Інститут математики
Національна академія наук України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

СЕРБЕНЮК СИМОН ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 517.5+517.13+510.3+511.72

ДИСЕРТАЦІЯ

РЯДИ КАНТОРА ЯК ЗАСІБ ЗАДАННЯ І ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Спеціальність 01.01.01 – математичний аналіз
Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело *С. О. Сербенюк*

Науковий керівник
Працьовитий Микола Вікторович
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2017

АНОТАЦІЯ

Сербенюк С. О. Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз. — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

У 1869 році Георг Кантор розглянув розклади дійсних чисел з відрізка $[0;1]$ у додатні ряди вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{d_1 d_2 \ldots d_k}, \text{ де}$$

$D \equiv (d_k)$ — фіксована послідовність натуральних чисел, $d_k > 1$, та $\varepsilon_k(x) \in A_{d_k} \equiv \{0, 1, \ldots, d_k - 1\}$. Зазначимо, що чимало задач теорії чисел, теорії функцій зі складною локальною будовою, що пов'язані з представленням дійсних чисел додатними рядами Кантора, залишалися відкритими з 1869 року. Наприклад, проблема знаходження умов подання раціональних чисел рядами Кантора, моделювання недиференційовних чи немонотонних функцій, аргументи яких визначені розкладами в ряд Кантора. Вбачаючи перспективність у використанні розкладів чисел в ряди Кантора, які є узагальненням класичного s-го представлення і частинним випадком поліосновного $\tilde{Q}$-представлення, для вивчення функцій, перетворень і мір зі складною локальною будовою, доцільно розглянути геометрію та метричну теорію таких розкладів, знайти критерії представлення раціональних чисел. Цікавою та перспективною є задача про моделювання послідовності узагальнень нега-s-го представлення дійсних чисел (нега-s-го представлення — представлення чисел знакопочережним рядом Кантора — знакопочережне $\tilde{Q}$-представлення) та застосування змодельованих і вивчених представлень у теорії фракталів та теорії функцій зі складною локальною будовою.

Дисертаційна робота присвячена застосуванню різних зображень дійсних чисел у теорії множин і теорії функцій зі складною локальною будовою (ніде немонотонних, ніде недиференційовних функцій). Основна увага акцентована на зображеннях дійсних чисел, що ґрунтуються на розкладах чисел в ряди Кантора. Зокрема, розглянуто додатний, знакопочережний ряди Кантора, їх узагальнення ($\tilde{Q}$-представлення, нега-$\tilde{Q}$-представлення, знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад) та подання чисел у формі рядів Кантора спеціального виду (s-ве, нега-s-ве представлення, змішаний s-ий ряд, нега-s-ий ряд Кантора).

У процесі проведення дослідження були змодельовані узагальнення нега-s-го представлення дійсних чисел: представлення знакопочережним рядом Кантора та його узагальнення — знакопочережне $\tilde{Q}$-представлення. При моделюванні знакопочережного $\tilde{Q}$-представлення згенеровано знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад і вивчено умови, за яких довільне число з деякого відрізка можна подати у вигляді останнього розкладу, а також побудовано і розглянуто нега-$\tilde{Q}$-зображення дійсних чисел. Розроблено основи метричних теорій чисел, зображених знакопочережним рядом Кантора, знакопочережним $\tilde{Q}$-розкладом, нега-$\tilde{Q}$-представленням.

В термінах відомих і змодельованих у даній роботі зображень чисел моделюються і досліджуються нові види фрактальних множин, функції, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича, функції зі складною локальною будовою (недиференційовні, немонотонні).

У **вступі** наведено загальну характеристику дисертації, обґрунтовано актуальність теми, вказано мету, задачі і методи дослідження, висвітлено наукову новизну та практичне значення одержаних результатів, описано особистий внесок здобувача.

Перший розділ присвячено огляду літератури і розгляду ключових математичих понять. У цьому розділі розглядаються представлення дійсних чисел додатними рядами Кантора, s-ве та $\tilde{Q}$-представлення. Означаються оператори зсуву цифр цих представлень.

