Міністерство освіти і науки України
Національний педагогічний університет
ім. М.П. Драгоманова

Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Ковальов Іван Михайлович

УДК 517.982.4

ДИСЕРТАЦІЯ

Індефінітна проблема моментів Стілт'єса та узагальнені матриці Якобі

01.01.01 — математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Науковий керівник: Деркач Володимир Олександрович,
професор, доктор фізико–математичних наук.

Київ–2017

Анотація

Ковальов І.М. "Індефінітна проблема моментів Стілт'єса та узагальнені матриці Якобі". – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 «Математичний аналіз». - Національний педагогічний університет ім.М.П. Драгоманова, Київ, 2017.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню індефінітної проблеми моментів в узагальненому класі Стілт'єса та перетворенню Дарбу узагальнених матриць Якобі.

Класичну проблему моментів Стільт'єса було вперше розглянуто і розв'язано Т. Стілт'єсом методом неперервних дробів в роботі [82]. Інші підходи до проблеми моментів було розвинено в роботах П.Л. Чебишова, А.А. Маркова, Х. Гамбургера, Р. Неванлінни, М.Г. Крейна, Н.І.Ахієзера, Ю.М. Березанського та ін.

Операторний підхід до проблеми моментів вперше був застосований М.Г. Крейном у 1949 році. Цей метод дозволив поєднати теорію представлень симетричних операторів та проблему моментів. Індефінітна проблема моментів стає актуальною задачею з 70-х років минулого сторіччя. В роботах М.Г. Крейна та Х.Лангера [69, 71] було введено узагальнений клас Стілт'єса N_κ^+ ($\kappa \in \mathbb{N}$) та розглянуто індефінітну проблему моментів Стілт'єса в класі N_κ^+, як інтерполяційну проблему моментів. В.О. Деркач в роботі [22] розширив поняття узагальненого класу Стілт'єса та ввів до розгляду узагальнений клас функцій Стілт'єса $\mathbf{N}_\kappa^k$ ($\kappa, k \in \mathbb{N}$). В [22] було розглянуто індефінітну проблему моментів Стілт'єса в класі $\mathbf{N}_\kappa^k$. До цієї проблеми було застосовано операторний підхід, отримано повний опис розв'язків цієї проблеми, як за допомогою операторного підходу та також через побудову узагальненого $\mathbf{S}$ – дробу, без використання покрокового алгоритму Шура.

Інше питання, яке вивчається в дисертаційному дослідженні – це перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі. В.Б. Матвєєв та М.А. Сале [76] вперше досліджували перетворення Дарбу до систем різницевих рівнянь, які були пов'язані з ланцюгами Тоди. В роботі М. Буено та Ф. Марселано у 2004 році [9], було вперше досліджено перетворення Дарбу деякого класу монічних матриць Якобі, які асоційовані до квазі-дефінітного функціоналу, та отримано умови його існування. В роботі [17] М.Дерев'ягіна та В.О. Деркача було введено поняття узагальненої матриці Якобі та отриманий зв'язок узагальненої матриці з проблемою моментів. У 2011 році М. Дерев'ягін та В.О. Деркач [19] було розглянуто перетворення Дарбу

довільної монічної матриці Якобі та отримано умови, при яких монічна матриця Якобі переходить до деякої узагальненої матриці Якобі.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню кола питань, пов'язаних з індефінітною проблемою моментів Стілт'єса в узагальнених класах $\mathbf{N}_\kappa^k$, розробкою покрокового алгоритму Шура $\mathbf{N}_\kappa^k$ та його використання для опису розв'язків індефінітної проблеми моментів Стілт'єса у вигляді узагальненого $\mathbf{S}$ – дробу, а також дослідженню відповідних узагальнених матриць Якобі і їх перетворень Дарбу.

У вступі обгрунтовано актуальність теми, подано короткий аналіз сучасного стану проблеми, сформульовано мету та завдання дослідження, наукову новизну, практичне значення одержаних результатів та подано відомості про апробацію результатів дисертаційного дослідження.

Розділ 1 присвячено історичному огляду робіт, які мають відношення до теми дисертаційного досліждення. Зокрема, нагадуються поняття S–дробом Стілтєса і P–дробу Кронекера, пов'язаних з ними систем різницевих рівнянь, поліномів Ланцоша першого та другого роду.

Розділ 2 присвячено дослідженню зв'язків між послідовністю дійсних чисел, узагальненим S–дробом та P–дробом. Введено новий клас узагальнених дробів Стілт'єса. Клас послідовностей дійсних чисел позначається $\mathcal{H}$. Розглянуто перетворення розгортання для числових послідовностей класу $\mathcal{H}$ та асоційованих з ними функцій. За допомогою перетворення розгортання встановлено, що кожна послідовність дійсних чисел $\mathbf{s}$ відповідає деякому узагальненому дробу Стілт'єса. Введено підклас регулярних послідовностей $\mathcal{H}^{reg}$ класу $\mathcal{H}$, які характеризуються умовою, що поліноми першого роду P_i не вироджуються в точці 0. Для класу $\mathcal{H}^{reg}$ регулярних послідовностей $\mathbf{s}$ отримано зв'язок між відповідними P – дробом та узагальненим S – дробом. Отримано систему різницевих рівнянь, яка відповідає узагальненому S – дробу.

В розділі 3 розглянуто невироджену зрізану індефінітну проблему моментів Стілт'єса, яка пов'язана з дійсною послідовністю $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$. Знайдено критерій розв'язності зрізаної проблеми моментів Стілт'єса, розроблено покроковий алгоритм розв'язку цієї проблеми, отримано повний опис її розв'язків. Введено новий клас узагальнених поліномів Стілт'єса першого та другого роду і в їх термінах знайдено явні формули для резольвентних матриць зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Отримано факторизацію резольвентних матриць зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса.

В розділі 4 розглянуто операторний підхід до зрізаної індефінітної проблеми

Стілт'єса. Показано, що кожна індефінітна проблема моментів Стілт'єса відповідає деякій узагальненій матриці Якобі, що породжує симетричний оператор $A_{[0,N]}$ у просторі Понтрягіна. Знайдено граничні трійки для спряженого лінійного відношення $A_{[0,N]}^{[*]}$, відповідні функцію Вейля і u-резольвентну матрицю М.Г. Крейна. Показано, що u-резольвентні матриці для оператора $A_{[0,N]}$ співпадають з резольвентними матрицями зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Знайдено критерій невизначеності повної проблеми моментів Стілт'єса і отримано опис її розв'язків.

В розділі 5 дисертації розглянуто перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі. Отримано критерій існування перетворення Дарбу, знайдено явні формули факторизації узагальненої матриці Якобі та вигляд матриць Якобі, які отримано при перетворенні Дарбу. Досліджено перетворення лінійного функціонала $\mathfrak{S}$, функції Вейля та поліномів першого та другого роду, що відповідають узагальненій матриці Якобі при перетворенні Дарбу. Аналогічні результати отримано також для перетворення Дарбу з параметром узагальнених матриць Якобі.

Ключові слова: індефінітна проблема моментів Стілт'єса, $\mathbf{m}$ – функція , $\mathbf{S}$– дріб, узагальнена матриця Якобі, перетворення Дарбу, поліноми першого та другого роду.

Список публікацій здобувача

1. Derkach V. On a class of generalized Stieltjes continued fractions / V.Derkach, I.Kovalyov // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2015. – V. 21. – P. 315–335.

2. Derkach V. Schur algorithm for Stieltjes indefinite moment problem / V.Derkach, I.Kovalyov // Mathematische Nachrichten – 2017. –V. 290. – P. 1637–1662.

3. Derkach V. An operator approach to indefinite Stieltjes moment problem / V.Derkach, I.Kovalyov // J.Math. Sci. – 2017. – V. 227. – P. 33–67.

4. Kovalyov I. Darboux transformation of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2014. – V. 20. – P. 301–320.

5. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // J.Math. Sci. – 2017. – V. 224. – P. 509–529.

6. Kovalyov I. Darboux transformation with parameter of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // J.Math. Sci. – 2017. – V. 222. – P. 703–722.

7. Kovalyov I. Darboux transformation of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // Abstracts Ukrainian Scientific Conference "Modern Problems of Probability Theory and Mathematical Analysis"(Vorokhta, 25 February – 1 March, 2015): Vorokhta, 2015. – P. 30—32.

8. Kovalyov I. Darboux transformation with parameter of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // Abstracts "International conference of young mathematicians"(Kyiv, 3-6 June, 2015): Kyiv, Ukraine, 2015. – P. 55.

9. Kovalyov I. Darboux transformation of monic generalized Jacobi matrices associated with P – fractions / I. Kovalyov // Abstracts "17 International Scientific Conference of Academician M.Kravchuk"(Kyiv, 19-20 May, 2016): Kyiv: Nat. Sc. University of Ukraine "KPI 2016. — P. 21—25.

10. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstracts Ukrainian Scientific Conference "Modern Problems of Probability Theory and Mathematical Analysis"(Vorokhta, 22–25 February, 2017): Vorokhta, 2017. – P. 93–94.

11. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstract "International Conference of Young Mathematicians"dedicated to the 100-th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008) (Kyiv, 7-10 June, 2017): Kyiv: Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 2017. — P. 33.

12. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstract "The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach"(Lviv, 18-23 September): Lviv, Ukraine, 2017. – P. 43–44 .

13. Kovalyov I. Full indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstract "the International Conference Asymptotic analysis and spectral theory (Aspect17)"(Trier, Germany, 25–29 September, 2017): Trier, Germany, 2017. – P. 7.

ANNOTATION

Kovalyov I.M. "Indefinite Stieltjes moment problem and generalized Jacobi matrices". – Manuscript.

Thesis of the dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.01 – mathematical analysis. National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, 2017.

The dissertation is devoted to the study of the indefinite problem of moments in the generalized Stieltjes class and the Darboux transformation of generalized Jacobi matrices.

The classic Stieltjes moment problem was first considered by T. Stieltjes in [82]. Other approaches to the problem of the moment problen were developed in the papers of P.L. Chebishova, A.A. Markov, H. Hamburger, R. Nevanlinna, M.G. Kerina, N.I.

Akhiesera, Yu.M. Berezansky and others.

The operator approach to the moment problem was first applied by M.G. Krein in 1949. This method allowed combining the theory of representations of symmetric operators and the problem of moments. The indefinite moment problem becomes an actual task since the 70s of the last century. In the papers of M.G. Kerin and X.Langer [69, 71], a generalized Stieltjes class N_κ^+ $\kappa \in \mathbb{N}$ was introduced and the indefinite Stieltjes moment problem in the N_κ^+ class is considered, as an interpolation problem of moments. V. Derkach in his paper [22] extended the concept of the generalized Stieltjes class and introduced a generalized class of Stieltjes functions $\mathbf{N}_\kappa^k$ $(\kappa, k \in \mathbb{N})$. In [22] was considered the indefinite Stieltjes moment problem in the class $\mathbf{N}_\kappa^k$. The operator approach was applied to this problem, a complete description of the solutions of this problem was obtained, both by means of the operator approach and also by constructing a generalized $\mathbf{S}$ - fraction, without the use of a step-by-step Schur algorithm.

Another issue that is studied in the dissertation is the Darboux transformation of generalized Jacobi matrices. V.B. Matveev and M.A. Sale [76] first investigated the Darboux transformation to the systems of difference equations that were associated with the Toda chains. M. Bueno and F. Marcelano in 2004 [9] the Darboux transformation of some class monec Jacobi matrices was study, which are associated with a quasi-definite functional and the conditions for its existence were obtained. In [17] M. Derevyagina and V. Derkach introduced the notion of a generalized Jacobi matrix and obtained the connection of a generalized matrix with the moment problem. In 2011 M. Derevyagin and V. Derkach [19] examined the Darboux transformation to arbitrary Jacobi matrix and obtained the conditions,such that the monic Jacobi matrix transforms to generalized Jacobi matrix.

Dissertation work is devoted to research of some questions, related to description of solution of truncated and full indefinite Stieltjes moment problem in generalized class N_κ^k, developed step-by-step Schur algorithm and its use to describe the set of solutions of the indefinite Stieltjes moment problem in terms of the generalized S? fraction, application of the operator approach to indefinite Stieltjes and finding the description the set of solutions of this problem moment problem, study the Darboux transformation of generalized Jacobi matrices and obtaining the criterion for its existence, finding the connection between polynomials of the first and second kind by the Darboux transformation of the generalized Jacobi matrix.

The introduction substantiates the relevance of the topic, provides a brief analysis of the current state of the problem, formulates the purpose and tasks of the research, scientific novelty, practical significance of the results obtained and provides information about the approbation of the results of the dissertation research.

Section 1 is devoted to the historical review of papers related to the topic of dissertation research. In particular, we recall the notion of the Stieltjes $\mathbf{S}$– fraction and the Kronecker $\mathbf{P}$ -fraction, the systems of difference equations connected with them, and the first and second-order Lancos polynomials.

Section 2 is devoted to the study of the connections between a sequence of real numbers, generalized by the $\mathbf{S}$ -fraction and $\mathbf{P}$ -fraction. A new class of generalized Stieltjes fractions was introduced. The class of sequences of real numbers is denoted by $\mathcal{H}$. The transformation of deployment for numerical sequences of the class $\mathcal{H}$ and associated functions with them is considered. With the deployment transformation, it is established that each sequence of real numbers $\mathbf{s}$ corresponds to a certain generalized Stieltjes fraction. A subclass of regular sequences $\mathcal{H}^{reg}$ of the class $\mathcal{H}$ is introduced, which are characterized by the condition that polynomials of the first kind P_i does not degenerate at the point 0. The relation between the corresponding $\mathbf{P}$-fractions and the generalized S-fraction is obtained for the class $\mathcal{H}^{reg}$ of regular sequences $\mathbf{s}$. A system of difference equations is obtained that corresponds to a generalized S - fraction.

In Section 3, we consider the nondegenerate truncated indefinite Stieltjes moment problem, which is related to the real sequence $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$. The solvability criterion of the truncated indefinite Stieltjes moment problem was found; a step-by-step algorithm for solving this problem was developed, a complete description of its solutions was obtained. A new class of generalized Stieltjes polynomials of the first and the second kind ware introduced, and explicit formulas for resolvent matrices of cut off indefinite Stilteys problem were found in their terms. The factorization of resolvent matrices of truncated indefinite Stieltjes moment problem is obtained.

In Section 4 we consider the operator approach to the truncated indefinite Stieltjes moment problem. It is shown that each indefinite Stieltjes moment problem corresponds to some generalized Jacobi matrix, such that generates a symmetric operator $A_{[0,N]}$ in Pontryagin space. Boundary triples are found for the adjoint linear relation $A_{[0,N]}^{[*]}$, the corresponding Weyl function and the u - resolvent matrix. It is shown that the u -resolvent matrix of the operator $A_{[0,N]}$ coincide with the resolvent matrices of the truncated indefinite Stieltjes moment problem. The criterion of uncertainty of the full indefinite Stieltjes moment problem is found and a description of its solutions is obtained.

Section 5 of the dissertation deals with the Darboux transformation of generalized Jacobi matrices. The criterion for the existence of the Darboux transformation is obtained, explicit formulas for the factorization of the generalized Jacobi matrix and the Darboux transformation are found. The transformation of the linear function $\mathfrak{S}$, the Weyl function, and the polynomials of the first and second kind corresponding to the generalized Jacobi matrix with its Darboux transformation is investigated. Similar results are also obtained for the Darboux transform with the generalized Jacobi matrix parameter.

Keywords: indefinite Stieltjes moment problem, $\mathbf{m}$ – function, $\mathbf{S}$ – fraction, generalized Jacobi matrices, Darboux transformation, polynomials of the first and the second kind.

List of publications of the researcher

1. Derkach V. On a class of generalized Stieltjes continued fractions / V.Derkach, I.Kovalyov // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2015. – V. 21. – P. 315–335.

2. Derkach V. Schur algorithm for Stieltjes indefinite moment problem / V.Derkach, I.Kovalyov // Mathematische Nachrichten – 2017. –V. 290. – P. 1637–1662.

3. Derkach V. An operator approach to indefinite Stieltjes moment problem / V.Derkach, I.Kovalyov // J.Math. Sci. – 2017. – V. 227. – P. 33–67.

4. Kovalyov I. Darboux transformation of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2014. – V. 20. – P. 301–320.

5. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // J.Math. Sci. – 2017. – V. 224. – P. 509–529.

6. Kovalyov I. Darboux transformation with parameter of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // J.Math. Sci. – 2017. – V. 222. – P. 703–722.

7. Kovalyov I. Darboux transformation of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // Abstracts Ukrainian Scientific Conference "Modern Problems of Probability Theory and Mathematical Analysis"(Vorokhta, 25 February – 1 March, 2015): Vorokhta, 2015. – P. 30—32.

8. Kovalyov I. Darboux transformation with parameter of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // Abstracts "International conference of young mathematicians"(Kyiv, 3-6 June, 2015): Kyiv, Ukraine, 2015. – P. 55.

9. Kovalyov I. Darboux transformation of monic generalized Jacobi matrices associated with P – fractions / I. Kovalyov // Abstracts "17 International Scientific Conference of Academician M.Kravchuk"(Kyiv, 19-20 May, 2016): Kyiv: Nat. Sc. University of Ukraine "KPI 2016. — P. 21—25.

10. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstracts Ukrainian Scientific Conference "Modern Problems of Probability Theory and Mathematical Analysis"(Vorokhta, 22–25 February, 2017): Vorokhta, 2017. – P. 93–94.

11. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstract "International Conference of Young Mathematicians"dedicated to the 100-th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008) (Kyiv, 7-10 June, 2017): Kyiv: Institute of Mathematics NAS of Ukraine, 2017. — P. 33.

12. Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstract "The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach"(Lviv, 18-23 September): Lviv, Ukraine, 2017. – P. 43–44 .

13. Kovalyov I. Full indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // Abstract "the International Conference Asymptotic analysis and spectral theory (Aspect17)"(Trier, Germany, 25–29 September, 2017): Trier, Germany, 2017. – P. 7.

Зміст

Умовні позначення

$\mathbb{R}$ – поле дійсних чисел.

$\mathbb{C}$ – поле комплексних чисел.

$\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) – верхня (нижня) напівплощина в $\mathbb{C}$.

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел.

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел.

$\mathbb{Z}_+$ – невід'ємні цілі числа.

$\mathfrak{J}$ – нескінченна матриця Якобі.

$\mathfrak{J}_{[0,j]}$ – зрізана матриця Якобі.

$\det A$ – визначник матриці.

$\mathrm{dom} A$ – область визначення оператора A.

$\mathrm{ran} A$ – область значень оператора A.

$m_{[0,j]}(z)$ – $\mathbf{m}-$ функція матриці $\mathfrak{J}_{[0,j]}$.

$\mathbf{N}$ – клас функцій Неванлінни.

$\mathbf{N}_\kappa$ – узагальнений клас функцій Неванлінни.

$\mathbf{S}$ – клас функцій Стілт'єса.

$\mathbf{N}_\kappa^k$ – узагальнений клас Стілт'єса.

$\mathrm{Re} z$ – дійсна частина числа $z \in \mathbb{C}$.

$\mathrm{Im} z$ – уявна частина числа $z \in \mathbb{C}$.

$\mathrm{span}\mathcal{P}$ – лінійна оболонка множини $\mathcal{P}$.

$(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_H$ – скалярний добуток (у просторі H).

$[\cdot,\cdot]$ – індефінітний скалярний добуток.

$A^{[*]}$ – лінійне відношення оператора A.

$\mathfrak{h}_f$ – множина точок голоморфності функції f.

Вступ

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню індефінітної проблеми моментів в узагальненому класі Стілт'єса. Класична проблема моментів Стільт'єса була вперше розглянута Т. Стілт'єсом в роботі [82] та сформульована наступним чином:

За послідовністю дійсних чисел $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ відновити невід'ємну борелєвську міру $d\sigma$:

$$\int_0^{\infty} t^i d\sigma(t) = s_i, \qquad i \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Класична проблема Стілт'єса також розглядалась в термінах неперервних дробів (див. [52–54, 82]).

Індефінітна проблема моментів в узагальнених класах Стілт'єса є актуальною задачею з 70-х років минулого сторіччя. В роботі М.Г. Крейна та Х.Лангера [69,71] було розглянуто індефінітну проблему моментів Стілт'єса в класі $\mathbf{N}_{\kappa}^{+}$, як інтерполяційну проблему. Отримано повний опис розв'язків цієї проблеми в термінах неперервного $\mathbf{S}$ – дробу.

Застосування операторного підходу до проблеми моментів було зроблено М.Г. Крейном [64], що дало змогу отримати нові результати та пов'язати теорію представлень симетричних операторів з проблемою моментів. Операторний підхід до індефінітної проблеми Стілт'єса у класі $\mathbf{N}_{\kappa}^{k}$ був розглянутий в роботі В.О. Деркача [22]. Був отриманий повний опис розв'язків проблеми за допомогою цього підходу до цієї проблеми і знайдено вигляд відповідного узагальненого $\mathbf{S}$ – дробу, не використовуючи покроковий алгоритм Шура.

В роботах [13, 14, 17] було розроблено покроковий алгоритм розв'язку індефінітної проблеми Гамбургера, що природно привело до введення нового поняття узагальненої матриці Якобі [17]. Але для індефінітної проблеми моментів Стілт'єса покроковий процес її розв'язку не було розглянуто.

Інша проблема, яка вивчалася – це перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі. Перетворення Дарбу системи різницевих рівнянь було введено В.Б.Матвєєвим та М.А. Салле [76], у зв'язку з дослідженням ланцюгів Тоди. Вперше, перетворення Дарбу до монічних матриць Якобі було визначено в роботі М. Буено та Ф. Марселано у 2004 році [9], при додаткових умовах

$$P_n(0) \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.1}$$

де P_n є ортогональні поліноми першого роду, які відповідають монічній матриці

Якобі.

У 2011 році в роботі М. Дерев'ягіна та В.О. Деркача [17], було введено перетворення Дарбу довільної монічної матриці Якобі та показано, що у випадку, якщо не виконується умова (0.1), відповідне перетворення Дарбу є узагальненою матрицею Якобі.

У зв'язку з цим, природно випливає задача дослідження перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Основні наукові результати, викладені у дисертації, отримано при виконанні науково- дослідницьких робіт "Гармонічний та спектральний аналіз функцій і операторів, рівняння згортки та наближення функцій"(номер державної реєстрації 0112U002701), "Метричні простори, гармонічний аналіз функцій і операторів, сингулярні та некласичні задачі для диференціальних рівнянь"(номер державної реєстрації 0115U000136), що виконувались відповідно до плану роботи Донецького національного університету; "Спектральні проблеми теорії диференціальних і різницевих операторів"(номер державної реєстрації 0115U000556), що виконувалась відповідно до плану роботи Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова.

Мета і задачі дослідження.

(1) Встановити, що кожна послідовність дійсних чисел $\mathbf{s}$ відповідає деякому узагальненому дробу Стілт'єса. Отримати систему різницевих рівнянь, яка відповідає узагальненому дробу Стілт'єса;

(2) Розглянути невироджену індефінітну проблему моментів Стілт'єса. Знайти критерій її розв'язності, розробити покроковий алгоритм розв'язку цієї проблеми. Отримати повний опис розв'язків зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса, знайти явні формули матриць розв'язків та їх факторизацію;

(3) Розглянути операторний підхід до зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Отримати критерій невизначеності повної проблеми Стілт'єса та знайти повний опис розв'язків цієї проблеми;

(4) Для узагальнених матриць Якобі ввести поняття перетворення Дарбу з параметром та без параметра. Отримати критерії існування перетворення Дарбу, явні формули факторизації узагальненої матриці Якобі та вигляд матриць Якобі, які отримано при перетворенні Дарбу. Дослідити перетворення $\mathbf{m}$ –

функції,перетворення поліномів першого та другого роду, що відповідають узагальненій матриці Якобі при перетворенні Дарбу.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є індефінітна проблема моментів Стілт'єса та узагальнені матриці Якобі.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є покроковий алгоритм Шура в узагальненому класі Стілт'єса, індефінітна проблема моментів Стілт'єса, перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі.

Методи дослідження. У дисертації використовується і розвивається покроковий алгоритм Шура, метод граничних трійок в теорії розширень симетричних операторів у просторі Понтрягіна, методи теорії матриць.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації отримані такі нові результати:

(1) Введено новий клас регулярних послідовностей та новий клас узагальнених дробів Стілт'єса. Показано, що кожна послідовність дійсних чисел **s** відповідає деякому узагальненому дробу Стілт'єса. Для регулярного підкласу послідовностей **s** отримано зв'язок між P – дробом та узагальненим S – дробом. Отримано систему різницевих рівнянь, яка відповідає узагальненому S – дробу;

(2) Розглянуто не вироджену зрізану індефінітну проблему моментів Стілт'єса. Знайдено критерій її розв'язаності, розроблено покроковий алгоритм Шура до цієї проблеми. Введено новий клас узагальнених поліномів Стілт'єса першого та другого роду. Отримано повний опис розв'язків зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса, явні формули матриць розв'язків та їх факторизацію;

(3) Застосовано операторний підхід до зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Побудовано симетричний оператор у просторі Понтрягіна, якій відповідає індефінітній проблемі Стілт'єса. До цього оператора застосовано метод граничних операторів та отримано явні формули резольвентних матриць, які відповідають теорії представлення М.Г. Крейна. Знайдено критерій невизначеності повної проблеми Стілт'єса та знайдено повний опис розв'язків цієї проблеми;

(4) До узагальнених матриць Якобі розглянуто перетворення Дарбу з параметром та без. Отримано критерії існування перетворення Дарбу, явні формули факторизації узагальненої матриці Якобі та вигляд матриць Якобі, які

отримано при перетворенні Дарбу. Досліджено перетворення $\mathbf{m}-$ функції, що відповідають матриці Якобі при перетворенні Дарбу. Розглянуто перетворення поліномів першого та другого роду, які відповідають узагальненим матрицям Якобі.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при дослідженні інших типів індефінітних проблем та узагальнених матриць Якобі. Матеріали дисертації можуть бути використані у навчальному процесі - при викладанні спеціальних курсів по математичному аналізу.

Особистий внесок здобувача Визначення напрямку та плану досліджень, постановка задач та формулювання основних гіпотез належить науковому керівнику В.О. Деркачу. Всі представлені в дисертації результати отримано автором особисто.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на конференціях:

(1) Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, 25 лютого – 1 березня 2015, Ворохта, Україна;

(2) Міжнародна конференція – International conference of young mathematicians, 3-6 червня 2015, Київ, Україна;

(3) Міжнародна конференція – Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 19-20 травня 2016, Київ, Україна;

(4) Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу, 22-25 лютого 2017, Ворохта, Україна;

(5) Міжнародна конференція – International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008), 7-10 червня 2017, Київ, Україна.

(6) Міжнародна конференція–the International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, 18–23 вересня 2017, Львів, Україна.

(7) Міжнародна конференція–Asymptotic analysis and spectral theory (Aspect17), 25–29 вересня 2017, Трір, Німеччина.

Результати дисертації доповідались на семінарах:

(1) Донецький національний університет, семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, керівник д.ф.-м.н. професор В.О. Деркач, 2014;

(2) Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, керівник д.ф.-м.н. професор Г.М. Торбін, 2017;

(3) Інститут математики НАН України, Київський семінар з функціонального аналізу, керівники: академік НАН України професор Ю.М. Березанський, член - кореспондент НАН України професор А.Н. Кочубей, член-кореспондент НАН України професор Ю.С. Самойленко, 2017;

(4) Технічний університет Ільменау, Ільменау (Німеччина), керівник професор Карстен Трунк, 2017;

(5) Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача Національної академії наук України, керівники: проф. Д.І. Боднар, д. ф.-м. н. Х.Й. Кучмінська, 2017.

Публікації Основні результати дисертації опубліковані у 6 статтях [27], [28], [29], [59], [60], [61] та у 7 тезах доповідей на конференціях.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, 5 розділів, що подрібнені на підрозділи, висновків та списку літератури, що містить 89 найменувань. Обсяг роботи складає 147 сторінок.

Основний зміст дисертації. Дисертація присвячена дослідженню проблеми моментів в узагальнених класах Стілт'єса та перетворенню Дарбу узагальнених матриць Якобі.

До розв'язання зрізаної індефінітної проблеми моментів Стілт'єса було розроблено покроковий алгоритм Шура, завдяки якому усі розв'язки даної задачі мають представлення через узагальнений $\mathbf{S}-$дріб. Було введено та знайдено явні формули знаходження за даними задачі узагальнених поліномів Стілт'єса першого та другого роду. Отримано повний опис множини розв'язків зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса через узагальнені поліноми Стілт'єса першого та другого роду. Для цієї задачі було також отримано явну формулу резольвентної матриці та її факторизації.

До зрізаної індефінітної проблеми моментів Стілт'єса було застосовано операторний підхід, за допомогою граничних операторів отримано повний опис цієї проблеми, отримано формули для резольвентної матриці та її факторизація. Також за допомогою операторного підходу було розглянуто та розв'язано повну індефінітну проблему Стілт'єса.

Розглянуто та досліджено перетворення Дарбу з параметром та без параметра до узагальнених матриць Якобі $\mathfrak{J}$. Було отримано умови, за якими матриця $\mathfrak{J}$ має факторизацію на нижньотрикутну та верхньотрикутну блокові дводіагональні матриці. Отримано явні формули перетворення поліномів першого та другого роду, $\mathbf{m}-$ функції при перетворенні Дарбу узагальненої матриці Якобі.

1 Огляд літератури

1.1 Класична проблема моментів

1.1.1 Проблема моментів Гамбургера

Нехай $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_i\}_{i=0}^{\infty}$ – нескінченна послідовність дійсних чисел. Проблемою моментів Гамбургера $\mathcal{M}(\mathbf{s})$ (див. [1]) називається наступна задача: за послідовністю $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_i\}_{i=0}^{\infty}$ відновити міру скінченну $d\sigma$, яка задовольняє наступній системі

$$s_i = \int_{\mathbb{R}} t^i d\sigma(t), \quad i \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.1}$$

Дана задача була розв'язана Х.Гамбургером у 1920 р. (див. [52–54]). Проблема моментів Гамбургера має розв'язки тоді і тільки тоді, коли Ганкелеві матриці

$$S_n = (s_{i+j})_{i,j=0}^{n} \geq 0$$

є невід'ємними.

Розглянемо функцію f, яка є асоційованою з мірою $d\sigma$ та визначена за наступною формулою

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\sigma(t)}{t-z}. \tag{1.2}$$

Функція f належить до класу Неванлінни $\mathbf{N}$, тобто f є голоморфною в $\mathbb{C}_+$ та $\mathrm{Im} f(z) > 0$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$. Продовжимо функцію $f(z)$ на нижню напівплощину $\mathbb{C}_-$ за формулою

$$f(z) := \overline{f(\overline{z})}, \quad z \in \mathbb{C}_-.$$

За Теоремою Гамбургера–Неванлінни (див. [1]), класична проблема моментів $\mathcal{M}(\mathbf{s})$ може бути переформульована, як наступна інтерполяційна проблема моментів:

До заданої послідовності $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_i\}_{i=0}^{\infty}$ знайти $f \in \mathbf{N}$ таку, що наступне асимптотичне розвинення

$$f(z) = -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \cdots - \frac{s_{2n}}{z^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty, \tag{1.3}$$

має місце для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$. Позначення $z\widehat{\to}\infty$ означає, що $z \to \infty$ недотично, тобто всередині сектора $\varepsilon < \arg z < \pi - \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$.

Зрізана проблема моментів $MP(\mathbf{s}, n)$ полягає в опису усіх таких функцій $f \in \mathbf{N}$, для яких має місце асимптотичне розвинення (1.3). Множина розв'язків проблеми $\mathcal{M}(\mathbf{s}, n)$ може бути отримана за допомогою алгоритму Шура, як розвинення функції f з класу Неванлінни у неперервний дріб. Проілюструємо цей метод:

Нехай $f_0 \in \mathbf{N}$ та f_0 має асимптотичне розвинення (1.3), тоді $-\dfrac{1}{f_0} \in \mathbf{N}$ та

$$-\frac{1}{f_0(z)} = z - a_0 + b_1 f_1(z),$$

де $a_0 = \overline{a_0}$, $b_1 > 0$, $f_1 \in \mathbf{N}$:

$$f_1(z) = -\frac{s_0^{(1)}}{z} - \frac{s_1^{(1)}}{z^2} - \cdots - -\frac{s_{2(n-1)}^{(1)}}{z^{2n-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2n-1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty,$$

де $\{s_i\}_{i=0}^{2(n-1)}$ деяка послідовність дійсних чисел. Продовжуючи цей процес далі, отримуємо послідовність функцій $f_j \in \mathbf{N}$ і дійсних чисел a_j, $b_j > 0$ таких, що:

$$T[f_{j+1}] = f_j(z) = -\frac{1}{z - a_j + b_{j+1} f_{j+1}(z)}, \tag{1.4}$$

для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$.

Отже, з проблемою моментів пов'язан наступний $J-$дріб

$$-\cfrac{b_0}{z - a_0 - \cfrac{b_1}{z - a_1 - \cfrac{b_2}{\ddots - \cfrac{b_n}{z - a_n \cdots}}}}, \quad (b_0 = s_0). \tag{1.5}$$

Як відомо (див. [51]), з неперервним дробом (1.5) асоційована монічна матриця Якобі

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & & \\ b_1 & a_1 & 1 & \\ & b_2 & a_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

та система різницевих рівнянь

$$b_i y_{i-1}(z) - a_i(z) y_i(z) + y_{i+1}(z) = 0 \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

де поліноми $a_i(z)$ мають вигляд $a_i(z) = z - a_i$ для кожного $i \in \mathbb{Z}_+$.

Розв'язками цієї системи є поліноми $P_i(z)$ і $Q_i(z)$ першого та другого роду, відповідно, які задовільняють наступним початковим умовам

$$P_{-1}(z) = 0, \quad P_0(z) = 1, \quad Q_{-1}(z) = 1, \quad Q_0(z) = 0. \tag{1.7}$$

Монічна матриця Якобі J пов'язана з поліномами першого та другого роду за наступними формулами

$$P_i(z) = \det(zI_i - J_{[0,i-1]}) \quad \text{та} \quad Q_i(z) = b_0 \det(zI_i - J_{[1,i-1]}),$$

де I_i є одинична матриця розміру $i \times i$ та

$$J_{[i,j]} = \begin{pmatrix} a_i & 1 & & \\ b_{i+1} & a_{i+1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & b_j & a_j \end{pmatrix}.$$

Як було показано в роботах [7], [51], підхідний дріб $J-$ дробу (1.5) має вигляд

$$-\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = -\cfrac{b_0}{z - a_0 - \cfrac{b_1}{z - a_1 - \cfrac{b_2}{\ddots - \cfrac{b_n}{z - a_n}}}} \tag{1.8}$$

і допускає асимптотичне розвинення

$$-\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \cdots - \frac{s_{2n-1}}{z^{2n}} + o\left(\frac{1}{z^{2n}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty. \tag{1.9}$$

Використовуючи індуковану послідовність функцій $f_j \in \mathbf{N}$, отримуємо повний опис зрізаної проблеми моментів $\mathcal{M}(\mathbf{s}, n)$

$$f(z) = T_0 \circ T_1 \circ \cdots \circ T_n[f_{n+1}(z)]. \tag{1.10}$$

Дробово-лінійне перетворення (1.10) може бути записано за допомогою поліномів першого та другого роду $P_i(z)$ та $Q_i(z)$, та резольвентної матриці

$$W_{[0,n]}(z) = \begin{pmatrix} -b_n Q_n(z) & -Q_{n+1}(z) \\ b_n P_n(z) & P_{n+1}(z) \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

Теорема 1.1 *([1]) Множина розв'язків зрізаної проблеми моментів $\mathcal{M}(\mathbf{s}, n)$ допускає представлення*

$$f(z) = -\frac{b_n Q_n(z)\tau(z) + Q_{n+1}(z)}{b_n P_n(z)\tau(z) + P_{n+1}(z)}, \tag{1.12}$$

де параметр τ належить до класу $\mathbf{N}$ та задовольняє наступній умові

$$\lim_{\lambda = iy\uparrow\infty} \frac{\tau(\lambda)}{\lambda} = 0. \tag{1.13}$$

1.1.2 Проблема моментів Стілт'єса

Класична проблема Стілт'єса була розв'язана в роботі [82]. Вона полягає у наступному:

Нехай задана послідовність дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$. За послідовністю $\mathbf{s}$ знайти міру $d\sigma$, таку, що

$$s_i = \int_0^{\infty} t^i d\sigma, \qquad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.14}$$

Як і у випадку проблеми Гамбургера з послідовністю $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ є асоційований деякий $J-$ дріб (1.5). Для проблеми Стілт'єса цей $J-$дріб, можна переписати у вигляді наступного $S-$дробу

$$\cfrac{1}{-zm_1 + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{-zm_2 + \cdots}}}, \tag{1.15}$$

у тому сенсі, що парний підхідний дріб $S-$дробу (1.15) співпадає з деяким підхідним дробом $J-$ дробу (1.5).

У випадку проблеми Стілт'єса (маємо струну Стілт'єса з деяким розподілом мас), коефіцієнти S-дробу (1.15) інтерпретують, як m_j - маси та l_j - відстані між суміжними масами m_j та m_{j+1}.

Означення 1.2 *Проблема моментів називаєтьса невизначеною, якщо вона має нескінченну кількість розв'язків, в іншому випадку проблема називаєтьса визначеною.*

Запишемо критерій невизначеності проблеми моментів Стілт'єса в термінах "мас"та "довжин"

Теорема 1.3 *(Критерій Стілт'єса [82]) Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ є послідовністю моментів Стілт'єса. Тоді проблема моментів Стілт'єса* (1.14) *є невизначеною, якщо*

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} m_j < \infty \quad \text{та} \quad L = \sum_{j=1}^{\infty} l_j < \infty,$$

де M є загальна вага, що зосереджена на струні Стілт'єса та L є безпосередньо довжина всієї струни.

Означення 1.4 *Функція f належить до класу Стілт'єса ($f \in \mathbf{S}$), якщо $f \in \mathbf{N}$, f – голоморфна на $\mathbb{C} \setminus [0;\infty)$ та $f(x) \geq 0$ для всіх $x < 0$.*

Критерій М.Г. Крейна ([63])

$$f \in \mathbf{S} \Longleftrightarrow f \in \mathbf{N} \quad \text{та} \quad zf \in \mathbf{N}. \tag{1.16}$$

Проблема (1.14) у випадку скінченної послідовності $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n}$ називається зрізаною проблемою моментів Стілт'єса та була розглянута в роботі [65]. За Теоремою Гамбургера–Неванлінни (див. [1]), зрізана проблема моментів Стілт'єса може бути переформульована у термінах перетворення Стілт'єса

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-z},$$

як інтерполяційна задача (1.3) у класі $\mathbf{S}$.

Необхідними умовами розв'язності зрізаної проблеми Стілт'єса є виконання наступних нерівностей

$$S_{n+1} := (s_{i+j})_{i,j=0}^{n} \geq 0, \quad S_n^+ := (s_{i+j+1})_{i,j=0}^{n-1} \geq 0 \tag{1.17}$$

Якщо матриці S_{n+1} та S_n^+ є невиродженими, то нерівності $S_{n+1} > 0$, $S_n^+ > 0$ є достатніми умовами розв'язності зрізаної проблеми Стілт'єса (див. [65]). Вироджений випадок є більш тонким і був розглянутий в [12].

Визначимо поліноми Стілт'єса $P_i^+(z)$ та $Q_i^+(z)$ першого та другого роду, відповідно, для опису розв'язків зрізаної проблеми моментів Стілт'єса. Як було показано в роботі [84], поліноми $P_i^+(z)$ та $Q_i^+(z)$ будуються як перетворення Дарбу поліномів $P_i(z)$ та $Q_i(z)$, при умові, що $P_i(0) \neq 0$

$$P_{2i}^+(z) = \frac{P_i(z)}{P_i(0)} \quad \text{та} \quad P_{2i}^+(z) = b_i \begin{vmatrix} P_{i+1}(z) & P_i(z) \\ P_{i+1}(0) & P_i(0) \end{vmatrix},$$

$$Q_{2i}^+(z) = \frac{Q_i(z)}{P_i(0)} \quad \text{та} \quad Q_{2i}^+(z) = b_i \begin{vmatrix} Q_{i+1}(z) & Q_i(z) \\ P_{i+1}(0) & P_i(0) \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.5 *([65]) Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n}$. Множина розв'язків зрізаної проблеми моментів Стілт'єса описується наступною формулою*

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-z} = -\frac{Q_{2n}^+(z) - \tau(z) Q_{2n+1}^+(z)}{P_{2n}^+(z) - \tau(z) P_{2n+1}^+(z)},$$

де параметр $\tau \in \mathbf{S}$.

1.2 Монічні матриці Якобі та їх перетворення Дарбу

Нехай $\mathfrak{S}$ – лінійний функціонал визначений на лінійному просторі $\mathcal{P}$, де $\mathcal{P}$ – це простір поліномів з дійсними коефіцієнтами. Дійсні числа $s_i = \mathfrak{S}(z^i)$ – називаються i-ми моментами ($i = 0, 1 \ldots$), які асоційовані з функціоналом $\mathfrak{S}$. Матриця $S = (s_{i+j})_{i,j=0}^{\infty}$ – називається матрицею моментів, яка відповідає функціоналу

$\mathfrak{S}$. Лінійний функціонал $\mathfrak{S}$ називається квазі-дефінітним, якщо головні мінори матриці S є невиродженими.

Розглянемо послідовність монічних поліномів $\{P_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$, таку що

1) $\deg P_i = i$;

2) $\mathfrak{S}(P_i(z)P_j(z)) = K_i\delta_{i,j}$, де $K_i \neq 0$ та $\delta_{i,j}$ – є символ Кронекера.

З умови 2) випливає, що послідовність монічних поліномів $\{P_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ є ортогональною відносно функціонала $\mathfrak{S}$. Тоді, для заданої послідовності ортогональних монічних поліномів має місце наступне співвідношення (аналог (1.6))

$$zP_i(z) = P_{z+1}(z) + a_iP_i(i) + b_iP_{i-1}(z),\ i = 1, 2, \dots, \tag{1.18}$$

і виконуються початкові умови

$$P_{-1}(z) = 0, \quad P_0(z) = 1 \text{ та } b_i \neq 0\ i = 1, 2, \dots$$

Тому, послідовність поліномів $\{P_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ позв'язана з наступною матрицею

$$J = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & & \\ b_1 & a_1 & 1 & \\ & b_2 & a_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

яка називається монічною матрицею Якобі J.

Визначимо вектор $P(z)$ рівністю

$$P(z) = \begin{bmatrix} P_0(z), & P_1(z), & P_2(z), & \dots \end{bmatrix}^T.$$

Тоді рекурентне співвідношення (1.18) може бути переписано наступним чином

$$JP(z) = zP(z).$$

1.2.1 Перетворення Дарбу.

Розглянемо нижньотрикутну L та верхньотрикутну U матриці, такі що

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ l_1 & 1 & 0 & \\ & l_2 & 1 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \text{ та } U = \begin{pmatrix} u_1 & 1 & & \\ 0 & u_2 & 1 & \\ & 0 & u_3 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

Будемо говорити, що монічна матриця Якобі J допускає LU (UL) факторизацію, якщо вона допускає представлення

$$J = LU \ (\mathfrak{J} = UL), \tag{1.21}$$

де матриці L та U мають вигляд (1.20).

Як відомо з [9], матриця J допускає LU – факторизацію, якщо для поліномів першого роду P_i виконана наступна умова

$$P_i(0) \neq 0, \qquad i \geq 1. \tag{1.22}$$

Означення 1.6 *([9, 76]) Перетворенням Дарбу без параметра монічної матриці Якобі J називається наступне перетворення*

$$J = LU \to UL = J^{(p)}, \tag{1.23}$$

де матриця $J^{(p)}$–нова монічна матриця Якобі.

Теорема 1.7 *([9]) Нехай $\{P_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ – послідовність монічних поліномів, яка відповідає монічній матриці Якобі $\mathfrak{J}$. Матриця $\mathfrak{J}$ допускає LU – факторизацію тоді і тільки тоді, коли має місце* (1.22).

Більш того елементи матриць L та U обчислюються за наступними формулами

$$u_i = -\frac{P_i(0)}{P_{i-1}(0)}, \quad l_1 = \frac{b_1}{a_0}, \quad u_1 = a_0, \quad l_i = \frac{b_i}{a_{i-1} - l_{i-1}}, \quad i \geq 2. \tag{1.24}$$

Теорема 1.8 *([9]) Нехай монічна матриця Якобі J допускає LU – факторизацію* (1.21)*, $J^{(p)} = UL$ – її перетворення Дарбу без параметра, $\{P_i(z)\}_{n=0}^{\infty}$ та $\left\{P_i^{(p)}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовності поліномів першого роду монічних матриць Якобі J та $J^{(p)}$, відповідно. Тоді поліноми першого роду пов'язані формулою Крістофеля (див. [87, с. 56])*

$$P_i^{(\mathbf{p})}(z) = \frac{1}{z}\left(P_{i+1}(z) - \frac{P_{i+1}(0)}{P_i(0)}P_i(z)\right), \qquad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.25}$$

Більш того, матриця $J^{(p)}$ асоційована до лінійного функціонала $\sigma^{(p)}(a(z)) := \sigma(za(z))$, де $a \in \mathbb{C}[z]$.

Отже, якщо монічна матриця Якобі J допускає перетворення Дарбу без параметра, тоді матриці J та $J^{(p)}$ мають вигляд

$$J = LU = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & & \\ b_1 & a_1 & 1 & \\ & b_2 & a_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \text{ i } J^{(p)} = UL = \begin{pmatrix} u_1+l_1 & 1 & & \\ u_2 l_1 & u_2+l_2 & 1 & \\ & u_3 l_2 & u_3+l_3 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.26}$$

де матриці L та U визначені за (1.20), (1.24).

Далі розглянемо умови при яких монічна матриця Якобі J допускає факторизацію UL та її перетворення Дарбу з параметром.

Означення 1.9 *([9]) Нехай $\{P_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ – послідовність монічних поліномів першого роду матриці J та нехай $S_0 \in \mathbb{R}$. Тоді послідовність $\left\{\widehat{P}_i(z)\right\}_{i=0}^{\infty}$ називається послідовністю ко–рекурсивних поліномів з параметром S_0, якщо має місце наступне рекурентне співвідношення:*

$$\widehat{P}_{i+1}(z) = (z - \widetilde{a}_i)\widehat{P}_i(z) - \widetilde{b}_i\widehat{P}_{i-1}(x), \tag{1.27}$$

де $\widehat{a}_0 = a_0 - S_0$, $\widehat{a}_i = a_i$ $i \geq 1$ та $\widehat{b}_i = b_i$, $\quad i \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.10 *([9]) Нехай $S_0 \in \mathbb{R}$ та $\left\{\widehat{P}_i(z)\right\}_{i=0}^{\infty}$ є послідовністю ко–рекурсивних поліномів з параметром S_0 і має місце наступна умова*

$$\widehat{P}_i(0) \neq 0, \qquad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.28}$$

Тоді матриця J допускає UL – факторизацію і елементи матриць L та U визначаються за наступними формулами

$$u_1 := S_0, \quad u_{i+1} := S_i = \frac{b_i}{a_{i-1} - S_{i-1}}, \quad \ell_i := a_{i-1} - S_{i-1}, \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{1.29}$$

Означення 1.11 *Перетворенням Дарбу з параметром називаєтьcя наступне перетворення*

$$J = UL \to LU = J^{(d)}, \tag{1.30}$$

де матриця $\mathfrak{J}^{(d)}$ – є також монічною матрицею Якобі.

Теорема 1.12 *([9]) Нехай монічна матриця Якобі J допускає UL – факторизацію, $J^{(d)} = LU$ – її перетворення Дарбу з параметром, $\{P_i(z)\}_{n=0}^{\infty}$ та $\left\{P_i^{(d)}(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовності поліномів першого роду монічних матриць Якобі $\mathfrak{J}$ та $J^{(d)}$, відповідно. Тоді поліноми першого роду пов'язані формулою Геронімуса (див. [88, (3.9)])*

$$P_0^{(\mathbf{d})}(z) \equiv 1, \quad P_i^{(\mathbf{d})}(z) = P_i(z) + (S_{i-1} - a_{i-1})\, P_{i-1}(z), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.31}$$

Перетворення Дарбу без параметра та з параметром монічної матриці Якобі J, які не відповідають умовам (1.22) та (1.28), відповідно, були розглянуті в роботі [19]. У цьому випадку може статися, що функціонал $\sigma^{(p)}$ не є квазі–дефінітним та, як показано в роботі [19], перетворення Дарбу без параметра $J^{(p)} = UL$ може бути деяка узагальнена матриця Якобі.

У зв'язку з цим, природно виникає питання про існування перетворення Дарбу в класі узагальнених матриць Якобі. В даній роботі буде введено поняття перетворення Дарбу без параметра узагальнених матриць Якобі, знайдено критерій його існування та формули за якими обчислюються поліноми першого та другого роду для перетворення Дарбу без параметра. Буде розглянуто також аналогічне питання для перетворення Дарбу з параметром.

1.3 Проблема моментів у класі $\mathbf{N}_\kappa$

Означення 1.13 [66] *Мероморфна функція f у $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ з множиною голоморфності $\mathfrak{h}_f$ належить до узагальненого класу Неванлінни $\mathbf{N}_\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{N}$), якщо ядро*

$$\mathsf{N}_\omega(z) := \frac{f(z) - \overline{f(\omega)}}{z - \overline{\omega}} \tag{1.32}$$

має κ від'ємних квадратів в $\mathfrak{h}_f \cap \mathbb{C}_+$, тобто, для кожного набору $z_j \in \mathbb{C}_+ \cap \mathfrak{h}_f$ ($z_i \neq \overline{z}_j$, $i, j = 1, \dots, n$) квадратична форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{f(z_i) - \overline{f(z_j)}}{z_i - \overline{z}_j} \xi_i \overline{\xi}_j, \quad \xi_j \in \mathbb{C}$$

має не більше κ та при деякому наборі z_j ($j = 1, \dots, n$) точно κ від'ємних квадратів.

Для функції $f \in \mathbf{N}_\kappa$ позначимо $\kappa_-(f) = \kappa$. Зокрема, якщо $\kappa = 0$, то $\mathbf{N}_0$ співпадає з класом Неванлінни $\mathbf{N}$ (див. [72]).

Кожний дійсний поліном $P(t) = p_\nu t^\nu + p_{\nu-1} t^{\nu-1} + \ldots + p_1 t + p_0$ степеня ν належить до класу $\mathbf{N}_\kappa$, де індекс $\kappa = \kappa_-(P)$ може бути обчислений за наступною формулою (див. [67, Лема 3.5])

$$\kappa_-(P) = \begin{cases} \left[\frac{\nu+1}{2}\right], & \text{якщо } p_\nu < 0; \text{ та } \nu \text{ непарний };\\ \left[\frac{\nu}{2}\right], & \text{в іншому випадку }. \end{cases} \tag{1.33}$$

Позначимо $\nu_-(S)$ ($\nu_+(S)$) число від'ємних (позитивних) власних значень матриці S. Нехай $\mathcal{H}$ є множиною скінчених послідовностей $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{\ell}$ та нехай $\mathcal{H}_{\kappa,\ell}$ є множиною послідовностей $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{\ell} \in \mathcal{H}$, таких що

$$\nu_-(S_n) = \kappa \quad (n = [\ell/2] + 1), \tag{1.34}$$

де S_n визначена за (1.17). Індекс $\nu_-(S_n)$ Ганкелевої матриці S_n може бути обчислений за правилом Фронебіуса (див. [40, Теорема X.24]). Зокрема, якщо всі визначники $D_j := \det S_j$ $(j \in \mathbb{Z}_+)$ не нульові, тоді $\nu_-(S_n)$ збігається з числом змін знаків в послідовності

$$D_0 := 1, \quad D_1, \quad D_2, \ldots, \quad D_n.$$

Означення 1.14 *([19]) Визначимо множину $\mathcal{N}(\boldsymbol{s})$ нормальних індексів послідовності $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$, як*

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{s}) = \{n_j : \mathbf{D}_{n_j} \neq 0, j = 1, 2, \ldots\}, \quad \mathbf{D}_{n_j} = \det(s_{i+k})_{i,k=0}^{n_j-1}. \tag{1.35}$$

З (1.35) випливає, що n_j є нормальним індексом послідовності $\mathbf{s}$ тоді і тільки тоді, коли

$$\det \begin{pmatrix} s_0 & \cdots & s_{n_j-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n_j-1} & \cdots & s_{2n_j-2} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{1.36}$$

Позначимо перший нетривіальний момент $b_0 := s_{n_1-1}$, тобто $s_k = 0$ для усіх $k < n_1 - 1$. Наприклад, якщо $n_1 = 1$, то $s_0 \neq 0$.

