НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КОВАЛЬОВ ІВАН МИХАЙЛОВИЧ

УДК 517.982.4

ІНДЕФІНІТНА ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ СТІЛТ'ЄСА ТА УЗАГАЛЬНЕНІ МАТРИЦІ ЯКОБІ

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико – математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник

доктор фізико - математичних наук, професор
Деркач Володимир Олександрович,
Донецький національний університет
імені Василя Стуса, м.Вінниця,
професор кафедри математичного аналізу і
диференціальних рівнянь.

Офіційні опоненти:

доктор фізико - математичних наук,
старший науковий співробітник
Голуб Анатолій Петрович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу
обчислювальної математики;

доктор фізико - математичних наук, професор
Золотарьов Володимир Олексійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б. І. Вєркіна НАН України, м. Харків,
провідний науковий співробітник математичного
відділення відділу теорії функцій.

Захист відбудеться " 19 " червня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий " 10 " травня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради РОМАНЮК А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню індефінітної проблеми моментів в узагальненому класі Стілт'єса. Класична проблема моментів Стільт'єса була вперше розглянута Т. Стілт'єсом у 1894 році та сформульована наступним чином: за послідовністю дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ відновити невід'ємну борелівську міру dσ таку, що

$$\int_0^{\infty} t^i \, \mathrm{d}\sigma(\mathrm{t}) = s_i, \qquad i \in Z_+ = N \cup \{0\}. \tag{1}$$

Класична проблема Стілт'єса розглядалась методами теорії неперервних дробів Т. Стілт'єсом у 1894 році. Як було показано Ф. Р. Гантмахером та М. Г. Крейном, ця проблема може бути інтерпретована, як спектральна проблема для струни Стілт'єса, тобто невагомої нитки із зліченною кількістю точкових мас. Більш того, Т. Стілт'єсом було доведено, що кожна борелівська міра зі скінченними моментами в (1) є спектральною функцією струни Стілт'єса. Інші варіанти проблеми моментів було розглянуто в роботах П. Л. Чебишова, А. А. Маркова, Х. Гамбургера, Р. Неванлінни, М. Г. Крейна, Н. І. Ахієзера, Ю. М. Березанського та ін.

Індефінітна проблема моментів в узагальнених класах Стілт'єса стає актуальною задачею з 70-х років минулого сторіччя. В роботах М. Г. Крейна та Ґ.Лангера (1978 – 1981 рр.) було введено узагальнений клас Стілт'єса $\mathbf{N}_\kappa^+$ та розглянуто індефінітну проблему моментів Стілт'єса у класі $\mathbf{N}_\kappa^+$ як інтерполяційну проблему моментів. Отримано повний опис розв'язків цієї проблеми у термінах неперервного **S-**дробу, знайдено явні формули резольвентної матриці та її факторизацію. З індефінітною проблемою моментів у класі $\mathbf{N}_\kappa^+$ було пов'язано різницеву систему, що дає опис поперечних гармонійних коливань струни з позитивними масами та діполями. Підкреслимо, що останнім часом ці результати М.Г. Крейна та Ґ. Лангера знайшли своє застосування у роботах Р. Білса, Д. Сетінгера і Д. Шмигільського, а також О. С. Костенка та Дж. Екхарда по спектральних проблемах для рівнянь Камасса – Хольма.

Застосування операторного підходу до проблеми моментів М. Г. Крейном у 1949 р. дало змогу пов'язати проблему моментів з теорією представлень симетричних операторів. Операторний підхід до індефінітної проблеми моментів в узагальнених класах Стілт'єса $\mathbf{N}_\kappa^k$ був розглянутий у роботі В.О. Деркача (1997 р.) Було отримано повний опис розв'язків цієї проблеми через операторний підхід та через побудову узагальненого **S -** дробу, без використання алгоритму Шура.

Інша проблема, яка розглядається у дисертаційному дослідженні, – це перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі. Вперше це перетворення було введено у роботі Г. Дарбу 1882 р. і застосовано В. Баргманном у 1949 р. для побудови так званих безвідбивних потенціалів в одновимірній теорії розсіювання у квантовій механіці. Перетворення Дарбу часто використовують при дослідженні спектральних проблем операторів Шредінґера, рівняння Кортевега – де Фріза та у теорії солітонів.

В. Б. Матвєєв та М. А. Сале у 1979 р. вперше досліджували перетворення Дарбу для систем різницевих рівнянь, які пов'язані з ланцюгами Тоди. У 2004 році М. Буено та Ф. Марселаном було розглянуто перетворення Дарбу для монічної трьохдіагональної матриці Якобі і отримано умови існування цього перетворення у термінах поліномів 1-го роду. Для монічних матриць Якобі, для яких не виконується ця умова, М. С. Деревягіним і В. О. Деркачем у 2011 р. було введено поняття узагальненого перетворення Дарбу, яке переводить монічну матрицю Якобі в узагальнену матрицю Якобі. У зв'язку з цим природно виникає проблема дослідження перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Основні наукові результати, викладені у дисертації, отримано при виконанні науково-дослідницьких робіт "Гармонічний та спектральний аналіз функцій і операторів, рівняння згортки та наближення функцій" (номер державної реєстрації 0112U002701), "Метричні простори, гармонічний аналіз функцій і операторів, сингулярні та некласичні задачі для диференціальних рівнянь" (номер державної реєстрації 0115U000136), що виконувались відповідно до плану роботи Донецького національного університету ім. Василя Стуса (м. Вінниця); "Спектральні проблеми теорії диференціальних і різницевих операторів" (номер державної реєстрації 0115U000556), що виконувалась відповідно до плану роботи Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова.

Мета і завдання дослідження: встановити, що кожна послідовність дійсних чисел **s** відповідає деякому узагальненому дробу Стілт'єса, отримати систему різницевих рівнянь, яка відповідає узагальненому дробу Стілт'єса; розглянути невироджену індефінітну проблему моментів Стілт'єса, знайти критерій її розв'язності, розробити покроковий алгоритм розв'язку цієї проблеми, отримати повний опис розв'язків зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса, знайти явні формули матриць розв'язків та їх факторизацію; розглянути операторний підхід до зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса, отримати критерій невизначеності повної проблеми Стілт'єса та знайти повний опис розв'язків цієї проблеми; для узагальнених матриць Якобі ввести поняття перетворення Дарбу з параметром та без параметра, отримати критерії існування перетворення Дарбу, явні формули факторизації узагальненої матриці Якобі та вигляд матриць Якобі, які отримано при перетворенні Дарбу, дослідити перетворення **m** - функції і поліномів першого та другого роду при перетворенні Дарбу.

Об'єкт дослідження – індефінітна проблема моментів Стілт'єса та узагальнені матриці Якобі.

Предмет дослідження — покроковий алгоритм Шура в узагальненому класі Стілт'єса, індефінітна проблема моментів Стілт'єса, перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі.