У **другому розділі** розроблено основи метричної теорії чисел, зображених знакопочережними рядами Кантора, досліджено властивості множини неповних сум знакопочережного ряду Кантора та сформульовано необхідні і достатні умови представлення раціональних чисел додатними і знакопочережними рядами Кантора. Зокрема, вивчається геометрія і топологія зображення чисел знакопочережними рядами Кантора, його метричні властивості, взаємозв'язок додатних і знакопочережних рядів Кантора. Розглянуто функції, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича (останні моделюються на основі взаємозв'язку кодувань дійсних чисел за допомогою знакопочережних і додатних рядів Кантора). Вводяться поняття нега-s-го ряду Кантора і змішаного s-го ряду. Описано властивості оператора зсуву цифр представлення, вводиться нове поняття узагальненого оператора зсуву цифр (символів) представлення.

У **третьому розділі** досліджено тополого-метричні і фрактальні властивості нових множин спеціального виду, елементи яких представлено в термінах рядів Кантора спеціального виду (s-ве, нега-s-ве представлення, змішаний s-ий ряд, нега-s-ий ряд Кантора), і, на вживання цифр в зображеннях елементів яких накладено обмеження, що виражається функціональною залежністю. Досліджено фрактальні властивості довільної множини, яка містить всі можливі числа з відрізка $[0;1]$ (або $[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}]$), в s-му (або нега-s-му) зображенні яких вживаються набори цифр лише з фіксованої множини $\tilde{\Sigma}=\{\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\dots,\tilde{\sigma}_m\}$ наборів s-их цифр.

Четвертий розділ присвячено функціям зі складною локальною будовою. У підрозділі 4.1 як приклад функції зі складною локальною будовою розглянуто функцію, яка «зберігає цифру 0», а саме: аргумент і значення досліджуваної функції визначені в термінах трійкового зображення чисел з відрізка $[0;1]$, а значення функції отримується із аргумента заміною 1 на 2, 2 на 1, цифра 0 є інваріантом. Останній спосіб задання функції є новим та одним із найпростіших способів задання функцій зі складною локальною будовою.

У підрозділі 4.2 досліджується новий клас функцій, аргумент і значення яких визначені у термінах s-го або нега-s-го зображення, і, які задані певними перетворювачами цифр або комбінацій цифр зображення аргументу. Тобто, вивчаються усі можливі функції, які можна змоделювати згаданим вище методом, але які визначені в термінах s-го та/або нега-s-го зображення чисел. Вивчено фрактальні, інтегральні, диференціальні та інші властивості змодельованих функцій. Зокрема, показано, що всі функції, окрім тотожного перетворення, $y = 1 - x$ та $y = -\frac{s-1}{s+1} - x$, з даного класу функцій є ніде недиференційовними.

У підрозділі 4.3 змодельовано узагальнення функції Салема, аргумент яких визначений у термінах зображення чисел рядами Кантора (додатними, знакопочережними), та досліджуються їх властивості.

У **п'ятому розділі** змодельовано та досліджено узагальнення нега-s-го (з довільною основою $-s < -1$) зображення дійсних чисел (нега-s-ве зображення з дробовою основою вперше було введене японцями Shunji Ito і Taizo Sadahiro у 2009 році), а саме — подання дійсних чисел з деякого відрізка у вигляді знакопочережного $\tilde{Q}$-розкладу. Також розглядається нега-$\tilde{Q}$-зображення дійсних чисел. Останні зображення дійсних чисел — узагальнення представлення дійсних чисел знакопочережним рядом Кантора та узагальнення взаємозв'язку додатного і знакопочережного рядів Кантора відповідно. Крім того, у даному розділі вивчаються властивості узагальнень функції Салема, аргумент яких визначений в термінах нега-$\tilde{Q}$-зображення.

Особливостями проведеного у даній роботі дослідження узагальнень функції Салема є наступне: вперше вивчено властивості функцій (узагальнень функції Салема), різні цифри зображення аргументу та значення яких належать різним алфавітам; вперше запропоновано і досліджено узагаль-

нення функції Салема в термінах знакопочережних представлень дійсних чисел; застосовано поняття операторів зсуву цифр (символів) представлення числа додатним рядом Кантора, $\tilde{Q}$-представлення до моделювання класів функцій зі складною локальною будовою за допомогою нескінченних систем функціональних рівнянь.

Проведені дослідження лежать в руслі сучасних математичних досліджень в області метричної теорії чисел та математичних об'єктів зі складною локальною будовою, представлених у різних системах кодування.

