НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Сербенюк Симон Олександрович

УДК 517.5+517.13+510.3+511.72

Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:	доктор фізико-математичних наук, професор **Працьовитий Микола Вікторович**, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, декан фізико-математичного факультету; Інститут математики НАН України, завідувач лабораторії фрактального аналізу.
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, професор **Дудкін Микола Євгенович**, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», в.о. завідувача кафедри диференціальних рівнянь;
	кандидат фізико-математичних наук **Макарчук Олег Петрович**, Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, доцент кафедри прикладної математики, статистики та економіки.

Захист відбудеться «19» червня 2018 р. о 16 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «17» травня 2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Адекватними математичними моделями природних об'єктів часто є фрактали. Важливість фракталів полягає не тільки у моделюванні фізичних та біологічних процесів — це строго математичне поняття, яке об'єднує різні математичні об'єкти такі, як, наприклад, криві та поверхні, що не мають дотичної у жодній точці, ніде не монотонні функції, неперервні ніде не диференційовні функції, сингулярні розподіли і т. д. Останні функції (функції зі складною локальною будовою) утворюють множини другої категорії Бера у деяких метричних просторах, чим і зумовлений науковий інтерес до дослідження таких функцій через доволі повільний розвиток теорій відповідних функцій до останнього часу. Зокрема, проблема побудови якнайпростішого задання функцій зі складною локальною будовою залишається актуальною й досі. Такими ж є і задачі про побудову узагальнень таких функцій, дослідження спеціальним чином означених класів функцій, що містять функції зі складною локальною будовою. Варто зазначити, що у переважній більшості робіт з даної тематики в якості систем зображень для конструювання таких функцій розглядаються зображення дійсних чисел, що ґрунтуються на розкладах чисел у додатні ряди, у той час як знакопочережні розклади майже не використовуються. Відкритою залишається і задача про моделювання, дослідження властивостей та закономірностей у властивостях відповідних функцій, що моделюються певним методом, і, аргумент яких визначений у термінах класичного зображення дійсних чисел та послідовних узагальненнях цього зображення (зокрема, s-ве зображення, зображення додатним рядом Кантора, $\tilde{Q}$-зображення).

Для моделювання та дослідження самоподібних фракталів, функцій зі складною локальною будовою використовуються методи, побудовані на використанні різних систем зображень (кодувань) дійсних чисел. Те чи інше зображення дійсного числа є зручним для розв'язання певних задач математики у залежності від своїх «особливостей» (геометрії, метричних відношень, наявності самоподібності і т. п.). Тому одні задачі, розв'язати які у термінах одного зображення чисел важко, можна доволі просто розв'язати у термінах іншого зображення дійсних чисел.

У 1869 році Георг Кантор розглянув розклади чисел $x \in [0;1]$ у додатні ряди вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{d_1 d_2 \ldots d_k},$$

де (d_k) — фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1, та $\varepsilon_k(x) \in \{0, 1, \ldots, d_k - 1\}$, і сформулював критерій подання раціональних чисел у формі таких рядів для випадку періодичної послідовності (d_k). У подальшому, останні ряди, які у науковій літературі стали називати рядами Кантора, досліджувалися багатьма вченими, серед яких: П. А. Діананда, А. Оппенгейм, П. Ердос, Дж. Ганкль, Е. Г. Штраус, П. Руцький, Р. Тіждеман, П. Кугапатанакуль, В. Ляогакосоль, Б. Манче, Пінґжі Юан, Дж. Ґалямбос, П. Кіршенгофер, Р. Ф. Тіші, Т. Комецу, С. Пруґсапітак, Дж. Раттанамунґ, Б. Лі, М. Паштека, Ї. Ванґ, Зіксіонґ Вен, Ляйфенґ Ксі, М. С. Ватерман, А. Ренюї, Лю Вен. Чимало праць присвячено знаходженню критеріїв представлення раціональних чисел рядами Кантора.

Вбачаючи перспективність у використанні зображення чисел додатним рядом Кантора, яке є узагальненням класичного s-го зображення і частинним випадком поліосновного $\tilde{Q}$-зображення, для вивчення функцій, перетворень і мір зі складною локальною будовою, доцільно розглянути геометрію та метричну теорію цього зображення, знайти критерії раціональності числа. Виникає задача побудувати та вивчити узагальнення нега-s-го представлення дійсних чисел — представлення знакопочережним рядом Кантора і знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад. На основі постановки вказаних вище задач постає задача — вивчати взаємозв'язок між цими представленнями і застосовувати отримані результати для побудови і вивчення фрактальних множин, функцій зі складною локальною будовою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України згідно з науково-дослідною темою «Фрактальний аналіз неперервних функцій і мір» (номер державної реєстрації 0111U000053).

Мета і завдання дослідження. *Об'єктом дисертаційного дослідження* є кодування (зображення) дійсних чисел за допомогою рядів Кантора (додатним чи знакопочережним), частинні випадки останнього кодування (s-ве, нега-s-ве зображення, розклад числа у нега-s-ий ряд Кантора, змішаний s-ий ряд), узагальнення ($\tilde{Q}$-зображення, подання чисел у вигляді знакопочережного $\tilde{Q}$-розкладу, нега-$\tilde{Q}$-представлення) та їх застосування до побудови і дослідження фрактальних множин, функцій зі складною локальною будовою.

Предметом дослідження є: тополого-метрична теорія та геометрія дійсних чисел, зображених рядами Кантора, знакопочережним $\tilde{Q}$-розкладом; нега-$\tilde{Q}$-представлення; тополого-метричні та фрактальні властивості множин спеціального типу, визначених у термінах подання дійсних чисел частинними випадками рядів Кантора; різні властивості функцій зі складною локальною будовою, аргумент і значення яких визначені у термінах різних зображень дійсних чисел (рядами Кантора, їх частинними випадками чи узагальненнями).