Методи дослідження. Для побудови покрокового процесу використовується низка фактів з теорії функцій узагальненого класу Стілт’єса. Для розв’язання індефінітної проблеми моментів Стілт’єса застосовується покроковий алгоритм Шура та операторний підхід, а саме метод граничних трійок у теорії розширень симетричних операторів у просторі Понтрягіна. При дослідженні перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі використовуються методи теорії матриць.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, що визначають наукову новизну дисертації та виносяться на захист, такі:

1. Введено нові класи регулярних послідовностей та узагальнених дробів Стілт’єса. Показано, що кожна послідовність дійсних чисел відповідає деякому узагальненому дробу Стілт’єса. Для класу регулярних послідовностей отримано зв’язок між P - дробом та узагальненим **S** - дробом. Отримано систему різницевих рівнянь, яка відповідає **S** - дробу. Розглянуто невироджену зрізану індефінітну проблему моментів Стілт’єса. Знайдено критерій її розв’язності, розроблено покроковий алгоритм Шура до цієї проблеми. Введено новий клас узагальнених поліномів Стілт’єса першого та другого роду. Отримано повний опис розв’язків зрізаної індефінітної проблеми Стілт’єса, явні формули матриць розв’язків та їх факторизацію.
2. Застосовано операторний підхід до зрізаної індефінітної проблеми Стілт’єса. Побудовано симетричний оператор у просторі Понтрягіна, який відповідає індефінітній проблемі Стілт’єса. До цього оператора застосовано метод граничних операторів та отримано явні формули резольвентних матриць, які відповідають теорії представлення М. Г. Крейна. Знайдено критерій невизначеності повної проблеми Стілт’єса та знайдено повний опис розв’язків цієї проблеми.
3. До узагальнених матриць Якобі розглянуто перетворення Дарбу, як з параметром так і без нього. Отримано критерії існування перетворення Дарбу, явні формули факторизації узагальненої матриці Якобі та вигляд матриць Якобі, які отримано при перетворенні Дарбу. Досліджено перетворення m - функції, що відповідають матриці Якобі при перетворенні Дарбу. Розглянуто перетворення поліномів першого та другого роду, які відповідають узагальненим матрицям Якобі.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при дослідженні інших типів індефінітних проблем та узагальнених матриць Якобі. Матеріали дисертації можуть бути використані у навчальному процесі – при викладанні спеціальних курсів математичного аналізу.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на:

1. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, Україна, 25 лютого – 1 березня 2015 р.
2. International Conference of Young Mathematicians, Kyiv, Ukraine, June 3-6, 2015 р.
3. Сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 19-20 травня 2016 р.
4. Всеукраїнській науковій конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу" , Ворохта, Україна, 22 – 25 лютого 2017 р.
5. International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008), Kyiv, Ukraine , June 7–10, 2017.
6. The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, September 18–23, 2017.
7. International Conference "Full indefinite Stieltjes moment problem", the International Conference Asymptotic analysis and spectral theory (Aspect17), Trier, Germany, September 25–29, 2017.
8. Семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, Донецького національного університету, (керівник: д.ф.-м.н., проф. В. О. Деркач), 2014.
9. Семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова, (керівник: д.ф.-м.н., проф. Г. М. Торбін), 2017.
10. Науковому семінарі з функціонального аналізу, Інституту математики НАН України, (керівники: академік НАН України проф. Ю. М. Березанський, член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей), 2017.
11. Науковому семінарі Технічного університету Ільменау, Німеччина, (керівник проф. Карстен Трунк), 2017.
12. Науковому семінарі Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я.С. Підстригача НАН України, (керівники: д.ф.-м.н., проф. Д. І. Боднар, д.ф.-м.н. Х. Й. Кучмінська), 2017.

Публікації. Основні результати роботи викладено у 13 наукових публікаціях, серед яких 2 статті в українських фахових журналах [1,2], та 4 статті у журналах, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus [3-6] та 7 тез доповідей на конференціях.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, 5 розділів, що розділені на підрозділи, висновків та списку літератури, що містить 89 найменувань. Обсяг роботи складає 147 сторінок.

Подяка. Автор щиро вдячний науковому керівнику професору Володимирові Олександровичу Деркачу за постановку задач, увагу та підтримку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, подано короткий аналіз сучасного стану проблеми, сформульовано мету та завдання дослідження, наукову новизну, практичне значення одержаних результатів та подано відомості про апробацію результатів дисертаційного дослідження.

Розділ 1 присвячено історичному огляду робіт, які мають відношення до теми дисертаційного досліждення.

У підрозділі 1.1 сформульовано класичні проблеми моментів Гамбургера та Стілт'єса.

У підрозділі 1.2 наведено визначення монічної матриці Якобі та її зв'язок з проблемою моментів. Подано огляд перетворення Дарбу монічної матриці Якобі.

У підрозділі 1.3 сформульовано проблему моментів в узагальненому класі Неванліни $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}$ та наведено результати розв'язків цієї проблеми.

Означення 1.13. Мероморфна функція f у $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ з множиною голоморфності $\hbar_f$ належить до узагальненого класу Неванлінни $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}$ **(**$\boldsymbol{\kappa}\,\epsilon\mathbb{N}$**),** якщо ядро

$$N_\omega(z) := \frac{f(z) - \overline{f(\omega)}}{z - \overline{\omega}}$$

має к від'ємних квадратів в $\hbar_f \cap \mathbb{C}_+$, тобто для кожного набору $z_j \epsilon\, \hbar_f \cap \mathbb{C}_+$ $(z_j \neq \overline{z_i}\,, i, j = 1, \dots, n)$ квадратична форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{f(z_i) - \overline{f(z_j)}}{z_i - \overline{z_j}} \xi_i \overline{\xi_j}, \qquad \xi_j \epsilon\, \mathbb{C},$$

має не більше к та при деякому наборі z_j $(\, j = 1, \dots, n\,)$ точно к від'ємних квадратів.

Індефінітна проблема моментів у класі узагальнених функцій Неванлінни $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}$ була розглянута М. Г. Крейном та Ґ. Лангером у 1979 р.

Повна індефінітна проблема $\boldsymbol{MP_{\kappa}(s)}$: задана послідовність дійсних чисел $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ та індекс $\boldsymbol{\kappa} \,\boldsymbol{\epsilon}\, \mathbb{Z}_+$. Знайти функцію f$\epsilon\,\mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}$, яка для кожного $n\,\epsilon\,\mathbb{N}$ має асимптотичне розвинення

$$f(z) = -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \dots - \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \;\; z = iy, y \uparrow \infty. \qquad (2)$$

Послідовність $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ відносимо до класу $\mathcal{H}$, де $\mathcal{H}$ – це клас послідовностей дійсних чисел.

Означення 1.14. Визначимо множину $\mathcal{N}(\mathbf{s})$ нормальних індексів послідовності $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$, як

$$\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \left\{n_j : D_{n_j} \neq 0, \quad j = 1,2 \ldots\right\}, \quad D_{n_j} = det\left(s_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n_j}.$$

Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ є послідовність дійсних чисел. Визначимо лінійний функціонал $\mathfrak{S}$ на $\mathrm{P} = span\{z^i : i \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ формулою

$$\mathfrak{S}\left(z^i\right) = s_i, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

За послідовністю $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ визначимо поліноми першого $P_i(z)$ та другого $Q_i(z)$ роду, відповідно, за формулами

$$P_i(z) = \frac{1}{D_{n_i}} \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n_i-1} & s_{n_i} & \cdots & s_{2n_i-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n_i} \end{vmatrix}, \quad Q_i(z) = \mathfrak{S}_t\left(\frac{P_i(z) - P_i(t)}{z - t}\right). \qquad (3)$$

Означення 1.19. Проблема $\boldsymbol{MP}_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{s})$ називається невизначеною, якщо вона має нескінченну кількість розв'язків і визначеною, в протилежному випадку.

Як було показано М. Г. Крейном та Ґ. Лангером [1], проблема $\boldsymbol{MP}_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{s})$ є розв`язною тоді і тільки тоді, коли число від'ємних власних значень $\nu_{-}(S_n)$ матриці Ганкеля $S \;\; := \left(s_{i+j}\right)_{i,j=0}^{n}$ не перевищує $\boldsymbol{\kappa}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, і проблема $\boldsymbol{MP}_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{s})$ є невизначеною тоді і тільки тоді, коли для кожного $z \in \mathbb{C}$ виконується умова:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |P_i(z)|^2 < \infty$$

Якщо проблема $\boldsymbol{MP}_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{s})$ є розв'язною і невизначеною, то існують цілі функції $w_{i,j}(z)$ $(i,j = 1,2)$ мінімального експоненціального типу такі, що множина розв'язків проблеми $\boldsymbol{MP}_{\boldsymbol{\kappa}}(\boldsymbol{s})$ описується формулою

$$f(z) = \frac{w_{11}(z)\tau(z) + w_{12}(z)}{w_{21}(z)\tau(z) + w_{22}(z)},$$

де параметр $\tau \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$.