Послідовність $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ асоційована з поліномами першого та другого роду (див. [1], [17], [19]), що визначаються за наступними формулами для кожного $i \in \mathbb{N}$

$$P_i(z) = \frac{1}{\mathbf{D}_{n_i}} \det \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n_i-1} & s_{n_i} & \cdots & s_{2n_i-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n_i} \end{pmatrix}, \quad Q_i(z) = \mathfrak{S}_t \left(\frac{P_i(z) - P_i(t)}{z - t} \right). \tag{1.37}$$

Означення 1.15 *Послідовність $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{\ell}$ належить до класу $\mathcal{H}_{\kappa,\ell}$, якщо матриця Ганкеля $S_\ell = (s_{i+j})_{i,j=0}^{\ell}$ має κ від'ємних квадратів.*

Нагадаємо деякі твердження щодо класів $\mathbf{N}_\kappa$ та $\mathcal{H}_{\kappa,\ell}$ (див. [67, 69]).

Пропозиція 1.16 *([67]) Нехай $f \in \mathbf{N}_\kappa$, $f_1 \in \mathbf{N}_{\kappa_1}$, $f_2 \in \mathbf{N}_{\kappa_2}$. Тоді*

(1) $-f^{-1} \in \mathbf{N}_\kappa$;

(2) $f_1 + f_2 \in \mathbf{N}_{\kappa'}$, де $\kappa' \leq \kappa_1 + \kappa_2$;

(3) Якщо, на додаток до, $f_1(iy) = o(y)$ при $y \to \infty$ та f_2 є поліном, то

$$f_1 + f_2 \in \mathbf{N}_{\kappa_1+\kappa_2}. \tag{1.38}$$

(4) Якщо функція $f \in \mathbf{N}_\kappa$ має наступне асимптотичне розвинення

$$f(z) = -\frac{s_0}{z} - \cdots - \frac{s_\ell}{z^{\ell+1}} + o\left(\frac{1}{z^{\ell+1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty, \tag{1.39}$$

де послідовність $\{s_i\}_{i=0}^{\ell}$ належить до класу $\mathcal{H}_{\kappa',\ell}$ з деяким $\kappa' \leq \kappa$.

Означення 1.17 *Говорять, що функція $f \in \mathbf{N}_{\kappa,-2n}$, якщо $f \in \mathbf{N}_\kappa$ та f допускає асимптотичне розвинення* (1.3) *й $f \in \mathbf{N}_{\kappa,-\infty}$, якщо $f \in \mathbf{N}_\kappa$ та f допускає асимптотичне розвинення* (1.3) *для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, тобто*

$$\mathbf{N}_{\kappa,-\infty} := \bigcap_{n \geq 0} \mathbf{N}_{\kappa,-2n}.$$

Індефінітна проблема моментів у класі узагальнених функцій Неванлінни $\mathbf{N}_\kappa$ була розглянута М.Г.Крейном та Х.Лангером у 1979 (див. [69]).

Повна індефінітна проблема моментів $MP_\kappa(\mathbf{s})$: Задана послідовність дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ та індекс $\kappa \in \mathbb{Z}_+$. Знайти таку функцію $f \in \mathbf{N}_{\kappa,-\infty}$, яка має розвинення (1.3) для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$.

Критерій розв'язності невиродженої проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$ (отримано в [69]): проблема моментів $MP_\kappa(\mathbf{s})$ є розв'язаною тоді і тільки тоді, коли матриці Ганкеля $S_n = (s_{i+j})_{i,j=0}^{n}$ мають не більше κ від'ємних власних значень для будь-якого $n \in \mathbb{Z}_+$, тобто

$$\nu_-(S_n) \leq \kappa, \qquad \text{для всіх } n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.40}$$

Опис розв'язків проблеми моментів $MP_\kappa(\mathbf{s})$ зазначений у наступному твердженні

Означення 1.18 *Проблема $MP_\kappa(\mathbf{s})$ називається виродженою, якщо існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що*

$$\det S_n = 0, \qquad \textit{для всіх } n_0 \geq 0.$$

В противному випадку, $MP_\kappa(\mathbf{s})$ є невиродженою

Означення 1.19 *Проблема $MP_\kappa(\mathbf{s})$ називається невизначеною, якщо вона має нескінчену кількість розв'язків і визначеною, в протилежному випадку. Зрозуміло, що невизначена проблема моментів $MP_\kappa(\mathbf{s})$ є також невиродженою.*

Як показано [69], проблема $MP_\kappa(\mathbf{s})$ є невизначеною тоді і тільки тоді, коли для кожного $z \in \mathbb{C}$ має місце наступна нерівність

$$\sum_{i=0}^{\infty} |P_i(z)|^2 < \infty$$

та виконується умова (1.40).

Теорема 1.20 *([69]) Якщо проблема моментів $MP_\kappa(\mathbf{s})$ є невизначеною, то існують цілі функції $w_{ij}(z)$ $(i,j=1,2)$ мінімального експоненціального типу такі, що множина розв'язків проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s})$ описується наступною формулою*

$$f(z)=\frac{w_{11}(z)\tau(z)+w_{12}(z)}{w_{21}(z)\tau(z)+w_{22}(z)}, \tag{1.41}$$

де параметр $\tau\in\mathbf{N}\cup\{\infty\}$.

Аналог формулі (1.41) для матричної проблеми моментів було отримано в [34] та [24].

1.4 Проблема моментів у класі $\mathbf{N}_\kappa^+$

Проблема моментів в класі $\mathbf{N}_\kappa^+$ була розглянута М.Г. Крейном та Х. Лангером в роботі [71].

Означення 1.21 *([71]) Функція f належить до класу $\mathbf{N}_\kappa^k$, якщо $f\in\mathbf{N}_\kappa$ та $zf\in\mathbf{N}_k$. У випадку, коли $k=0$, отримуємо клас $\mathbf{N}_\kappa^+:=\mathbf{N}_\kappa^0$.*

Проблема $MP_\kappa^+(\mathbf{s})$: Задана послідовність $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=0}^\infty$ та індекс $\kappa\in\mathbb{Z}_+$. Знайти всі функції $f\in\mathbf{N}_\kappa^+$ такі, що мають асимптотичне розвинення для кожного $n\in\mathbb{N}$

$$f(z)=-\frac{s_0}{z}-\frac{s_1}{z^2}-\cdots-\frac{s_{2N-1}}{z^{2N}}+o\left(\frac{1}{z^{2N}}\right),\quad z\widehat{\rightarrow}\infty. \tag{1.42}$$

Означення 1.22 *([71]) Будемо говорити, що послідовність $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=0}^\infty$ належить класу $\mathcal{H}_\kappa^+$, якщо $\mathbf{s}\in\mathcal{H}_\kappa$ та матриця Ганкеля $S^+:=(s_{i+j+1})_{i,j=0}^n>0$ позитивною для всіх $n\in\mathbb{N}$.*

Теорема 1.23 *([71]) Нехай $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=0}^\infty\in\mathcal{H}_\kappa^+$. Тоді послідовність $\mathbf{s}$ асоційована з наступним $S-$ дробом*

$$\cfrac{1}{-zm_1(z)+\cfrac{1}{l_1+\cfrac{1}{-zm_2(z)+\cdots\cfrac{1}{l_N+\cdots}}}},$$

де числа $l_i>0$ та степінь поліномів $\deg(m_i)\le 1$.

Означення 1.24 *Проблема $MP_\kappa^+(\mathbf{s})$ називається виродженою, якщо існує $n_0\in\mathbb{N}$ таке, що*

$$\det S_n\neq 0,\qquad \text{для всіх } n_0=0.$$

В противному випадку, $MP_\kappa^+(\mathbf{s})$ є невиродженою.

Теорема 1.25 *([71]) Якщо проблема моментів $MP_\kappa^+(\mathbf{s})$ є невиродженою та має місце* (1.40) *, то існують чотири цілі функції $w_{ij}(z)$ $(i,j=1,2)$ степеня $\le \frac{1}{2}$, такі що множина розв'язків проблеми $MP_\kappa^+(\mathbf{s})$ описується наступною формулою*

$$f(z) = \frac{w_{11}(z)\tau(z) + w_{12}(z)}{w_{21}(z)\tau(z) + w_{22}(z)}, \tag{1.43}$$

де параметр $\tau \in \mathbf{N}_0^+ \cup \{\infty\}$.

Проблема моментів у класі $\mathbf{N}_\kappa^k$ була розглянута в роботі [22].

1.5 Неперервні P− дроби та поліноми Ланцоша

Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell} \in \mathcal{H}_\kappa$ та нехай $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_i\}_{i=1}^{N}$ – це множина нормальних індексів для послідовності $\mathbf{s}$, яку продовжимо елементами $n_{-1} := -1$ та $n_0 := 0$. Нехай P_i та Q_i – це поліноми першого та другого роду, відповідно, які визначені за формулою (1.37).

Як було показано Л. Кронекером [73], дріб $-\dfrac{Q_i(z)}{P_i(z)}$ має наступне асимптотичне розвинення

$$-\frac{Q_i(z)}{P_i(z)} = -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \cdots - \frac{s_{2n_i-1}}{z^{2n_i}} + o\left(\frac{1}{z^{2n_i}}\right), \qquad z \widehat{\to} \infty. \tag{1.44}$$

Застосування алгоритму Євкліда до пари поліномів Q_i та P_i приводить до розладу функції $-\dfrac{Q_i(z)}{P_i(z)}$ в наступний неперервний дріб

$$-\frac{Q_i(z)}{P_i(z)} = -\cfrac{b_0}{a_0(z) - \cfrac{b_1}{a_1(z) - \cdots - \cfrac{b_{i-1}}{a_{i-1}(z)}}}, \tag{1.45}$$

в якому $b_0 = s_{n_1-1}$, b_j–є дійсні числа, $a_j(z)$–є монічні поліноми степеня $n_{j+1} - n_j$ $(0 \le j \le N-1)$. Пари (a_i, b_i) називаються атомами функції $-\dfrac{Q_i(z)}{P_i(z)}$ (див. [39]).

З неперервним $\mathbf{P}$−дробом (1.45) пов'язана наступна система різницевих рівнянь

$$b_i y_{i-1}(z) - a_i(z) y_i(z) + y_{i+1}(z) = 0. \tag{1.46}$$

Як було показано [17], поліноми P_i та Q_i є розв'язками цієї системи різницевих рівнянь з початковими умовами

$$P_{-1}(\lambda) \equiv 0,\ P_0(\lambda) \equiv 1 \quad \text{і} \quad Q_{-1}(\lambda) \equiv -1,\ Q_0(\lambda) \equiv 0, \tag{1.47}$$

в якій $b_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a_i(z) = z^{\ell_i} + a_{\ell_i - 1}^{(i)} z^{\ell_i - 1} + \ldots + a_1^{(i)} z + a_0^{(i)}$ – це деякі монічні поліноми степеня $\ell_i = n_{i+1} - n_i$, що називаються *породжуючими поліномами* узагальненої матриці Якобі $\mathfrak{J}$, котра буде розглянута нижче, $i \in \mathbb{Z}_+$. Різницеві рівняння (1.46) вивчалися в роботах [77] і [80].

P_i та Q_i називаються поліномами Ланцоша першого та другого роду, відповідно. Відзначимо, що цей факт було отримано ще Г. Фробеніусом в його роботі про визначники Ганкеля [38].

Неперервний дріб (1.45) називається $\mathbf{P}-$ дробом. Він виникав в дослідженнях А. Магнуса [77] про апроксиманти Паде та в роботах М.Г.Крейна й Х.Лангера в роботах [69]– [71] по індефінітній проблемі моментів.

Теорема 1.20 доведена в [69] методами симетричних операторів у просторі Понтрягіна. Інший підхід базується на покроковому процесі, розв'язку зрізаних проблем моментів.

Зрізана проблема моментів $MP_\kappa(\mathbf{s}, 2n-2)$. Задана послідовність $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n-2}$. Знайти функцію $f \in \mathbf{N}_{\kappa,-(2n-2)}$, яка має асимптотичне розвинення (1.39).

Проблема $MP_\kappa(\mathbf{s}, 2n-2)$ називається невиродженою, якщо

$$\det S_n \neq 0,$$

тобто число n є нормальним індексом ($n = n_j$) послідовності $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n-2}$.

У випадку невиродженої послідовності $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n-2}$ в [14] показано, що проблема $MP_\kappa(\mathbf{s}, 2n-2)$ є розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконана умова (1.40) та множина розв'язків проблеми $MP_\kappa(\mathbf{s}, 2n-2)$ знаходиться за формулою (1.12), в якій τ є довільна функція з класу $\mathbf{N}_{\kappa-\nu_-(S_n)}$, що задовільняє умові (1.13). Більш того, процедура покрокового процесу розв'язку проблеми моментів $MP_\kappa(\mathbf{s}, 2n-2)$ дозволяє отримати факторизацію резольвентної матриці $W_{[0,j]}(z)$ у вигляді

$$W_{[0,j]}(z) = \begin{pmatrix} -Q_j(z) & -\widetilde{b}_j^{-1} Q_{j+1}(z) \\ P_j(z) & \widetilde{b}_j^{-1} P_{j+1}(z)! \end{pmatrix} = W_0(z) W_1(z) \ldots W_j(z),\ \widetilde{b}_j = b_0 b_1 \ldots b_j, \quad (1.48)$$

та матриці $W_i(z)$ мають наступний вигляд

$$W_i(z) = \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{b}_{i-1}^{-1} \\ \widetilde{b}_{i-1} & \frac{a_i(z)}{b_i} \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Як відомо, послідовності $Q_j(z)$ та $P_j(z)$ не є збіжними при $n \to \infty$, тому при переході до розгляду повної проблеми моментів перейти до матриці $\widetilde{W}_{[0,j]}(z)$, яка має наступну факторизацію

$$\widetilde{W}_{[0,j]}(z) = \begin{pmatrix} -Q_j(z) & -\widetilde{b}_j^{-1} Q_{j+1}(z) \\ P_j(z) & \widetilde{b}_j^{-1} P_{j+1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -P_{j+1}(0) & -Q_{j+1}(0) \\ \widetilde{b}_j^P{}_j(0) & \widetilde{b}_j^Q{}_j(0) \end{pmatrix}.$$

Тоді при $\kappa = 0$ послідовність матриць $\widetilde{W}_{[0,j]}(z)$ збігається до матриці Неванлінни $\widetilde{W}_{[0,\infty]}(z)$ (див. [1]), яка є цілою функцією мінімального типу. При $\kappa \neq 0$ цей результат випливає з факторизації

$$\widetilde{W}_{[0,\infty]}(z) = \widetilde{W}_{[0,N]}(z)\widetilde{W}_{[N+1,\infty]}(z)$$

та його справедливості для матриці $\widetilde{W}_{[N+1,\infty]}(z)$.

Повне дослідження індефінітної проблеми моментів $MP_\kappa(\mathbf{s})$ за допомогою покрокового алгоритму приведено в роботах $[2, 14, 17, 18]$.

Для індефінітної проблеми Стілт'єса до сих пір не було побудовано покрокового алгоритму. Ця проблема розглядається у даній дисертації.

1.6 Узагальнені матриці Якобі

Як було зазначено вище, операторний підхід до розв'язання проблеми моментів $MP_\kappa(\mathbf{s})$ будується на теорії розширень для деякого симетричного оператора в просторі Понтрягіна. Приведемо конструкцію цього оператора.

Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ – послідовність дійсних чисел та нехай $P_i(z)$ є поліноми першого роду, $\mathcal{N}(\mathbf{s})$ є множина нормальних індексів послідовності $\mathbf{s}$ та позначимо $l_j = n_{j+1} - n_j$. Розглянемо систему поліномів $\{P_{i,j}(z)\}_{i=0}^{\infty}$, де $P_{i,j}(z) = z^{j-1}P_i(z)$ та $j = \overline{0, l_j - 1}$, як базис в просторі поліномів

$$\mathcal{P} = \operatorname{span}\left\{z^i : i \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Визначимо лінійний функціонал $\mathfrak{S}$ на лінійній оболонці рівністю

$$\mathfrak{S}(z^i) = s_i, \qquad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.50}$$

З послідовністю $\mathbf{s}$ пов'язана система поліноми першого та другого роду, що визначені за формулою (1.37) та система різницевих рівнянь (1.46). Також з системою (1.46) асоційована узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}$ (див. [17], [19]), яка визначена за формулою

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{a_0} & \mathfrak{D}_0 & & \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_{a_1} & \mathfrak{D}_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{1.51}$$

де діагональні блоки $\mathfrak{C}_{a_i}$ є супроводжуючі матриці до поліномів $a_i(z)$ (див. [74])

$$\mathfrak{C}_{a_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^{(i)} & -a_1^{(i)} & \cdots & -a_{\ell_i-1}^{(i)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{\ell_i \times \ell_i}, \tag{1.52}$$

блоки $\mathfrak{D}_i$, $\mathfrak{B}_{i+1}$ є $\ell_i \times \ell_{i+1}$ та $\ell_{i+1} \times \ell_i$ матрицями, відповідно, вигляду

$$\mathfrak{D}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{i+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.53}$$

Матриці $\mathfrak{B}_{i+1}$ – є ненульові, бо $b_{i+1} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $i \in \mathbb{Z}_+$.

Зауваження 1.26 *Матрицю $\mathfrak{J}$, що визначена формулами (1.54)– (1.53), називають узагальненою матрицею Якобі (УМЯ), асоційованою з лінійним функціоналом $\mathfrak{S}$. Іноді, $\mathfrak{J}$ називають УМЯ, асоційованою з послідовністю $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ або з системою (1.46), що підкреслює зв'язок з поліномами $a_i(z)$ та числами b_i, $i \in \mathbb{Z}_+$.*

Визначимо для довільних $i, j \in \mathbb{Z}_+$ зрізану узагальнену матрицю Якобі

$$\mathfrak{J}_{[0,j]} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_{a_0} & \mathfrak{D}_0 & & \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{C}_{a_1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathfrak{D}_{j-1} \\ & & \mathfrak{B}_j & \mathfrak{C}_{a_j} \end{pmatrix}, \tag{1.54}$$

Зв'язок між поліномами першого і другого роду зі зрізаною УМЯ був отриманий у [17] (в класичному випадку див. [8, 7.1.2])

$$P_i(z) = \det(z - \mathfrak{J}_{[0,i-1]}) \quad \text{та} \quad Q_i(z) = b_0 \det(z - \mathfrak{J}_{[1,i-1]}). \tag{1.55}$$

Поліноми $P_i(z)$ та $Q_i(z)$ задовольняють наступній узагальненій формулі Ліувілля-Остроградського [17, 18]

$$Q_{i+1}(z)P_i(z) - Q_i(z)P_{i+1}(z) = \widetilde{b}_i, \quad \widetilde{b}_0 = b_0 \quad \text{та} \quad \widetilde{b}_i = b_0 b_1 \dots b_i, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.56}$$

Розглянемо простір Понтрягіна $\mathfrak{H}_{[0,N]}$, котрий є індефінітним скалярним простором послідовностей з $\mathbb{C}^{n_{N+1}}$ оснащений індефінітним скалярним добутком

$$[x, y]_{[0,N]} = (G_{[0,N]}x, y), \quad G_{[0,N]} = \operatorname{diag}(\widetilde{b}_0 E_0^{-1}, \widetilde{b}_1 E_1^{-1}, \dots, \widetilde{b}_N E_N^{-1}), \tag{1.57}$$

де

$$E_{a_i} = \begin{pmatrix} a_1^{(i)} & \cdots & a_{\ell-1}^{(i)} & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ a_{\ell-1}^{(i)} & \iddots & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.58}$$

Матриця E_{a_i} називається симетризатором матриці $\mathfrak{C}_{a_i}$ та має місце наступна формула (див [44, Глава 12])

$$E_{a_i}C_{a_i} = C_{a_i}^* E_{a_i}, \tag{1.59}$$

матриця $E_{a_i}C_{a_i}$ є симетричною у стандартному скалярному добутку у просторі $\mathbb{C}^{\ell_i}$.

З рівності (1.59) маємо, що матриця $G_{[0,N]}\mathfrak{J}_{[0,N]}^T$ є самоспряженою в просторі $\mathbb{C}^{n_{N+1}}$ зі стандартним скалярним добутком

$$G_{[0,N]}\mathfrak{J}_{[0,N]}^T = \mathfrak{J}_{[0,N]}G_{[0,N]} \tag{1.60}$$

і тому матриця $\mathfrak{J}_{[0,N]}^T$ породжує самоспряжений оператор у просторі $\mathfrak{H}_{[0,N]}$.

Подібним чином в нескінченно вимірному випадку можна розглянути індефінітний скалярний простір $\mathfrak{H}_{[0,\infty)}$ нескінченних послідовностей з ндефінітним скалярним добутком

$$[x, y]_{[0,\infty)} = (G_{[0,\infty)}x, y), \quad G_{[0,\infty)} = \mathrm{diag}(\widetilde{b}_0 E_0^{-1}, \widetilde{b}_1 E_1^{-1}, \ldots). \tag{1.61}$$

Якщо $\mathbf{s} \in H_\kappa$, тоді просір $\mathfrak{H}_{[0,\infty)}$ є простором Понтрягіна (див [6]), з

$$\max\{\mathrm{ind}_-\mathfrak{H}_{[0,\infty)}, \mathrm{ind}_+\mathfrak{H}_{[0,\infty)}\} = \kappa.$$

Пов'язаний з матрицею $\mathfrak{J}_{[0,\infty)}^T$ мінімальний оператор $A_{\min}$, визначається як звуження оператора $\mathfrak{J}_{[0,\infty)}^T$ на множені скінченних послідовностей. Оператор $A_{\min}$ є симетричним в просторі $\mathfrak{H}_{[0,\infty)}$.

Нехай $\mathfrak{H}$ є простором Гільберта та G – це самоспряжений оператор в прострі $\mathfrak{H}$ такий, що $0 \in \rho(G)$ та сумарна кратність від'ємних власних значень G дорівнює κ. Простір $\mathfrak{H}$ з індефінітним скалярним добутком

$$[f, g] := (Gf, g) \quad f, g \in \mathfrak{H}$$

називається простором Понтрягіна з негативним індексом κ і позначається $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$. Замкнутий лінійний оператор A в $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ називається *симетричним* в $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$, якщо

$$[Af, g] = [f, Ag] \quad \text{для кожного} \quad f, g \in \mathrm{dom}\,(A).$$

Аналогічно, як у випадку з мінімальним оператором, розглянемо також максимальний оператор $A_{\max}$, визначений як звуження оператора $\mathfrak{J}_{[0,\infty)}^T$ на області визначення

$$\mathrm{dom}(A_{\max}) := \{x \in \mathfrak{H}_{[0,\infty)} : \mathfrak{J}_{[0,\infty)}^T x \in \mathfrak{H}_{[0,\infty)}\}.$$

Як відомо [18, 69], оператор $A_{\min}$ є самоспряженим у просторі $\mathfrak{H}_{[0,\infty)}$, тоді і тільки тоді, коли $A_{\min} = A_{\max}$.

Позначимо

$$\pi_{[0,N]}(z) = G_{[0,N]}^{-1}\Big[\pi_0(z), \ \dots, \ \pi_N(z)\Big]^T \ \text{ та } \pi_i(z) = \Big[P_i(z), \ zP_i(z), \ \dots, \ z^{l_i-1}P_i(z)\Big]^T. \quad (1.62)$$

Аналогічно до $\pi_{[0,N]}(z)$ визначимо вектор функцію

$$\xi_{[0,N]}(z) = G_{[0,N]}^{-1}\Big[\xi_0(z), \ \dots, \ \xi_N(z)\Big]^T \ \text{ та } \xi_i(z) = \Big[Q_i(z), \ zQ_i(z), \ \dots, \ z^{l_i-1}Q_i(z)\Big]^T. \quad (1.63)$$

Лема 1.27 *Для кожного $N \in \mathbb{N}$ виконуються рівності*

$$(\mathfrak{J}_{[0,N]}^{\top} - zI_{n_{N+1}})\pi_{[0,N]}(z) = -(\widetilde{b}_N)^{-1}P_{N+1}(z)e_{n_N}, \quad (1.64)$$

$$(\mathfrak{J}_{[0,N]}^{\top} - zI_{n_{N+1}})\xi_{[0,N]}(z) = e_0 - (\widetilde{b}_N)^{-1}Q_{N+1}(z)e_{n_N}. \quad (1.65)$$

Відмітимо, що в роботі [69] побудований оператор множення на z розглядався в іншому базисі (так званому майже ортогональних поліномів) і тому відповідна блочна матриця мала інший вигляд. Теореми 1.20 та 1.25 було отримано шляхом застосування теорії розширень до цього оператора.

Узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}$ природно виникає при покроковому процесі. В [18] було показано, що матриця $(w_{ij})_{i,j=1}^2$ з Теореми 1.20 є резольвентною матрицею оператора A_{max}, відповідно до деякої граничної трійки (див. Означення 4.1).

Як проміжний крок, в [18] було показано, що матриці $W_{[0,N]}(z)$ та $\widetilde{W}_{[0,N]}(z)$ є резольвентними матрицями для оператора $A_{[0,N]}$.

Самоспряжені оператори, породжені узагальненими матрицями Якобі $\mathfrak{J}$ і $\mathfrak{J}_{[0,N]}$, було використано в [18] для доведення збіжності діагональних апроксимантів Паде для функцій класу $\mathbf{N}_{\kappa,-\infty}$.

В цій роботі будуть розглянуті питання пов'язані з операторним представленням матриці $W^+(z) = (w_{ij}^+)_{i,j=1}^2$ з Теореми 1.25 та відповідних матриць $W_{[0,N]}^+(z)$ для зрізаних індефінітних проблем моментів Стілт'єса. Буде знайдено також явний вигляд для субдіагональних апроксимантів Паде для функцій класу $\mathbf{N}_{\kappa,-\infty}^k$.

2 Дріб Стілт'єса

2.1 Клас $\mathcal{H}$ та P-дріб

У цьому розділі розглянемо загальний клас $\mathcal{H}$ послідовностей $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ дійсних чисел s_i. Позначимо $\mathcal{H}_\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{Z}_+$) підклас послідовностей $s \in \mathcal{H}$, таких, що число $\nu_-(S_n)$ від'ємних квадратів матриці S_n з урахуванням кратності не перевищує κ та збігається з κ для досить великого n.

Кожна послідовність $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$ пов'язана з наступним P-дробом

$$\mathop{\mathbf{K}}_{0}^{\infty}\left(\frac{-b_i}{a_i(z)}\right) := -\cfrac{b_0}{a_0(z) - \cfrac{b_1}{a_1(z) - \cfrac{b_2}{a_2(z) - \dots}}} \tag{2.1}$$

де (a_i, b_i) є атоми, а саме $b_i \neq 0$ – дійсні числа та $a_i(z)$ – поліноми степеня $\deg(a_i) = n_{i+1} - n_i$ ($i \in \mathbb{Z}_+$, $n_0 = 0$). Дроби виду (2.1) були введені А. Магнусом у [77] та називаються $\mathbf{P}-$ дробами, див. також [80]. У випадку, коли $\mathbf{s} \in \mathcal{H}_\kappa$ для деякого $\kappa \in \mathbb{N}$ така конструкція була представлена в [17].

Розглянемо формальний асимптотичний ряд

$$-\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \dots - \frac{s_n}{z^{n+1}} - \cdots , \tag{2.2}$$

який відповідає послідовності $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathcal{H}$. У наступній теоремі ланцюговий дріб будується таким чином, що його асимптотичний розклад в ∞ співпадає в певному сенсі з асимптотичним рядом (2.2).

Теорема 2.1 *Нехай $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$ та $n_1 < n_2 < \dots$ є множина нормальних індексів послідовності $\mathbf{s}$. Тоді існує єдиний ланцюговий дріб $\mathop{\mathbf{K}}_{0}^{\infty}\left(\frac{-b_i}{a_i(z)}\right)$ (див (2.1)), такий що:*

(1) $a_i(z)$ є монічні поліноми степеня $n_{i+1} - n_i$ ($n_0 = 0$);

(2) b_i є дійсні числа, такі що: $b_i \neq 0$ для кожного $i \in \mathbb{Z}_+$;

(3) підхідний дріб f_j неперервного дробу (2.1) має наступне асимптотичне розвинення

$$f_j(z) \sim -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \dots - \frac{s_{2n_j-1}}{z^{2n_j}} + O\left(\frac{1}{z^{2n_j+1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty. \tag{2.3}$$

Доведення Теореми 2.1 базується на алгоритмі Шура, розробленого в [15]. В [17] цей алгоритм був застосований до послідовностей з класу $\mathcal{H}_\kappa$. Для довільного $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$ $\mathbf{P}-$дріб у (2.1) був введений А. Магнусом у [77]. Для зручності коротко опишемо конструкцію $\mathbf{P}-$ дробу в (2.1).

ДОВЕДЕННЯ. Нехай n_1 є перший нормальний індекс послідовності $\mathbf{s} \in H$. Тоді

$$s_0 = s_1 = \ldots = s_{n_1-2} = 0 \quad \text{та} \quad b_0 := s_{n_1-1} \neq 0. \tag{2.4}$$

Виберемо $N \in \mathbb{N}$ та розглянемо раціональну функцію

$$g_0(z) = -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \cdots - \frac{s_{2n_N-1}}{z^{2n_N}}. \tag{2.5}$$

Тоді функція $-\dfrac{b_0}{g_0(z)}$ може бути представлена у вигляді суми

$$-\frac{b_0}{g_0(z)} = a_0(z) + g_1(z) \tag{2.6}$$

дійсного монічного полінома $a_0(z)$ степеня n_1 та дійсної раціональної функції $g_1(z)$, такої що

$$g_1(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \text{коли} \quad z\widehat{\rightarrow}\infty. \tag{2.7}$$

Крім того, функція $g_1(z)$ допускає наступне асимптотичне розвинення

$$g_1(z) = -\frac{s_0^{(1)}}{z} - \frac{s_1^{(1)}}{z^2} - \cdots - \frac{s_{2(n_N-n_1)-1}^{(1)}}{z^{2(n_N-n_1)}} + O\left(\frac{1}{z^{2(n_N-n_1)+1}}\right), \tag{2.8}$$

де $s_i^{(1)}$ є дійсні числа, такі що, перші $N-1$ нормальних індексів послідовності $\mathbf{s}^{(1)} = \left\{s_i^{(1)}\right\}_{i=0}^{2(n_N-n_1)-1}$ співпадають з

$$n_i^{(1)} = n_{i+1} - n_1 \qquad (i = 1, 2, \ldots N-1). \tag{2.9}$$

Явні формули для $s_i^{(1)}$ наведені в [15]. Зокрема, $n_1^{(1)} = n_2 - n_1$ та

$$s_0^{(1)} = s_1^{(1)} = \ldots = s_{n_1^{(1)}-2}^{(1)} = 0 \quad \text{й} \quad b_1 := s_{n_1^{(1)}-1}^{(1)} \neq 0. \tag{2.10}$$

З (2.6), отримуємо

$$g_0(z) = -\frac{b_0}{a_0(z) + g_1(z)}. \tag{2.11}$$

Застосовуючи в подальшому цей алгоритм, отримуємо на другому кроці

$$-\frac{b_1}{g_1(z)} = a_1(z) + g_2(z), \tag{2.12}$$

де $a_1(z)$ є дійсний монічний поліном степеня $n_2 - n_1$. Тому,

$$g_1(z) = -\frac{b_1}{a_1(z) + g_2(z)}. \tag{2.13}$$

N-ий крок має вигляд

$$-\frac{b_{N-1}}{g_{N-1}(z)} = a_{N-1}(z) + g_N(z), \tag{2.14}$$

де $b_{N-1} \neq 0$, $a_{N-1}(z)$ є дійсний монічний поліном степеня $n_N - n_{N-1}$ та $g_N(z)$ є раціональна функція, така що

$$g_N(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \qquad \text{коли} \quad z\widehat{\to}\infty. \tag{2.15}$$

Отже,

$$g_{N-1}(z) = -\frac{b_{N-1}}{a_{N-1}(z) + g_N(z)}. \tag{2.16}$$

Об'єднуючи (2.11)–(2.16), отримуємо

$$g_0(z) = -\cfrac{b_0}{a_0(z) - \cfrac{b_1}{a_1(z) - \cdots - \cfrac{b_{N-1}}{a_{N-1}(z) + g_N(z)}}}. \tag{2.17}$$

Покладемо $g_N(z) \equiv 0$ в (2.17), отримуємо, що $N-$ий підхідний дріб $f_N(z)$ неперервного дробу $g_0(z)$, який допускає асимптотичне розвинення (2.3).

Єдиність розвинення (2.1) випливає з [55, Теорема 1.20].

$N-$ий підхідний дріб $f_N(z)$ є раціональною функцією степеня n_N. Позначимо його знаменник і чисельник P_N and Q_N, відповідно, так що f_N має вигляд

$$f_N(z) = -\frac{Q_N(z)}{P_N(z)}, \quad (N \in \mathbb{N}). \tag{2.18}$$

Поліноми $P_N(z)$ та $Q_N(z)$ підхідного дробу $f_N(z)$ $\mathbf{P}-$ дробу (2.17) є розв'язками тричленного рекурентного співвідношення (1.46) з початковими умовами (1.47) (див. [89, Розділ 1]).

Асимптотичне розвинення (2.3) для функції $f_N(z)$ в (2.18) було доведено в [17, Пропозиція 6.1]. $\square$

2.2 Узагальнений S – дріб

2.2.1 Перетворення розгортання

Нехай функція $f(z)$ є мероморфною в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Тоді функція

$$\widetilde{f}(z) := zf(z^2) \tag{2.19}$$

називається розгортанням функції $f(z)$. Поряд з цим поняттям будемо використовувати такі поняття в класі послідовностей $\mathcal{H}$.

Означення 2.2 *Нехай $\boldsymbol{s} \in \mathcal{H}$. Тоді нова послідовність*

$$\widetilde{\boldsymbol{s}} = \{\widetilde{s}_i\}_{i=0}^{\infty}, \quad \textit{з} \quad \widetilde{s}_{2i} = s_i \ \textit{та} \ \widetilde{s}_{2i+1} = 0, \quad i \in \mathbb{Z}_+ \tag{2.20}$$

називається розгортанням послідовності $\boldsymbol{s}$.

Перетворення розгортання встановлює взаємно однозначну відповідність між класами $\mathcal{H}$ та

$$\mathcal{H}^{sym} := \{\widetilde{\mathbf{s}} \in \mathcal{H} : \ \widetilde{s}_{2i+1} = 0 \text{ для кожного } i \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{2.21}$$

Наступні два приклади виправдовують наведене вище Означення 2.2

Приклад 2.3 *Нагадаємо Означення 1.4, що функція $f \in \mathbf{N}$ належить до класу $\mathbf{S}$, якщо*

$$zf(z) \in \mathbf{N}. \tag{2.22}$$

Якщо функція $f(z)$ належить до класу $\mathbf{S}$, тоді за Теоремою М.Г. Крейна вона допускає голоморфної продовження в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ та її розгортання є також $\mathbf{N}-$функцією (див. [72]). Припустимо, що $f \in \mathbf{S}$ допускає наступне асимптотичне розвинення

$$f(z) \sim -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \cdots, \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{2.23}$$

з $s_i \in \mathbb{R}$ для кожного $i \in \mathbb{Z}_+$. Тоді розгортання $\widetilde{f}(z)$ функції $f(z)$ має наступне асимптотичне розвинення

$$\widetilde{f}(z) \sim -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^3} - \frac{s_2}{z^5} - \cdots, \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{2.24}$$

так що коефіцієнти (2.24) співпадають з коефіцієнтами $\widetilde{s}_i$ визначеними за (2.20). Тому

$$\widetilde{f}(z) \sim -\frac{\widetilde{s}_0}{z} - \frac{\widetilde{s}_1}{z^2} - \frac{\widetilde{s}_2}{z^3} - \cdots, \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{2.25}$$

та послідовність $\widetilde{\boldsymbol{s}}$ належить до класу

$$\mathcal{H}_0^{sym} := \{\widetilde{\boldsymbol{s}} \in \mathcal{H}_0 : \ \widetilde{s}_{2i+1} = 0 \textit{ для кожного } i \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{2.26}$$

Приклад 2.4 *Нехай функція f належить до класу $\mathbf{N}_\kappa^k$ (див. Означення 1.21).*

Як було показано в [58] розгортання $\widetilde{f}$ функції $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$, визначене за (2.19), *належить до класу $\mathbf{N}_{\kappa+k}^{sym}$. З іншого боку, якщо $\widetilde{f} \in \mathbf{N}_{\widetilde{\kappa}}^{sym}$, то існують $\kappa, k \in \mathbb{Z}_+$ і функція $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$, така,що (2.19) має місце та $\widetilde{\kappa} = \kappa + k$.*

Якщо $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$ і, крім того, f допускає асимптотичне розвинення (2.23) у куті

$$\varepsilon < arg\ z < 2\pi - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < \pi),$$

то $\boldsymbol{s} \in \mathcal{H}_{\kappa'}$, *де* $\kappa' \le \kappa$. *Розгортання* $\widetilde{f}$ *функції* f *має асимптотичне розвинення (2.25) в куті* $\varepsilon/2 < arg\ z < \pi - \varepsilon/2$, *де послідовність* $\widetilde{\boldsymbol{s}} = \{\widetilde{s}_i\}_{i=0}^{\infty}$ *є розгортанням послідовності* $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Так як $\widetilde{f} \in \mathbf{N}_{\kappa+k}^{sym}$, *то за [69] послідовність* $\widetilde{\boldsymbol{s}}$ *коефіцієнтів* $\widetilde{s}_i$ *в (2.25) належить до класу*

$$\mathcal{H}_{\kappa''}^{sym} := \{\widetilde{\boldsymbol{s}} \in \mathcal{H}_{\kappa''} :\ \widetilde{s}_{2i+1} = 0 \text{ для кожного } i \in \mathbb{Z}_+\} \qquad \text{з } \kappa'' \le \kappa + k. \tag{2.27}$$

Пропозиція 2.5 *Нехай* $\widetilde{\boldsymbol{s}} \in \mathcal{H}^{sym}$ *та* $\mathcal{N}(\widetilde{\boldsymbol{s}}) = \{\widetilde{n}_j\}_{j=1}^{\infty}$ *є множина нормальних індексів послідовності* $\widetilde{\mathbf{s}}$. *Тоді відповідний неперервний дріб*

$$-\cfrac{\widetilde{b}_0}{\widetilde{a}_0(z) - \cfrac{\widetilde{b}_1}{\widetilde{a}_1(z) - \cfrac{\widetilde{b}_2}{\widetilde{a}_2(z) - \dots}}} \tag{2.28}$$

має наступні властивості:

(1) поліноми $\widetilde{a}_j(z)$ *є непарними для всіх* $j \in \mathbb{Z}_+$;

(2) індекси $\widetilde{n}_{2j}$ *є парними та індекси* $\widetilde{n}_{2j+1}$ *є непарними для кожного* $j \in \mathbb{Z}_+$.

Доведення. Зафіксуємо деяке натуральне число N. Так як $\widetilde{\mathbf{s}} \in \mathcal{H}^{sym}$, то функція $g_0(z)$ визначена за (2.17) є непарною. Тому, всі поліноми $\widetilde{a}_0(z), \dots, \widetilde{a}_{N-1}(z)$ визначені за формулами (2.6), (2.12), (2.14) алгоритму Шура є також непарними.

В силу $\deg \widetilde{a}_j = \widetilde{n}_{j+1} - \widetilde{n}_j$, тоді індекси

$$\widetilde{n}_1 = \deg \widetilde{a}_0, \quad \dots, \quad \widetilde{n}_{2j+1} = \sum_{i=0}^{2j} \deg \widetilde{a}_i$$

є непарними та індекси

$$\widetilde{n}_2 = \deg \widetilde{a}_0 + \deg \widetilde{a}_1, \quad \dots, \quad \widetilde{n}_{2j} = \sum_{i=0}^{2j-1} \deg \widetilde{a}_j$$

є парними. Доведено. □

2.2.2 Побудова узагальненого S-дробу

Неперервний дріб (2.28) можна переписати у вигляді

$$-\cfrac{1}{a_0(z) - \cfrac{1}{a_1(z) - \cfrac{1}{a_2(z) - \ddots}}}, \tag{2.29}$$

де $a_0(z) = \widetilde{a}_0(z)/\widetilde{b}_0$ та

$$a_{2i-1}(z) = \frac{\widetilde{b}_0 ... \widetilde{b}_{2i-2}}{\widetilde{b}_1 ... \widetilde{b}_{2i-1}} \widetilde{a}_{2i-1}(z), \quad a_{2i}(z) = \frac{\widetilde{b}_1 ... \widetilde{b}_{2i-1}}{\widetilde{b}_0 ... \widetilde{b}_{2i}} \widetilde{a}_{2i}(z) \quad (i \in \mathbb{N}). \tag{2.30}$$

Позначимо

$$\mathbf{D}_n^{(\pm m)} = \det(s_{i+j\pm m})_{i,j=0}^{n-1}, \qquad (s_{-1} = \cdots = s_{-m} = 0,\ m \in \mathbb{N}). \tag{2.31}$$

Теорема 2.6 *Нехай $\boldsymbol{s} \in \mathcal{H}$, $\widetilde{\boldsymbol{s}}$ є розгортанням послідовності $\boldsymbol{s}$, $\mathcal{N}(\widetilde{\boldsymbol{s}}) = \{\widetilde{n}_j\}_{j=1}^{\infty}$ є множиною нормальних індексів послідовності $\widetilde{\boldsymbol{s}}$ та нехай ν_j і μ_j визначаються за наступними формулами*

$$\widetilde{n}_{2j-1} = 2\nu_j - 1 \quad \textit{та} \quad \widetilde{n}_{2j} = 2\mu_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.32}$$

Тоді:

(1) *множина нормальних індексів $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$ характеризується умовами: $\mathbf{D}_{\nu_j} \neq 0$ та $\mathbf{D}^{+}_{\nu_j - 1} \neq 0$ для кожного $j \in \mathbb{N}$;*

(2) *множина нормальних індексів $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ характеризується умовами: $\mathbf{D}_{\mu_j} \neq 0$ та $\mathbf{D}^{+}_{\mu_j} \neq 0$ для кожного $j \in \mathbb{N}$;*

(3) *$\mathcal{N}(\boldsymbol{s})$ є об'єднанням двох множин $\{\nu_j\}_{j=1}^{\infty}$ та $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, таких, що*

$$0 < \nu_1 \leq \mu_1 < \nu_2 \leq \mu_2 < \ldots; \tag{2.33}$$

(4) *Якщо поліноми $m_j(z)$ та $l_j(z)$ визначені за формулою*

$$z a_{2(j-1)}(z) = z^2 m_j(z^2) \quad \textit{та} \quad \frac{a_{2j-1}(z)}{z} = l_j(z^2), \quad j \in \mathbb{N}, \tag{2.34}$$

то $m_j(z)$ та $l_j(z)$ є поліномами степеня

$$\textit{deg}\, m_j = \nu_j - \mu_{j-1} - 1, \quad \deg l_j = \mu_j - \nu_j, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{2.35}$$

та $\boldsymbol{P}-$ дріб (2.29) можна переписати у вигляді

$$-\cfrac{1}{zm_1(z) - \cfrac{1}{l_1(z) - \cfrac{1}{zm_2(z) - \ddots}}}. \tag{2.36}$$

(5) *Підхідний дріб φ_{2N} $(N \in \mathbb{N})$ неперервного дробу (2.28) має наступне асимптотичне розвинення*

$$\varphi_{2N}(z) \sim -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \cdots - \frac{s_{2\mu_N - 1}}{z^{2\mu_N}} + O\left(\frac{1}{z^{2\mu_N + 1}}\right), \quad z \widehat{\rightarrow} \infty. \tag{2.37}$$

Доведення. (1) та (2). Покладемо

$$\widetilde{\mathbf{D}}_n = \det\,(\widetilde{s}_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}. \tag{2.38}$$

Як було показано в [55, Лема 1.33]

$$\widetilde{\mathbf{D}}_{2\nu_j-1} = \mathbf{D}_{\nu_j}\mathbf{D}^+_{\nu_j-1}, \qquad \widetilde{\mathbf{D}}_{2\mu_j} = \mathbf{D}_{\mu_j}\mathbf{D}^+_{\mu_j}. \tag{2.39}$$

Це доводить твердження (1) та (2).

(3) Вочевидь, $\nu_j, \mu_j \in \mathcal{N}(\mathbf{s})$ для кожного $j \in \mathbb{N}$. З іншого боку, якщо n є нормальним індексом послідовності $\mathbf{s}$, то, принаймні один з визначників $\mathbf{D}^+_n$ або $\mathbf{D}^+_{n-1}$ не дорівнює нулю. Дійсно, якщо $\mathbf{D}^+_n = \mathbf{D}^+_{n-1} = 0$, то це випливає з тотожності Сильвестра

$$\mathbf{D}_n^2 = \mathbf{D}^+_n\mathbf{D}^-_n - \mathbf{D}^-_{n+1}\mathbf{D}^+_{n-1} \tag{2.40}$$

що $\mathbf{D}_n$ повинен дорівнювати 0, що суперечить тому, що n є нормальним індексом послідовності $\mathbf{s}$. Тому, або $\mathbf{D}^+_{n-1} \neq 0$ або $\mathbf{D}^+_n \neq 0$ і, отже, або $\mathbf{D}_{2n-1} \neq 0$ або $\mathbf{D}_{2n} \neq 0$, відповідно. У першому випадку $n = \nu_j$ для деякого $j \in \mathbb{N}$, та у другому випадку $n = \mu_j$ для деякого $j \in \mathbb{N}$. Це доводить першу частину твердження (3).

Нехай n є першим нормальним індексом послідовності $\mathbf{s}$. Якщо $n = 1$, то $s_0 \neq 0$ і, отже, обидва $\mathbf{D}_1 = s_0$ та $\mathbf{D}^+_0 = 1$ не дорівнюють 0. Тому n співпадає з $\nu_1 = 1$. Якщо $n > 1$, то

$$s_0 = \cdots = s_{n-2} = 0, \quad s_{n-1} \neq 0.$$

З цього випливає, що $\mathbf{D}^+_{n-1} \neq 0$ і отже n співпадає з ν_1 за твердженням (1).

З нерівності

$$\widetilde{n}_{2j-1} < \widetilde{n}_{2j}$$

та з рівності (2.32) випливає, що $\nu_j < \mu_j + 1/2$ і отже $\nu_j \leq \mu_j$ для кожного $j \in \mathbb{N}$.

Аналогічним чином, нерівність

$$\widetilde{n}_{2j} < \widetilde{n}_{2j+1}$$

та рівність (2.32) означають, що $\mu_j < \nu_{j+1} - 1/2$ та отже $\mu_j < \nu_{j+1}$ для кожного $j \in \mathbb{N}$. Це завершує доведення (3).

(4) Так як поліноми $a_{2(j-1)}(z)$ та $a_{2j-1}(z)$ є непарними, то поліноми $za_{2(j-1)}(z)$ та $\dfrac{a_{2j-1}(z)}{z}$ є парними та допускають представлення (2.34). Формула (2.36) безпосередньо випливає з (2.19), (2.29) та (2.34).

Оскільки $\deg a_j = \widetilde{n}_{j+1} - \widetilde{n}_j$, то з (2.34) слідує, що

$$\begin{aligned}\deg m_j = \tfrac{1}{2}\,(\deg a_{2j-2} - 1) = \tfrac{1}{2}\,(\widetilde{n}_{2j-1} - \widetilde{n}_{2j-2} - 1) = \\ = \tfrac{1}{2}\,(2\nu_j - 1 - 2\mu_{j-1} - 1) = \nu_j - \mu_{j-1} - 1,\end{aligned}$$

$$\deg l_j = \tfrac{1}{2}\left(\deg a_{2j-1} - 1\right) = \tfrac{1}{2}\left(\widetilde{n}_{2j} - \widetilde{n}_{2j-1} - 1\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(2\mu_j - 2\nu_{j-1}\right) = \mu_j - \nu_j.$$

(5) За Теоремою 2.1 $2j$-тий підхідний дріб $\widetilde{f}_{2j}(z)$ P-дробу (2.11) має наступне асимптотичне розвинення

$$\widetilde{f}_{2j}(z) \sim -\frac{\widetilde{s}_0}{z} - \frac{\widetilde{s}_1}{z^2} - \cdots - \frac{\widetilde{s}_{2\widetilde{n}_{2j}-1}}{z^{2\widetilde{n}_{2j}}} + O\left(\frac{1}{z^{2\widetilde{n}_{2j}+1}}\right) \quad (z\widehat{\to}\infty). \tag{2.41}$$

Оскільки $\widetilde{n}_{2i} = 2\mu_i$, $\widetilde{s}_0 = s_0$, $\widetilde{s}_1 = 0$, $\widetilde{s}_2 = s_1$, …, $\widetilde{s}_{2\widetilde{n}_{2j}-2} = s_{2\mu_j-1}$ та $\widetilde{s}_{2\widetilde{n}_{2j}-1} = 0$, то асимптотичне розвинення (2.41) має вигляд

$$\widetilde{f}_{2j}(z) \sim -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^3} - \cdots - \frac{s_{2\mu_j-1}}{z^{4\mu_j-1}} + O\left(\frac{1}{z^{4\mu_j+1}}\right) \quad (z\widehat{\to}\infty). \tag{2.42}$$

$2j$-тий підхідний дріб $\varphi_{2j}(z)$ $\mathbf{S}$-дробу (2.36) пов'язаний з $2j$-тим підхідним дробом $\widetilde{f}_{2j}(z)$ P-дробу (2.11) наступним чином

$$\widetilde{f}_{2j}(z) = z\varphi_{2j}(z^2).$$

Отже, з огляду на (2.20) розвинення (2.42) можна переписати у вигляді

$$\varphi_{2j}(z^2) \sim -\frac{s_0}{z^2} - \frac{s_1}{z^4} - \cdots - \frac{s_{2\mu_j-1}}{z^{4\mu_j}} + O\left(\frac{1}{z^{4\mu_j+2}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty, \tag{2.43}$$

що еквівалентно (2.37). $\square$

Зауваження 2.7 *Твердження (3) Теореми 2.6 доведено в [22, Розділ 5.2] використовуючи наступне спостереження з [22, Лема 5.1]*

Якщо $\mathbf{D}_n \neq 0$, $\mathbf{D}_{n+1} = \cdots = \mathbf{D}_{m-1} = 0$, $\mathbf{D}_m \neq 0$, то має місце наступна альтернатива:

1. *або $\mathbf{D}^+_n = 0$ і тоді $\mathbf{D}^+_{n-1} \neq 0$, $\mathbf{D}^+_n = \mathbf{D}^+_{n+1} \cdots = \mathbf{D}^+_{m-1} = 0$, $\mathbf{D}^+_m \neq 0$.*
2. *або $\mathbf{D}^+_n \neq 0$ і тоді $\mathbf{D}^+_n \neq 0$, $\mathbf{D}^+_{n+1} = \cdots = \mathbf{D}^+_{m-2} = 0$, $\mathbf{D}^+_{m-1} \neq 0$.*

Наведене доведення є заснованим на тотожностях (2.39), які роблять його значно простіше.