Мета дослідження — розвиток тополого-метричної теорії та вивчення систем кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом, поглиблення теорій сингулярних, ніде не монотонних та ніде не диференційовних функцій на основі узагальнень відомих функцій, знаходження нових фрактальних множин, а також класів функцій зі складною локальною будовою, вдосконалення апарату для задання таких функцій.

Основні завдання дослідження:

— дослідити зображення дійсних чисел знакопочережним рядом Кантора і властивості множини його неповних сум, зображення чисел, що подаються у вигляді нега-$\tilde{Q}$-розкладу (знакопочережного $\tilde{Q}$-розкладу) та нега-$\tilde{Q}$-представлення;

— описати властивості оператора зсуву цифр представлення числа знакопочережним рядом Кантора, а також деякі застосування операторів зсуву цифр певних представлень чисел та взаємозв'язку представлень знакопочережним і додатним рядами Кантора;

— встановити критерії раціональності представлення дійсних чисел додатним та знакопочережним рядами Кантора;

— вивчити тополого-метричні, фрактальні властивості нових множин, у поданні елементів яких рядами Кантора спеціального вигляду накладаються певні залежності на вживання символів (цифр);

— провести дослідження властивостей нових функцій, заданих перетворювачами цифр, або комбінацій цифр зображення аргументу, серед них і тих, аргумент і значення яких визначені у термінах s-го або нега-s-го зображень, а також вивчити певні узагальнення класичної функції Салема.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу, теорії функцій дійсної змінної, теорії міри, фрактального аналізу, метричної теорії чисел, теорії ймовірностей.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

— змодельовано ланцюжок узагальнень нега-s-го представлення дійсних чисел, а саме: кодування чисел, які встановлюються через розклад числа у знакочережний ряд Кантора, нега-$\tilde{Q}$-розклад (знакочережний $\tilde{Q}$-розклад) та нега-$\tilde{Q}$-представлення; розроблено основи метричної теорії чисел, зображених останніми розкладами, детально вивчено властивості множини неповних сум знакочережного ряду Кантора;

— досліджено і застосовано взаємозв'язок кодувань дійсних чисел за допомогою знакочережних і додатних рядів Кантора при моделюванні функцій, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича; введено поняття узагальненого оператора зсуву цифр та описано властивості оператора зсуву цифр представлення числа знакочережним рядом Кантора; застосовано оператори зсуву цифр $\tilde{Q}$-представлення та представлення чисел додатним рядом Кантора для задання нескінченними системами функціональних рівнянь функцій зі складною локальною будовою;

— доведено критерії раціональності представлення дійсних чисел додатним та знакочережним рядами Кантора;

— проведено тополого-метричний і фрактальний аналіз нових множин, у поданні елементів яких у формі рядів Кантора спеціального вигляду (змішаний s-ий ряд, s-ве, нега-s-ве представлення) накладається певна функціональна залежність на вживання символів; вивчено фрактальні властивості деяких множин, елементи яких подаються у вигляді розкладів в нега-s-ий ряд Кантора, а також довільної множини, яка містить всі можливі числа з відрізка $[0;1]$ (або $[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}]$), у s-му (або нега-s-му) зображенні яких вживаються набори цифр лише з

фіксованої множини наборів s-их цифр;
— досліджено узагальнення класичної функції Салема, аргумент яких визначено у термінах зображення дійсних чисел рядами Кантора (додатними, знакопочережними) і нега-$\tilde{Q}$-зображення, а також нові функції, задані певним перетворювачем цифр або комбінацій цифр зображення аргументу, та, аргумент і значення яких визначені у термінах s-го чи нега-s-го зображення.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використані при подальшому вивченні математичних об'єктів зі складною локальною будовою.

Особистий внесок здобувача. Результати, що виносяться на захист, отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати даного дисертаційного дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Серед 12 конференцій, у тезах доповідей яких було опубліковано результати дисертації, можна відмітити такі:

— Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19–21 квітня 2012 р.;
— International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov, Kyiv, August 20–26, 2012;
— Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, 13–14 грудня 2012 р.;
— Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25–27 квітня 2013 р.;
— Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kyiv, September 16–20, 2013;
— Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Г. М., Київ, 23–24 квітня 2014 р.;
— International Conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization», Kyiv, April 7–10, 2015;

— Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25 квітня 2015 р..

Наукові семінари:

1. Семінар відділу топології Інституту математики НАН України.
2. Київський семінар з функціонального аналізу.
3. Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН України.
4. Семінар відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України.
5. Семінар відділу диференціальних рівнянь і теорії коливань Інституту математики НАН України.
6. Семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України.
7. Семінар з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ ім. М. П. Драгоманова.

Публікації. Основні результати роботи викладено у 10 статтях ([1]-[10]) та одному препринті ([11]). Статті [1]-[7] та [9] опубліковані у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України ([9] — у міжнародному науковому виданні). Статті [8] та [10] опубліковано у виданнях інших держав. Чотири статті ([7]-[10]) опубліковано у виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus, Google Scholar, MathSciNet (Mathematical Reviews), Zentralblatt MATH). Додатково матеріали даного дисертаційного дослідження відображено у чотирьох препринтах ([12]-[15]). Також матеріали даної дисертаційної роботи додатково відображено у матеріалах 12 конференцій ([16]-[27]).

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, переліку скорочень і умовних позначень, вступу, п'яти розділів, розбитих на пункти та підпункти, висновків, списку використаних джерел, списку публікацій автора та одного додатка. Загальний обсяг роботи – 209 сторінок, основний текст роботи викладено на 164 сторінках. Список використаних джерел налічує всього 71 найменування, список публікацій автора — 27.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** подана загальна характеристика дисертації: обґрунтовано актуальність теми; вказано мету, задачі і методи дослідження; висвітлено наукову новизну та практичне значення одержаних результатів; описано особистий внесок здобувача.

У **розділі 1 «Огляд літератури та ключові поняття»** здійснюється огляд літератури, розглядаються основні математичні поняття (зокрема, представлення дійсних чисел додатними рядами Кантора, s-ве та $\tilde{Q}$-представлення). Означаються оператори зсуву цифр цих представлень.