Отримані результати та запропоновані методи можуть бути корисними при розв'язанні задач метричної теорії чисел, фрактальної геометрії, теорій ніде недиференційовних, ніде немонотонних та сингулярних функцій.

Ключові слова: додатний ряд Кантора, знакопочережний ряд Кантора, знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад, s-ве представлення, нега-s-ве представлення, неповна сума ряду, фрактал, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, оператор зсуву, недиференційовна функція, ніде немонотонна функція, функція розподілу, міра Лебега, раціональне число.

ABSTRACT

Serbenyuk S. O. Cantor series as the mean of creating and studying of mathematical objects with fractal properties. — Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 — mathematical analysis. — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

In 1869, Georg Cantor considered expansions of real numbers from the segment $[0;1]$ in positive series of the form

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{d_1 d_2 \ldots d_k}, \text{ where}$$

$D \equiv (d_k)$ is a fixed sequence of positive integers, $d_k > 1$, and $\varepsilon_k(x) \in$ $\in A_{d_k} \equiv \{0, 1, \ldots, d_k - 1\}$. Note that a number of problems of number theory and the theory of functions with a complicated local stucture connected with the representation of real numbers by Cantor series are open since 1869, e.g. the problem of discovering conditions for a rational number to be representable by Cantor series, modeling non-differentiable or non-monotonic functions whose arguments represented by expansions in a Cantor series. Seeing the perspective in using expansions of numbers in Cantor series, that are a generalization of the classical s-adic representation and a partial case of the polybasic $\tilde{Q}$-representation, for studying functions, transformations and measures with a complicated local structure, it is advisable to consider the geometry and metric theory of such expansions, to discover criteria of a representation of rational numbers. The problem on modeling a sequence of generalizations of the nega-s-adic representation of real numbers (the nega-s-adic representation — the representation of numbers by alternating Cantor series — the alternating $\tilde{Q}$-representation) and applications of modeled and investigated representations in fractal theory and the theory of functions with a complicated local structure, is interesting and promising.

This thesis is devoted to the application of various representations of real numbers in set theory and the theory of functions with a complicated local structure (nowhere monotonic, nowhere differentiable functions). The main attention is given to representations of real numbers, based on representations of numbers by Cantor series. In particular, a positive and alternating Cantor series, their generalizations (a $\tilde{Q}$-expansion, a nega-$\tilde{Q}$-expansion, an alternating $\tilde{Q}$-expansion), and representations of numbers by Cantor series of the special form (the s-adic, nega-s-adic representations, and a mixed s-adic series, a nega-s-adic Cantor series) are considered.

During the research, the following generalizations of the nega-s-adic representation of real numbers were modeled: the representation by an alternating Cantor series, and its generalization (the alternating $\tilde{Q}$-representation). When modeling the alternating $\tilde{Q}$-representation, an alternating $\tilde{Q}$-expansion is generated, conditions under which an arbitrary number from a certain segment can be represented by the last-mentioned expansion are studied, as well as a nega-$\tilde{Q}$-representation is generated and considered. The foundations of metric theories of numbers represented by an alternating Cantor series, an alternating $\tilde{Q}$-expansion, and a nega-$\tilde{Q}$-representation, are developed.

New types of fractal sets, functions preserving the Hausdorff-Besikovitch dimension, and functions with a complicated local structure (non-differentiable, non-monotonic), are modeled and investigated in terms of well-known number representations and number representations modeled in this thesis.

In the introduction, general characteristics of the dissertation are given, the relevance of the topic is substantiated, the purpose, problems, and techniques of the investigation are indicated, the scientific novelty and practical significance of obtained results are highlighted, the personal contribution of the aspirant is described.

The first section is devoted to the literature review and the consideration of key mathematical notions. In this section, the representations of real numbers by positive Cantor series, the s-adic and $\tilde{Q}-$ representation are considered. The shift operators of these representations are defined.