2.3 Регулярний клас $\mathcal{H}^{reg}$

Означення 2.8 *Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell}$ ($\ell \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$). $\mathcal{H}^k_\kappa$ є множина послідовностей $\mathbf{s}$ таких, що*

(1) матриця Ганкеля $S_\ell = (s_{i+j})_{i,j=0}^{\ell-1}$ має κ від'ємних квадратів;

(2) матриця Ганкеля $S^+_\ell = (s_{i+j+1})_{i,j=0}^{\ell-1}$ *має* k *від'ємних квадратів.*

Лема 2.9 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^\infty \in \mathcal{H}$, $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ *є множина нормальних індексів послідовності* $\mathbf{s}$ *та* $\{P_i(z)\}_{i=1}^\infty$ *послідовність поліномів першого роду асоційованих до* $\mathbf{s}$. *Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

(1) $P_i(0) \neq 0$ *для кожного* $i \in \mathbb{N}$;

(2) $\mathbf{D}^+_{n_j-1} \neq 0$ *для кожного* $j \in \mathbb{N}$;

(3) $\mathbf{D}^+_{n_j} \neq 0$ *для кожного* $j \in \mathbb{N}$;

(4) n_j *є нормальним індексом* $\{s_{j+1}\}_{j=0}^\infty$ *для кожного* $j \in \mathbb{N}$;

(5) $n_j - 1$ *є нормальним індексом* $\{s_{i+1}\}_{i=0}^\infty$ *для кожного* $j \in \mathbb{N}$;

(6) *множина нормальних індексів* $\{s_{i+1}\}_{i=0}^\infty$ *співпадає з*

$$\bigcup_{j=1}^\infty \{n_j - 1, n_j\}. \tag{2.44}$$

Доведення. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Еквівалентність (1) $\Leftrightarrow$ (2) випливає з (1.37) так, як

$$P_j(0) = (-1)^{n_j+1}\frac{\mathbf{D}^+_{n_j}}{\mathbf{D}_{n_j}} = \frac{(-1)^{n_j+1}}{\mathbf{D}_{n_j}}\begin{vmatrix} s_1 & \cdots & s_{n_j} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n_j} & \cdots & s_{2n_j-1}\end{vmatrix} \qquad (j = 1, 2, \dots). \tag{2.45}$$

Нормальні індекси n_j послідовності $\mathbf{s}$ співпадають з числами μ_j, які визначені за формулою (2.32), ($j = 1, 2, \dots$). Таким чином, індекси ν_j, визначені за формулою (2.32) задовольняють наступній рівності

$$\nu_j = \mu_j = n_j \qquad (j = 1, 2, \dots). \tag{2.46}$$

Отже,

$$\mathbf{D}^+_{n_j} \neq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots). \tag{2.47}$$

І навпаки, якщо умова (3) має місце, то $\{n_j\}_{j=0}^\infty = \{\nu_j\}_{j=0}^\infty$, тому $\mu_j = \nu_j = n_j$ ($j = 1, 2, \dots$). Це призводить до умови (2).

Еквівалентності (3) $\Leftrightarrow$ (4), (2) $\Leftrightarrow$ (5) випливають з означення нормальних індексів.

Імплікація (6) $\Rightarrow$ (4) очевидна. Доведемо імплікацію (4) $\Rightarrow$ (6). Якщо умова (4) має місце, то

$$\mathbf{D}_{n_{j-1}} \neq 0, \quad \mathbf{D}_{n_{j-1}+1} = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{D}_{n_j-1} = 0, \quad \mathbf{D}_{n_j} \neq 0, \quad (j = 2, 1, \dots). \tag{2.48}$$

В силу (2), (3) $\mathbf{D}^+_{n_{j-1}} \neq 0$, $\mathbf{D}^+_{n_j-1} \neq 0$ та за Зауваженням 2.7 отримуємо

$$\mathbf{D}^+_{n_{j-1}} \neq 0, \quad \mathbf{D}^+_{n_{j-1}+1} = 0, \quad \dots, \quad \mathbf{D}^+_{n_j-2} = 0, \quad \mathbf{D}^+_{n_j-1} \neq 0, \quad \mathbf{D}^+_{n_j} \neq 0. \tag{2.49}$$

Таким чином, є тільки два нормальних індексів n_j-1 та n_j в інтервалі $(n_{j-1}, n_j]$, тобто $\mathcal{N}(\widetilde{s}) = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\{n_j-1, n_j\}$. $\Box$

Означення 2.10 *Говорять, що* $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$, *якщо* $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$ *і одна з еквівалентних умов Леми 2.9 має місце.*

Пропозиція 2.11 *Нехай* $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$ *та* m_j, l_j *визначені за* $S-$*дробом (2.36). Тоді*

$$\deg m_1 = n_1 - 1, \quad \deg m_j = n_j - n_{j-1} - 1 \quad \text{та} \quad \deg l_j = 0 \qquad (j \in \mathbb{N}). \quad (2.50)$$

2.4 Зв'язок між узагальненими S–дробом та P–дробом.

Будь-яка послідовність $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$ відповідає $\mathbf{P}$–дробу (2.28) побудованому в Теоремі 2.1 та узагальненому$\mathbf{S}$–дробу (2.36), який був побудований в Теоремі 2.6. У випадку, коли $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$ буде знайдено явні формули, що зв'язують ці два типи неперервних дробів.

Нехай $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$. Можна переписати неперервний дріб (2.36), як

$$\cfrac{1}{-zm_1(z) + \cfrac{1}{l_1(z) + \cfrac{1}{-zm_2(z) + \dots}}}. \quad (2.51)$$

Якщо j–тий підхідний дріб неперервного дробу позначити $\frac{u_j}{v_j}$, то u_j, v_j можна знайти як розв'язки системи (див. [89, Розділ 1])

$$\begin{cases} y_{2j} - y_{2j-2} = l_j(z) y_{2j-1}, \\ y_{2j+1} - y_{2j-1} = -zm_{j+1}(z) y_{2j} \end{cases} \quad (2.52)$$

з наступними початковими умовами

$$u_{-1} \equiv 1, \quad u_0 \equiv 0; \qquad v_{-1} \equiv 0, \quad v_0 \equiv 1. \quad (2.53)$$

Перші два підхідних дроби неперервного дробу (2.51) мають наступний вигляд

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{1}{-zm_1(z)}, \qquad \frac{u_2}{v_2} = \frac{l_1(z)}{-zl_1(z)m_1(z) + 1}, \quad (2.54)$$

Нехай t_j є дробово-лінійне перетворення, яке визначається за формулами

$$t_{2j-1}(w) = \frac{1}{-zm_j(z) + w}, \quad t_{2j} = \frac{1}{l_j(z) + w} \quad (j \in \mathbb{N}). \quad (2.55)$$

Тоді $2j-$тий підхідний дріб $\mathbf{S}-$дробу (2.51) може бути представлений у вигляді

$$\frac{u_{2j}}{v_{2j}} = t_1 \circ t_2 \circ \dots \circ t_{2j}(0). \quad (2.56)$$

Наступна теорема встановлює зв'язок між неперервними дробами (2.28) та (2.51) у випадку, коли $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$.

Теорема 2.12 *Нехай* $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$. *Тоді* $2j-$*тий підхідний дріб* $\frac{u_{2j}}{v_{2j}}$ *узагальненого* $\mathbf{S}-$*дробу (2.51) співпадає з* $j-$*тим підхідним дробом* $\mathbf{P}-$*дробу* (2.28)

$$\frac{u_{2j}}{v_{2j}} = -\cfrac{b_0}{a_0(z) - \cfrac{b_1}{a_1(z) - \cdots - \cfrac{b_{j-1}}{a_{j-1}(z)}}}, \tag{2.57}$$

асоційованого з $\mathbf{s}$. *Параметри* l_j *та* $m_j(z)$ $(j \in \mathbb{Z}_+)$ *узагальненого* $\mathbf{S}$-*дробу (2.51) пов'язані з параметрами* b_j *та* $a_j(z)$ $(j \in \mathbb{N})$ $\mathbf{P}$-*дробу* (2.28) *за формулами*

$$b_0 = \frac{1}{d_1}, \quad a_0(z) = \frac{1}{d_1}\left(zm_1(z) - \frac{1}{l_1}\right), \tag{2.58}$$

$$b_{j-1} = \frac{1}{l_{j-1}^2 d_{j-1} d_j}, \quad a_{j-1} = \frac{1}{d_j}\left(zm_j(z) - \left(\frac{1}{l_{j-1}} + \frac{1}{l_j}\right)\right) \quad (j = 2, 3, \dots), \tag{2.59}$$

де d_j *є старший коефіцієнт полінома* $m_j(z)$ $(j \in \mathbb{N})$.

Доведення. Покладемо

$$s_1(w) = t_1(w), \quad s_2(w) = t_2 \circ t_3(w), \dots, s_j(w) = t_{2j-2} \circ t_{2j-1}(w). \tag{2.60}$$

Визначимо $\widetilde{m}_i(z) := \dfrac{1}{d_i} m_i(z)$. Тоді за (2.56) та (2.60)

$$s_i(w) = \cfrac{1}{l_{i-1} + \cfrac{1}{-zm_i(z) + w}} = \frac{1}{l_{i-1}} - \frac{1}{l_{i-1}(1 - zl_{i-1}m_i(z) + l_{i-1}w)} = \tag{2.61}$$

$$= \frac{1}{l_{i-1}} - \frac{\frac{1}{l_{i-1}^2 d_i}}{-z\widetilde{m}_i(z) + \frac{1}{l_{i-1}d_i} + \frac{1}{d_i}w} = \frac{1}{l_{i-1}} + \frac{\frac{1}{l_{i-1}^2 d_i}}{\frac{1}{d_i}\left(z\widetilde{m}_i(z) - \frac{1}{l_{i-1}} - w\right)},$$

Що випливає з (2.55), (2.56) та (2.60)

$$\frac{u_{2j}}{v_{2j}} = s_1 \circ s_2 \circ \dots \circ s_j\left(\frac{1}{l_j}\right). \tag{2.62}$$

Зокрема,

$$\frac{u_2}{v_2} = s_1\left(\frac{1}{l_1}\right) = \frac{-1/d_1}{z\widetilde{m}_1(z) - \frac{1}{l_1 d_1}} \tag{2.63}$$

$$\frac{u_4}{v_4} = s_1 \circ s_2\left(\frac{1}{l_j}\right) = \cfrac{-1/d_1}{z\widetilde{m}_1(z) - \cfrac{1}{l_1 d_1} - \cfrac{\frac{1}{l_1^2 d_1 d_2}}{z\widetilde{m}_2(z) - \frac{1}{d_2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)}} \tag{2.64}$$

Підставляючи (2.61) до (2.62), отримуємо

$$\frac{u_{2j}}{v_{2j}} = -\cfrac{\beta_0}{\alpha_0(z) - \cfrac{\beta_1}{\alpha_1(z) - \cdots - \cfrac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1}(z)}}}, \tag{2.65}$$

де

$$\beta_0 = \frac{1}{d_1}, \quad \alpha_0(z) = \frac{1}{d_1}\left(zm_1(z) - \frac{1}{l_1}\right), \tag{2.66}$$

$$\beta_{j-1} = \frac{1}{l_{j-1}^2 d_{j-1} d_j}, \quad \alpha_{j-1}(z) = \frac{1}{d_j}\left(zm_j(z) - \left(\frac{1}{l_{j-1}} + \frac{1}{l_j}\right)\right), \ (j = 2, 3, \dots). \tag{2.67}$$

Нехай $f_j(z)$ є j-тий підхідний дріб $\mathbf{P}$-дробу (2.11) та нехай $\varphi_{2j}(z)$ є $2j$-тий підхідний дріб $\mathbf{S}$-дробу (2.36). Функції $f_j(z) = -\dfrac{Q_{n_j}(z)}{P_{n_j}(z)}$ та $\varphi_{2j}(z) = \dfrac{u_{2j}}{v_{2j}}$ є раціональними функціями степеня n_j, які мають асимптотичні розвинення (2.3) та (2.37).

Оскільки за Лемою 2.9 $n_j = \mu_j$, то ці асимптотичні розвинення збігаються і, отже, функції $f_j(z)$ та $\varphi_{2j}(z)$ співпадають, оскільки вони однозначно визначаються розвиненнями (2.3) та (2.37). Оскільки розвинення $\mathbf{P}$–дробу є єдиним, то

$$b_j = \beta_j \quad \text{та} \quad a_j(z) = \alpha_j(z) \quad (j \in \mathbb{Z}_+).$$

Це доводить (2.57). □

Наслідок 2.13 *Нехай виконані умови Теореми 2.12. Тоді поліноми $m_j(z)$ можуть бути записані в термінах $a_{j-1}(z)$ за формулами*

$$\frac{m_j(z)}{d_j} = \frac{a_{j-1}(z) - a_{j-1}(0)}{z}, \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{2.68}$$

Більш того, мають місце наступні формули

$$\prod_{i=1}^{j} (l_i d_i)^{-1} = (-1)^j P_{n_j}(0) \quad (j \in \mathbb{N}), \tag{2.69}$$

$$l_j = \frac{(-1)^j}{P_{n_{j-1}}(0) P_{n_j}(0)} \prod_{i=0}^{j-1} b_i, \quad d_j = (P_{n_{j-1}}(0))^2 \prod_{i=0}^{j-1} b_i^{-1} \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{2.70}$$

$$b_0 \dots b_j = \frac{1}{d_{j+1}} \prod_{i=1}^{j} \left(\frac{1}{d_i l_i}\right)^2 \quad (j = 1, \dots, N-1), \tag{2.71}$$

Доведення. Формула (2.68) випливає безпосередньо з (2.59).

З тричленного рекурентного співвідношення (1.46), (2.58) та (2.59), отримуємо

$$P_1(0) = a_0(0) = -\frac{1}{l_1 d_1};$$

Оскільки $a_1(0) = -\frac{1}{d_2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$ та $b_1 = \frac{1}{l_1^2 d_1 d_2}$, тоді

$$P_2(0) = -\frac{1}{d_2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\left(-\frac{1}{l_1 d_1}\right) - \frac{1}{l_1^2 d_1 d_2} = \frac{1}{l_1 d_1}\frac{1}{l_2 d_2}.$$

Рівність (2.69) отримуємо за індукцією.

Рівності в (2.70) випливають з (2.59) та (2.69). □

Наслідок 2.14 *Нехай виконані умови Теореми 2.12 Тоді розв'язки* $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ *та* $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ *системи* (2.52)–(2.53) *мають вигляд*

$$u_{2j} = -\frac{Q_{n_j}(z)}{P_{n_j}(0)} \quad u_{2j-1} = -\gamma_j \begin{vmatrix} Q_{n_j}(z) & Q_{n_{j-1}}(z) \\ P_{n_j}(0) & P_{n_{j-1}}(0) \end{vmatrix} \quad (j \in \mathbb{N}), \tag{2.72}$$

$$v_{2j} = \frac{P_{n_j}(z)}{P_{n_j}(0)} \quad v_{2j-1} = \gamma_j \begin{vmatrix} P_{n_j}(z) & P_{n_{j-1}}(z) \\ P_{n_j}(0) & P_{n_{j-1}}(0) \end{vmatrix} \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{2.73}$$

де $\gamma_j = (-1)^{n_j + n_{j-1}} \frac{D_{n_{j-1}}}{D_{n_j}}$ *(*$j \in \mathbb{N}$*);*

Доведення. j-тий підхідний дріб P-дробу (2.28) дорівнює $-\frac{Q_{n_j}(z)}{P_{n_j}(z)}$ (за Теоремою 2.1) та дорівнює $\frac{u_{2j}}{v_{2j}}$ (за Теоремою 2.12). Так як

$$\deg v_{2j}(z) = \deg P_{n_j}(z) = n_j,$$

то $v_{2j}(z)$ пропорційно до $P_{n_j}(z)$ та $u_{2j}(z)$ пропорційно до $-Q_{n_j}(z)$. Тому перша формула в (2.72) та (2.73) випливає з умови нормалізації $v_{2j}(0) = 1$ $(j \in \mathbb{N})$. Друга формула (2.73) випливає з першої рівності (2.52), яка приймає вигляд

$$\frac{P_{n_j}(z)}{P_{n_j}(0)} - \frac{P_{n_{j-1}}(z)}{P_{n_{j-1}}(0)} = l_j v_{2j-1}(z) \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Тому

$$v_{2j-1}(z) = \frac{1}{l_j P_{n_j}(0) P_{n_{j-1}}(0)} \begin{vmatrix} P_{n_j}(z) & P_{n_{j-1}}(z) \\ P_{n_j}(0) & P_{n_{j-1}}(0) \end{vmatrix} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Друга формула в (2.73) випливає з (2.45) та (2.75) (див. Зауваження 2.15 нижче). Аналогічним чином доводиться друга формула в (2.72). □

Зауваження 2.15 *Явні формули для обчислення коефіцієнтів поліномів $l_j(z)$ та $m_j(z)$ в (2.52) ($j \in \mathbb{N}$) в термінах послідовності $\mathbf{s} = (s_i)_{i=0}^{\infty}$ наведено в [22]. Запишемо формули для l_j та d_j ($j \in \mathbb{N}$) у випадку, коли $\mathbf{s} = (s_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{H}^{reg}$, і тому $\nu_j = \mu_j = n_j$ ($j \in \mathbb{N}$). Тоді $d_1 = 1/s_{n_1-1}$ та*

$$l_j = \frac{D_{n_j}^-}{D_{n_j-1}^+} - \frac{D_{n_j+1}^-}{D_{n_j}^+}, \quad d_{j+1} = \frac{D_{n_j}^{(k_j+1)}}{D_{n_j+1}^{(k_j-1)}} - \frac{D_{n_j-1}^{(k_j+1)}}{D_{n_j}^{(k_j-1)}} \quad (j \in \mathbb{N}), \tag{2.74}$$

де $k_j = \deg m_{j+1} - 1 = \mu_{j+1} - \mu_j$ ($j \in \mathbb{N}$) та $D_n^{(\pm 1)}$ визначені за формулою (2.31). *За тотожністю Сильвестра* (2.40) *наведені вище формули приймають вигляд*

$$l_j = \frac{D_{n_j}^2}{D_{n_j}^+ D_{n_j-1}^+}, \quad d_{j+1} = \frac{\left(D_{n_j}^{(k_j)}\right)^2}{D_{n_j}^{(k_j-1)} D_{n_j+1}^{(k_j-1)}} \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{2.75}$$

В класичному випадку $\mathbf{s} = (s_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{H}_0^0 \subset \mathcal{H}^{reg}$ має місце

$$\nu_j = \mu_j = n_j, \quad k_j = 1 \quad (j \in \mathbb{N})$$

та формули (2.75) *співпадають з відомими формулами для довжин l_j та мас m_j для струни Стілт'єса, див. [69, (3.15)]:*

$$l_j = \frac{D_j^2}{D_j^+ D_{j-1}^+}, \quad d_j = m_j = \frac{\left(D_{j-1}^+\right)^2}{D_{j-1} D_j} \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{2.76}$$

У випадку коли $k_j = 2$, остання формула в (2.75) *співпадає з формулою d_j з [71, Розділ 5.3]:*

$$d_{j+1} = \frac{\left(D_{n_j}^{(2)}\right)^2}{D_{n_j}^+ D_{n_j+1}^+} = -\frac{D_{n_j}^+ D_{n_j+1}^+}{D_{n_j} D_{n_j+2}} \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{2.77}$$

Підсумуємо ці результати у випадку, коли $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$ та $k_j = 2$ для кожного $j \in \mathbb{N}$, тобто відповідна струна Стілт'єса складається з диполів (див. [71, Розділ 5.4]).

Пропозиція 2.16 *Якщо $\mathbf{s} = (s_i)_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{H}^{reg}$ та $k_j = 2$ для кожного $j \in \mathbb{N}$, то:*

(1) нормальні індекси послідовності $\mathbf{s}$ є $\nu_j = \mu_j = n_j = 2j$ та $m_j(z)$ є поліномами степеня 1 та

$$m_j(z) = d_j z + m_j \quad \text{для деяких} \quad d_j, m_j \in \mathbb{R} \quad (j \in \mathbb{N}); \tag{2.78}$$

(2) відповідний узагальнений дріб Стілт'єса приймає форму

$$-\cfrac{1}{d_1z^2+m_1z-\cfrac{1}{l_1-\cfrac{1}{d_2z^2+m_2z-\cfrac{1}{l_2\ldots}}}}; \tag{2.79}$$

де коефіцієнти d_j, m_j, and l_j можна знайти за наступними формулами $d_1 = 1/s_1$ та

$$d_j = \frac{\left(D^{(2)}_{2j-2}\right)^2}{D^+_{2j-2}D^+_{2j-1}}, \quad m_j = \frac{D^{(2)}_{2j-1}}{D_{2j}} - \frac{D^{(2)}_{2j-3}}{D_{2j-2}}, \quad l_j = \frac{D^2_{2j}}{D^+_{2j}D^+_{2j-1}} \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{2.80}$$

(3) Розв'язки $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ системи (3.120), (3.121) мають наступний вигляд

$$v_{2j}(z) = \frac{P_{2j}(z)}{P_{2j}(0)} \quad v_{2j-1}(z) = -\frac{D_{2j-1}}{D_{2j}}\begin{vmatrix} P_{2j}(z) & P_{2j-2}(z) \\ P_{2j}(0) & P_{2j-2}(0) \end{vmatrix} \quad (j \in \mathbb{N}). \tag{2.81}$$

Доведення. Оскільки $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$, то $\nu_j = \mu_j = n_j$. Рівність $n_j = 2j$ випливає з формули $k_j = n_j - n_{j-1}$ та припущення $k_j = 2$.

З цього припущення випливає також, що $\deg m_{j+1} = k_j - 1 = 1$ для кожного $j \in \mathbb{N}$. Підставляючи (2.78) до (2.51) отримуємо (2.79).

Формули (2.80) випливають з (2.75) та [22, (5.19)]. □

2.5 Висновки

Результати глави були представлені в [27].

Введено новий клас узагальнених дробів Стілт'єса ($\mathbf{S}$ – дробів). Встановлено, що кожна послідовність дійсних чисел $\mathbf{s}$ (класу $\mathcal{H}$) відповідає деякому узагальненому дробу Стілт'єса. Введено клас $\mathcal{H}^{reg}$ регулярних послідовностей $\mathbf{s}$ і для послідовностей $\mathbf{s}$ з класу $\mathcal{H}^{reg}$ знайдено зв'язок між відповідним – дробом та узагальненим $\mathbf{S}$ – дробом. Отримано систему різницевих рівнянь, яка відповідає $\mathbf{S}$ – дробу.

3 Проблема моментів в узагальнених класах Стілт'єса

У наступних двох розділах позначення $\mathcal{H}$ та $\mathcal{H}^{reg}$ буде поширене на множину, як скінчених $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell}$ так і нескінченних послідовностей.

3.1 Постановка проблеми моментів

Проблема $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, \ell)$. Нехай задані $\ell, \kappa, k \in \mathbb{Z}_+$, та послідовність дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell}$. Описати множину $\mathcal{M}_\kappa^k(\mathbf{s})$ функцій $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$, які мають наступне асимптотичне розвинення

$$f(z) = -\frac{s_0}{z} - \cdots - \frac{s_\ell}{z^{\ell+1}} + o\left(\frac{1}{z^{\ell+1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty. \tag{3.1}$$

Така проблема моментів називається *парною* або *непарною* в залежності від до непарності числа $\ell + 1$ обраних моментів. Для дослідження цієї проблеми використовуємо алгоритм Шура, який був розроблений в [2], [14] та [17] для класу $\mathbf{N}_\kappa$. Застосування алгоритму Шура до виродженої проблеми моментів у класі $\mathbf{N}_\kappa$ було наведено в роботі [26].

3.2 Нормальні індекси

Нехай $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{N}$ є множина нормальних індексів послідовності $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{\ell}$, яка визначається умовами

$$\det S_{n_j} \neq 0 \quad (j \in \{1, 2, \ldots, N\}). \tag{3.2}$$

Множина $\mathcal{N}(\mathbf{s})$ є об'єднанням двох можливо перетинаючихся підмножин

$$\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{\nu_j\}_{j=1}^{N_1} \cup \{\mu_j\}_{j=1}^{N_2}, \tag{3.3}$$

які обираються наступним чином

$$\det S_{\nu_j} \neq 0 \quad \text{та} \quad \det S_{\nu_j - 1}^{+} \neq 0, \qquad \text{для кожного } j = \overline{1, N_1} \tag{3.4}$$

та

$$\det S_{\mu_j} \neq 0 \quad \text{й} \quad \det S_{\mu_j}^{+} \neq 0, \qquad \text{для кожного } j = \overline{1, N_2}. \tag{3.5}$$

Доведення цих фактів (див. [27, Пропозиції 3.1]) випливає з тотожності Сильвестра

$$D_n^2 = \det S_n^+ \det S_n^- - \det S_{n-1}^+ \det S_{n+1}^-, \tag{3.6}$$

де $S_n^- := (s_{i+j-1})_{i,j=0}^{n-1}$ та $s_{-1} := 0$. Дійсно, якщо n є нормальним індексом послідовності $\mathbf{s}$, то $D_n \neq 0$ та в силу (3.6) принаймні один з визначників $\det S_n^+$ або $\det S_{n-1}^+$ не дорівнює нулю.

Більш того (див. [27, Пропозицію 3.1]), нормальні індекси ν_j та μ_j задовольняють наступним нерівностям

$$0 < \nu_1 \le \mu_1 < \nu_2 \le \mu_2 < \dots \tag{3.7}$$

Зауваження 3.1 *Якщо функція $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$ має асимптотичне розвинення* (3.1), *з $\ell = 2\mu_j - 1$ та μ_j задовольняють* (3.5), *то*

$$\nu_-(S_{\mu_j}) \le \kappa, \quad \nu_-(S_{\mu_j}^+) \le k. \tag{3.8}$$

Якщо функція $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$ має асимптотичне розвинення (3.1), *з $\ell = 2\nu_j - 2$ та ν_j задовольняють* (3.4), *то*

$$\nu_-(S_{\nu_j}) \le \kappa, \quad \nu_-(S_{\nu_j-1}^+) \le k. \tag{3.9}$$

Звернемо увагу, що ν_1 можна знайти з умов

$$s_0 = \dots = s_{\nu_1-2} = 0, \quad s_{\nu_1-1} \neq 0, \tag{3.10}$$

бо для такого ν_1 маємо $\det S_i = 0$ для $i \le \nu_1$ та

$$\det S_{\nu_1} \neq 0 \quad 1 \quad \det S_{\nu_1-1}^+ \neq 0. \tag{3.11}$$

Тому перший нормальний індекс послідовності $\mathbf{s}$ співпадає з ν_1, тобто $n_1 = \nu_1$.

3.3 Матриці Тьопліца та асимптотичне розвинення

Послідовність дійсних чисел $(c_0, \dots, c_n)$ визначає верхню трикутну матрицю Тьопліца $T(c_0, \dots, c_n)$ розміру $(n+1) \times (n+1)$ з елементами $t_{i,j} = c_{j-i}$ для $i \le j$ та $t_{i,j} = 0$ для $i > j$:

$$T(c_0, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} c_0 & \dots & c_n \\ & \ddots & \vdots \\ & & c_0 \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Деякі обчислення цієї роботи ґрунтуються на наступній лемі.

Лема 3.2 *Нехай функції c та d (мероморфні в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) мають наступні асимптотичні розвинення*

$$\begin{aligned} c(z) &= c_0 + \tfrac{c_1}{z} + \dots + \tfrac{c_n}{z^n} + o\left(\tfrac{1}{z^n}\right), \quad z \widehat{\rightarrow} \infty; \\ d(z) &= d_0 + \tfrac{d_1}{z} + \dots + \tfrac{d_n}{z^n} + o\left(\tfrac{1}{z^n}\right), \quad z \widehat{\rightarrow} \infty. \end{aligned} \tag{3.13}$$

та нехай $c(z)d(z) = 1$. *Тоді матриці Тьопліца* $T(c_0,\dots,c_n)$ *та* $T(d_0,\dots,d_n)$ *пов'язані наступним чином*

$$T(c_0,\dots,c_n)T(d_0,\dots,d_n) = I_{n+1}. \tag{3.14}$$

Припустимо, що послідовність $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell}$ задовільняє умовам (3.10), покладемо $\nu := \nu_1$, тобто

$$s_0 = \ldots = s_{\nu-2} = 0, \quad s_{\nu-1} \neq 0. \tag{3.15}$$

Якщо $\ell \geq 2\nu - 1$, то можна визначити поліном a та константу b, як

$$a(z) = \frac{1}{D_\nu}\begin{vmatrix} s_0 & \ldots & s_{\nu-1} & s_\nu \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{\nu-1} & \ldots & s_{2\nu-2} & s_{2\nu-1} \\ 1 & z & \ldots & z^\nu \end{vmatrix}, \quad b = s_{\nu-1}. \tag{3.16}$$

У випадку, коли $\ell = 2\nu - 2$, позначимо $s_{2\nu-1}$ довільне дійсне число. Тільки останній коефіцієнт a_0 полінома

$$a(z) = a_\nu z^\nu + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{3.17}$$

залежить від цього числа.

Наступна Лема є прямим наслідком Леми 3.2 Ця Лема містить деякі твердження, що стосуються асимптотичного розвинення оберненої функції, див. [14, Лема 2.1] та [26, Лема 2.13, Лема A3].

Лема 3.3 *Припустимо, що послідовність* $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell}$ *задовольняє умовам* (3.15) *з* $\ell \geq 2\nu - 1$, *нехай* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{N}$, $n = [\ell/2]$ *та* b *і поліном* $a(z) = \sum\limits_{j=0}^{\nu} a_j z^j$ *визначені за формулою* (3.16). *Тоді функція* f *(мероморфна в* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$*) допускає асимптотичне розвинення*

$$f(z) = -\frac{s_{\nu-1}}{z^\nu} - \cdots - \frac{s_\ell}{z^{\ell+1}} + o\left(\frac{1}{z^{\ell+1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{3.18}$$

тоді і тільки тоді, коли функція $-1/f(z)$ *допускає асимптотичне розвинення*

$$-\frac{1}{f(z)} = \frac{a(z)}{b} + \widetilde{g}(z), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{3.19}$$

де $\widetilde{g}(z)$ *задовольняє одній з наступних умов:*

(i) якщо $\ell = 2\nu - 2$ *та* $s_{2\nu-1}$ *в* (3.16) *є довільним дійсним числом, то* $\widetilde{g}(z) = o(z)$, $z\widehat{\rightarrow}\infty$;

(ii) якщо $\ell = 2\nu - 1$, то $\widetilde{g}(z) = o(1)$ $z\widehat{\to}\infty$;

(iii) якщо $\ell > 2\nu - 1$, то $\widetilde{g}(z)$ має асимптотичне розвинення

$$\widetilde{g}(z) = -\frac{\mathfrak{s}_0}{z} - \cdots - \frac{\mathfrak{s}_{\ell-2\nu}}{z^{\ell-2\nu+1}} + o\left(\frac{1}{z^{\ell-2\nu+1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty, \tag{3.20}$$

де послідовність $(\mathfrak{s}_i)_{i=0}^{\ell-2\nu}$ визначається матричним рівнянням

$$T(\frac{a_\nu}{b}, \dots, \frac{a_0}{b}, -\mathfrak{s}_0, \dots, -\mathfrak{s}_{\ell-2\nu})\, T(s_{\nu-1}, \dots, s_\ell) = I_{\ell-\nu+2}. \tag{3.21}$$

Крім того, матриці $\mathcal{S}_p = (\mathfrak{s}_{i+j})_{i,j=0}^{p-1}$ пов'язаними з матрицями $S_{p+\nu}$ наступними рівностями

$$\mathcal{S}_p = (TS_{p+\nu}T^*)^{-1} \quad (p = 1, \dots, n-\nu+1); \tag{3.22}$$

де T є матриця розміру $p \times (p+\nu)$, що має вигляд

$$T = \begin{pmatrix} & s_{\nu-1} & \dots & s_{p+\nu-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & s_{\nu-1} \end{pmatrix} \quad (p = 1, \dots, n-\nu+1); \tag{3.23}$$

Індекси $\nu_\pm(\mathcal{S}_p)$, $\nu_0(\mathcal{S}_p)$ та нормальні індекси n_j послідовності $(\mathfrak{s}_i)_{i=0}^{\ell-2\nu}$ отримуємо з

$$\nu_\pm(\mathcal{S}_p) = \nu_\pm(S_{p+\nu}) - \nu_\pm(S_\nu) \quad (p = 1, \dots, n-\nu+1); \tag{3.24}$$

$$\nu_0(\mathcal{S}_p) = \nu_0(S_{p+\nu}) \quad (p = 1, \dots, n-\nu+1), \tag{3.25}$$

$$\mathfrak{n}_j = n_{j+1} - \nu \quad (j = 1, \dots, N-1). \tag{3.26}$$

Визначимо наступний поліном m, як

$$m(z) = \frac{a(z) - a(0)}{bz}, \qquad (\deg(m) = \nu - 1). \tag{3.27}$$

В силу (3.16), $m(z)$ має наступний вигляд

$$m(z) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{D_\nu} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & s_{\nu-1} & s_\nu \\ \vdots & & \dots & \dots & \vdots \\ s_{\nu-1} & \dots & \dots & \dots & s_{2\nu-2} \\ 1 & z & \dots & z^{\nu-2} & z^{\nu-1} \end{vmatrix}, \quad (D_\nu := \det S_\nu), \tag{3.28}$$

та старший коефіцієнт полінома $m(z)$ обчислюється за формулою

$$(-1)^{\nu+1}\frac{D^+_{\nu-1}}{D_\nu} = \frac{1}{s_{\nu-1}}. \tag{3.29}$$

Переформулюємо Лему 3.3 в термінах полінома m.

Лема 3.4 *Нехай послідовність дійсних чисел* $\boldsymbol{s} = \{s_j\}_{j=0}^{\ell}$ *задовольняє умовам* (3.10) *(*$\ell \geq 2\nu - 1$*), нехай* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{N}$ *та поліном* $m(z) = \sum_{j=0}^{\nu-1} m_j z^j$ *є визначеним за* (3.28)*. Тоді функція* f *(мероморфна в* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*) допускає асимптотичне розвинення* (3.18) *тоді і тільки тоді, коли функція* $-1/f(z)$ *допускає асимптотичне розвинення*

$$-1/f(z) = zm(z) + g(z), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{3.30}$$

де $g(z)$ *задовольняє одній з наступних умов:*

(i) якщо $\ell = 2\nu - 2$*, то* $g(z) = o(z)$*,* $z\widehat{\rightarrow}\infty$*;*

(ii) якщо $\ell \geq 2\nu - 1$*, то* $g(z)$ *має асимптотичне розвинення*

$$g(z) = -\mathfrak{s}_{-1} - \frac{\mathfrak{s}_0}{z} - \cdots - \frac{\mathfrak{s}_\ell}{z^{\ell+1}} + o\left(\frac{1}{z^{\ell+1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{3.31}$$

де послідовність $(\mathfrak{s}_i)_{i=0}^{\ell-2\nu}$ *визначається за матричним рівнянням*

$$T(m_{\nu-1}, \ldots, m_0, -\mathfrak{s}_{-1}, \ldots, -\mathfrak{s}_{\ell-2\nu})\, T(s_{\nu-1}, \ldots, s_\ell) = I_{\ell-\nu+2}. \tag{3.32}$$

Індекси $\nu_\pm(\mathcal{S}_p)$*,* $\nu_0(\mathcal{S}_p)$ *та нормальні індекси* n_j *послідовності* $(\mathfrak{s}_i)_{i=0}^{\ell-2\nu}$ *визначаються за* (3.24) – (3.26)*.*

Зауваження 3.5 *З рівності* (3.21) *та [14, Пропозиції 2.1] випливає, що послідовність* $\{\mathfrak{s}_i\}_{i=-1}^{\ell-2\nu_1}$ *можна знайти за наступними формулами*

$$\mathfrak{s}_{-1} = \frac{(-1)}{s_{\nu_1-1}}^{\nu_1+1} \frac{D_{\nu_1}^{+}}{D_{\nu_1}}, \tag{3.33}$$

$$\mathfrak{s}_i = \frac{(-1)^{i+\nu_1}}{s_{\nu_1-1}^{i+\nu_1+2}} \begin{vmatrix} s_{\nu_1} & s_{\nu_1-1} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & s_{\nu_1-1} \\ s_{2\nu_1+i} & \ldots & \ldots & \ldots & s_{\nu_1} \end{vmatrix} \quad i = \overline{0, \ell - 2\nu_1}. \tag{3.34}$$

Наступне твердження є аналогом Леми 3.4, який застосовується до асимптотичних розвинень, що містять константи.

Лема 3.6 *Нехай* $\boldsymbol{s} = \{\mathfrak{s}_i\}_{i=-1}^{\ell}$ *є послідовність дійсних чисел така, що* $\mathfrak{s}_{-1} \neq 0$*. Нехай* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{N}$*,* $n = [\ell/2]$ *та* $l = 1/\mathfrak{s}_{-1}$*. Тоді функція* g *(мероморфна* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$*) допускає асимптотичне розвинення* (3.31) *тоді і тільки тоді, коли функція* $-1/g(z)$ *допускає представлення*

$$-1/g(z) = l + f(z), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{3.35}$$

де $f(z)$ *задовольняє одній з наступних умов:*

(i) якщо $\ell = -1$, *то* $f(z) = o(1)$, $z\widehat{\to}\infty$;

(ii) Якщо $\ell \geq 0$, *то* $f(z)$ *має асимптотичне розвинення*

$$f(z) = -\frac{s_0}{z} - \cdots - \frac{s_\ell}{z^{\ell+1}} + o\left(\frac{1}{z^{\ell+1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty, \tag{3.36}$$

де послідовність $(\mathfrak{s}_i)_{i=0}^{\ell-2\nu}$ *є визначеною за матричним рівнянням*

$$T(\mathfrak{s}_{-1}, \ldots, \mathfrak{s}_\ell)T(l, -s_0, \ldots, -s_\ell) = I_{\ell+2}. \tag{3.37}$$

Індекси $\nu_\pm(S_p)$, $\nu_0(S_p)$ *визначаються, як*

$$\nu_0(S_p) = \nu_0(\mathcal{S}_p), \quad \nu_\pm(S_p) = \nu_\pm(\mathcal{S}_p) \quad (p = 0, \ldots, n+1). \tag{3.38}$$

Доведення. Якщо $\ell = -1$, то (3.18) має вигляд

$$g(z) = -\mathfrak{s}_{-1} + o(1), \quad z\widehat{\to}\infty,$$

отже, (i) має місце.

Припустимо, що $\ell \geq 0$. Тоді за Лемою 3.3 отримуємо представлення (3.19), (3.20) для $-1/g$ з коефіцієнтами s_i $(i = 0, \ldots, \ell)$, які задовольняють (3.37). Помноживши (3.37) з ℓ заміненим на $2n$ $(n = [\ell/2])$ і зліва, і справа на матрицю J_{2n+2}, отримуємо рівність $AB = I_{n+2}$, або у блоковій формі

$$\begin{pmatrix} 0_{(n+1)\times(n+1)} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & 0_{(n+1)\times(n+1)} \end{pmatrix} = I_{2n+2}, \tag{3.39}$$

де

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \mathfrak{s}_{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{s}_{-1} & \ldots & \mathfrak{s}_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)},$$

$$A_{22} = \mathcal{S}_{n+1} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}, \quad B_{11} = -J_{n+1}S_{n+1}J_{n+1} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)} \tag{3.40}$$

і B_{12}, B_{12}^* деякі матриці з $\mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$. Звернемо увагу на те, що матриця A є оборотною. Якщо, крім того, матриця A_{22} є оборотною, то її доповнення Шура

$$B_{11}^{-1} = -A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^*$$

і, отже, матриця $B_{11} = (A_{11})^{-1}$ також має обернену матрицю. З огляду на (3.40), отримуємо, що S_{n+1} є оборотною. Зворотне твердження доводиться аналогічно. Таким чином, формулу (3.38) доведено. □

Для послідовності $\mathfrak{s} = \{\mathfrak{s}_i\}_{i=-1}^{2n-1}$ визначимо

$$\mathcal{S}_n^- = \begin{pmatrix} \mathfrak{s}_{-1} & \cdots & \mathfrak{s}_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{s}_{n-2} & \cdots & \mathfrak{s}_{2n-3} \end{pmatrix}, \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{3.41}$$

Наслідок 3.7 *За припущеннями Леми 3.4, індекси* $\nu_0(\mathcal{S}_p^-)$ *та* $\nu_\pm(\mathcal{S}_p^-)$ *для матриць* $\mathcal{S}_p^- = (\mathfrak{s}_{i+j-1})_{i,j=0}^{p-1}$ *обчислюютьса за наступними формулами*

$$\nu_0(\mathcal{S}_p^-) = \nu_0(S_{p+\nu-1}^+), \quad (p = 1, \dots, n-\nu+1,\, n = [\ell/2]); \tag{3.42}$$

$$\nu_\pm(\mathcal{S}_p^-) = \nu_\pm(S_{p+\nu-1}^+) - \nu_\pm(S_{\nu-1}^+), \quad \textit{якщо } s_0 = 0 \quad (p = 1, \dots, n-\nu+1); \tag{3.43}$$

$$\nu_\pm(\mathcal{S}_p^-) = \nu_\pm(S_p^+), \quad \textit{якщо } s_0 \neq 0 \quad (p = 1, \dots, n). \tag{3.44}$$

Доведення. Припустимо, що $s_0 = 0$. Тоді з (3.19), (3.20), отримуємо що

$$zf(z) = -\frac{s_{\nu-1}}{z^{\nu-1}} - \dots - \frac{s_{2i-1}}{z^{2i-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2i-1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{3.45}$$

$$-\frac{1}{zf(z)} = m(z) - \frac{\mathfrak{s}_{-1}}{z} - \dots - \frac{\mathfrak{s}_{2i-1-2\nu}}{z^{2i-2\nu}} + o\left(\frac{1}{z^{2i-2\nu}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{3.46}$$

Застосовуємо Лему 3.4 до $zf(z)$ та використовуємо розвинення (3.45) та (3.46), маємо

$$\nu_0(\mathcal{S}_{p-\nu+1}^-) = \nu_0(S_p^+), \quad (p = \nu, \dots, [\ell/2]).$$

$$\nu_\pm(\mathcal{S}_{p-\nu+1}^-) = \nu_\pm(S_p^+) - \nu_\pm(S_{\nu-1}^+), \quad (p = \nu, \dots, [\ell/2]).$$

Якщо $s_0 \neq 0$, то $\nu = 1$ та розвинення (3.45) і (3.46) мають наступний вигляд

$$zf(z) = -s_0 - \frac{s_1}{z} - \dots - \frac{s_{2i-1}}{z^{2i-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2i-1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty,$$

$$-\frac{1}{zf(z)} = m - \frac{\mathfrak{s}_{-1}}{z} - \dots - \frac{\mathfrak{s}_{2i-3}}{z^{2i-2}} + o\left(\frac{1}{z^{2i-2}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty,$$

де $m = 1/s_0$ та за Лемою 3.6

$$\nu_0(\mathcal{S}_p^-) = \nu_0(S_p^+), \quad \nu_\pm(\mathcal{S}_p^-) = \nu_\pm(S_p^+) \quad (p = 1, \dots, [\ell/2]).$$

Це доводить (3.43)-(3.44). □

Наслідок 3.8 *За припущеннями Леми 3.6, індекси* $\nu_0(S_p^+)$ *та* $\nu_-(S_p^+)$ *для матриць* $S_p^+ = (s_{i+j+1})_{i,j=0}^{p-1}$ *обчислюютьса за наступними формулами*

$$\begin{gathered} \nu_0({S_p}^+) = \nu_0(\mathcal{S}_{p+1}^-), \quad (p = 1, \dots, n+1); \\ \nu_-(S_p^+) = \nu_-(\mathcal{S}_{p+1}^-), \quad \textit{якщо } \mathfrak{s}_{-1} > 0 \quad (p = 1, \dots, n+1); \\ \nu_-(S_p^+) = \nu_-(\mathcal{S}_{p+1}^-) - 1, \quad \textit{якщо } \mathfrak{s}_{-1} < 0 \quad (p = 1, \dots, n+1). \end{gathered} \tag{3.47}$$

Доведення. За Лемою 3.4

$$\frac{g(z)}{z} = -\frac{\mathfrak{s}_{-1}}{z} - \frac{\mathfrak{s}_0}{z^2} - \cdots - \frac{\mathfrak{s}_\ell}{z^{\ell+2}} + o\left(\frac{1}{z^{\ell+1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty, \tag{3.48}$$

$$-\frac{z}{g(z)} = lz - s_0 - \frac{s_1}{z} - \cdots - \frac{s_\ell}{z^\ell} + o\left(\frac{1}{z^\ell}\right), \quad z\widehat{\to}\infty, \tag{3.49}$$

де $l = 1/\mathfrak{s}_{-1}$, отримуємо

$$\begin{gathered} \nu_0(S_p^+) = \nu_0(\mathcal{S}_{p+1}^-), \quad (p = 1, \ldots, n); \\ \nu_-(S_p^+) = \nu_-(\mathcal{S}_{p+1}^-) - \nu_-(\mathcal{S}_1^-), \quad (p = 1, \ldots, n); \end{gathered} \tag{3.50}$$

Рівності (3.47) випливають з (3.50), так як $\mathcal{S}_1^- = (\mathfrak{s}_{-1})$. $\square$

3.4 Клас $\mathcal{U}_\kappa(J_2)$ та дробово-лінійні перетворення

Нехай $\kappa \in \mathbb{N}$ та J_2 – порядку 2×2 сигнатурна матриця

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Означення 3.9 *Матриця функція $\mathcal{W}(z) = (w_{i,j}(z))_{i,j=1}^2$ мероморфна в $\mathbb{C}_+$ належить до класу $\mathcal{U}_\kappa(J_2)$ узагальнених J_2-внутрішніх матриць функцій, якщо:*

(i) ядро

$$\mathsf{K}_\omega^{\mathcal{W}}(z) = \frac{J_2 - \mathcal{W}(z)J_2\mathcal{W}(\omega)^*}{-i(z-\bar{\omega})}$$

має κ від'ємних квадратів на $\mathfrak{H}_{\mathcal{W}}^+ \times \mathfrak{H}_{\mathcal{W}}^+$ та

(ii) $J_2 - \mathcal{W}(\mu)J_2\mathcal{W}(\mu)^* = 0$ для м.в. $\mu \in \mathbb{R}$,

де $\mathfrak{H}_{\mathcal{W}}^+$ позначає область голоморфності $\mathcal{W}$ в $\mathbb{C}_+$.

Множина матриць функцій, які задовольняють тільки першому припущенню (i) позначається $\mathcal{P}_\kappa(J_2)$. Клас $\mathcal{P}(J_2) := \mathcal{P}_0(J_2)$ був введений і досліджений М.С. Лівшицем [75], у зв'язку з теорією характеристичних функцій квазі-ермітових операторів, дивіться також [83], у випадку необмежених операторів. Факторизаційна теорія матриць функцій з класу $\mathcal{P}(J_2)$ була досліджена В.П. Потаповим [81]. Підклас J_2-внутрішніх матриць функцій $\mathcal{U}(J_2)$ відіграє важливу роль в цій теорії. Звернемо увагу на те, що матриці монодромії канонічних систем і резольвентні матриць багатьох інтерполяційних проблем належить до класу $\mathcal{U}(J_2)$, [5]. Визначення і деякі властивості класу $\mathcal{U}_\kappa(J_2)$ містяться в [3].

Розглянемо дробово-лінійне перетворення (ДЛП)

$$T_{\mathcal{W}}[\tau] = (w_{11}\tau(z) + w_{12})(w_{21}\tau(z) + w_{22})^{-1},$$

яке відповідає матриці функції $\mathcal{W}(z)$. ДЛП асоційоване з добутком $\mathcal{W}_1\mathcal{W}_2$ двох матриць функцій $\mathcal{W}_1(z)$ та $\mathcal{W}_2(z)$, співпадає з композицією $T_{\mathcal{W}_1} \circ T_{\mathcal{W}_2}$.

Як відомо, якщо $\mathcal{W}_1 \in \mathcal{U}_{\kappa_1}(J_2)$ та $\mathcal{W}_2 \in \mathcal{U}_{\kappa_2}(J_2)$, то $\mathcal{W}_1\mathcal{W}_2 \in \mathcal{U}_{\kappa'}(J_2)$, де $\kappa' \leq \kappa_1 + \kappa_2$.

Лема 3.10 *Нехай $m(z)$ – це дійсний поліном такий, що $\kappa_-(zm) = \kappa_1$, $\kappa_-(m) = k_1$ та $M(z)$ – це матриця функція розміру 2×2*

$$M(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm(z) & 1 \end{pmatrix} \tag{3.51}$$

та нехай τ є мероморфною функцією такою, що $\tau(z)^{-1} = o(z)$, коли $z\widehat{\to}\infty$. Тоді мають місце наступні еквівалентності:

$$\tau \in \mathbf{N}_{\kappa_2} \Longleftrightarrow T_M[\tau] \in \mathbf{N}_{\kappa_1+\kappa_2}, \tag{3.52}$$

$$\tau \in \mathbf{N}_{\kappa_2}^{k_2} \Longleftrightarrow T_M[\tau] \in \mathbf{N}_{\kappa_1+\kappa_2}^{k_1+k_2}. \tag{3.53}$$

Доведення. Покладемо $f = T_M[\tau]$. Тоді

$$-\frac{1}{f(z)} = zm(z) - \frac{1}{\tau(z)}. \tag{3.54}$$

З (3.54) та Пропозиції 1.16 (3) випливає, що $-\dfrac{1}{f} \in \mathbf{N}_{\kappa_1+\kappa_2}$. За Пропозицією 1.16 (1), з цього випливає (3.52).

Поділивши (3.54) на z, отримуємо

$$-\frac{1}{zf(z)} = m(z) - \frac{1}{z\tau(z)}. \tag{3.55}$$

Отже $(z\tau(z))^{-1} = o(1)$, коли $z\widehat{\to}\infty$, тому за Пропозицією 1.16 (3) $-\dfrac{1}{zf} \in \mathbf{N}_{k_1+k_2}$ і звідси випливає $zf \in \mathbf{N}_{k_1+k_2}$. Це доводить (3.53). $\square$

Лема 3.11 *Нехай $l(z)$ є дійсним поліномом таким, що $\kappa_-(l) = \kappa_1$, $\kappa_-(zl(z)) = k_1$, $L(z)$ є матрицею функцією розміру 2×2*

$$L(z) = \begin{pmatrix} 1 & l(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

та нехай τ є мероморфною функцією такою, що $\tau(z)^{-1} = o(1)$, коли $z\widehat{\rightarrow}\infty$. Тоді мають місце наступні еквівалентності:

$$\tau \in \mathbf{N}_{\kappa_2} \Longleftrightarrow T_L[\tau] \in \mathbf{N}_{\kappa_1+\kappa_2}, \tag{3.57}$$

$$\tau \in \mathbf{N}_{\kappa_2}^{k_2} \Longleftrightarrow T_L[\tau] \in \mathbf{N}_{\kappa_1+\kappa_2}^{k_1+k_2}. \tag{3.58}$$

Доведення. Покладемо $f = T_L[\tau]$. Тоді (3.57) випливає з рівності

$$f(z) = l(z) + \tau(z). \tag{3.59}$$

та Пропозиції 1.16 (3). Множимо (3.59) на z, отримуємо

$$zf(z) = zl(z) + z\tau(z). \tag{3.60}$$

Отже $z\tau(z) = o(z)$, коли $z\widehat{\rightarrow}\infty$, тоді за Пропозицією 1.16 (3) $zf \in \mathbf{N}_{k_1+k_2}$. Це доводить (3.58). □

3.5 Елементарна проблема моментів у класі Стілт'єса

У цьому розділі розглянемо елементарну проблему Стілт'єса в класі $\mathbf{N}_\kappa^k$ та опишемо множину її розв'язків. Парна та непарна проблеми будуть розглянуті окремо. В обох випадках буде розглянуто один крок алгоритму Шура.

3.5.1 Елементарна непарна проблема моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2\nu_1 - 2)$

Непарна проблема моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2n-2)$ називається невиродженою, якщо

$$D_n \neq 0 \quad \text{та} \quad D_{n-1}^+ \neq 0. \tag{3.61}$$

За означенням (3.4), це означає що $n \in \mathcal{N}(\mathbf{s})$. Невироджена непарна проблема моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2n-2)$ називається елементарною, якщо n є єдиним нормальним індексом послідовності $\mathbf{s}$, тобто $n = \nu_1$ та $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{\nu_1\}$. Цей випадок можна охарактеризувати умовами (3.10).