У **розділі 2 «Розклади дійсних чисел у знакопочережні ряди Кантора. Критерії раціональності»** вводяться відповідно поняття нега-D- і нега-(d_n)-зображення дійсних чисел з деякого відрізка, а саме:

$$x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} \equiv -\tfrac{\varepsilon_1}{d_1} + \tfrac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} - \tfrac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 d_3} + \ldots + \tfrac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 d_3 \ldots d_n} + \ldots,$$

$$x = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} \equiv \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{d_1 d_2 \ldots d_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n},$$

де $D \equiv (d_n)$ — фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1, і $\varepsilon_n \in A_{d_n} \equiv \{0, 1, \ldots, d_n - 1\}$. У даному розділі вивчається геометрія та основи метричної теорії, найпростіші метричні задачі нега-D-зображення, взаємозв'язок додатних і знакопочережних рядів Кантора. Показано, що довільне число з деякого відрізка можна подати у формі розкладу в знакопочережний ряд Кантора, причому лише числа із деякої зліченної множини мають два різних зображення знакопочережним рядом Кантора, а решта — єдине зображення.

Знакопочережний ряд Кантора, який є одночасно нега-s-им рядом, називається *нега-s-им рядом Кантора,* а саме:

$$-\tfrac{\varepsilon_1}{s^{m_1}} + \tfrac{\varepsilon_2}{s^{m_1+m_2}} - \tfrac{\varepsilon_3}{s^{m_1+m_2+m_3}} + \ldots + \tfrac{(-1)^n \varepsilon_n}{s^{m_1+m_2+\ldots+m_n}} + \ldots,$$

де $\varepsilon_n \in A \equiv \{0, 1, \ldots, s-1\}$, $1 < s$ — фіксоване натуральне число, (m_n) — послідовність непарних натуральних чисел.

Змішаним s-им рядом називається ряд (який є знакопочережним рядом Кантора) вигляду

$$-\tfrac{\alpha_1}{s^{k_1}} + \tfrac{\alpha_2}{s^{k_2}} - \tfrac{\alpha_3}{s^{k_3}} + \ldots + \tfrac{(-1)^n \alpha_n}{s^{k_n}} + \ldots, \ \alpha_n \in A.$$

У підрозділі 2.5 вивчаються різні властивості множини неповних сум. *Множиною всіх неповних сум* знакопочережного ряду Кантора називається множина виду: $M_{s_0} \equiv \{x : x = \Delta^{-D}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\ldots}, (\delta_n) \in L'_{s_0}\}$, де $s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ — фіксоване число, $A'_n \equiv \{0, \varepsilon_n\}$,

$L'_{s_0} = A'_1 \times A'_2 \times A'_3 \times \ldots = \{\delta : \delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots), \delta_n \in A'_n\}$.

Теорема 2.3. *Множина M_{s_0} неповних сум знакопочережного ряду Кантора є:*

1) *одноелементною множиною $\{0\}$, якщо $s_0 = 0$;*
2) *скінченною множиною, якщо у зображенні $s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ умова $\varepsilon_n \neq 0$ виконується лише для скінченної множини значень n;*
3) *відрізком $\left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right]$, якщо $d_n = 2$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $s_0 = -\frac{1}{3}$;*
4) *об'єднанням скінченного числа відрізків, якщо існує скінченна множина номерів m_i ($i = \overline{1, k_0}$, k_0 — фіксоване число) таких, що $d_{m_i} \neq 2$ та $s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{m_{k_0}}(1)}$;*
5) *континуальною, досконалою, ніде не щільною нуль-множиною Лебега, якщо $\varepsilon_n \neq 0$ та $d_n > 2$ для нескінченної множини значень n.*

Підрозділ 2.6 присвячений вивченню операторів зсуву цифр нега-D-представлення. Розглянуто властивості оператора зсуву цифр представлення, описано поняття оператора зсуву нега-D-зображення та означається нове поняття узагальненого оператора зсуву нега-D-представлення, а саме:

$\hat{\varphi}_m(x) = -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \ldots + \frac{(-1)^{m-1}\varepsilon_{m-1}}{d_1 \ldots d_{m-1}} + \frac{(-1)^m \varepsilon_{m+1}}{d_1 \ldots d_{m-1} d_{m+1}} + \frac{(-1)^{m+1}\varepsilon_{m+2}}{d_1 \ldots d_{m-1} d_{m+1} d_{m+2}} + \ldots$.

У підрозділі 2.7 сформульовано критерії раціональності чисел, представлених розкладами у ряди Кантора. У пункті 2.7.1 формулюються основні твердження про задання раціональних чисел у термінах знакопочережних рядів Кантора. Решта пунктів даного розділу присвячені відповідним дослідженням для додатних рядів Кантора. Пункт 2.7.2 присвячено формулюванню критерію скінченного представлення.

Основні результати містяться у пункті 2.7.3.

Теорема 2.9. *Число x є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують $n \in \mathbb{Z}_0$ і $c \in \mathbb{N}$ такі, що $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$. Тобто,*

$$\Delta^D_{\underbrace{0\ldots0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+3}\ldots} = d_{n+1}\ldots d_{n+c}\Delta^D_{\underbrace{0\ldots0}_{n+c}\varepsilon_{n+c+1}\varepsilon_{n+c+2}\varepsilon_{n+c+3}\ldots},$$

де $\hat{\varphi}$ — оператор зсуву цифр представлення числа додатним рядом Кантора, $\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_2 d_3 \ldots d_n}$.

Пункт 2.7.4. присвячено формулюванню і доведенню деяких наслідків із основних тверджень попереднього пункту.

У **розділі 3 «Самоподібні фрактали»** досліджено топологометричні, фрактальні властивості множин спеціального вигляду, елементи яких визначені у термінах частинних випадків рядів Кантора.