In the second section, the foundations of the metric theory of numbers represented by alternating Cantor series are given, properties of the set of incomplete sums of an alternating Cantor series are investigated, and necessary and sufficient conditions for rational numbers to be representable by alternating and positive Cantor series are formulated. In particular, the geometry and topology of the representation of numbers by alternating Cantor series, its metric properties, and the relation between positive and alternating Cantor series are studied. Functions preserving the Hausdorff-Besikovich dimension are considered (the last functions are modeled by the relation between encodings of real numbers by alternating and positive Cantor series). The notions of a nega-s-adic Cantor series and a mixed s-adic series are introduced. Properties of the shift operator of the representation are described, a new notion of the generalized shift operator of digits (symbols) of the representation is introduced.

In the third section, topological, metric, and fractal properties of new sets of special type are investigated. These sets are sets, whose elements represented by Cantor series of the special form (the s-adic, nega-s-adic representations, and a mixed s-adic series, a nega-s-adic Cantor series) and have restrictions expressed by a functional dependence on using digits in own representations. Fractal properties of an arbitrary set (this set is a set of numbers from the segment $[0;1]$ (or $[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}])$), whose elements represented in terms of the s-adic (or nega-s-adic) representation and have only combinations of digits from a fixed set $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_m\}$ of combinations of s-adic digits in own representations, are investigated.

The fourth section is devoted to functions with a complicated local structure. In subsection 4.1, a function that «preserves the digit 0» was considered as an example of a function with a complicated local structure, i.e., the argument and values of the function represented in terms of the ternary representation of numbers from $[0; 1]$, and values of the function are obtained from the argument by the following change of digits: 1 by 2, 2 by 1, and the digit 0 is invariant. The last technique of determination of the function is one of the simplest techniques of the determination of functions with a complicated local structure.

In subsection 4.2, a new class of functions whose arguments and values represented in terms of the s-adic or nega-s-adic representation and these functions are obtained from the s-adic or nega-s-adic representation of the argument by a certain change of digits or combinations of digits, is introdused and investigated. That is all possible functions, that can be modeled by techniques that are similar to a technique from the last subsection, are studied but these functions determined in terms of the s-adic or nega-s-adic representation of numbers. Fractal, integral, differential, and other properties of modeled functions are studied. In particular, it is shown that all functions, except for the identity transformation, $y = 1 - x$, and $y = -\frac{s-1}{s+1} - x$, from this class of functions are nowhere differentiable.

In subsection 4.3, generalizations of the Salem function are modeled, the argument of these functions represented in terms of the representation of numbers by Cator series (positive and alternating), and their properties are investigated.

In the fifth section, a generalization of the nega-s-adic (with an arbitrary base $-s < -1$) representation of real numbers (the nega-s-adic representation with a fractional base was introduced by the Japanese mathematicans Shunji Ito and Taizo Sadahiro in 2009) is modeled and investigated, i.e., a representation of real numbers from a certain segment in the form of the alternating $\tilde{Q}$-expansion. Also, the nega-$\tilde{Q}$-representation of real numbers is considered. The last representations of real numbers are generalizations of the representation of real numbers by an alternating Cantor series and the relation between a positive and alternating Cantor series respectively. In addition, in this section, properties of the Salem function generalizations, whose arguments represented

in terms of the nega-$\tilde{Q}$-representation, are studied.

The following are peculiarities of the investigation of generalizations of the Salem function in this thesis: properties of functions (generalizations of the Salem function), that various digits of them argument and values belong to different alphabets are studied for the first time; generalizations of the Salem function were proposed and studied in terms of alternating representations of real numbers for the first time; the notions of the shift operators of digits (symbols) of the representation of real number by a positive Cantor series, the $\tilde{Q}$-expansion are applicated for modeling classes of functions with a complicated local structure by infinite systems of functional equations.

The carried out investigations lie in the field of modern mathematical investigations in the field of metric theory and mathematical objects with a complicated local structure presented in various encoding systems.

The obtained results and the proposed techniques can be useful for solving problems of the metric theory of numbers, fractal geometry, the theory of nowhere differentiable, nowhere monotonic, and singular functions.