Елементарна проблема моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2\nu_1-2)$ може бути переформульована таким чином:
Задана послідовність дійсних чисел $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2\nu_1-2}$ з $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{\nu_1\}$. Знайти всі функції $f \in N_\kappa^k$ такі, що

$$f(z) = -\frac{s_{\nu_1-1}}{z^{\nu_1}} - \cdots - \frac{s_{2\nu_1-2}}{z^{2\nu_1-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2\nu_1-1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty. \tag{3.62}$$

Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2\nu_1-2}$ є послідовністю дійсних чисел, яка належить класу $\mathcal{H}$ та нехай (3.10) має місце. Тоді $\mathbf{s} \in \mathcal{H}_{\kappa_1,2\nu_1-2}^{k_1}$, де κ_1 та k_1 є визначеними за формулами

$$\kappa_1 = \nu_-(S_{\nu_1}) = \begin{cases} \left[\frac{\nu_1+1}{2}\right], & \text{якщо } \nu_1 \text{ є непарним та } s_{\nu_1-1} < 0; \\ \left[\frac{\nu_1}{2}\right], & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{3.63}$$

$$k_1 = \nu_-(S_{\nu_1-1}^+) = \begin{cases} [\frac{\nu_1}{2}], & \text{якщо } \nu_1 \text{ є парним та } s_{\nu_1-1} < 0; \\ [\frac{\nu_1-1}{2}], & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{3.64}$$

З (3.63) та (3.64) випливає, що

$$k_1 = \nu_-(S_{\nu_1-1}^+) = \begin{cases} \kappa_1 - 1, & \text{якщо } \nu_1 \text{ є непарним та } s_{\nu_1-1} < 0; \\ \kappa_1 - 1, & \text{якщо} \nu_1 \text{ є парним та } s_{\nu_1-1} > 0; \\ \kappa_1, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \tag{3.65}$$

Нехай поліном $m_1(z)$ є визначеним за формулою (3.28) з $\nu = \nu_1$. Тоді з (1.33) та (3.63), (3.64) випливає, що

$$\kappa_1 = \kappa_-(zm_1), \quad k_1 = \kappa_-(m_1). \tag{3.66}$$

Лема 3.12 *Нехай ν_1 є перший нормальний індекс послідовності $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^{2\nu_1-2}$, нехай поліном m_1 визначений за* (3.28) *та $f \in \mathbf{N}_\kappa$ має асимптотичне розвинення* (3.62)*. Тоді f допускає наступне представлення*

$$f(z) = -\frac{1}{zm_1(z) + g(z)}, \tag{3.67}$$

де

$$g \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_1} \quad \text{та} \quad g(z) = o(z), \qquad z\widehat{\to}\infty. \tag{3.68}$$

З іншого боку, якщо g задовольняє (3.68) *та f є визначеною за* (3.67)*, то $f \in \mathbf{N}_\kappa$.*

Доведення. За Лемою 3.4, f допускає представлення (3.67), де $g(z) = o(z)$, коли $z\widehat{\to}\infty$. Так як $f \in \mathbf{N}_\kappa$, то $-1/f \in \mathbf{N}_\kappa$ та

$$-1/f(z) = zm_1(z) + g(z). \tag{3.69}$$

За Пропозицією 1.16 (3) маємо $g \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_-(zm_1)}$. В силу (3.66) $\kappa_-(zm_1) = \kappa_1$, отже, отримуємо $g \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_1}$.

З іншого боку, якщо g задовольняє (3.68), то за Лемою 3.4 f має асимптотичне розвинення (3.62) та за (3.69) і за Пропозицією 1.16 (3) $f \in \mathbf{N}_{\kappa_1+(\kappa-\kappa_1)} = \mathbf{N}_\kappa$. □

Зауваження 3.13 *Заміняючи g на $-1/g_1$ в (3.67), отримуємо*

$$f(z) = T_{M_1(z)}[g_1(z)] = \frac{g_1(z)}{-zm_1(z)g_1(z)+1}, \tag{3.70}$$

де поліном $m_1(z)$ визначений за (3.28) та матриця функція

$$M_1(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_1(z) & 1 \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

належить до класу $\mathcal{U}_{\kappa_1}(J)$. Твердження Леми 3.12 можна переформулювати наступним чином

$$T_{M_1}[g_1] \in \mathbf{N}_\kappa \Longleftrightarrow g_1 \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_1} \quad \text{та} \quad \frac{1}{g_1(z)} = o(z), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty. \tag{3.72}$$

Більш того, з Леми 3.10 отримуємо, що

$$T_{M_1}[g_1] \in \mathbf{N}_\kappa^k \Longleftrightarrow g_1 \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_1}^{k-k_1} \quad \text{та} \quad \frac{1}{g_1(z)} = o(z), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty. \tag{3.73}$$

Поєднуючи Лему 3.12 та Зауваження 3.13 з формулами (3.66), отримуємо

Теорема 3.14 *Нехай ν_1 є перший нормальний індекс послідовності $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2\nu_1-2}$, нехай m_1, κ_1 та k_1 визначені за (3.28), (3.63) та за (3.64), відповідно, та нехай $\ell \geq 2\nu_1 - 2$. Тоді:*

(1) Проблема $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, \ell)$ має розв'язки тоді і тільки тоді, коли

$$\kappa_1 \leq \kappa \quad \text{та} \quad k_1 \leq k. \tag{3.74}$$

(2) $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\nu_1 - 2)$ тоді і тільки тоді, коли f допускає представлення

$$f = T_{M_1}[\tau], \tag{3.75}$$

де τ задовольняє наступним умовам

$$\tau \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_1}^{k-k_1} \quad \text{та} \quad \frac{1}{\tau(z)} = o(z), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty. \tag{3.76}$$

(3) Якщо $\ell > 2\nu_1 - 2$, то $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s}, \ell)$ тоді і тільки тоді, коли f має представлення $f = T_{M_1}[g_1]$, де $g_1 \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_1}^{k-k_1}$ та $-\frac{1}{g_1(z)}$ має наступне асимптотичне розвинення

$$-\frac{1}{g_1(z)} = -\mathfrak{s}_{-1} - \frac{\mathfrak{s}_0}{z} - \cdots - \frac{\mathfrak{s}_{n-2\nu_1}}{z^{n-2\nu_1+1}} + o\left(\frac{1}{z^{n-2\nu_1+1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty, \tag{3.77}$$

та послідовність $\{\mathfrak{s}_i\}_{i=-1}^{n-2\nu_1}$ визначається за матричним рівнянням

$$T(m_{\nu_1-1}^{(1)}, \ldots, m_0^{(1)}, -\mathfrak{s}_{-1}^{(1)}, \ldots, -\mathfrak{s}_{\ell-2\nu_1}^{(1)})\, T(s_{\nu_1-1}, \ldots, s_\ell) = I_{\ell-\nu_1+2}. \tag{3.78}$$

Доведення. (1) Припустимо, що $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\mathbf{s},\ell)$. Нерівність $\kappa_1 \le \kappa$ випливає з Пропозиції 1.16 (4). Так як $zf \in \mathbf{N}_k$ та

$$zf(z) + s_0 = -\frac{s_1}{z} - \frac{s_2}{z^2} - \cdots - \frac{s_\ell}{z^\ell} + o\left(\frac{1}{z^\ell}\right), \qquad z\widehat{\to}\infty, \tag{3.79}$$

то за Наслідком 3.1 (4) $k_1 = \nu_-(S_{\nu-1}^+) \le k$.

(2) Припустимо, що f належить до класу N_κ^k та має асимптотичне розвинення (3.62). Тоді за Лемою 3.12 та Зауваженням 3.13, функція $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\mathbf{s}, 2\nu_1 - 2)$ має представлення (3.70) тоді і тільки тоді, коли має місце (3.76).

(3) Нехай f належить до класу $\mathcal{M}_\kappa^k(\mathbf{s},\ell)$. За Лемою 3.4 та Зауваженням 3.13, функція f допускає представлення $f = T_{M_1}[g_1]$, де g_1 задовольняє (3.77) та послідовність $\left\{\mathfrak{s}_i^{(1)}\right\}_{i=-1}^{n-2\nu_1}$ є визначеною за (3.78). Більш того, $g_1 \in N_{\kappa-\kappa_1}^{k-k_1}$ за Лемою 3.10.

Обернене твердження також випливає з Леми 3.4 та Леми 3.10. □

Зауваження 3.15 *З* (3.21) *та [14, Пропозиції 2.1] отримуємо, що послідовність* $\left\{\mathfrak{s}_i^{(1)}\right\}_{i=-1}^{\ell-2\nu_1}$ *можна знайти за формулами*

$$\mathfrak{s}_{-1}^{(1)} = \frac{(-1)^{\nu_1+1}}{s_{\nu_1-1}}\frac{D_{\nu_1}^+}{D_{\nu_1}}, \tag{3.80}$$

$$\mathfrak{s}_i^{(1)} = \frac{(-1)^{i+\nu_1}}{s_{\nu_1-1}^{i+\nu_1+2}}\begin{vmatrix} s_{\nu_1} & s_{\nu_1-1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & s_{\nu_1-1} \\ s_{2\nu_1+i} & \dots & \dots & \dots & s_{\nu_1} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{0, \ell - 2\nu_1}. \tag{3.81}$$

3.5.2 Елементарна парна проблема моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2\mu_1 - 1)$

Парна проблема моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2n-1)$ називається невиродженою, якщо

$$D_n \ne 0 \quad \text{та} \quad D_n^+ \ne 0. \tag{3.82}$$

За класифікацією (3.4), (3.5) це означає, що $n \in \mathcal{N}(\mathbf{s})$ та $n = \mu_j$ для деякого j. Невироджену парну проблему моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2n-2)$ будемо називати елементарною, якщо n є найменшим нормальним індексом, таким, що має місце (3.82). Тому, елементарна парна проблема моментів співпадає з проблемою моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2\mu_1 - 1)$. В залежності від виконання умов $\nu_1 = \mu_1$ або $\nu_1 < \mu_1$ множина нормальних індексів складається або з одного елемента ν_1 або з двох ν_1 та μ_1.

Елементарна парна проблема моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s},2\mu_1-1)$ може бути сформульована, як:

Задана послідовність $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=0}^{2\mu_1-1}\in\mathcal{H}$, де μ_1 є найменший нормальний індекс n, такий, що (3.82) має місце. Треба знайти $f\in N_\kappa^k$, таку що

$$f(z)=-\frac{s_{\nu_1-1}}{z^{\nu_1}}-\cdots-\frac{s_{2\mu_1-1}}{z^{2\mu_1}}+o\left(\frac{1}{z^{2\mu_1}}\right),\quad z\widehat{\to}\infty. \tag{3.83}$$

Розв'язання елементарної парної проблеми моментів буде розбито на два кроки. На першому кроці застосовуємо Лему 3.4 для побудови послідовності $\{\mathfrak{s}_i^{(1)}\}_{i=1}^{2(\mu_i-\nu_i)-1}$. Якщо $f\in\mathcal{M}_\kappa^k(\mathbf{s},2\mu_1-1)$, то за Теоремою 3.14 $f(z)$ допускає представлення (3.70), яке можна переписати у вигляді

$$-\frac{1}{f(z)}=zm_1(z)-\frac{1}{g_1(z)}, \tag{3.84}$$

і де $-g_1^{-1}$ має наступне асимптотичне розвинення

$$-\frac{1}{g_1(z)}=-\mathfrak{s}_{-1}^{(1)}-\frac{\mathfrak{s}_0^{(1)}}{z}-\cdots-\frac{\mathfrak{s}_{2(\mu_1-\nu_1)-1}^{(1)}}{z^{2(\mu_1-\nu_1)}}+o\left(\frac{1}{z^{2(\mu_1-\nu_1)}}\right),\quad z\widehat{\to}\infty \tag{3.85}$$

з $\mathfrak{s}_i^{(1)}$ визначеними за (3.78). Більш того, $f\in\mathbf{N}_\kappa^k$ тоді і тільки тоді, коли $g_1\in\mathbf{N}_{\kappa-\kappa_-(zm_1)}^{k-\kappa_-(m_1)}$. Отримуємо два випадки:

(1) Якщо $\nu_1=\mu_1$, то $\mathfrak{s}_{-1}^{(1)}\neq0$ та за Лемою 3.6 g_1 має представлення

$$g_1=T_{L_1}[f_1]:=l_1+f_1 \tag{3.86}$$

де l_1 є константа, яка обчислюється за наступною формулою

$$l_1=\frac{1}{\mathfrak{s}_{-1}^{(1)}}=(-1)^{\nu_1+1}s_{\nu_1-1}\frac{D_{\nu_1}}{D_{\nu_1}^+}, \tag{3.87}$$

$L_1(z)\equiv L_1$ визначається за формулою (3.56) та $f_1(z)=o(1)$, коли $z\widehat{\to}\infty$. Більш того, за Лемою 3.11 $g_1\in\mathbf{N}_{\kappa'}^{k'}$ тоді і тільки тоді, коли $f_1\in\mathbf{N}_{\kappa'}^{k'-\kappa_-(zl_1)}$.

(2) Якщо $\nu_1<\mu_1$, то $\mathfrak{s}^{(1)}=0$ та за Лемою 3.3 g_1 допускає представлення (3.86), де $l_1=l_1(z)$ є поліном, такі що

$$l_1(z)=\frac{1}{\mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1-1}^{(1)}\det(\mathcal{S}_{\mu_1-\nu_1}^{(1)})}\begin{vmatrix}\mathfrak{s}_0^{(1)} & \dots & \mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1-1}^{(1)} & \mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1}^{(1)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1-1}^{(1)} & \dots & \mathfrak{s}_{2\mu_1-2\nu_1-2}^{(1)} & \mathfrak{s}_{2\mu_1-2\nu_1-1}^{(1)}\\ 1 & \dots & z^{\mu_1-\nu_1-1} & z^{\mu_1-\nu_1}\end{vmatrix}, \tag{3.88}$$

$L_1(z)$ визначається за (3.56) та $f_1(z)=o(1)$, коли $z\widehat{\to}\infty$. Більш того, за Лемою 3.11 $g_1\in\mathbf{N}_{\kappa'}^{k'}$ тоді і тільки тоді, коли $f_1\in\mathbf{N}_{\kappa'-\kappa_-(l_1)}^{k'-\kappa_-(zl_1)}$.

Поєднуючи формули (3.84) та (3.86) й узагальнюючи вищевказані міркування, отримуємо перші два твердження наступної теореми

Теорема 3.16 *Нехай послідовність* $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2\mu_1-1}$ *належить до* $\mathcal{H}$ *і є такою, що* $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{\nu_1, \mu_1\}$ $(\nu_1 \le \mu_1)$. *Нехай* $\{\mathfrak{s}_i^{(1)}\}_{i=1}^{2(\mu_i-\nu_i)-1}$ *та* m_1, l_1 *визначені за формулами* (3.28) *і* (3.88), *відповідно. Тоді:*

(1) проблема $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\mu_1 - 1)$ *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли*

$$\kappa_1 := \nu_-(S_{\mu_1}) \le \kappa \quad \text{та} \quad k_1^+ := \nu_-(S_{\mu_1}^+) \le k. \tag{3.89}$$

(2) $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\mu_1 - 1)$ *тоді і тільки тоді, коли* f *допускає представлення*

$$f = T_{M_1 L_1}[f_1], \tag{3.90}$$

де

$$f_1 \in N_{\kappa-\kappa_1^+}^{k-k_1^+} \quad \text{та} \quad f_1(z) = o(1), \quad \text{коли} \quad z \widehat{\to} \infty. \tag{3.91}$$

Індекси κ_1^+ *та* k_1^+ *можуть бути обчислені в термінах* m_1 *та* l_1 *за формулами*

$$\kappa_1^+ = \kappa_-(zm_1) + \kappa_-(l), \quad k_1^+ = \kappa_-(m_1) + \kappa_-(zl_1). \tag{3.92}$$

(3) Якщо $\ell > 2\mu_1 - 1$, *то* $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s}, \ell)$ *тоді і тільки тоді, коли* f *допускає представлення* (3.90), *де*

$$f_1 \in \mathcal{M}_{\kappa-\kappa_1^+}^{k-k_1^+}(\boldsymbol{s}^{(1)}, \ell - 2\mu_1), \tag{3.93}$$

κ_1^+ *та* k_1^+ *визначені за* (3.89) *та послідовність* $\left\{s_i^{(1)}\right\}_{i=-1}^{\ell-2\mu_1}$ *визначається за матричним рівнянням*

$$T(l_1, -s_0^{(1)}, \dots, -s_{\ell-2\mu_1}^{(1)})\, T(\mathfrak{s}_{-1}^{(1)}, \dots, \mathfrak{s}_{\ell-2\mu_1}^{(1)}) = I_{\ell-2\mu_1+2}, \tag{3.94}$$

якщо $\mu_1 = \nu_1$ *або за матричним рівнянням*

$$T(l_{\mu_1-\nu_1}^{(1)}, \dots, l_0^{(1)}, -s_0^{(1)}, \dots, -s_{\ell-2\mu_1}^{(1)})\, T(\mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1-1}^{(1)}, \dots, \mathfrak{s}_{\ell-2\nu_1}^{(1)}) = I_{\ell-\mu_1-\nu_1+2}, \tag{3.95}$$

якщо $\nu_1 < \mu_1$.

Доведення. Твердження (1) і (2) доведені вище.

Доведемо (3). Припустимо, що $\ell > 2\mu_1 - 1$ та $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\mathbf{s}, \ell)$. Тоді за Теоремою 3.14 $f(z)$ допускає представлення (3.84), де $-g_1^{-1}$ має асимптотичне розвинення

$$-g_1^{-1} = -\mathfrak{s}_{-1}^{(1)} - \frac{\mathfrak{s}_0^{(1)}}{z} - \dots - \frac{\mathfrak{s}_{\ell-2\nu_1}^{(1)}}{z^{\ell-2\nu_1}} + o\left(\frac{1}{z^{\ell-2\nu_1+1}}\right), \quad z \widehat{\to} \infty, \tag{3.96}$$

та $\mathfrak{s}_i^{(1)}$ визначені за (3.78). Більш того, $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$ тоді і тільки тоді, коли $g_1 \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_-(zm_1)}^{k-\kappa_-(m_1)}$. Розглянемо два випадки:

(1) Якщо $\nu_1 = \mu_1$, то $\mathfrak{s}_{-1}^{(1)} \neq 0$ та за Лемою 3.6 g_1 допускає представлення (3.86), (3.87), де L_1 визначається за (3.56) та $f_1(z)$ має наступне асимптотичне розвинення

$$f_1(z) = -\frac{s_0^{(1)}}{z} - \cdots - \frac{s_{\ell-2\mu_1}^{(1)}}{z^{\ell-2\mu_1+1}} + o\left(\frac{1}{z^{\ell-2\mu_1+1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty \tag{3.97}$$

в якому $s_i^{(1)}$ визначаються за матричним рівнянням (3.94). За Лемою 3.11

$$g_1 \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_-(zm_1)}^{k-\kappa_-(m_1)} \Longleftrightarrow f_1 \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_-(zm_1)}^{k-\kappa_-(m_1)-\kappa_-(zl_1)}.$$

Це доводить, що $f_1 \in \mathcal{M}_{\kappa-\kappa_1^+}^{k-k_1^+}(\mathbf{s}^{(1)}, \ell-2\mu_1)$, так як, у цьому випадку $\kappa_-(l_1) = 0$ та $\kappa_1^+ = \kappa_-(zm_1)$.

(2) Якщо $\nu_1 < \mu_1$, то $\mathfrak{s}_{-1}^{(1)} = 0$ та за Лемою 3.3 g_1 допускає представлення (3.86), де $l_1 = l_1(z)$ є поліном, який визначений за формулою (3.88), L_1 визначена за (3.56) та $f_1(z)$ має асимптотичне розвинення (3.97), коли $z\widehat{\to}\infty$. За Лемою 3.11

$$g_1 \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_-(zm_1)}^{k-\kappa_-(m_1)} \Longleftrightarrow f_1 \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_-(zm_1)-\kappa_-(l_1)}^{k-\kappa_-(m_1)-\kappa_-(zl_1)}.$$

Це доводить, що $f_1 \in \mathcal{M}_{\kappa-\kappa_1^+}^{k-k_1^+}(\mathbf{s}^{(1)}, \ell-2\mu_1)$, також у випадку $\nu_1 < \mu_1$.

Доказ оберненого твердження є аналогічним і заснований на Лемах 3.4–3.11 $\square$

Зауваження 3.17 *З рівності* (3.21) *та [14, Пропозиції 2.1] отримуємо, що послідовність* $\left\{s_i^{(1)}\right\}_{i=0}^{\ell-2\mu_1}$ *може бути обчислена наступним чином*

$$s_i^{(1)} = \frac{(-1)^{i+\mu_1-\nu_1}}{(\mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1-1}^{(1)})^{i+\mu_1-\nu_1+2}} \begin{vmatrix} \mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1}^{(1)} & \mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1-1}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1-1}^{(1)} \\ \mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1+i}^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \mathfrak{s}_{\mu_1-\nu_1}^{(1)} \end{vmatrix}, \tag{3.98}$$

де $i = \overline{0, \ell-2\mu_1}$.

Зауваження 3.18 *Матриця розв'язків елементарної парної проблеми моментів* $\mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\mu_1 - 1)$

$$W_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & l_1(z) \\ -zm_1(z) & -zm_1(z)l_1(z)+1 \end{pmatrix} \tag{3.99}$$

допускає факторизацію

$$W_2(z) = M_1(z)L_1(z), \tag{3.100}$$

де матриці $M_1(z)$ *та* $L_1(z)$ *є визначеними за формулами* (3.51), (3.56), *а відповідне дробово-лінійному перетворення має вигляд*

$$T_{W_2}[f_1] = \frac{f_1(z) + l_1(z)}{-zm_1(z)f_1(z) - zm_1(z)l_1(z) + 1}. \tag{3.101}$$

3.6 Алгоритм Шура для регулярного випадку

У цьому розділі буде розроблено покроковий алгоритм Шура для класу узагальнених функцій Стілт'єса $\mathbf{N}_\kappa^k$. Використовуючи цей алгоритм, отримаємо повний опис множини розв'язків зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса.

3.6.1 Непарна проблема моментів

Нехай $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2n_N - 2)$ є невиродженою непарною проблемою моментів, тобто

$$D_{n_N} \neq 0 \quad \text{та} \quad D^+_{n_N-1} \neq 0. \tag{3.102}$$

Припустимо, що $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\mathbf{s}, 2n_N - 2)$ $(N > 1)$, тобто $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$ та

$$f(z) = -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \cdots - \frac{s_{2n_N-2}}{z^{2n_N-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2n_N-1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty.$$

Тоді за Теоремою 3.16, функція f може бути представлена у вигляді

$$f(z) = \cfrac{1}{-zm_1(z) + \cfrac{1}{l_1 + f_1(z)}},$$

де поліном m_1 та число l_1 визначні за (3.28) та (3.87), відповідно. При цьому функція f_1 має асимптотичне розвинення (3.97) відповідно до послідовності $\mathbf{s}^{(1)} = \{s_i^{(1)}\}_{i=1}^{2(n_N-n_1)-2}$, яка визначена за формулами (3.78) та (3.95).

Множина нормальних індексів послідовності $\mathbf{s}^{(1)}$ є $\mathcal{N}(\mathbf{s}^{(1)}) = \{n_j - n_1\}_{j=2}^N$. Продовжуючи цей процес, і застосовуючи Теорему 3.16 $N-1$ раз, отримуємо на кожному кроці деяку функцію $f_j \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_j}^{k-k_j}$ $(j = 1, \ldots, N-1)$, з індукованим асимптотичним розвиненням

$$f_j(z) = -\frac{s_0^{(j)}}{z} - \frac{s_1^{(j)}}{z^2} - \cdots - \frac{s^{(j)}_{2(n_N-n_j)-2}}{z^{2(n_N-n_j)-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2(n_N-n_j)-1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty,$$

при чому функція f_{j-1} має наступне представлення в термінах f_j:

$$f_{j-1}(z) = \frac{1}{-zm_j(z) + \dfrac{1}{l_j + f_j(z)}} \quad (i = 1, \dots, j), \tag{3.103}$$

При цьому послідовність $\mathbf{s}^{(j)} = \{s_i^{(j)}\}_{i=1}^{2(n_N - n_j)-2}$ визначається рекурсивно за формулами (3.78) та (3.95), поліноми m_j та числа l_j – за наступними формулами

$$m_j(z) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{D_\nu^{(j-1)}} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & s_{\nu-1}^{(j-1)} & s_\nu^{(j-1)} \\ \vdots & & \dots & \dots & \vdots \\ s_{\nu-1}^{(j-1)} & \dots & \dots & \dots & s_{2\nu-2}^{(j-1)} \\ 1 & z & \dots & z^{\nu-2} & z^{\nu-1} \end{vmatrix}, \tag{3.104}$$

де $D_\nu^{(j)} := \det S_\nu^{(j)}$, $\nu = n_j - n_{j-1}$ та

$$l_j = (-1)^{\nu+1} \frac{D_\nu^{(j-1)}}{\left(D_\nu^{(j-1)}\right)^+} \quad (j = 1, \dots, N-1). \tag{3.105}$$

Нехай матриця-функція $M_j(z)$ та матриця L_j визначені, як

$$M_j(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_j(z) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad L_j = \begin{pmatrix} 1 & l_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, N-1). \tag{3.106}$$

Тоді з (3.103) випливає, що

$$f_{j-1}(z) = T_{M_j(z)L_j}[f_j(z)] \quad (j = 1, \dots, N-1). \tag{3.107}$$

На наступному кроці отримуємо функцію $f_{N-1}(z)$, яка є розв'язком елементарної проблеми моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}^{(N-1)}, 2(n_N - n_{N-1}) - 2)$. За Теоремою 3.14, функція $f_{N-1}(z)$ має представлення

$$f_{N-1}(z) = \frac{1}{-zm_N(z) + \dfrac{1}{f_N(z)}} = T_{M_N(z)}[f_N(z)], \tag{3.108}$$

де поліном $m_N(z)$ визначається за формулою (3.104) та $f_N(z)$ є функцією з класу $\mathbf{N}_{\kappa-\kappa_N}^{k-k_N}$, такою що $f_N(z)^{(-1)} = o(z)$, коли $z \widehat{\to} \infty$.

Поєднуючи твердження (3.103) та (3.108) і заміняючи $f_N(z)$ на $\tau(z)$, отримуємо наступну теорему

Теорема 3.19 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-2} \in \mathcal{H}^{reg}$, $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^N$ *та* $m_j(z)$ *й* l_j *визначені за* (3.104) *та* (3.105), *відповідно. Тоді:*

(1) Невироджена непарна проблема моментів $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2n_N - 2)$ *є розв'язною, тоді і тільки тоді, коли*

$$\kappa_N := \nu_-(S_{n_N}) \le \kappa \quad \text{та} \quad k_N := \nu_-(S^+_{n_N-1}) \le k. \tag{3.109}$$

(2) $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2n_N - 2)$ *тоді і тільки тоді, коли* f *допускає представлення*

$$f = T_{W_{2N-1}}[\tau], \tag{3.110}$$

де

$$W_{2N-1}(z) := M_1(z)L_1 \dots L_{N-1}M_N(z) \tag{3.111}$$

та $\tau(z)$ *задовольняє умовам*

$$\tau \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_N}^{k-k_N} \quad \text{та} \quad \frac{1}{\tau(z)} = o(z), \quad z \widehat{\to} \infty. \tag{3.112}$$

(3) Представлення (3.110) *може бути записано у вигляді неперервного дробу*

$$f(z) = \cfrac{1}{-zm_1(z) + \cfrac{1}{l_1 + \cfrac{1}{-zm_2(z) + \dots + \cfrac{1}{-zm_N(z) + \cfrac{1}{\tau(z)}}}}}.$$

(4) Індекси κ_N *та* k_N *є пов'язаними з* m_j *та* l_j *за наступними формулами*

$$\kappa_N = \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(zm_j), \quad k_N = \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(m_j) + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_-(zl_j).$$

3.6.2 Парна проблема моментів

Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-1} \in \mathcal{H}^{reg}$, $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_N\}_{j=1}^{N}$ та $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2n_N - 1)$ є невиродженою парною елементарною проблемою моментів, тобто

$$D_{n_N} \neq 0 \quad \text{та} \quad D^+_{n_N} \neq 0. \tag{3.113}$$

Застосовуючи Теорему 3.16 $N-1$ раз, як і в непарному випадку, отримуємо рівності (3.108) та послідовність $f_j \in \mathcal{M}_{\kappa-\kappa_j}^{k-k_j}(\mathbf{s}^{(j)}, 2(n_N - n_j) - 1)$. На останньому кроці отримаємо функцію $f_{N-1}(z)$, яка є розв'язком парної елементарної проблеми моментів $MP_{\kappa-\kappa_{N-1}}^{k-k_{N-1}}(\mathbf{s}^{(N-1)}, 2(n_N - n_{N-1}) - 1)$. За Теоремою 3.16, функцію f_{N-1} можна записати у вигляді

$$f_{N-1}(z) = \cfrac{1}{-zm_N(z) + \cfrac{1}{l_N + f_N(z)}}, \tag{3.114}$$

де $m_N(z)$ та l_N визначені за (3.104) та (3.105), функція $f_N(z)$ належить класу $\mathbf{N}^{k_{N-1}-\kappa_-(m_N)-\kappa_-(zl_N)}_{\kappa_{N-1}-\kappa_-(zm_N)}$, така, що $f_N(z) = o(1)$, коли $z\widehat{\to}\infty$.

Об'єднуючи (3.103) та (3.114), отримуємо наступну теорему.

Теорема 3.20 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-1} \in \mathcal{H}^{reg}$ *та* $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{N}$.

(1) Невироджена парна проблема моментів $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2n_N-1)$ *є розв'язаною тоді і тільки тоді, коли*

$$\kappa_N := n_-(S_{n_N}) \le \kappa \quad \text{та} \quad k_N^+ := n_-(S_{n_N}^+) \le k. \tag{3.115}$$

(2) $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2n_N - 1)$ *тоді і тільки тоді, коли* f *допускає представлення*

$$f = T_{W_{2N}^+}[\tau], \tag{3.116}$$

де

$$W_{2N}(z) := W_{2N-1}(z)L_N = M_1(z)L_1 \dots M_N(z)L_N \tag{3.117}$$

та $\tau(z)$ *задовольняє умовам*

$$\tau \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_N}^{k-k_N^+} \quad \text{та} \quad \frac{1}{\tau(z)} = o(1), \quad z\widehat{\to}\infty. \tag{3.118}$$

(3) Представлення (3.110) *можна переписати у вигляді неперервного дробу*

$$f(z) = \cfrac{1}{-zm_1(z) + \cfrac{1}{l_1 + \dots + \cfrac{1}{-zm_N(z) + \cfrac{1}{l_N + \tau(z)}}}},$$

де $m_j(z)$ *та* l_j *визначені за формулами* (3.28) *та* (3.87), *відповідно.*

(4) Індекси κ_N *та* k_N^+ *можуть бути обчислені за наступними формулами*

$$\kappa_N = \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(zm_j), \quad k_N^+ = \sum_{j=1}^{N} k_-(m_j) + \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(zl_j). \tag{3.119}$$

3.7 Система різницевих рівнянь та поліноми Стілт'єса

Розглянемо систему різницевих рівнянь, яка є асоційованою з неперервним дробом (2.51)

$$\begin{cases} y_{2j} - y_{2j-2} = l_j y_{2j-1}, \\ y_{2j+1} - y_{2j-1} = -zm_{j+1}(z)y_{2j} \end{cases} \tag{3.120}$$

Якщо j–тий підхідний дріб цього неперервного дробу позначимо $\frac{u_j}{v_j}$, то u_j, v_j є розв'язками цієї системи (див. [89, Розділ 1]) з початковими умовами

$$u_{-1} \equiv 1, \quad u_0 \equiv 0; \qquad v_{-1} \equiv 0, \quad v_0 \equiv 1. \tag{3.121}$$

Означення 3.21 *Нехай $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$. Визначимо поліноми $P_j^+(z)$, $Q_j^+(z)$ за формулами*

$$\begin{aligned} P_{-1}^+(z) \equiv 0, \quad P_0^+(z) \equiv 1, \qquad & Q_{-1}^+(z) \equiv 1, \quad Q_0^+(z) \equiv 0, \\ P_{2i-1}^+(z) = \tfrac{-1}{b_0 \dots b_{i-1}} \begin{vmatrix} P_i(z) & P_{i-1}(z) \\ P_i(0) & P_{i-1}(0) \end{vmatrix}, \quad & P_{2i}^+(z) = \tfrac{P_i(z)}{P_i(0)}, \\ Q_{2i-1}^+(z) = \tfrac{1}{b_0 \dots b_{i-1}} \begin{vmatrix} Q_i(z) & Q_{i-1}(z) \\ P_i(0) & P_{i-1}(0) \end{vmatrix}, \quad & Q_{2i}^+(z) = -\tfrac{Q_i(z)}{P_i(0)}. \end{aligned} \tag{3.122}$$

Поліноми $P_j^+(z)$, $Q_j^+(z)$ називаються поліномами Стілт'єса,*що відповідають послідовності* $\mathbf{s}$.

Лема 3.22 *([27], [59]) Нехай $P_j(z)$ є поліномами першого роду. Тоді*

$$P_j(0) = (-1)^j \prod_{i=1}^{j} \frac{1}{d_i l_i} \quad (j = 1, \dots, N-1), \tag{3.123}$$

$$P_j(0)^2 = d_{j+1} \prod_{i=0}^{j} b_i \quad (j = 1, \dots, N-1) \tag{3.124}$$

$$P_{j-1}(0) P_j(0) = -\frac{1}{l_j} \prod_{i=0}^{j-1} b_i \quad (j = 1, \dots, N-1). \tag{3.125}$$

Доведення. Перше твердження було доведено в [59] (див. також [27, Наслідок 4.1]). Друге твердження випливає з (2.71) та (3.123)

$$P_j(0)^2 = \prod_{i=1}^{j} \frac{1}{(d_i l_i)^2} = d_{j+1} \prod_{i=0}^{j} b_i \quad (j = 1, \dots, N-1).$$

З (2.71), (3.123) й наступних обчислень, маємо (3.125)

$$P_{j-1}(0) P_j(0) = -\prod_{i=1}^{j} \frac{1}{d_i l_i} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{1}{d_i l_i} = -\frac{1}{d_j l_j} \prod_{i=1}^{j-1} \left(\frac{1}{d_i l_i} \right)^2 = -\frac{1}{l_j} \prod_{i=0}^{j-1} b_i.$$

Це завершує доказ. □

Пропозиція 3.23 *Нехай* $s \in \mathcal{H}^{reg}$, $P_j^+(z)$ *та* $Q_j^+(z)$ *є поліномами Стілт'єса, визначеними за (3.122). Тоді розв'язки системи* (3.120)–(3.121) $\{u_j\}_{j=0}^N$ *та* $\{v_j\}_{j=0}^N$ *співпадають з поліномами Стілт'єса*

$$u_j = Q_j^+(z), \quad v_j = P_j^+(z) \quad (j = -1, 0, \dots, N). \tag{3.126}$$

Доведення. За Означенням 3.21

$$P_{-1}^+(z) \equiv 0, \quad P_0^+(z) \equiv 1, \quad Q_{-1}^+(z) \equiv 1, \quad Q_0^+(z) \equiv 0,$$

Необхідно довести наступні формули

$$\begin{aligned} P_{2i-1}^+(z) &= -zm_i(z)P_{2i-2}^+(z) + P_{2i-3}^+(z), \\ P_{2i}^+(z) &= l_i P_{2i-1}^+(z) + P_{2i-2}^+(z) \qquad (j = 1, \dots, N), \end{aligned} \tag{3.127}$$

$$\begin{aligned} Q_{2i-1}^+(z) &= -zm_i(z)Q_{2i-2}^+(z) + Q_{2i-3}^+(z), \\ Q_{2i}^+(z) &= l_i Q_{2i-1}^+(z) + Q_{2i-2}^+(z) \qquad (j = 1, \dots, N). \end{aligned} \tag{3.128}$$

Доведемо (3.127). Обчислюючи $P_1^+(z)$ та $P_2^+(z)$ і використовуючи (1.46), (1.47) та (2.58), отримуємо

$$\begin{aligned} P_1^+(z) &= -b_0^{-1} \begin{vmatrix} P_1(z) & P_0(z) \\ P_1(0) & P_0(0) \end{vmatrix} = -d_1 \begin{vmatrix} \dfrac{zm_1(z)}{d_1} - \dfrac{1}{d_1 l_1} & 1 \\ -\dfrac{1}{d_1 l_1} & 1 \end{vmatrix} \\ &= -zm_1(z) = -zm_1(z)P_0^+(z) + P_{-1}^+(z), \end{aligned}$$

$$P_2^+(z) = \frac{P_1(z)}{P_1(0)} = \frac{\dfrac{zm_1(z)}{d_1} - \dfrac{1}{d_1 l_1}}{-\dfrac{1}{d_1 l_1}} = -l_1 zm_1(z) + 1 = l_1 P_1^+(z) + P_0^+(z).$$

За (1.46), (1.47) та (2.58) , маємо для $i = \overline{1, N}$

$$P_{2i-1}^+(z) = -\tfrac{1}{b_0 \dots b_{i-1}} \begin{vmatrix} P_i(z) & P_{i-1}(z) \\ P_i(0) & P_{i-1}(0) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -\tfrac{1}{b_0 \dots b_{i-1}} \begin{vmatrix} \left(\dfrac{zm_i(z)}{d_i} + a_{i-1}(0)\right) P_{i-1}(z) - b_{i-1}P_{i-2}(z) & P_{i-1}(z) \\ P_i(0) & P_{i-1}(0) \end{vmatrix} \\ &= -zm_i(z)P_{i-1}(z)\tfrac{P_{i-1}(0)}{d_i b_0 \dots b_{i-1}} \\ &= -\tfrac{P_{i-1}(z)(a_{i-1}(0)P_{i-2}(0) - P_i(0)) - b_{i-1}P_{i-2}(z)P_{i-1}(0)}{b_0 \dots b_{i-1}} \end{aligned}$$

З (3.124) та (1.46) випливає, що

$$\frac{P_{i-1}(0)}{d_i b_0 \dots b_{i-1}} = \frac{1}{P_{i-1}(0)}, \quad a_{i-1}(0)P_{i-2}(0) - P_i(0) = b_{i-1}P_{i-2}(0)$$

і, отже, з (3.122), маємо

$$P^+_{2i-1}(z) = -zm_i(z)P^+_{2i-2}(z) + P^+_{2i-3}(z).$$

Це доводить першу рівність в (3.127). Друга рівність в (3.127) безпосередньо випливає з Означення 3.21 та (3.125). Дійсно,

$$P^+_{2i}(z) - P^+_{2i-2}(z) = \frac{P_i(z)}{P_i(0)} - \frac{P_{i-1}(z)}{P_{i-1}(0)} = \frac{1}{P_i(0)P_{i-1}(0)}\begin{vmatrix} P_i(z) & P_{i-1}(z) \\ P_i(0) & P_{i-1}(0) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-l_i}{b_0 \dots b_{i-1}}\begin{vmatrix} P_i(z) & P_{i-1}(z) \\ P_i(0) & P_{i-1}(0) \end{vmatrix} = l_i P^+_{2i-1}(z).$$

Аналогічно доводиться рекурентна формула (3.128).□

Лема 3.24 *Нехай* $\boldsymbol{s} \in \mathcal{H}^{reg}$, $P_i(z)$ *та* $Q_i(z)$ *є поліноми першого та другого роду, що асоційовані з узагальненою матрицею Якобі* $\mathfrak{J}$. *Тоді:*

(1) Числа l_i *обчислюються за формулою*

$$l_i = -\frac{Q_i(0)}{P_i(0)} + \frac{Q_{i-1}(0)}{P_{i-1}(0)}. \tag{3.129}$$

(2) Для кожного $N \in \mathbb{N}$ *має місце наступна формула*

$$-\frac{Q_N(0)}{P_N(0)} = \sum_{i=1}^{N} l_i \quad \text{та} \quad L = \sum_{i=1}^{\infty} l_i. \tag{3.130}$$

Доведення. (1) З огляду на (3.120) у $z = 0$, отримуємо $Q^+_{2i}(0) = l_i Q^+_{2i-1}(0) + Q^+_{2i-2}(0)$ і отже

$$l_i Q^+_{2i-1}(0) = Q^+_{2i}(0) - Q^+_{2i-2}(0).$$

За Означенням 3.21 і за узагальненою формулою Ліувілля-Остроградського (1.56)

$$Q^+_{2i-1}(0) = \frac{1}{\widetilde{b}_{i-1}}(Q_i(0)P_{i-1}(0) - Q_{i-1}(0)P_i(0) = 1.$$

Звідси випливає (3.129).

(2) Підсумовуючи рівності (3.129) для $i = 1, \dots, N$, отримуємо (3.130). □

Лема 3.25 *Нехай* $\boldsymbol{s} \in \mathcal{H}^{reg}$, $x_i = l_1 + \dots + l_i$, $i \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$\sum_{i=0}^{\infty} d_{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} |P_i^2(0)| \widetilde{b}_i^{-1} \quad \text{та} \quad \sum_{i=2}^{\infty} d_{i+1} x_i^2 = \sum_{i=2}^{\infty} |Q_i^2(0)| \widetilde{b}_i^{-1}.$$

Доведення. Диференціюючи першу рівність в (3.7), отримуємо

$$P^{+'}_{2i-1}(z) = -m_i(z)P^{+}_{2i-2}(z) - z(m_i(z)P^{+}_{2i-2}(z))' + P^{+'}_{2i-3}(z).$$

Підставляючи $z = 0$, маємо

$$m_i(0) = \frac{P^{+'}_{2i-3}(0) - P^{+'}_{2i-1}(0)}{P^{+}_{2i-2}(0)} = P^{+'}_{2i-3}(0) - P^{+'}_{2i-1}(0).$$

Тому

$$\sum_{i=1}^{N} m_i(0) = P^{+'}_{-1}(0) - P^{+'}_{1}(0) + P^{+'}_{1}(0) + \ldots + P^{+'}_{2N-3}(0) - P^{+'}_{2N-1}(0) = -P^{+'}_{2N-1}(0).$$

З формулі (3.25) випливає, що

$$d_{i+1} = |P_i^2(0)|\widetilde{b}_i^{-1}. \tag{3.131}$$

В силу формул (1.46) та (1.47), отримуємо, що

$$Q_{i+1}(z) = a_i(z)Q_i(z) - b_iQ_{i-1}(z).$$

Отже,

$$Q_1(0) = a_0(z)Q_0(0) - b_0Q_{-1}(0) = -b_0Q_{-1}(0) = b_0 = \frac{1}{d_1},$$

$$Q_2(0) = a_1(0)Q_1(z) - b_1Q_0(0) = -\frac{1}{d_2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)\frac{1}{d_1} = -P_2(0)(l_1 + l_2).$$

За індукцією, припустимо (база індукції) $Q_{i-1}(0) = -P_{i-1}(0)\sum\limits_{j=1}^{i-1} l_j$, тоді

$$Q_i(0) = a_{i-1}(0)Q_{i-1}(0) - b_{i-1}Q_{i-2}(0) = -\frac{(-1)^{i-1}}{d_i}\left(\frac{1}{l_{i-1}} + \frac{1}{l_i}\right)\frac{l_1 + \cdots + l_{i-1}}{d_1 \ldots d_{i-1}l_1 \ldots l_{i-1}} -$$

$$-\frac{(-1)^{i-2}}{l_{i-1}^2 d_{i-1}d_i}\frac{l_1 + \cdots + l_{i-2}}{d_1 \ldots d_{i-2}l_1 \ldots l_{i-2}} = -(-1)^i\frac{l_1 + \cdots + l_i}{d_1 \ldots d_i l_1 \ldots l_i} = -P_i(0)\sum_{j=1}^{i} l_j = -P_i(0)x_i.$$

Підносимо до квадрату $Q_i(0)$, отримуємо

$$Q_i^2(0) = P_i^2(0)x_i^2 = d_i\widetilde{b}_{i-1}x_i^2 \Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} d_{i+1}x_i^2 = \sum_{i=2}^{\infty} |Q_i^2(0)|\widetilde{b}_i^{-1}.$$

Це завершує доведення. □

3.8 Резольвентні матриці парної та непарної проблем моментів у класах $\mathcal{H}^{reg}$

3.8.1 Непарна проблема моментів

Лема 3.26 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-2} \in \mathcal{H}^{reg}$, $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{N}$ *є множина нормальних індексів послідовності* $\mathbf{s}$; $\kappa, k \in \mathbb{Z}_+, N \in \mathbb{N}$, *поліноми* $m_j(z)$ $(1 \le j \le N)$ *та числа* l_j $(1 \le j \le N-1)$ *визначені за* (3.159), *та нехай матриці* $M_j(z)$, L_j *й* $W^+_{[0,j-1]}(z)$ *визначені за наступними формулами*

$$M_j(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_j(z) & 1 \end{pmatrix}, \quad L_j = \begin{pmatrix} 1 & l_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad j = \overline{1, N}. \tag{3.132}$$

$$W_{2j-1}(z) = M_1(z)L_1 \dots L_{j-1}M_j(z), \tag{3.133}$$

Тоді :

(1) матриця $W^+_{[0,j-1]}(z)$ *допускає представлення*

$$W^+_{[0,j-1]}(z) = \begin{pmatrix} Q^+_{2j-1}(z) & Q^+_{2j-2}(z) \\ P^+_{2j-1}(z) & P^+_{2j-2}(z) \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, N). \tag{3.134}$$

де поліноми $P^+_j(z)$ *та* $Q^+_j(z)$ $(0 \le j \le 2N-1)$ *є поліноми Стілт'єса, визначені за формулами* (3.127) *та* (3.128), *або за* (3.122);

(2) $W^+_{[0,j-1]} \in U_{\kappa_j}(J_2)$, *де індекс* $\kappa_j = \sum_{i=1}^{j} \kappa_-(zm_i)$.

Доведення. Доведемо (3.134) за індукцією. Якщо $j = 1$, то $W_1(z) = M_1(z)$ і отже

$$W^+_{[0,0]}(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_j(z) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^+_1(z) & Q^+_0(z) \\ P^+_1(z) & P^+_0(z) \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що (3.134) має місце для деякого $j < N$ та доведемо (3.134) для $j := j+1$. В силу (3.127) та (3.128)

$$W^+_{[0,j-1]}(z) = M_1(z)L_1 \dots L_j M_{j+1}(z) = W_{2j-1}(z)L_j M_{j+1}(z) =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^+_{2j-1}(z) & Q^+_{2j-2}(z) \\ P^+_{2j-1}(z) & P^+_{2j-2}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_{j+1}(z) & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^+_{2j-1}(z) & Q^+_{2j}(z) \\ P^+_{2j-1}(z) & P^+_{2j}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_{j+1}(z) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^+_{2j+1}(z) & Q^+_{2j}(z) \\ P^+_{2j+1}(z) & P^+_{2j}(z) \end{pmatrix}.$$

Доведемо друге твердження. За Лемами 3.10 та 3.11 матриці функції $M_i(z) \in \mathcal{U}_{\kappa_-(zm_i)}(J_2)$ та матриці $L_i \in \mathcal{U}_0(J_2)$. За властивістю добутку матриць з класів $\mathcal{U}_{\kappa_1}(J_2)$ та $\mathcal{U}_{\kappa_2}(J_2)$, отримуємо що $\mathcal{U}_{\kappa'}(J_2)$, де $\kappa' \leq \kappa_1 + \kappa_2$. Тоді

$$W^+_{[0,j-1]}(z) = M_1(z)L_1 \dots L_{j-1}M_j(z) \in \mathcal{U}_{\kappa'}(J),$$

в силу $\kappa_-(l_i) = 0$, отримуємо

$$\kappa' \leq \sum_{i=1}^{j} \kappa_-(zm_j) = \kappa_j. \tag{3.135}$$

В силу [25, Леми 3.4], функція $f = T_{W^+_{[0,j-1]}}[1]$, відповідає параметру $\tau(z) \equiv 1$, належить до класу $\mathbf{N}_{\kappa''}$, з

$$\kappa'' \leq \kappa'. \tag{3.136}$$

З іншого боку $f = T_{W^+_{[0,N-1]}}[1] \in \mathbf{N}_{\kappa_j}$, тобто

$$\kappa'' = \kappa_j. \tag{3.137}$$

Порівнюючи (3.135), (3.136) та (3.137), отримуємо

$$\kappa' = \kappa'' = \kappa_j$$

і, таким чином $W^+_{[0,j-1]} \in \mathcal{U}_{\kappa_j}(J_2)$. Це завершує доведення. □

Поєднуючи Теорему 3.19 та Лему 3.26, отримуємо наступне твердження

Теорема 3.27 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-2} \in \mathcal{H}^{reg}$ *є множина нормальних індексів послідовності* $\mathbf{s}$; $\kappa, k \in \mathbb{Z}_+, N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{N}$ $(\kappa, k \in \mathbb{Z}_+, N \in \mathbb{N})$ *та нехай* $P_j^+(z)$ *і* $Q_j^+(z)$ $(0 \leq j \leq 2N-1)$ *визначені за* (3.127) *й* (3.128). *Тоді:*

(1) Невироджена непарна проблема моментів $MP^k_\kappa(\boldsymbol{s}, 2n_N - 2)$ *є розв'язною, тоді і тільки тоді, коли*

$$\kappa_N := \nu_-(S_{n_N}) \leq \kappa \quad \text{та} \quad k_N := \nu_-(S^+_{n_N-1}) \leq k. \tag{3.138}$$

(2) $f \in \mathcal{M}^k_\kappa(\boldsymbol{s}, 2n_N - 2)$ *тоді і тільки тоді, коли* f *допускає представлення*

$$f(z) = \frac{Q^+_{2N-1}(z)\tau(z) + Q^+_{2N-2}(z)}{P^+_{2N-1}(z)\tau(z) + P^+_{2N-2}(z)}, \tag{3.139}$$

де

$$\tau \in N^{k-k_N}_{\kappa-\kappa_N} \quad \text{та} \quad \frac{1}{\tau(z)} = o(z), \quad z\widehat{\to}\infty. \tag{3.140}$$

3.8.2 Парна проблема моментів

Лема 3.28 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-1} \in \mathcal{H}^{reg}$ $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{N}$ *є множина нормальних індексів послідовності* $\mathbf{s}$; $\kappa, k \in \mathbb{Z}_+$, $N \in \mathbb{N}$, *та* $m_j(z)$, l_j, $M_j(z)$ *й* L_j $(1 \le j \le N-1)$ *визначені за формулами* (3.104), (3.105), (3.132) *та нехай матриця* $W^{++}_{[0,j-1]}(z)$

$$W^{++}_{[0,0]}(z) = I, \quad W^{++}_{[0,j-1]}(z) = M_1(z)L_1 \dots M_j(z)L_j \quad (j = \overline{0, N}). \tag{3.141}$$

Тоді:

(1) $W^{++}_{[0,j-1]}(z)$ *допускає наступну факторизацію*

$$W^{++}_{[0,j-1]}(z) = \begin{pmatrix} Q^+_{2j-1}(z) & Q^+_{2j}(z) \\ P^+_{2j-1}(z) & P^+_{2j}(z) \end{pmatrix} \quad (j = 0, \dots, N), \tag{3.142}$$

де поліноми $P^+_j(z)$ *та* $Q^+_j(z)$ $(-1 \le j \le 2N)$ *визначені за* (3.122);

(2) $W^+_{[0,j-1]}+ \in U_{\kappa^+_j}(J_2)$, *де індекс* $\kappa^+_j = \sum\limits_{i=1}^{j} \kappa_-(zm_i)$.

Доведення. Доведемо (3.141) за індукцією. Якщо $j = 0$, то $W^{++}_{[0,0]} = I$ і, отже, за (3.122)

$$W^{++}_{[0,0]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^+_{-1}(z) & Q^+_0(z) \\ P^+_{-1}(z) & P^+_0(z) \end{pmatrix}.$$

Припустимо, що (3.141) має місце для $j - 1 < N$. Тоді з (3.127) та (3.128), отримуємо

$$W^{++}_{[0,j-1]}(z) = M_1(z)L_1 \dots M_j(z)L_j = W_{2j-2}(z)M_j(z)L_j =$$
$$= \begin{pmatrix} Q^+_{2j-3}(z) & Q^+_{2j-2}(z) \\ P^+_{2j-3}(z) & P^+_{2j-2}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_j(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} Q^+_{2j-1}(z) & Q^+_{2j-2}(z) \\ P^+_{2j-1}(z) & P^+_{2j-2}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} Q^+_{2j-1}(z) & Q^+_{2j}(z) \\ P^+_{2j-1}(z) & P^+_{2j}(z) \end{pmatrix}.$$

Це доводить (3.141).