Нехай s — фіксоване натуральне число, більше 2, $A_0 \equiv A \setminus \{0\} \equiv \{1, 2, \dots, s-\ 1\ \}$, $L \equiv (A_0)^\infty \equiv (A_0) \times (A_0) \times \dots$ — простір односторонніх послідовностей елементів множини A_0, u — фіксоване число з множини A, $u = \overline{0, s-1}$, $\alpha_n \neq u$. Досліджуються властивості множин

$$\mathbb{S}_{(s,u)} \equiv \{x : x = \Delta^s_{\underbrace{u...u}_{\alpha_1 - 1}\alpha_1 ... \underbrace{u...u}_{\alpha_n - 1}\alpha_n ...}, (\alpha_n) \in L\},$$

$$\mathbb{S}_{(-s,u)} \equiv \{x : x = \Delta^{-s}_{\underbrace{u...u}_{\alpha_1 - 1}\alpha_1 ... \underbrace{u...u}_{\alpha_n - 1}\alpha_n ...}, (\alpha_n) \in L\},$$

$$S^- \equiv \left\{x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}, (\alpha_n) \in L\right\}$$

та множини $\tilde{S}$, яка містить всі числа з $[0; 1]$, в s-му зображенні яких дозволено вживати лише набори s-их цифр з множини $\{\underbrace{u \dots u}_{c-1} c\}$, де $c = \overline{1, s-1}$, $u \in\ A$, $c \neq u$, $u = \overline{0, s-1}$.

Позначимо через Υ_s та Υ_{-s} класи всіх можливих множин $\mathbb{S}_{(s,u)}$ та $\mathbb{S}_{(-s,u)}$ відповідно. Відтак вважатимемо, що Υ — клас множин, що містить класи: $\dots, \Upsilon_{-n}, \dots, \Upsilon_{-4}, \Upsilon_{-3}, \Upsilon_3, \Upsilon_4, \dots, \Upsilon_n, \dots$.

Теорема 3.1. *Усі множини з* $\Upsilon \setminus \left\{\mathbb{S}_{(-3,1)}, \mathbb{S}_{(-3,2)}, \mathbb{S}_{(3,1)}, \mathbb{S}_{(3,2)}\right\}$ *та множина* S^- *є: континуальними, ніде не щільними, досконалими нуль-множинами Лебега, а також самоподібними фракталами, розмірність Хаусдорфа-Безиковича* $\alpha_0(\cdot)$ *яких задовольняє рівняння:*

$$2\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0(S^-)} - \left(\frac{1}{s}\right)^{s\alpha_0(S^-)} = 1, \quad \sum_{p \neq u, p \in A_0} \left(\frac{1}{s}\right)^{p\alpha_0(\mathbb{S}_{(\pm s,u)})} = 1,$$

де під позначенням $\mathbb{S}_{(\pm s,u)}$ *маємо на увазі множину* $\mathbb{S}_{(s,u)}$ *або* $\mathbb{S}_{(-s,u)}$.

Теорема 3.2. *Нехай E — множина, яка містить всі можливі числа з відрізка* $[0; 1]$ *(або* $[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}]$*), в s-му (або нега-s-му) зображенні яких вживаються набори цифр лише з фіксованої множини* $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_m\}$ *наборів s-их цифр.*

Тоді розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(E)$ множини E задовольняє рівняння:

$$N(\sigma_m^1)\left(\tfrac{1}{s}\right)^{\alpha_0} + N(\sigma_m^2)\left(\tfrac{1}{s}\right)^{2\alpha_0} + \ldots + N(\sigma_m^k)\left(\tfrac{1}{s}\right)^{k\alpha_0} = 1,$$

де $N(\sigma_m^1)+N(\sigma_m^2)+\ldots+N(\sigma_m^l) = m$, $N(\sigma_m^k)$ — кількість k-цифрових $(k=\overline{1,l})$ наборів σ_m^k з множини $\tilde{\Sigma}$.

Теорема 3.3. *Множина $\tilde{S}$ є: континуальною, ніде не щільною, досконалою нуль-множиною Лебега та самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(\tilde{S})$ якого задовольняє рівняння*

$$\left(\tfrac{1}{s}\right)^{\alpha_0(\tilde{S})} + (s-1)\left(\left(\tfrac{1}{s}\right)^{2\alpha_0(\tilde{S})} + \left(\tfrac{1}{s}\right)^{3\alpha_0(\tilde{S})} + \ldots + \left(\tfrac{1}{s}\right)^{(s-1)\alpha_0(\tilde{S})}\right) = 1.$$

Підрозділ 3.3 присвячено розгляду одного прикладу самоподібного фрактала, означеного у термінах нега-s-го ряду Кантора.

Розділ 4 «Функції зі складною локальною будовою» присвячений дослідженню функцій зі складною локальною будовою.

У підрозділі 4.1 як приклад функції зі складною локальною будовою розглянуто функцію, яка «зберігає цифру 0», а саме: аргумент і значення досліджуваної функції визначені у термінах трійкового зображення чисел з відрізка $[0;1]$, а значення функції отримується із аргумента заміною 1 на 2, 2 на 1, цифра 0 є інваріантом. У цьому ж підрозділі оглядово розглядаються і решта функцій, які можна змоделювати заміною конкретної цифри на фіксовану цифру в термінах трійкового зображення.

У підрозділі 4.2 досліджується клас Λ_s функцій, що задані перетворювачами цифр або комбінацій цифр зображення аргументу та аргумент і значення яких визначені у термінах s-го чи нега-s-го зображення. Тобто, вивчаються усі можливі функції, які можна змоделювати згаданим вище методом, але які задані у термінах s-го та/або нега- s-го зображення чисел.

Клас функцій Λ_s містить лише такі монотонні функції: $y = x$, $y = 1-x$ та $y = -\frac{s-1}{s+1} - x$. Решта функцій є немонотонними.