Означення 1.21.[2] Функція f належить до класу $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\mathbf{k}}$, якщо $\mathrm{f} \in \mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}$ та $z\mathrm{f} \in \mathbf{N}_{\mathbf{k}}$. У випадку, коли k=0, отримуємо клас $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}^{+} := \mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\mathbf{0}}$, введений М. Г. Крейном та Ґ. Лангером. Зокрема, клас $\mathbf{N}_{\mathbf{0}}^{+}$ співпадає з класом **S** функцій $\mathrm{f} \in \mathbf{N}$, які допускають голоморфне і невід'ємне продовження на $(-\infty,0)$.

У підрозділі 1.4 представлено результати М. Г. Крейна і Ґ. Лангера по проблемі моментів $\boldsymbol{MP}_{\boldsymbol{\kappa}}^{+}(\boldsymbol{s})$ у класі $\mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}^{+}$.

---

[1] Krein M.G. On some extension problems which are closely connected with the theory of hermitian operators in a space $\prod_{\boldsymbol{\kappa}}$ III. / M.G.Krein, H.Langer // Beiträge zur Anal. − 1979. − V. 14. − P. 25−40.

[2] Derkach V. On indefinite moment problem and resolvent matrices of Hermitian operators in Krei n spaces / V.~Derkach // Math.Nachr. − 1997. − V. 184. − P. 135−166.

Проблема $\boldsymbol{MP_{\kappa}^{+}(s)}$: Задано послідовність дійсних чисел$\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ та індекс $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{Z}_{+}$**.** Знайти функцію $f \in \mathbf{N}_{\boldsymbol{\kappa}}^{+}$**,** яка має асимптотичне розвинення (2) для кожного $n \in \mathbb{N}$.

У підрозділі 1.5 введено поняття P - дробу та його зв'язок з послідовністю $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell}$. Як було показано Л. Кронекером[3], дріб $-\frac{Q_j(z)}{P_j(z)}$ має асимптотичне розвинення

$$-\frac{Q_j(z)}{P_j(z)} = -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \cdots - \frac{s_{2n_j-1}}{z^{2n_j}} + o\left(\frac{1}{z^{2n_j}}\right), \ z = iy, y \uparrow \infty.$$

Застосування алгоритму Евкліда до пари поліномів Q_j та P_j приводить до розгляду функції $-\frac{Q_j(z)}{P_j(z)}$ в неперервний дріб

$$-\frac{Q_j(z)}{P_j(z)} = -\cfrac{b_0}{a_0(z) - \cfrac{b_1}{a_1(z) - \cdots - \cfrac{b_{j-1}}{a_{j-1}(z)}}}, \tag{4}$$

в якому $b_0 = s_{n_1-1}$, b_j є дійсними числами, $a_j(z)$ є монічні поліноми степеня $n_{j+1} - n_j$ $(0 \le j \le N-1)$. Пари (a_j, b_j) називаються атомами[4] функції $-\frac{Q_j(z)}{P_j(z)}$.

З неперервним P - дробом (4) пов'язана система різницевих рівнянь

$$b_j y_{j-1}(z) - a_j(z) y_j(z) + y_{j+1}(z) = 0 \tag{5}$$

Поліноми P_i та Q_i є розв'язками системи (5) з початковими умовами[5]

$$P_{-1}(z) \equiv 0, \quad P_0(z) \equiv 1, \quad Q_{-1}(z) \equiv -1, \quad Q_0(z) \equiv 0. \tag{6}$$

P_i та Q_i називаються поліномами Ланцоша першого та другого роду, відповідно. Відзначимо, що цей факт було отримано ще Г. Фробеніусом у його роботі про визначники Ганкеля у 1895 році.

У підрозділі 1.6 наведено визначення узагальненої матриці Якобі, зв'язок узагальненої матриці Якобі з поліномами першого та другого роду, наведено деякі властивості узагальненої матриці Якобі.

З системою (5) асоційована узагальнена матриця Якобі

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{a_0} & \mathfrak{D}_0 & & \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_{a_1} & \mathfrak{D}_1 & \\ & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{C}_{a_2} & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

---

[3] Kronecker L.Zur Theorie der Elimination einer variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen / L. Kronecker // Monatsberichte. − 1881. −P. 535−600.
[4] Fuhrmann P.A. A polynomial approach to linear algebra / P.A. Fuhrmann // Second edition, Universitext. Springer, New York. − 2012. − 411 p.
[5] Derevyagin M. Spectral problems for generalized Jacobimatrices / M. Derevyagin, V.Derkach // Linear Algebra Appl. - 2004. − V. 382 − P. 1−24.

де діагональні блоки $\mathfrak{E}_{a_i}$ є супроводжуючими матрицями[6] до поліномів $a_i(z)$

$$\mathfrak{E}_{a_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & 0 & 1 \\ -a_0^{(i)} & \cdots & -a_{\ell_i-3}^{(i)} & & -a_{\ell_i-2}^{(i)} & -a_{\ell_i-1}^{(i)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\ell_i \times \ell_i} ,$$

блоки $\mathfrak{D}_i$, $\mathfrak{B}_{i+1}$ є матриці $\ell_i \times \ell_{i+1}$ та $\ell_{i+1} \times \ell_i$, відповідно, виду

$$\mathfrak{B}_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{i+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \mathfrak{D}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо для довільних $i, j \in \mathbb{Z}_+$ зрізану узагальнену матрицю Якобі

$$\mathfrak{J}_{[\,i,j\,]} = \begin{pmatrix} \mathfrak{E}_{a_i} & \mathfrak{D}_0 & & \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{E}_{a_1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathfrak{D}_{j-1} \\ & & \mathfrak{B}_j & \mathfrak{E}_{a_j} \end{pmatrix}.$$

Зв'язок між поліномами першого і другого роду та зрізаною узагальненою матрицею Якобі[7] задається формулами

$$P_i(z) = det\big(z - \mathfrak{J}_{[\,0,i-1]}\big) \quad \text{та} \quad Q_i(z) = b_0 det\big(z - \mathfrak{J}_{[\,1,i]}\big).$$

Розділ 2 присвячено дослідженню зв'язків між послідовністю дійсних чисел, узагальненим **S-**дробом та **P-**дробом, опису системи різницевих рінянь, що відповідає узагальненому **S-**дробу.

Теорема 2.1. Нехай $\boldsymbol{s} \in \mathcal{H}$ та $0 < n_1 < n_2 < \cdots$ є множина нормальних індексів послідовності **s**. Тоді існує єдиний неперервний **P-**дріб (4) такий, що:

(1) a_j(z) монічні поліноми степеня $n_{j+1} - n_j$ $(n_0 = 0)$;

(2) b_j є дійсні числа, $b_j \neq 0$ для кожного $j \in Z$;

(3) підхідний дріб f_k неперервного дробу (4) має асимптотичне розвинення

$$f_k(z) \sim -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \cdots - \frac{s_{2n_k-1}}{z^{2n_k}} + O\left(\frac{1}{z^{2n_k+1}}\right), \quad z = iy, y \uparrow \infty. \qquad (7)$$

Нехай f мероморфна у $C \backslash R_-$. $\tilde{f}(z) = zf(z^2)$ називається розгортанням функції $f(z)$. Як було показано Х. Кальтенбеком, Х. Вінклером та Х. Ворачеком[8], розгортання функції $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$ належить до класу $\mathbf{N}_{\kappa+}^{sym}$.

---

[6] Lancaster P. Theory of Matrices / P. Lancaster // Academic Press, NY. – 1969. – 326 p.
[7] Derevyagin M.and V.Derkach Spectral problems for generalized Jacobi matrices / M. Derevyagin, V.Derkach // Linear Algebra Appl. – 2004. – V. 382 – P. 1–24.

Означення 2.2. Нехай $\boldsymbol{s} \in \mathcal{H}$. Тоді послідовність

$$\tilde{\mathbf{s}} = \{\tilde{s}_i\}_{i=0}^{\infty}, \quad \tilde{s}_{2i} = s_i \quad \text{та} \quad \tilde{s}_{2j+1} = 0$$

називається розгортанням послідовності $\boldsymbol{s}$.

