтного рівняння Лундберга при $s\to 0$

$$k(z)=s,\ s\geq 0. \quad (\mathfrak{L}_s)$$

Лема 3.1.1. *[29] Для $\xi(t)$ з кумулянтою (3.1.3) з $|m_1^0|<\infty$ та $\sigma_1^2<\infty$ рівняння $(\mathfrak{L}_s)$ при $s\to 0$ має 2 дійсні корені $0<z_1(s)<1<z_2(s)$. Лівий корінь $z_1(s)$ визначає генератрису $\xi^-(\theta_s)$*

$$g_-(s,z)=\frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_1(s)},\ p_-(s)=\frac{1-z_1(s)}{1-b},$$
$$z_1(s)=q_-(s)+bp_-(s), \qquad (3.1.12)$$
$$p^-_{-k}(s)=p_-(s)(z_1(s)-b)(z_1(s))^{k-1},\ k\geq 1.$$

а) Якщо $m_1^0=0$, тоді при $s\to 0$ добуток доповнень коренів $\overline{z}_1(s)=1-z_1(s)$, $\overline{z}_2(s)=z_2(s)-1$

$$\overline{z}_1(s)\overline{z}_2(s)=O(s),\ p_-(s)p_+(s)\approx k_1 s,\ k_1=(\lambda_1 b+\lambda_2)^{-1}. \qquad (3.1.13)$$

б) Якщо $m_1^0>0$, тоді $z_2(0)=1$, а $z_1(0)<1$ визначає генератрису ξ^-

$$E\,z^{\xi^-}=\frac{p_-(1-b)(z-b)}{z-z_1(0)},\ p_-=\frac{1-z_1(0)}{(1-b)},\ z_1(0)=q_-+bp_-, \qquad (3.1.14)$$
$$s^{-1}p_+(s)p_-(s)\to_{s\to 0} p'_+(0)p_-,\ p'_+(0)=E[\tau^+(0)].$$

в) Якщо $m_1^0 < 0$, *тоді* $z_2(0) > 1$, *а* $z_1(0) = 1$, *при цьому (див. (7.91) в [30])*

$$\begin{aligned} z_1(s) \approx 1 + \frac{s}{|m_1^0|},\ p_-(s) \approx \frac{s}{|m_1^0|(1-b)}, \\ s^{-1}p_-(s)p_+(s) \to_{s\to 0} p'_-(0)p_+,\ s \to 0, \\ p'_-(0) = E[\tau^-(0)] = \frac{1}{|m_1^0|(1-b)}. \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Схематично графіки кумулянти для $y \le s$ (див. рис. 3.1 та рис. 3.2), при достатньо малих $s > 0$, мають форму близьку до параболи (з несиметричними вертикально направленими вверх гілками, які при зростанні $k(z)$ наближаються до асимптот $z = b$ та $z = c^{-1}$) і розташовані в правій півплощині в обмеженій смузі прямої $z = 1$. При $m_1^0 = 0$ вершина графіка знаходиться на осі абсцис в точці $z = 1$.

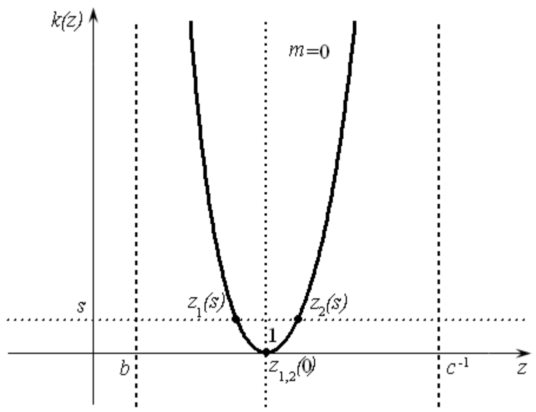

Рис. 3.1: Графік кумулянти при $m_1^0 = 0$

При $\pm m_1^0 > 0$ графіки опущені вниз і зміщені вліво (вправо) так, щоб права (ліва) гілка проходила через точку $(1; 0)$ (див. рис. 3.2).

Отже, при $m_1^0 = 0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має двократний корінь $z_{1,2}(0) = 1$ (див. (3.1.13)). При $m_1^0 > 0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $z_2(0) = 1$, а

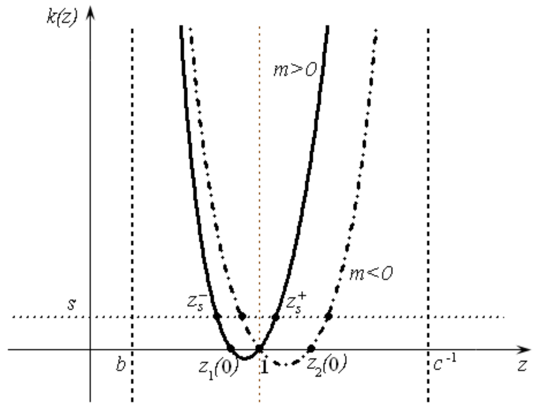

Рис. 3.2: Графік кумулянти при $\pm m_1^0 > 0$

$z_1(0) < 1$ (визначає p_- в (3.1.14)). При $m_1^0 < 0$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $z_2(0) > 1$, і $z_1(0) = 1$, а $1 - z_1(s) \approx O(s)$ визначає асимптотику $p_-(s)$ в (3.1.15). Якщо $\xi(t)$ з кумулянтою (3.1.2) – майже напівнеперервний зверху процес ($c \in (0,1)$), то $1 < z_2(s) < c^{-1}$.

Лема 3.1.2. *[30] Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (3.1.3) має місце співвідношення (3.1.7), де $W_k(s,x,u_k)$ визначаються через $A_k(x,u_k)$*

$$W_1(s,x,u_1) = p_-(s)(z_1(s))^{-1}[bA_1(x,u_1)+ \\ +\frac{(z_1(s)-b)u_1}{u_1 - z_1(s)}\{A_1(x,u_1) - A_1(x,z_1(s))\}], \tag{3.1.16}$$

$$W_2(s,x,u_2) = p_-(s)u_2^x(z_1(s))^{-1}[b\Pi(x)+ \\ +(z_1(s)-b)\sum_{y\geq 0}(u_2 z_1(s))^y \Pi(x+y)], \tag{3.1.17}$$

$$W_3(s,x,u_3) = p_-(s)(z_1(s))^{-1}[bA_3(x,u_3)+ \\ +\frac{z_1(s)-b}{1-z_1(s)}\left\{A_3(x,u_3) - (z_1(s))^{-x}A_3(x,u_3 z_1(s))\right\}]. \tag{3.1.18}$$

Із співвідношеня в (7.46) (див. теорему 7.7 в [30]) та (3.1.6) випливає твердження для спільної генератриси функціоналів

Теорема 3.1.1. *[30] Для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (3.1.3) має місце співвідношення*

$$\begin{aligned}\widetilde{v}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3) = s^{-1}g_+(s,\varepsilon)\widetilde{w}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3) = \\ = s^{-1}(1-\varepsilon)g_+(s,\varepsilon)w(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3),\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

де

$$\begin{aligned}w(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3) = p_-(s)\Bigg[a(\varepsilon,u_1,u_2,u_3) + \frac{u_2(z_1(s)-b)}{u_1-u_2z_1(s)}\cdot \\ \cdot\Big\{a(\varepsilon,u_1,u_2,u_3) - u_1u_2^{-1}(z_1(s))^{-1}a_3(\varepsilon(z_1(s))^{-1}, u_2u_3z_1(s)\Big\}\Bigg].\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

З теореми 3.1.1 випливає

Наслідок 3.1.1. Спільні генератриси пар функціоналів $\{\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon),\ \gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)\}$ мають вигляд

$$\begin{aligned}\widetilde{v}_k(s,\varepsilon,u_k) = E\left[e^{-s\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)},\ \tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)<\infty\right] = \\ = (1-\varepsilon)v_k(s,\varepsilon,u_k) = s^{-1}(1-\varepsilon)g_+(s,\varepsilon)w_k(s,\varepsilon,u_k) = \\ = s^{-1}g_+(s,\varepsilon)\widetilde{w}_k(s,\varepsilon,u_k),\ k=\overline{1,3}\,,\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

де

$$\begin{aligned}w_1(s,\varepsilon,u_1) = p_-(s)(z_1(s))^{-1}\Bigg[ba_1(\varepsilon,u_1) + \frac{(z_1(s)-b)u_1}{u_1-z_1(s)}\cdot \\ \cdot\Big\{a_1(\varepsilon,u_1) - a_1(\varepsilon,z_1(s)\Big\}\Bigg],\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

$$\begin{aligned}w_2(s,\varepsilon,u_2) = p_-(s)(z_1(s))^{-1}\Bigg[b\widetilde{\Pi}(\varepsilon u_2) + \frac{z_1(s)(z_1(s)-b)}{z_1(s)-\varepsilon}\cdot \\ \cdot\Big\{\widetilde{\Pi}(z_1(s)u_2) - \varepsilon(z_1(s))^{-1}\widetilde{\Pi}(\varepsilon u_2)\Big\}\Bigg],\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

$$w_3(s,\varepsilon,u_3)=p_-(s)(z_1(s))^{-1}\Big[ba_3(\varepsilon,u_3)+\frac{z_1(s)-b}{1-z_1(s)}\cdot \\ \cdot\Big\{a_3(\varepsilon,u_3)-a_3(\varepsilon(z_1(s))^{-1},u_3z_1(s)\Big\}\Big]. \tag{3.1.24}$$

У випадку $m_1^0 \leq 0$, $z_1(s) \to 1$ при $s \to 0$, тому $w_k^0(\varepsilon,u_k) = \lim\limits_{s\to 0} w_k(s,\varepsilon,u_k)$ залежить тільки від ε, u_k.

У випадку $m_1^0 > 0$, $z_1(s) \to z_1(0) = q_- + bp_- < 1$ при $s \to 0$, тому границя $w_k^+(\varepsilon,u_k) = \lim\limits_{s\to 0} w_k(s,\varepsilon,u_k)$ крім ε, u_k суттєво залежить від $z_1(0) < 1$.

Лема 3.1.3. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (3.1.3) при $|m_1^0| < \infty$ та $\sigma_1^2 < \infty$*

1. *При $m_1^0 = 0$*

$$m^0(1)=\lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 1}} m_0(s,\varepsilon)=\lim_{\substack{\varepsilon\to 1\\ s\to 0}}\frac{1-\varepsilon}{s}p_-(s)g_+(s,\varepsilon)=\frac{1}{\sigma_1^2(1-b)}. \tag{3.1.25}$$

2. *При $m_1^0 > 0$*

$$m_+(1)=\lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 1}} m_+(s,\varepsilon)=\lim_{\substack{s\to 0\\ \varepsilon\to 1}}\frac{1-\varepsilon}{s}g_+(s,\varepsilon)=\frac{1}{m_1^0}. \tag{3.1.26}$$

Зауважимо, що при $m_1^0 = 0$ моменти додатних стрибків $\mu_1 = \widetilde{p}\,'_1(1)$, $\mu_2 = \widetilde{p}\,''_1(1)$ пов'язані з моментами геометричного розподілу:

$$\lambda_1\mu_1 = \lambda_2(1-b)^{-1}, \\ \sigma_1^2 = k''(1) = \lambda_1\mu_2 + \frac{\lambda_2 b}{(1-b)^2} = \lambda_1(1-b)^{-1}(b\mu_1 + (1-b)\mu_2). \tag{3.1.27}$$

3.2 Перестрибки через нульовий рівень

Для скінченного рівня $0 < x < \infty$ лише при $m_1^0 < 0$ в наслідку 7.1 (див. [29]) наведені граничні розподіли $\gamma_k(x), k = \overline{1,3}$, які називаються функціями банкрутства і визначаються співвідношеннями (7.73).

В теорії ризику вважається перша функція банкрутства при $k = 1$ з перестрибком $\gamma_1(u) = \gamma^+(u)$, що називається "дефіцитною" ,оскільки після банкрутства резерв страховика вичерпаний.

Позначимо $z_1(s) = z_s$ і розглянемо спочатку перестрибкові функціонали через рівень $x = 0$. Нехай

$$W_k^0(s,x,u_k) = p_-^{-1}(s)W_k(s,x,u_k),\ x \geq 0,\ k = \overline{1,3}. \tag{3.2.1}$$

Лема 3.2.1. *Згідно з (3.1.7) спільні генератриси пар $\{\tau^+(0), \gamma_k(0)\}$ для довільного знаку m_1^0 визначаються простими співвідношеннями*

$$\begin{aligned} V_k(s,0,u_k) &= s^{-1}p_+(s)W_k(s,0,u_k) = \\ &= s^{-1}p_-(s)p_+(s)W_k^0(s,0,u_k),\ k = \overline{1,3}, \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

де

$$\begin{aligned} W_1^0(s,0,u_1) &= bz_s^{-1}A_1(0,u_1) + (z_s - b)z_s^{-1}a_1(z_s,u_1), \\ W_2^0(s,0,u_2) &= bz_s^{-1}A_2(0,u_2) + (z_s - b)z_s^{-1}a_2(z_s,u_2), \\ W_3^0(s,0,u_3) &= bz_s^{-1}A_3(0,u_3) + (z_s - b)z_s^{-1}a_3(z_s,u_3). \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Доведення. Використовуючи означення $W_k^0(s,x,u_k)$ та співвідношення (3.1.7) при $x = 0$, отримаємо (3.2.2). Підставивши (3.1.16)-(3.1.18) в (3.2.1) при $x = 0$, отримаємо відповідно перше, друге та третє співвідношення в (3.2.3). $\square$

Теорема 3.2.1. *Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (3.1.3) генератриси перестрибків мають вигляд*

1. *Якщо $m_1^0 = 0$, то*

$$\begin{aligned} E\,[u_1^{\gamma_1(0)}] &= [b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) + (1-b)a_1(1,u_1)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}, \\ E\,[u_2^{\gamma_2(0)}] &= [b\Pi(0) + (1-b)a_2(1,u_2)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}, \\ E\,[u_3^{\gamma_3(0)}] &= [b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1-b)a_3(1,u_3)](\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

2. Якщо $m_1^0 < 0$, тоді згідно з (3.2.1)

$$\begin{aligned} E\,[u_1^{\gamma_1(0)}, \tau^+(0) < \infty] &= p_+ p'_-(0)[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) + (1-b)a_1(1,u_1)],\\ E\,[u_2^{\gamma_2(0)}, \tau^+(0) < \infty] &= p_+ p'_-(0)[b\Pi(0) + (1-b)a_2(1,u_2)],\\ E\,[u_3^{\gamma_3(0)}, \tau^+(0) < \infty] &= p_+ p'_-(0)[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1-b)a_3(1,u_3)]. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

3. Якщо $m_1^0 > 0$, тоді

$$\begin{aligned} E\,[u_1^{\gamma_1(0)}] &= z_0^{-1} p'_+(0) p_-[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) + (z_0-b)a_1(z_0,u_1)],\\ E\,[u_2^{\gamma_2(0)}] &= z_0^{-1} p'_+(0) p_-[b\Pi(0) + (z_0-b)a_2(z_0,u_2)],\\ E\,[u_3^{\gamma_3(0)}] &= z_0^{-1} p'_+(0) p_-[b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (z_0-b)a_3(z_0,u_3)]. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $m_1^0 = 0$. Зауважимо, що $z_s \to 1$ при $s \to 0$. З першого співвідношення (3.2.3) леми 3.2.1

$$W_1^0(s,0,u_1) = bz_s^{-1}A_1(0,u_1) + (z_s - b)z_s^{-1}a_1(z_s,u_1),$$

її граничні значення при $s \to 0, u_1 \to 1$

$$W_1^0(0,0,u_1) = b\widetilde{\Pi}_0^+(u_1) + (1-b)a_1(1,u_1), \tag{3.2.7}$$

$$W_1^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_1(1-b)\mu_1. \tag{3.2.8}$$

Згідно з (3.2.2) при $k = \overline{1,3}$

$$E[e^{-s\tau^+(0)}u_k^{\gamma_k(0)}] = s^{-1}p_-(s)p_+(s)W_k^0(s,0,u_k). \tag{3.2.9}$$

Враховуючи друге співвідношення (3.1.13) (див. лему 3.1.1) після граничного переходу $s \to 0$ з (3.2.9) випливає:

$$E[u_1^{\gamma_1(0)}] = k_1 W_1^0(0,0,u_1) \xrightarrow[u_1 \to 1]{} 1, \tag{3.2.10}$$

отже, $k_1 = (W_1^0(0,0,1))^{-1}$.