Теорема 4.4. *Справедливими є наступні твердження:*

1) *довільна функція $f \in \Lambda_s$, за винятком лінійних функцій, є неперервною майже скрізь. Зокрема, функція f є неперервною в s-во-ірраціональних точках $[0;1]$ або нега-s-во-ірраціональних точках $[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}]$ (залежно від зображення, у термінах якого визначений аргумент функції f), s-во-*

раціональні точки чи, відповідно, нега-s-во-раціональні точки є точками стрибків функції f;

2) *довільна функція з класу функцій Λ_s, за винятком лінійних функцій, є ніде не диференційовною;*
3) *довільна функція $f \in \Lambda_s$ є інтегровною за Лебегом, причому*

$$\int\limits_{D(f)} f(x)dx = \frac{1}{2}, \text{ де } D(f) \text{ — область визначення функції } f;$$

4) *значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича графіка довільної функції $f \in \Lambda_s$ дорівнює 1.*

У підрозділі 4.3 досліджуються узагальнення класичної функції Салема, аргумент яких визначений у термінах зображення дійсних чисел рядами Кантора (знакопочережними, додатними).

Нехай $P = ||p_{i,n}||$ — така задана матриця, що $n = 1, 2, \dots$, $i = \overline{0, d_n - 1}$, і, для якої справедливою є наступна система властивостей: $\forall n \in \mathbb{N} : p_{i,n} \in (-1; 1)$; $\forall (i_n), i_n \in A_{d_n} : \prod_{n=1}^{\infty} |p_{i_n,n}| = 0$; $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{m_n} p_{i,n} = 1$; $\forall \varepsilon_n \neq 0 : \sum_{i=0}^{\varepsilon_n - 1} p_{i,n} > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо нескінченну систему функціональних рівнянь

$$f(\hat{\varphi}^k(x)) = \beta_{\varepsilon_{k+1},k+1} + p_{\varepsilon_{k+1},k+1} f(\hat{\varphi}^{k+1}(x)),$$

де $x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n\dots}$, $\hat{\varphi}$ — оператор зсуву цифр представлення числа рядом Кантора, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\varepsilon_{k+1} \in A_{d_{k+1}}$ та $\beta_{\varepsilon_{k+1},k+1} = 0$, якщо $\varepsilon_{k+1} = 0$, і $\beta_{\varepsilon_{k+1},k+1} = \sum_{i=0}^{\varepsilon_{k+1}-1} p_{i,k+1}$, якщо $\varepsilon_{k+1} \neq 0$.

Теорема 4.5. *Система функціональних рівнянь*

$$f\left(\frac{i + \hat{\varphi}^k(x)}{d_k}\right) = \beta_{i,k} + p_{i,k} \cdot f(\hat{\varphi}^k(x)),$$

де $k = 1, 2, \dots$, та $i \in A_{d_k}$, у класі обмежених та визначених на відрізку $[0; 1]$ функцій має єдиний розв'язок, який має вигляд

$$F(x) = \beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\varepsilon_k(x),k} \prod_{n=1}^{k-1} p_{\varepsilon_n(x),n}\right).$$

Останні дві системи функціональних рівнянь є еквівалентними.

Нехай $x = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n\dots}$. Розглянемо функцію вигляду

$$\tilde{F}(x) = \beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_n(x),n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x),j}\right),$$

де $\tilde{\beta}_{\varepsilon_n(x),n} = \beta_{\varepsilon_n(x),n}$ і $\tilde{p}_{\varepsilon_n(x),n} = p_{\varepsilon_n(x),n}$ за умови непарного n та $\tilde{\beta}_{\varepsilon_n(x),n} = \beta_{d_n-1-\varepsilon_n(x),n}$ і $\tilde{p}_{\varepsilon_n(x),n} = p_{d_n-1-\varepsilon_n(x),n}$, якщо n — парне.

Теорема 4.6. *Функції F, $\tilde{F}$ володіють наступними властивостями:*

— *є неперервними;*
— *монотонно неспадні за умови невід'ємності елементів матриці P, зокрема, строго зростаючі за умови, коли всі елементи $p_{i,n}$ матриці P є додатними;*
— *є інтегровними за Лебегом, причому*

$$\int\limits_0^1 F(x)dx = \int\limits_0^1 \tilde{F}(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{0,n} + \beta_{1,n} + \beta_{2,n} + ... + \beta_{d_n-1,n}}{d_1 d_2 ... d_n}.$$

Розглянемо випадок, коли елементи матриці $P = \, ||p_{i,n}||$ можуть бути як невід'ємними, так і від'ємними числами.

Теорема 4.7. *Нехай матриця P є такою, що для всіх $n \in \mathbb{N}$: $p_{\varepsilon_n,n} \cdot p_{\varepsilon_n-1,n} < 0$, причому $d_n \cdot \, p_{d_n-1,n} \geqslant 1$ або $d_n \cdot p_{d_n-1,n} \leqslant 1$ та*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} d_k p_{0,k} \neq 0, \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} d_k p_{d_k-1,k} \neq 0$$

одночасно. Тоді функція F є ніде не диференційовною на $[0;1]$.

Теорема 4.8. *Нехай $p_{\varepsilon_n,n} \cdot p_{\varepsilon_n-1,n} < 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \in \in A_{d_n} \setminus \{0\}$ та*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} d_k p_{0,k} \neq 0, \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} d_k p_{d_k-1,k} \neq 0$$

одночасно. Тоді функція $\tilde{F}$ є ніде не диференційовною на $[0;1]$.

У **розділі 5 «Знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад, нега-$\tilde{Q}$-зображення дійсних чисел та функції зі складною локальною будовою»** досліджується знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад та розглядається нега-$\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел — відповідно узагальнення представлення дійсних чисел знакопочережним рядом Кантора та узагальнення взаємозв'язку кодувань чисел за допомогою додатного і знакопочережного рядів Кантора; вивчаються узагальнення класичної функції Салема, аргумент яких визначений у термінах нега-$\tilde{Q}$-зображення.

У підрозділі 5.1 моделюється знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад.