Key words: positive Cantor series, alternating Cantor series, alternating $\tilde{Q}$-expansion, s-adic representation, nega-s-adic representation, incomplete sum of series, fractal, Hausdorff–Besicovitch dimension, shift operator, non-differentiable function, nowhere monotonic function, distribution function, Lebesgue measure, rational number.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ

1. *Serbenyuk S.* Representation of real numbers by the alternating Cantor series [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk // Integers. — 2017. — **17**. — Paper No. A15, 27 pp. — Режим доступу: http://math.colgate.edu/∼integers/vol17.html (дата звернення 16.06.17).
2. *Serbenyuk S. O.* Continuous Functions with Complicated Local Structure Defined in Terms of Alternating Cantor Series Representation of Numbers / S. O. Serbenyuk // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2017. — **13**, no. 1. — Pp. 57–81.
3. *Serbenyuk S.* On one class of functions with complicated local structure / S. Serbenyuk // Šiauliai Mathematical Seminar. — 2016. — **11 (19)**. — Pp. 75–88.
4. *Сербенюк С. О.* Нега-$\tilde{Q}$-представлення як узагальнення деяких знакопочережних представлень дійсних чисел / С. О. Сербенюк // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». — 2016, № 1(35). — С. 32–39.
5. *Сербенюк С. О.* Функції, означені системами функціональних рівнянь в термінах зображення чисел рядами Кантора / С. О. Сербенюк // Наукові записки НаУКМА. — 2015. — Т. 165: Фізико-математичні науки. — С. 34–40.
6. *Сербенюк С. О.* Про деякі множини дійсних чисел, визначені в термінах нега-s-кового та канторівського нега-s-кового зображень / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 168–187.
7. *Сербенюк С. О.* Зображення чисел знакододатними рядами Кантора: задання раціональних чисел / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні

науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14. — С. 253–267.

8. *Сербенюк С. О.* Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'яттю / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2).
9. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні властивості та використання однієї узагальненої множини, заданої s-ковим зображенням з параметром / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2011, № 12. — С. 66–75.
10. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини дійсних чисел, визначеної в термінах s-кового зображення / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2010, № 11. — С. 241–250.
11. *Сербенюк С. О.* Про один клас функцій зі складною локальною будовою, які є розв'язками нескінченних систем функціональних рівнянь [On one class of functions with complicated local structure that the solutions of infinite systems of functional equations] [Електронний ресурс] / С. О. Сербенюк. — arXiv:1602.00493v2 [math.CA] 1 Feb. 2016 (last revised 10 May 2016 (this version, v2)). — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1602.00493.pdf (дата звернення 16.06.17).
12. *Serbenyuk S.* Non-differentiable functions defined in terms of classical representations of real numbers [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk. — arXiv:1705.05575v1 [math.CA] 16 May 2017. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1705.05575v1.pdf (дата звернення 16.06.2017).
13. *Serbenyuk S.* Cantor series expansions of rational numbers [Електрон-

ний ресурс] / S. Serbenyuk // ResearchGate.net. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/317099134 (дата звернення 16.06.2017).

14. *Serbenyuk S.* More on one class of fractals [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk. — arXiv:1706.01546v1 [math.CA] 25 Jun. 2017. — Доступ: https://arxiv.org/pdf/1706.01546.pdf (дата звернення 16.06.17).
15. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини, заданої з використанням s-кового зображення / С. О. Сербенюк // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 р.: Матеріали конференції. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. — Київ: НТУУ «КПІ», 2012. — С. 220.
16. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множин з класу, породженого однією множиною з використанням s-кового зображення / С. О. Сербенюк // Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування», Київ, 16-18 травня 2012 р.: Тези доповідей. — Київ: Інст-т матем. НАН України, 2012. — С. 42.
17. *Serbenyuk S. O.* Real numbers representation by the Cantor series / S. O. Serbenyuk // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov: Abstracts, Kyiv: Dragomanov National Pedagogical University, 2012. — P. 136.
18. *Serbenyuk S. O.* Topological, metric and fractal properties of the set with parameter, that the set defined by s-adic representation of numbers / S. O. Serbenyuk // International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications III» dedicated to 100th anniversary of B. V. Gnedenko and 80th anniversary of M. I. Yadrenko: Abstracts, Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2012. — P. 13.
19. *Сербенюк С. О.* Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'ят-

тю / С. О. Сербенюк // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, 13-14 грудня 2012 р.: Матеріали конференції. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — С. 93.