Перетворення розгортання встановлює взаємно однозначну відповідність між класами $\mathcal{H}$ та класом $\mathcal{H}^{sym} = \{\tilde{\mathbf{s}} \in \mathcal{H} : \tilde{s}_{2i+1} = 0 \text{ для кожного } i \in \mathbb{Z}_+\}$.

Нехай $\tilde{\mathbf{s}}$ є розгортанням послідовності $s \in \mathcal{H}$ та $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\tilde{\mathbf{s}}) = \{\tilde{n}_j\}_{\boldsymbol{j=1}}^{\infty}$ − множина нормальних індексів послідовності $\tilde{\mathbf{s}}$. Тоді їй відповідає неперервний дріб

$$-\cfrac{b_0}{a_0(z) - \cfrac{b_1}{a_1(z) - \cdots}} \tag{8}$$

має наступні властивості:

(1) поліноми $a_j(z)$ є непарними для всіх $j \in \mathbb{Z}_+$;

(2) індекси $\tilde{n}_{2j}$ є парними та індекси $\tilde{n}_{2j+1}$ є непарними для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 2.6. Нехай $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$, $\tilde{\mathbf{s}}$ є розгортанням послідовності $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\tilde{\mathbf{s}}) = \{\tilde{n}_j\}_{\boldsymbol{j=1}}^{\infty}$ − множина нормальних індексів послідовності $\tilde{\mathbf{s}}$ та нехай ν_j і μ_j визначаються за наступними формулами: $\tilde{n}_{2j-1} = 2\nu_j - 1$ та $\tilde{n}_{2j} = 2\mu_j$, $j \in \mathbb{N}$. Тоді:

(1) $\mathbf{D}_{\nu_j} \neq 0$ та $\mathbf{D}^{+}{}_{\nu_{j-1}} \neq 0$ для кожного $j \in \mathbb{N}$;

(2) $\mathbf{D}_{\mu_j} \neq 0$ та $\mathbf{D}^{+}{}_{\mu_j} \neq 0$ для кожного $j \in \mathbb{N}$;

(3) $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{s})$ є об'єднання двох множин $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$ та $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ таких, що

$$0 < \nu_1 \leq \mu_1 < \nu_2 \leq \mu_2 < \cdots; \tag{9}$$

(4) поліноми $m_j(z)$ та $l_j(z)$, що визначені за формулами

$$z a_{2(j-1)}(z) = z^2 m_j(z^2) \quad \text{та} \quad \frac{a_{2j-1}(z)}{z} = l_j(z^2), \qquad j \epsilon N,$$

є поліноми степенів $\deg m_j = \nu_j - \mu_{j-1} - 1$, $\deg l_j = \mu_j - \nu_j$, $j \epsilon N$, та **P-**дріб (8) можна переписати у вигляді

$$-\cfrac{1}{z m_1(z) - \cfrac{1}{l_1(z) - \cfrac{1}{z m_2(z) - \cdots}}} \quad . \tag{10}$$

(5) Підхідний дріб φ_{2N} неперервного дробу (10) має асимптотичне розвинення

$$\varphi_{2N}(z) \sim -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \cdots - \frac{s_{2\mu_N - 1}}{z^{2\mu_N}} + O\left(\frac{1}{z^{2\mu_N + 1}}\right), \qquad z = iy, y \uparrow \infty.$$

[8] Kaltenback H. Symmetric relations of finite negativity. Operator theory in Krein spaces and nonlinear eigenvalue problems / H. Kaltenback, H. Winker, H. Woracek // Oper. Theory Adv. Appl. − 2006. −V. 162. − P. 191−210.

Означення 2.8. Нехай задана послідовність дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell}$ $(\ell \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\})$. $\mathcal{H}_{\kappa}^{k}$ є множина послідовностей **s** таких, що:

1) матриця $S_\ell = \left(s_{i+j}\right)_{i,j=0}^{\ell-1}$ має κ від'ємних значень;

2) матриця $S_\ell^{\ +} = \left(s_{i+j+1}\right)_{i,j=0}^{\ell-1}$ має k від'ємних значень.

Лема 2.9. Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{H}$, $\{n_j\}_{\boldsymbol{j=1}}^{\infty}$ є множина нормальних індексів послідовності **s** та $\{P_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$ – послідовність поліномів першого роду, асоційованих до **s.** Тоді наступні твердження є еквівалентними:

(1) $P_i(0) \neq 0$ для кожного $j \in N$;

(2) $D_{n_j-1}^{+} \neq 0$ для кожного $j \in N$;

(3) $D_{n_j}^{+} \neq 0$ для кожного $j \in N$.

Означення 2.10. Говорять, що $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$, якщо $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$ і одна з еквівалентних умов Леми 2.9 має місце .

Якщо j – ий підхідний дріб неперервного дробу (10) позначити $\frac{u_j}{v_j}$, то u_j та v_j можна знайти як розв'язки системи[9]

$$\begin{cases} y_{2j} - y_{2j-2} = l_j(z) y_{2j-1}, \\ y_{2j+1} - y_{2j-1} = -z m_j(z) y_{2j} \end{cases} \tag{11}$$

з початковими умовами

$$u_{-1} \equiv 1, \quad u_0 \equiv 0, \qquad v_{-1} \equiv 0, \qquad v_0 \equiv 1.$$

Теорема 2.12. Нехай $\boldsymbol{s} \in \mathcal{H}^{reg}$. Тоді 2j – ий підхідний дріб $\frac{u_{2j}}{v_{2j}}$ узагальненого **S**– дробу (10) співпадає з j – им підхідним дробом **P** – дробу (4)

$$\frac{u_{2j}}{v_{2j}} = -\cfrac{b_0}{a_0(z) - \cfrac{b_1}{a_1(z) - \cdots - \cfrac{b_{j-1}}{a_{j-1}(z)}}},$$

параметри $m_j(z)$ та l_j узагальненого **S** – дробу (10) пов'язані з атомами[10] (a_j, b_j) за наступними формулами

$$b_0 = \frac{1}{d_1}, \quad a_0(z) = \frac{1}{d_1}\left(z m_1(z) - \frac{1}{l_1}\right),$$

$$b_{j-1} = \frac{1}{l_{j-1}^2 d_{j-1} d_j}, \; a_j(z) = \frac{1}{d_j}\left(z m_j(z) - \left(\frac{1}{l_{j-1}} + \frac{1}{l_j}\right)\right) \; ,$$

де d_j є старший коефіцієнт полінома $m_j(z)$, $j \in N$.

---

[9] Wall H. S. Analytic theory of continued fractions / H. S. Wall// New York – 1967.

[10] Fuhrmann P.A. A polynomial approach to linear algebra / P.A. Fuhrmann//- Second edition, Universitext.Springer, New York – 2012.

Розділ 3 є центральним розділом дисертації. Наводиться повний опис розв'язків зрізаної індефінітної проблеми моментів в узагальненому класі Стілт'єса.