Теорема 5.1. *Для довільного числа $x \in [t_0^{'}; t_0^{''}]$ існує послідовність (i_k), $i_k \in N^0_{m_k}$, така, що*

$$x = -a_{i_1,1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[(-1)^k a_{i_k,k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j,j}\right],$$

якщо для всіх $k \in \mathbb{N}$ справедливою є наступна система умов:

$$\begin{cases} q_{c+1,2k}\left(a_{m_{2k+1},2k+1} + \sum\limits_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_{2k+t},2k+t}\prod\limits_{r=2k+1}^{2k+t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right) \geqslant \\ \qquad \geqslant q_{c,2k}\left(1 - \sum\limits_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,2k+t}\prod\limits_{r=2k+1}^{2k+t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]\right); \\ q_{c+1,2k-1}\left(a_{m_{2k},2k} + \sum\limits_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,2k+t-1}\prod\limits_{r=2k}^{2k+t-2}\tilde{q}_{0,r}\right]\right) \geqslant \\ \qquad \geqslant q_{c,2k-1}\left(1 - \sum\limits_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_{2k+t-1},2k+t-1}\prod\limits_{r=2k}^{2k+t-2}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right). \end{cases}$$

Останній розклад можна побудувати, прийнявши за основу представлення дійсних чисел фіксовану матрицю $(-1)\cdot\tilde{Q} = (-1)\cdot||q_{i,j}||$, де $i = \overline{0, m_j}, m_j \in N^0_\infty \equiv \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, $j = 1, 2, \ldots$, $\tilde{Q} = \|q_{i,j}\|$ — фіксована матриця, елементи якої володіють такими властивостями: $q_{i,j} > 0$; $\forall j \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{m_j} q_{i,j} = 1$; $\forall (i_j), i_j \in \mathbb{Z}_0 : \prod_{j=1}^{\infty} q_{i_j,j} = 0$. Крім того, $a_{i_k,k} = \sum_{i=0}^{i_k(x)-1} q_{i,j}$ при $i_k \neq 0$ та $a_{i_k,k} = 0$ при $i_k = 0$. Також $\tilde{a}_{i_k,k} = a_{i_k,k}$ та $\tilde{q}_{i_k,k} = q_{i_k,k}$ за умови непарного k і $\tilde{a}_{i_k,k} = a_{m_k-i_k,k}$ та $\tilde{q}_{i_k,k} = q_{m_k-i_k,k}$, якщо k — парне.

У підрозділі також досліджуються основне метричне відношення, властивості циліндрів (зокрема, доведено, що вони є відрізками, вивчено розташування циліндрів однакового рангу), дійсні числа, які мають два різних знакопочережних $\tilde{Q}$-розклади.

Підрозділ 5.2 є допоміжним і присвячений нега-$\tilde{Q}$-зображенню дійсних чисел — зображенню, для якого справедливою є тотожність

$$\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots} \equiv \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{2k-1}[m_{2k}-i_{2k}]\ldots}.$$

Нехай задано матриці однакового порядку $\tilde{Q} = ||q_{i,n}||$ (якою моделюється $\tilde{Q}$-представлення) та $P = ||p_{i,n}||$, де $i = \overline{0, m_n}$, $m_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, причому елементи $p_{i,n}$ матриці P задовольняють систему умов: $p_{i,n} \in (-1; 1)$; $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{m_n} p_{i,n} = 1$; $\forall (i_n), i_n \in \mathbb{Z}_0 : \prod_{n=1}^{\infty} |p_{i_n,n}| = 0$; $\forall i_n \in \mathbb{N} : 0 < \sum_{i=0}^{i_n-1} p_{i,n} < 1$.

У підрозділі 5.3 вивчаються властивості функцій

$$F(x) = \beta_{i_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\tilde{\beta}_{i_k(x),k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{p}_{i_j(x),j}\right],$$

де $x = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \dots i_n \dots}$. Доведено, що функція останнього вигляду є єдиним розв'язком нескінченної системи функціональних рівнянь

$$f\left(\hat{\varphi}^k(x)\right) = \tilde{\beta}_{i_{k+1},k+1} + \tilde{p}_{i_{k+1},k+1} f\left(\hat{\varphi}^{k+1}(x)\right),$$

де $\hat{\varphi}$ — оператор зсуву символів $\tilde{Q}$-представлення та $k = 0, 1, \dots,$ у класі обмежених та визначених на $[0;1]$ функцій. Функція $y = F(x)$ є неперервною в усіх точках відрізка $[0;1]$. У даному підрозділі вказуються умови монотонності, умови існування хоча б одного проміжку монотонності, умови немонотонності та умови, за яких досліджувана функція є сталою майже скрізь на $[0;1]$. Досліджено інтегральні властивості. Зокрема,

$$\int_0^1 F(x)dx = z_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(z_n \prod_{k=1}^{n-1} \sigma_k\right), \quad \text{де}$$
$$z_n = \tilde{\beta}_{0,n}\tilde{q}_{0,n} + \tilde{\beta}_{1,n}\tilde{q}_{1,n} + \dots + \tilde{\beta}_{m_n,n}\tilde{q}_{m_n,n},$$
$$\sigma_n = \tilde{p}_{0,n}\tilde{q}_{0,n} + \tilde{p}_{1,n}\tilde{q}_{1,n} + \dots + \tilde{p}_{m_n,n}\tilde{q}_{m_n,n}.$$

Також наведено умови, за яких досліджувана у даному підрозділі функція не має ні скінченної, ні нескінченної похідної у жодній нега-$\tilde{Q}$-раціональній точці відрізка $[0;1]$.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена моделюванню різних зображень дійсних чисел, застосуванню нових та відомих зображень у теорії множин і теорії функцій зі складною локальною будовою (ніде не монотонних, ніде не диференційовних функцій). Основна увага акцентована на зображеннях дійсних чисел, що ґрунтуються на розкладах чисел у ряди Кантора. Зокрема, розглянуто додатний, знакочережний ряди Кантора, їх узагальнення ($\tilde{Q}$-представлення, нега-$\tilde{Q}$-представлення, знакочережний $\tilde{Q}$-розклад) та подання чисел у формі рядів Кантора спеціального вигляду (s-ве, нега-s-ве представлення, змішаний s-ий ряд, нега-s-ий ряд Кантора).