Згідно (3.1.27), перепишемо (3.2.8) у виді

$$W_1^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_2. \tag{3.2.11}$$

Підставивши в ліву частину (3.2.10) співвідношення (3.2.7) і (3.2.11) отримаємо перше співвідношення (3.2.3).

У випадку $k = 2$ з другого співвідношення (3.2.3) обчислюється функція W_2^0 з її граничними значеннями $s \to 0, u_2 \to 1$

$$W_2^0(0,0,u_2) = b\Pi(0) + (1-b)a_2(1,u_2), \tag{3.2.12}$$

$$W_2^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_1(1-b)\mu_1. \tag{3.2.13}$$

Як і в попередньому випадку з урахуванням (3.1.27) генератриса $\gamma_2(0)$ визначається через (3.2.12) і (3.2.13) після граничного переходу $s \to 0$ у (3.2.9) при $k = 2$. Таким чином, отримане друге співвідношення (3.2.4).

Для випадку $k = 3$, аналогічно з третього співвідношення (3.2.3) при граничному переході $s \to 0, u_3 \to 1$

$$W_3^0(0,0,u_3) = b\widetilde{\Pi}_0^+(u_3) + (1-b)a_3(1,u_3), \tag{3.2.14}$$

$$W_2^0(0,0,1) = b\lambda_1 + \lambda_1(1-b)\mu_1. \tag{3.2.15}$$

Із урахуванням (3.1.27) генератриса $\gamma_3(0)$ визначається через (3.2.14) і (3.2.15) після граничного переходу $s \to 0$ у (3.2.9) при $k = 3$. Отже, третє співвідношення в (3.2.4) доведено.

Далі встановимо справедливість співвідношень (3.2.5) у випадку $m_1^0 < 0$. Зауважимо, що $z_s \to 1$ при $s \to 0$.

Здійснивши граничний перехід в (3.2.2) при $s \to 0$, згідно (3.1.15), отримаємо

$$E[u_k^{\gamma_k(0)}] = \lim_{s\to 0} V_k(s,0,u_k) = p_+ p'_-(0) W_k^0(0,0,u_k), \tag{3.2.16}$$

і підставивши в (3.2.16) замість $W_k^0(0,0,u_k)$ при $k = 1,2,3$ відповідно (3.2.7), (3.2.12) і (3.2.14) отримаємо (3.2.5).

І накінець зупинимось на випадку $m_1^0 > 0$. З (3.2.2) при $s \to 0$, врахувавши (3.1.14), отримаємо

$$E[u_k^{\gamma_k(0)}] = \lim_{s\to 0} V_k(s,0,u_k) = p'_+(0) p_- W_k^0(0,0,u_k), \tag{3.2.17}$$

де $W_k^0(0,0,u_k)$ визначені в (3.2.2). Підставивши в (3.2.17) граничні співвідношення отримані із (3.2.2) при $s \to 0$, відповідно при $k = 1,2,3$, отримаємо всі співвідношення (3.2.6). Теорема доведена. $\square$

Після обернення співвідношень (3.2.4)– (3.2.6) отримаємо

Наслідок 3.2.1. Для процесу $\xi(t)$ з кумулянтою (3.1.3) розподіли перестрибків мають вигляд

1. Якщо $m_1^0 = 0$, то

$$\begin{aligned} P\{\gamma_1(0) = r\} &= [b\Pi_0^+(r) + (1-b)\Pi(r-1)]k_1,\ r \in \mathbb{Z}_+, \\ P\{\gamma_2(0) = r\} &= [b\Pi(0) + (1-b)\Pi(r)]k_1,\ r \in \mathbb{Z}_+^0, \\ P\{\gamma_3(0) = r\} &= [b\Pi_0^+(r) + (1-b)r\Pi_0^+(r)]k_1,\ r \in \mathbb{Z}_+^0, \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

де $k_1 = (\lambda_1 b + \lambda_2)^{-1}$.

2. Якщо $m_1^0 < 0$, тоді

$$\begin{aligned} P\{\gamma_1(0) = r, \tau^+(0) < \infty\} &= p_+ p'_-(0)[b\Pi_0^+(r) + (1-b)\Pi(r-1)],\ r \in \mathbb{Z}_+, \\ P\{\gamma_2(0) = r, \tau^+(0) < \infty\} &= p_+ p'_-(0)[b\Pi(0) + (1-b)\Pi(r)],\ r \in \mathbb{Z}_+^0, \\ P\{\gamma_3(0) = r, \tau^+(0) < \infty\} &= p_+ p'_-(0)[b\Pi_0^+(r) + (1-b)r\Pi_0^+(r)],\ r \in \mathbb{Z}_+^0. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

3. Якщо $m_1^0 > 0$, тоді

$$\begin{aligned} P\{\gamma_1(0) = r\} &= z_0^{-1} p_- p'_+(0)[b\Pi_0^+(r) + (z_0 - b)(z_0^{-r}\widetilde{\Pi}(z_0) - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{r-1} z_0^{-k-1}\Pi_0^+(r-k-1))],\ r \in \mathbb{Z}_+, \\ P\{\gamma_2(0) = r\} &= z_0^{-1} p_- p'_+(0)[b\Pi(0) + (z_0 - b)z_0^r\Pi(r)],\ r \in \mathbb{Z}_+^0, \\ P\{\gamma_3(0) = r\} &= p_- p'_+(0)[b\Pi_0^+(r) + (z_0 - b)\sum_{k=0}^{r-1} z_0^k\Pi_0^+(r)],\ r \in \mathbb{Z}_+^0. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Доведення. Після обернення співвідношень (3.2.4)-(3.2.5) відповідно по u_k, $k = \overline{1,3}$ одержуються розподіли $\gamma_k(0)$ в термінах хвостів розподілу $\Pi(r)$. Отже, (3.2.18)-(3.2.19) доведено.

При $m_1^0 > 0$ (3.2.6) теж можна обернути по u_k, $k = \overline{1,3}$, але співвідношення для розподілу $\gamma_k(0)$ будуть складнішими, поскільки залежать від $z_1(0) < 1$, зокрема

$$\begin{aligned} a_1(z_0, u_1) &= \frac{\lambda_1 u_1}{u_1 - z_0}(\widetilde{p}_1(u_1) - \widetilde{p}_1(z_0)), \\ a_2(z_0, u_2) &= \widetilde{\Pi}(z_0 u_2), \\ a_3(z_0, u_3) &= \frac{\lambda_1}{1 - z_0}(\widetilde{p}_1(u_3) - \widetilde{p}_1(z_0 u_3)). \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Для обернення (3.2.21) по u_k, $k=\overline{1,3}$ слід здійснити деякі перетворення і звести їх до вигляду

$$\begin{aligned} a_1(z_0,u_1)=\frac{u_1}{u_1-z_0}\left((1-z_0)\widetilde{\Pi}(z_0)-(1-u_1)\widetilde{\Pi}(u_1)\right),\\ a_2(z_0,u_2)=\widetilde{\Pi}(z_0u_2),\\ a_3(z_0,u_3)=\frac{1}{1-z_0}((1-u_3z_0)\widetilde{\Pi}(u_3z_0)-(1-u_3)\widetilde{\Pi}(u_3)). \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

Після обернення (3.2.22) одержується згортка геометричного розподілу (з параметром $0<z_1(0)<1$) з відповідними послідовностями

$$\begin{aligned} a_r^{(1)}=z_0^{-r}\widetilde{\Pi}(z_0)-\sum_{k=0}^{r-1}(z_0^{-1})^{k+1}\Pi_0^+(r-k-1),\ r\in\mathbb{Z}_+,\\ a_r^{(2)}=z_0^r\Pi(r),\ r\in\mathbb{Z}_+^0,\\ a_r^{(3)}=\frac{1-z_0^r}{1-z_0}\widetilde{\Pi}_0^+(r). \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Обернення співвідношень (3.2.23) відповідно по u_k, $k=\overline{1,3}$ визначає лише одну складову розподілу $\gamma_k(0)$, а ще одна складова цього розподілу визначається простим оберненням $A_k(0,u_k)$, $k=\overline{1,3}$. Таким чином, (3.2.20) доведено. □

Зауваження 3.2.1. Слід зауважити, що при $m_1^0<0$

$$P\{\gamma_2(0)=0,\,\xi^+>0\}=bp_+p'_-(0)\Pi(0)>0$$

за рахунок того, що при перетині рівня $x=0$ першим додатним стрибком процеса $\xi(t)$ недострибок є нульовим.

3.3 Перестрибки через нескінченно віддалений рівень

В наступному параграфі розглядаються генератриси перестрибків через рівень $x \to \infty$.

Поскільки при $m_1^0 < 0$ хвіст розподілу $\overline{P}_+(s,x) = P\{\xi^+(\theta_s) > x\} \to 0$ при $s \to 0$, тому для дослідження генератрис $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0 < 0$ нам доведеться розглянути, замість спільних генератрис функціоналів $V_k(s,x,u_k)$, умовні генератриси функціоналів $\gamma_k(x)$, $k = \overline{1,3}$.

Будемо позначати умовні генератриси

$$E\left[u_k^{\gamma_k(x)} |\, \xi^+(\theta_s) > x\right] = V_k(s,x,u_k)\left(\overline{P}_+(s,x)\right)^{-1}, \; k = \overline{1,3}, \qquad (3.3.1)$$

і для відповідних умовних генератрис має місце

Лема 3.3.1. *Умовні генератриси* $\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)$ *мають вигляд*

$$E\left[u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)} |\, \xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\right] = \\ = s^{-1}(1-\varepsilon) g_+(s,\varepsilon)\left[P\{\xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\}\right]^{-1} w_k(s,\varepsilon,u_k). \qquad (3.3.2)$$

Доведення. Після усереднення (3.3.1) за геометричним розподілом знаходимо

$$E\left[u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)} |\, \xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\right] = \\ = (1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x V_k(s,x,u_k)\left[P\{\xi^+(\theta_s) > x\}\right]^{-1},$$

яке згідно (3.1.7) перепишемо

$$E\left[u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)} |\, \xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\right] = \\ = (1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty} \varepsilon^x s^{-1} \sum_{y=0}^{x} p_y^+(s) W_k(s,x-y,u_k)\left[P\{\xi^+(\theta_s) > x\}\right]^{-1}.$$

Змінивши порядок сумування в останньому співвідношені, отримаємо

$$E\left[u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}|\,\xi^+(\theta_s)>\widetilde{\nu}_\varepsilon\right]=$$
$$=s^{-1}(1-\varepsilon)\sum_{y=0}^{\infty}p_y^+(s)\varepsilon^y\sum_{x-y=0}^{+\infty}\varepsilon^{x-y}W_k(s,x-y,u_k)\left[P\{\xi^+(\theta_s)>x\}\right]^{-1},$$

звідки й випливає (3.3.2). □

Позначимо

$$w_k^0(s,x,u_k)=p_-^{-1}(s)w_k(s,x,u_k),\ x\geq 0,\ k=\overline{1,3}. \tag{3.3.3}$$

Теорема 3.3.1. *Якщо процес $\xi(t)$ має кумулянту (3.1.3), тоді*

1. *При $m_1^0=0$*

$$E\,u_1^{\gamma_1(\infty)}=\left[bu_1\widetilde{\Pi}(u_1)+\lambda_1\frac{u_1(1-b)}{u_1-1}\left(\widetilde{p}'_1(u_1)-\widetilde{p}'_1(1)\right)\right]m^0(1),$$
$$E\,u_2^{\gamma_2(\infty)}=\left[b\widetilde{\Pi}(u_2)+(1-b)u_2\widetilde{\Pi}'(u_2)\right]m^0(1), \tag{3.3.4}$$
$$E\,u_3^{\gamma_3(\infty)}=\lambda_1\left[bu_3\widetilde{p}'_1(u_3)+\frac{1-b}{2}u_3^2\widetilde{p}''_1(u_3)\right]m^0(1).$$

2. *Якщо $m_1^0>0$, тоді*

$$E\,u_1^{\gamma_1(\infty)}=p_-z_0^{-1}[ba_1(1,u_1)+(z_0-b)u_1\frac{a_1(1,u_1)-a_1(1,z_0)}{u_1-z_0}]m_+(1),$$
$$E\,u_2^{\gamma_2(\infty)}=p_-[b\widetilde{\Pi}(u_2)+\frac{z_0-b}{z_0-1}\left(\widetilde{\Pi}(z_0u_2)-\widetilde{\Pi}(u_2)\right)]m_+(1),$$
$$E\,u_3^{\gamma_3(\infty)}=p_-z_0^{-1}[ba_3(1,u_3)+(z_0-b)\frac{a_3(1,u_3)-a_3(z_0^{-1},u_3z_0)}{1-z_0}]m_+(1). \tag{3.3.5}$$

3. Якщо $m_1^0 < 0$, тоді умовні генератриси

$$E\left[u_1^{\gamma_1(\infty)} | \tau^+(\infty) < \infty\right] = [bu_1\widetilde{\Pi}(u_1) + \lambda_1 \frac{u_1(1-b)}{u_1 - 1} \cdot$$
$$\cdot (\widetilde{p}\,'_1(u_1) - \widetilde{p}\,'_1(1))]m_-(1),$$
$$E\left[u_2^{\gamma_2(\infty)} | \tau^+(\infty) < \infty\right] = \left[b\widetilde{\Pi}(u_2) + (1-b)u_2\widetilde{\Pi}\,'(u_2)\right)]m_-(1),$$
$$E\left[u_3^{\gamma_3(\infty)} | \tau^+(\infty) < \infty\right] = \lambda_1[bu_3\widetilde{p}\,'_1(u_3) + \frac{1-b}{2}u_3^2\widetilde{p}\,''_1(u_3)]m_-(1). \tag{3.3.6}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $m_1^0 = 0$. Підставимо (3.1.22) у (3.3.3), після чого отримаємо

$$w_1^0(s, \varepsilon, u_1) = bz_s^{-1}a_1(\varepsilon, u_1) + \frac{(z_s - b)u_1}{(u_1 - z_s)z_s}\left[a_1(\varepsilon, u_1) - a_1(\varepsilon, z_s)\right]. \tag{3.3.7}$$

Здійснимо граничний перехід при $s \to 0$ в (3.3.7)

$$w_1^0(0, \varepsilon, u_1) = \lim_{s\to 0} w_1^0(s, \varepsilon, u_1) = ba_1(\varepsilon, u_1) + \frac{(1-b)u_1}{u_1 - 1}\left[a_1(\varepsilon, u_1) - a_3(\varepsilon, 1)\right]. \tag{3.3.8}$$

В (3.3.8) перейдемо до границі при $\varepsilon \to 1$

$$w_1^0(0, 1, u_1) = \lim_{\varepsilon\to 1} w_1^0(0, \varepsilon, u_1) = bu_1\widetilde{\Pi}(u_1) + \frac{\lambda_1(1-b)u_1}{u_1 - 1}\left[\widetilde{p}'_1(u_1) - \widetilde{p}'_1(1)\right]. \tag{3.3.9}$$

Із (3.3.9) при $u_1 \to 1$ отримаємо

$$w_1^0(0, 1, 1) = \lim_{u_1\to 1} w_1^0(0, 1, u) = \lambda_1(b\mu_1 + (1-b)\mu_2). \tag{3.3.10}$$

Розглянемо $\widetilde{\nu}_\varepsilon$ геометрично розподілену випадкову величину з параметром $\varepsilon < 1$. Тоді згідно з (3.1.21), генератриси $\{\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon),\, \gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)\}$ після врахування (3.3.3) визначаються співвідношеннями

$$E\left[e^{-s\tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)},\, \tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon) < +\infty\right] =$$
$$= \frac{1-\varepsilon}{s}p_-(s)g_+(s, \varepsilon)w_k^0(s, \varepsilon, u_k) = m_0(s, \varepsilon)w_k^0(s, \varepsilon, u_k). \tag{3.3.11}$$

З урахуванням (3.1.25), із леми 3.1.3 та граничних значень (3.3.9) і (3.3.10) із (3.3.11) при $s \to 0$ і $\varepsilon \to 1$ випливає, що

$$E\, u_1^{\gamma_1(\infty)} = w_1^0(0,1,u)(w_1^0(0,1,1))^{-1}. \qquad (3.3.12)$$

Згідно (3.1.27), з (3.3.10) маємо $w_1^0(0,1,1) = \sigma_1^2(1-b)$ і, таким чином, перше співвідношення в (3.3.4) доведено.