Проблема $\mathrm{MP}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{s},\ell)$ **:** задані ℓ, к, k $\epsilon\, Z_+$ та $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=0}^{\ell}$. Описати множину $\mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s})$ функцій $f\,\epsilon\,\mathbf{N}_\kappa^{\mathrm{k}}$, які мають асимптотичне розвинення

$$f(z)\sim-\frac{s_0}{z}-\frac{s_1}{z^2}-\cdots-\frac{s_\ell}{z^{\ell+1}}+o\left(\frac{1}{z^{\ell+1}}\right),\qquad z=iy, y\uparrow\infty. \tag{12}$$

Теорема 3.19. Нехай $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=0}^{2n_N-2}\,\epsilon\,\mathcal{H}^{reg}$, $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{s})=\{n_j\}_{j=1}^{N}$. Тоді:

(1) невироджена проблема моментів $\mathrm{MP}_{\boldsymbol{\kappa}}^{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{s},2n_N-2)$ є розв'язною, тоді і тільки тоді, коли

$$\kappa_N:=\nu_-\left(S_{n_N}\right)\le\kappa\ \text{ та }\ k_N:=\nu_-\left(S_{n_N-1}^+\right)\le k\,; \tag{13}$$

(2) $f\epsilon\,\mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s},2n_N-2)$ тоді і тільки тоді, коли

$$f(z)=\cfrac{1}{-zm_1(z)+\cfrac{1}{l_1+\cdots+\cfrac{1}{-zm_N(z)+\cfrac{1}{\tau(z)}}}}\,, \tag{14}$$

де параметр $\tau(z)$ задовольняє умови

$$\tau\,\epsilon\,N_{\kappa-\kappa_N}^{k-k_N}\quad\text{та}\quad\frac{1}{\tau(z)}=o(z),\quad z=iy, y\uparrow\infty, \tag{15}$$

поліноми $m_j(z)$ та числа l_j визначаються за формулами

$$m_j(z)=\frac{(-1)^{\nu+1}}{D_\nu^{(j-1)}}\begin{vmatrix}0&\cdots&s_{\nu-1}^{(j-1)}&s_\nu^{(j-1)}\\ \vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\ s_{\nu-1}^{(j-1)}&\cdots&s_{2\nu-3}^{(j-1)}&s_{2\nu-2}^{(j-1)}\\ 1&\cdots&z^{\nu-2}&z^{\nu-1}\end{vmatrix},\quad l_j=(-1)^{\nu+1}\frac{D_\nu^{(j-1)}}{\left(D_\nu^{(j-1)}\right)^+}, \tag{16}$$

де $\nu=n_j-n_{j-1}-1$. Послідовності $\boldsymbol{s}^{(j-1)}$ визначаються за матрицею Тепліца

$$\begin{gathered}T\left(m_{\nu_j-1}^{(j)},\cdots,m_0^{(j)},-\mathfrak{s}_{-1}^{(j)},\cdots,-\mathfrak{s}_{\ell_j-2\nu_j}^{(j)}\right)T\left(s_{\nu_j-1}^{(j-1)},\cdots,s_{\ell_j}^{(j-1)}\right)=I_{2n_N-2\nu_j},\\ T\left(l_j,-s_0^{(j)},\cdots,-s_{2n_N-2\mu_j}^{(j)}\right)T\left(\mathfrak{s}_{\mu_j-\nu_j-1}^{(j)},\cdots,\mathfrak{s}_{\ell_j-2\nu_j}^{(j)}\right)=I_{2n_N-2\nu_j};\end{gathered} \tag{17}$$

Представлення (10) може бути переписане наступним чином:

$$f(z)=T_{W_{[0,N-1]}^+}(\tau), \tag{18}$$

де резольвентна матриця допускає факторизацію

$$W_{[0,N-1]}^+(z):=M_1(z)L_1M_2(z)\cdots L_{N-1}M_N(z)\,, \tag{19}$$

матриці $M_i(z)$ та L_i визначені формулами

$$M_i(z)=\begin{pmatrix}1&0\\-zm_i(z)&1\end{pmatrix}\quad\text{та}\quad L_i=\begin{pmatrix}1&l_i\\0&1\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Індекси κ_N та k_N пов'язані з m_i та l_i за формулами

$$\kappa_N = \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(zm_j) \quad \text{та} \quad k_N = \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(m_j) + \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(zl_j). \tag{21}$$

Означення 3.21. Нехай $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$. Визначимо поліноми P_j^+, Q_j^+ за формулами

$$\begin{gathered} P_{-1}^+(z) \equiv 0, \quad P_0^+(z) \equiv 1, \quad Q_{-1}^+(z) \equiv 1, \quad Q_0^+(z) \equiv 0, \\ P_{2i-1}^+(z) = \frac{-1}{b_0 \cdots b_{i-1}} \begin{vmatrix} P_i(z) & P_{i-1}(z) \\ P_i(0) & P_{i-1}(0) \end{vmatrix}, \qquad P_{2i}^+(z) = \frac{P_i(z)}{P_i(0)}, \\ Q_{2i-1}^+(z) = \frac{1}{b_0 \cdots b_{i-1}} \begin{vmatrix} Q_i(z) & Q_{i-1}(z) \\ P_i(0) & P_{i-1}(0) \end{vmatrix}, \qquad P_{2i}^+(z) = \frac{Q_i(z)}{P_i(0)}. \end{gathered} \tag{22}$$

Поліноми P_j^+ та Q_j^+ будемо називати узагальненими поліномами Стілт'єса першого та другого роду відповідно. Більш того, поліноми Стілт'єса P_j^+ та Q_j^+ є розв'язками системи (11).

Лема 3.26. Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-2} \in \mathcal{H}^{reg}$, $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{N}$ є множина нормальних індексів послідовності $\mathbf{s}$; $k, \kappa, \in \mathbb{Z}_+$ та $N \in \mathbb{N}$, P_j^+, Q_j^+ є поліноми Стілт'єса та резольвентна матриця $W_{[0,N-1]}^+(z)$ має вигляд (19). Тоді матриця $W_{[0,2N-1]}^+(z)$ допускає наступне представлення:

$$W_{[0,N-1]}^+(z) = \begin{pmatrix} Q_{2N-1}^+(z) & Q_{2N-2}^+(z) \\ P_{2N-1}^+(z) & P_{2N-2}^+(z) \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Розділ 4 присвячено операторному підходу до зрізаної індефінітної проблеми моментів, а саме: застосовується метод граничних операторів. Наводиться критерій невизначеності та опис розв'язків повної проблеми моментів Стільт'єса.

Визначимо оператор $A_{[0,N]}$ у просторі Понтрягіна $\mathfrak{H}_{[0,N]}$, як звуження оператора $\mathfrak{J}_{[0,N]}^T$ на

$$dom\, A_{[0,N]} = \{f \in \mathfrak{H}_{[0,N]}: \ f_{n_{N+1}-1} = 0\}. \tag{24}$$

Тоді спряжене лінійне відношення має вигляд

$$A_{[0,N]}^{[*]} = \left\{ \hat{f} = \begin{bmatrix} f \\ \mathfrak{J}_{[0,N]}^T f + c_f e_{n_N} \end{bmatrix} : \begin{matrix} f \in \mathfrak{H}_{[0,N]} \\ c_f \in C \end{matrix} \right\}. \tag{25}$$

Означення 4.1. Сукупність $\prod = \{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, що складається з $\mathbb{C}$ та двох лінійних відображень Γ_0 і Γ_1 з $A^{[*]}$ у $\mathbb{C}$, називається граничною трійкою $A^{[*]}$, якщо:

(1) абстрактна тотожність Гріна

$$[f', g] - [f, g'] = \Gamma_1 \hat{f} \overline{\Gamma_0 \hat{g}} - \Gamma_0 \hat{f} \overline{\Gamma_1 \hat{g}}$$

має місце для кожного $\hat{f} = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$, $\hat{g} = \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \in A^{[*]}$;

(2) відображення $\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix}: A^{[*]} \to \mathbb{C}^2$ є сюр'єктивним.