Змодельовано ланцюжок узагальнень нега-s-го представлення дійсних чисел, а саме: кодування чисел, які встановлюються через розклад числа у знакочережний ряд Кантора, нега-$\tilde{Q}$-розклад (знакочережний $\tilde{Q}$-розклад) та нега-$\tilde{Q}$-представлення. Розроблено основи метричної теорії чисел, зображених останніми розкладами, детально вивчено властивості множини неповних сум знакопочережного ряду Кантора. Введено поняття нега-s-го ряду Кантора і змішаного s-го ряду.

Досліджено і застосовано взаємозв'язок кодувань дійсних чисел за допомогою знакопочережних і додатних рядів Кантора при моделюванні функцій, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича. Введено поняття узагальненого оператора зсуву цифр та вивчено властивості оператора зсуву цифр представлення числа знакопочережним рядом Кантора. Застосовано оператори зсуву цифр $\tilde{Q}$-представлення та представлення чисел додатним рядом Кантора для задання нескінченними системами функціональних рівнянь функцій зі складною локальною будовою.

Доведено критерії раціональності представлення дійсних чисел додатним та знакопочережним рядами Кантора.

Проведено тополого-метричний і фрактальний аналіз нових множин, у поданні елементів яких у формі рядів Кантора спеціального вигляду (змішаний s-ий ряд, s-ве, нега-s-ве представлення) накладається певна функціональна залежність на вживання символів. Вивчено фрактальні властивості деяких множин, елементи яких подаються у вигляді розкладів у нега-s-ий ряд Кантора, і довільної множини, яка містить всі можливі числа з відрізка $[0;1]$ (або $[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}]$), в s-му (або нега-s-му) зображенні яких вживаються набори цифр лише з фіксованої множини наборів s-их цифр.

Досліджено узагальнення класичної функції Салема, аргумент яких визначено у термінах зображення дійсних чисел рядами Кантора (додатними, знакопочережними) і нега-$\tilde{Q}$-зображення, а також нові функції, задані певним перетворювачем цифр або комбінацій цифр зображення аргументу, що їх аргумент і значення визначені у термінах s-го чи нега-s-го зображення.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини дійсних чисел, визначеної в термінах s-кового зображення // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Се-

рія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2010, № 11. — С. 241-250.

2. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні властивості та використання однієї узагальненої множини, заданої s-ковим зображенням з параметром // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2011, № 12. — С. 66-75.
3. *Сербенюк С. О.* Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'яттю // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2). — С. 166-182.
4. *Сербенюк С. О.* Зображення чисел знакододатними рядами Кантора: задання раціональних чисел // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14. — С. 253-267.
5. *Сербенюк С. О.* Про деякі множини дійсних чисел, визначені в термінах нега-s-кового та канторівського нега-s-кового зображень // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 168-187.
6. *Сербенюк С. О.* Функції, означені системами функціональних рівнянь в термінах зображення чисел рядами Кантора // Наукові записки НаУКМА: Фізико-математичні науки. — 2015. — **165**. — С. 34-40.
7. *Сербенюк С. О.* Нега-$\tilde{Q}$-представлення як узагальнення деяких знакопочережних представлень дійсних чисел // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». — 2016, № 1(35). — С. 32-39.
8. *Serbenyuk S.* On one class of functions with complicated local structure // Šiauliai Mathematical Seminar. — 2016. — **11 (19)**. — Pp. 75–88.
9. *Serbenyuk S. O.* Continuous Functions with Complicated Local Structure Defined in Terms of Alternating Cantor Series Representation of Numbers // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2017. — **13**, 1. — P. 57–81.

10. *Serbenyuk S.* Representation of real numbers by the alternating Cantor series [Електронний ресурс] // Integers. — 2017. — **17**. — Paper No. A15, 27 pp. — Режим доступу: http://math.colgate.edu/∼integers/vol17.html (дата звернення 16.06.2017).
11. *Сербенюк С. О.* Про один клас функцій зі складною локальною будовою, які є розв'язками нескінченних систем функціональних рівнянь [On one class of functions with complicated local structure that the solutions of infinite systems of functional equations] [Електронний ресурс]. — arXiv:1602.00493v2 [math.CA] 1 Feb. 2016 (last revised 10 May 2016 (this version, v2)). — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1602.00493.pdf (дата звернення 16.06.2017).
12. *Serbenyuk S.* Про деякі узагальнення зображень дійсних чисел [On some generalizations of real numbers representations] [Електронний ресурс]. — arXiv:1602.07929v1 [math.NT] 25 Feb. 2016. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1602.07929.pdf (дата звернення 16.06.2017).
13. *Serbenyuk S.* Non-differentiable functions defined in terms of classical representations of real numbers [Електронний ресурс]. — arXiv:1705.05575v1 [math.CA] 16 May 2017. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1705.05575v1.pdf (дата звернення 16.06.2017).
14. *Serbenyuk S.* Cantor series expansions of rational numbers [Електронний ресурс] // ResearchGate.net. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/317099134 (дата звернення 16.06.2017).
15. *Serbenyuk S.* More on one class of fractals [Електронний ресурс]. — arXiv:1706.01546v1 [math.CA] 25 Jun. 2017. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1706.01546.pdf (дата звернення 30.06.2017).
16. *Сербенюк С. О.* Збереження розмірності Хаусдорфа-Безиковича монотонними сингулярними функціями розподілу // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для молодих науковців, 28-29 квітня 2011 року, Київ: Тези доповідей. — Київ: Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, 2011. — С. 106-107.
17. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини, заданої з використанням s-кового зображення //

Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 р.: Матеріали конференції. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. — Київ: НТУУ «КПІ», 2012. — С. 220.

18. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множин з класу, породженого однією множиною з використанням s-кового зображення // Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування», Київ, 16-18 травня 2012 р.: Тези доповідей. — Київ: Інст-т матем. НАН України, 2012. — С. 42.
19. *Serbenyuk S. O.* Real numbers representation by the Cantor series // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov: Abstracts, Kyiv: Dragomanov National Pedagogical University, 2012. — P. 136.
20. *Serbenyuk S. O.* Topological, metric and fractal properties of the set with parameter, that the set defined by s-adic representation of numbers // International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications III» dedicated to 100th anniversary of B. V. Gnedenko and 80th anniversary of M. I. Yadrenko: Abstracts, Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2012. — P. 13.
21. *Сербенюк С. О.* Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'яттю // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, 13-14 грудня 2012 р.: Матеріали конференції. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — С. 93.
22. *Сербенюк С. О.* Про одне узагальнення функцій, які задані автоматами зі скінченною пам'яттю // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 року: Матеріали конференції. — Київ: Національний університет «Києво-Могилянська академія», 2013. — С. 112-113.
23. *Serbenyuk S.* On two functions with complicated local structure // Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts, Kyiv: Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine and Institute of Physics and Mathematics of the National Pedagogical Dragomanov University, 2013. — P. 51-52.

24. *Сербенюк С. О.* Задання системами функціональних рівнянь класу функцій, аргументи яких представлені рядами Кантора // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Г. М., Київ, 23-24 квітня 2014 р.: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. — С. 121.
25. *Serbenyuk S. O.* Nega-$\tilde{Q}$-representation of real numbers // International Conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization»: Abstracts, Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2015. – P. 24.
26. *Сербенюк С. О.* Про одну функцію з класу функцій зі складною локальною будовою, означену в термінах нега-$\tilde{Q}$-представлення // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ, 2015. — С. 52.
27. *Сербенюк С. О.* Квазінега-$\tilde{Q}$-представлення як узагальнення представлення дійсних чисел деякими знакозмінними рядами // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3-6 червня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2015. — С. 85.

АНОТАЦІЇ

Сербенюк С. О. *Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями.* — Кваліфікаційна наукова праця на правх рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

У дисертаційній роботі змодельовано і вивчено зображення дійсних чисел, що є узагальненнями класичного нега-s-го зображення, та математичні об'єкти зі складною локальною будовою, а саме — фрактальні множини (на елементи яких накладаються певні залежності на вживання цифр в їх розкладах у формі рядів Кантора спеціального вигляду), недиференційовні, ніде не монотонні функції

(що задаються у термінах s-го, нега-s-го, нега-$\tilde{Q}$- представлень та розкладами чисел у додатній чи знакопочережний ряд Кантора). Сформульовано критерії раціональності чисел, зображених рядами Кантора.

Ключові слова: додатний ряд Кантора, знакопочережний ряд Кантора, знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад, s-ве представлення, нега-s-ве представлення, неповна сума ряду, фрактал, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, оператор зсуву, недиференційовна функція, ніде не монотонна функція, функція розподілу, міра Лебега, раціональне число.

Сербенюк С. А. *Ряды Кантора как средство задания и исследования математических объектов с фрактальными свойствами.*— Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — математический анализ. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

В дисертационной работе смоделированы и изучены представления действительных чисел, которые являются обобщениями классического нега-s-адического представления, а также математические объекты со сложным локальным строением, а точнее — фрактальные множества (на элементы которых накладываются определенные зависимости на употребление цифр в их разложениях в форме рядов Кантора специального вида), не дифференцируемые, нигде не монотонные функции (задаваемые в терминах s-адического, нега-s-адического, нега-$\tilde{Q}$-представлений и разложением чисел в позитивный или знакочередующийся ряд Кантора). Сформулированы критерии рациональности чисел, изображенных рядами Кантора.

Ключевые слова: позитивный ряд Кантора, знакочередующийся ряд Кантора, знакочередующееся $\tilde{Q}$-разложение, s-адическое представление, нега-s-адическое представление, неполная сумма ряда, фрактал, размерность Хаусдорфа–Безиковича, оператор сдвига, недифференцируемая функция, нигде не монотонная функция, функция распределения, мера Лебега, рациональное число.

Serbenyuk S. O. Cantor series as the mean of creating and studying of mathematical objects with fractal properties. —

Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics by the speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

This thesis is devoted to modeling and studying certain representations (representations by alternating Cantor series, alternating $\tilde{Q}$-expansions, nega-$\tilde{Q}$-representations) of real numbers such that are generalizations of the nega-s-adic representation. Fractal sets, non-differentiable functions, and nowhere monotonic functions that are defined in terms of the s-adic or nega-s-adic representation, representations by positive or alternating Cantor series, and the nega-$\tilde{Q}$-representation, are investigated.

Topological, metric, and fractal properties of new fractal sets, whose elements have a certain functional restriction on using digits in own representations by Cantor series of a certain type, are investigated. Also, fractal properties of an arbitrary set (a subset of $[0,1]$ or $[-\frac{s}{s+1}, \frac{1}{s+1}]$), whose elements represented by Cantor series of the special form and have restrictions expressed by a functional dependence on using digits in own representations, are studied. Necessary and sufficient conditions for rational numbers to be representable by alternating and positive Cantor series are formulated. Properties of the set of incomplete sums of an alternating Cantor series are investigated. A new class of functions, that are defined in terms of the s-adic or nega-s-adic representation, with complicated local structure is modeled and investigated. Classes of generalizations of the Salem function such that their arguments defined by an alternating Cantor series, a positive Cantor series, or the nega-$\tilde{Q}$-representation, are studied.

Key words: positive Cantor series, alternating Cantor series, alternating $\tilde{Q}$-expansion, s-adic representation, nega-s-adic representation, incomplete sum of series, fractal, Hausdorff–Besicovitch dimension, shift operator, non-differentiable function, nowhere monotonic function, distribution function, Lebesgue measure, rational number.

Підписано до друку 10.05.2018. Формат 60×84/16. Папір друк. Офсет. друк. Фіз. друк. арк. 1,37. Умовн. друк. арк. 1,27. Тираж 100 пр. Зам. 33.

Інститут математики НАН України,
01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.