Далі підставивши (3.1.23) в (3.3.3), розглянемо твірне перетворення $w_2^0(s,\varepsilon,u_2)$ з граничними значеннями при $s \to 0$ і $\varepsilon \to 1$

$$w_2^0(s,\varepsilon,u_2) = bz_s^{-1}\widetilde{\Pi}(\varepsilon u_2) + \frac{z_s - b}{z_s - \varepsilon}\left(\widetilde{\Pi}(z_s u_2) - \varepsilon z_s^{-1}\widetilde{\Pi}(\varepsilon u_2)\right),$$

$$w_2^0(0,1,u_2) = b\widetilde{\Pi}(u_2) + (1-b)u_2\widetilde{\Pi}'(u_2), \qquad (3.3.13)$$

$$w_2^0(0,1,1) = \lim_{u_2 \to 1} w_2^0(0,1,u_2) = \lambda_1(b\mu_1 + (1-b)\mu_2).$$

З урахуванням леми (3.1.3), із (3.3.11) після граничного переходу $s \to 0$, $\varepsilon \to 1$ знаходимо, що

$$E\, u_2^{\gamma_2(\infty)} = w_2^0(0,1,u_2)(w_2^0(0,1,1))^{-1}.$$

Згідно з (3.3.13), із врахуванням (3.1.27) з останнього співвідношення випливає друге співвідношення (3.3.4).

Із (3.1.24) та (3.3.3), аналогічно, як і в попередніх випадках при $s \to 0$, $\varepsilon \to 1$

$$w_3^0(s,\varepsilon,u_3) = z_s^{-1}[ba_3(\varepsilon u_3) + \frac{z_s - b}{1 - z_s}\left(a_3(\varepsilon u_3) - a_3(\varepsilon z_s^{-1}, u_3 z_s)\right)],$$

$$w_3^0(0,1,u_3) = ba_3(1,u_2) + (1-b)a'_3(1,u_3), \qquad (3.3.14)$$

де $a'_3(1,u_3) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\, a_3(\varepsilon,u_3)\big|_{\varepsilon=1} = \frac{\lambda_1}{2}u_3^2\widetilde{p}_1''(u_3)$,

$$w_3^0(0,1,1) = \lim_{u_3 \to 1} w_2^0(0,1,u_3) = \lambda_1(b\mu_1 + (1-b)\mu_2),$$

згідно (3.3.11), встановлюється третє співвідношення (3.3.4).

Розглянемо далі випадок $m_1^0 > 0$. Із (3.1.21), попередньо знайшовши граничні значення (3.1.22) – (3.1.24) при $s \to 0$ і $\varepsilon \to 1$, отримаємо

$$w_1(0,1,u_1) = p_-(0)z_0^{-1}[ba_1(1,u_1) + (z_0 - b)u_1\frac{a_1(1,u_1) - a_1(1,z_0)}{u_1 - z_0}],$$

$$w_2(0,1,u_2) = p_-(0)z_0^{-1}[b\widetilde{\Pi}(u_2) + \frac{z_0 - b}{z_0 - 1}\left(\widetilde{\Pi}(z_0u_2) - \widetilde{\Pi}(u_2)\right)],$$

$$w_3(0,1,u_3) = p_-(0)z_0^{-1}[ba_3(1,u_3) + (z_0 - b)\frac{a_3(1,u_3) - a_3(z_0^{-1},u_3z_0)}{1 - z_0}],$$

та врахувавши співвідношення (3.1.26) із леми 3.1.3, одержимо (3.3.5).

І накінець зупинимось на випадку $m_1^0 < 0$.

При $m_1^0 < 0$ позначимо

$$m_0^-(s,\varepsilon) = s^{-1}p_-(s)(1-\varepsilon)g_+(s,\varepsilon)\left[P\{\xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\}\right]^{-1}. \tag{3.3.15}$$

Здійснивши в (3.3.15) граничний перехід при $s \to 0$ згідно леми 3.1.1 отримаємо

$$m_0^-(0,\varepsilon) = p'_-(0)(1-\varepsilon)g_+(\varepsilon)\left[P\{\xi^+ > \widetilde{\nu}_\varepsilon\}\right]^{-1}.$$

При $\varepsilon \to 1$ із останнього співвідношення отримаємо

$$m_-(1) = p'_-(0)\left[E\xi^+\right]^{-1}. \tag{3.3.16}$$

Згідно леми 3.3.1, із співвідношення (3.3.2) після врахування (3.3.3) умовні генератриси визначаються співвідношеннями

$$E\left[u_k^{\gamma_k(\widetilde{\nu}_\varepsilon)} |\, \xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\right] =$$
$$= s^{-1}p_-(s)(1-\varepsilon)g_+(s,\varepsilon)\left[P\{\xi^+(\theta_s) > \widetilde{\nu}_\varepsilon\}\right]^{-1} w_k^0(s,\varepsilon,u_k),\ k = \overline{1,3}. \tag{3.3.17}$$

Здійснивши граничний перехід в (3.3.17) при $s \to 0$, $\varepsilon \to 1$ і після врахування (3.3.16) та відповідних граничних значень (3.3.9), (3.3.13), (3.3.14), отримуємо (3.3.6) $\square$

Зауваження 3.3.1. Для дійснозначних східчастих процесів Леві (див. [87], лема 3.4, с. 84) незалежно від знаку m_1^0 атомарні ймовірності $p_\pm(s) > 0$, $p_0(s) = P\{\xi(\theta_s) = 0\}$ задовольняють співвідношення (точне і асимптотичне)

$$p_+(s)p_-(s) = p_0(s) = \frac{s}{s+\lambda} \Rightarrow \lim_{s\to 0} s^{-1}p_+(s)p_-(s) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}. \quad (3.3.18)$$

Отже, асимптотичне співвідношення (3.1.13) в лемі 3.1.1 і (3.3.18) майже подібні, тобто і в гратчастому випадку при $m_1^0 = 0$ і $s \to 0$ добуток

$$p_+(s)p_-(s) \approx k_1 s = \frac{s}{b\lambda_1+\lambda_2}\,(s \to 0) \quad (3.3.19)$$

асимптотично лінійний по s і обернено пропорціональний сумарній інтенсивності λ_1 додатних та λ_2 від'ємних стрибків. Але в гратчастому випадку величина інтенсивності λ_1 зменшена ($\lambda_1 b < \lambda_1$, $0 < b < 1$). Крім того,

$$p_0(s) = p_+(s)p_-(s) + \sum_{k\geq 1} p_{-k}^-(s)p_k^+(s) > p_+(s)p_-(s) > \frac{s}{s+\lambda} = p_0^0(s). \quad (3.3.20)$$

Слід відзначити, що згідно (7.32) в [30]

$$p_+(s)p_-(s) = p_0(s) - (z_s - b)\sum_{k\geq 1} b^{k-1}p_k(s),\ 0 < b < z_s < 1.$$

Це пояснюється тим, що в гратчастому випадку після момента першого стрибка ζ_1 процес $\xi(t)$ повторно може попадати в нуль. Тому

$$p_0(s) > s\int_0^\infty e^{-st}P\{\zeta_1 > t\}dt = s\int_0^\infty e^{-(s+\lambda)t}dt = s(s+\lambda)^{-1} = p_0^0(s), \quad (3.3.21)$$

де $p_0^0(s)$ – імовірність початкового перебування $\xi(t)$ в 0 (до виходу з 0). Імовірність перебування $\xi(t)$ в нулі за рахунок повернення в нього визначається різницею

$$\overline{p}_0(s) = p_0(s) - p_0^0(s) > p_+(s)p_-(s) - p_0^0(s) \approx \frac{s\lambda_1(1-b)}{(\lambda_1+\lambda_2)(b\lambda_1+\lambda_2)} \, (s \to 0). \tag{3.3.22}$$

Права частина в (3.3.22) досягає максимуму при $b = 0$, коли процес $\xi(t)$ напівнеперервний знизу.

Зауваження 3.3.2. Для ілюстрації деяких результатів з розподілу граничних функціоналів використовується введене Ю. П. Студнєвим (див. [68]) поняття дискретних квазіймовірнісних розподілів.

Означення 3.3.1. Числова послідовність $\{p_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ називається дискретним квазіймовірнісним розподілом, якщо

$$\sum_{|k|\geq 0} p_k = 1, \ \sum_{|k|\geq 0} |p_k| < \infty.$$

Квазігенератрисою такого розподілу називається твірна функція

$$p_*(z) = \sum_{|k|\geq 0} p_k z^k, \ |z| = 1. \tag{3.3.23}$$

Для майже напівнеперервного зверху процесу $\xi(t)$ рівняння Лундберга: $k(z) = 0$ $(\mathfrak{L}_0)$ $(k(z) = lnEz^{\xi(t)})$ має корінь $z_0 > 1$. Якщо позначити $c' = z_0^{-1}$, то при $m_1^0 < 0$ генератриса ξ^+ зводиться до вигляду

$$g_+(z) = \frac{1-c'}{1-c} \cdot \frac{1-cz}{1-c'z} = \frac{z^{-1}-c}{1-c} \cdot \frac{(1-c')z}{1-c'z} = b_*^-(z)g_*^+(z),$$

де $g_*^+(z)$ – генератриса геометричного розподілу з параметром c' на $\mathbb{Z}^+$. Функцію $b_*^-(z)$ можна інтерпретувати як квазігенератрису бернуллівського "розподілу":

$$p_0 = -\frac{c}{1-c} \cdot p_{-1} = 1 - p_0 = \frac{1}{1-c},$$

$$E\xi^+ = \frac{1}{1-c'} - \frac{1}{1-c} = \frac{c'-c}{(1-c')(1-c)} > 0.$$

Аналогічно для майже напівнеперервного знизу процесу $\xi(t)$ рівняння Лундберга $(\mathfrak{L}_0)$ має корінь $b < z_0 < 1$. Якщо позначити $b' = z_0$, то враховуючи, що $p_- = \frac{1-z_0}{1-b}$, при $m_1^0 > 0$ генератрису ξ^- можна звести до вигляду

$$g_-(z) = \frac{1-b'}{1-b} \cdot \frac{z-b}{z-b'} = \frac{z-b}{1-b} \cdot \frac{1-b'}{z-b'} = b_*^+(z) g_*^-(z),$$

$g_*^-(z)$ – генератриса геометричного розподілу на $\mathbb{Z}_-$ з параметром b', $b_*^+(z)$ квазігенератриса бернуллійового "розподілу":

$$p_0 = -\frac{b}{1-b},\ p_1 = 1 - p_0 = \frac{1}{1-b};\ E\xi^- = \frac{b-b'}{(1-b')(1-b)} < 0.$$

За рахунок $p_1 > 0$ множина значень ξ^- поповнюється значенням $\{0\}$.

Для розподілу ξ^+ та перестрибкових функціоналів процесу $\xi(t)$ з поліноміальними генератрисами додатних стрибків $\widetilde{p}_1(z)$ використовуються квазігенератриси геометричного розподілу на $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ з параметром $0 < c_* = |z_3(0)|^{-1} < 1$ $(|z_3(0)| > z_{1,2}(0))$:

$$p_*^+(z) = \frac{1+c_*}{1+c_* z},$$

$$p_k^* = (1+c_*)(-c_*)^k,\ k \geq 0,\ \sum_{k\geq 0} p_k^* = 1,\ \sum_{k\geq 0} |p_k^*| = \frac{1+c_*}{1-c_*}.$$

Приклад 3.3.1. Нехай $\xi(t)$ - цілозначний пуассонівський процес з генератрисою стрибків

$$p(z) = \frac{q(1-b)}{z-b} + \frac{p(z^2+z)}{2},\ p = q = \frac{1}{2},\ 0 < b < 1.$$

Дослідити функціонали $\xi^\pm$ і $\gamma_k(\infty)$, $k = \overline{1,3}$ процесу при всіх знаках значення m_1^0 на підставі основної факторизаційної тотожності та графіків його кумулянти: 1) $m_1^0 = 0$; 2) $m_1^0 > 0$; 3) $m_1^0 < 0$.

Розв'язання. Отже, $\xi(t)$ – майже напівнеперервний знизу процес. Згідно (3.1.1), кумулянта даного процесу має вигляд:

$$k(z) = \lambda \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-z)}{z-b} + \frac{1}{2} \frac{z^2+z-2}{2} \right] = \lambda_1 \cdot \frac{z^2+z-2}{2} + \lambda_2 \cdot \frac{(1-z)}{z-b},$$

де $\lambda > 0$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}$.

Перепишемо кумулянту $k(z)$ у наступному вигляді:

$$k(z) = \frac{\lambda P_3(z)}{4(z-b)}, \; P_3(z) = (z-1)(z^2 + (2-b)z - 2(1+b)).$$

Тоді генератриса процесу $\xi(\theta_s)$ згідно (3.1.4) матиме вигляд:

$$g(s,z) = Ez^{\xi(\theta_s)} = \frac{4s(z-b)}{4s(z-b) - \lambda P_3(z)}, \; s > 0, \; |z| = 1,$$

або перепишемо

$$g(s,z) = \frac{4s(z-b)}{P_3(s,z)}, \; P_3(s,z) = 4s(z-b) - \lambda P_3(z). \qquad (3.3.24)$$

Рівняння Лундберга ($\mathfrak{L}_s$): $k(z) = s$ або $P_3(s,z) = 0$ має три корені (див. рис. 3.3):

$$b < z_1(s) < 1 < z_2(s) < |z_3(s)|, z_3(s) < 0.$$

В силу того, що $\xi(t)$ – майже напівнеперервний знизу, то згідно леми 3.1.1 має місце (3.1.12)

$$g_-(s,z) = \frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_1(s)}, \; p_-(s) = \frac{1-z_1(s)}{1-b},$$

де $z_1(s)$ – додатній розв'язок рівняння Лундберга, $b < z_1(s) < 1$. Отже,

$$P_3(s,z) = (z-z_1(s))P_2(s,z), \text{ де } P_2(s,z) = -\lambda(z-z_2(s))(z-z_3(s)).$$

На основі (3.3.24) і (3.1.12), із основної факторизаційної тотожності (3.1.5) отримаємо співвідношення

$$g(s,z)=\frac{p_-(s)(z-b)}{z-z_1(s)}\cdot\frac{4s(p_-(s))^{-1}}{P_2(s,z)},\ p_-(s)=\frac{4s}{P_2(s,1)},$$

з якого визначається генератриса

$$g_+(s,z)=\frac{4s}{p_-(s)P_2(s,z)}=\frac{P_2(s,1)}{P_2(s,z)}=\frac{z_2(s)-1}{z_2(s)-z}\cdot\frac{|z_3(s)|+1}{|z_3(s)|+z}. \qquad (3.3.25)$$

Отже, згідно з (3.3.25), розподіл $\xi^+(\theta_s)$ виражається через геометричний розподіл з параметром $c_2(s)=(z_2(s))^{-1}$ та квазірозподіл геометричного типу з параметром $c_3^*(s)=(|z_3(s)|)^{-1}$.