Доведемо друге твердження. За Лемами 3.10 та 3.11 матриці функції $M_i(z) \in \mathcal{U}_{\kappa_-(zm_i)}(J_2)$ та матриці $L_i \in \mathcal{U}_0(J_2)$. За властивістю добутку матриць з класів $\mathcal{U}_{\kappa_1}(J_2)$ та $\mathcal{U}_{\kappa_2}(J_2)$, отримуємо що $\mathcal{U}_{\kappa'}(J_2)$, де $\kappa' \le \kappa_1 + \kappa_2$. Тоді

$$W^+_{[0,j-1]}(z) = M_1(z)L_1 \dots L_{j-1}M_j(z)L_j \in \mathcal{U}_{\kappa'}(J),$$

в силу $\kappa_-(l_i) = 0$, отримуємо

$$\kappa' \le \sum_{i=1}^{j} \kappa_-(zm_j) = \kappa^+_j. \tag{3.143}$$

В силу [25, Леми 3.4], функція $f = T_{W^{++}_{[0,j-1]}}[z]$, відповідає параметру $\tau(z) = z$, належить до класу $\mathbf{N}_{\kappa''}$, з

$$\kappa'' \le \kappa'. \tag{3.144}$$

З іншого боку $f = T_{W^{++}_{[0,N-1]}}[z] \in \mathbf{N}_{\kappa_j^+}$, тобто

$$\kappa'' = \kappa_j^+. \tag{3.145}$$

Порівнюючи (3.143), (3.144) та (3.145), отримуємо

$$\kappa' = \kappa'' = \kappa_j^+$$

і, таким чином $W^{++}_{[0,j-1]} \in \mathcal{U}_{\kappa_j^+}(J_2)$. Це завершує доведення. □

Поєднуючи Теорему 3.20 та Лему 3.28, отримуємо твердження

Теорема 3.29 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-1} \in \mathcal{H}^{reg}$, $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^N$ *є множина нормальних індексів послідовності* $\mathbf{s}$*;* $\kappa, k \in \mathbb{Z}_+, N \in \mathbb{N}$, *та нехай* $P_j^+(z)$ *й* $Q_j^+(z)$ $(0 \le j \le 2N)$ *визначені за* (3.127) *й* (3.128), *відповідно. Тоді:*

(1) Парна проблема моментів $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2n_N - 1)$ *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли*

$$\kappa_N := n_-(S_{n_N}) \le \kappa \quad \text{та} \quad k_N^+ := n_-(S_{n_N}^+) \le k. \tag{3.146}$$

(2) $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2n_N - 1)$ *тоді і тільки тоді, коли* f *допускає представлення*

$$f(z) = \frac{Q_{2N}^+(z) + Q_{2N-1}^+(z)\tau(z)}{P_{2N}^+(z) + P_{2N-1}^+(z)\tau(z)}, \tag{3.147}$$

$$\tau \in N_{\kappa-\kappa_N}^{k-k_N^+} \quad \text{та} \quad \tau(z) = o(1), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty. \tag{3.148}$$

3.9 Загальний випадок. Алгоритм Шура

У цьому розділі досліджується парна та непарна проблеми моментів Стілт'єса для послідовностей $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell}$ у класі $\mathcal{H}$.

3.9.1 Непарна проблема моментів

Нехай $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2\nu_N - 2)$ є невиродженою непарною проблемою моментів, тобто

$$D_{\nu_N} \ne 0 \quad \text{та} \quad D_{\nu_N-1}^+ \ne 0. \tag{3.149}$$

Теорема 3.30 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2\nu_N-2} \in \mathcal{H}$, $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{\nu_j\}_{j=1}^N \cup \{\mu_j\}_{j=1}^{N-1}$ *та* $m_j(z)$ *й* $l_j(z)$ *визначені за* (3.159) *й* (3.160), *відповідно. Тоді:*

(1) Невироджена непарна проблема моментів $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\nu_N - 2)$ *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли*

$$\kappa_N := \nu_-(S_{\nu_N}) \le \kappa \quad \text{та} \quad k_N := \nu_-(S^+_{\nu_N-1}) \le k. \tag{3.150}$$

(2) $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\nu_N - 2)$ *тоді і тільки тоді, коли* f *допускає представлення*

$$f = T_{W^+_{[0,j-1]}}[\tau], \tag{3.151}$$

де

$$W^+_{[0,j-1]}(z) := M_1(z)L_1(z)\dots L_{N-1}(z)M_N(z) \tag{3.152}$$

та параметр $\tau(z)$ *задовольняє умовам*

$$\tau \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_N}^{k-k_N} \quad \text{та} \quad \frac{1}{\tau(z)} = o(z), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty. \tag{3.153}$$

(3) Представлення (3.151) *можна переписати у вигляді неперервного дробу*

$$f(z) = \cfrac{1}{-zm_1(z) + \cfrac{1}{l_1(z) + \cfrac{1}{-zm_2(z) + \dots + \cfrac{1}{-zm_N(z) + \cfrac{1}{\tau(z)}}}}}. \tag{3.154}$$

(4) Індекси κ_N *та* k_N *пов'язані з поліномами* $m_j(z)$ *та* $l_j(z)$ *за наступними формулами*

$$\kappa_N = \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(zm_j) + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_-(l_j), \quad k_N = \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(m_j) + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_-(zl_j). \tag{3.155}$$

Доведення. Нехай $f \in \mathbf{N}_\kappa^k$ та f має асимптотичне розвинення

$$f(z) = -\frac{s_0}{z} - \frac{s_1}{z^2} - \dots - \frac{s_{2\nu_N-2}}{z^{2\nu_N-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2\nu_N-1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty.$$

Тоді за Теоремою 3.16, функція f має представлення

$$f(z) = \cfrac{1}{-zm_1(z) + \cfrac{1}{l_1(z) + f_1(z)}},$$

де поліноми $m_1(z)$ та $l_1(z)$ визначені за формулами (3.28) та (3.88), відповідно, та

$$\kappa_1^+ = \kappa_-(zm_1) + \kappa_-(l_1) \le \kappa \quad \text{та} \quad k_1^+ = \kappa_-(m_1) + \kappa_-(zl_1) \le k. \tag{3.156}$$

У цьому випадку $f_1 \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_1^+}^{k-k_1^+}$ та f_1 має асимптотичне розвинення

$$f_1(z) = -\frac{s_0^{(1)}}{z} - \frac{s_1^{(1)}}{z^2} - \dots - \frac{s_{2(\nu_N-\nu_1)-2}^{(1)}}{z^{2(\nu_N-\nu_1)-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2(\nu_N-\nu_1)-1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty,$$

де індукована послідовність $\mathbf{s}^{(1)} = \{s_i^{(1)}\}_{i=1}^{2(\nu_N-\nu_1)-2}$ знаходиться рекурсивно за формулами (3.78), (3.94) та (3.95). Окрім того, в силу [28, Лема 2.5], множина нормальних індексів $\mathbf{s}^{(1)}$ є

$$\mathcal{N}(\mathbf{s}^{(1)}) = \{n_j - \nu_1\}_{j=2}^{N}.$$

Продовжуючи цей процес і застосовуючи Теорему 3.16 $N-1$ разів, отримуємо послідовності поліномів $m_j(z)$, $l_j(z)$ та функцій $f_j(z)$, $g_j(z)$ такі, що

$$-\frac{1}{f_{j-1}(z)} = zm_j(z) - \frac{1}{g_j(z)}, \qquad 1 \le j \le N,$$
$$g_j(z) = l_j(z) + f_j(z), \qquad 1 \le j \le N-1.$$

Індекси κ_j^+ та k_j^+ визначаються за

$$\begin{aligned} \kappa_j^+ &= \sum_{i=1}^{j} \kappa_-(zm_i) + \sum_{i=1}^{j} \kappa_-(l_i) \le \kappa, \\ k_j^+ &= \sum_{i=1}^{j} \kappa_-(m_i) + \sum_{i=1}^{j} \kappa_-(zl_i) \le k. \end{aligned} \tag{3.157}$$

Тому

$$g_j \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_j}^{k-k_j} \quad \text{та} \quad f_j \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_j^+}^{k-k_j^+}, \qquad 1 \le j \le N-1.$$

Більш того, $g_j(z)$ та $f_j(z)$ мають наступні індуковані асимптотичні розвинення

$$g_j(z) = -\mathfrak{s}_{-1}^{(j)} - \frac{\mathfrak{s}_0^{(j)}}{z} - \frac{\mathfrak{s}_1^{(j)}}{z^2} - \dots - \frac{\mathfrak{s}_{2(\nu_N-\nu_j)-2}^{(j)}}{z^{2(\nu_N-\nu_j)-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2(\nu_N-\nu_j)-1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty,$$

$$f_j(z) = -\frac{s_0^{(j)}}{z} - \frac{s_1^{(j)}}{z^2} - \dots - \frac{s_{2(\nu_N-\mu_j)-2}^{(j)}}{z^{2(\nu_N-\mu_j)-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2(\nu_N-\mu_j)-1}}\right), \quad z\widehat{\rightarrow}\infty,$$

де $\{\mathfrak{s}_i^{(j)}\}_{i=-1}^{2(\nu_N-\nu_i)-2}$ та $\{s_i^{(j)}\}_{i=0}^{2(\nu_N-\mu_i)-2}$ визначаються з наступних рівнянь

$$T(m_{\nu_j-1}^{(j)}, \dots, m_0^{(j)}, -\mathfrak{s}_{-1}^{(j)}, \dots, -\mathfrak{s}_{\ell_j-2\nu_j}^{(j)}) T(s_{\nu_j-1}^{(j)}, \dots, s_{\ell_j}^{(j)}) = I_{\ell_j-\nu_1+2}, \;\; \ell_j = \ell - 2\mu_{j-1},$$

$$T(l_{\mu_j-\nu_j}^{(j)}, \dots, l_0^{(j)}, -s_0^{(j)}, \dots, -s_{\ell-2\mu_j}^{(j)})\, T(\mathfrak{s}_{\mu_j-\nu_j-1}^{(j)}, \dots, \mathfrak{s}_{\ell_j-2\nu_j}^{(j)}) = I_{\ell-\mu_j-\nu_j+2}.$$

Тому, $f_{j-1}(z)$ має представлення в термінах $f_j(z)$:

$$f_{j-1}(z) = \cfrac{1}{-zm_j(z) + \cfrac{1}{l_j(z) + f_j(z)}} \quad (j = 1, \dots, N-1). \tag{3.158}$$

При цьому послідовність $\mathbf{s}^{(j)} = \{s_i^{(j)}\}_{i=0}^{2(\nu_N-\mu_j)-2}$ визначена за (3.78) та (3.95) й поліноми $m_j(z)$ та $l_j(z)$ визначені за наступними формулами

$$m_j(z) = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\det S_\nu^{(j)}} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & s_{\nu-1}^{(j-1)} & s_\nu^{(j-1)} \\ \vdots & & \dots & \dots & \vdots \\ s_{\nu-1}^{(j-1)} & \dots & \dots & \dots & s_{2\nu-2}^{(j-1)} \\ 1 & z & \dots & z^{\nu-2} & z^{\nu-1} \end{vmatrix}, \tag{3.159}$$

$$l_j(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathfrak{s}_{-1}^{(j)}} = (-1)^{\nu+1} s_{\nu-1}^{(j)} \dfrac{D_\nu^{(j)}}{D_\nu^{(j)+}}, & \text{якщо } \nu_j = \mu_j; \\ \dfrac{1}{\mathfrak{s}_{\mu-1}^{(j)} \det(\mathcal{S}_\mu^{(j)})} \begin{vmatrix} \mathfrak{s}_0^{(j)} & \dots & \mathfrak{s}_{\mu-1}^{(j)} & \mathfrak{s}_\mu^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{s}_{\mu-1}^{(j)} & \dots & \mathfrak{s}_{2\mu-2}^{(j)} & \mathfrak{s}_{2\mu-1}^{(j)} \\ 1 & \dots & z^{\mu-1} & z^\mu \end{vmatrix}, & \text{якщо } \quad \nu_j < \mu_j. \end{cases}, \tag{3.160}$$

де $\nu = \nu_j - \mu_{j-1}$ та $\mu = \mu_j - \nu_j$ для кожного $j = 1, \dots, N-1$.

Нехай матриці-функції $M_j(z)$ та $L_j(z)$ визначені за

$$M_j(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_j(z) & 1 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad L_j(z) = \begin{pmatrix} 1 & l_j(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (j = 1, \dots, N-1). \tag{3.161}$$

Тоді з (3.158), отримуємо

$$f_{j-1}(z) = T_{M_j(z)L_j(z)}[f_j(z)], \quad (j = 1, \dots, N-1). \tag{3.162}$$

На останньому кроці отримуємо функцію $f_{N-1}(z)$, яка представляє є розв'язком елементарної проблеми моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}^{(N-1)}, 2(\nu_N - \mu_{N-1}) - 2)$. За Теоремою 3.14, функція $f_{N-1}(z)$ має представлення

$$f_{N-1}(z) = \cfrac{1}{-zm_N(z) + \cfrac{1}{f_N(z)}} = T_{M_N(z)}[f_N(z)], \tag{3.163}$$

де поліном $m_N(z)$ визначений за (3.159) та $f_N(z)$ належить $\mathbf{N}_{\kappa-\kappa_N}^{k-k_N}$, така, що $f_N(z)^{(-1)} = o(z)$, коли $z\widehat{\to}\infty$ та

$$\kappa_N = \kappa_{N-1}^+ + \kappa_-(zm_N) \le \kappa \quad \text{та} \quad k_N = k_{N-1}^+ + \kappa_-(m_N) \le k. \tag{3.164}$$

(3.150) випливає з (3.157) та (3.164).

Зворотні твердження Теореми 3.30 також випливають з Теореми 3.14 та Теореми 3.16. Замінюючи $f_N(z)$ на $\tau(z)$, отримуємо (2) та (3). Поєднуючи (3.158), (3.162) та за Лемами 3.10–3.11, отримуємо (4) твердження. □

3.9.2 Парна проблема моментів

Нехай $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2\mu_N-1} \in \mathcal{H}$, $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{\nu_j\}_{j=1}^N \cup \{\mu_j\}_{j=1}^N$ є множина нормальних індексів послідовності $\mathbf{s}$ та $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2\mu_N - 1)$ є невиродженою парною проблемою моментів, тобто

$$D_{\mu_N} \neq 0 \quad \text{та} \quad D_{\mu_N}^+ \neq 0. \tag{3.165}$$

Теорема 3.31 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2\mu_N-1} \in \mathcal{H}$ *та* $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{\nu_j\}_{j=1}^N \cup \{\mu_j\}_{j=1}^N$.

(1) Невироджена парна проблема моментів $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\mu_N - 1)$ *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли*

$$\kappa_N^+ := \nu_-(S_{\mu_N}) \leq \kappa \quad \text{та} \quad k_N^+ := \nu_-(S_{\mu_N}^+) \leq k; \tag{3.166}$$

(2) $f \in \mathcal{M}_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\mu_N - 1)$ *тоді і тільки тоді, коли* f *допускає представлення*

$$f = T_{W_{[0,N-1]}^{++}}[\tau], \tag{3.167}$$

де

$$W_{[0,N-1]}^{++}(z) := W_{2N-1}(z) L_N(z) = M_1(z) L_1(z) \dots M_N(z) L_N(z) \tag{3.168}$$

та параметр $\tau(z)$ *задовольняє наступним умовам*

$$\tau \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_N^+}^{k-k_N^+} \quad \text{та} \quad \frac{1}{\tau(z)} = o(1), \quad z \widehat{\to} \infty; \tag{3.169}$$

(3) Представлення (3.167) *може бути представлене в вигляді неперервного дробу*

$$f(z) = \cfrac{1}{-zm_1(z) + \cfrac{1}{l_1(z) + \dots + \cfrac{1}{-zm_N(z) + \cfrac{1}{l_N(z) + \tau(z)}}}}, \tag{3.170}$$

де поліноми $m_j(z)$ *та* $l_j(z)$ *визначені за* (3.28) *та* (3.160)*, відповідно;*

(4) Індекси κ_N^+ *та* k_N^+ *обчислюються за формулами*

$$\kappa_N^+ = \sum_{j=1}^N \kappa_-(zm_j) + \sum_{j=1}^N \kappa_-(l_j), \quad k_N^+ = \sum_{j=1}^N k_-(m_j) + \sum_{j=1}^N \kappa_-(zl_j). \tag{3.171}$$

Доведення. Застосовуючи Теорему 3.16 $N-1$ разів таким же чином, як і в непарному випадку, отримуємо послідовність функцій $f_j \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_j^+}^{k-k_j^+}$ та поліномів m_j й l_j, визначених за формулами (3.159) та (3.160), відповідно, такі, що (3.157) та (3.158) мають місце. На останньому кроці, отримуємо $f_{N-1}(z)$, яка є розв'язком елементарної парної проблеми моментів $MP_{\kappa-\kappa_{N-1}^+}^{k-k_{N-1}^+}(\mathbf{s}^{(N-1)}, 2(\mu_N - \mu_{N-1}) - 1)$. За Теоремою 3.16, функція f_{N-1} має представлення:

$$f_{N-1}(z) = \cfrac{1}{-zm_N(z) + \cfrac{1}{l_N(z) + f_N(z)}}, \tag{3.172}$$

індекси

$$\begin{aligned} \kappa_N^+ &= \kappa_{N-1}^+ + \kappa_-(zm_N) + \kappa_{-1}(l_N) \le \kappa, \\ k_N^+ &= k_{N-1}^+ + \kappa_-(m_N) + \kappa_-(zl_N) \le k \end{aligned} \tag{3.173}$$

та $f_N(z)$ належить$\mathbf{N}_{\kappa-\kappa_N^+}^{k-k_N^+}$, так що $f_N(z) = o(1)$ $z \widehat{\to} \infty$.

Замінюючи f_N на τ та поєднуючи твердження (3.158) та (3.172), отримуємо (2)–(4).

В силу (3.158) та (3.172), нерівність (3.166) випливає з (3.157), (3.173). З іншого боку, якщо (3.166) має місце, то за Теоремою 3.14 $N-1$ разів та Теорему 3.16. За цими теоремами функція f, визначена за (3.167), належить $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2\mu_N - 1)$. $\square$

3.10 Резольвентні матриці

3.10.1 Непарна проблема моментів

Нагадаємо деякі факти, що стосуються неперервного дробу

Пропозиція 3.32 *([89, Глава I]) Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n, \omega \in \mathbb{C}$ та*

$$f_n = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots \cfrac{1}{a_n + \omega}}}. \tag{3.174}$$

Тоді f_n може бути представлений наступним чином

$$\frac{A_{n-1}\omega + A_n}{B_{n-1}\omega + B_n}, \tag{3.175}$$

де величини A_i, B_i ($i \in \mathbb{N}$) є розв'язками наступної рекурентної системи

$$y_{i+1} - y_i = a_{i+1}y_{i-1}, \qquad i = \overline{0, n-1}, \tag{3.176}$$

з початковими умовами

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = 0, \quad B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1. \tag{3.177}$$

Неперервні дроби (3.154) та (3.170) мають знаменники двох типів

$$a_{2i-1} = -zm_i(z) \quad \text{та} \quad a_{2i} = l_i(z), \quad i = \overline{1, N}. \tag{3.178}$$

Тому доцільно писати (3.176) окремо для парних і непарних індексів. Чисельник і знаменник $n-$го підхідного дробу (3.174), будемо позначати

$$Q_i^+(z) = A_i \quad \text{та} \quad P_i^+(z) = B_i. \tag{3.179}$$

Тоді рівність (3.176) прийме вигляд

$$\begin{gathered} y_{2i+1} - y_{2i-1} = -zm_{i+1}(z)y_{2i}, \\ y_{2i+2} - y_{2i} = l_{i+1}(z)y_{2i+1}. \end{gathered} \tag{3.180}$$

За Пропозицією 3.32, $P_i^+(z)$ та $Q_i^+(z)$ є розв'язками системи (3.180) з початковими умовами

$$P_{-1}^+(z) \equiv 0, \qquad P_0^+(z) \equiv 1, \qquad Q_{-1}^+(z) \equiv 1, \qquad Q_0^+(z) \equiv 0. \tag{3.181}$$

Поліноми $P_i^+(z)$ та $Q_i^+(z)$ будемо називати узагальненими поліномами Стілт'єса першого та другого роду, відповідно. В регулярному випадку $\{s_i\}_{i=0}^{\ell} \in \mathcal{H}_\kappa^{k,reg}$ явні формули для $P_i^+(z)$ та $Q_i^+(z)$ були отримані в [28]. Випадок , коли $\mathbf{s} \in \mathcal{H}_0^0$ див. [72, v.4.2] та [30], [32, (10.29)].

Результати Теорем 3.30 і 3.31 можуть бути переформулювати в термінах узагальнених поліномів Стілт'єсу.

Теорема 3.33 *Нехай* $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$, *має місце* (3.150) *та поліноми* $m_j(z)$ $(1 \le j \le N)$ *й* $l_j(z)$ $(1 \le j \le N-1)$ *визначені за* (3.159) *та* (3.160), *відповідно. Нехай* $P_i^+(z)$ *та* $Q_i^+(z)$ *є узагальненими поліномами Стілт'єса першого та другого роду, відповідно. Тоді будь-який розв'язок проблеми моментів* $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\nu_N - 2)$ *допускає представлення*

$$f(z) = \frac{Q_{2N-1}^+(z)\tau(z) + Q_{2N-2}^+(z)}{P_{2N-1}^+(z)\tau(z) + P_{2N-2}^+(z)}, \tag{3.182}$$

де параметр τ *задовольняє умовам*

$$\tau(z) \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_N}^{k-k_N} \quad \text{та} \quad \frac{1}{\tau(z)} = o(z), \quad (z\widehat{\rightarrow}\infty). \tag{3.183}$$

Більш того, резольвентна матриця непарної проблеми моментів $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\nu_N - 2)$

$$W_{[0,N-1]}^+(z) = \begin{pmatrix} Q_{2N-1}^+ & Q_{2N-2}^+ \\ P_{2N-1}^+ & P_{2N-2}^+ \end{pmatrix} \tag{3.184}$$

належить класу $\mathcal{U}_{\kappa_N}(J_2)$ та допускає факторизацію

$$W^+_{[0,N-1]}(z) = M_1(z)L_1(z)\dots L_{N-1}(z)M_N(z), \tag{3.185}$$

де $\kappa_N = \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(zm_j) + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_-(l_j)$, *матриці* $M_j(z)$ *та* $L_j(z)$ *визначені за* (3.161).

Доведення. Припустимо, що функція f належить до класу $\mathbf{N}^k_\kappa$ та f має асимптотичне розвинення

$$f(z) = -\frac{s_0}{z} - \dots - \frac{s_{2\nu_N-2}}{z^{2\nu_N-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2\nu_N-1}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty.$$

Тоді, в силу Теорема 3.30, функція f має вигляд

$$f(z) = \cfrac{1}{-zm_1(z) + \cfrac{1}{l_1(z) + \dots + \cfrac{1}{l_{N-1}(z) + \cfrac{1}{-zm_N(z) + \cfrac{1}{\tau(z)}}}}}, \tag{3.186}$$

де (3.183) має місце та за Пропозицією 3.32, можемо переписати f, наступним чином

$$f(z) = \frac{Q^+_{2N-1}(z)\tau(z) + Q^+_{2N-2}(z)}{P^+_{2N-1}(z)\tau(z) + P^+_{2N-2}(z)}, \tag{3.187}$$

де поліноми Q^+_{2N-2}, Q^+_{2N-1} та P^+_{2N-2}, P^+_{2N-1} визначені за рекурентними співвідношеннями (3.180)–(3.181).

Тому, резольвентна матриця $W^+_{[0,j-1]}(z)$ коректно визначена за формулою (3.184). Застосовуючи індукцію, покажемо, що $W^+_{[0,j-1]}(z)$ допускає факторизацію (3.185).

(i) якщо $i = 1$, то $W_1(z) = M_1(z)$ й

$$W^+_{[0,0]}(z) = \begin{pmatrix} Q^+_1(z) & Q^+_0(z) \\ P^+_1(z) & P^+_0(z) \end{pmatrix}; \tag{3.188}$$

(ii) якщо $i = N-1$, то (3.161) й (3.185) має місце (припущення індукції);

(iii) якщо $i = N$, то

$$W^+_{[0,N-1]}(z) = M_1(z)L_1(z)\dots L_{N-1}(z)M_N(z) = W_{2N-3}(z)L_{N-1}M_N(z) =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^+_{2N-3}(z) & Q^+_{2N-4}(z) \\ P^+_{2N-3}(z) & P^+_{2N-4}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_{N-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_N(z) & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^+_{2N-3}(z) & l_{N-1}(z)Q^+_{2N-3}(z) + Q^+_{2N-4}(z) \\ P^+_{2N-3}(z) & l_{N-1}(z)P^+_{2N-3}(z) + P^+_{2N-4}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_N(z) & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^+_{2N-3}(z) & Q^+_{2N-2}(z) \\ P^+_{2N-3}(z) & P^+_{2N-2}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -zm_N(z) & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q^+_{2N-3}(z) - zm_N(z)Q^+_{2N-2}(z) & Q^+_{2N-2}(z) \\ P^+_{2N-3}(z) - zm_N(z)P^+_{2N-2}(z) & P^+_{2N-2}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^+_{2N-1}(z) & Q^+_{2N-2}(z) \\ P^+_{2N-1}(z) & P^+_{2N-2}(z) \end{pmatrix}. \quad (3.189)$$

Таким чином, (3.185) доведено.

За Лемами 3.10 та 3.11 матриці функції $M_i(z)$ та $L_i(z)$ належать до класів

$$M_i(z) \in \mathcal{U}_{\kappa_-(zm_i)}(J_2) \quad \text{та} \quad L_i(z) \in \mathcal{U}_{\kappa_-(l_i)}(J_2), \quad i = \overline{1, N}.$$

Як відомо добуток матриць функцій з класів $\mathcal{U}_{\kappa_1}(J_2)$ та $\mathcal{U}_{\kappa_2}(J_2)$ належить до класу $\mathcal{U}_{\kappa'}(J_2)$, де $\kappa' \le \kappa_1 + \kappa_2$.

Внаслідок цього

$$W^+_{[0,N-1]}(z) = M_1(z)L_1(z)\dots L_{N-1}(z)M_N(z) \in \mathcal{U}_{\kappa'}(J),$$

де

$$\kappa' \le \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(zm_j) + \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_-(l_j) = \kappa_N. \quad (3.190)$$

В силу [25, Леми 3.4], функція $f = T_{W^+_{[0,N-1]}}[1]$, відповідає параметру $\tau(z) \equiv 1$, належить до класу $\mathbf{N}_{\kappa''}$, з

$$\kappa'' \le \kappa'. \quad (3.191)$$

З іншого боку, за Теоремою 3.30 $f = T_{W^+_{[0,N-1]}}[1] \in \mathbf{N}_{\kappa_N}$, тобто

$$\kappa'' = \kappa_N. \quad (3.192)$$

Порівнюючи (3.190), (3.191) та (3.192), отримуємо

$$\kappa' = \kappa'' = \kappa_N$$

і, таким чином $W^+_{[0,N-1]} \in \mathcal{U}_{\kappa_N}(J_2)$. $\square$

Зауваження 3.34 *У випадку, коли* $f \in \mathbf{N}^+_\kappa$, *deg*$(m_i) \le 1$ *та* $l_i = \text{const} > 0$ *в* (3.154), *проблема моментів* $MP^+_\kappa(\boldsymbol{s}, 2\nu_N - 2)$ *була розглянута в [71] ці результати є окремим випадком Теореми 3.33.*

Зауваження 3.35 *У випадку, коли* $\mathbf{s} \in \mathcal{H}^{reg}$, *непарна проблема моментів* $MP^k_\kappa(\boldsymbol{s}, 2n_N - 2)$ *була розглянута в [28]. Ці результати містяться в попередній теоремі. Окрім того, поліноми* $l_j(z)$ *є ненульовими константами у* (3.186), *такі що*

$$l_j(z) = \frac{1}{s^{(j)}_{-1}}. \quad (3.193)$$

3.10.2 Парна проблема моментів

Теорема 3.36 *Нехай* $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$, *має місце* (3.166) *та поліноми* m_j *та* l_j $(1 \le j \le N)$ *визначені за формулами* (3.159) *та* (3.160), *відповідно. Нехай* P_i^+ *та* Q_i^+ *є узагальненими поліномами Стілт'єса першого та другого роду, відповідно. Тоді будь-який розв'язок проблеми моментів* $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\mu_N{-}1)$ *допускає представлення*

$$f(z) = \frac{Q_{2N-1}^+(z)\tau(z) + Q_{2N}^+(z)}{P_{2N-1}^+(z)\tau(z) + Q_{2N}^+(z)}, \tag{3.194}$$

де параметр τ *задовольняє умовам*

$$\tau(z) \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_N^+}^{k-k_N^+} \quad \text{та} \quad \tau(z) = o(1), \quad z\widehat{\to}\infty. \tag{3.195}$$

Окрім того, резольвентна матриця парної проблеми моментів $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s}, 2\mu_N - 1)$

$$W_{[0,N-1]}^{++}(z) = \begin{pmatrix} Q_{2N-1}^+(z) & Q_{2N}^+(z) \\ P_{2N-1}^+(z) & P_{2N}^+(z) \end{pmatrix} \tag{3.196}$$

належить класу $\mathcal{U}_{\kappa_N^+}(J_2)$ *та допускає факторизацію*

$$W_{[0,N-1]}^{++}(z) = M_1(z)L_1(z)\dots M_N(z)L_N(z), \tag{3.197}$$

де індекс $\kappa_N^+ = \sum\limits_{j=1}^{N}\kappa_-(zm_j) + \sum\limits_{j=1}^{N}\kappa_-(l_j)$, *матриці* $M_j(z)$ *та* $L_j(z)$ *визначені за* (3.161).

Доведення. Припустимо, що функція f належить узагальненому класу $\mathbf{N}_\kappa^k$ та f має асимптотичне розвинення

$$f(z) = -\frac{s_0}{z} - \dots - \frac{s_{2\mu_N-1}}{z^{2\mu_N}} + o\left(\frac{1}{z^{2\mu_N}}\right), \quad z\widehat{\to}\infty.$$

В силу Пропозиції 3.31, f має вигляд (3.170), де (3.195) має місце. В силу [89, Глава I], функцію f можна записати у вигляді (3.194), де поліноми P_i^+ та Q_i^+ можуть бути знайдені як розв'язки рекурентних співвідношень (3.180)–(3.181).

Тому, резольвентна матриця парної проблеми моментів $MP_\kappa^k(\mathbf{s}, 2\mu_N - 1)$ має вигляд (3.196). За Теоремою 3.33 (див. (3.184) та (3.185)), отримуємо

$$M_1(z)L_1(z)\dots L_{N-1}(z)M_N(z)L_N(z) = \begin{pmatrix} Q_{2N-1}^+ & Q_{2N-2}^+ \\ P_{2N-1}^+ & P_{2N-2}^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l_N(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Q_{2N-1}^+(z) & l_N Q_{2N-1}^+(z) + Q_{2N-2}^+(z) \\ P_{2N-1}^+(z) & l_N P_{2N-1}^+(z) + P_{2N-2}^+(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{2N-1}^+(z) & Q_{2N}^+(z) \\ P_{2N-1}^+(z) & P_{2N}^+(z) \end{pmatrix} = W_{[0,N-1]}^{++}(z).$$

За Лемами 3.10 та 3.11, матриці функції $M_i(z)$ та $L_i(z)$ належать до класу

$$M_i(z) \in \mathcal{U}_{\kappa_-(zm_i)}(J_2) \quad \text{and} \quad L_i(z) \in \mathcal{U}_{\kappa_-(l_i)}(J_2), \quad i = \overline{1, N}.$$

Як відомо,добуток матриць функцій з класів $\mathcal{U}_{\kappa_1}(J)$ та $\mathcal{U}_{\kappa_2}(J_2)$ належить до класу $\mathcal{U}_{\kappa'}(J_2)$, де $\kappa' \leq \kappa_1 + \kappa_2$. Отже

$$W^{++}_{[0,N-1]}(z) = M_1(z)L_1(z)\dots L_{N-1}(z)M_N(z)L_N(z) \in \mathcal{U}_{\kappa'}(J_2),$$

де

$$\kappa' \leq \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(zm_j) + \sum_{j=1}^{N} \kappa_-(l_j) = \kappa_N^+. \tag{3.198}$$

В силу [25, Леми 3.4], функція $f = T_{W^{++}_{[0,N-1]}}[z]$, відповідає параметру $\tau(z) = z$, належить до класу $\mathbf{N}_{\kappa''}$, з

$$\kappa'' \leq \kappa'. \tag{3.199}$$

З іншого боку, за Теоремою 3.31 $f = T_{W^{++}_{[0,N-1]}}[z] \in \mathbf{N}_{\kappa_N^+}$, тобто

$$\kappa'' = \kappa_N^+. \tag{3.200}$$

Порівнюючи (3.198), (3.199) та (3.200), маємо

$$\kappa' = \kappa'' = \kappa_N^+$$

і, таким чином $W^{++}_{[0,N-1]} \in \mathcal{U}_{\kappa_N^+}(J_2)$. $\Box$

3.11 Висновки

Результати глави були представлені в [28] і [60].

Розглянуто невироджену зрізану індефінітну проблему моментів Стілт'єса, яка пов'язана з дійсною послідовністю $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$. Знайдено критерій розв'язності зрізаної проблеми моментів Стілт'єса, розроблено покроковий алгоритм розв'язку цієї проблеми, отримано повний опис її розв'язків. Введено новий клас узагальнених поліномів Стілт'єса першого та другого роду і в їх термінах знайдено явні формули для резольвентних матриць зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Отримано факторизацію резольвентних матриць зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса.

4 Операторний підхід до проблеми моментів

4.1 Простір Понтрягіна, симетричні оператори, граничні трійки

Лінійний підпростір $T \subset \mathfrak{H}^2$ називається *лінійним відношенням* T в $\mathfrak{H}$, див. [4]. Зокрема, графік оператора A в $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot])$ є лінійним відношенням в $\mathfrak{H}$. Ототожнюємо оператор A з його графіком, будемо розглядати множину лінійних операторів, як підмножину множини лінійних відношень в $\mathfrak{H}$. Якщо оператор A нещільно визначений в $\mathfrak{H}$, тоді його спряження $A^{[*]}$ може бути визначено як лінійне відношення в $\mathfrak{H}$ за рівністю

$$A^{[*]} = \{\{g, g'\} \in \mathfrak{H}^2 : \ [Af, g] = [f, g'] \text{ для кожного } f \in \operatorname{dom} A\}.$$

Підхід до теорії розширень симетричних операторів заснований на понятті "абстрактних граничних умов був запропонований Калкіним [10], а потім було розроблено незалежно в [47, 62]. Нагадаємо визначення граничної трійки з [62] (див. також [31, 32, 78] для подальших позначень).

Означення 4.1 *Сукупність* $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ *складається з простору Гільберта* $\mathcal{H}$ *та двох лінійних відображень* Γ_0 *і* Γ_1 *з* $A^{[*]}$ *на* $\mathcal{H}$*, називається граничною трійкою* $A^{[*]}$*, якщо:*

(i) абстрактна тотожність Гріна

$$[f', g] - [f, g'] = \Gamma_1 \widehat{f}\,\overline{\Gamma_0 \widehat{g}} - \Gamma_0 \widehat{f}\,\overline{\Gamma_1 \widehat{g}}$$

має місце для кожного $\widehat{f} = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \widehat{g} = \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix} \in A^{[*]}$*;*

(ii) відображення $\Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \end{pmatrix} : \ A^{[*]} \to \mathbb{C}^2$ *є сюр'єктивним.*

З граничною трійкою Π асоційовані два самоспряжені розширення оператора A такі, що

$$A_0 = \ker \Gamma_0 \quad \text{та} \quad A_1 = \ker \Gamma_1.$$

Нехай $\mathfrak{N}_z := \ker(A^{[*]} - zI)$ та визначимо

$$\widehat{\mathfrak{N}}_z := \left\{ \begin{pmatrix} f_z \\ z f_z \end{pmatrix}, \quad f_z \in \mathfrak{N}_z \right\} \subset A^{[*]}. \tag{4.1}$$

Симетричний оператор A в $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot])$ називається *простим*, якщо

$$\operatorname{span}\{\mathfrak{N}_z : z \neq \bar{z}\} = \mathfrak{H}. \tag{4.2}$$

Означення 4.2 *Абстрактна функція Вейля оператора A, що відповідає граничній трійці $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, визначається формулою*

$$M(z)\Gamma_0\widehat{f}_z = \Gamma_1\widehat{f}_z, \quad \widehat{f}_z \in \widehat{\mathfrak{N}}_z, \quad z \in \rho(A_0),$$

де $\widehat{\mathfrak{N}}_z$ визначено за (4.1).

Поняття функції Вейля для оператора визначеного симетричного щільно у просторі Гільберта було введено в [30–32, 78]. Визначення функції Вейля для нещільно заданого симетричного оператора у простору Понтрягіна було дано в [24]. Як було показано в [24,78] функція Вейля $M(z)$ симетричного оператора A у просторах Гільберта та Понтрягіна $\mathfrak{H}$ з від'ємним індексом κ, визначена коректно і належить до класу $\mathbf{N}_{\kappa'}$ з $\kappa' \leq \kappa$.

Гранична трійка $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ дозволяє дати опис усіх самоспряженних розширень оператора A, які є диз'юнктними з A_0 , так що

$$A_b = \ker(\Gamma_1 - b\Gamma_0), \quad b \in \mathbb{R}.$$

Резольвентна множина $\rho(A_b)$ лінійного відношення A_b визначається як множина точок $z \in \mathbb{C}$, таких, що

$$\operatorname{ran}(A_b - zI) = \mathfrak{H} \quad \text{та} \quad \ker(A_b - zI) = \{0\}.$$

Для простого симетричного оператора A резольвентна множина розширення A_b характеризується наступним твердженням

Пропозиція 4.3 *([24])Нехай A є простим симетричним оператором у просторі $(\mathfrak{H}, [\cdot,\cdot])$, $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ є граничною трійкою для $A^{[*]}$ і $z \in \rho(A_0), b \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$z \in \rho(A_b) \Longleftrightarrow M(z) - b \neq 0.$$

4.2 Граничні трійки для оператора $A_{[0,j]}$

4.2.1 Загальний випадок

Зафіксуємо $j \in \mathbb{N}$ та визначимо оператор $A_{[0,j]}$ у просторі Понтрягіна $\mathfrak{H}_{[0,j]}$, як звуження оператора $\mathfrak{J}_{[0,j]}^T$ на області визначення.

$$\operatorname{dom} A_{[0,j]} = \left\{ f \in \mathfrak{H}_{[0,j]} : [f, e_{n_j}] = 0 \right\} \tag{4.3}$$

Як було показано в [18], спряжене лінійне відношення $A_{[0,j]}^{[*]}$ оператора $A_{[0,j]}$ має представлення

$$A_{[0,j]}^{[*]} = \left\{ \widehat{f} = \begin{bmatrix} f \\ \mathfrak{J}_{[0,j]}^T f + c_f e_{n_j} \end{bmatrix} : \begin{array}{c} f \in \mathfrak{H}_{[0,j]} \\ c_f \in \mathbb{C} \end{array} \right\}. \tag{4.4}$$

Відзначимо деякі властивості оператора $A_{[0,j]}$.

Пропозиція 4.4 *Нехай оператор $A_{[0,j]}$ визначений за (4.3). Тоді:*

1. *e_0 породжуючий вектор для оператора $A_{[0,j]}$;*

2. *$\sigma_p(A_{[0,j]}) = \emptyset$;*

3. *$H = \operatorname{ran}(A_{[0,j]} - z) \dotplus \operatorname{span}\{e_0\}$ для кожного $z \in \mathbb{C}$;*

4. *оператор $A_{[0,j]}$ простий, див. (4.2).*

Доведення. (1) З (1.55), (1.58) та (4.3) випливає, що $e_0 \in \operatorname{dom}(A^i_{[0,j]})$ для кожного $i = \overline{0, n_{j+1} - 1}$ та

$$\mathfrak{H}_{[0,j]} = \operatorname{span}\{e_{n_i} : 0 \le i \le n_{j+1} - 1\}, \quad e_{n_i} = A^i_{[0,j]} e_0. \tag{4.5}$$

(2) Припустимо, що $z \in \sigma_p(A_{[0,j]})$ та $A_{[0,j]} f = zf$. Розкладаючи вектор f на вектори e_i з (4.5), маємо

$$f = \sum_{i=0}^{n_{j+1}-1} \xi_i e_i.$$

Якщо m є найбільшим з i, для яких $\xi_i \ne 0$, тоді рівність $A_{[0,j]} f = zf$ випливає з

$$\sum_{i=0}^{m} \xi_i e_{i+1} = \sum_{i=0}^{m} z \xi_i e_i$$

і отже, $\xi_m = 0$. Тому, $\xi_i = 0$ для кожного $i \le n_{j+1} - 1$.

(3) випливає з (4.5) та (1.54), оскільки

$$(A_{[0,j]} - z) e_i = e_{i+1} - z e_i, \quad i = 0, \dots, n_{j+1} - 2.$$

Це завершує доведення .□

Для векторів

$$\widehat{f} = \begin{bmatrix} f \\ \mathfrak{J}^T_{[0,j]} f + c_f e_{n_j} \end{bmatrix} \text{ та } \widehat{g} = \begin{bmatrix} g \\ \mathfrak{J}^T_{[0,j]} g + c_g e_{n_j} \end{bmatrix} \in A^{[*]}_{[0,j]}.$$

визначимо Вронскіан $W_j[\widehat{f}, \widehat{g}]$

$$W_j[\widehat{f}, \widehat{g}] := \begin{vmatrix} c_f & c_g \\ f_j & g_j \end{vmatrix}, \quad f_j := [f, e_{n_j}], \quad g_j := [g, e_{n_j}]. \tag{4.6}$$

Пропозиція 4.5 *Вектори*

$$\widehat{\pi}_{[0,j]}(z) := \begin{bmatrix} \pi_{[0,j]}(z) \\ z\pi_{[0,j]}(z) \end{bmatrix}, \quad \widehat{\xi}_{[0,j]}(z) := \begin{bmatrix} \xi_{[0,j]}(z) \\ z\xi_{[0,j]}(z) + e_0 \end{bmatrix}, \quad (z \in \mathbb{C})$$

належать до $A^{[*]}_{[0,j]}$ *та допускають представлення*

$$\widehat{\pi}_{[0,j]}(z) = \begin{bmatrix} \pi_{[0,j]}(z) \\ \mathfrak{J}^T_{[0,j]}\pi_{[0,j]}(z) + \widetilde{b}_j^{-1}P_{j+1}(z)e_{n_j} \end{bmatrix}, \tag{4.7}$$

$$\widehat{\xi}_{[0,j]}(z) = \begin{bmatrix} \xi_{[0,j]}(z) \\ \mathfrak{J}^T_{[0,j]}\xi_{[0,j]}(z) + \widetilde{b}_j^{-1}Q_{j+1}(z)e_{n_j} \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Вронскіани $W_j[\widehat{f}, \widehat{\pi}_{[0,j]}(z)]$ *та* $W_j[\widehat{f}, \widehat{\xi}_{[0,j]}(z)]$ *обчислюються за формулами*

$$W_j[\widehat{f}, \widehat{\pi}_{[0,j]}(z)] := \begin{vmatrix} c_f & \widetilde{b}_j^{-1}P_{j+1}(z) \\ f_j & P_j(z) \end{vmatrix}, W_j[\widehat{f}, \widehat{\xi}_{[0,j]}(z)] := \begin{vmatrix} c_f & \widetilde{b}_j^{-1}Q_{j+1}(z) \\ f_j & Q_j(z) \end{vmatrix}, \tag{4.9}$$

та узагальнена рівність Ліувілля-Остроградського (1.56) *приймає вигляд*

$$W_j[\widehat{\xi}_{[0,j]}(z), \widehat{\pi}_{[0,j]}(z)] = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.10}$$

Доведення. Формула (4.7) випливає з (1.62) та рівностей

$$\mathfrak{J}^T_{[0,j]}\pi_{[0,j]}(z) + \widetilde{b}_j^{-1}P_{j+1}(z)e_{n_j} = G^{-1}_{[0,j]}\left(\mathfrak{J}_{[0,j]}\begin{bmatrix} \pi_0(z) \\ \vdots \\ \pi_j(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ P_{j+1}(z) \end{bmatrix}\right) = \\ = z\pi_{[0,j]}(z).$$

З (4.7) випливає, що $c_g = \widetilde{b}_j^{-1}P_{j+1}(z)$ для $\widehat{g} = \widehat{\pi}_{[0,j]}(z)$. Підставляючи в (4.6) отримуємо першу формулу в (4.9). Доказ (4.8) та другої формули в (4.9) аналогічний.

Формула (4.10) випливає з (1.56), (4.9), (4.7) та (4.8). □

Пропозиція 4.6 *Нехай* $\widehat{f} = \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix}$, $\widehat{g} = \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} \in A^{[*]}_{[0,j]}$. *Тоді*

$$[f', g] - [f, g'] = W_j[\widehat{f}, \overline{\widehat{g}}]. \tag{4.11}$$

Доведення. Нехай вектори $\widehat{f}, \widehat{g} \in A^{[*]}_{[0,j]}$ мають вигляд

$$\widehat{f} = \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \mathfrak{J}^T_{[0,j]}f + c_f e_{n_j} \end{bmatrix} \text{ та } \widehat{g} = \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ \mathfrak{J}^T_{[0,j]}g + c_g e_{n_j} \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця $\mathfrak{J}_{[0,j]}^T$ породжує самоспряжений оператор в $\mathfrak{H}_{[0,j]}$, див. (1.60), отримуємо з (4.6)

$$\begin{aligned}[f',g]-[f.g'] = &\Big[\mathfrak{J}_{[0,j]}^T f + c_f e_{n_j}, g\Big] - \Big[f, \mathfrak{J}_{[0,j]}^T f + c_g e_{n_j}\Big] = \\ &= (f_{j+1}\overline{g}_j - f_j \overline{g}_{j+1}) = W_j[\widehat{f}, \overline{\widehat{g}}].\end{aligned} \tag{4.12}$$

Це завершує доказ. □

Наступні формули Крістофеля-Дарбу випливають з (4.11).

Наслідок 4.7 *Для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{C}$ та $z_0 \in \mathbb{R}$ має місце наступна формула*

$$W_j[\widehat{\xi}_{[0,j]}(z), \widehat{\xi}_{[0,j]}(z_0)] = (z-z_0)[\xi_{[0,j]}(z), \xi_{[0,j]}(z_0)]_{\mathfrak{H}_{[0,j]}}, \tag{4.13}$$

$$W_j[\widehat{\xi}_{[0,j]}(z), \widehat{\pi}_{[0,j]}(z_0)] = 1 + (z-z_0)[\xi_{[0,j]}(z), \pi_{[0,j]}(z_0)]_{\mathfrak{H}_{[0,j]}},$$

$$W_j[\widehat{\pi}_{[0,j]}(z), \widehat{\xi}_{[0,j]}(z_0)] = -1 + (z-z_0)[\pi_{[0,j]}(z), \xi_{[0,j]}(z_0)]_{\mathfrak{H}_{[0,j]}},$$

$$W_j[\widehat{\pi}_{[0,j]}(z), \widehat{\pi}_{[0,j]}(z_0)] = (z-z_0)[\pi_{[0,j]}(z), \pi_{[0,j]}(z_0)]_{\mathfrak{H}_{[0,j]}}, \tag{4.14}$$

Теорема 4.8 *Нехай $P_i(z)$ є поліноми першого роду асоційовані з узагальненою матрицею Якобі $\mathfrak{J}$. Тоді:*

(1) гранична трійка $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ лінійного відношення $A_{[0,j]}^{[*]}$ може бути обчислена за формулою

$$\Gamma_0 \widehat{f} = f_j = \big[f, e_{n_j}\big] \quad \text{та} \quad \Gamma_1 \widehat{f} = c_f; \tag{4.15}$$

(2) дефектний підпростір оператора $A_{[0,j]}$ має вигляд

$$\mathfrak{N}_z(A_{[0,j]}) = \operatorname{span} \pi_{[0,j]}(z),$$

де $\pi_{[0,N]}(z)$ є визначеним за формулою (1.62).

(3) функція Вейля та γ-поле оператора $A_{[0,j]}$, що відповідають граничній трійці $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, мають вигляд

$$M(z) = \frac{P_{j+1}(z)}{\widetilde{b}_j P_j(z)}, \quad \gamma(z) = \frac{\pi_{[0,j]}(z)}{P_{j+1}(z)}. \tag{4.16}$$

Доведення. (1) Формула Гріна для $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ випливає з рівності (4.12):

$$[f',g]-[f,g'] = c_f \overline{[g, e_{n_j}]} - \overline{c_g}[f, e_{n_j}] = \Gamma_1 \widehat{f} \overline{\Gamma_0 \widehat{g}} - \Gamma_0 \widehat{f} \overline{\Gamma_1 \widehat{g}}. \tag{4.17}$$

(2) З (4.4) та (1.62) випливає, що $\widehat{\pi}_{[0,j]}(z) \in A_{[0,j]}^{[*]}$ і, отже, має місце включення $\pi_{[0,j]}(z) \in \mathfrak{N}_z(A_{[0,j]})$.

(3) Застосовуючи Γ_0 та Γ_1 до дефектного вектора $\widehat{f_z} := \widehat{\pi}_{[0,j]}(z)$, отримуємо

$$\Gamma_0 \widehat{f_z} = [\pi_{[0,j]}(z), e_{n_j}] = P_j(z) \quad \text{та} \quad \Gamma_1 \widehat{f_z} = \widetilde{b}_j^{-1} P_{j+1}(z). \tag{4.18}$$

Це доводить формулу (4.16). □

Зауваження 4.9 *Аналогічна конструкція граничної трійки для симетричної узагальненої матриці Якобі була представлена в [18].*

Теорема 4.10 *Нехай оператор $S_{[0,j]}$ у просторі $\mathfrak{H}_{[0,j]}$ визначений як звуження оператора $\mathfrak{J}_{[0,j]}^T$ на область визначення*

$$\mathrm{dom} S_{[0,j]} = \left\{ f \in \mathfrak{H}_{[0,j]} : [f, e_0] = 0 \right\}. \tag{4.19}$$

Тоді:

(1) спряжене лінійне відношення $S_{[0,j]}^{[*]}$ оператора $S_{[0,j]}$ має наступне представлення

$$S_{[0,j]}^{[*]} = \left\{ \widehat{f} = \begin{bmatrix} f \\ \mathfrak{J}_{[0,j]}^T f + d_f e_0 \end{bmatrix} : \begin{array}{c} f \in \mathfrak{H}_{[0,j]}, \\ d_f \in \mathbb{C} \end{array} \right\}. \tag{4.20}$$

(2) гранична трійка $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для лінійного відношення $S_{[0,j]}^{[*]}$ може бути знайдена за формулами

$$\Gamma_1 \widehat{f} = [f, e_0] \quad \text{та} \quad \Gamma_0 \widehat{f} = -d_f;$$

(3) дефектний підпростір $\mathfrak{N}_\lambda(S_{[0,j]})$ оператора $S_{[0,j]}$ є натягнутий на

$$(\mathfrak{J}_{[0,j]}^T - z)^{-1} e_0 = \left(\xi_{[0,j]} - \frac{Q_{j+1}(z)}{P_{j+1}(z)} \pi_{[0,j]} \right);$$

(4) функція Вейля $m_{[0,j]}(z)$ для оператора $S_{[0,j]}$, що відповідає граничній трійці $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, обчислюється за формулою

$$m_{[0,j]}(z) = [(\mathfrak{J}_{[0,j]}^T - z)^{-1} e_0, e_0] = -\frac{Q_{j+1}(z)}{P_{j+1}(z)}. \tag{4.21}$$

Більш того, $m_{[0,j]}(z)$має наступне асимптотичне розвинення

$$\begin{gathered} m_{[0,j]}(z) = -\frac{s_0}{z} - \cdots - \frac{s_{2n_{j+1}-2}}{z^{2n_{j+1}-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2n_{j+1}-1}} \right), \ z \widehat{\rightarrow} \infty, \\ s_i = \left[\left(\mathfrak{J}_{[0,j]}^T \right)^i e_0, e_0 \right]. \end{gathered} \tag{4.22}$$

Доведення. (1) Припустимо, що лінійний оператор $S_{[0,j]}$ у просторі $\mathfrak{H}_{[0,j]}$ є визначений як звуження $\mathfrak{J}_{[0,j]}^T$ на області визначення (4.19). Отже, спряжене лінійне відношення $S_{[0,j]}^{[*]}$ задається формулою (4.20).

(2) Нехай $\widehat{f} = \{f, \mathfrak{J}_{[0,j]}^T f + d_f e_0\}$ та $\widehat{g} = \{f, \mathfrak{J}_{[0,j]}^T g + d_g e_0\}$. Тоді

$$\begin{aligned}[f', g] - [f, g'] &= [\mathfrak{J}_{[0,j]}^T f + d_f e_0, g] - [f, \mathfrak{J}_{[0,j]}^T g + d_g e_0] = \\ &= d_f \overline{[g, e_0]} - \overline{d_g}[f, e_0] = \Gamma_1 \widehat{f} \overline{\Gamma_0 \widehat{g}} - \Gamma_0 \widehat{f} \overline{\Gamma_1 \widehat{g}}.\end{aligned}$$

(3) Визначимо

$$f_z := \xi_{[0,j]}(z) - \frac{Q_{j+1}(z)}{P_{j+1}(z)} \pi_{[0,j]}(z).$$

Тоді з (1.64) та (1.65) випливає, що $(\mathfrak{J}_{[0,j]}^T - z) f_z = e_0$. Отже

$$f_z = (\mathfrak{J}_{[0,j]}^T - z)^{-1} e_0 \tag{4.23}$$

та

$$\widehat{f_z} = \begin{bmatrix} f_z \\ z f_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_z \\ \mathfrak{J}_{[0,j]}^T f_z - e_0 \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

Внаслідок цього, $f_z \in \mathfrak{N}_z(S_{[0,j]})$.