За граничною трійкою $\prod = \{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ визначається функція Вейля оператора A за формулою

$$M(z)\Gamma_0 f_\lambda = \Gamma_1 f_\lambda, \quad f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda, \quad \lambda \in \rho(A). \tag{26}$$

Пропозиція 4.12. Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell} \in \mathcal{H}_{\kappa,2n_N-2}^{k,reg}$ та $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{N+1}$. Тоді:

1) оператор $A_{[0,N]}$ має κ від'ємних квадратів;
2) гранична трійка $\{\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$ лінійного відношення може бути обрана:

$$\Gamma_1^+ f = \frac{1}{P_N(0)}[f, e_{n_N}], \qquad \Gamma_0^+ f = -P_N(0)c_f + (b_0 \cdots b_N)^{-1} P_{N+1}(0)[f, e_{n_N}]. \tag{27}$$

3) Функція Вейля обчислюються за формулою:

$$M_{[0,N]}^+(z) = \frac{P_{2N}^+(z)}{P_{2N+1}^+(z)}. \tag{28}$$

Теорема 4.19. Нехай $\mathbf{s} \in \mathcal{H}_{\kappa,2n_j-2}^{k,reg}$, $\Pi^+ = \{\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$ є гранична трійка для лінійного відношення $A_{[0,j]}^{[*]}$. Тоді відповідна $\mathbf{u}$ - резольвентна матриця оператора $A_{[0,j]}$ має вигляд

$$W_{[0,j]}^+(z) = \begin{pmatrix} Q_{2j+1}^+(z) & Q_{2j}^+(z) \\ P_{2j+1}^+(z) & P_{2j}^+(z) \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Пропозиція 4.21. Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_j-1} \in \mathcal{H}_{\kappa,2n_j-2}^{k,reg}$, $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{s}) = \{n_i\}_{i=1}^{j}$ та гранична трійка $\Pi^{++} = \{\mathbb{C}, \Gamma_0^{++}, \Gamma_1^{++}\}$ лінійного відношення $A_{[0,j]}^{[*]}$ визначена формулою

$$\Gamma_1^{++}\hat{f} = \Gamma_1^+\hat{f} + \ell_j \Gamma_0^+\hat{f}, \quad \Gamma_0^{++}\hat{f} = \Gamma_0^+\hat{f},$$

де гранична трійка $\Pi^+ = \{\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$ задана (27). Тоді відповідна $\mathbf{u}$ - резольвентна матриця $W_{[0,j]}^{++}$ оператора $A_{[0,j]}$ має вигляд

$$W_{[0,j]}^{++}(z) = \begin{pmatrix} Q_{2j-1}^+(z) & Q_{2j}^+(z) \\ P_{2j-1}^+(z) & P_{2j}^+(z) \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Теорема 4.22. Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{H}_{\kappa_0}^{k_0,reg}$ та $N \in \mathbb{N}$ є досить великим, таким, що рівності $\kappa_0 = \nu_-(S_{n_j})$ та $k_0 = \nu_-(S_{n_j}^+)$ мали місце для $j \geq N$, $j \in \mathbb{N}$. Нехай $\tilde{\mathfrak{J}}_{[N,j]}$ є матриця Якобі

$$\tilde{\mathfrak{J}}_{[N,j]} = \mathfrak{J}_{[N,j]} + diag\left(\frac{1}{m_N l_{N-1}}, 0, \cdots, 0\right).$$

Тоді резольвентна матриця $W_{[0,j]}^+(z)$ оператора $A_{[0,j]}$ допускає факторизацію

$$W_{[0,j]}^+(z) = W_{[0,N-1]}^{++}(z) W_{[N,j]}^+(z), \tag{31}$$

де $W_{[0,N-1]}^{++}(z)$ є резольвентною матрицею оператора $A_{[0,N-1]}$, вигляду (30), що відповідає граничній трійці Π^{++}, $W_{[N,j]}^+(z)$ є резольвентною матрицею оператора

$$\tilde{A}_{[N,j]} = \tilde{\mathfrak{J}}_{[N,j]}\Big|_{dom(\tilde{A}_{[N,j]})}, \quad dom(\tilde{A}_{[N,j]}) = \left\{f \in \mathfrak{H}_{[N,j]} : [f, e_{n_j}] = 0\right\},$$

яка відповідає граничній трійці Π^+ вигляду (27).

Теорема 4.27. Нехай $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty} \epsilon\, \mathcal{H}_{\kappa}^{k,reg}$ для деяких $\kappa\,, k \,\epsilon\, N$. Тоді повна проблема моментів $MP_{\kappa}^{k}(\boldsymbol{s})$ є розв'язною і проблема моментів $MP_{\kappa}^{k}(\boldsymbol{s})$ є невизначеною тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_j(0) < \infty \quad \text{та} \quad \sum_{j=1}^{\infty} l_j < \infty\ . \tag{32}$$

Більш того, якщо має місце (32), то:

(1) послідовність резольвентних матриць $W_{[0,n]}^{+}$ збігається до цілої матриці функції $W_{[0,\infty]}^{+}(z) = \left(w_{i,j}^{+}(z)\right)_{i,j=1}^{2}$ порядку не вище $\frac{1}{2}$;

(2) матриця функція $W_{[0,\infty]}^{+}(z)$ є резольвентною матрицею для оператора A_{max}, що відповідає граничній трійці

$$\Gamma_0^{+}\hat{f} = -W_{\infty}\big[\hat{f},\hat{\pi}(0)\big], \qquad \Gamma_1^{+}\hat{f} = -W_{\infty}\big[\hat{f},\hat{\xi}(0)\big] - LW_{\infty}\big[\hat{f},\hat{\pi}(0)\big],$$

де $L = \sum_{j=1}^{\infty} l_j$;

(3) формула

$$f(z) = \frac{w_{11}^{+}(z)\tau(z) + w_{12}^{+}(z)}{w_{21}^{+}(z)\tau(z) + w_{22}^{+}(z)}$$

встановлює взаємно – однозначну відповідність між класом $\mathcal{M}_{\kappa}^{k}(\boldsymbol{s})$ та множиною функцій $\tau \,\epsilon\, \boldsymbol{S}$.

Означення 4.28. [n/k] апроксимантою Паде формального розвинення ряду

$$-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{s_j}{z^{j+1}} \tag{33}$$

називається раціональна функція $f^{[n/k]}(z) = \frac{A^{[n/k]}(1/z)}{B^{[n/k]}(1/z)}$, яка є відношенням поліномів $A^{[n/k]}, B^{[n/k]}$ степеня n, k, відповідно, таких, що $B^{[n/k]}(0) \neq 0$ та

$$f^{[n/k]}(z) + \sum_{j=0}^{n+k} \frac{s_j}{z^{j+1}} = o\left(\frac{1}{z^{n+k+1}}\right), \quad z = iy, y \uparrow \infty.$$

Теорема 4.30. Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_j-2} \epsilon\, \mathcal{H}^{reg}$. Тоді $\left[n_j/n_j - 1\right]$ - апроксиманта Паде до (33) існує та має вигляд

$$f^{[n_j/n_j-1]}(z) = \frac{Q_{2j-1}^{+}(z)}{P_{2j-1}^{+}(z)}\ , \ \ j \,\epsilon\, \mathbb{N}. \tag{34}$$

Розділ 5 присвячено перетворенню Дарбу узагальнених матриць Якобі $\mathfrak{J}$. Отримано критерій існування цього перетворення, явний вигляд факторизаційних матриць, формули перетворення поліномів, **m** - функції, які відповідають матриці $\mathfrak{J}$.

У цьому розділі будемо використовувати нижньотрикутну та верхньотрикутну блокові матриці, які задаються формулами

$$\mathfrak{L}=\begin{pmatrix}\mathfrak{A}_0 & 0 & & \\ \mathfrak{L}_1 & \mathfrak{A}_1 & 0 & \\ & \mathfrak{L}_2 & \mathfrak{A}_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots\end{pmatrix} \text{ та } \mathfrak{U}=\begin{pmatrix}\mathfrak{U}_0 & \mathfrak{D}_0 & & \\ 0 & \mathfrak{U}_1 & \mathfrak{D}_1 & \\ & 0 & \mathfrak{U}_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots\end{pmatrix}. \tag{35}$$

Діагональні блоки $\mathfrak{A}_{\rm i}$ та $\mathfrak{U}_i$ є матриці розміру $\ell_{\rm i}\times\ell_{\rm i}$

$$\mathfrak{A}_i=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\\ -a_1^{(i)} & \cdots & -a_{\ell_{\rm i}-2}^{(i)} & -a_{\ell_{\rm i}-1}^{(i)} & 1\end{pmatrix} \text{ та } \mathfrak{U}_i=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ -u_i & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{36}$$

блоки $\mathfrak{L}_{\rm i+1}$ та $\mathfrak{D}_{\rm i}$ є матриці розміру $\ell_{\rm i+1}\times\ell_{\rm i}$ та $\ell_{\rm i}\times\ell_{\rm i+1}$, відповідно

$$\mathfrak{L}_{\rm i+1}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \vdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & {\rm l}_{\rm i+1}\end{pmatrix} \text{ та } \mathfrak{D}_{\rm i}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}. \tag{37}$$

Зазначимо, якщо $\ell_{\rm i}=\ell_{\rm i+1}$, то

$$\mathfrak{U}_i=(-u_i),\ \ \mathfrak{L}_{\rm i+1}=({\rm l}_{\rm i+1}),\quad \mathfrak{D}_{\rm i}=(1),\ \ \mathfrak{A}_i=(1)\,.$$

Означення 5.1. Нехай узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}$ допускає $\mathfrak{LU}$ - факторизацію виду (35) – (37). Перетворення

$$\mathfrak{J}=\mathfrak{L}\mathfrak{A}\ \to\ \mathfrak{J}^{(p)}=\mathfrak{A}\mathfrak{L}$$

називається перетворенням Дарбу без параметра матриці $\mathfrak{J}$, тоді і тільки тоді, коли матриця $\mathfrak{J}^{(p)}$ є узагальненою матрицею Якобі.