Знайдемо $m_1^0=k'(1)=\frac{\lambda(1-3b)}{4(1-b)}$, $\sigma_1^2=k''(1)=\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{(1-b)^2}$ і розглянемо наступні випадки:

1) При $m_1^0=0$, $b=\frac{1}{3}$ $(\lambda=1)$ рівняння $(\mathfrak{L}_0)$: (див. рис. 3.4)

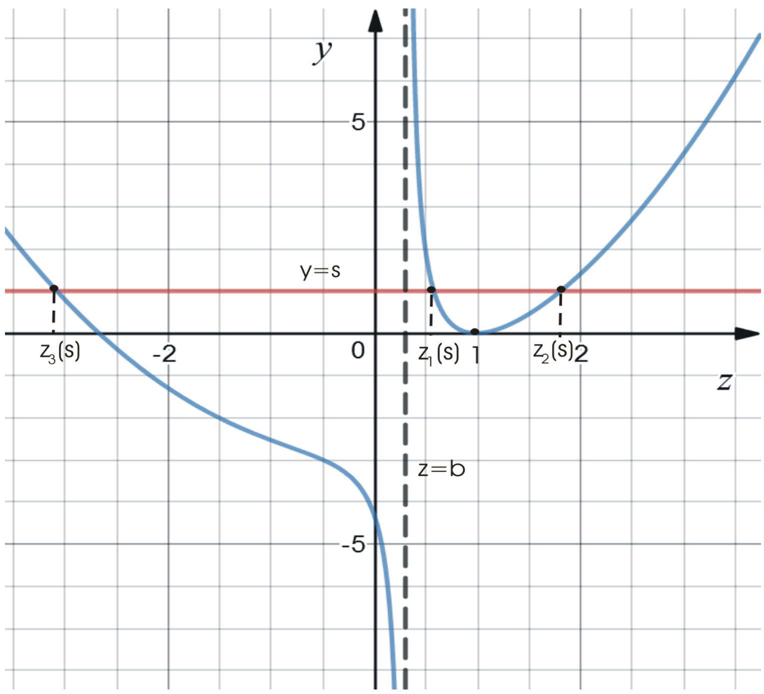

Рис. 3.3: Графік кумулянти $y=k(z)$ та $y=s$

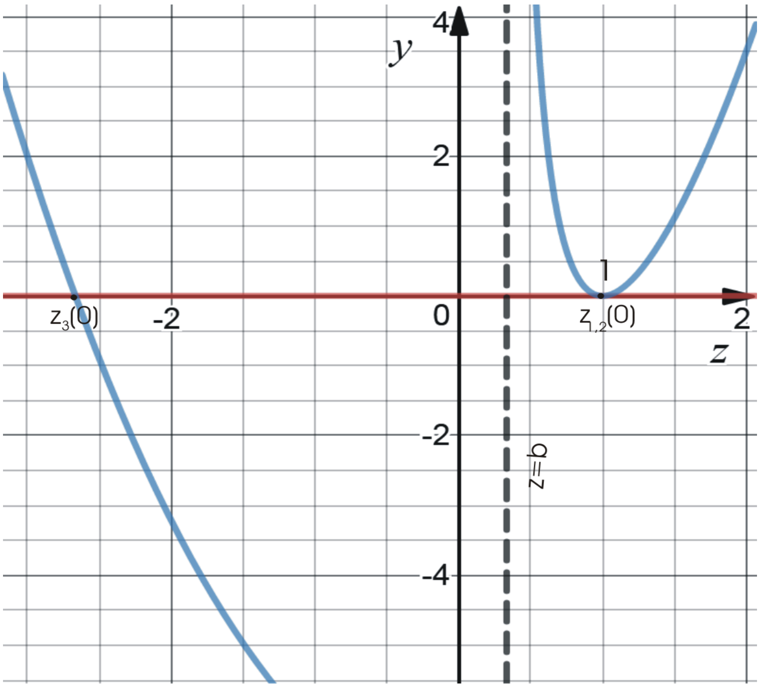

Рис. 3.4: Графік кумулянти $y = k(z)$ при $m_1^0 = 0$

$$z_1(0) = z_2(0) = 1, \; z_3(0) = -\frac{8}{3}.$$

В силу (3.1.12) $p_-(s) \to 0$ і $g_-(s,z) \to 0$, при $s \to 0$. Згідно з (3.3.25) $g_+(s,z) \to 0$ при $s \to 0$. Отже, $P\{\xi^{\pm} = \pm\infty\} = 1$.

Згідно з теоремою 3.3.1, при $m_1^0 = 0$ генератриси $\gamma_{1,2,3}(\infty)$ визначаються через співвідношення (3.1.10) та

$$\widetilde{p}_1(z) = \frac{z^2+z}{2}, \; \frac{\partial}{\partial\beta} a_3(1,z) = \frac{\lambda_1}{2} z^2 \widetilde{p}_1''(z),$$

співвідношеннями (3.3.4).

Отже,

$$E\, z^{\gamma_1(\infty)} = \frac{1}{22}\left(z^2 + 6z\right),$$

$$E\, z^{\gamma_2(\infty)} = \frac{3}{22}\, z + \frac{1}{11},$$

$$E\,z^{\gamma_3(\infty)} = \frac{2}{11}\left(z^2 + \frac{1}{4}z\right).$$

2) При $m_1^0 > 0$, $b < \frac{1}{3}$ ($\lambda = 10$, $b = \frac{1}{4}$) рівняння Лундберга ($\mathfrak{L}_0$) має наступні розв'язки (див. рис. 3.5):

$$z_2(0) = 1,\ \ z_1(0) = \frac{-7+\sqrt{209}}{8} < 1 < |z_3(0)|, z_3(0) = \frac{-7-\sqrt{209}}{8} < 0.$$

В силу (3.3.25), $g_+(s,z) \to 0$ при $s \to 0$. Отже, ξ^+ має вироджений розподіл.

Згідно з (3.1.12) генератриса ξ^- визначається при $s \to 0$ співвідношенням

$$g_-(z) = \frac{p_-(z-b)}{z-z_1(0)},\ \ p_- = \frac{1-z_1(0)}{1-b}.$$

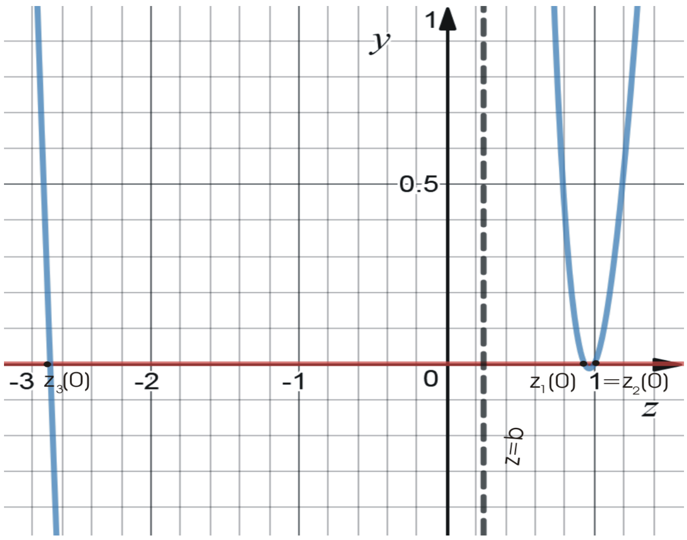

Рис. 3.5: Графік кумулянти $y = k(z)$ при $m_1^0 > 0$

Згідно з теоремою 3.3.1, при $m_1^0 > 0$ генератриси $\gamma_{1,2,3}(\infty)$ визначаються через співвідношення (3.1.10) та

$$\widetilde{p}_1(z) = \frac{z^2+z}{2},\ \ \frac{\partial}{\partial\beta}a_3(1,z) = \frac{\lambda_1}{2}z^2\widetilde{p}_1''(z),$$

співвідношеннями (3.3.5).

Отже,

$$E\, z^{\gamma_1(\infty)} = 3p_- \left[z^2 + (z_0 + \frac{7}{4})z \right],$$

$$E\, z^{\gamma_2(\infty)} = 3p_-(z_0 z + 0,5),$$

$$E\, z^{\gamma_3(\infty)} = \frac{3}{4}p_- \left[(4z_0 + 7)z^2 + 4z \right],$$

де $z_0 = z_1(0) = \frac{-7+\sqrt{209}}{8}$, $p_- = \frac{4}{3}(1 - z_0) = \frac{15-\sqrt{209}}{6}$.

3) При $m_1^0 < 0$, $b > \frac{1}{3}$ ($\lambda = 10$, $b = \frac{1}{2}$) рівняння Лундберга ($\mathfrak{L}_0$) має наступні розв'язки (див. рис. 3.6):

$$z_1(0) = 1,\ 1 < z_2(0) = \frac{-3+\sqrt{57}}{4} < |z_3(0)|, z_3(0) = \frac{-3-\sqrt{57}}{4} < 0.$$

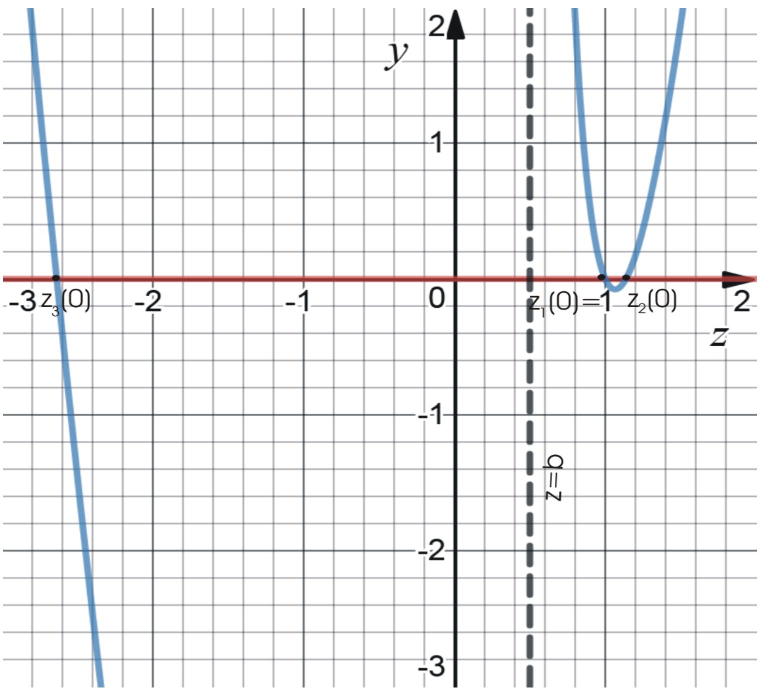

Рис. 3.6: Графік кумулянти $y = k(z)$ при $m_1^0 < 0$

В силу (3.1.12) $p_-(s) \to 0$ і $g_-(s, z) \to 0$ при $s \to 0$. Отже, ξ^- має вироджений розподіл.

Згідно з (3.3.25), генератриса ξ^+ визначається при $s \to 0$ співвідношенням

$$g_+(z) = Ez^{\xi^+} = \frac{1-(z_2(0))^{-1}}{1-(z_2(0))^{-1}z} \cdot \frac{1+|z_3(0)|^{-1}}{1+|z_3(0)|^{-1}z} \tag{3.3.26}$$

і є добутком генератрис геометричного розподілу з параметрами $c_2(0) = (z_2(0))^{-1}$ та квазірозподілу з параметром $c_3^*(0) = (|z_3(0)|)^{-1} < c_2(0) < 1$. В силу умови $c_3^*(0) = (|z_3(0)|)^{-1} < c_2(0) < 1$ цей добуток визначає звичайний розподіл ξ^+. Після розкладу $g_+(z)$ на прості дроби із (3.3.26) отримаємо

$$\begin{gathered} g_+(z) = \frac{(1-(z_2(0))^{-1})(1+(|z_3(0)|)^{-1})}{(z_2(0))^{-1}+(|z_3(0)|)^{-1}} \cdot \\ \cdot \left(\frac{(z_2(0))^{-1}}{1-(z_2(0))^{-1}z} + \frac{(|z_3(0)|)^{-1}}{1+(|z_3(0)|)^{-1}z} \right), \end{gathered} \tag{3.3.27}$$

а після відповідних розкладів (3.3.27) у степеневі ряди в термінах $c_2(0)$ та $c_3^*(0)$ одержимо

$$g_+(z) = \frac{(1-c_2(0))(1+c_3^*(0))}{c_2(0)+c_3^*(0)} \sum_{k=0}^{\infty} \left((c_2(0))^{k+1} + (-1)^k (c_3^*(0))^{k+1} \right) z^k,$$

де $c_3^*(0) < c_2(0) < 1$.

Отже,

$$p_k^+ = \frac{(1-c_2(0))(1+c_3^*(0))}{c_2(0)+c_3^*(0)} \left((c_2(0))^{k+1} + (-1)^k (c_3^*(0))^{k+1} \right) > 0, \ k \geq 0.$$

Згідно з теоремою 3.3.1, при $m_1^0 < 0$ генератриси $\gamma_{1,2,3}(\infty)$ визначаються через умовні генератриси (3.3.6), співвідношенням (3.1.10) та

$$\widetilde{p}_1(z) = \frac{z^2+z}{2}, \ \ \frac{\partial}{\partial \beta} a_3(1,z) = \frac{\lambda_1}{2} z^2 \widetilde{p}_1''(z).$$

Отже,

$$E\left[z^{\gamma_1(\infty)} | \tau^+(\infty) < \infty \right] = \frac{5}{4}\left[z^2 + 4z \right] m_-(1),$$

$$E\left[z^{\gamma_2(\infty)}|\tau^+(\infty)<\infty\right]=\frac{5}{2}(z+1)m_-(1),$$

$$E\left[z^{\gamma_3(\infty)}|\tau^+(\infty)<\infty\right]=\frac{5}{4}\left[3z^2+z\right]m_-(1),$$

де $m_-(1)=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{z_2(0)-1}-\frac{1}{|z_3(0)|+1}\right)^{-1}=\frac{4}{35}$.

Висновки до розділу 3

1. Розглянуто розподіли перестрибкових функціоналів через рівень $x=0$ для майже напівнеперервних знизу цілозначних процесів, а саме, генератриси та розподіли $\gamma_k(0)$, $(k=\overline{1,3})$ для всіх значень $m_1^0=E\xi(1)$.
2. У випадку цілочислових гратчастих пуассонівських процесів $\xi(t)$ встановлено співвідношення для розподілів $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0\geq 0$, та умовні генератриси $\gamma_k(\infty)$ при $m_1^0<0$.

Розділ 4

Перестрибкові функціонали

Даний розділ присвячений вивченню спільних і маргінальних генератрис та розподілів перестрибкових функціоналів у випадку майже напівнеперервних знизу процесів

4.1 Генератриси перестрибків додатного рівня

Надалі розглядаються майже напівнеперервні знизу процеси з кумулянтою (1.1.6). Знайдемо для цих процесів вигляд спільної генератриси перестрибкових функціоналів та генератрис пар функціоналів $\{\tau^+(x),\, \gamma^+(x)\}$, $\{\tau^+(x),\, \gamma_+(x)\}$, $\{\tau^+(x),\, \gamma_x^+\}$ при $x \in \mathbb{Z}_0^+$.