(4) З (4.15) та (4.24), отримуємо

$$\Gamma_0 \widehat{f_z} = 1 \quad \text{та} \quad \Gamma_1 \widehat{f_z} = -\frac{Q_{j+1}(z)}{P_{j+1}(z)}. \tag{4.25}$$

Це доводить другу формулу в (4.21). Перша формула випливає з (4.23) та (4.25). В силу (4.21), отримуємо

$$m_{[0,j]}(z) = -\frac{[e_0, e_0]}{z} - \cdots - \frac{\left[\left(\mathfrak{J}_{[0,j]}^T\right)^{2n_{j+1}-2} e_0, e_0\right]}{z^{2n_{j+1}-1}} + o\left(\frac{1}{z^{2n_{j+1}-1}}\right), \ z \widehat{\to} \infty.$$

Позначаємо $s_i = \left[\left(\mathfrak{J}_{[0,j]}^T\right)^i e_0, e_0\right]$, отримуємо (4.22). $\square$

4.3 Випадок $\mathbf{s} \in \mathcal{H}_\kappa^{k,reg}$

Означення 4.11 *Говорять, що симетричний оператор A у просторі Понтрягіна $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ має k від'ємних квадратів, якщо для будь-якого набору $f_j \in \operatorname{dom} A$ $(j = 0, 1, ..., n)$ форма*

$$\sum_{i,j=0}^{n} [A f_i, f_j]_{\mathfrak{H}} \xi_i \bar{\xi}_j$$

має не більше k, та для деякого набору $f_j \in \operatorname{dom} A$ точно k від'ємних квадратів.

Нехай симетричний оператор A у просторі Понтрягіна $(\mathfrak{H}, [\cdot, \cdot])$ має k від'ємних квадратів. Нагадаємо [23], що гранична трійка $\Pi = \{\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$ для лінійного відношення $A^{[*]}$ називається *основною*, якщо функція Вейля $M(z)$ оператора A відповідає граничній трійці Π та задовольняє умовам

$$\lim_{iy\to 0} M(iy) = \infty, \quad \lim_{iy\to\infty} M^+(iy) = 0. \tag{4.26}$$

Пропозиція 4.12 *Нехай* $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\ell} \in \mathcal{H}_{\kappa,\ell}^{k,reg}$ *та* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s}) = \{n_i\}_{i=1}^{N+1}$. *Тоді:*

1. *оператор* $A_{[0,N]}$ *має* k *від'ємних квадратів;*

2. *гранична трійка* $\{\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$ *лінійного відношення* $A_{[0,N]}^{[*]}$ *може бути обрана таким чином*

$$\Gamma_1^+ \widehat{f} = \frac{1}{P_N(0)} [f, e_{n_N}], \quad \Gamma_0^+ \widehat{f} = -P_N(0)c_f + \widetilde{b}_N^{-1} P_{N+1}(0)[f, e_{n_N}], \tag{4.27}$$

де c_f *визначається розкладом* (4.4);

3. *функція Вейля та* γ*-поле обчислюються за формулами*

$$M_{[0,N]}^+(z) = \frac{P_{2N}^+(z)}{P_{2N+1}^+(z)}, \quad \gamma^+(z) = \frac{\pi_{[0,N]}(z)}{P_{2N+1}^+(z)}. \tag{4.28}$$

4. *гранична трійка* $\{\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$ *лінійного відношення* $A_{[0,N]}^{[*]}$ *є основною.*

Доведення. (1) Довільний вектор $f \in \operatorname{dom}(A_{[0,N]})$ можна розкласти на вектори e_i $(0 \le i \le n_{N+1} - 2)$ з (4.5)

$$f = \sum_{i=0}^{n_{N+1}-2} \xi_i e_i, \quad \xi_i \in \mathbb{C}.$$

В силу (4.22)

$$[A_{[0,N]} e_i, e_j]_{\mathfrak{H}_{[0,k]}} = s_{i+j+1}, \quad i, j = \overline{0, \ldots, n_{N+1} - 2}. \tag{4.29}$$

Оскільки $\mathbf{s} \in \mathcal{H}_{\kappa,\ell}^{k,reg}$, отримуємо з (4.29)

$$\sum_{i,j=0}^{n_{N+1}-2} [A_{[0,N]} e_i, e_j]_{\mathfrak{H}_{[0,N]}} \xi_i \bar{\xi}_j = \sum_{i,j=0}^{n_{N+1}-2} s_{i+j+1} \xi_i \bar{\xi}_j$$

і, отже, оператор $A_{[0,N]}$ має k від'ємних квадратів.

(2) Вочевидь, оператори Γ_0^+, Γ_1^+ є пов'язаними з Γ_0, Γ_1 за наступними формулами

$$\Gamma_1^+ \widehat{f} = \frac{1}{\beta} \Gamma_0 \quad \text{та} \quad \Gamma_0^+ \widehat{f} = \beta \left(\alpha \Gamma_0 - \Gamma_1 \right),$$

де $\beta = P_N(0)$ та $\alpha = \frac{\widetilde{b}_N^{-1}P_{N+1}(0)}{P_N(0)}$. Тоді, в силу [32, Пропозиція 1.7] $\{\mathbb{C},\Gamma_0^+,\Gamma_1^+\}$ – гранична трійка лінійного відношення $A_{[0,N]}^{[*]}$. Отже, функція Вейля може бути обчислена наступним чином

$$M^+(z) = \frac{1}{\beta^2(\alpha - M(z))} = \frac{1}{P_N^2(0)\left(\dfrac{P_{N+1}(0)}{\widetilde{b}_N P_N(0)} - \dfrac{P_{N+1}(z)}{\widetilde{b}_N P_N(z)}\right)} =$$

$$= -\frac{\dfrac{P_N(z)}{P_N(0)}}{\widetilde{b}_N^{-1}\left(P_{N+1}(z)P_N(0) - P_N(z)P_{N+1}(0)\right)} = \frac{P_{2N}^+(z)}{P_{2N+1}^+(z)}.$$

(3) З (4.18) випливає, що для $\widehat{f}_z = \widehat{\pi}_{[0,N]}(z)$

$$\begin{aligned} \Gamma_0^+\widehat{f}_z &= \frac{1}{\widetilde{b}_N}(P_{N+1}(0)P_N(z) - P_N(0)P_{N+1}(z)) = P_{2N+1}^+(z), \\ \Gamma_1^+\widehat{f}_z &= \frac{1}{P_N(0)}[\pi_{[0,N]}(z), e_{n_N}] = \frac{P_N(z)}{P_N(0)} = P_{2N}^+(z). \end{aligned} \tag{4.30}$$

Це доводить формули (4.28).

(4) З (4.28) випливає, що функція Вейля $M^+(z)$ задовольняє умовам

$$\lim_{iy\to 0} M^+(iy) = \infty, \quad \lim_{iy\to\infty} M^+(iy) = 0.$$

Тому, за Означенням 4.26 гранична трійка $\{\mathbb{C},\Gamma_0^+,\Gamma_1^+\}$ є основною. $\square$

Зауваження 4.13 *Нагадаємо з [23] гранична трійка $\{\mathbb{C},\Gamma_0,\Gamma_1\}$ лінійного відношення $A^{[*]}$ називається основною, якщо розширення $A_0 = A_K$ та $A_1 = A_F$ є розширеннями Крейна та Фрідріхса оператора $A_{[0,N]}$, відповідно. Використовуємо в* (4.26) *еквівалентне визначення для запобігання введенню додаткових позначень A_F та A_K (див. [23, Пропозиція 3.1]).*

4.4 Резольвентна матриця

4.4.1 Огляд теорії резольвентних матриць М.Г. Крейна

Нехай A є симетричний оператор у просторі Понтрягіна $(\mathfrak{H},[\cdot,\cdot])$ з від'ємним індексом κ_0, та нехай індекси дефекта оператора A є $(1,1)$, скалярний вектор $u \in \mathfrak{H}$ та $\widetilde{A}$ є самоспряженим розширенням оператора A діючим у просторі Понтрягіна $\widetilde{\mathfrak{H}}(\supset \mathfrak{H})$ з від'ємним індексом κ і задовольняє умову мінімальності

$$\widetilde{\mathfrak{H}} = \overline{\operatorname{span}}\{u, (\widetilde{A} - z)^{-1}u : z \in \rho(\widetilde{A})\}.$$

Функція $[(\widetilde{A}-z)^{-1}u, u]_{\mathfrak{H}}$ називається u-резольвентою оператора A з індексом κ.

Опис u-резольвент симетричного оператора був отриманий в [64, 68] в рамках теорії u-резольвентних матриць, яка буде коротко представлена нижче. Точка $z \in \mathbb{C}$ називається (див. [64, 68]) u-регулярною точкою оператора A, якщо множина $\operatorname{ran}(A-z)$ є замкненою та

$$H = \operatorname{ran}(A-z) \dotplus \operatorname{span} u.$$

Позначимо $\rho(A,u)$ множину u-регулярних точок оператора A. Визначимо два функціонали $\mathcal{P}(z)$, $\mathcal{Q}(z) : H \to \mathbb{C}$ голоморфних в $\rho(A,u)$, за формулами

$$f - (\mathcal{P}(z)f)u \in \operatorname{ran}(A-z), \quad \mathcal{Q}(z)f = [(A-z)^{-1}(f-(\mathcal{P}(z)f)u), u].$$

Визначимо також дві вектор-функції $\mathcal{P}(z)^{[*]}$, $\mathcal{Q}(z)^{[*]}$ зі значеннями в $\mathfrak{H}$

$$[\mathcal{P}(z)^{[*]}, f] := \overline{\mathcal{P}(z)f}, \quad [\mathcal{Q}(z)^{[*]}, f] := \overline{\mathcal{Q}(z)f}.$$

Безпосередня перевірка показує, що для всіх $z \in \rho(A,u)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}}(z)^{[*]} &:= \{\mathcal{P}(z)^{[*]}, \bar{z}\mathcal{P}(z)^{[*]}\} \in A^{[*]}, \\ \widehat{\mathcal{Q}}(z)^{[*]} &:= \{\mathcal{Q}(z)^{[*]}, \bar{z}\mathcal{Q}(z)^{[*]} + u\} \in A^{[*]}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Опис u-резольвент у просторі Гільберта симетричного оператора з рівними скінченними індексами дефекту був отриманий М.Г. Крейном в [64], для щільно заданого оператора у просторі Понтрягіна, М.Г. Крейном та Х. Лангером в [68]. Явна формула для резольвентних матриць у просторі Гільберта симетричного оператора в термінах граничної трійки було отримано в [31, 32]. Для нещільно визначеного симетричного оператора у просторі Понтрягіна з індексами дефекту $(1,1)$, формула та опис u-резольвент мають вигляд (див. [24, Теорема 5.2]).

Теорема 4.14 *Нехай A є симетричний оператор з індексами дефекту $(1,1)$ у просторі Понтрягіна $\mathfrak{H}$ з κ_0 від'ємними квадратами, $\Pi = \{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ є гранична трійка для лінійного відношення $A^{[*]}$, $u \in \mathfrak{H}$, $\rho(A,u) \neq \emptyset$ та*

$$\mathcal{W}(z) = \begin{pmatrix} -\Gamma_0\widehat{\mathcal{Q}}(z^{[*]} & \Gamma_0\widehat{\mathcal{P}}(z)^{[*]} \\ -\Gamma_1\widehat{\mathcal{Q}}(z)^{[*]} & \Gamma_1\widehat{\mathcal{P}}(z)^{[*]} \end{pmatrix}^*, \quad z \in \rho(A,u). \tag{4.32}$$

Тоді:

(1) $\mathcal{W}(z) = (w_{i,j}(z))_{i,j=1}^2$ є голоморфною матрицею-функцією на $\rho(A,u)$ та формула

$$[(\widetilde{A}-z)^{-1}u, u] = \frac{w_{11}(z)\tau(z) + w_{12}(z)}{w_{21}(z)\tau(z) + w_{22}(z)}, \quad z \in \rho(A,u) \cap \rho(\widetilde{A})$$

встановлює одночасну відповідність між всією множиною u-резольвент оператора A з індексом κ та множиною всіх $\tau \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_0}$ таких, що

$$w_{21}(z)\tau(z) + w_{22}(z) \not\equiv 0. \tag{4.33}$$

(2) Якщо, на додачу, підпростір $\mathfrak{H}_0 := \mathfrak{H}[-]\mathrm{dom}\, A$ є нетривіальним та $A_0 = A \dot{+} \{0\} \times \mathfrak{H}_0$, то $\widetilde{A}$ є оператором тоді і тільки тоді, коли $\tau(z)$ задовольняє умові Неванлінни

$$\tau(iy) = o(y) \quad\quad y \to \infty. \tag{4.34}$$

(3) Якщо, на додачу, оператор A має k_0 від'ємних квадратів та Π це основна гранична трійка, то формула (4.32) встановлює однозначну відповідність між множиною u-резольвент оператора A з індексом κ, таких, що $\widetilde{A}$ має k від'ємних квадратів та множиною $\tau \in \mathbf{N}_{\kappa-\kappa_0}^{k-k_0}$, така, що має місце (4.33).

4.4.2 Резольвентна матриця оператора $A_{[0,j]}$

Теорема 4.15 *[18, Теорема 3.14] Нехай гранична трійка $\Pi = \{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для оператора $A_{[0,j]}^{[*]}$ визначена за (4.15) та нехай $u = e_0$. Тоді відповідна u−резольвентна матриця оператора $A_{[0,j]}$ має наступний вигляд*

$$\mathcal{W}_{[0,j]}(z) = \begin{pmatrix} -Q_j(z) & -\widetilde{b}_j^{-1}Q_{j+1}(z) \\ P_j(z) & \widetilde{b}_j^{-1}P_{j+1}(z) \end{pmatrix}. \tag{4.35}$$

Доведення. Як показано в [18, Proposition 3.15], функціонали $\mathcal{P}(z)$ і $\mathcal{Q}(z)$ мають вигляд

$$\mathcal{P}(z)f = [f, \pi_{[0,j](z)}] \quad \text{і} \quad \mathcal{Q}(z)f = [f, \xi_{[0,j](z)}],$$

що відповідають масштабу $u = \ell_0$ і тому

$$\begin{aligned} \Gamma_1\widehat{\mathcal{Q}}_{[0,j]}(z)^{[*]} = \widetilde{b}_j^{-1}Q_{j+1}(\overline{z}) \quad \text{та} \quad \Gamma_0\widehat{\mathcal{Q}}_{[0,j]}(z)^{[*]} = Q_j(\overline{z}), \\ \Gamma_1\widehat{\mathcal{P}}_{[0,j]}(z)^{[*]} = \widetilde{b}_j^{-1}P_{j+1}(\overline{z}) \quad \text{та} \quad \Gamma_0\widehat{\mathcal{P}}_{[0,j]}(z)^{[*]} = P_j(\overline{z}). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Підставляючи (4.36) у (4.32), отримуємо (4.35). □

Пропозиція 4.16 *Нехай гранична трійка $\{\mathbb{C}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ оператора $A_{[0,j]}^{[*]}$ визначена за (4.15) та нехай $u = e_0$. Тоді u-резольвентна матриця $\mathcal{W}_{[0,j]}(z)$ допускає наступну факторизацію*

$$\mathcal{W}_{[0,j]}(z) = \mathcal{W}_0(z)\mathcal{W}_1(z)\ldots\mathcal{W}_j(z), \tag{4.37}$$

де елементарні матриці $\mathcal{W}_i(z)$ визначаються за наступними формулами

$$\mathcal{W}_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \dfrac{a_0(z)}{b_0} \end{pmatrix} \quad \textit{та} \quad \mathcal{W}_i(z) = \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{b}_{i-1}^{-1} \\ \widetilde{b}_{i-1} & \dfrac{a_i(z)}{b_i} \end{pmatrix},\ i = \overline{1, j}.$$

Доведення. Доведемо (4.37) за індукцією

(1) $\mathcal{W}_{[0,0]}(z) = \mathcal{W}_0(z)$, тобто (4.37) має місце при $j = 0$;

(2) Припустимо, що (4.37) має місце для деякого $i-1$, тобто

$$\mathcal{W}_{[0,i-1]}(z) = \mathcal{W}_0(z)\mathcal{W}_1(z)\dots\mathcal{W}_{i-1}(z) = \begin{pmatrix} -Q_{i-1}(z) & -\widetilde{b}_{i-1}^{-1}Q_i(z) \\ P_{i-1}(z) & \widetilde{b}_{i-1}^{-1}P_i(z) \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\mathcal{W}_{[0,i-1]}(z)\mathcal{W}_i(z) = \begin{pmatrix} -Q_{i-1}(z) & -\widetilde{b}_{i-1}^{-1}Q_i(z) \\ P_{i-1}(z) & \widetilde{b}_{i-1}^{-1}P_i(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\widetilde{b}_{i-1}^{-1} \\ \widetilde{b}_{i-1} & \dfrac{a_i(z)}{b_i} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -Q_i(z) & -\widetilde{b}_i^{-1}(-b_iQ_{i-1}(z) + a_i(z)Q_i(z)) \\ P_i(z) & \widetilde{b}_i^{-1}(-b_iP_{i-1}(z) + a_i(z)P_i(z)) \end{pmatrix} =$$
$$= \{\text{за (1.46)}\} = \begin{pmatrix} -Q_i(z) & -\widetilde{b}_i^{-1}Q_{i+1}(z) \\ P_i(z) & \widetilde{b}_i^{-1}P_{i+1}(z) \end{pmatrix} = \mathcal{W}_{[0,i]}(z).$$

Це доводить (4.37). □

Теорема 4.17 *([18, Теорема 3.14]) Нехай $j \in \mathbb{N}$ та Вронскіани $W_j[\widehat{f}, \widehat{\pi}_{[0,j]}(0)]$ й $W_j[\widehat{f}, \widehat{\xi}_{[0,j]}(0)]$ визначені за (4.9). Тоді:*

(1) Формули

$$\widetilde{\Gamma}_0\widehat{f} = W_j[\widehat{f}, \widehat{\pi}_{[0,j]}(0)], \quad \widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} = W_j[\widehat{f}, \widehat{\xi}_{[0,j]}(0)],$$

визначають граничну трійку $\widetilde{\Pi} = \{\mathbb{C}, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ лінійного відношення $A_{[0,j]}^{[*]}$.

(2) u-резольвентна матриця оператора $A_{[0,j]}$, що відповідає граничній трійці $\widetilde{\Pi}$ та $u = e_0$, має наступний вигляд

$$\widetilde{W}_{[0,j]}(z) = \begin{bmatrix} -W_j[\widehat{\xi}_{[0,j]}(z), \widehat{\pi}_{[0,j]}(0)] & -W_j[\widehat{\xi}_{[0,j]}(z), \widehat{\xi}_{[0,j]}(0)] \\ W_j[\widehat{\pi}_{[0,j]}(z), \widehat{\pi}_{[0,j]}(0)] & W_j[\widehat{\pi}_{[0,j]}(z), \widehat{\xi}_{[0,j]}(0)] \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

(3) Функція Вейля, котра відповідає граничній трійці $\widetilde{\Pi}$, має вигляд

$$\widetilde{M}_{[0,j]}(z) = \frac{W_j[\widehat{\pi}_{[0,j]}(z), \widehat{\xi}_{[0,j]}(0)]}{W_j[\widehat{\pi}_{[0,j]}(z), \widehat{\pi}_{[0,j]}(0)]}.$$

Доведення. Доведення (1) базується на тотожності (4.17) та

$$W_j[\widehat{f},\widehat{\xi}_{[0,j]}(0)]W_j[\widehat{g},\widehat{\pi}_{[0,j]}(0)]^* - W_j[\widehat{f},\widehat{\pi}_{[0,j]}(0)]W_j[\widehat{g},\widehat{\xi}_{[0,j]}(0)]^*$$

Застосовуючи оператори $\widetilde{\Gamma}_0$ та $\widetilde{\Gamma}_1$ до

$$\widehat{f} = \widehat{\mathcal{Q}}_{[0,j]}(z)^{[*]} = \widehat{\xi}_{[0,j]}(\overline{z}) \quad \text{та} \quad \widehat{g} = \widehat{\mathcal{P}}_{[0,j]}(z)^{[*]} = \widehat{\pi}_{[0,j]}(\overline{z}),$$

отримуємо наступні рівності

$$\widetilde{\Gamma}_0\widehat{f} = W_j[\widehat{\xi}_{[0,j]}(\overline{z}),\widehat{\pi}_{[0,j]}(0)], \quad \widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} = W_j[\widehat{\xi}_{[0,j]}(\overline{z}),\widehat{\xi}_{[0,j]}(0)].$$

$$\widetilde{\Gamma}_0\widehat{g} = W_j[\widehat{\pi}_{[0,j]}(\overline{z}),\widehat{\pi}_{[0,j]}(0)], \quad \widetilde{\Gamma}_1\widehat{g} = W_j[\widehat{\pi}_{[0,j]}(\overline{z}),\widehat{\xi}_{[0,j]}(0)], \tag{4.39}$$

З огляду на (4.32), має місце (4.38). Друга частина формули (4.38) випливає з (4.13)–(4.14).

Твердження (3) випливає з (4.39). □

Наслідок 4.18 *Формула* (4.38) *для u-резольвентної матриці оператора* $A_{[0,j]}$, *що відповідає граничній трійці* $\widetilde{\Pi}$, *може бути представлена, як*

$$\widetilde{W}_{[0,j]}(z) = -I + z\begin{bmatrix} -[\xi_{[0,j]}(z),\pi_{[0,j]}(0)]_{[0,j]} & -[\xi_{[0,j]}(z),\xi_{[0,j]}(0)]_{[0,j]} \\ [\pi_{[0,j]}(z),\pi_{[0,j]}(0)]_{[0,j]} & [\pi_{[0,j]}(z),\xi_{[0,j]}(0)]_{[0,j]} \end{bmatrix}. \tag{4.40}$$

Функція Вейля $\widetilde{M}_{[0,j]}(z)$, *яка відповідає граничній трійці* $\widetilde{\Pi}$, *дорівнює*

$$\widetilde{M}_{[0,j]}(z) = \frac{P_{j+1}(z)Q_j(0) - P_j(z)Q_{j+1}(0)}{P_{j+1}(z)P_j(0) - P_j(z)P_{j+1}(0)}$$

та має наступні властивості

$$\lim_{x\uparrow 0}\widetilde{M}_{[0,j]}(x) = \infty, \quad \lim_{x\downarrow -\infty}\widetilde{M}_{[0,j]}(x) = \frac{Q_j(0)}{P_j(0)}.$$

4.4.3 Клас $\mathbf{s} \in \mathcal{H}_{\kappa_j,2n_j-2}^{k_j,reg}$

Теорема 4.19 *([18, Теорема 3.14]) Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_j-2} \in \mathcal{H}_{\kappa_j,2n_j-2}^{k_j,reg}$, $\{\mathbb{C},\Gamma_0^+,\Gamma_1^+\}$ *є граничною трійкою для лінійного відношення* $A_{[0,j]}^{[*]}$. *Тоді:*

(1) Відповідна u−резольвентна матриця оператора $A_{[0,j]}$ *має вигляд*

$$\mathcal{W}_{[0,j]}^+(z) = \begin{pmatrix} Q_{2j+1}^+(z) & Q_{2j}^+(z) \\ P_{2j+1}^+(z) & P_{2j}^+(z) \end{pmatrix}. \tag{4.41}$$

(2) $\mathcal{W}_{[0,j]}^+ \in \mathcal{U}_{\kappa_j}(J_2)$, *де* κ_j *і* k_j *обчислюються за* (3.150).

Доведення. З (4.31) випливає, що $\widehat{\mathcal{P}}_{[0,j]}(z)^{[*]}=\widehat{\pi}_{[0,j]}(z)$ та $\widehat{\mathcal{Q}}_{[0,j]}(z)^{[*]}=\widehat{\xi}_{[0,j]}(z)$. Обчислюємо елементи $\mathcal{W}^+_{[0,j]}(z)$, отримуємо

$$\begin{aligned}\Gamma_0^+\widehat{Q}_{[0,j]}(z)^{[*]} &= \tfrac{1}{\widetilde{b}_j}(P_{j+1}(0)Q_j(z)-P_j(0)Q_{j+1}(z))=-Q^+_{2j+1}(z),\\ \Gamma_1^+\widehat{Q}_{[0,j]}(z)^{[*]} &= \tfrac{1}{P_j(0)}[\xi_{[0,j]}(z),e_{n_j}]=\tfrac{Q_j(z)}{P_j(0)}=-Q^+_{2j}(z).\end{aligned}\tag{4.42}$$

Підставляючи (4.42) та (4.30) в (4.32), маємо (4.41). □

У наступному твердженні встановлюється зв'язок між резольвентними матрицями $\widetilde{\mathcal{W}}_{[0,j]}(z)$ та $\mathcal{W}^+_{[0,j]}(z)$.

Теорема 4.20 *Нехай* $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=0}^{2n_j-2}\in\mathcal{H}^{k_j,reg}_{\kappa_j,2n_j-2}$. *Резольвентні матриці* $\widetilde{\mathcal{W}}_{[0,j]}(z)$ *та* $\mathcal{W}^+_{[0,j]}(z)$ *оператора* $A_{[0,j]}$ *пов'язані за наступною формулою*

$$\mathcal{W}^+_{[0,j]}(z)=\widetilde{\mathcal{W}}_{[0,j]}(z)V_{[0,j]},\quad \text{де}\quad V_{[0,j]}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{Q_j(0)}{P_j(0)}\\ 0 & -1\end{pmatrix}\tag{4.43}$$

Доведення. З (4.40) та (4.9) випливає, що

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{[0,j]}(z)=\begin{pmatrix}-\frac{Q_{j+1}(z)P_j(0)-Q_j(z)P_{j+1}(0)}{\widetilde{b}_j} & -\frac{Q_{j+1}(z)Q_j(0)-Q_j(z)Q_{j+1}(0)}{\widetilde{b}_j}\\ \frac{P_{j+1}(z)P_j(0)-P_j(z)P_{j+1}(0)}{\widetilde{b}_j} & \frac{P_{j+1}(z)Q_j(0)-P_j(z)Q_{j+1}(0)}{\widetilde{b}_j}\end{pmatrix}$$

і отже

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{[0,j]}(z)V_{[0,j]}=\begin{pmatrix}\frac{Q_{j+1}(z)P_j(0)-Q_j(z)P_{j+1}(0)}{\widetilde{b}_j} & -\frac{Q_j(z)(Q_{j+1}(0)P_j(0)-P_{j+1}(0)Q_j(0))}{\widetilde{b}_jP_j(0)}\\ -\frac{P_{j+1}(z)P_j(0)-P_j(z)P_{j+1}(0)}{\widetilde{b}_j} & \frac{P_j(z)(Q_{j+1}(0)P_j(0)-P_{j+1}(0)Q_j(0))}{\widetilde{b}_jP_j(0)}\end{pmatrix}$$

(4.43) випливає з формули Ліувілля-Остроградського (1.56). □

Зазначимо, що матриця функція $\mathcal{W}^+_{[0,j]}(z)$ співпадає з $\mathcal{W}^+_{2j+1}(z)$, яка була введена в [28]. Нагадаємо, що $\mathcal{W}^+_{2j+1}(z)$ допускає наступну факторизацію

$$W^+_{2j-1}(z)=M_1(z)L_1\dots L_{j-1}M_j(z)\tag{4.44}$$

де матриці $M_i(z)$, L_i визначені за формулами (3.132), поліноми $m_i(z)$ та числа l_i визначені за (3.159)–(3.160).

У наступному твердженні, введемо ще одну резольвентну матрицю, яка буде використана для опису парної проблеми моментів.

Пропозиція 4.21 *Нехай* $\mathbf{s}=\{s_i\}_{i=0}^{2n_j-2}\in\mathcal{H}^{k_j,reg}_{\kappa_j,2n_j-1}$, $\mathcal{N}(\boldsymbol{s})=\{n_i\}_{i=1}^{j}$ *та гранична трійка* $\Pi^{++}=\{\mathbb{C},\Gamma_0^{++},\Gamma_1^{++}\}$ *лінійного відношення* $A^{[*]}_{[0,j]}$ *визначена формулою*

$$\Gamma_1^{++}\widehat{f}=\Gamma_1^+\widehat{f}+\ell_j\Gamma_0^+\widehat{f},\quad \Gamma_0^{++}\widehat{f}=\Gamma_0^+\widehat{f},$$

де гранична трійка $\Pi^+=\{\mathbb{C},\Gamma_0^+,\Gamma_1^+\}$ *задана* (4.4). *Тоді:*

(1) відповідна и-резольвентна матриця $\mathcal{W}^{++}_{[0,j]}(z)$ *має вигляд*

$$\mathcal{W}^{++}_{[0,j]}(z) = \begin{pmatrix} Q^+_{2j-1}(z) & Q^+_{2j}(z) \\ P^+_{2j-1}(z) & P^+_{2j}(z) \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

(2) $\mathcal{W}^{++}_{[0,j]} \in \mathcal{U}_{\kappa_j}(J_2)$, *де* κ_j *обчислюються за* (3.166).

Ці два твердження дозволяють сформулювати наступний результат факторизації для резольвентної матриці $\mathcal{W}^{+}_{[0,j]}(z)$.

Теорема 4.22 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{H}^{k_0,reg}_{\kappa_0,}$ *та* $N \in \mathbb{N}$ *є досить великим, щоб рівності*

$$\kappa_0 = \nu_-(S_{n_j}) \quad \text{та} \quad k_0 = \nu_-(S^+_{n_j})$$

мали місце для $j \geq N$, $j \in \mathbb{N}$. *Нехай* $\widetilde{\mathfrak{J}}_{[N,j]}$ *є матриця Якобі*

$$\widetilde{\mathfrak{J}}_{[N,j]} = \mathfrak{J}_{[N,j]} + \operatorname{diag}\left(\frac{1}{m_N l_{N-1}}, 0, \dots, 0\right).$$

Тоді резольвентна матриця $\mathcal{W}^{+}_{[0,j]}(z)$ *оператора* $A_{[0,j]}$ *допускає факторизацію*

$$\mathcal{W}^{+}_{[0,j]}(z) = \mathcal{W}^{++}_{[0,N-1]}(z)\mathcal{W}^{+}_{[N,j]}(z), \tag{4.46}$$

де $\mathcal{W}^{++}_{[0,N-1]}(z)$ *є резольвентною матрицею для оператора* $A_{[0,N-1]}$, *вигляду* (4.45), *що відповідає граничній трійці* $\Pi^{++}_{[0,N-1]}$, *та* $\mathcal{W}^{+}_{[N,j]}(z)$ *є резольвентною матрицею оператора*

$$\widetilde{A}_{[N,j]} = \widetilde{\mathfrak{J}}_{[N,j]}|_{\operatorname{dom}(\widetilde{A}_{[N,j]})}, \quad \operatorname{dom}(\widetilde{A}_{[N,j]}) = \{f \in \mathfrak{H}_{[N,j]} : [f, e_{n_j}] = 0\},$$

яка відповідає граничній трійці $\Pi^{+}_{[N,j]}$, *вигляду* (4.27).

Доведення. За Пропозицією 4.21, резольвентна матриця оператора $\widetilde{A}_{[N,j]}$, яка відповідає граничній трійці $\Pi^{+}_{[N,j]}$, допускає факторизацію

$$\mathcal{W}^{+}_{[N,j]}(z) = \widetilde{M}_{N+1}\widetilde{L}_{N+1}\dots\widetilde{M}_{j+1}.$$

де $\widetilde{M}_i$ та $\widetilde{L}_i$ є матриці породжені числами $\widetilde{m}_i$, $\widetilde{l}_i$, які визначені за (див. [27, Теорема 4.1])

$$\widetilde{m}_i = m_i, \ (i = N+1, \dots, j+1), \quad \widetilde{l}_i = l_i, \ (i = N+2, \dots, j),$$

та рівностями

$$\frac{1}{\widetilde{m}_{N+1}\widetilde{l}_{N+1}} = -\widetilde{a}_N(0) = -a_N(0) - \frac{1}{m_{N+1}l_N} = \frac{1}{m_{N+1}l_{N+1}}$$

випливає, що $\widetilde{l}_{N+1} = l_{N+1}$. Тому,

$$\mathcal{W}^{+}_{[N,j]}(z) = M_{N+1}L_{N+1}\dots M_{j+1}. \tag{4.47}$$

З (4.44) випливає, що $\mathcal{W}^{+}_{[0,j]}(z)$ допускає факторизацію (4.46), де

$$\mathcal{W}^{++}_{[0,j-1]}(z) = M_1L_1\dots M_jL_j, \quad \mathcal{W}^{++}_{[0,N-1]}(z) = M_1L_1\dots M_NL_N, \tag{4.48}$$

Це завершує доведення. □

4.5 Зрізана індефінітна проблема моментів

Розглянемо зрізані індефінітні проблеми моментів $MP_\kappa(\mathbf{s},\ell)$ та $MP^k_\kappa(\mathbf{s},\ell)$. Нагадаємо, що проблема моментів $MP_\kappa(\mathbf{s},\ell)$ називається *парною* або *непарною* відповідно до парності числа $\ell+1$ заданих моментів. Непарна проблема моментів $MP^k_\kappa(\mathbf{s},2n-2)$ називається невиродженою, якщо $D_n = \det S_n \neq 0$. Проблема моментів $MP_\kappa(\mathbf{s},\ell)$ була досліджена в роботах [22], [34], [69], [71].

Нагадаємо опис множини $\mathcal{M}_\kappa(\mathbf{s},2n_N-2)$ з [18, Пропозиція 3.31].

Пропозиція 4.23 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-2} \in \mathcal{H}$ *та* $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_i\}_{i=1}^{N}$ *є множиною нормальних індексів послідовності* $\mathbf{s}$ *та нехай* $\mathcal{W}_{[0,N-1]} = (w_{ij})_{i,j=1}^2$. *Проблема моментів* $MP_\kappa(\boldsymbol{s},2n_N-2)$ *є розв'язною тоді і тільки тоді, коли* $\kappa_N := \nu_-(S_{n_N}) \le \kappa$ *та формула*

$$f(z) = \frac{w_{11}(z)\tau(z) + w_{12}(z)}{w_{21}(z)\tau(z) + w_{22}(z)}, \tag{4.49}$$

встановлює відповідність між класом $\mathcal{M}_\kappa(\boldsymbol{s},2n_N-2)$ *та множиною функцій* $\tau \in N_{\kappa-\kappa_N}$, *які задовольняють умові Неванлінни* (4.34).

Операторний підхід до $MP_\kappa(\mathbf{s},2n_N-2)$ в [69] базується на формулі

$$f(z) = [(\widetilde{A} - zI)^{-1}e_0, e_0]_{[0,N-1]}, \tag{4.50}$$

яка дає опис множини $\mathcal{M}_\kappa(\mathbf{s},2n_N-2)$, коли $\widetilde{A}$ пробігає множину всіх самоспряжених розширень оператора $A_{[0,N-1]}$. В [69] була розглянута повна проблема моментів. Опис (4.49) базувався на цій формулі та на Теоремі 4.14. Інші докази цієї формули було представлено в [14], [17] та [18] при використанні алгоритму Шура.

Проблема $MP^k_\kappa(\mathbf{s},2n_N)$ була поставлена і вирішена методами теорії розширень в [22, Теорема 4.14].

Теорема 4.24 *Нехай* $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-2} \in \mathcal{H}^{reg}$, $n = n_N$ *та матриця* $S_n = (s_{i+j})_{i,j=0}^{n-1}$ *невироджена й* $\kappa_N := \nu_-(S_n) \le \kappa$. *Тоді проблема моментів* $MP_\kappa(\boldsymbol{s}, 2n-2)$ *є розв'язною та формула*

$$F(z) = [(\widetilde{A} - z)^{-1}u, u]_{[0,N-1]}$$

встановлює зв'язок між множиною усіх розв'язків зрізаної проблеми моментів $MP_\kappa(\mathbf{s}, 2n_N-2)$ *та множиною усіх* u*-резольвент симетричного оператора* $A_{[0,N-1]}$ *з індексом* κ, *породжених однозначними розширеннями самоспряжених* $\widetilde{A}$.

Якщо, на додаток, матриця $S^+_{n_N-1} = (s_{i+j+1})_{i,j=0}^{n_N-2}$ *невироджена та* $k_N := \nu_-(S^+_{n_N-1}) \le k$, *то проблема моментів* $MP^k_\kappa(\boldsymbol{s}, 2n_N-2)$ *є розв'язною та формула* (4.50) *встановлює зв'язок між множиною усіх розв'язків зрізаної проблеми моментів* $MP^k_\kappa(\boldsymbol{s}, 2n_N-2)$ *та множиною усіх* u*-резольвент симетричного оператора* $A_{[0,N-1]}$ *з індексом* κ, *таких що розширення* $\widetilde{A}$ *має* k *невід'ємних квадратів.*

Доведення Теореми 3.27

Оскільки $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{2n_N-2} \in \mathcal{H}^{reg}$, матриця $S^+_{n-1} = (s_{i+j+1})_{i,j=0}^{n-2}$ невироджена та $k_N \coloneqq \nu_-(S^+_{n-1}) \le k$, за Теоремою 4.24 проблема моментів $MP^k_\kappa(\mathbf{s}, 2n_N-2)$ має розв'язки та формула (4.50) встановлює зв'язок між множиною усіх розв'язків усіченої проблеми моментів $MP^k_\kappa(\mathbf{s}, 2n_N-2)$ та множиною усіх u-резольвент симетричного оператора $A_{[0,N-1]}$ з індексом $\kappa - \kappa_N$, такого що розширення $\widetilde{A}$ має k невід'ємних квадратів.

Розглянемо граничну трійку $\Pi^+_{[0,N-1]} = \{\mathbb{C}, \Gamma^+_0, \Gamma^+_1\}$ для оператора $A_{[0,N-1]}$. За Пропозицією 4.12, гранична трійка $\Pi^+_{[0,N-1]}$ є основною. Тому, в силу Теореми 4.24 множина усіх u-резольвент в (4.50) описуються формулами

$$[(\widetilde{A} - z)^{-1}u, u]_{[0,N-1]} = T_{\mathcal{W}^+_{[0,N-1]}}[\tau(z)],$$

де $\tau \in \mathbf{N}^{k-k_N}_{\kappa-\kappa_N}$. Більш того, за Теоремою 4.14 u-резольвента $[(\widetilde{A}-z)^{-1}u, u]_{[0,N-1]}$ породжуються однозначними самоспряженими розширеннями $\widetilde{A}$ тоді і тільки тоді, коли $\tau(z) = o(1)$, $z \widehat{\rightarrow} \infty$. Що завершує доведення Теореми 3.27 □

4.6 Повна індефінітна проблема моментів $MP^k_\kappa(\mathbf{s})$.

4.6.1 Опис розв'язків

Зв'яжемо з нескінченною послідовністю $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^\infty$ простір $\mathfrak{H}_{[0,\infty)}$ з індефінітним скалярним добутком

$$[x, y]_{[0,\infty)} = (G_{[0,\infty)}x, y), \quad G_{[0,\infty)} = \mathrm{diag}(\widetilde{b}_0 E_0^{-1}, \widetilde{b}_1 E_1^{-1}, \ldots). \qquad (4.51)$$

Якщо $\mathbf{s} \in \mathcal{H}_\kappa$, тоді простір $\mathfrak{H}_{[0,\infty)}$ є простором Понтрягіна (див. Розділ (1.6)), з негативним індексом

$$\kappa = \mathrm{ind}_- \mathfrak{H}_{[0,\infty)}.$$

Відповідно до матриці $\mathfrak{J}^T_{[0,\infty)}$ існує *мінімальний оператор* $A_{\min}$, визначений як замкнення оператора $\mathfrak{J}^T_{[0,\infty)}$. Оператор $A_{\min}$ є симетричним у просторі $\mathfrak{H}_{[0,\infty)}$.

Аналогічно до мінімального оператора, розглянемо *максимальний оператор* $A_{\max}$, визначений як звуження $\mathfrak{J}^T_{[0,\infty)}$ на області визначення

$$\mathrm{dom}\,(A_{\max}) := \{x \in \mathfrak{H}_{[0,\infty)} : \mathfrak{J}^T_{[0,\infty)} x \in \mathfrak{H}_{[0,\infty)}\}.$$

Як відомо з [18,69], оператор $A_{\min}$ є самоспряженим в $\mathfrak{H}_{[0,\infty)}$, тоді і тільки тоді, коли $A_{\min} = A_{\max}$. Легко бачити, що $A_{\max} = A_{\min}^{[*]}$. З (1.64) отримуємо, що дефектний підпростір $\mathfrak{N}_z(A_{\min}) := \ker(A_{\max} - zI)$ є або одномірним підпростором, який породжений $\pi(z)$ або є тривіальним. Поєднуючи ці зауваження з Лемою 3.25, маємо наступне твердження.

Пропозиція 4.25 *Нехай $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^\infty \in \mathcal{H}_\kappa$. Тоді наступні твердження є еквівалентними:*

(1) Проблема моментів $MP_\kappa(\boldsymbol{s})$ є невизначенною;

(2) Дефектні індекси оператора $A_{\min}$ дорівнюють 1;

(3) "Момент інерції" для струни є скінченним

$$\sum_{j=1}^\infty x_j^2 m_j(0) < \infty, \quad \text{де} \quad x_j = l_1 + \dots + l_j.$$

Результати [69] для індефінітної проблеми моментів можна переформулювати в термінах узагальнених матриць Якобі J, наступним чином.

Теорема 4.26 *Нехай $\nu_-(S_n) \le \kappa$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_N$ та проблема моментів $MP_\kappa(\boldsymbol{s})$ є невизначеною. Тоді:*

(1) Для кожного $f \in \mathfrak{H}_{[0,\infty)}$ існують скінченні границі

$$W_\infty[f, \pi(\lambda_0)] = \lim_{j\to\infty} W_j[f, \pi(\lambda_0)], \quad W_\infty[f, \xi(\lambda_0)] = \lim_{j\to\infty} W_j[f, \xi(\lambda_0)];$$

(2) Гранична трійка для оператора $A_{\max}$ оже бути задана рівностями

$$\widetilde{\Gamma}_0 \widehat{f} = W_\infty[\widehat{f}, \widehat{\pi}(0)], \quad \widetilde{\Gamma}_1 \widehat{f} = W_\infty[\widehat{f}, \widehat{\xi}(0)]; \tag{4.52}$$

(3) Відповідна резольвентна матриця має вигляд

$$\widetilde{\mathcal{W}}_{[0,\infty)}(\lambda) = \begin{pmatrix} -W_\infty[\widehat{\xi}(\lambda), \widehat{\pi}(0)] & -W_\infty[\widehat{\xi}(\lambda), \widehat{\xi}(0)] \\ W_\infty[\widehat{\pi}(\lambda), \widehat{\pi}(0)] & W_\infty[\widehat{\pi}(\lambda), \widehat{\xi}(0)] \end{pmatrix}.$$

Матриця функція $\widetilde{\mathcal{W}}_{[0,\infty)}(z) = (\widetilde{w}_{ij}(z))_{i,j=1}^2$ є цілою функцією мінімального експоненціального типу.

(4) Функція Вейля оператора A, яка відповідає граничній трійці (4.52), має вигляд

$$\widetilde{M}_{[0,\infty]}(z) = -\frac{W_\infty[\widehat{\pi}(z), \widehat{\pi}(0)]}{W_\infty[\widehat{\pi}(z), \widehat{\xi}(0)]}.$$

(5) Формула

$$f(z) = \frac{\widetilde{w}_{11}(z)\tau(z) + \widetilde{w}_{12}(z)}{\widetilde{w}_{21}(z)\tau(z) + \widetilde{w}_{22}(z)}$$

встановлює зв'язок між класом $\mathcal{M}_\kappa(\boldsymbol{s})$ та множиною функцій $\tau \in N_{\kappa-\kappa_1}$.

Припустимо, що $\mathbf{s} = \{s_j\}_{j=0}^\infty \in \mathcal{H}_{\kappa_1}^{k_1,reg}$ та N є досить великим, так що

$$\nu_-(S_j) = \nu_-(S_{n_N}), \quad \nu_-(S_j^{(1)}) = \nu_-(S_{n_N}^{(1)}) \quad \text{для кожного} \quad j \geq n_N.$$

Тоді за Теоремою 4.22 індефінітна проблема моментів Стілт'єса $\mathcal{M}_\kappa^k(\mathbf{s})$ може бути зведена до класичної проблеми моментів Стілт'єса $\mathcal{M}_0^0(\mathbf{s}^{(N)})$, де індукована послідовність $\mathbf{s}^{(N)}$ може бути обчислена рекурсивно, як і в [28, Теореми 3.3, 3.5]. Альтернативно, послідовність $\mathbf{s}^{(N)}$ можна знайти як послідовність коефіцієнтів розвинення в ряд $-\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{s_i^{(N)}}{z^{i+1}}$, який відповідає неперервному дробу

$$\cfrac{1}{-zm_{N+1} + \cfrac{1}{l_{N+1} + \cfrac{1}{-zm_{N+2} + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Відмітимо, що послідовність $\mathbf{s}^{(N)}$ належить до класу $\mathcal{H}_0^0$.

Теорема 4.27 *Нехай $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^\infty \in \mathcal{H}_\kappa^{k,reg}$ та $\kappa, k \in \mathbb{N}$. Тоді: проблема моментів $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s})$ є розв'язною. Проблема моментів $MP_\kappa^k(\boldsymbol{s})$ є невизначеною тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{j=1}^\infty m_j(0) < \infty \quad \text{та} \quad \sum_{j=1}^\infty l_j < \infty. \tag{4.53}$$

Якщо (4.53) має місце, то:

(1) Послідовність резольвентних матриць $\mathcal{W}^{+}_{[0,n]}(z)$ збігається до цілої матрицi-функції $\mathcal{W}^{+}_{[0,\infty)}(z) = (w^{+}_{ij}(z))^{2}_{i,j=1}$ порядку не вище $\frac{1}{2}$.

(2) Матриця функція $\mathcal{W}^{+}_{[0,\infty)}(z)$ є резольвентною матрицею для оператора $A_{\max}$, що відповідає граничній трійці

$$\Gamma_0^+ \widehat{f} = -W_\infty[\widehat{f}, \widehat{\pi}(0)], \quad \Gamma_1^+ \widehat{f} = -W_\infty[\widehat{f}, \widehat{\xi}(0)] - LW_\infty[\widehat{f}, \widehat{\pi}(0)]; \tag{4.54}$$

(3) Формула

$$f(z) = \frac{w^{+}_{11}(z)\tau(z) + w^{+}_{12}(z)}{w^{+}_{21}(z)\tau(z) + w^{+}_{22}(z)}$$

встановлює взаємно–однозначну відповідність між класом $\mathcal{M}^k_\kappa(\boldsymbol{s})$ та множиною функцій $\tau \in N_0^0$.

Доведення. **1.** *Перевірка критерію* (4.53)*:* З Пропозиції 4.20 випливає, що існує взаємно-однозначна відповідність між розв'язками f проблеми $\mathcal{M}^k_\kappa(\mathbf{s})$ та розв'язками φ проблеми $\mathcal{M}^0_0(\mathbf{s}^{(N)})$, що задана дробово-лінійним перетворенням

$$f(z) = T_{\mathcal{W}^{++}_{[0,N]}(z)}[\varphi(z)]. \tag{4.55}$$

Тому, індефінітна проблема моментів $\mathcal{M}^k_\kappa(\mathbf{s})$ є невизначеною тоді і тільки тоді, коли класична проблема Стілт'єса $\mathcal{M}^0_0(\mathbf{s}^{(N)})$ є невизначеною. Як відомо, див. [56, Апендикс II.13], проблема $\mathcal{M}^0_0(\mathbf{s}^{(N)})$ є невизначеною тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} m_j < \infty \quad \text{та} \quad \sum_{j=N+1}^{\infty} l_j < \infty,$$

тобто, якщо (4.53) має місце. Звернемо увагу на те, що для класичної проблеми моментів Стілт'єса $\mathcal{M}^0_0(\mathbf{s}^{(N)})$ відповідні маси $m_j^{(N)}$ та довжини $l_j^{(N)}$ є константами, які співпадають з m_{j+N} та l_{j+N}, відповідно.

Тепер лишилося відмітити, що множина розв'язків f проблеми $\mathcal{M}^k_\kappa(\mathbf{s})$ та множина розв'язків φ проблеми $\mathcal{M}^0_0(\mathbf{s}^{(N)})$ також пов'язані з дробово-лінійними перетвореннями (4.55) і, отже, $\mathbf{s}^{(N)} \in \mathcal{H}$ та проблема $\mathcal{M}^0_0(\mathbf{s}^{(N)})$ є невизначеною тоді і тільки тоді, коли проблема $\mathcal{M}^0_0(\mathbf{s}^{(N)})$ є невизначеною (див. [23]), що призводить до умови (4.53).

2. *Перевірка (1):* Збіжність послідовності резольвентних матриць $\mathcal{W}^{+}_{[0,n]}(z)$ випливає з Теореми 4.26 та формули (4.43)

$$\mathcal{W}^{+}_{[0,n]}(z) = \widetilde{\mathcal{W}}_{[0,n]}(z) \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{Q_n(0)}{P_n(0)} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

де $\dfrac{Q_n(0)}{P_n(0)} = -L := -\sum_{j=0}^{n} l_j$ в силу (3.130). Переходячи до границі отримуємо, що матриця–функція $\mathcal{W}^{+}_{[0,\infty]}(z)$ пов'язана з $\widetilde{\mathcal{W}}_{[0,\infty]}(z)$ за формулою

$$\mathcal{W}^{+}_{[0,\infty]}(z) = \widetilde{\mathcal{W}}_{[0,\infty]}(z)\begin{pmatrix} -1 & -L \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.56}$$

3. *Перевірка(2):* Формули (4.54) для граничною трійкою $\{\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$ можна переписати у вигляді

$$\Gamma_0^+\widehat{f} = -\widetilde{\Gamma}_0\widehat{f}, \quad \Gamma_1^+\widehat{f} = -\widetilde{\Gamma}_1\widehat{f} - L\widetilde{\Gamma}_0\widehat{f}. \tag{4.57}$$

За Теоремою 4.26, випливає що $\{\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$ є гранична трійка для $A_{\max}$. Більш того, з (4.57) випливає, що резольвентна матриця для оператора $A_{\min}$, яка відповідає граничній трійці $\{\mathbb{C}, \Gamma_0^+, \Gamma_1^+\}$, пов'язана з резольвентною матрицею $\widetilde{\mathcal{W}}_{[0,\infty]}(z)$ за формулою (4.56) і, отже, вона співпадає з $\mathcal{W}^{+}_{[0,\infty]}(z)$.

4. *Перевірка (3):* Останнє твердження випливає з формули (4.55) та опису розв'язків проблеми $\mathcal{M}_0^0(\mathbf{s}^{(N)})$, що наведені в [23]. $\square$

4.7 Апроксиманта Паде

Означення 4.28 $[n/k]$ *Апроксимантою Паде формального розвинення*

$$-\sum_{j=0}^{\infty} \frac{s_j}{z^{j+1}} \tag{4.58}$$

називаеться раціональна функція $f^{[n/k]}(z) = \dfrac{A^{[n/k]}(1/z)}{B^{[n/k]}(1/z)}$, *яка є відношенням поліномів* $A^{[n/k]}$, $B^{[n/k]}$ *степеня* n, k, *відповідно, таких що* $B^{[n/k]}(0) \neq 0$ *та*

$$f^{[n/k]}(z) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s_j}{z^{j+1}} = O\left(\frac{1}{z^{n+k+1}}\right) \quad z\widehat{\rightarrow}\infty.$$

Явна формула для діагональних апроксимант Паде була знайдена в [17]. Зараз наведемо ще один доказ цієї формули.