Теорема 5.5. Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{G}$ та нехай $\ell_{\rm i}=n_{i+1}-n_i\geq 1,\ i\epsilon\,\mathbb{Z}_+$, де $n_0=0$ та $\boldsymbol{\mathcal{N}}(\mathbf{s})=\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ є множина нормальних індексів для послідовності $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$, та нехай $P_i(z)$ є поліноми першого роду, асоційовані з послідовностю $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$. Тоді матриця $\mathfrak{J}$ допускає $\mathfrak{LU}$ – факторизацію виду (35) – (37) тоді і тільки тоді, коли

$$P_i(0)\neq 0\,,\quad \text{для кожного } i\,\epsilon\,\mathbb{Z}_+. \tag{38}$$

Більш того,

$${\rm l}_{\rm i+1}=-\frac{b_{i+1}}{u_i},\qquad u_i=\frac{P_{i+1}(0)}{P_i(0)},\qquad u_i=a_0^{(0)}\,,\ \text{ для кожного } i\,\epsilon\,\mathbb{Z}_+.$$

Теорема 5.10. Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{G}$ та нехай $\mathfrak{J}=\mathfrak{L}\mathfrak{A}$ допускає $\mathfrak{LU}$ - факторизацію виду (35) – (37). Тоді матриця $\mathfrak{J}^{(p)}:=\mathfrak{A}\mathfrak{L}$ є узагальненою матрицею Якобі.

Означення 5.11. Визначимо функціонал $\rm z\mathfrak{G}$ як

$$({\rm z}\mathfrak{G})({\rm p})\coloneqq\mathfrak{G}\big({\rm zp(z)}\big),\qquad {\rm p}\epsilon\mathbb{C}[{\rm z}].$$

Теорема 5.12. Нехай $\mathfrak{I}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{G}$, така, що має місце (38) та нехай $\mathfrak{I} = \mathfrak{L}\mathfrak{A}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ - факторизацію виду (35) – (37). Тоді матриця $\mathfrak{I}^{(\mathrm{p})} = \mathfrak{A}\mathfrak{L}$ є асоційована з наступними функціоналом:

$$\mathfrak{G}^{(\mathrm{p})} = \begin{cases} \mathrm{z}\mathfrak{G}, & \mathrm{n}_1 > 1, \\ \dfrac{\mathrm{s}_0}{\mathrm{s}_1}\mathrm{z}\mathfrak{G}, & \mathrm{n}_1 = 1. \end{cases}$$

Пропозиція 5.18. Нехай $\mathfrak{I}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{G}$, така, що (38) має місце та нехай $\mathfrak{I} = \mathfrak{L}\mathfrak{A}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ - факторизацію виду (35) – (37). Нехай $m(z)$ та $m^{(p)}(z)$ є $\boldsymbol{m}$ - функції матриць $\mathfrak{I}$ та $\mathfrak{I}^{(p)}$. Тоді

$$m^{(p)}_{[0,j+n-1]}(z) = \begin{cases} zm_{[0,j-1]}(z), & n_1 > 1, \\ \dfrac{s_0}{s_1}\left(zm_{[0,j-1]}(z) + s_0\right), & n_1 = 1, \end{cases}$$

де n є кількість індексів $\ell_{\mathrm{i}} \geq 2$ та $\mathrm{i} = \overline{0, \mathrm{j}-1}$.

Теорема 5.19. Нехай $\mathfrak{I}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{G}$, така, що (38) має місце, та нехай $\mathfrak{I} = \mathfrak{L}\mathfrak{A}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ - факторизацію виду (35) – (37). Припустимо, що $\mathfrak{I}^{(p)} = \mathfrak{A}\mathfrak{L}$ є перетворення Дарбу без параметра матриці $\mathfrak{I}$. Тоді поліноми першого роду матриць $\mathfrak{I}$ та $\mathfrak{I}^{(p)}$ пов'язані формулами

$$P^{(p)}_{j+h_j}(z) = \frac{1}{z}\left(P_j(z) - \frac{P_{j+1}(0)}{P_j(0)}P_j(z)\right), \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

$$P^{(p)}_{j+h_j+1}(z) = zP_j(z), \quad \text{якщо } \ell_{j-1} > 1,$$

де h_j є кількість індексів $\ell_i > 1$, $i = \overline{0, \jmath - 2}$.

Теорема 5.22. Нехай $\mathfrak{I}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{G}$, така, що (38) має місце, та нехай $\mathfrak{I} = \mathfrak{L}\mathfrak{A}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ – факторизацію виду (35) – (37). Припустимо, що $\mathfrak{I}^{(p)} = \mathfrak{A}\mathfrak{L}$ є перетворення Дарбу без параметра матриці $\mathfrak{I}$. Тоді поліноми другого роду матриць $\mathfrak{I}$ та $\mathfrak{I}^{(p)}$ пов'язані формулами

$$Q^{(p)}_{j+h_j}(z) = Q_j(z) - \frac{P_{j+1}(0)}{P_j(0)}Q_j(z), \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

$$Q^{(p)}_{j+h_j+1}(z) = zQ_j(z), \quad \text{якщо } \ell_{j-1} > 1,$$

де h_j є кількість індексів $\ell_i > 1$, $i = \overline{0, \jmath - 2}$.

У дисертаційній роботі було розглянуто та отримано відповідні результати також для перетворення Дарбу з параметром узагальненої матриці Якобі.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розглянуто і досліджено індефінітну проблему моментів Стілт'єса та перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі.

1. Введено новий клас узагальнених дробів Стілт'єса (**S** - дробів). Встановлено, що кожна послідовність дійсних чисел **s** (класу $\mathcal{H}$) відповідає деякому узагальненому дробу Стілт'єса. Введено клас $\mathcal{H}^{reg}$ регулярних послідовностей **s** і для послідовностей **s** з класу $\mathcal{H}^{reg}$ знайдено зв'язок між відповідним **P** - дробом та узагальненим **S** - дробом. Отримано систему різницевих рівнянь, яка відповідає **S** - дробу.
2. Розглянуто невироджену зрізану індефінітну проблему моментів Стілт'єса, яка пов'язана з дійсною послідовністю $\boldsymbol{s} \in \mathcal{H}$. Знайдено критерій розв'язності зрізаної проблеми моментів Стілт'єса, розроблено покроковий алгоритм розв'язку цієї проблеми, отримано повний опис її розв'язків. Введено новий клас узагальнених поліномів Стілт'єса першого та другого роду і в їх термінах знайдено явні формули для резольвентних матриць зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Отримано факторизацію резольвентних матриць зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса.