З теореми 1.2.1 випливає

Наслідок 4.1.1. Для майже напівнеперервного знизу процесу $\mathbf{Y}(t)$ з кумулянтою (1.1.6) має місце співвідношення

$$s\mathbf{V}(s, x, u_1, u_2, u_3) = \sum_{y=0}^{x} \mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s, x-y, u_1, u_2, u_3), \qquad (4.1.1)$$

де $\mathbf{W}(s, x, u_1, u_2, u_3)$ визначається через згорткою $\check{\mathbf{p}}_k^-(s)$ з $\mathbf{A}(x, u_1, u_2, u_3)$

при умові (1.1.6) і має такий уточнений вигляд

$$\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3)=\mathbf{p}^-(s)\Big[\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)+u_1(u_1\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot$$
$$\cdot\Big\{\mathbf{R}(s)\left(\mathbf{A}(x+1,u_1,u_2,u_3)-(\mathbf{R}(s))^{-x-1}\mathbf{A}_3(x+1,u_2u_3\mathbf{R}(s))\right)+$$
$$+\sum_{l=x+2}^{+\infty}\left((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}u_2^l-u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1}\right)u_3^l\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big\}\Big]. \quad (4.1.2)$$

Доведення. Формула (4.1.1) випливає з (1.2.13) після обернення по z. Використовуючи співвідношення (2.1.55) для $\check{\mathbf{p}}_y^-(s)$ (див. теорема 2.1.5) із означення $\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3)$ маємо

$$\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2,u_3)=\sum_{y=-\infty}^{0}\check{\mathbf{p}}_y^-(s)\mathbf{A}(x-y,u_1,u_2,u_3)=$$
$$=\mathbf{p}^-(s)\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)+$$
$$+\mathbf{p}^-(s)\sum_{y=-\infty}^{-1}[\mathbf{R}(\mathbf{s})]^{-y-1}\left(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}\right)\mathbf{A}(x-y,u_1,u_2,u_3)=$$
$$=\mathbf{p}^-(s)\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)+\mathbf{p}^-(s)\mathbf{d}(x,u_1,u_2,u_3). \quad (4.1.3)$$

Позначимо, через $\mathbf{d}(s,x,u_1,u_2,u_3)$, суму в другому доданку співвідношення (4.1.3), що виражається через згортку $\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)$ і геометричний розподіл $\overline{\xi}(\theta_s)$ з матричним параметром $\mathbf{R}(s)$. Розглянемо окремо $\mathbf{d}(s,x,u_1,u_2,u_3)$, беручи до уваги означення $\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)$

$$\mathbf{d}(s,x,u_1,u_2,u_3)=\sum_{y=-\infty}^{-1}(\mathbf{R}(s))^{-y-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})\mathbf{A}(x-y,u_1,u_2,u_3)=$$
$$=\sum_{y=-\infty}^{-1}(\mathbf{R}(s))^{-y-1}(\mathbf{R}(s))-\mathbf{B})\sum_{l=x-y+1}^{+\infty}u_1^{l-(x-y)}u_2^{x-y}u_3^l\mathbf{\Pi}_0^+(l).$$

В останньому співвідношені змінивши порядок сумування отримаємо

$$\mathbf{d}(s,x,u_1,u_2,u_3)=\sum_{l=x+2}^{+\infty}u_1^{l-x}u_2^xu_3^l\sum_{y=x-l+1}^{-1}u_1^yu_2^{-y}\left[\mathbf{R}(s)\right]^{-y-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B}\right)\mathbf{\Pi}_0^+(l)=$$

$$=(\mathbf{I}-u_1^{-1}u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\Big\{\sum_{l=x+2}^{\infty}u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1}u_3^l(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0^+(l)-$$

$$-\sum_{l=x+2}^{\infty}(\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}(u_2u_3)^l(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big\}=$$

$$=(\mathbf{I}-u_1^{-1}u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\Big\{\mathbf{R}(s)\mathbf{A}(x+1,u_1,u_2,u_3)-$$

$$-\mathbf{B}\mathbf{A}(x+1,u_1,u_2,u_3)-(\mathbf{R}(s))^{-x}\,\mathbf{A}_3(x+1,u_2u_3\mathbf{R}(s))+$$

$$+(\mathbf{R}(s))^{-(x+1)}\sum_{l=x+2}^{\infty}(u_2u_3\mathbf{R}(s))^l\,\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big\}=$$

$$=(\mathbf{I}-u_1^{-1}u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\Big\{\mathbf{R}(s)\Big(\mathbf{A}(x+1,u_1,u_2,u_3)-$$

$$-(\mathbf{R}(s))^{-(x+1)}\,\mathbf{A}_3(x+1,u_2u_3\mathbf{R}(s))\Big)+$$

$$+\sum_{l=x+2}^{\infty}\Big[(\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}u_2^l-u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1}\Big]\,u_3^l\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big\}.\quad(4.1.4)$$

Підставивши в (4.1.3) співвідношення (4.1.4) отримаємо (4.1.2). □

Для подальших викладок наведемо наступні співвідношення

$$\mathbf{A}_1(x,u_1)=\sum_{k\geq x+1}u_1^{k-x}\mathbf{\Pi}_0^+(k),\ \mathbf{A}_2(x,u_2)=\sum_{k\geq x+1}u_2^x\mathbf{\Pi}_0^+(k)=u_2^x\mathbf{\Pi}(x),$$

$$\mathbf{A}_3(x,u_3)=\sum_{k\geq x+1}u_3^k\mathbf{\Pi}_0^+(k),\ \mathbf{a}_k(z,u_k)=\sum_{x\geq 0}z^x\mathbf{A}_k(x,u_k),$$

які остаточно виражаються через генератрису додатних стрибків

$$\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(z)=\sum_{x\geq 0}^{\infty}z^x\mathbf{\Pi}_0^+(x)=\mathbf{\Lambda}_1\widetilde{\mathbf{p}}_1(z)+\mathbf{N}\widetilde{\mathbf{f}}(z),$$

де $\mathbf{\Pi}_0^+(x) = \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{p}_1(x) + \mathbf{N}\mathbf{f}(x)$, $\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(1) = \mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{NP}$ та генератрису хвоста розподілу

$$\widetilde{\mathbf{\Pi}}(z) = \sum_{r\geq 0}^{\infty} z^r \mathbf{\Pi}(r), \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \sum_{k\geq r+1}^{\infty} \mathbf{\Pi}_0^+(k), \mathbf{\Pi}(0) = \mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{NP}, \widetilde{\mathbf{\Pi}}(1) = \sum_{r\geq 0}^{\infty} \mathbf{\Pi}(r).$$

$$\mathbf{A}_1(0, u_1) = \widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_1),\ \mathbf{A}_1(x, 1) = \mathbf{\Pi}(x), \mathbf{A}_1(0, 1) = \mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{NP},$$

$$\mathbf{a}_1(z, u_1) = \frac{u_1}{u_1 - z}(\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_1) - \widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(z)),$$

$$\mathbf{A}_2(0, u_2) = \mathbf{\Pi}(0),\ \mathbf{A}_2(x, 1) = \mathbf{\Pi}(x), \mathbf{A}_2(0, 1) = \mathbf{\Pi}(0),$$

$$\mathbf{a}_2(z, u_2) = \widetilde{\mathbf{\Pi}}(zu_2), \mathbf{a}_2(1, u_2) = \widetilde{\mathbf{\Pi}}(u_2),$$

$$\mathbf{A}_3(0, u_3) = \widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_3),\ A_3(x, 1) = \Pi(x), \mathbf{A}_3(0, 1) = \mathbf{\Pi}(1),$$

$$\mathbf{a}_3(z, u_3) = \frac{1}{1 - z}(\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_3) - \widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(zu_3)), \mathbf{a}_3(1, u_3) = u_3(\widetilde{\mathbf{\Pi}}_0^+(u_3))'.$$

Позначимо $\gamma_1(x) = \gamma^+(x)$, $\gamma_2(x) = \gamma_+(x)$, $\gamma_3(x) = \gamma_x^+$. Розглянемо обернення генератрис $\mathbf{V}_i(s, x, u_i) = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)} u_i^{\gamma_i(x)},\ \tau^+(x) < \infty\right]$, які для скалярного випадку визначають багатозначну функцію банкрутства (див. [30]). Для цього спочатку розглянемо наступні представлення функцій $\mathbf{W}_i(s, x, u_i)$, зручні для обернення по u_i.

Лема 4.1.1. *Для майже напівнеперервного знизу процесу $\mathbf{Y}(t)$ з кумулянтою (1.1.6) спільні генетатриси пар $\{\tau^+(x),\ \gamma_i(x)\}$ визначаються співвідношеннями*

$$s\mathbf{V}_i(s, x, u_i) = \sum_{y=0}^{x} \mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}_i(s, x - y, u_i),\ i = \overline{1, 3}, \tag{4.1.5}$$

де функції $\mathbf{W}(s,x,u_i)$ *згідно з (4.1.2) мають вигляд*

$$\mathbf{W}(s,x,u_1,u_2)=\mathbf{p}^-(s)[\mathbf{A}(x,u_1,u_2)+ \\ +(\mathbf{I}-u_1^{-1}u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\Big\{\mathbf{R}(s)\Big(\mathbf{A}(x+1,u_1,u_2)- \\ -(\mathbf{R}(s))^{-(x+1)}\mathbf{A}_3(x+1,u_2\mathbf{R}(s))\Big)+ \\ +\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}u_2^l-u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1}\Big)u_3^l\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l)], \quad (4.1.6)$$

$$\mathbf{W}_1(s,x,u_1)=\mathbf{p}^-(s)[\mathbf{A}_1(x,u_1)+u_1(u_1\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot \\ \cdot\Big\{\mathbf{R}(s)\Big(\mathbf{A}_1(x+1,u_1)-\mathbf{A}_1(x+1,\mathbf{R}(s))\Big)+ \\ +\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}-u_1^{l-(x+1)}\Big)\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big\}], \quad (4.1.7)$$

$$\mathbf{W}_2(s,x,u_2)=\mathbf{p}^-(s)[\mathbf{A}_2(x,u_2)+(\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot \\ \cdot\{\mathbf{R}(s)\Big(\mathbf{A}_2(x+1,u_2)-(\mathbf{R}(s))^{-(x+1)}\mathbf{A}_3(x+1,u_2\mathbf{R}(s))\Big)+ \\ +\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big((u_2\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}-\mathbf{I}\Big)u_2^{x+1}\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l)\}], \quad (4.1.8)$$

$$\mathbf{W}_3(s,x,u_3)=\mathbf{p}^-(s)\Big[\mathbf{A}_3(x,u_3)+(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot \\ \cdot\Big\{\mathbf{R}(s)\big(\mathbf{A}_3(x+1,u_3)-(\mathbf{R}(s))^{-x-1}\mathbf{A}_3(x+1,u_3\mathbf{R}(s))\big)+ \\ +\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}-\mathbf{I}\Big)u_3^l\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big\}\Big]. \quad (4.1.9)$$

Доведення. (4.1.5) випливає із (4.1.1) відповідно при заміні $u_k=1$, якщо $k\neq i$. З (4.1.2) при $u_3=1$ випливає (4.1.6). Оскільки

$$\mathbf{W}_1(s,x,u_1)=\mathbf{W}(s,x,u_1,1,1),$$

$$\mathbf{W}_2(s,x,u_2)=\mathbf{W}(s,x,1,u_2,1),$$

$$\mathbf{W}_3(s,x,u_3)=\mathbf{W}(s,x,1,1,u_3),$$

то із (4.1.2) отримуємо відповідно (4.1.7)-(4.1.9). □

Зауважимо, що функцію $\mathbf{W}_2(s,x,u_2)$ можна записати значно простішим співвідношенням, згідно її означення та вигляду $\mathbf{A}_2(x,u_2)$, а саме перепишемо її наступним чином

$$\mathbf{W}_2(s,x,u_2)=\mathbf{p}^-(s)[\mathbf{A}_2(x,u_2)+\sum_{y=-\infty}^{-1}(\mathbf{R}(s))^{-1}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})u_2^{x-y}\mathbf{\Pi}(x-y)]. \tag{4.1.10}$$

Врахувавши (4.1.7)-(4.1.9) із (4.1.5) отримаємо необхідні представлення для відповідних генератрис $\mathbf{V}_i(s,x,u_i)$ пар функціоналів.

Обернувши (4.1.5) по u_1, u_2, u_3 отримаємо (4.1.11)-(4.1.13)

Наслідок 4.1.2. Для процесу $Y(t)$ з кумулянтою (1.1.6) мають місце наступні формули ($l\in\mathbb{Z}_0^+$)

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(x)=l,\ \xi^+(\theta_s)>x\}=\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)},\,\gamma_1(x)=l,\,\tau^+(x)<\infty\right]= \\ s^{-1}\sum_{y=0}^{x}\mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\sum_{j=-\infty}^{0}\check{\mathbf{p}}_j^-(s)\mathbf{\Pi}_0^+(x-y-j+l),\ l\in\mathbb{Z}_+, \tag{4.1.11}$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_2(x)=l,\ \xi^+(\theta_s)>x\}=\mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)},\,\gamma_2(x)=l,\,\tau^+(x)<\infty\right]= \\ s^{-1}\sum_{y=0}^{l}\mathbf{p}_{x-y}^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\check{\mathbf{p}}_{y-l}^-(s)\mathbf{\Pi}(l),l\in\mathbb{Z}_0^+; \tag{4.1.12}$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_3(x) = l,\ \xi^+(\theta_s) > x\} = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(x)},\, \gamma_3(x) = l,\, \tau^+(x) < \infty\right] =$$
$$s^{-1}\sum_{y=0}^{l} \mathbf{p}^+_{x-y}(s)\mathbf{P}_s^{-1} \sum_{j=y-l+1}^{\infty} \check{\mathbf{p}}_j^-(s)\mathbf{\Pi}_0^+(j),\ l \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.1.13}$$

4.2 Перестрибки через нескінченно віддалений та нульовий рівні

Розглянемо маргінальні розподіли функціоналів $\gamma_i(x)$ у випадку $x = \infty$. Для цього спочатку доведемо наступну лему.