Пропозиція 4.29 *Нехай* $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{H}_{\kappa}^{k,reg}$. *Тоді* $[n_j/n_j]$ *апроксиманта Паде формального розвинення* (4.58) *існує, якщо* $n_j \in \mathcal{N}(\mathbf{s})$ *та*

$$f^{[n_j/n_j]}(z) = -\frac{Q_j(z)}{P_j(z)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Доведення. З (3.122) та Пропозиції 4.21 випливає, що функція

$$-\frac{Q_j(z)}{P_j(z)} = \frac{Q^+_{2j}(z)}{P^+_{2j}(z)} = T_{\mathcal{W}^{++}_{[0,j]}(z)}[0] \in \mathcal{M}(\mathbf{s}, 2n_j - 1)$$

належить до $\mathcal{M}(\mathbf{s}, 2n_j - 1)$. Тому, функція $-\frac{Q_j(z)}{P_j(z)}$ має асимптотику

$$-\frac{Q_j(z)}{P_j(z)} = -\frac{s_0}{z} - \cdots - \frac{s_{2n_j-1}}{z^{2n_j}} + O\left(\frac{1}{z^{2n_j+1}}\right) \qquad z\widehat{\to}\infty.$$

$A(z) := z^{n_j} Q_j(\frac{1}{z})$, $B(z) := z^{n_j} P_j(\frac{1}{z})$ є поліноми степеня n_j та $B(0) = 1$. За Означенням 4.28 функція $-\dfrac{Q_j(z)}{P_j(z)}$ є $[n_j/n_j]$ апроксимантою Паде формального розвинення (4.58). □

У наступній теоремі наведено формулу для піддіагональної апроксиманти Паде, в термінах узагальнених поліномів Стілт'єса, доводиться аналогічно.

Теорема 4.30 *Нехай* $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{H}^{reg}$. *Тоді* $[n_j/n_j - 1]$ *є апроксимантою Паде до* (4.58) *існують та мають наступний вигляд*

$$f^{[n_j/n_j-1]}(z) = \frac{Q^+_{2j-1}(z)}{P^+_{2j-1}(z)}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Доведення. З формули (3.122) випливає, що

$$\frac{Q^+_{2j-1}(z)}{P^+_{2j-1}(z)} = T_{W^+_{[0,j]}(z)}[\infty].$$

За Теоремою 3.27 функція $\frac{Q^+_{2j-1}(z)}{P^+_{2j-1}(z)} \in \mathcal{M}(\mathbf{s}, 2n_j - 2)$ має асимптотичне розвинення

$$\frac{Q^+_{2j-1}(z)}{P^+_{2j-1}(z)} = -\frac{s_0}{z} - \cdots - \frac{s_{2n_j-2}}{z^{2n_j-1}} + O(\frac{1}{z^{2n_j}}) \quad (z\widehat{\to}\infty).$$

$A(z) := z^{n_j} Q^+_{2j-1}(\frac{1}{z})$ є поліном степеня n_j та

$$B(z) := z^{n_j}(P_j(1/z)P_{j-1}(0) - P_{j-1}(1/z)P_j(0))$$

поліном степеня n_j та $B(0) = P_{j-1}(0) \neq 0$. За Означенням 4.28 функція $\frac{Q^+_{2j-1}(z)}{P^+_{2j-1}(z)}$ є $[n_j/n_j - 1]$ апроксимантою Паде формального розвинення. (4.58). □

4.8 Приклад

Розглянемо наступну послідовність $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$, де

$$s_0 = 1 \quad \text{та} \quad s_i = \frac{\Gamma(\alpha+i)}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Ця послідовність $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ породжує поліноми Лагерра $P_n(x,\alpha)$ першого та $Q_n(x,\alpha)$ другого роду ($\alpha \neq 0$), за формулами (див. [87, с. 109-113])

$$P_n(x,\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (-1)^{n+k} x^k,$$

$$Q_n(x,\alpha) = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{n+k+j} \binom{n}{k+j} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+j+1)}{\Gamma(\alpha+k+j+1)\Gamma(\alpha+1)}.$$

Поліноми першого Лагерра роду задовольняють наступним умовам:

$$P_n(0,\alpha) = (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)}, \qquad \text{для кожного } n \in \mathbb{Z}_+$$

Отже, отримуємо, що $P_n(0,\alpha) \neq 0$ та за Лемою 2.9, випливає, що послідовність $\mathbf{s} =$ є регулярною. Поліноми Лагерра є розв'язками наступної системи різницевих рівнянь

$$xy_n = y_{n+1} + (2n+\alpha+1)y_n + (n+\alpha)ny_{n-1} \tag{4.59}$$

з початковими умовами

$$P_{-1}(x,\alpha) \equiv 0, \quad P_0(x,\alpha) \equiv 1, \qquad Q_{-1}(x,\alpha) \equiv 1, \quad Q_0(x,\alpha) \equiv 0.$$

З послідовністю $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ пов'язаний наступний $J-$ дріб

$$-\cfrac{1}{z-(1+\alpha)-\cfrac{1+\alpha}{z-(3+\alpha)-\cfrac{2(2+\alpha)}{z-(5+\alpha)-\ddots}}}.$$

За Теоремою 2.12, отримуємо $S-$ дріб, який відповідає $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$

$$\cfrac{1}{-zm_1+\cfrac{1}{l_1+\cfrac{1}{-zm_2+\ddots}}},$$

де числа m_i та l_i визначаються за наступними формулами

$$m_i = \frac{\Gamma(\alpha+i)}{(i-1)!\Gamma(1+\alpha)} \quad \text{та} \quad l_i = \frac{(i-1)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+i+\alpha)}.$$

За Означенням 3.21, поліноми Стілт'єса першого та другого роду, які відповідають послідовності $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$, мають наступний вигляд

$$P_{2n}^{+}(z) = \Gamma(\alpha+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k z^k}{\Gamma(\alpha+k+1)},$$

$$P_{2n-1}^{+}(z) = -\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-1)!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^k(-1)^{k-1}(n-1)!k}{\Gamma(\alpha+k+1)k!(n-k)!} + \frac{z^n(-1)^{n-1}}{\Gamma(1+n+\alpha)} \right),$$

$$Q_{2n-1}^{+}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1+n)}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^{k+j-1}\Gamma(\alpha+j+1)(k+j)(n-1)!}{\Gamma(\alpha+j+k+1)(k+j)!(n-j-k)!},$$

$$Q_{2n}^{+}(z) = \sum_{k=1}^{n} z^{k-1} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{k+j} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+j+k+1)}.$$

За Пропозицією 4.30, $[n/n-1]$ апроксиманта Паде формального ряду $-\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \frac{1}{z^n}$ має вигляд

$$f^{[n/n-1]}(z) = \frac{Q_{2n-1}^{+}(z)}{P_{2n-1}^{+}(z)}.$$

4.9 Висновки

Результати глави були представлені в [29].

Розглянуто операторний підхід до зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Показано, що кожна індефінітна проблема моментів Стілт'єса відповідає деякій узагальненій матриці Якобі, що породжує симетричний оператор $A_{[0,N]}$ у просторі Понтрягіна. Знайдено граничні трійки для спряженого лінійного відношення $A_{[0,N]}^{[*]}$, відповідні функцію Вейля і u-резольвентну матрицю М.Г. Крейна. Показано, що u-резольвентні матриці для оператора $A_{[0,N]}$ співпадають з резольвентними матрицями зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Знайдено критерій невизначеності повної проблеми моментів Стілт'єса і отримано опис її розв'язків.

5 Перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі

5.1 Перетворення Дарбу без параметра узагальнених матриць Якобі

У цьому розділі досліджуємо перетворення Дарбу без параметра узагальнених матриць Якобі $\mathfrak{J}$ та доведемо деякі властивості для поліномів першого та другого роду, асоційованих з матрицею $\mathfrak{J}$. Будемо використовувати наступні факторизаційні матриці $\mathfrak{L}$ і $\mathfrak{U}$, де $\mathfrak{L}$ і $\mathfrak{U}$ є нижньотрикутна та верхньотрикутна блочні матриці наступного виду

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_0 & 0 & & \\ \mathfrak{L}_1 & \mathfrak{A}_1 & 0 & \\ & \mathfrak{L}_2 & \mathfrak{A}_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_0 & \mathfrak{D}_0 & & \\ 0 & \mathfrak{U}_1 & \mathfrak{D}_1 & \\ & 0 & \mathfrak{U}_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

діагональні блоки $\mathfrak{A}_i$ і $\mathfrak{U}_i$ є матриці $\ell_i \times \ell_i$ розміру.

$$\mathfrak{A}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -a_1^{(i)} & \cdots & -a_{\ell_i-2}^{(i)} & -a_{\ell_i-1}^{(i)} & 1 \end{pmatrix} \text{ та } \mathfrak{U}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\mathfrak{u}_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathfrak{u}_i \neq 0, \tag{5.2}$$

блоки $\mathfrak{L}_{i+1}$ та $\mathfrak{D}_i$ є матриці розміру $\ell_{i+1} \times \ell_i$ та $\ell_i \times \ell_{i+1}$, відповідно

$$\mathfrak{L}_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{l}_{i+1} \end{pmatrix} \ \mathfrak{l}_{i+1} \neq 0\ , \ \mathfrak{D}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Проте, якщо $\ell_i = \ell_{i+1} = 1$, тоді блоки матриць мають вигляд

$$\mathfrak{U}_i = (-\mathfrak{u}_i), \quad \mathfrak{L}_{i+1} = (\mathfrak{l}_{i+1}), \quad \mathfrak{D}_i = (1) \quad \text{та} \quad \mathfrak{A}_i = (1). \tag{5.4}$$

Говорять, що узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}-$ факторизацію, якщо $\mathfrak{J}$ може бути представлена в наступному вигляді $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$, де $\mathfrak{L}$ і $\mathfrak{U}$ визначені за формулами (5.1)–(5.3).

Означення 5.1 *Нехай узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ – факторизацію виду (5.1)–(5.3). Перетворення*

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U} \to \mathfrak{U}\mathfrak{L} = \mathfrak{J}^{(p)}, \tag{5.5}$$

називається перетворення Дарбу без параметра *матриці $\mathfrak{J}$, тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{J}^{(p)}$ є узагальнена матриця Якобі.*

5.1.1 $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ – факторизація узагальнених матриць Якобі

Лема 5.2 *Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{S}$ та нехай $\ell_j := n_{j+1} - n_j \geq 1$, $j \in \mathbb{Z}_+$, де $n_0 = 0$ і $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ є множина нормальних індексів послідовності $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$. Нехай $\mathfrak{L}$ і $\mathfrak{U}$ визначені за формулами (5.1)–(5.3). Тоді $\mathfrak{J}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}-$ факторизацію (5.1) –(5.3) тоді і тільки тоді, коли система рівнянь*

$$\mathfrak{u}_0 = a_0^{(0)}, \quad -\mathfrak{u}_i + \mathfrak{l}_i = -a_0^{(i)}, \quad i \in \mathbb{N}; \quad -\mathfrak{u}_i \mathfrak{l}_{i+1} = b_{i+1}, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \tag{5.6}$$

має розв'язок.

Доведення. Розглянемо добуток $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ матриць $\mathfrak{L}$ і $\mathfrak{U}$

$$\mathfrak{L}\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_0\mathfrak{U}_0 & \mathfrak{A}_0\mathfrak{D}_0 & & \\ \mathfrak{L}_1\mathfrak{U}_0 & \mathfrak{L}_1\mathfrak{D}_0 + \mathfrak{A}_1\mathfrak{U}_1 & \mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1 & \\ & \mathfrak{L}_2\mathfrak{U}_1 & \mathfrak{L}_2\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{U}_2 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

де блоки $\mathfrak{A}_i\mathfrak{U}_i$ та $\mathfrak{L}_{i+1}\mathfrak{D}_i$ є матриці порядку $\ell_i \times \ell_i$ та $\ell_{i+1} \times \ell_{i+1}$, відповідно

$$\mathfrak{A}_i\mathfrak{U}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\mathfrak{u}_i & -a_1^{(i)} & \cdots & -a_{\ell_i-2}^{(i)} & -a_{\ell_i-1}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{L}_i\mathfrak{D}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{l}_{i+1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

блоки $\mathfrak{L}_{i+1}\mathfrak{U}_i$ та $\mathfrak{A}_i\mathfrak{D}_i$ є матриці розміру $\ell_{i+1} \times \ell_i$ та $\ell_i \times \ell_{i+1}$, відповідно

$$\mathfrak{L}_{i+1}\mathfrak{U}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathfrak{l}_{i+1}\mathfrak{u}_i & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}_i\mathfrak{D}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{D}_i. \tag{5.9}$$

Тоді $\mathfrak{L}_{i+1}\mathfrak{D}_i + \mathfrak{A}_{i+1}\mathfrak{U}_{i+1}$ мають наступний вигляд

$$\mathfrak{L}_{i+1}\mathfrak{D}_i + \mathfrak{A}_{i+1}\mathfrak{U}_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -\mathfrak{u}_i + \mathfrak{l}_i & -a_1^{(i)} & \cdots & -a_{\ell_i-2}^{(i)} & -a_{\ell_i-1}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.10}$$

Порівнюючи добуток $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ з матрицею $\mathfrak{J}$ в (1.54), маємо систему (5.6).

Якщо система (5.6) має розв'язок, тоді $\mathfrak{J}$ допускає факторизацію $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ виду (5.1)–(5.3), де $\mathfrak{L}$ і $\mathfrak{U}$ знайдені однозначно. З іншого боку, якщо $\mathfrak{J}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}-$факторизацію, тоді система рівнянь (5.6) має розв'язок. □

Лема 5.3 *Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{S}$ та нехай $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$–факторизацію (5.1) – (5.3) і нехай $P_i(z)$ поліноми першого роду, асоційовані з матрицею $\mathfrak{J}$. Тоді*

$$P_{i+1}(0) = \prod_{j=0}^{i} \mathfrak{u}_j \ , \ \text{для кожного } i \in \mathbb{Z}_+ \ . \tag{5.11}$$

Доведення. За Лемою 5.9 та Лемою 5.2, маємо

$$P_{i+1}(0) = \det\left(-\mathfrak{J}_{[0,i]}\right) = \begin{vmatrix} -\mathfrak{C}_{a_0} & -\mathfrak{D}_0 & & \\ -\mathfrak{B}_1 & -\mathfrak{C}_{a_1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\mathfrak{D}_{i-1} \\ & & -\mathfrak{B}_i & -\mathfrak{C}_{a_j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^{(0)} & -1 & & \\ -b_1 & a_0^{(1)} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -b_i & a_0^{(i)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathfrak{u}_0 & -1 & & \\ \mathfrak{u}_0\mathfrak{l}_1 & \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{l}_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & \mathfrak{u}_{i-1}\mathfrak{l}_i & \mathfrak{u}_i - \mathfrak{l}_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{u}_0 & -1 & & \\ 0 & \mathfrak{u}_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & 0 & \mathfrak{u}_i \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{i} \mathfrak{u}_j. \tag{5.12}$$

□

Наслідок 5.4 *Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{S}$ і нехай $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ – факторизацію виду (5.1)–(5.3) та нехай $P_i(z)$ є поліноми першого роду, асоційовані з матрицею $\mathfrak{J}$. Тоді*

$$P_{i+1}(0) = \mathfrak{u}_i\mathfrak{u}_{i-1}\dots\mathfrak{u}_{i-j}P_{i-j}(0), \quad j \le i \quad \text{та} \quad i, j \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.13}$$

Теорема 5.5 *Нехай $\mathfrak{J}$ є УМЯ, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{S}$ та нехай $\ell_j := n_{j+1} - n_j \ge 1$, $j \in \mathbb{Z}_+$, де $n_0 = 0$ і $\mathcal{N}(\boldsymbol{s}) = \{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ є множина нормальних індексів для послідовності $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ і нехай $P_i(z)$ є поліноми першого роду асоційовані з послідовністю $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{i=0}^{\infty}$. Тоді матриця $\mathfrak{J}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ – факторизацію виду (5.1) –* (5.3) *тоді і тільки тоді, коли*

$$P_i(0) \neq 0, \quad \text{для кожного } i \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.14}$$

Більш того

$$\mathfrak{l}_{i+1} = -\frac{b_{i+1}}{\mathfrak{u}_i}, \ \mathfrak{u}_i = \frac{P_{i+1}(0)}{P_i(0)}, \ \mathfrak{u}_0 = a_0^{(0)}, \ \text{для кожного } i \in \mathbb{Z}_+ \ . \tag{5.15}$$

Доведення. Нехай $P_i(0) \neq 0$ для кожного $i \in \mathbb{Z}_+$, тоді за Лемою 5.3 рівності (5.15) еквівалентні системі (5.6). Отже, по Лемі 5.2 матриця $\mathfrak{J}$ допускає $\mathfrak{LU}-$факторизацію (5.1) –(5.3). З іншого боку, нехай $\mathfrak{J}$ допускає $\mathfrak{LU}-$факторизацію (5.1)–(5.3). Тоді, за Лемою 5.3 $P_i(0) \neq 0$ для кожного $i \in \mathbb{Z}_+$. □

Зауваження 5.6 *Якщо $\ell_j = 1$ для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$, тоді факторизація (5.1)–(5.3) для матриці $\mathfrak{J}$ співпадає з факторизацією в [9, Розділ 2].*

Зауваження 5.7 *Якщо $\ell_j = 1$ або $\ell_j = 2$ для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$, тоді факторизація (5.1)–(5.3) для матриці $\mathfrak{J}$ співпадає з $\mathfrak{LU}-$факторизацією в [19, Розділ 4].*

Зауваження 5.8 *Якщо $n_1 = 1$ (тобто $\ell_0 = 1$), тоді*

$$P_1(z) = \det(z - \mathfrak{J}_{[0,0]}) = a^{(0)}(z) = z + a_0^{(0)}$$

і за (1.37), отримуємо

$$P_1(z) = \frac{1}{s_0}\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ 1 & z \end{vmatrix} = z - \frac{s_1}{s_0}. \tag{5.16}$$

В силу того, що $P_1(0) \neq 0$ (див. формулу (5.14)), маємо $a_0^{(0)} = -\frac{s_1}{s_0} \neq 0$ та за Лемою 5.3 $\mathfrak{u}_0 = -\frac{s_1}{s_0}$.

Лема 5.9 *Нехай $\mathfrak{J}$ є УМЯ і нехай $P_i(z)$, $Q_i(z)$ є поліноми першого та другого роду, асоційовані до матриці $\mathfrak{J}$. Тоді існує монічна матриця Якобі J, така що*

$$P_i(0) = \widehat{P}_i(0) \quad \text{ і } \quad Q_i(0) = \widehat{Q}_i(0), \tag{5.17}$$

де $\widehat{P}_i(z)$ і $\widehat{Q}_i(z)$ є поліноми першого та другого роду, відповідно, асоційовані до матриці J, $i \in \mathbb{N}$.

Доведення. Обчислюємо $P_i(0) = \det(-\mathfrak{J}_{[0,i-1]})$ та розкладемо визначник за рядками, які мають тільки один елемент рівний -1, а інші всі нулі 0. Маємо

$$P_i(0) = \begin{vmatrix} -\mathfrak{C}_{a_0} & -\mathfrak{D}_0 & & \\ -\mathfrak{B}_1 & -\mathfrak{C}_{a_1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\mathfrak{D}_{i-2} \\ & & -\mathfrak{B}_{i-1} & -\mathfrak{C}_{a_{i-1}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^{(0)} & -1 & & \\ -b_1 & a_0^{(1)} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -b_{i-1} & a_0^{(i-1)} \end{vmatrix}. \tag{5.18}$$

Використовуємо цю рівність для подальшої побудови монічної матриці Якобі, отримуємо

$$J = \begin{pmatrix} -a_0^{(0)} & 1 & & \\ b_1 & -a_0^{(1)} & 1 & \\ & b_2 & -a_0^{(2)} & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{5.19}$$

В силу (1.55) та (5.18), $P_i(0) = \widehat{P}_i(0)$ ($i \in \mathbb{N}$). Доказ другого рівності в (5.17) є аналогічним. □

5.1.2 Деякі властивості перетворення Дарбу

Теорема 5.10 *Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{S}$ та нехай $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ допускае $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ – факторизацію (5.1)–(5.3). Тоді матриця $\mathfrak{J}^{(p)} := \mathfrak{U}\mathfrak{L}$ є узагальненою матрицею Якобі.*

Доведення. Обчислимо добуток $\mathfrak{U}\mathfrak{L}$

$$\mathfrak{U}\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}_0\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{D}_0\mathfrak{L}_1 & \mathfrak{D}_0\mathfrak{A}_1 & & \\ \mathfrak{U}_1\mathfrak{L}_1 & \mathfrak{U}_1\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{D}_1\mathfrak{L}_2 & \mathfrak{D}_1\mathfrak{A}_2 & \\ & \mathfrak{U}_2\mathfrak{L}_2 & \mathfrak{U}_2\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{D}_2\mathfrak{L}_3 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{5.20}$$

(i) У цій частині розглянемо випадок, коли $\ell_j \geq 2$ для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$\mathfrak{U}_{j+1}\mathfrak{L}_{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{l}_{j+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad \mathfrak{D}_j\mathfrak{A}_{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

де $\mathfrak{U}_{j+1}\mathfrak{L}_{j+1}$ і $\mathfrak{D}_j\mathfrak{A}_{j+1}$ є матриці порядку $\ell_{j+1} \times \ell_j$ та $\ell_j \times \ell_{j+1}$, відповідно. Блоки $\mathfrak{U}_j\mathfrak{A}_j$ і $\mathfrak{D}_j\mathfrak{L}_{j+1}$ є матриці порядку $\ell_j \times \ell_j$, такі, що

$$\mathfrak{U}_j\mathfrak{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -a_1^{(j)} & \cdots & -a_{\ell_j-2}^{(j)} & -a_{\ell_j-1}^{(j)} & 1 \\ -\mathfrak{u}_j & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } \mathfrak{D}_j\mathfrak{L}_{j+1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.22}$$

Таким чином, матриця $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$ має наступний вигляд

$$\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^0_{a_0} & \mathfrak{D}_{0,0} & & & \\ \mathfrak{B}_{1,0} & \mathfrak{C}^1_{a_0} & \mathfrak{D}_{0,1} & & \\ & \mathfrak{B}_{1,1} & \mathfrak{C}^0_{a_1} & \mathfrak{D}_{1,0} & \\ & & \mathfrak{B}_{2,0} & \mathfrak{C}^1_{a_1} & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.23}$$

де блоки $\mathfrak{C}^0_{a_j}$ є супроводжуючі матриці розміру $(\ell_j - 1) \times (\ell_j - 1)$ такі, що

$$\mathfrak{C}^0_{a_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_1^{(j)} & -a_2^{(j)} & \cdots & -a_{\ell_j-2}^{(j)} & -a_{\ell_j-1}^{(j)} \end{pmatrix}, \tag{5.24}$$

блоки $\mathfrak{D}_{j,0}$, $\mathfrak{B}_{j+1,0}$ і $\mathfrak{B}_{j+1,1}$ є матриці розміру $(\ell_j - 1) \times 1$, $1 \times (\ell_j - 1)$ і $(\ell_{j+1} - 1) \times 1$, відповідно

$$\mathfrak{D}_{j,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathfrak{B}_{j+1,0} = \begin{pmatrix} -\mathfrak{u}_j & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ \mathfrak{B}_{j+1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathfrak{l}_{j+1} \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

$$\mathfrak{C}^1_{a_j} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \ \mathfrak{D}_{j,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ – є блоки розміру } 1 \times (\ell_{j+1} - 1), \ j \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.26}$$

(ii) Тепер розглянемо випадок $\ell_{j-1} \geq 2$, $\ell_j = 1$ й $\ell_{j+1} \geq 2$, $j \in \mathbb{N}$. Тоді матриця $\mathfrak{J}^{(p)}$ має наступний вигляд

$$\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}^0_{a_0} & \mathfrak{D}_{0,0} & & & & & \\ \mathfrak{B}_{1,0} & \mathfrak{C}^1_{a_0} & \mathfrak{D}_{0,1} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \mathfrak{B}_{j,0} & \mathfrak{C}^1_{a_{j-1}} & \mathfrak{D}_{j-1,1} & & \\ & & & \mathfrak{B}_{j+1,1} & \mathfrak{C}^0_{a_j} & \mathfrak{D}_{j,0} & \\ & & & & \mathfrak{B}_{j+2,1} & \mathfrak{C}^0_{a_{j+1}} & \mathfrak{D}_{j+1,0} \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.27}$$

де

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{C}^1_{a_{j-1}} & \mathfrak{D}_{j-1,1} \\ \mathfrak{B}_{j+1,1} & \mathfrak{C}^0_{a_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{l}_j & 1 \\ -\mathfrak{u}_j \mathfrak{l}_j & -\mathfrak{u}_j \end{pmatrix}. \tag{5.28}$$

(iii) Нехай $\ell_{j-1} \geq 2$, $\ell_j = \ldots = \ell_{j+i} = 1$ й $\ell_{j+i+1} \geq 2$, $i, j \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{C}^1_{a_{j-1}} & \mathfrak{D}_{j-1,1} & & \\ \mathfrak{B}_{j+1,1} & \mathfrak{C}^0_{a_j} & \ddots & \\ & & \ddots & \mathfrak{D}_{j+i-1,1} \\ & & \mathfrak{B}_{j+i+1,1} & \mathfrak{C}^0_{a_{j+i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{l}_j & 1 & & & \\ -\mathfrak{u}_j\mathfrak{l}_j\mathfrak{l}_{j+1} - \mathfrak{u}_j & & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\mathfrak{u}_{j+i-1}\mathfrak{l}_{j+i-1}\mathfrak{l}_{j+i} - \mathfrak{u}_{j+i-1} & & 1 \\ & & & -\mathfrak{u}_{j+i}\mathfrak{l}_{j+i} & -\mathfrak{u}_{j+i} \end{pmatrix}. \tag{5.29}$$

(iv) Нехай $\ell_0 = \ldots = \ell_j = 1$ й $\ell_{j+1} \geq 2$, $j \in \mathbb{Z}_+$. Тоді

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{C}^0_{a_0} & \mathfrak{D}_{0,0} & & \\ \mathfrak{B}_{1,0} & \mathfrak{C}^0_{a_1} & \ddots & \\ & & \ddots & \mathfrak{D}_{j-1,0} \\ & & \mathfrak{B}_{j,0} & \mathfrak{C}^0_{a_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{l}_1 - \mathfrak{u}_0 & 1 & & & \\ -\mathfrak{u}_1\mathfrak{l}_1 & \mathfrak{l}_2 - \mathfrak{u}_1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & -\mathfrak{u}_{j-1}\mathfrak{l}_{j-1}\mathfrak{l}_j - \mathfrak{u}_{j-1} & & 1 \\ & & & -\mathfrak{u}_j\mathfrak{l}_j & -\mathfrak{u}_j \end{pmatrix}.$$

Комбінуючи випадки (i)–(iv), маємо, що матриця $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$ є узагальненою матрицею Якобі. $\square$

5.1.3 Перетворення лінійного функціонала $\mathfrak{S}$

Означення 5.11 *Визначимо функціонал $z\mathfrak{S}$, як*

$$(z\mathfrak{S})(p) := \mathfrak{S}(zp(z)), \quad p \in \mathbb{C}[z]. \tag{5.30}$$

Теорема 5.12 *Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{S}$, така, що (5.14) має місце та нехай $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ – факторизацію (5.1) – (5.3). Тоді матриця $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$ асоційована з наступним функціоналом*

$$\mathfrak{S}^{(p)} = \begin{cases} z\mathfrak{S}, & n_1 > 1; \\ \dfrac{s_0}{s_1} z\mathfrak{S}, & n_1 = 1. \end{cases} \tag{5.31}$$

Доведення. У доказі будемо спиратися на співвідношення з [19, Теорема 4.2]. Зазначимо, що $s_1 \neq 0$, якщо $n_1 = 1$ (див. Зауваження 5.8). Розділимо доказ на дві частини

(i) Першим розглянемо випадок, коли $n_1 > 1$. Зауважимо, що

$$\mathfrak{L}^T_{[0,j-1]} e_0 = e_0, \quad \mathfrak{U}_{[0,j-1]} G_{[0,j-1]} e_0 = b_0 e_{\ell_0 - 2}, \ j \in \mathbb{N}, \tag{5.32}$$

де укорочені матриці $G_{[0,j-1]}$, $\mathfrak{L}_{[0,j-1]}$ і $\mathfrak{U}_{[0,j-1]}$ аналогічно визначаються до (4.51) та (5.1). Обчислюємо s_i, для достатньо великого j, отримуємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(\lambda^i) = s_i = \left[\left(\mathfrak{J}^i_{[0,j-1]}\right)^T e_0, e_0\right]_{\ell^2_{[0,\mathfrak{n}_j-1]}} = \left(G_{[0,j-1]}\left(\mathfrak{J}^i_{[0,j-1]}\right)^T e_0, e_0\right) = \\ = (e_0, \underbrace{\mathfrak{L}_{[0,j-1]}\mathfrak{U}_{[0,j-1]}\dots\mathfrak{L}_{[0,j-1]}\mathfrak{U}_{[0,j-1]}}_{i \text{ разів}} G_{[0,j-1]}e_0) = \\ = (\mathfrak{L}^T_{[0,j-1]}e_0, \underbrace{\mathfrak{U}_{[0,j-1]}\mathfrak{L}_{[0,j-1]}\dots\mathfrak{U}_{[0,j-1]}\mathfrak{L}_{[0,j-1]}}_{i-1 \text{ разів}}\mathfrak{U}_{[0,j-1]}G_{[0,j-1]}e_0).\end{aligned} \tag{5.33}$$

Нехай матриця $\widetilde{G}_{[0,j+n-1]}$ асоційована з матрицею $\mathfrak{J}^{(p)}_{[0,j+n-1]}$, де n є число ℓ_h таких, що $\ell_h \geq 2$, $0 \leq h \leq j-1$, та задається формулою (4.51). Тоді $\widetilde{G}_{[0,j+n-1]}e_0 = b_0 e_{\ell_0-2}$. Підставляючи (5.32) в (5.33), маємо

$$\begin{aligned}s_i = \left(e_0, \left(\mathfrak{U}_{[0,j-1]}\mathfrak{L}_{[0,j-1]}\right)^{i-1} b_0 e_{\ell_0-2}\right) = \left(\left(\left(\mathfrak{J}^{(p)}_{[0,j+n-1]}\right)^{i-1}\right)^T e_0, \widetilde{G}_{[0,j+n-1]}e_0\right) = \\ = \left[\left(\left(\mathfrak{J}^{(p)}_{[0,j+n-1]}\right)^{i-1}\right)^T e_0, e_0\right]_{\ell^2_{[0,\widetilde{\mathfrak{n}}_j-1]}} = s^{(p)}_{i-1} = (z\mathfrak{S})\left(z^{i-1}\right) = \mathfrak{S}^{(p)}(z^{i-1}),\end{aligned}$$

числова послідовність $\left\{s^{(p)}_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ асоційована до матриці $\mathfrak{J}^{(p)}$. За Означенням (5.30), отримуємо, що $z\mathfrak{S}$ є лінійним функціоналом, який асоційований до матриці $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$.

(ii) У другому випадку, розглянемо ситуацію, коли перший нормальний індекс дорівнює одиниці, тобто $n_1 = 1$. Зазначимо, що

$$\mathfrak{L}^T_{[0,j-1]}e_0 = e_0,\ \mathfrak{U}_{[0,j-1]}G_{[0,j-1]}e_0 = -b_0\mathfrak{u}_0 e_0,\ j \in \mathbb{N}. \tag{5.34}$$

Нехай $\widetilde{G}_{[0,j+n-1]}$ пов'язана з матрицею $\mathfrak{J}^{(p)}_{[0,j+n-1]}$, де n є число ℓ_h таких, що $\ell_h \geq 2$, $0 < h \leq j-1$. Матриця $\widetilde{G}_{[0,j+n-1]}$ визначається аналогічно до формули (4.51). Тоді $\widetilde{G}_{[0,j+n-1]}e_0 = b_0 e_0$. Обчислюємо s_i, в силу (5.16), (5.32) та (5.33), маємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(z^i) = \tfrac{s_1}{s_0}\left(\left(\left(\mathfrak{J}^{(p)}_{[0,j+n-1]}\right)^{i-1}\right)^T e_0, \widetilde{G}_{[0,j+n-1]}e_0\right) = \\ = \tfrac{s_1}{s_0}\left[\left(\left(\mathfrak{J}^{(p)}_{[0,j+n-1]}\right)^{i-1}\right)^T e_0, e_0\right]_{\ell^2_{[0,\widetilde{n}_j-1]}} = \tfrac{s_1}{s_0}s^{(p)}_{i-1} = \tfrac{s_1}{s_0}\mathfrak{S}^{(p)}(z^{i-1}),\end{aligned} \tag{5.35}$$

послідовність $\left\{s^{(p)}_i\right\}_{i=0}^{\infty}$ асоційована до матриці $\mathfrak{J}^{(p)}$.

Таким чином, $s^{(p)}_{i-1} = \mathfrak{S}^{(p)}(z^{i-1}) = \frac{s_0}{s_1}z\mathfrak{S}(z^{i-1})$, отже, функціонал $\frac{s_0}{s_1}z\mathfrak{S}$ відповідає матриці $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$. $\square$

Зауваження 5.13 *Перетворення* $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}^{(p)} = z\mathfrak{S}$ *називається* перетворення Крістофеля *лінійного функціонала* $\mathfrak{S}$.

5.1.4 Множина нормальних індексів для послідовності $\mathbf{s}^{(p)}$

За Теоремою 5.12, маємо, що узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$ відповідає послідовності $\mathbf{s}^{(p)} = \{s_{i+1}\}_{i=0}^{\infty}$. Визначимо множину $\mathcal{N}(\mathbf{s}^{(p)})$ нормальних індексів послідовності $\mathbf{s}^{(p)}$, як

$$\mathcal{N}(\mathbf{s}^{(p)}) = \left\{ n_j^{(p)} : \mathbf{D}^{(p)}_{n_j^{(p)}} \neq 0 \right\}, \text{ де } \mathbf{D}^{(p)}_{n_j^{(p)}} = \det \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & s_{n_j^{(p)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n_j^{(p)}} & \cdots & s_{2n_j^{(p)}-1} \end{pmatrix}. \tag{5.36}$$

Пропозиція 5.14 *Нехай* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s})$ *є множина нормальних індексів, що відповідає узагальненій матриці Якобі* $\mathfrak{J}$ *та* $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ *допускає* $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ *– факторизацію (5.1) – (5.3). Нехай*

$$P_j(0) = \frac{(-1)^{n_j+2}}{\mathbf{D}_{n_j}} \begin{vmatrix} s_1 & \cdots & s_{n_j} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n_j} & \cdots & s_{2n_j-1} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \textit{для кожного} j \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.37}$$

Тоді

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{s}^{(p)}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{s}) \cup \{n_j - 1 : j \in \mathbb{N}\ \ell_{j-1} \geq 2\}. \tag{5.38}$$

Доведення. (i) Якщо $n = n_j$ для деякого $j \in \mathbb{N}$, тобто $\mathfrak{n} \in \mathcal{N}(\mathbf{s})$, то в силу (5.36) та (5.37) $\mathbf{D}_{\mathfrak{n}}^{(p)} \neq 0$. Тому

$$\mathcal{N}(\mathbf{s}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{s}^{(p)}). \tag{5.39}$$

(ii) Припустимо, що $n \in \mathcal{N}(\mathbf{s}^{(p)}) \backslash \mathcal{N}(\mathbf{s})$. Тоді $\mathbf{D}_n^{(p)} \neq 0$ і $\mathbf{D}_n = 0$, та в силу [22, Лема 5.1] $\mathbf{D}_{n+1} \neq 0$. Отже $n+1 = n_j$ для деякого $j \in \mathbb{N}$ і таким чином $n = n_j - 1$. Більш того, $\ell_{j-1} = n_j - n_{j-1} \geq 2$. Це доводить, що

$$n \in \mathcal{N}(\mathbf{s}^{(p)}) \backslash \mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_j - 1 : j \in \mathbb{N},\ \ell_{j-1} \geq 2\}. \tag{5.40}$$

З іншого боку, якщо $n = n_j - 1$ та $\ell_{j-1} \geq 2$, то

$$\mathbf{D}_{n_{j-1}} \neq 0,\ \mathbf{D}_{n_{j-1}+1} = 0,\ \cdots\ \mathbf{D}_{n_j-1} = 0,\ \mathbf{D}_{n_j} \neq 0$$

і отже $n_j - 1 \notin \mathcal{N}(\mathfrak{s})$. Припустимо, що $\mathbf{D}^{(p)}_{n_j-1} = 0$, тоді за [22, Лема 5.1], маємо, що $\mathbf{D}^{(p)}_{n_{j-1}} = 0$, що суперечить включенню (5.39). Це завершує доказ.□

Зауваження 5.15 *Нехай послідовність дійсних чисел* $\boldsymbol{s}^{(p)} = \left\{ s_i^{(p)} \right\}_{i=0}^{\infty}$ *асоційована з матрицею* $\mathfrak{J}^{(p)}$. *Якщо* $n_1 > 1$ *і* $n_1^{(p)}$ *є перший нетривіальний нормальний індекс для послідовностей* $\boldsymbol{s}$ *та* $\boldsymbol{s}^{(p)}$, *відповідно, то*

$$n_1^{(p)} = n_1 - 1. \tag{5.41}$$

Зауваження 5.16 *Нехай* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s})$ *і* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s}^{(p)})$ *є множини нормальних індексів до матриць* $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ *і* $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$, *відповідно. Якщо* $\ell_{j-1} = n_j - n_{j-1} \geq 2$, $n_0 = 0$ *і* $j \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{s}^{(p)}) = \{n_1 - 1, n_1, n_2 - 1, n_2, \ldots\}. \tag{5.42}$$

Зауваження 5.17 *Нехай* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s})$ *і* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s}^{(p)})$ *є множини нормальних індексів до матриць* $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ *і* $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$, *відповідно. Якщо* $\ell_{j-1} = n_j - n_{j-1} = 1$, $\mathfrak{n}_0 = 0$ *та* $j \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{s}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{s}^{(p)}). \tag{5.43}$$

5.1.5 Перетворення $m-$ функції

Пропозиція 5.18 *Нехай* $\mathfrak{J}$ *є узагальнена матриця Якобі, що задовольняє (5.14) та нехай* $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ *допускає* $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$*–факторизацію (5.1) –(5.3). Нехай* $m(z)$ *та* $m^{(p)}(z)$ *є* $m-$*функції матриць* $\mathfrak{J}$ *і* $\mathfrak{J}^{(p)}$, *відповідно. Тоді*

$$m^{(p)}_{[0,j+n-1]}(z) = \begin{cases} zm_{[0,j-1]}(z), & n_1 > 1; \\ \dfrac{s_0}{s_1}\left(zm_{[0,j-1]}(z) + s_0\right), & n_1 = 1. \end{cases} \tag{5.44}$$

де n *є число* ℓ_i *матриці* $\mathfrak{J}$, *таких, що* $\ell_i \geq 2$ *та* $i = \overline{0, j-1}$.

Доведення. Нехай n є число $\ell_i \geq 2$, де $i = \overline{0, j-1}$ та нехай $\widetilde{G}_{[0,j+n-1]}$ асоційована до матриці $\mathfrak{J}^{(p)}_{[0,j+n-1]}$, яка визначена за формулою (4.51).

(i) Припустимо, що $n_1 > 1$. Тоді $s_0 = 0$, $\widetilde{G}_{[0,j+n-1]}e_0 = b_0 e_{\ell_0-2}$ та еквівалентність (5.32) має місце. Обчислюємо

$$zm_{[0,j-1]}(z) = z\left[\left(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]} - z\right)^{-1} e_0, e_0\right] = -\left[(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]} - z)\left(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]} - z\right)^{-1} e_0, e_0\right] +$$

$$+\left[\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]}\left(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]} - z\right)^{-1} e_0, e_0\right] = -s_0 + \left[\left(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]} - z\right)^{-1} e_0, \mathfrak{J}_{[0,j-1]} e_0\right] =$$

$$= \left(\left(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]} - z\right)^{-1} e_0, \mathfrak{L}_{[0,j-1]}\mathfrak{U}_{[0,j-1]} G_{[0,j-1]} e_0\right) =$$

$$\left(e_0, \left(\mathfrak{L}_{[0,j-1]}\mathfrak{U}_{[0,j-1]} - \overline{z}\right)^{-1} \mathfrak{L}_{[0,j-1]} b_0 e_{\ell_0-2}\right) = \left(e_0, \mathfrak{L}_{[0,j-1]}\left(\mathfrak{U}_{[0,j-1]}\mathfrak{L}_{[0,j-1]} - \overline{z}\right)^{-1} b_0 e_{\ell_0-2}\right) =$$

$$= \left(\left(\left(\mathfrak{J}^{(p)}_{[0,j+n-1]}\right)^T - z\right)^{-1} e_0, \widetilde{G}_{[0,j+n-1]}e_0\right) = m^{(p)}_{[0,j+n-1]}(z).$$

(ii) Тепер розглянемо випадок, коли $n_1 = 1$. Тоді $\widetilde{G}_{[0,j+n-1]}e_0 = b_0e_0$ та (5.34) має місце. Обчислюємо

$$zm_{[0,j-1]}(z) = z\left[\left(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]} - z\right)^{-1} e_0, e_0\right] = -s_0 + \left[\left(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]} - z\right)^{-1} e_0, \mathfrak{J}_{[0,j-1]}e_0\right] =$$

$$= -s_0 + \left(\left(\mathfrak{J}^T_{[0,j-1]} - z\right)^{-1} e_0, \mathfrak{L}_{[0,j-1]}\mathfrak{U}_{[0,j-1]}G_{[0,j-1]}e_0\right) =$$

$$-s_0 + \frac{s_1}{s_0}\left(e_0, \left(\mathfrak{L}_{[0,j-1]}\mathfrak{U}_{[0,j-1]} - \overline{z}\right)^{-1} \mathfrak{L}_{[0,j-1]}b_0e_0\right) =$$

$$= -s_0 + \frac{s_1}{s_0}\left(e_0, \mathfrak{L}_{[0,j-1]}\left(\mathfrak{U}_{[0,j-1]}\mathfrak{L}_{[0,j-1]} - \overline{z}\right)^{-1} b_0e_0\right) =$$

$$= -s_0 + \frac{s_1}{s_0}\left(\left(\left(\mathfrak{J}^{(p)}_{[0,j+n-1]}\right)^T - z\right)^{-1} e_0, \widetilde{G}_{[0,j+n-1]}e_0\right) = -s_0 + \frac{s_1}{s_0}m^{(p)}_{[0,j+n-1]}(z).$$

Звідси, маємо

$$m^{(p)}_{[0,j+n-1]}(z) = \frac{s_0}{s_1}\left(zm_{[0,j-1]}(z) + s_0\right).$$

Таким чином, формула (5.44) доведена. □

5.1.6 Перетворення поліномів першого та другого роду

Теорема 5.19 *Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі, що задовільняє (5.14) та нехай $\mathfrak{J} = \mathfrak{L}\mathfrak{U}$ допускає $\mathfrak{L}\mathfrak{U}$ – факторизацію (5.1) – (5.3). Припустимо, що $\mathfrak{J}^{(p)} = \mathfrak{U}\mathfrak{L}$ є перетворення Дарбу без параметра та*

$$\mathfrak{J}^{(p)}\pi^{(p)}(z) = z\pi^{(p)}(z), \tag{5.45}$$

де $\pi^{(p)}(z) = \left(\pi^{(p)}_0(z),\ \pi^{(p)}_1(z),\ \dots\right)^T$. Нехай числа h_j є кількість $\ell_i > 1$, для $i = \overline{0, j-2}$. Тоді

$$\begin{aligned} P^{(p)}_{j+h_j}(z) &= \tfrac{1}{z}\left(P_j(z) - \tfrac{P_j(0)}{P_{j-1}(0)}P_{j-1}(z)\right), \quad j \in \mathbb{Z}_+, \\ P^{(p)}_{j+h_j+1}(z) &= zP_j(z), \qquad \text{якщо } \ell_{j-1} > 1. \end{aligned} \tag{5.46}$$

Доведення. Перш за все, введемо такі поліноми

$$\pi^{(p)}(z)=\frac{1}{z}\begin{pmatrix} zP_0(z)\\ \vdots\\ z^{\ell_0-1}P_0(z)\\ P_1(z)-\mathfrak{u}_0P_0(z)\\ zP_1(z)\\ \vdots\\ z^{\ell_1-1}P_1(z)\\ P_2(z)-\mathfrak{u}_1P_1(z)\\ \vdots \end{pmatrix}=\frac{1}{z}\begin{pmatrix} zP_0(z)\\ \vdots\\ z^{\ell_0-1}P_0(z)\\ P_1(z)-\frac{P_1(0)}{P_0(0)}P_0(z)\\ zP_1(z)\\ \vdots\\ z^{\ell_1-1}P_1(z)\\ P_2(z)-\frac{P_2(0)}{P_1(0)}P_1(z)\\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\mathfrak{J}^{(p)}\pi^{(p)}(z)=z\pi^{(p)}(z),$$

тому, що

$$\mathfrak{J}^{(p)}\pi^{(p)}(z)=\mathfrak{ULU}\frac{1}{z}\pi(z)=\frac{1}{z}\mathfrak{UJ}\pi(z)=z\left(\frac{1}{z}\mathfrak{U}\pi(z)\right)=z\pi^{(p)}(z).$$

Звідси отримуємо, що поліноми $P_i^{(p)}(z)$ визначаються за формулою (5.46), для кожного $i\in\mathbb{Z}_+$. □

Зауваження 5.20 *Якщо $\ell_j=1$ для кожного $j\in\mathbb{Z}_+$, то має місце наступна формула Крістофеля (див. [87])*

$$P_j^{(p)}(z)=\frac{1}{z}\left(P_{j+1}(z)-\frac{P_{j+1}(0)}{P_j(0)}P_j(z)\right). \tag{5.47}$$

Зауваження 5.21 *Якщо принаймні один $\ell_j\geq 2$, то формула (5.46) є спеціальний випадок формули Крістофеля (див. [87]).*

Теорема 5.22 *Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі, що задовольняє умові (5.14) та нехай $\mathfrak{J}=\mathfrak{LU}$ допускає $\mathfrak{LU}$ – факторизацію (5.1) – (5.3). Нехай $\mathfrak{J}^{(p)}=\mathfrak{UL}$ є перетворення Дарбу без параметра матриці $\mathfrak{J}$ та*

$$(\mathfrak{J}^{(p)}-z)\xi^{(p)}(z)=\Theta_{\ell_0-1}, \tag{5.48}$$

де $\xi^{(p)}(z)=\left(\xi_0^{(p)}(z),\ \xi_1^{(p)}(z),\ \dots\right)^T$, $\Theta_{\ell_0-1}=(\underbrace{0,\dots,0,1}_{\ell_0-1},0\dots)$. Нехай числа h_j є кількість $\ell_i>1$, для $i=\overline{0,j-2}$. Тоді

$$\begin{array}{c} Q_{j+h_j}^{(p)}(z)=Q_j(z)-\frac{P_j(0)}{P_{j-1}(0)}Q_{j-1}(z)\quad j\in\mathbb{N},\\ Q_{j+h_j+1}^{(p)}(z)=zQ_j(z),\qquad \text{якщо } \ell_{j-1}>1. \end{array} \tag{5.49}$$

Доведення. Припустимо, що

$$\xi^{(p)}(z) = \mathfrak{U}\xi(z) = \begin{pmatrix} zQ_0(z) \\ \vdots \\ z^{\ell_0-1}Q_0(z)(z) \\ Q_1(z) - \frac{P_1(0)}{P_0(0)}Q_0(z) \\ zQ_1(z) \\ \vdots \\ z^{\ell_1-1}Q_1(z) \\ Q_2(z) - \frac{P_2(0)}{P_1(0)}Q_1(z) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

Використовуючи $(\mathfrak{J} - z)\xi(z) = \Theta_{\ell_0}$, маємо

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{L}\mathfrak{U}-z)\xi(z) = (\mathfrak{U}\mathfrak{L}\mathfrak{U}-z\mathfrak{U})\xi(z) = (\mathfrak{U}\mathfrak{L}-z)\mathfrak{U}\xi(z) = (\mathfrak{J}^{(p)}-z)\xi^{(p)}(z) = \mathfrak{U}\Theta_{\ell_0} = \Theta_{\ell_0-1}.$$

Таким, чином отримуємо формулу (5.49).□

Пропозиція 5.23 *Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі та нехай $\mathfrak{J}^{(p)}$ є перетворення Дарбу без параметра матриці $\mathfrak{J}$ та нехай h є число ℓ_i матриці $\mathfrak{J}$, таких, що $\ell_i \geq 2$ та $i = \overline{0, j-1}$. Тоді*

$$CzQ_j(z)P_{j+h+1}(z)^{(p)} - Q^{(p)}_{j+h+1}(z)P_j(z) = s_0P^{(p)}_{j+h+1}(z), \tag{5.50}$$

де константа

$$C = \begin{cases} \frac{s_0}{s_1}, & \text{якщо } n_1 = 1; \\ 1, & \text{якщо } n_1 > 1. \end{cases} \tag{5.51}$$

Доведення. З представлення (4.21), отримуємо

$$m_{[0,j-1]}(z) = -\frac{Q_j(z)}{P_j(z)} \quad \text{та} \quad m^{(p)}_{[0,j+n-1]}(z) = -\frac{Q^{(p)}_{j+h+1}(z)}{P^{(p)}_{j+h+1}(z)} \tag{5.52}$$

та з Пропозицією 5.18, випливає формула (5.50). □

5.2 Перетворення Дарбу з параметром узагальнених матриць Якобі

У цьому розділі, буде розглянуто перетворення Дарбу з параметром $\mathbf{d}$ до узагальнених матриць Якобі $\mathfrak{J}$. Для цього використаємо нижньотрикутні та верхньотрикутні блочні матриці L і U, відповідно, такі, що

$$L = \begin{pmatrix} I_{\ell_0} & 0 & \\ L_1 & I_{\ell_1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad U = \begin{pmatrix} U_0 & D_0 & \\ 0 & U_1 & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{5.53}$$

де I_{ℓ_i} є одиничні матриці розміру $\ell_j \times \ell_j$ та U_i – матриці $\ell_i \times \ell_i$

$$U_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -S_i & -a_1^{(i)} & \cdots & -a_{\ell_i-2}^{(i)} & -a_{\ell_i-1}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad S_i \neq 0, \tag{5.54}$$

блоки L_{i+1} та D_i – розміру $\ell_{i+1} \times \ell_i$ та $\ell_i \times \ell_{i+1}$, відповідно

$$L_{i+1} = \begin{pmatrix} S_i - a_0^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ та } D_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.55}$$

де $S_i - a_0^{(i)} \neq 0$ для кожного $i \in \mathbb{Z}_+$.

Зауваження 5.24 *Якщо $\ell_i = 1$ для деякого $i \in \mathbb{Z}_+$, то*

$$I_{\ell_i} = (1) \qquad \text{та} \qquad U_i = (-S_i).$$

Якщо $\ell_i = \ell_{i+1} = 1$ для деякого $i \in \mathbb{Z}_+$, то

$$L_{i+1} = (S_i - a_0^{(i)}) \qquad \text{та} \qquad D_i = (1).$$

Говорять, що узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}$ допускає UL – факторизацію, Якщо $\mathfrak{J}$ може бути представлена в вигляді $\mathfrak{J} = UL$, де L і U визначені за формулами (5.53)– (5.55).

5.2.1 UL – факторизація узагальнених матриць Якобі

Означення 5.25 *Нехай $\{P_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ – є послідовність поліномів першого роду, що асоційована до лінійного функціоналу $\mathfrak{S}$, нехай $S_0 \in \mathbb{R}-$ є деякий параметр. Розглянемо послідовність поліномів $\{\widehat{P}_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$, яка задовольняє рекурентним співвідношенням*

$$\widehat{P}_{i+1}(z) = \widehat{a}_i(z)\widehat{P}_i(z) - b_i\widehat{P}_{i-1}(z), \qquad \widehat{P}_{-1}(z) \equiv 0, \quad \widehat{P}_0(z) \equiv 1, \tag{5.56}$$

де поліноми $\widehat{a}_i(z)$ *визначені рівністю*

$$\widehat{a}_0(z) = a_0(z) - S_0 \quad \text{та} \quad \widehat{a}_i(z) = a_i(z), \quad \text{для кожного } i \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $\{\widehat{P}_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ *називається послідовністю ко-рекурсивних поліномів з параметром* S_0*, яка асоційована з лінійним функціоналом* $\mathfrak{S}$*.*

У випадку квазі - дефінітного функціоналу $\mathfrak{S}$, ко - рекурсивні поліноми $\widehat{P}_i(z)$ вперше були розглянуті в [9].