3. Розглянуто операторний підхід до зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Показано, що кожна індефінітна проблема моментів Стілт'єса відповідає деякій узагальненій матриці Якобі, що породжує симетричний оператор $A_{[0,N]}$ у просторі Понтрягіна. Знайдено граничні трійки для спряженого лінійного відношення $A_{[0,N]}^{[*]}$, відповідні функцію Вейля та **u**-резольвентну матрицю М. Г. Крейна. Показано, що **u**-резольвентні матриці для оператора $A_{[0,N]}$ співпадають з резольвентними матрицями зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Знайдено критерій невизначеності повної проблеми моментів Стілт'єса і отримано опис її розв'язків.
4. Розглянуто перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі. Отримано критерій існування перетворення Дарбу, знайдено явні формули факторизації узагальненої матриці Якобі та вигляд матриць Якобі, які отримано при перетворенні Дарбу. Досліджено перетворення функції Вейля та поліномів першого та другого роду, що відповідають узагальненій матриці Якобі при перетворенні Дарбу. Аналогічні результати отримано також для перетворення Дарбу з параметром узагальнених матриць Якобі.

Список опублікованих праць за темою дисертації:

1. Kovalyov I. Darboux transformation of generalized Jacobi matrices/ I. Kovalyov // Methods of Funct. Anal. Topology, –2014. – Vol.20, no.4. –P.301– 320;

2. Derkach V. On a class of generalized Stieltjes continued fractions / V.Derkach and I.Kovalyov // Methods of Funct. Anal. and Topology.– 2015. – Vol.21, no.4. – P. 315–335;
3. Derkach V. The Schur algorithm for an indefinite Stieltjes moment problem / V.Derkach and I.Kovalyov //Mathematische Nachrichten–2017. – Vol.290, no.10. – P.1637– 1662;
4. Kovalyov I. Darboux transformation with parameter of generalized Jacobi matrices/ I.Kovalyov // J.Math. Sci.– 2017. – Vol.222, no.6. – P.703– 722;
5. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I.Kovalyov // J.Math. Sci. – 2017. – Vol. 224, no.6. – P.509– 529;
6. Derkach V. An operator approach to indefinite Stieltjes moment problem / V.Derkach and I.Kovalyov // J. Math. Sci. – 2017. – Vol. 227, no 1. – P.33– 67;
7. Kovalyov I. Darboux transformation of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // Abstracts Ukrainian Scientific Conference "Modern Problems of Probability Theory and Mathematical Analysis" (Vorokhta, 25 Feb. – 1 Mar., 2015): Vorokhta, 2015.– P. 30 – 32.
8. Kovalyov I. Darboux transformation with parameter of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // Abstracts "International conference of young mathematicians" (Kyiv, 3-6 June, 2015): Kyiv, Ukraine, 2015. – P. 55.
9. Kovalyov I. Darboux transformation of monic generalized Jacobi matrices associated with P – fractions / I. Kovalyov // Abstracts "17 International Scientific Conference of Academician M.Kravchuk" (Kyiv,19– 20 May, 2016): Kyiv: Nat. Sc. University of Ukraine "KPI" , 2016. – P. 21 – 25.
10. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstracts Ukrainian Scientific Conference "Modern Problems of Probability Theory and Mathematical Analysis" (Vorokhta, 22– 25 February, 2017): Vorokhta, 2017. – P. 93 – 94.
11. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstract "International Conference of Young Mathematicians" dedicated to the 100-th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008) (Kyiv, 7– 10 June, 2017): Kyiv: Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 2017. – P. 33 .
12. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstract "The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach" (Lviv, 18– 23 September): Lviv, Ukraine, 2017. – P. 43 – 44.
13. Kovalyov I. Full indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstract "the International Conference Asymptotic analysis and spectral theory (Aspect17)" (Trier, Germany, 25– 29 September, 2017): Trier, Germany, 2017. – P. 7 .

АНОТАЦІЇ

Ковальов І. М. Індефінітна проблема моментів Стілт'єса та узагальнені матриці Якобі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико- математичних наук за спеціальністю 01.01.01. – Математичний аналіз. – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена дослідженню індефінітної проблеми моментів Стілт'єса та дослідженню перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі. Введено новий клас узагальнених дробів Стілт'єса (S - дробів). Отримано систему різницевих рівнянь, яка відповідає S - дробу. Знайдено критерій розв'язності зрізаної проблеми моментів Стілт'єса, розроблено покроковий алгоритм розв'язку цієї проблеми, отримано повний опис її розв'язків. Введено новий клас узагальнених поліномів Стілт'єса першого та другого роду і в їх термінах знайдено явні формули для резольвентних матриць зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Отримано факторизацію резольвентних матриць зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Знайдено критерій невизначеності повної проблеми моментів Стілт'єса і отримано опис її розв'язків. Розглянуто перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі. Отримано критерій існування перетворення Дарбу, знайдено явні формули факторизації узагальненої матриці Якобі та вигляд матриць Якобі, які отримано при перетворенні Дарбу. Досліджено перетворення функції Вейля та поліномів першого та другого роду, що відповідають узагальненій матриці Якобі при перетворенні Дарбу.

Ключові слова: індефінітна проблема моментів Стілт'єса, **m** - функція , **S** - дріб, узагальнена матриця Якобі, перетворення Дарбу, поліноми першого та другого роду.

Ковалёв И. М. Индефинитная проблема моментов Стилтьеса и обобщённые матрицы Якоби. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата фізико – математических наук по специальности 01.01.01. – Математический анализ. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена исследованию индефинитной проблемы моментов Стилтьеса и исследованию преобразования Дарбу обобщенных матриц Якоби. Введен новый класс обобщенных дробей Стилтьеса (S - дробей). Получена система разностных уравнений, соответствующая S -дроби. Найдено критерий разрешимости срезанной проблемы моментов Стилтьеса, разработан пошаговый алгоритм решения этой проблемы, получено полное описание ее решений. Введен новый класс

обобщенных полиномов Стилтьеса первого и второго рода, и в их терминах найдены явные формулы для резольвентных матриц срезанной индефинитной проблемы Стилтьеса. Получена факторизация резольвентных матриц срезанной индефинитной проблемы Стилтьеса. Найден критерий неопределенности полной проблемы моментов Стилтьеса и получено описание ее решений. Рассмотрены преобразования Дарбу обобщенных матриц Якоби. Получен критерий существования преобразования Дарбу, найдены явные формулы факторизации обобщенной матрицы Якоби и вид обобщённых матриц Якоби, полученных при преобразовании Дарбу. Исследовано преобразование функции Вейля и полиномов первого и второго рода, соответствующие обобщенной матрице Якоби при преобразовании Дарбу.

Ключевые слов*а*: индефинитная проблема моментов Стилтьеса, **m** - функция, **S** - дробь, обобщенная матрица Якоби, преобразование Дарбу, полиномы первого и второго рода.

Kovalyov I. M. Indefinite Stieltjes moment problem and generalized Jacobi matrices. – Manuscript.

Thesis for a Candidate Degree in Physics and Mathematics. Speciality 01.01.01. – Mathematical analysis. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of the indefinite Stieltjes moment problem and to the Darboux transformation of generalized Jacobi matrices. A new class of generalized Stieltjes fractions (S - fractions) is introduced. A system of difference equations that corresponds to S - fraction is obtained. The solvability criterion of the truncated Stieltjes moment problem is found; a step-by-step algorithm for solving this problem is developed, a complete description of its solutions was obtained. A new class of generalized Stieltjes polynomials of the first and the second kind are introduced, and explicit formulas for resolvent matrices of indefinite truncated Stieltjes moment problem are found in these terms. Factorization formulas for resolvent matrices of trancated indefinite Stieltjes moment problem are obtained. The criterion of interteminacyof the full indeterminate Stieltjes moment problem is found and a description of its solutions is obtained. The Darboux transformation of generalized Jacobi matrices is considered. A criterion of existence of the Darboux transformation is obtained, explicit formulas for the factorization of generalized Jacobi matrix and the form of the generalized Jacobi matrix obtained by the Darboux transformation are found. The transformation of the Weyl function and the polynomials of the first and second kind corresponding to the generalized Jacobi matrix are studied.

Keywords: indefinite Stieltjes moment problem, m - function, S - fraction, generalized Jacobi matrix, Darboux transformation, polynomials of the first and second kind.