Лема 4.2.1. *Для майже напівнеперервного знизу процесу* $\mathbf{Y}(t)$ *з кумулянтою (1.1.6) має місце співвідношення*

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) = s^{-1}\mathbf{g}_+(s, \varepsilon)\widetilde{\mathbf{w}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3), \tag{4.2.1}$$

де

$$\widetilde{\mathbf{w}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3) = \mathbf{p}_*^-(s)\Bigg[\widetilde{\mathbf{a}}(\varepsilon, u_1, u_2, u_3) + (1-\varepsilon)(\mathbf{I} - u_1^{-1}u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot$$
$$\cdot \sum_{l=2}^{\infty} u_3^l \Big\{(1 - \varepsilon u_1^{-1}u_2)^{-1}(u_1^{l-1} - (\varepsilon u_2)^{l-1}) -$$
$$(\mathbf{I} - \varepsilon(\mathbf{R}(s))^{-1})^{-1}((u_2\mathbf{R}(s))^{l-1} - (\varepsilon u_2)^{l-1})\Big\}(\mathbf{R}(s) - \mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Bigg]. \tag{4.2.2}$$

Доведення. Згідно означення $\widetilde{\mathbf{v}}(s, \varepsilon, u_1, u_2, u_3)$ із формули (4.1.1) випливає (4.2.1) наступним чином

$$\widetilde{\mathbf{v}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x\mathbf{V}(s,x,u_1,u_2,u_3)=$$
$$=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x s^{-1}\sum_{y=0}^{x}\mathbf{p}_y^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s,x-y,u_1,u_2,u_3)=$$
$$=s^{-1}(1-\varepsilon)\sum_{y=0}^{\infty}\varepsilon^y\mathbf{p}_y^+(s)\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{W}(s,l,u_1,u_2,u_3)=$$
$$=s^{-1}\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)\widetilde{\mathbf{w}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3).$$

Згідно з (4.1.2) отримаємо

$$\widetilde{\mathbf{w}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{p}^-(s)\Big[\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)+$$
$$+u_1(u_1\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\cdot\Big\{\mathbf{R}(s)\Big(\mathbf{A}(x+1,u_1,u_2,u_3)-$$
$$-(\mathbf{R}(s))^{-x-1}\mathbf{A}_3(x+1,u_2u_3\mathbf{R}(s))\Big)+$$
$$+\sum_{l=x+2}^{+\infty}\Big((\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}u_2^l-u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1}\Big)u_3^l\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l)\}\Big]=$$
$$=\mathbf{p}_*^-(s)\sum_{k=1}^{5}\mathbf{I}_k,$$

де кожен доданок останнього співвідношення після відповідних перетворень виражається через матричний параметр $\mathbf{R}(s)$ та значення функцій $\mathbf{A}(1,u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{A}_3(1,\varepsilon u_2u_3)$, $\mathbf{A}_3(1,\mathbf{R}(s)u_2u_3)$ та деякі складніші згортки з $\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l)$. Розглянемо окремо наступні доданки

$$\mathbf{I}_1=(1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x\mathbf{A}(x,u_1,u_2,u_3)=\widetilde{\mathbf{a}}(\varepsilon,u_1,u_2,u_3);$$

$$\mathbf{I}_2 = (1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x \mathbf{A}(x+1,u_1,u_2,u_3) =$$
$$= (1-\varepsilon)(1-\varepsilon u_1^{-1}u_2)^{-1}\Big(\mathbf{A}(1,u_1,u_2,u_3) - \varepsilon^{-1}\mathbf{A}_3(1,\varepsilon u_2 u_3)\Big);$$

$$\mathbf{I}_3 = (1-\varepsilon)(\mathbf{R}(s))^{-1}\sum_{x=0}^{\infty}(\varepsilon(\mathbf{R}(s))^{-1})^x \mathbf{A}_3(x+1,u_2u_3\mathbf{R}(s)) =$$
$$= (1-\varepsilon)\left(\mathbf{R}(s)-\varepsilon\mathbf{I}\right)^{-1}\Big(\mathbf{A}_3(1,u_2u_3\mathbf{R}(s)) - \varepsilon^{-1}\mathbf{R}(s)\mathbf{A}_3(1,\varepsilon u_2u_3)\Big);$$

$$\mathbf{I}_4 = (1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x\sum_{l=x+2}^{\infty}(u_2u_3)^l(\mathbf{R}(s))^{l-(x+1)}\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l) =$$
$$= (1-\varepsilon)\left(\mathbf{I}-\varepsilon(\mathbf{R}(s))^{-1}\right)^{-1}\sum_{l=2}^{\infty}(u_2u_3)^l\Big((\mathbf{R}(s))^{l-1}-\varepsilon^{l-1}\Big)\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l);$$

$$\mathbf{I}_5 = (1-\varepsilon)\sum_{x=0}^{\infty}\varepsilon^x\sum_{l=x+2}^{\infty}u_1^{l-(x+1)}u_2^{x+1}u_3^l\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0^+(l) =$$
$$= (1-\varepsilon)(1-\varepsilon u_1^{-1}u_2)^{-1}u_2\sum_{l=2}^{\infty}u_3^l\Big(u_1^{l-1}-(\varepsilon u_2)^{l-1}\Big)\mathbf{B}\mathbf{\Pi}_0(l).$$

Підставляючи $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, $\mathbf{I}_4$, $\mathbf{I}_5$ в співвідношення для $\widetilde{\mathbf{w}}(s,\varepsilon,u_1,u_2,u_3)$ отримаємо (4.2.2). □

Зауважимо, що підставляючи в (4.2.1) замість $u_2 = u_3 = 1$, $u_1 = u_3 = 1$, $u_1 = u_2 = 1$, отримаємо

$$\widetilde{\mathbf{v}}_i(s,\varepsilon,u_i) = s^{-1}\mathbf{g}_+(s,\varepsilon)\widetilde{\mathbf{w}}_i(s,\varepsilon,u_i), \tag{4.2.3}$$

де відповідно $\widetilde{\mathbf{w}}_1(s,\varepsilon,u_1)$, $\widetilde{\mathbf{w}}_2(s,\varepsilon,u_2)$, $\widetilde{\mathbf{w}}_3(s,\varepsilon,u_3)$ мають наступні зображення

$$\widetilde{\mathbf{w}}_1(s,\varepsilon,u_1)=(1-\varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s)\Bigg[\mathbf{a}_1(\varepsilon,u_1)+$$
$$+(\mathbf{I}-u_1^{-1}\mathbf{R}(s))^{-1}\sum_{l=2}^{\infty}\Big\{(1-u_1^{-1}\varepsilon)^{-1}(u_1^{l-1}-\varepsilon^{l-1})- \tag{4.2.4}$$
$$(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(s))^{-1}\varepsilon)^{-1}((\mathbf{R}(s))^{l-1}-\varepsilon^{l-1})\Big\}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Bigg];$$

$$\widetilde{\mathbf{w}}_2(s,\varepsilon,u_2)=(1-\varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s)\Bigg[\mathbf{a}_2(\varepsilon,u_2)+$$
$$+u_2(\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(s))^{-1}\sum_{l=2}^{\infty}\Big\{(1-u_2\varepsilon)^{-1}(1-(u_2\varepsilon)^{l-1})- \tag{4.2.5}$$
$$(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(s))^{-1}\varepsilon)^{-1}((u_2\mathbf{R}(s))^{l-1}-(u_2\varepsilon)^{l-1})\Big\}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Bigg];$$

$$\widetilde{\mathbf{w}}_3(s,\varepsilon,u_3)=(1-\varepsilon)\mathbf{p}_*^-(s)\Bigg[\mathbf{a}_3(\varepsilon,u_3)+$$
$$+(\mathbf{I}-\mathbf{R}(s))^{-1}\sum_{l=2}^{\infty}u_3^l\Big\{(1-\varepsilon)^{-1}(1-\varepsilon^{l-1})- \tag{4.2.6}$$
$$(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(s))^{-1}\varepsilon)^{-1}((\mathbf{R}(s))^{l-1}-\varepsilon^{l-1})\Big\}(\mathbf{R}(s)-\mathbf{B})\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Bigg].$$

Згідно з (4.2.4)-(4.2.6) після граничного переходу в (4.2.3) отримується

Теорема 4.2.1. *Якщо $Y(t)$ майже напівнеперервний знизу процес з кумулянтою (1.1.6), тоді*

1. При $m_1^0>0$,

$$\mathbf{E}[u_1^{\gamma_1(\infty)}]=\mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Bigg[\mathbf{a}_1(1,u_1)+$$
$$(\mathbf{I}-u_1^{-1}\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\Big(u_1^x-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}(x)\Bigg], \tag{4.2.7}$$

$$\mathbf{E}[u_2^{\gamma_2(\infty)}] = \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Big[\mathbf{a}_2(1,u_2)+$$
$$(\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}u_2^x\sum_{l=x+1}^{\infty}\Big(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x u_2^{l-x}\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big], \tag{4.2.8}$$

$$\mathbf{E}[u_3^{\gamma_3(\infty)}] = \mathbf{m}_+(1)\mathbf{p}_*^-(0)\Big[\mathbf{a}_3(1,u_3)+$$
$$(\mathbf{p}_*^-(0))^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{l=x+1}^{\infty}\Big(u_2^l\mathbf{I}-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{q}_*^-(0)\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big]. \tag{4.2.9}$$

2. При $m_1^0 = 0,\ m_2^0 < \infty$,

$$\mathbf{E}[u_1^{\gamma_1(\infty)}] = \mathbf{m}^0(1)\Big[\mathbf{a}_1(1,u_1)+$$
$$(\mathbf{I}-u_1^{-1}\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}\Big(u_1^x-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{P}^*\mathbf{\Pi}(x)\Big], \tag{4.2.10}$$

$$\mathbf{E}[u_2^{\gamma_2(\infty)}] = \mathbf{m}^0(1)\Big[\mathbf{a}_2(1,u_2)+$$
$$(\mathbf{I}-u_2\mathbf{R}(0))^{-1}\sum_{x=1}^{\infty}u_2^x\sum_{l=x+1}^{\infty}\Big(\mathbf{I}-(\mathbf{R}(\mathbf{0}))^x u_2^{l-x}\Big)(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{P}^*\mathbf{\Pi}_0^+(l)\Big], \tag{4.2.11}$$

$$\mathbf{E}[u_3^{\gamma_3(\infty)}] = \mathbf{E}[u_3^{\gamma_1(\infty)+\gamma_2(\infty)}]. \tag{4.2.12}$$

3. При $m_1^0 < 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 1}\mathbf{E}\Big[u_1^{\gamma^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}\,u_2^{\gamma_+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)}\,u_3^{\gamma^+_{\widetilde{\nu}_\varepsilon}},\ \tau^+(\widetilde{\nu}_\varepsilon)<\infty\Big] = \mathbf{0}. \tag{4.2.13}$$

Матриці $\mathbf{m}_+(1)$, $\mathbf{m}^0(1)$ *визначені в наслідку 2.2.1.*

Доведення. Якщо $m_1^0 > 0$, тоді згідно з теоремою 2.1.1 $|\mathbf{p}_*^-(0)| \neq 0$ формули (4.2.7)-(4.2.9) випливають з (4.2.3) та відповідно (4.2.4)-(4.2.6) після граничного переходу при $s \to 0$, $\varepsilon \to 1$.

Якщо $m_1^0 = 0$, $m_2^0 < \infty$, тоді згідно з теоремою 2.1.1 $|\mathbf{p}_*^-(0)| = 0$ формули (4.2.10)-(4.2.11) випливають з (4.2.3) та відповідно (4.2.4)-(4.2.6) після граничного переходу при $s \to 0$, $\varepsilon \to 1$, (4.2.12) визначається через розподіл суми недострибку та перестрибку процесу.

Якщо $m_1^0 < 0$, то (4.2.13) очевидно. □

Для випадку $x = 0$ має місце твердження

Теорема 4.2.2. *Для процесу $Y(t)$ з кумулянтою (1.1.6) маємо*

$$\mathbf{P}\{\gamma_1(0) = l,\ \xi^+(\theta_s) > 0\} = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_1(0) = l, \tau^+(0) < \infty\right] = \\ s^{-1}\mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\sum_{j=-\infty}^{0}\check{\mathbf{p}}_j^-(s)\mathbf{\Pi}_0^+(l-j),\ l \in \mathbb{Z}^+, \tag{4.2.14}$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_2(0) = l, \xi^+(\theta_s) > 0\} = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_2(0) = l, \tau^+(0) < \infty\right] = \\ s^{-1}\mathbf{p}_+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\check{\mathbf{p}}_{-l}^-(s)\mathbf{\Pi}(x),\ l \in \mathbb{Z}_0^+, \tag{4.2.15}$$

$$\mathbf{P}\{\gamma_3(0) = l,\ \xi^+(\theta_s) > 0\} = \mathbf{E}\left[e^{-s\tau^+(0)}, \gamma_3(0) = l, \tau^+(0) < \infty\right] = \\ s^{-1}\sum_{y=0}^{l}\mathbf{p}_{-y}^+(s)\mathbf{P}_s^{-1}\sum_{j=y-l+1}^{\infty}\check{\mathbf{p}}_j^-(s)\mathbf{\Pi}_0^+(j),\ l \in \mathbb{Z}^+. \tag{4.2.16}$$

Доведення. Співвідношення (4.2.14) - (4.2.16) випливають відповідно із (4.1.9) - (4.1.12) якщо підставити $x = 0$. □

В роботах H. Nyrhinen [96], J. Cai [76]-[77], J. Cai, D.C.M. Dickson [78], W. Wei, Y. Hu [98] з ускладненими узагальненнями класичних процесів ризику, в яких розглядаються моделі ризику з дискретним часом і багатократним перестраховуванням. Воно пов'язане з марковським "reinsurer's rate of interest" (процентним інтересом перестрахувальника). В цих моделях "the rate of interest" визначається регулярним ланцюгом Маркова I_n з матрицею перехідних імовірностей $\mathbf{P} = \| \mathbf{P}_{kr} \|$ $(k, r = \overline{1, m})$ і процентними значеннями $\{i_k\}, 0 < i_k < 1, \sum\limits_{k=1}^{m} i_k < 1$. Якщо позначити резервний процес ризику з дискретно розподіленими вимогами $\{X_i\}_{i \geq 1}$ та преміями $\{Y_i\}_{i \geq 1}$, через

$$U_n = u + \sum_{i \leq n} (Y_i - X_i),\, U_0 = u, \tag{4.2.17}$$

то "збурений ланцюгом I_n" процес приймає вигляд

$$\breve{U}_n = (1 + I_n)\breve{U}_{n-1} + Y_n - X_n, n \geq 0. \tag{4.2.18}$$

Із (4.2.18) видно, що резерв при n-му перестрахуванні збільшується на $I_n U_{n-1}$. Це збільшення резерву визначає стрибок на переходних I_n: $\chi_{kr}^{(n)} = I_n U_{n-1}$ і збільшує імовірність виживання.

Можна розглянути аналогічну модель гратчастого резервного процесу ризику з неперервним часом:

$$\xi(t) = u + Y(t) - X(t),\, \xi(0) = u, \tag{4.2.19}$$

$Y(t)$ - преміальний процес, $X(t)$ - процес вимог. Для модифікованого процесу (4.2.19) процентні надбавки резерву визначаються стрибками на переходах ЛМ

$$\chi_{kr}^{(n)} = I_n \xi(\sigma_{n-1}),\, \sigma_0 = 0,\, \sigma_1 = \tau^{(1)}, ..., \sigma_n = \sigma_{n-1} + \tau^{(n)}, \tag{4.2.20}$$

де $\{\tau_k^{(n)}\}$ – незалежні між собою і від n показниково розподілені величини, $\tau^{(n)} = \tau_k^{(n)}$ – часи перебування ланцюга Маркова в стані : $P\{\tau_k^{(\cdot)} > t\} = e^{i_k t}$, $\mathbf{N} = \| \delta_{kr} i_k \|$ – матриця інтенсивностей стрибків I_n.

Доцільно розглянути замість $\xi(t)$ надлишковий процес вимоги

$$\xi(t) = X(t) - Y(t), \tag{4.2.21}$$

де $u > 0$ – ризиковий рівень. Момент 1-го досягнення рівня u визначає момент банкрутства, тому верхня півплощина $u \geq 0$ є "ризиковою зоною" для $\xi(t)$. В певні випадкові моменти може появитись вимога Y_i, що обумовить вихід $\xi(t)$ за ризиковий рівень u, тобто приведе до банкрутства. Тоді в резерві страхувальника не вистачить коштів для оплати частини вимоги, що дорівнює перестрибку $\gamma^+(u)$. Цю частину називають дефіцитом або штрафом (penalty) вимог. Тому науковий керівник запропонував у модифікованому процесі на $\{I_n\}$ розглянути замість (4.2.20) випадкові величини $\chi_{kr}^{(n)} = I_n\gamma^+(u)$, як перестрибки на n-му переході ланцюга Маркова I_n. Тоді (4.2.21) узагальнюється надлишковим процесом вимог $\grave{\xi}(t)$ на $\{I_t\}$

$$\grave{\xi}(t) = X(t) - (Y(t) + I_t\gamma^+(u)), \xi(0) = 0. \tag{4.2.22}$$

Якщо стрибки $X(t)$ геометрично розподілені, тоді $\gamma^+(u)$ також мають геометричний розподіл з тимже параметром $C > 0$, причому розподіл $\gamma^+(u)$ не залежить від u (див. [29]). В цьому випадку процес $\grave{\xi}(t)$ - майже напівнеперервний зверху. В згаданих роботах для модифікованих процесів ризику з марковськими "reinsurer's interest rata"основна мета визначається знаходженням експоненціальних оцінок імовірності банкрутства в скінченний момент t або тотальної (кінцевої) імовірності банкрутства (ultimate ruin probability). У випадку майже напівнеперервного зверху процесу $\grave{\xi}(t)$ при умові, що $\grave{m}_1^0 < 0$ імовірність банкрутства $\psi(u)$ визначається "хвостом розподілу" абсолютного максимуму $\grave{\xi}^+ = \sup\limits_{0 \leq t < \infty} \grave{\xi}(t)$, який згідно з результатами в [17] має геометричний розподіл з матричним параметром $\mathbf{Z}_0^{-1}$

$$\begin{gathered}\mathbf{\Psi}(u)=\mathbf{P}\{\grave{\xi}^{+}>u\}=\mathbf{Z}_0^{-u}\mathbf{q}_{+}=e^{-u\ln\mathbf{Z}_0}\mathbf{q}_{+},|\mathbf{Z}_0^{\pm1}|\neq0,\\ \mathbf{q}_{+}=\mathbf{P}\{\grave{\xi}^{+}>0\}=\mathbf{q}_{+}^{\star}(0)\mathbf{P}_0=(\mathbf{Z}_0^{-1}-c\mathbf{I})(I-c\mathbf{I})^{-1}\mathbf{P}_0,\\ \mathbf{Z}_0^{-1}=\mathbf{q}_{+}^{\star}(0)+c\mathbf{p}_{+}^{\star}(0),|\mathbf{Z}_0^{\pm1}|\neq0.\end{gathered}\tag{4.2.23}$$

Співвідношення (4.2.23) уточнює показникову оцінку $\mathbf{\Psi}(u)$ з конкретним коефіцієнтом при експоненті.