Лема 5.26 *Нехай узагальнена матриця Якобі* $\mathfrak{J}$ *відповідає лінійному функціоналу* $\mathfrak{S}$ *та нехай* $\ell_i := n_{i+1} - n_i \geq 1$, $i \in \mathbb{Z}_+$, *де* $n_0 = 0$ *і* $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ *– є множина нормальних індексів послідовності* $\boldsymbol{s} = \{s_i\}_{j=0}^{\infty}$*. Нехай* $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *є деякий параметр, який задовольняє системі*

$$-S_{i+1}(S_i - a_0^{(i)}) = b_{i+1} \text{ та } S_i - a_0^{(i)} \neq 0, \qquad i \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.57}$$

Тоді матриця $\mathfrak{J}$ *допускає* UL *факторизацію*

$$\mathfrak{J} = UL \tag{5.58}$$

вигляду (5.53)– (5.55) з параметром S_0*. Зворотно, якщо* $\mathfrak{J}$ *допускає факторизацію* (5.58)*, то послідовність* $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ *задовольняє* (5.57)*.*

Існує нескінченна множина параметрів $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*, для яких виконані співвідношення* (5.57)*.*

Доведення. Розглянемо добуток UL

$$UL = \begin{pmatrix} U_0 + D_0 L_1 & D_0 & & \\ U_1 L_1 & U_1 + D_1 L_2 & D_1 & \\ & U_2 L_2 & U_2 + D_2 L_3 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

де $D_i L_{i+1}$ та $U_{i+1} L_{i+1}$ є матриці розміру $\ell_i \times \ell_i$ та$\ell_{i+1} \times \ell_i$, відповідно,

$$D_i L_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \cdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 0 \\ S_i - a_0^{(i)} & 0 \ \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad U_{i+1} L_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \ \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \cdots & \vdots \\ 0 & 0 \ \cdots & 0 \\ -S_{i+1}(S_i - a_0^{(i)}) & 0 \ \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді отримуємо, що $U_i + D_iL_{i+1}$ є матриці розміру $\ell_i \times \ell_i$, що мають вигляд

$$U_i + D_iL_{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0^{(i)} & -a_1^{(i)} & \cdots & -a_{\ell_i-2}^{(i)} & -a_{\ell_i-1}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i \in \mathbb{Z}_+.$$

Порівнюючи добуток UL з матрицею $\mathfrak{J}$ у (1.54), маємо

$$-S_{i+1}(S_i - a_0^{(i)}) = b_{i+1} \qquad \text{для будь-якого} \quad i \in \mathbb{Z}_+$$

Отже добуток UL дорівнює $\mathfrak{J}$ тоді і тільки тоді, коли умови (5.57) мають місце, тобто узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}$ допускає UL–факторизацію (5.53)– (5.55). □

Лема 5.27 *Нехай узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}$ відповідає лінійному функціоналу $\mathfrak{S}$. Нехай $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathfrak{J}$ допускає UL–факторизацію (5.53)– (5.55) та нехай $\widehat{P}_i(z)$ – є ко–рекурсивними поліномами, які відповідають функціоналу $\mathfrak{S}$ та параметру S_0. Тоді*

$$\widehat{P}_i(0) = \prod_{j=0}^{i-1}(a_0^{(j)} - S_j), \qquad \text{для кожного} \quad i \in \mathbb{N}. \tag{5.59}$$

Доведення. Доведемо за індукцією

1) При $j = 1$, маємо

$$\widehat{P}_1(0) = \widehat{a}_0(0)\widehat{P}_0(0) - b_0\widehat{P}_{-1}(0) = \widehat{a}_0(0) = a_0(0) - S_0 = a_0^{(0)} - S_0,$$

$$\widehat{P}_2(0) = \widehat{a}_1(0)\widehat{P}_1(0) - b_1\widehat{P}_0(0) = a_0^{(1)}(a_0^{(0)} - S_0) - S_1(a_0^{(0)} - S_0) = \\ = (a_0^{(0)} - S_0)(a_0^{(1)} - S_1).$$

2) Нехай припущення індукції вірно для $(i-1)$:

$$\widehat{P}_{i-1}(0) = \prod_{j=0}^{i-2}(a_0^{(i)} - S_j). \tag{5.60}$$

Тоді з (5.56), (5.57) та (5.60) отримуємо

$$\widehat{P}_i(0) = \widehat{a}_{i-1}(0)\widehat{P}_{i-1}(0) - b_{i-1}\widehat{P}_{i-2}(0) =$$

$$= a_0^{(i-1)}\prod_{j=0}^{i-2}(a_0^{(i)} - S_j) - S_{i-1}(a_0^{(i-2)} - S_{i-2})\prod_{j=0}^{i-3}(a_0^{(j)} - S_j) = \prod_{j=0}^{i-1}(a_0^{(j)} - S_j).$$

Отже, формула (5.59) має місце для кожного $\quad i \in \mathbb{N}$. □

Наслідок 5.28 *Нехай узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}$, асоційована з лінійному функціоналу $\mathfrak{S}$, допускає UL–факторизацію (5.53)– (5.55) та нехай $\widehat{P}_i(z)$ є ко-рекурсивними поліномами, які відповідають функціоналу $\mathfrak{S}$ та параметру $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Тоді*

$$\widehat{P}_{i+1}(0) = (-1)^{i-k} l_i \dots l_{i-k} \widehat{P}_{i-k}(0), \quad k \le i \quad \text{та} \quad i, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема 5.29 *Нехай $\mathfrak{J}$ – узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{S}$, $\ell_i := n_{i+1} - n_i \ge 1$, $i \in \mathbb{Z}_+$, де $n_0 = 0$ та $\mathcal{N}(\mathbf{s}) = \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ є множина нормальних індексів послідовності $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$. Нехай матриці L та U визначені за формулами (5.53)– (5.55) та $\{\widehat{P}_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ є послідовність ко-рекурсивних поліномів, яка відповідає функціоналу $\mathfrak{S}$ та параметру $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Тоді $\mathfrak{J}$ допускає UL–факторизацію (5.53)– (5.55) тоді і тільки тоді, коли*

$$\widehat{P}_i(0) \ne 0, \qquad \text{для кожного } i \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.61}$$

5.2.2 Перетворення Дарбу з параметром $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$

Означення 5.30 *Нехай $\mathfrak{J}$ – це узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{S}$ та параметром $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, та нехай $S_0 = -\dfrac{s_{n_1-1}}{\mathbf{d}}$ і $\mathfrak{J}$ допускає UL–факторизацію* (5.58), *(5.53)– (5.55). Тоді матриця*

$$\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$$

називається перетворенням Дарбу з параметром $\mathbf{d}$ *узагальненої матриці Якобі $\mathfrak{J}$. Причина введення даного параметра* $\mathbf{d}$ *буде з'ясована пізніше, див. Теорему 5.37*

Теорема 5.31 *Нехай $\mathfrak{J}$ – узагальнена матриця Якобі, асоційована з лінійним функціоналом $\mathfrak{S}$, $S_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ та $\mathfrak{J} = UL$ допускає UL – факторизацію (5.53)– (5.55). Тоді матриця $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ – є узагальненою матрицею Якобі.*

Доведення. Розглянемо добуток LU

$$LU = \begin{pmatrix} U_0 & D_0 & \\ L_1 U_0 & L_1 D_0 + U_1 & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

З (5.53)– (5.55), отримуємо, що

$$L_{j+1}U_j = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & S_j - a_0^{(j)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & \text{якщо } \ell_j \geq 2; \\ \begin{pmatrix} -S_j(S_j - a_0^{(j)}) \end{pmatrix}, & \text{якщо } \ell_j = 1, \end{cases}$$

$$L_{j+1}D_j = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, & \text{якщо } \ell_j \geq 2; \\ \begin{pmatrix} S_j - a_0^{(j)} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, & \text{якщо } \ell_j = 1, \end{cases}$$

Запровадимо до розгляду матриці K_j $(j \in \mathbb{Z}_+)$:

$$K_0 = \begin{pmatrix} U_0 & D_0 \\ L_1U_0 & L_1D_0 + U_1 \end{pmatrix}, \quad K_j = \begin{pmatrix} L_jD_{j-1} + U_j & D_j \\ L_{j+1}U_j & L_{j+1}D_j + U_{j+1} \end{pmatrix}.$$

Залежно від того, які значення приймають ℓ_j та ℓ_{j+1}, отримуємо

(i) $\ell_j = \ell_{j+1} = 1$. Тоді:

$a)$ Якщо $j = 0$, то K_0 має вигляд

$$K_0 = \begin{pmatrix} -S_0 & 1 \\ -S_0(S_0 - a_0^{(0)}) & S_0 - a_0^{(0)} - S_1 \end{pmatrix}.$$

$b)$ Якщо $j \neq 0$ та $\ell_{j-1} = 1$, то K_j має представлення

$$K_j = \begin{pmatrix} S_{j-1} - a_0^{(j-1)} - S_j & 1 \\ -S_j(S_j - a_0^{(j)}) & S_j - a_0^{(j)} - S_{j+1} \end{pmatrix}.$$

Випадок, коли кожний $\ell_j = 1$, був розглянутий в [9].

$c)$ Якщо $\ell_{j-1} \geq 2$, то K_j має вигляд

$$K_j = \begin{pmatrix} -S_j & 1 \\ -S_j(S_j - a_0^{(j)}) & S_j - a_0^{(j)} - S_{j+1} \end{pmatrix}.$$

(ii) $\ell_j = 1$, $\ell_{j+1} \geq 2$. Тоді:

$a)$ Якщо $\ell_{j-1} = 1$, то K_j має представлення

$$K_j = \begin{pmatrix} S_{j-1} - a_0^{(j-1)} - S_j & 1 & \\ -S_j(S_j - a_0^{(j)}) & S_j - a_0^{(j)} & D_j \\ & A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} \end{pmatrix},$$

де блоки $A_j \in \mathbb{C}^{(\ell_j-1)\times 1}$ та $D_j \in \mathbb{C}^{1\times(\ell_j-1)}$ мають наступний вигляд

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -S_{j+1} \end{pmatrix}^T \quad \text{та} \quad D_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$ – є супроводжуюча матриця до полінома $q^{(j)}(z) := \dfrac{a^{(j)}(z) - a_0^{(j)}}{z}$.

b) Якщо $\ell_{j-1} \geq 2$, то

$$K_j = \begin{pmatrix} -S_j & 1 & \\ -S_j(S_j - a_0^{(j)}) & S_j - a_0^{(j)} & D_j \\ & A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} \end{pmatrix},$$

де блоки A_j, D_j, $\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$– визначені аналогічним чином, як і в підпункті a).

(iii) $\ell_j \geq 2$, $\ell_{j+1} = 1$. Тоді:

a) Якщо $\ell_{j-1} \geq 2$, то

$$K_j = \begin{pmatrix} 0 & D_j & \\ A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} & D_j^T \\ & B_j & -S_{j+1} \end{pmatrix},$$

де блоки A_j, $\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$, D_j – визначені так само, як і в підпункті (ii) a), блок $B_j \in \mathbb{C}^{1\times(\ell_j-1)}$ та має вигляд

$$B_j = \begin{pmatrix} S_j - a_0^{(j)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Якщо $\ell_{j-1} = 1$, то

$$K_j = \begin{pmatrix} S_{j-1} - a_0^{(j-1)} & D_j & \\ A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} & D_j^T \\ & B_j & -S_{j+1} \end{pmatrix},$$

де блоки A_j, B_j, $\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$, D_j – визначені аналогічно, як і в підпункті a).

(iv) $\ell_j \geq 2$, $\ell_{j+1} \geq 2$. Тоді:

a) Якщо $\ell_{j-1} = 1$, то

$$K_j = \begin{pmatrix} S_{j-1} - a_0^{(j-1)} & D_j & & \\ A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} & D_j^T & \\ & B_j & 0 & D_{j+1} \\ & & A_{j+1} & \mathfrak{C}_{q^{(j+1)}} \end{pmatrix},$$

де A_j, A_{j+1}, B_j, $\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$, $\mathfrak{C}_{q^{(j+1)}}$, D_j, D_{j+1} визначені так само, як і в підпункті (iii).

b) Якщо $\ell_{j-1} \geq 2$, то K_j має представлення

$$K_j = \begin{pmatrix} 0 & D_j & & \\ A_j & \mathfrak{C}_{q^{(j)}} & D_j^T & \\ & B_j & 0 & D_{j+1} \\ & & A_{j+1} & \mathfrak{C}_{q^{(j+1)}} \end{pmatrix},$$

де A_j, A_{j+1}, B_j, $\mathfrak{C}_{q^{(j)}}$, $\mathfrak{C}_{q^{(j+1)}}$, D_j, D_{j+1} – визначені так само, як і в підпункті (iii).

Отже, в силу (i) – (iv) $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ – узагальнена матриця Якобі. □

Зауваження 5.32 *Якщо $\mathfrak{J}$ – монічна матриця Якобі (тобто $\ell_j = 1$ для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$), то UL–факторизація (5.53)– (5.55) співпадає з UL–факторизацією в [9, Розділ 2].*

Зауваження 5.33 *Якщо перетворена матриця $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$ є монічною матрицею Якобі, то UL–факторизація (5.53)– (5.55) співпадає з факторизацією в [19, Розділ 3].*

5.2.3 Перетворення поліномів першого роду

Далі розглянемо перетворення поліномів першого роду при перетворенні Дарбу з параметром $\mathbf{d}$ узагальненої матриці Якобі $\mathfrak{J}$. Для цього, скористаємося наступним співвідношенням між узагальненою матрицею Якобі $\mathfrak{J}$ та поліномами першого роду $P_i(z)$.

Теорема 5.34 *Припустимо, що $\mathbf{d} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ є деякий параметр, такий, що (5.61) має місце $S_0 = -\dfrac{s_{n_1-1}}{\mathbf{d}}$. Нехай $\mathfrak{J}$ – узагальнена матриця Якобі та $\mathfrak{J} = UL$ допускає UL–факторизацію (5.53)–(5.55) та нехай $\{P_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ є поліноми першого роду матриці $\mathfrak{J}$. Нехай $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ є перетворення Дарбу з параметром $\mathbf{d}$ матриці $\mathfrak{J}$. Нехай числа h_i є кількість $\ell_j > 1$, для $j = \overline{0, i-1}$. Тоді поліноми першого роду матриці $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$, обчислюються за формулами*

$$\begin{gathered} P_0^{(\mathbf{d})}(z) \equiv 1, \quad P_{i+h_i}^{(\mathbf{d})}(z) = zP_i(z), \\ P_{i+1+h_i}^{(\mathbf{d})}(z) = P_{i+1}(z) + \left(S_{i-1} - a_0^{(i-1)}\right) P_i(z), \quad i \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{5.62}$$

Доведення. Визначимо $P_i^{(\mathbf{d})}(z)$ з

$$\pi^{(\mathbf{d})}(z) = L\pi(z), \quad j \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.63}$$

Тоді, в силу (5.63), отримуємо (5.62), а саме

$$\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}\pi^{(\mathbf{d})}(z) = LU\pi^{(\mathbf{d})}(z) = LUL\pi(z) = L\mathfrak{J}\pi(z) = zL\pi(z) = z\pi^{(\mathbf{d})}(z).$$

Таким чином, поліноми $P_j^{(\mathbf{d})}(z)$, визначені формулою (5.62) для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$, є поліномами першого роду для матриці $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$. $\square$

Зауваження 5.35 *Якщо $\mathfrak{J}$ є монічна матриця Якобі (тобто $\ell_j = 1$ для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$), то формули*

$$P_0^{(\mathbf{d})}(z) \equiv 1, \quad P_i^{(\mathbf{d})}(z) = P_i(z) + \left(S_{i-1} - a_0^{(i-1)}\right) P_{i-1}(z) \quad i \in \mathbb{N}$$

є формули Геронімуса *для поліномів $P_i(z)$ (див. [88, (3.9)], [42]).*

Пропозиція 5.36 *Нехай $\mathbf{d} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ деякий параметр, такий що умова* (5.61) *має місце при $S_0 = -\frac{s_{n_1-1}}{\mathbf{d}}$. Нехай $\mathfrak{J} = UL$ та $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ є узагальнені матриці Якобі, де L і U визначені за формулами (5.53)– (5.55). Нехай $\{P_i^{(\mathbf{d})}(z)\}_{i=0}^{\infty}$ є поліноми першого роду матриці $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$ та нехай числа h_i є кількість $\ell_j > 1$, для $j = \overline{0, i-1}$. Тоді*

$$P_{i+1+h_i}^{(\mathbf{d})}(0) = \prod_{k=0}^{i-1} S_k \quad \text{для кожного }, i \in \mathbb{N}. \tag{5.64}$$

Більш того, якщо $\ell_i \geq 2$, то

$$P_{i+h_i}^{(\mathbf{d})}(0) = 0.$$

Доведення. (i) Нехай $\ell_j = 1$, $j = \overline{0, i-1}$ та $i \in \mathbb{N}$.

Обчислимо

$$P_{i+1+h_i}^{(\mathbf{d})}(0) = \det\left(-\mathfrak{J}_{[0,i-1]}^{(\mathbf{d})}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} S_0 & -1 & & \\ S_0(S_0 - a_0^{(0)}) & -S_0 + a_0^{(0)} + S_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & S_{i-2}(S_{i-2} - a_0^{(i-2)}) & & -S_{i-2} + a_0^{(i-2)} + S_{i-1} \end{vmatrix} =$$

множимо $h+1$–у строку на $(-S_h + a_0^{(h)})$ та додаємо до $(h+2)$–ої строки, $h = \overline{0, i-2}$, отримуємо

$$P_{i+1+h_i}^{(\mathbf{d})}(0) = \begin{vmatrix} S_0 & -1 & & \\ 0 & S_1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & S_{i-1} \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{i-1} S_k. \tag{5.65}$$

(ii) Нехай $\ell_j \geq 2$, $j = \overline{0, i-1}$ та $i \in \mathbb{N}$. В силу [59, Леммы 2.3]

$$P^{(\mathbf{d})}_{i+1+h_i}(0) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & & & & & & \\ S_0 & a^{(0)}_{\ell_0-1} & -1 & & & & & & \\ & a^{(0)}_0 - S_0 & 0 & -1 & & & & & \\ & & S_1 & a^{(1)}_{\ell_1-1} & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \ddots & -1 & & \\ & & & & a^{(i-2)}_0 - S_{i-2} & & 0 & -1 & \\ & & & & 0 & & S_{i-1} & a^{(i-1)}_{\ell_{i-1}-1} \end{vmatrix} =$$

Розкладаючи даний визначник по рядку, який має тільки один елемент рівний -1 та інші рівні 0, отримуємо (5.65).

(iii) Нехай $\ell_m = 1$ та $\ell_p \geq 2$, $m = \overline{0, h-1}$, $p = \overline{h, i-1}$ та $h, i \in \mathbb{N}$. Через h_i позначимо число ℓ_p. Тоді $P^{(\mathbf{d})}_{i+1+h_i}(0) = \det\left(-\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,i+h_i-1]}\right)$. За [59, Лемою 2.3] та використовуючи (i)–(ii), отримуємо (5.64).

(iv) Нехай $\ell_m \geq 2$ та $\ell_p = 1$, $m = \overline{0, h-1}$, $p = \overline{h, i-1}$ й $h, i \in \mathbb{N}$. Через h_i позначимо число ℓ_m. Тоді $P^{(\mathbf{d})}_{i+1+h_i}(0) = \det\left(-\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,i+h_i-1]}\right)$. В силу (i)–(ii) та за [59, Лемою 2.3], формула (5.64) має місце.

(v) Розглянемо узагальнений випадок, тобто ℓ_j– довільні при $(j = \overline{0, i-1})$ та нехай h_i число $\ell_j \geq 2$. Тоді $P^{(\mathbf{d})}_{i+1+h_i}(0) = \det\left(-\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,i+h_i-1]}\right)$. Використовуючи (i) – (iv), отримуємо формулу (5.64).

Більш того, якщо $\ell_i \geq 2$, то $P^{(\mathbf{d})}_{i+h_i}(z) = zP_i(z)$ (див. Теорему 5.34), тому $P^{(\mathbf{d})}_{i+h_i}(0) = 0$. Це завершує доведення. □

У наступному твердженні, наведені зворотні співвідношення для поліномів $\mathbf{P}(z)$ та $\mathbf{P}^{(\mathbf{d})}(z)$.

5.2.4 Перетворення m – функції

Теорема 5.37 *Нехай $\mathbf{d} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ деякий параметр, такий що умова (5.61) має місце при $S_0 = -\frac{s_{n_1-1}}{\mathbf{d}}$. Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі та нехай $\mathfrak{J} = UL$ її UL – факторизація (5.53)– (5.55), відповідна параметру S_0. Нехай $m(z)$, $m^{(\mathbf{d})}(z)$ є $m-$ функція Вейля матриці $\mathfrak{J}$ and $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$, відповідно. Тоді*

$$m^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}(z) = -\frac{\mathbf{d}}{z} + \frac{m_{[0,j-1]}(z)}{z}, \qquad z \widehat{\rightarrow} \infty, \tag{5.66}$$

де n – це кількість індексів ℓ_h, таких що $\ell_h \geq 2$ $(h = \overline{0, j-1})$. Більш того, матриця $\mathfrak{J}^{(d)}$ асоційована з послідовністю $\boldsymbol{s}^{(\mathbf{d})} = \{s^{(\mathbf{d})}_i\}^{\infty}_{i=0}$, де $\boldsymbol{s}^{(\mathbf{d})}_i$ обчислюються *за формулами*

$$s_0^{(\mathbf{d})} = \mathbf{d} \quad \textit{та} \quad s_i^{(\mathbf{d})} = s_{i-1} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Нехай матриці $G_{[0,j-1]}$ та $\widetilde{G}_{[0,j+n-1]}$ визначені формулою (4.51) для матриць $\mathfrak{J}_{[0,j-1]}$ та $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}$, відповідно, де n – це кількість індексів ℓ_h, таких що $\ell_h \geq 2$ $(h = \overline{0, j-1})$. Зрізані матриці $L_{[0,j-1]}$ и $U_{[0,j-1]}$ визначені аналогічним чином за формулою (5.53). Відзначимо, що для будь-якого $j \in \mathbb{N}$

$$L^T_{[0,j-1]} e_0 = e_0, \quad U_{[0,j-1]} \widetilde{G}_{[0,j+n-1]} e_0 = G_{[0,j-1]} e_0 = s_{\mathfrak{n}_1 - 1} e_{\ell_0 - 1}. \tag{5.67}$$

Покладемо $A := \mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}$, маємо

$$zm^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}(z) = z\left[\left(A^T - z\right)^{-1} e_0, e_0\right] = -\left[e_0, e_0\right] + \left[A^T\left(A^T - z\right)^{-1} e_0, e_0\right] =$$

$$-s_0^{(d)} + \left(e_0, (A - \overline{z})^{-1} A \widetilde{G}_{[0,j+n-1]} e_0\right) = -s_0^{(d)} + \left(e_0, \left(L_{[0,j-1]} U_{[0,j-1]} - \overline{z}\right)^{-1} L_{[0,j-1]} s_{\mathfrak{n}_1 - 1} e_{\ell_0 - 1}\right)$$

З огляду на рівності (5.67), отримуємо

$$\begin{aligned} zm^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}(z) = -s_0^{(d)} + \left(\left(\left(\mathfrak{J}_{[0,j-1]}\right)^T - z\right)^{-1} e_0, G_{[0,j-1]} e_0\right) = \\ = -\mathbf{d} + m_{[0,j-1]}(z). \end{aligned} \tag{5.68}$$

Таким чином, з (5.68) маємо (5.66). В силу асимптотичного розвинення (4.22) для $m_{[0,j-1]}(z)$, отримуємо

$$m^{(\mathbf{d})}_{[0,j+n-1]}(z) = -\frac{\mathbf{d}}{z} - \frac{s_0}{z^2} - \frac{s_1}{z^3} - \cdots - \frac{s_{2n_j - 2}}{z^{2n_j}} + o\left(\frac{1}{z^{2n_j}}\right) =$$

$$= -\frac{s_0^{(\mathbf{d})}}{z} - \frac{s_1^{(\mathbf{d})}}{z^2} - \cdots - \frac{s^{(\mathbf{d})}_{2n_j - 1}}{z^{2n_j}} + o\left(\frac{1}{z^{2n_j}}\right).$$

Отже, узагальнена матриця Якобі $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$ асоційована з послідовністю чисел $\{s_i^{(\mathbf{d})}\}_{i=0}^{\infty}$, де $s_0^{(\mathbf{d})} = \mathbf{d}$ та $s_i^{(\mathbf{d})} = s_{i-1}$ для кожного $i \in \mathbb{N}$. □

Пропозиція 5.38 *Нехай $\mathfrak{J}$ є узагальнена матриця Якобі та нехай $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}$ є її перетворення Дарбу з параметром $\mathbf{d}$. Нехай числа h_i є кількість $\ell_j > 1$, для $j = \overline{0, i-1}$. Тоді*

$$\mathbf{d} P^{(\mathbf{d})}_{i+h_{i-1}}(z) P_i(z) = z Q^{(\mathbf{d})}_{i+h_{i-1}}(z) P_i z) - Q_i(z) P^{(\mathbf{d})}_{i+h_{i-1}}(z). \tag{5.69}$$

Доведення. В силу представлення (4.21)

$$m_{[0,j-1]}(z) = -\frac{Q_i(z)}{P_i(z)} \quad \text{та} \quad m^{(\mathbf{d})}_{[0,j+h_{i-1}-1]}(z) = -\frac{Q^{(\mathbf{d})}_{i+h_{i-1}}(z)}{P^{(\mathbf{d})}_{i+h_{i-1}}(z)}$$

та за Теоремою 5.37, отримуємо (5.69). □

5.2.5 Перетворення лінійного функціонала $\mathfrak{S}$

Теорема 5.39 *Нехай* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *деякий параметр, такий що умова* (5.61) *має місце при* $S_0 = -\frac{s_{n_1-1}}{\mathbf{d}}$. *Нехай* $\mathfrak{J}$ *– узагальнена матриця Якобі асоційована до лінійного функціоналу* $\mathfrak{S}$ *та моментом* s_0, *та нехай* $\mathfrak{J} = UL$ *її* UL*– факторизація (5.53)– (5.55), відповідна параметру* S_0. *Тоді матриця* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ *асоційована з лінійним функціоналом*

$$\mathfrak{S}^{(\mathbf{d})}(p(z)) := \mathfrak{S}\left(\frac{p(z)-p(0)}{z}\right) + \mathbf{d}p(0), \quad p(z) \in \mathbb{C}[z]. \tag{5.70}$$

Доведення. За Теоремою 5.37, матриця $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ асоційована з послідовністю $\mathbf{s}^{(\mathbf{d})} = \{s_i^{(\mathbf{d})}\}_{i=0}^{\infty}$, де $s_0^{(\mathbf{d})} = \mathbf{d}$ та $s_i^{(\mathbf{d})} = s_{i-1}$ для будь-якого $i \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\mathfrak{S}^{(\mathbf{d})}(1) = s_0^{(\mathbf{d})} \quad \text{та} \quad \mathfrak{S}^{(\mathbf{d})}(z^i) = s_i^{(\mathbf{d})} = s_{i-1} = \mathfrak{S}\left(\frac{z^i}{z}\right), \quad i > 1. \tag{5.71}$$

В силу (5.71) та лінійності функціоналів $\mathfrak{S}^{(\mathbf{d})}$ і $\mathfrak{S}$, отримуємо (5.70). □

5.2.6 Множина нормальних індексів для послідовності $\mathbf{s}^{(\mathbf{d})}$

За Теоремою5.37, матриця $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ асоційована з послідовністю $\mathbf{s}^{(\mathbf{d})} = \{s_{i-1}\}_{i=0}^{\infty}$, де $s_{-1} = \mathbf{d}$. Визначимо $\mathcal{N}(\mathbf{s}^{(\mathbf{d})})$ множину нормальних індексів послідовності $\mathbf{s}^{(\mathbf{d})}$, наступним чином

$$\mathcal{N}(\mathbf{s}^{(\mathbf{d})}) = \left\{n_j^{(\mathbf{d})} : \mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{n_j^{(\mathbf{d})}} \neq 0\right\}, \quad \mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{n_j^{(\mathbf{d})}} = \det\begin{pmatrix} s_{-1} & \cdots & s_{n_j^{(\mathbf{d})}-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n_j^{(\mathbf{d})}-2} & \cdots & s_{2n_j^{(\mathbf{d})}-3} \end{pmatrix}.$$

Пропозиція 5.40 *Нехай* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s})$ *є множина нормальних індексів асоційованих з матрицею* $\mathfrak{J}$ *та нехай* $\mathfrak{J} = UL$ *її* UL *– факторизація (5.53)– (5.55). Нехай числа* h_i *є кількість* $\ell_j > 1$, *для* $j = \overline{0, i-1}$. *Тоді множина нормальних індексів* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s}^{(\mathbf{d})})$ *матриці* $\mathfrak{J}^{(\mathbf{d})} = LU$ *має вигляд*

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{s}^{(\mathbf{d})}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{s}) \cup \{n_j + 1 : j \in \mathbb{N},\ \ell_j \geq 2\} \cup \{1\}.$$

Доведення. Нехай число n – це кількість індексів ℓ_h, таких що $\ell_h \geq\ 2$ $(h = \overline{0, j-1})$. Тоді

(*i*) $1 \in \mathcal{N}(\mathbf{s}^{(\mathbf{d})})$, тому $s_0^{(\mathbf{d})} = \mathbf{d}$ (див. Теорему 5.37).

(ii) За Теоремою 5.34, $P^{(\mathbf{d})}_{i+h_{i-1}}(z) = P_i(z) + \left(S_{i-1} - a_0^{(i-1)}\right) P_{i-1}(z)$. З іншого боку

$$P^{(\mathbf{d})}_{i+h_{i-1}}(z) = \det\left(z - \mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,i+h_{i-1}-1]}\right) = \frac{1}{\mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{n_i}} \det \begin{pmatrix} s_{-1} & s_0 & \cdots & s_{n_i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n_i-2} & s_{n_i-1} & \cdots & s_{2n_i-2} \\ 1 & z & \cdots & z^{n_i} \end{pmatrix}.$$

В силу Пропозиції 5.36, $P^{(\mathbf{d})}_{i+h_{i-1}}(0) = S_0 \cdot \ldots \cdot S_{i-1} = \frac{(-1)^{n_i+2}}{\mathbf{D}^{(d)}_{n_i}} \mathbf{D}_{n_i}$, відтак $\mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{n_i} \neq 0$, тобто $n_i \in \mathcal{N}(\mathbf{s}^{(\mathbf{d})})$.

(iii) Нехай $\ell_i \geq 2$, тоді $P^{(\mathbf{d})}_{i+h_i}(z) = zP_i(z)$ (див. Теорему 5.34) та

$$P^{(\mathbf{d})}_{i+h_i}(z) = \det\left(z - \mathfrak{J}^{(\mathbf{d})}_{[0,i+n]}\right) = \frac{1}{\mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{n_i+1}} \det \begin{pmatrix} s_{-1} & s_0 & \cdots & s_{n_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n_i-1} & s_{n_i} & \cdots & s_{2n_i-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n_i+1} \end{pmatrix}.$$

За Пропозицією 5.36, $P^{(\mathbf{d})}_{i+h_i}(0) = \frac{(-1)^{n_i+3}}{\mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{n_i+1}} \mathbf{D}_{n_i+1} = 0$. В силу того, що $\ell_j \geq 2$, отримуємо $(n_i + 1) \notin \mathcal{N}(\mathbf{s})$ та $\mathbf{D}_{n_i+1} = 0$, отже $\mathbf{D}^{(\mathbf{d})}_{n_i+1} \neq 0$, тобто $(n_i + 1) \in \mathcal{N}(\mathbf{s}^{\mathbf{d}})$. Це завершує доказ. □

Наслідок 5.41 *Якщо в умовах Пропозиції 5.40* $\ell_j = n_{j+1} - n_j \geq 2$, *де* $n_0 = 0$ *і для кожного* $j \in \mathbb{Z}_+$, *то*

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{s}^{(\mathbf{d})}) = \{1, n_1, n_1 + 1, n_2, \ldots\}.$$

Наслідок 5.42 *Якщо в умовах Пропозиції 5.40* $\mathcal{N}(\boldsymbol{s}) = \mathbb{N}$, *то*

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{s}^{(d)}) = \mathbb{N}.$$

5.3 Висновки

Результати глави були представлені в [59] і [61].

Розглянуто перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі. Отримано критерій існування перетворення Дарбу, знайдено явні формули факторизації узагальненої матриці Якобі та вигляд матриць Якобі, які отримано при перетворенні Дарбу. Досліджено перетворення лінійного функціонала $\mathfrak{S}$, функції Вейля та поліномів першого та другого роду, що відповідають узагальненій матриці Якобі при перетворенні Дарбу. Аналогічні результати отримано також для перетворення Дарбу з параметром узагальнених матриць Якобі.

Висновки

В дисертаційні роботі розглянуто і досліджено індефінітну проблему моментів Стілт'єса та перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі.

1) Введено новий клас узагальнених дробів Стілт'єса ($\mathbf{S}$ – дробів). Встановлено, що кожна послідовність дійсних чисел $\mathbf{s}$ (класу $\mathcal{H}$) відповідає деякому узагальненому дробу Стілт'єса. Введено клас $\mathcal{H}^{reg}$ регулярних послідовностей $\mathbf{s}$ і для послідовностей $\mathbf{s}$ з класу $\mathcal{H}^{reg}$ знайдено зв'язок між відповідним – дробом та узагальненим $\mathbf{S}$ – дробом. Отримано систему різницевих рівнянь, яка відповідає $\mathbf{S}$ – дробу.

2) Розглянуто невироджену зрізану індефінітну проблему моментів Стілт'єса, яка пов'язана з дійсною послідовністю $\mathbf{s} \in \mathcal{H}$. Знайдено критерій розв'язності зрізаної проблеми моментів Стілт'єса, розроблено покроковий алгоритм розв'язку цієї проблеми, отримано повний опис її розв'язків. Введено новий клас узагальнених поліномів Стілт'єса першого та другого роду і в їх термінах знайдено явні формули для резольвентних матриць зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Отримано факторизацію резольвентних матриць зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса.

3) Розглянуто операторний підхід до зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Показано, що кожна індефінітна проблема моментів Стілт'єса відповідає деякій узагальненій матриці Якобі, що породжує симетричний оператор $A_{[0,N]}$ у просторі Понтрягіна. Знайдено граничні трійки для спряженого лінійного відношення $A_{[0,N]}^{[*]}$, відповідні функцію Вейля і u-резольвентну матрицю М.Г. Крейна. Показано, що u-резольвентні матриці для оператора $A_{[0,N]}$ співпадають з резольвентними матрицями зрізаної індефінітної проблеми Стілт'єса. Знайдено критерій невизначеності повної проблеми моментів Стілт'єса і отримано опис її розв'язків.

4) Розглянуто перетворення Дарбу узагальнених матриць Якобі. Отримано критерій існування перетворення Дарбу, знайдено явні формули факторизації узагальненої матриці Якобі та вигляд матриць Якобі, які отримано при перетворенні Дарбу. Досліджено перетворення лінійного функціонала $\mathfrak{S}$, функції Вейля та поліномів першого та другого роду, що відповідають узагальненій матриці Якобі при перетворенні Дарбу. Аналогічні результати отримано також для перетворення Дарбу з параметром узагальнених матриць Якобі.

Література

[1] Akhiezer N.I. The classical moment problem /N.I. Akhiezer. // Oliver and Boyd, Edinburgh – 1965. – 253p.

[2] Alpay D. Factorization of J-unitary matrix polynomials on the line and a Schur algorithm for generalized Nevanlinna functions / D. Alpay, A. Dijksma, H. Langer // Linear Algebra Appl. – 2004. – V.387. – P. 313–342.

[3] Alpay D. On applications of reproducing kernel spaces to the Schur algorithm and rational J unitary factorization. I. Schur methods in operator theory and signal processing / D. Alpay, H. Dym // Oper. Theory Adv. Appl. Birkhäuser, Basel. – 1986. – V. 18. – P. 89–159.

[4] Arens R. Operational calculus of linear relations / R. Arens // Pacific J. Math. – 1961. – V. 11. – P. 9-23.

[5] Arov D.Z. Bitangential Direct and Inverse Problems for Systems of Integral and Differential Equations / D.Z. Arov, H. Dym // Cambridge University Press, Cambridge. – 2012. – 488 p.

[6] Azizov T.Ya. Linear operators in spaces with indefinite metric / T.Ya. Azizov, I.S. Iokhvidov // John Wiley and Sons, New York. – 1989. – 318 p.

[7] Baker G.A. Essentials of Padé approximants / G.A. Baker, P.R. Graves-Morris // Cambridge University Press: Cambridge, UK. – 1996. – 318 p.

[8] Berezanskii Ju.M. Expansions in Eigenfunctions of self-adjoint Operators / Ju.M. Berezanskii // Kiev. – 1968. – 450 p.

[9] Bueno M.I. Darboux transformation and perturbation of linear functionals / M.I. Bueno, F. Marcellán // Linear Algebra Appl. – 2004. – V. 384. – P. 215–242.

[10] Calkin J.W. Abstract symmetric boundary conditions / J.W. Calkin // TAMS. –1939. –V. 45. – P.369–442.

[11] Chihara T.S. An Introduction to Orthogonal Polynomials / T.S. Chihara // Gordon and Breach, New York. – 1978. – 259 p.

[12] Curto R.E. Recursiveness, positivity, and truncated moment problems / R.E. Curto, L.A. Fialkow // Houston J. Math. – 1991. – V. 17. – P. 603–635.

[13] Dijksma A. Notes on a Nevanlinna-Pick interpolation problem for generalized Nevanlinna functions / A.Dijksma, H. Langer // Op. Th. Advan. and Appl. – 1997. – V. 95 – P. 69–91.

[14] Derevyagin M. On the Schur algorithm for indefinite moment problem / M. Derevyagin // Methods Functional Anal. Topol. – 2003. – V. 9. – P. 133–145.

[15] Derevyagin M. Generalized Jacobi operators in Krein spaces, J / M. Derevyagin // Math. Annal. Appl. – 2009. – V. 349 – P. 568-582.

[16] Derevyagin M. On the relation between Darboux transformations and polynomial mappings / M. Derevyagin // Journal of Approximation Theory. – 2013. – V. 172 – P. 4–22.

[17] Derevyagin M. Spectral problems for generalized Jacobi matrices / M. Derevyagin, V.Derkach // Linear Algebra Appl. – 2004. – V. 382 – P. 1-–24.

[18] Derevyagin M. On the convergence of Padé approximations for generalized Nevanlina function / M. Derevyagin, V.Derkach // Trans. Moscow Math. Soc. – 2007. –V. 68. – P. 119–162.

[19] Derevyagin M. Darboux transformations of Jacobi matrices and Páde approximation / M. Derevyagin, V.Derkach // Linear Algebra and Its Applications. – 2011. – V. 435. – P. 3056–3084.

[20] Derkach V. Generalized resolvents of a class of Hermitian operators in a Kreĭn space / V. Derkach // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1991. – V. 317. – P. 807–812.

[21] Derkach V. On Weyl function and generalized resolvents of a Hermitian operator in a Kreĭn space / V. Derkach // Integral Equations Operator Theory. – 1995. – V. 23. – P. 387–415.

[22] Derkach V. On indefinite moment problem and resolvent matrices of Hermitian operators in Kreĭn spaces / V. Derkach // Math.Nachr. – 1997. – V. 184. – P. 135–166.

[23] Derkach V. On Krein space symmetric linear relations with gaps / V. Derkach // Methods Funct. Anal. Topology. – 1998. –V. 4. – P. 16–40.

[24] Derkach V. On generalized resolvents of Hermitian relations in Krein spaces / V. Derkach // J. Math. Sci. – 1999. –V. 97. – P. 4420–4460.

[25] Derkach V. On linear fractional transformations associated with generalized J-inner matrix functions / V. Derkach, H. Dym // Integral Equations and Operator Theory. – 2009. – V. 65. – P. 1–50.

[26] Derkach V. Truncated moment problems in the class of generalized Nevanlinna functions / V. Derkach, S. Hassi, H. S. V. de Snoo // Math. Nachr. – 2012. – V. 285. –P. 1741–1769.

[27] Derkach V. On a class of generalized Stieltjes continued fractions / V.Derkach, I.Kovalyov // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2015. – V. 21. – P. 315–335.

[28] Derkach V. Schur algorithm for Stieltjes indefinite moment problem / V.Derkach, I.Kovalyov // Mathematische Nachrichten – 2017. –V. 290. – P. 1637–1662.

[29] Derkach V. An operator approach to indefinite Stieltjes moment problem / V.Derkach, I.Kovalyov // J.Math. Sci. – 2017. – V. 227. – P. 33–67.

[30] Derkach V. On Weyl function and Hermitian operators with gaps / V. Derkach, M. Malamud // Doklady Akad. Nauk SSSR. – 1987. – V. 293. – P. 1041–1046.

[31] Derkach V. Generalized resolvents and the boundary value problems for hermitian operators with gaps / V. Derkach, M. Malamud // J. Funct. Anal. – 1991. – V. 95. – P. 1–95.

[32] Derkach V. The extension theory of Hermitian operators and the moment problem / V. Derkach, M. Malamud // J.of Math.Sci. – 1995. – V. 73. – P. 141–242.

[33] Derkach V. On some classes of holomorphic operator functions with nonnegative imaginary part / V. Derkach, M. Malamud // 16th OT Conference Proceedings, Operator theory, operator algebras and related topics, Timisoara. – 1997. – P. 113–147.

[34] Dym H. On Hermitian block Hankel matrices, matrix polynomials, the Hamburger moment problem, interpolation and maximum entropy / H. Dym // Int. Equation and Operator Theory. – 1989. – V.12. – P. 757–812.

[35] Dyukarev Yu. M. Multiplicative and additive Stieltjes classes of analytic matrix-valued functions and interpolation problems connected with them I.(Russian) / Yu. M. Dyukarev, V. E. Katsnel'son // Teor. Funktsii Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 1981. –V. 126. – P. 13–27.

[36] Dyukarev Yu. M. On truncated matricial Stieltjes type moment problems / Yu. M. Dyukarev, Fritzsche Bernd, Kirstein Bernd, Madler Conrad // Complex Anal. Oper. Theory. – 2010. – V. 4. – P. 905—951.

[37] Dyukarev Yu. M. Geometric and operator measures of the degeneracy of the set of solutions of the Stieltjes matrix moment problem (Russian) / Yu. M. Dyukarev // Mat. Sb. – 2016.– V. 207, – P. 47–64.

[38] Frobenius G. Uber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen / G. Frobenius // J. Reine Angew. Math. – 1895. – V. 114. – P. 187–230.

[39] Fuhrmann P.A. A polynomial approach to linear algebra / P.A. Fuhrmann // Second edition, Universitext. Springer, New York. – 2012. – 411 p.

[40] Gantmaher F.R. The theory of Matrices / F.R. Gantmaher // Chelsea, New York. – 1959. – 660 p.

[41] Gantmacher F.R. Oscillation matrices and kernels and small oscillations of mechanical systems / F.R. Gantmacher, M. G. Krein // Akademie-Verlag, Berlin. – 1960. – 310 p.

[42] Geronimus Ya.L. On the polynomials orthogonal with respect to a given number sequence / Ya.L. Geronimus // Zap. Mat. Otdel. Khar'kov. Univers. i Nil Mat. i Mehan. – 1940. – V. 17. – P. 3–18.

[43] Gesztesy F. -functions and inverse spectral analysis for finite and semi-infinite Jacobi matrices / F.Gesztesy, B.Simon // Journal d'Analyse Math. – 1997. – V. 73. – P. 267–297.

[44] Gohberg I. Matrix polynomials / I.Gohberg, P.Lankaster, L.Rodman // Academic Press, New York. – 1982. – 433 p.

[45] Golub A. P. Existence theorems for generalized moment representations (Russian) / A. P. Golub // Ukrain. Mat. Zh. – 2003. – V. 55. – P. 881–888.

[46] Golub A. P. The method of generalized moment representations in the theory of rational approximation. A survey. (Ukrainian) / A. P. Golub // Mat. Zh. –2003. – V. 55. – P. 307–359.

[47] Gorbachuk M. L. Boundary problems for differential operator equations (Russian) / V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk // Naukova Dumka, Kievю – 1984. – 347 p.

[48] Gorbacuk V. I. On the indefinite power moment problem / V. I. Gorbachuk// 1965 First Republ. Math. Conf. of Young Researchers, Part II (Russian). Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat., Kiev. – P. 161-–165.

[49] Grünbaum F.A. Bispectral Darboux transformation: an extension of the Krall polynomials / F.A. Grünbaum, L. Haine // Internat. Math. Res. Notices. – 1997. – V. 8 – P. 359–392.

[50] Grünbaum F.A. Some functions that generalize the Krall-Laguerre polynomials / F.A. Grünbaum, L. Haine, E. Horozov // J. Comput. Appl. Math. – 1999. – V. 106 – P. 271–297.

[51] Jones William B. Continued Fractions Analytic Theory and Applications / William B. Jones, W.J. Thron // Addison-Wesley, London-Amsterdam-Ontario-Sydney-Tokyo. –1980. – 456 p.

[52] Hamburger H. Uber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems / H. Hamburger// Math. Ann. — 1920. — V. 81. – 235—319 p.

[53] Hamburger H. Uber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems / H. Hamburger // Math. Ann. — 1920. — V. 82. – 120—164 p.

[54] Hamburger H. Uber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems / H. Hamburger// Math. Ann. — 1921. — V. 82. – 168-–187 p.

[55] Holtz O. Structured matrices, continued fractions, and root localization of polynomials / O. Holtz, M. Tyaglov // SIAM Rev. – 2012. – V.54. – 421–509 p.

[56] Kac I.S. R-functions – analytic functions mapping the upper halfplane into itself / I.S. Kac and M.G. Kreĭn // Supplement to the Russian edition of F.V. Atkinson, Discrete and continuous boundary problems (English translation) AMS Transl. Ser. – 1974. – V. 103. – 1–18 p.

[57] Killip R. Sum rules for Jacobi matrices and their applications to spectral theory / R. Killip, B. Simon // Annals of Math. – 2003. – V. 158. – P. 253–321.

[58] Kaltenback H. Symmetric relations of finite negativity. Operator theory in Krein spaces and nonlinear eigenvalue problems / H. Kaltenback, H. Winker, H. Woracek // Oper. Theory Adv. Appl. – 2006. – V. 162. – P. 191–210.

[59] Kovalyov I. Darboux transformation of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // Methods of Funct. Anal. and Topology. – 2014. – V. 20. – P. 301–320.

[60] Kovalyov I. A truncated indefinite Stieltjes moment problem / I. Kovalyov // J.Math. Sci. – 2017. – V. 224. – P. 509–529. V.

[61] Kovalyov I. Darboux transformation with parameter of generalized Jacobi matrices / I. Kovalyov // J.Math. Sci. – 2017. – V. 222. – P. 703–722.

[62] Kochubei A.N. On extentions of symmetric operators and symmetric binary relations / A.N. Kochubei // Matem. Zametki. – 1975. – V. 17. – P. 41–48.

[63] Kreĭn M. G. On resolvents of Hermitian operator with deficiency index (m, m) / M. G. Kreĭn // Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.). – 1946. – V. 52. – P. 657–660.

[64] Kreĭn M. G. The fundamental propositions of the theory of representations of Hermitian operators with deficiency index (m,m)(Russian) / M. G. Kreĭn // Ukrain. Mat. Zh. – 1949. – V. 1. – P. 3–66.

[65] Kreĭn M.G. Description of solutions of the truncated moment problem / M. G. Kreĭn // Mat. Issledovanija. – 1967. – V. 2. – P. 114–132.

[66] Kreĭn M. G. Über die Q-function eines π-Hermiteschen Operators im Raume Π_κ / M. G. Kreĭn, H. Langer // Acta. Sci. Math. (Szeged). – 1973. – V. 34. – P. 191–230.

[67] Kreĭn M.G. $\ddot{U}$ber einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie Hermitscher Operatoren in Raume π_κ zusammenhangen, I. Einige Fuktionenklassen und ihre Dahrstellungen / M.G. Kreĭn, H. Langer // Math. Nachr. – 1977. V. 77. – P. 187–236.

[68] Kreĭn M.G. $\ddot{U}$ber einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie Hermitscher Operatoren in Raume π_κ zusammenhangen, II. Verallgemeinerte Resolventen u-Resolventen und ganze Operatoren / M.G. Kreĭn, H. Langer // J.Funct.Anal. – 1978. – V. 30. – P. 390–447.

[69] Kreĭn M. G. On some extension problems which are closely connected with the theory of Hermitian operators in a space Π_κ III. Indefinite analogues of the Hamburger and Stieltjes moment problems, Part I / M.G. Kreĭn, H. Langer // Beiträge zur Anal. – 1979. – V. 14. – P. 25–40.

[70] Kreĭn M.G. On some extension problems which are closely connected with the theory of hermitian operators in a space Π_κ III. Indefinite analogues of the Hamburger and Stieltjes moment problems Part II / M.G. Kreĭn, H. Langer // Beiträge zur Anal. – 1981. – V. 15. – P. 27–45.

[71] Kreĭn M.G. Some propositions of analytic matrix functions related to the theory of operators in the space π_κ / M.G. Kreĭn, H. Langer // Acta Sci.Math.Szeged. – 1981. – V. 43. – P. 181–205.

[72] Kreĭn M.G. The Markov moment problem and extremal problems / M.G. Kreĭn, A.A. Nudelman // Transl.Math. Monographs Amer.Math. Soc. Providence. – 1977. – V. 50. – 417 p.

[73] Kronecker L. Zur Theorie der Elimination einer variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen / L. Kronecker // Monatsberichte. – 1881. –P. 535–600.

[74] Lancaster P. Theory of Matrices / P. Lancaster // Academic Press, NY. – 1969. – 326 p.

[75] Livsič M.S. On a certain class of linear operators in Hilbert space / M.S. Livsič // Mat. Sbornik. – 1946. – V. 19. – P. 239–262.

[76] Matveev V. B. Differential-difference evolution equations. II. Darboux transformation for the Toda lattice / V. B. Matveev, M. A. Salle // Lett. Math. Phys. –1979. – V. 3. – P. 425—429.

[77] Magnus A. Certain continued fractions associated with the Padé table / A. Magnus // Math. Zeitschr. – 1962. – V. 78. – P. 361–374.

[78] Malamud M.M. On the formula of generalized resolvents of a nondensely defined Hermitian operator / M.M. Malamud // Ukr. Mat. Zh. – 1992. – V. 44. – P. 1658–1688.

[79] Nevanlinna R. Asymptotische Entwicklungen beschr?ankter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem / R. Nevanlinna // Ann. Acad. Scient. Fennicae, Ser. A. – 1922. – V. 18. – P. 1—53.

[80] Peherstorfer F. Finite perturbations of orthogonal polynomials / F. Peherstorfer // J. Comput. Appl. Math. – 1992. – V. 44. – P. 275-302.

[81] Potapov V.P. Multiplicative structure of J-nonexpanding matrix functions / V.P. Potapov // Trudy Mosk.Matem. Obsch. – 1955. – V. 4. – P. 125–236.

[82] Stieltjes T. Recherches sur les fractions continues / T. Stieltjes // Ann.de Toulouse. – 1894. – V. 8. – P. 1–122.

[83] Tsekanovskii E. R. The theory of biextensions of operators in rigged Hilbert spaces. Unbounded operator colligations and characteristic functions. (Russian) / E. R. Tsekanovskii, Ju.L. Šmul'jan // Uspehi Mat. Nauk. – 1977. – V. 32. – P. 69–124.

[84] Simon B. The classical moment problem as a self-adjoint finite diference operator / B. Simon // Advances in Mathematics. – 1998. – V. 137. – P. 82–203.

[85] Spiridonov V. Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials / V. Spiridonov, A. Zhedanov // Methods Appl. Anal. – 1995. – V. 2. – P. 369-398.

[86] Spiridonov V. Self-similarity, spectral transformations and orthogonal and bi-orthogonal polynomials in self-similar systems / V. Spiridonov, A. Zhedanov // Proc. Internat. Workshop JINR, Dubna. – 1999. – P. 349–361.

[87] Szegö G. Orthogonal Polynomials / G. Szegö // fourth edition, AMS. – 1975. – 432 p.

[88] Zhedanov A. Rational spectral transformations and orthogonal polynomials / A. Zhedanov // J. Comput. Appl. Math. – 1997. – V. 85. – P. 67–86.

[89] Wall H. S. Analytic theory of continued fractions / H. S. Wall // Chelsey, New York. – 1967. – 433 p.