Якщо стрибки $X(t)$ в (4.2.20) мають довільний розподіл при умові $m_1^0=E\zeta(1)<0$, а стрибки $Y(t)$ геометрично розподілені, в силу майже напівнеперервності знизу процесу (4.2.21), розподіл $\gamma^{+}(u)$ пов'язаний з розподілом ξ^{+} і визначається із співвідношень (7.71)-(7.73) (див. [29]).

$$\begin{gathered}P\{\gamma^{+}(u)=r,\xi^{+}>u\}=\sum_{y=0}^{u}g_1'(0,u-y,r)p_y^{+},\\ g_1(0,x,r)=\lambda p_{-}^{'}(0)[bp_{r+x}+(1-b)\overline{F}(x+r-1)],\\ p_{-}^{'}(0)=\frac{1}{|m_1|(1-b)},\end{gathered}\tag{4.2.24}$$

де $p_r=P\{X_i=r\}$, $\overline{F}(x)=P\{X_k>x\}$, λ – інтенсивність стрибків $X(t)$.

Якщо k-му стану ланцюга Маркова (в k-му середовищі) відповідає резервний процес

$$\zeta_k(t)=X_k(t)-Y_k(t),$$

$X_k(t)=\sum\limits_{i\leq\nu_k'}X_k^{(i)}$, $Y_k=\sum\limits_{i\leq\nu_k''(t)}Y_k^{(i)}$, $P\{\nu_k^{','' }(t)>t\}=e^{-t\lambda_k^{','' }}$, тоді перестрибки через рівень u залежать від k і стрибки на переходах ланцюга I_t – $\chi_{kr}^{(n)}=I_k\gamma_k^{+}(u)$ мають розподіл і відповідну генератрису $f(x)=\|P\{\gamma_k^{+}(u)=x\}p_{kr}\|$, $\widetilde{f}(z)=\|Ez^{\gamma_k^{+}(u)}p_{kr}\|$.

Якщо "діагональні" процеси $\zeta_k(t)$ майже напівнеперервні знизу, тобто вимоги $Y_k^{(i)}$ – геометрично розподілені з параметром b_k, $E\zeta_k(1)=$

$m_k^{'} < 0$, то розподіли $\gamma_k^+(u)$ подібно до (4.2.24) визначаються через $\frac{\partial}{\partial s} p_-^{(k)}(s)|_{s=0} = (|m_k^{'}|(1-b_k))^{-1}$ та розподіли премій $X_k^{(\cdot)}$

$$\begin{gathered} p_x^{(k)} = P\{X_k^{(\cdot)} = r\}, \\ \overline{F}^{(k)}(x) = P\{X_k^{(\cdot)} > x\} = \sum_{r \geq x+1} p_r^{(k)},\ x > 0. \end{gathered} \tag{4.2.25}$$

Зауважимо, що при довільному розподілі вимог та геометрично розподілених премій, згідно з (2.2.38), при $\widetilde{m}_1^0 < 0$ генератриса ζ^+ непроста і визначається наступним співвідношенням

$$\mathbf{g}^+(z) = \mathbf{E} z^{\zeta^+} = \frac{\widetilde{m}_1^0}{\nu_0^-}[\mathbf{\Lambda}_2 + (z\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{Q}(1-z)^{-1}) - \mathbf{\Lambda_1}\widetilde{\mathbf{F}}_1(z) - \mathbf{N}\widetilde{f}(z)]^{-1}\mathbf{P}_0$$

а її обернення по z складніше за розподіл ζ^+ у скалярному випадку. Простіше визначається лише

$$\begin{gathered} \mathbf{p}_+ = \mathbf{g}^+(0) = \frac{\widetilde{m}_1^0}{\chi_0^-}(\mathbf{\Lambda}_2 + \mathbf{B}(\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{N}))^{-1}\mathbf{P}_0 \\ \mathbf{q}_+ = \mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{P}_0 - \mathbf{p}_+, \end{gathered}$$

де $\mathbf{q}_+$ – імовірність банкрутства при $u = 0$.

Приклад 4.2.1. Розглянемо діагональний надлишковий процес

$$\zeta_d(t) = X(t) - Y(t),$$

з відповідною кумулянтою

$$\mathbf{K}_{(d)}(z) = (z-1)(\mathbf{\Lambda}_1(\mathbf{I} - \mathbf{C}z) + \mathbf{\Lambda}_2(z\mathbf{I} - \mathbf{B})), \tag{4.2.26}$$

$\mathbf{\Lambda}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_1^{(2)} \end{pmatrix}$, $\mathbf{\Lambda}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2^{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(2)} \end{pmatrix}$, $X(t)$ – процес вимог з геометричним розподілом і параметром $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$, $Y(t)$ – процес премій з геометричним розподілом і параметром $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$. Нехай ланцюг Маркова I_t має два стани з матрицею перехідних імовірностей $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді процес $\hat{\zeta}(t)$, що враховує процентні виплати дефіциту вимог на переходах ланцюга Маркова I_t визначається процесом $\zeta_d(t)$ та розподілами перестрибків $\gamma_1^{(1,2)}(u)$:

$$f_u^{(1,2)}(z) = \|p_{kr} P\{\gamma_1^{(1,2)}(u) = r\}\|.$$

Знайти ймовірність банкрутства для $\hat{\zeta}(t)$.

Слід мати на увазі, що в загальному випадку розподіл перестрибків $\gamma_1^{(1,2)}(u)$ тісно пов'язаний з $\tau^+_{(1,2)}(u)$. Розподіли перестрибків та їх генератриси визначаються в (3.1.22). Кумулянта процесу $\hat{\zeta}(t) = \hat{\zeta}_u(t)$ має вигляд

$$\hat{\mathbf{K}}_u(z) = \mathbf{\Lambda}_1(z-1)(\mathbf{I} - \mathbf{C}z) + \mathbf{NP}(f_u(z) - \mathbf{I}) + \mathbf{\Lambda}_2(z-1)(z\mathbf{I} - \mathbf{B}) + \mathbf{Q}. \tag{4.2.27}$$

Оскільки процес $\zeta_{(d)}(t)$ майже напівнеперервний зверху, то розподіл $\gamma_1^{(1,2)}(u)$ в силу теореми 2.1.4 не залежить від u і $\tau^+_{(1,2)}(u)$, а його геометричний розподіл визначається матричним параметром $\mathbf{C}$.

Отже, кумулянта $\hat{\zeta}(t)$ незалежить від u і має вигляд

$$\hat{\mathbf{K}}_u(z) = (\mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{NP})(z-1)(\mathbf{I} - \mathbf{C}z) + (z-1)\mathbf{\Lambda}_2(z\mathbf{I} - \mathbf{B}) + \mathbf{Q}. \tag{4.2.28}$$

При умові $\hat{m}_1^0 < 0$ розподіл $\hat{\zeta}^+$ невироджений і визначається невиродженою матрицею $\hat{\mathbf{Z}}_0^{-1} = \hat{\mathbf{q}}_+^*(0) + \mathbf{C}\hat{\mathbf{p}}_+^*(0)$. Згідно з формулою (2.2.29) імовірність банкрутства визначається співвідношенням

$$\mathbf{\Psi}(u) = \mathbf{P}\{\hat{\zeta}^+ > u\} = (\hat{\mathbf{Z}}_0^{-1} - \mathbf{C})\hat{\mathbf{Z}}_0^{-u}(\mathbf{I} - \mathbf{C})^{-1}\mathbf{P}_0.$$

Висновки до розділу 4

1. Одержані співвідношення для спільної генератриси функціоналів $\{\tau^+(x),\, \gamma^+(x),\, \gamma_+(x),\, \gamma_x^+\}$ та пар перестрибкових функцоналів $\{\tau^+(x),\, \gamma_i(x)\}, i = \overline{1,3}$ у випадку майже напівнеперервних знизу процесів заданих на ланцюгу Маркова.

2. Для визначення генератрис перестрибкових функціоналів через рівень $x \to \infty$ знайдено твірні перетворення цих генератрис при скінченних x та деякі допоміжні твердження.

Список використаних джерел

[1] *Арндт К.* Асимптотические свойства распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова / К. Арндт // Теория вероятн. и её применения. – 1980. – **25**, № 2. – С. 313-328.

[2] *Арндт К.* Об отыскании в явном виде распределения экстремума случайного блуждания на цепи Маркова / К. Арндт // Предельные теоремы теории вероятностей и смежные вопросы. – Новосибирск: Наука, 1982. – Т. 1. – С. 139-146.

[3] *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых / А. А. Боровков // Сиб. мат. журн. – 1962. – Т. 3, № 5. – С. 645-694.

[4] *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания / А. А. Боровков – Москва: Наука, 1972. – 367 с.

[5] *Боровков А. А.* Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий / А. А. Боровков, Б. А. Рогозин // Теория вероятн. и её примен. – 1984. – **9**, № 3. – С. 401-430.

[6] *Боровков А. А.* Теория вероятностей / А. А. Боровков – Москва: Наука, 1986. – 432 с.

[7] *Братийчук Н. С.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращенниями / Н. С. Братийчук, Д. В. Гусак – Киев: Наукова думка, 1990. – 246 с.

[8] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер – Москва: Наука, 1967. – 575 с.

[9] *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

[10] *Герич М. С.* Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / Д. В. Гусак, М. С. Герич // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, № 2. – С. 54-63.

[11] *Герич М. С.* Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних ґратчастих процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». – Івано-Франківськ, 2012. – С. 14-15.

[12] *Герич М. С.* Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху ґратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта». – Луцьк – Світязь, 2012. – С. 18-19.

[13] *Герич М. С.* Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Карпатські математичні публікації. – 2012. – **4**, №2. – С. 229-240.

[14] *Герич М. С.* Про розподіл абсолютного мінімуму для напівнеперервного зверху ґратчастого процесу на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». – Івано-Франківськ, 2013. – С. 6-7.

[15] *Герич М. С.* Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху ґратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей XV Міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука. – Київ, 2014. – С. 43-44.

[16] *Герич М. С.* Розподіл абсолютних екстремумів для майже напівнеперервних зверху цілочислових пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей IV міжнародної ганської конференції, присвяченої 135 річниці від дня народження Ганса Гана. – Чернівці, 2014. – С. 27-28.

[17] *Герич М. С.* Про генератриси екстремумів та їх доповнень для майже напівнеперервних цілочислових пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, № 8. – С. 1034-1049.

[18] *Герич М. С.* Розподіли перестрибкових функціоналів для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Матеріали міжнародної наукової математичної конференції «Методика викладання та методи дослідження в математиці» у м. Берегове, 21-23 квітня 2016 р. – Ужгород: ТОВ «РІК-У», 2016. – С. 33.

[19] *Герич М. С.* Розподіли перестрибків для майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Теорія ймовір. та мат. статистика. – 2016. – Вип. 94. – С. 36-49.

[20] *Герич М. С.* Про стрибки через нескінчено віддалений рівень для одного класу гратчастих процесів / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2016. – Вип. 29, № 2. – С. 54-63.

[21] *Гихман И. И.* Теория случайных процессов.(Т.2) / И. И. Гихман, А. В. Скороход – Москва: Наука, 1973. – 639 с.

[22] *Гохбер И. Ц.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов / И. Ц. Гохбер, М. Г. Крейн // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 2. – С. 3-72.

[23] *Гусак Д. В.* О распределении момента и величины перескока уровня для однородных процесов с независимыми на конечной цепи Маркова / Д. В. Гусак, С. И. Пересыпкина // Укр. мат. журн. – 1974. – Т. 26, № 3. – С. 291-299.

[24] *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для одного класса процессов на цепи Маркова. I-II / Д. В. Гусак – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – 60 с. – Препринт 78. I-II.

[25] *Гусак Д. В.* Распределение некоторых граничных функционалов для решетчатых пуассоновских процессов на цепи Маркова / Д. В. Гусак, А. И. Турениязова // Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей: Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1987. – С. 21-27.

[26] *Гусак Д. В.* О решетчатых полунепрерывных пуассоновских процессах на цепи Маркова / Д. В. Гусак, А. И. Турениязова // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, №6. – С. 707-711.

[27] *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів / Д. В. Гусак – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.

[28] *Гусак Д. В.* Факторизаційна тотожність для напівнеперервних процесів, визначених на ланцюгу Маркова / Д. В. Гусак // Теор. ймовірн. та матем. статистика. – 2002. – № 64. – С. 37-50.

[29] *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами / Д. В. Гусак – Київ: Ін-т математики НАН України, 2007. – **65** – 459 с.

[30] *Гусак Д. В.* Процеси з незалежними приростами в теорії ризику / Д. В. Гусак – Київ: Ін-т математики НАН України, 2011. – 543 с.

[31] *Ежов И. И.* Марковские процессы, однородные по второй компоненте / И. И. Ежов, А. В. Скороход // Теория вероятн. и её примен. – 1969. – **14**, № 1, № 4. – С. 3-14.

[32] *Каданкова Т. В.* Про сумісний розподіл supremum'a, infimum'a та значення напівнеперервного процесу з незалежними приростами / Т. В. Каданкова // Теор. ймовір. та матем. статист. – 2004. – № 70. – С. 54-625.

[33] *Каданков В. Ф.* О распределении момента первого выхода из интервала и величины перескока границы для процессов с независимыми приращениями и случайных блужданий / В. Ф. Каданков, Т. В. Каданкова // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 10. – С. 1359-1384.

[34] *Каплан И. Б.* Предельные распределения некоторых граничных функционалов в решетчатых схемах блуждания на цепи Маркова / И. Б. Каплан: Автореф. дис. кан-та физ.-мат. наук. – Киев, 1986. – 12 с.

[35] *Карнаух Є.В.* Розподіли перестрибків для майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова / Є.В. Карнаух // Доп. НАН України. Математика. – 2007. – № 2. – С. 13-17.

[36] *Карнаух Є.В.* Граничні задачі для одного класу процесів на ланцюгу Маркова: Автореф. дис. кан-та фіз.-мат. наук. – Київ, 2007. — 18с.

[37] *Карнаух Є.В.* Перестрибкові функціонали для майже напівнеперервного процесу Пуассона на ланцюзі Маркова після досягнення рівня / Є.В. Карнаух // Теорія ймовір. та мат. статистика. – 2007. – **76** . – С. 45-53.

[38] *Карнаух Є.В.* Поведінка майже напівнеперервного процесу Пуассона на ланцюзі Маркова після досягнення рівня / Є.В. Карнаух // Укр. матем. журн. – 2010. – Т. 62, №1. – С. 81-89.

[39] *Кемени Дж.* Счетные цепи Маркова / Дж. Кемени, Дж. Снелл, А. Кнепп – Москва: Наука, 1987. – 416 с.

[40] *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложного пуассоновского процесса / В. С. Королюк // Теория вероят. и ее примен. – 1974. – **19**, № 1. – С. 3-14.

[41] *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов / В. С. Королюк – Киев: Наукова думка, 1975. – 138 с.

[42] *Королюк В. С.* О задачах разорения для сложного пуассоновского процесса / В. С. Королюк // Теория вероят. и ее примен. – 1975. – **20**, № 1. – С. 382-384.

[43] *Королюк В. С.* Метод потенциала в граничных задачах для процессов с независимыми приращениями и скачками одного знака / В. С. Королюк, В. Н. Супрун, В. М. Шуренков // Теория вероят. и ее примен. – 1976. – **22**, № 2. – С. 251-259.

[44] *Королюк В. С.* Полумарковские процессы и их применение / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин – Киев: Наукова думка, 1976. – 182 с.

[45] *Королюк В. С.* Метод потенциала в граничных задачах для случайных блужданий на цепи Маркова / В. С. Королюк, В. М. Шуренков // Укр. мат. журн. – 1977. – **39**, № 4. – С. 464-471.

[46] *Королюк В. С.* Граничные задачи для случайных блужданий / В. С. Королюк, Н. С. Братийчук, Б. Пирджанов – Ашхабад: Ылым, 1987. – 250 с.

[47] *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов / М. Г. Крейн // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 5. – С. 3-120.

[48] *Лотов В. И.* Об асимптотике распределений в двуграничных задачах для случайных блужданий, заданых на цепи Маркова / В. И. Лотов // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. – 1989. – Т. **13**. – С. 116-136.

[49] *Лотов В. И.* Асимптотические разложения для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания / В. И. Лотов, Н. Г. Орлова // Сибирс. математ. журнал. – 2004. – **45**, №4. – С. 822-842.

[50] *Лотов В. И.* О факторизационных представлениях в граничных задачах для случайных блужданий, заданных на цепи Маркова / В. И. Лотов, Н. Г. Орлова // Сибирс. математ. журнал. – 2005. – **46**, №4. – С. 833-840.

[51] *Лотов В. И.* Асимптотические разложения распределения числа пересечений полосы случайным блужданием, заданным на цепи Маркова / В. И. Лотов, Н. Г. Орлова // Сибирс. математ. журнал. – 2006. – **47**, №6. – С. 1303-1322.

[52] *Лотов В. И.* Факторизационные тождества для времени пребывания случайного блуждания в полосе / В. И. Лотов // Сибирс. математ. журнал. – 2005. – **46**, №4. – С.833-840.

[53] *Лотов В. И.* О предельном поведении распределения числа пересечения полосы траекториями случайного блуждания / В. И. Лотов // Сибирс. математ. журнал. – 2013. – **54**, №2. – С. 347-354.

[54] *Лугавов В. С.* Теория восстановления и факторизационные тождества для блужданий на цепи Маркова / В. С. Лугавов, Б. А. Рогозин // Деп. в ВИНИТИ 06.07.88, № 5425-В88.

[55] *Лугавов В. С.* Факторизационные представления для времен пребывания полумарковских блужданий / В. С. Лугавов, Б. А. Рогозин // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, №2. – С. 389–406.

[56] *Лугавов В. С.* О компонентах факторизационного представления для времени пребывания полунепрерывных случайных блужданий в полосе / В. С. Лугавов // Сиб. мат. журн. – 2003. – Т. 44, №4. – С. 800–809.

[57] *Лугавов В. С.* Об одном классе функционалов на переходах цепи Маркова / В. С. Лугавов // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2012. – Т. 12, Вып.2. – С. 61–82

[58] *Малышев В. А.* Уравнения Винера-Хопфа и их применения в теории вероятностей (обзор) / В. А. Малышев // Итоги науки и техники. Сер.: Теория вероятностей. Мат. статистика. Теорет. кибернетика. – М., 1976. – Т. 13. – С. 5-35.

[59] *Могульськкий А. А.* Факторизационные тождества для процессов с независимыми приращениями, заданных на конечной цепи Маркова / А. А. Могульский // Теория вероятн. и мат. статистика. – 1974. – **11**. – С. 86-96.

[60] *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа / Б. Нобл – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.

[61] *Норкін Б. В.* Метод послідовних наближень для розв'язання інтегральних рівнянь актуарної математики / Б. В. Норкін: Автореф. дис. кан-та физ.-мат. наук. – Киев, 1986. – 21 с.

[62] *Пересыпкина С. И.* О достижениии уровня для сумм и процессов, заданных на конечной цепи Маркова / С. И. Пересыпкина // Теория вероятн. и мат. статистика. – 1974. – **11**. – С. 117-126.

[63] *Печерский Е. А.* О совместном распределении случайных величин, связанных с флуктуациями процесса с независимыми приращениями / Е. А. Печерский, Б. А. Рогозин // Теор. вероят. и ее примен. – 1969. – 14, № 3. – С. 431–444.

[64] *Пресман Э. Л.* Граничная задача для суммы решетчатых случайных величин, заданных на конечной регулярной цепи Маркова / Э. Л. Пресман // Теор. вероят. и ее примен. – 1967. – Т. 12, № 2. – С. 373–380.

[65] *Пресман Э. Л.* Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова / Э. Л. Пре-

сман // Изв. АН СССР. Сер. Матем. – 1969. – Т. 33, № 4. – С. 861–900.

[66] *Рогозин Б. А.* О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями / Б. А. Рогозин // Теор. вероят. и ее примен. – 1966. – № 4. – С. 656–670.

[67] *Скороход А. В.* Процессы с независимыми приращениями / А. В. Скороход – М.: Наука, 1964. – 278 с.

[68] *Студнев Ю. П.* Локальная предельная теорема для дискретных квазивероятностных распределений / Ю. П. Студнев, Ю. И. Игнат // Теория вероят. и её примен. – 1992. – Т 37, №4. – С. 807-808.

[69] *Такач Л.* Комбинаторные методы в теории случайных процессов / Л. Такач – М.: Мир, 1971. – 264 с.

[70] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей: в 2 т. / В. Феллер – М.: Мир, 1984. – Т.2. – 752 с.

[71] *Arjas E.* On a fundamental identity in the theory of semi-Markov processes / E. Arjas // Adv. Appl. Probab. – 1972. – **4**, № 2. – P. 258-270.

[72] *Asmussen S.* Risk theory in a Markovian environment / S. Asmussen // Scandinavian Actuarial Journal – 1989. – 2 – P. 69–100.

[73] *Asmussen S.* Large claims approximations for risk processes in a Markovian environment / S. Asmussen, Z. F. Henriksen, Cl. Kluppelberg // Stoch. Processes and their Applications – 1994. – 54 – P. 29-43.

[74] *Asmussen S.* Ruin Probabilities / S. Asmussen, – Singapore: World Sci., 2000. – 385 p.

[75] *Asmussen S.* Ruin Probabilities / S. Asmussen, H. Albrecher – Hackensack: World Sci., 2010. – 602 p.

[76] *Cai J.* Discrete time risk models under rate of interest / J. Cai // Probability in the Engineering and Informational Sciences. – 2002. – **16** – P. 309-324.

[77] *Cai J.* Ruin probabilities with dependent rates of interest / J. Cai // J. Appl.Prob. – 2002. – **39** – P. 312-323.

[78] *Cai J.* Ruin probabilities with a Markov chain interest model / J. Cai, D. C. M. Dickson // Insurance: mathematicts and economics. – 2004. – **35**, № 3. – P. 513-525.

[79] *Cheng S. Wu. B., Gerber H. U., Shiu E. S. W.* Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model / S. Wu. B. Cheng, H. U. Gerber, E. S. W. Shiu // Insurance: Mathematics and Economics. – 2000. – **26**, № 2. – P. 239–250.

[80] *Dickson D. C. M.* Some comments on the compound binomial model / D. C. M. Dickson // Astin Bulletin. – 1994. – **24**, № 1. – P. 33–45.

[81] *Dickson D. C. M.* Ruin probabilities for Erlang (2) risk processes / D. C. M. Dickson, C. Hipp // Insurance: Mathem. and Econom. – 1998. – **22**, № 3. – P. 251-262.

[82] *Dickson D. C. M.* Ruin probabilities with compounding assets / D. C. M. Dickson, H. R. Waters // Insurance: Mathem. and Econom. – 1999. – **25** – P. 49-62.

[83] *Doney B. A.* On Wiener–Hopf factorisation and the distribution of extrema for certain stable processes/ B. A. Doney // The Annals of Probability – 1987. — V. 15, № 4. – P. 1352-1362.

[84] *Fuh C.-D.* Uniform Markov renewal theory and ruin probabilities in Markov random walks / C.-D. Fuh // The Annals of Applied Probability – 2004. — **14**, № 3. – P. 1202-1241.

[85] *Gerber H. U.* Mathematical fun with the compound binomial process / H. U. Gerber // Astin Bulletin. – 1988. – **18**. – P. 161–168.

[86] *Greenwood P.* Wiener-Hopf methods, decompositions, and factorisation identities for maxima and minima of homogeneous random processes / P. Greenwood // Adv. in Appl. Probab. – 1975. – **4**. – P. 767-785.

[87] *Gusak D. V.* Boundary functionals for Levy processes and their applications / D. V. Gusak – LAP Lambert Acad.Publishing, 2014. – 412 p.

[88] *Gusak D. V.* On the exit from a finite interval for the risk processes with stochastic premiums / D. V. Gusak, E. V. Karnaukh // Theory Stoch. Process — 2005. – V.11(27), №3(4). – P. 71-81.

[89] *Herych M. S.* Moment generating funtions of extremums and their complemets for upper semi-continuous lattice Poison process on Markov chain / M. S. Herych // Bull. of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics and Mathematics – 2013. – Vol. № 1. – P. 21-27.

[90] *Herych M. S.* On overshoots for the almost semi-continuous Poisson processes defined on a Markov chain / M. S. Herych // International Conference "Stochastic Processes in Abstract Spaces". – 2015. – P. 19.

[91] *Keilson J.* A central limit theorem for processes defined on a finite Markov chain / J. Keilson , D. M. Wishart // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1964. – **60**, №3. – P. 547-567.

[92] *Keilson J.* Addenda to Processes Defined on a Finite Markov Chain / J. Keilson , D. M. Wishart // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1967. – V. 63. – P. 187–193.

[93] *Kuznetsov A.* Wiener–Hopf factorisation and distribution of extrema a family of Levy processes/ A. Kuznetsov // The Annals of Probability – 2010. — V. 20, № 5. – P. 1801–1830.

[94] *Lin X.* Minimizing Upper Bound of Ruin Probability Under Discrete Risk Model with Markov Chain Interest Rate / X. Lin, Z. Dongjin,

Z. Yanru // Communications in Statistics - Theory and Methods – 2015 — V. 44, **4**. – P. 810–822.

[95] *Miller H. D.* A matrix factorization problem in the theory of random variables defined on a finite Markov chain / H. D. Miller // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1962. – V. 58, № 2. – P. 268-285.

[96] *Nyrhinen H.* Finite and infinite time ruin probabilites in a stochastic economic environment / H. Nyrhinen // Stoch. process. Appl. – 2001. – **92**. – P. 265-285.

[97] *Shiu E.S.W.* The probability of eventual ruin in the compound binomial model // Astin Bulletin. – 1989. – **19**. – P. 179–190.

[98] *Wei W.* Ruin probabilities in the compound binomial model // Insurance: Mathematics and Economics. – 1992. – **12**. – P. 133-142.

[99] *Willmot G.E.* Ruin probabilities in the compound binomial model // Insurance: Mathematics and Economics. – 1992. – **12**. – P. 133-142.

Додаток

Список публікацій за темою дисертації

1. Герич М. С. Уточнення компонент основної факторизаційної тотожності для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / Д. В. Гусак, М. С. Герич // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2011. – Вип. 22, №2. – С. 54-63.

2. Герич М. С. Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних ґратчастих процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». – Івано-Франківськ, 2012. – С. 14-15.

3. Герич М. С. Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху ґратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Тези доповідей міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта». – Луцьк – Світязь, 2012. – С. 18-19.

4. Герич М. С. Уточнення основної факторизаційної тотожності для майже напівнеперервних гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Карпатські математичні публікації – 2012. – **4**, № 2. – С. 229-240.

5. Герич М. С. Про розподіл абсолютного мінімуму для напівнеперервного зверху ґратчастого процесу на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу». – Івано-Франківськь, 2013. – С. 6-7.

6. Herych M. S. Moment generating funtions of extremums and their complemets for upper semi-continuous lattice Poison process on Markov chain / M. S. Herych // Visn. Kiev nats. Un-t them. T.G. Shevchenko Series: Phys.-Math. Science – 2013. – Vol. № 1. – P. 21-27.

7. Герич М. С. Генератриси розподілу екстремумів та їх доповнень для напівнеперервних зверху ґратчастих пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей XV Міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука. – Київ, 2014. – С. 43-44.

8. Герич М. С. Розподіл абсолютних екстремумів для майже напівнеперервних зверху цілочислових пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич // Тези доповідей IV міжнародної ганської конференції, присвяченої 135 річниці від дня народження Ганса Гана. – Чернівці, 2014. – С. 27-28.

9. Герич М. С. Про генератриси екстремумів та їх доповнень для майже напівнеперервних цілочислових пуассонівських процесів на ланцюгах Маркова / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Укр. мат. журн. – 2015. – Т. 67, №8. – С. 1034-1049.

10. Herych M. S. On overshoots for the almost semi-continuous Poisson processes defined on a Markov chain / M. S. Herych // International Conference "Stochastic Processes in Abstract Spaces". – 2015. – P. 19.

11. Герич М. С. Розподіли перестрибкових функціоналів для гратчастих пуассонівських процесів на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Матеріали міжнародної наукової математичної конференції «Методика викладання та методи дослідження в математиці» у м. Берегове, 21-23 квітня 2016 р. – Ужгород: ТОВ «РІК-У», 2016. – С. 33.

12. Герич М. С. Розподіли перестрибків для майже напівнеперервних процесів, заданих на ланцюгу Маркова / М. С. Герич // Теорія ймовір. та мат. статистика. – 2016. – Вип. 94. – С. 36-49.

13. Герич М. С. Про стрибки через нескінчено віддалений рівень для одного класу гратчастих процесів / М. С. Герич, Д. В. Гусак // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Серія: матем. і інформ. – 2016. – Вип. 29, №2. – С. 54-63.

Відомості про апробацію результатів дисертації

1. Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, Україна, 20-26 лютого 2012);
2. Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта» (Луцьк – Світязь, 7-9 вересня 2012);
3. Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, Україна, 25 лютого -3 березня 2013);

4. XV міжнародна наукова конференція ім. академіка Михайла Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014);

5. IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135 річниці від дня народження Ганса Гана (Чернівці, 30 червня - 5 липня 2014);

6. International Conference Dedicated to the 80th Anniversary of Prof. A. Ya. Dorogovtsev "Stochastic Processes in Abstract Spaces"(Kyiv, 14-16 October, 2015);

7. Міжнародна наукова математична конференція «Методика викладання та методи дослідження в математиці» (Берегове, 21-23 квітня, 2016);

8. Науковий семінар "Исчисление Маллявена и его приложения" Інститута математики НАН України під керівництвом доктора фіз.-мат. наук, професора А. А. Дороговцева (2012, 2014);

9. Міжкафедральний науковий семінар математичного факультету державного вищого навчального закладу "Ужгородський національний університет" під керівництвом доктора фіз.-мат. наук Г. І. Сливки-Тилищак (2017).