20. *Сербенюк С. О.* Про одне узагальнення функцій, які задані автоматами зі скінченною пам'яттю / С. О. Сербенюк // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 року: Матеріали конференції. — Київ: Національний університет «Києво-Могилянська академія», 2013. — С. 112–113.
21. *Serbenyuk S.* On two functions with complicated local structure / S. Serbenyuk // Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts, Kyiv: Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine and Institute of Physics and Mathematics of the National Pedagogical Dragomanov University, 2013. — Pp. 51–52.
22. *Сербенюк С. О.* Задання системами функціональних рівнянь класу функцій, аргументи яких представлені рядами Кантора / С. О. Сербенюк // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчя від дня народження членакореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, Київ, 23-24 квітня 2014 р.: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. — С. 121.
23. *Serbenyuk S. O.* Nega-$\tilde{Q}$-representation of real numbers / S. O. Serbenyuk // International Conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization»: Abstracts, Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2015. — P. 24.
24. *Сербенюк С. О.* Про одну функцію з класу функцій зі складною

локальною будовою, означену в термінах нега-$\tilde{Q}$-представлення / С. О. Сербенюк // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ, 2015. — С. 52.

25. *Serbenyuk S.* Про деякі узагальнення зображень дійсних чисел [On some generalizations of real numbers representations] [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk. — arXiv:1602.07929v1 [math.NT] 25 Feb. 2016. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1602.07929.pdf (дата звернення 16.06.2017).
26. *Сербенюк С. О.* Збереження розмірності Хаусдорфа-Безиковича монотонними сингулярними функціями розподілу / С. О. Сербенюк // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для молодих науковців, 28-29 квітня 2011 року, Київ: Тези доповідей. — Київ: Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, 2011. — С. 106–107.
27. *Сербенюк С. О.* Квазінега-$\tilde{Q}$-представлення як узагальнення представлення дійсних чисел деякими знакозмінними рядами / С. О. Сербенюк // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3-6 червня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2015. — С. 85.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел

$\mathbb{Z}_0$ — множина цілих невід'ємних чисел

$D \equiv (d_n)$ — фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1

A_{d_n} — множина $\{0, 1, \ldots, d_n - 1\}$ цілих невід'ємних чисел

A — алфавіт $\{0, 1, \ldots, s - 1\}$ s-ої або нега-s-ої системи числення

$\mathbb{Q}$ — множина раціональних чисел

$\mathbb{I}$ — множина ірраціональних чисел

$\Delta_{(c_1 c_2 \ldots c_n)}$ — періодичне число з періодом $(c_1 c_2 \ldots c_n)$, що визначене певним представленням чисел, відомим з контексту

$\tilde{Q} = \|q_{i,j}\|$ — деяка фіксована матриця, де $i = \overline{0, m_j}$, $m_j \in \in N^0_\infty \equiv \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, $j = 1, 2, \ldots$, елементи якої володіють такими властивостями:

$$\begin{cases} 1^\circ. & q_{i,j} > 0; \\ 2^\circ. & \forall j \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{i=0}^{m_j} q_{i,j} = 1; \\ 3^\circ. & \forall (i_j), i_j \in \mathbb{Z}_0 : \displaystyle\prod_{j=1}^{\infty} q_{i_j,j} = 0. \end{cases}$$

$a_{i_k(x),k}$ — число вигляду

$$a_{i_k,k} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i_k = 0; \\ \sum_{i=0}^{i_k(x)-1} q_{i,j}, & \text{якщо } i_k \neq 0. \end{cases}$$

$\tilde{q}_{i_k,k}$ — елемент матриці $\tilde{Q}$ такий, що

$$\tilde{q}_{i_k,k} = \begin{cases} q_{i_k,k}, & \text{якщо } k \text{ — непарне;} \\ q_{m_k - i_k,k}, & \text{якщо } k \text{ — парне.} \end{cases}$$

$\lambda(\cdot)$ — міра Лебега множини

$d(\cdot)$ — діаметр множини

$\alpha_0(\cdot)$ — розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини

Γ_f — графік функції $y = f(x)$

$P = \|p_{i,n}\|$ — така фіксована матриця, що $n = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{0, m_n}$, і, елементи якої володіють такими властивостями:

$$\begin{cases} 1^\circ. & \forall n \in \mathbb{N} : p_{i,n} \in (-1; 1); \\ 2^\circ. & \forall n \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{i=0}^{m_n} p_{i,n} = 1; \\ 3^\circ. & \forall (i_n) : \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} |p_{i_n,n}| = 0; \\ 4^\circ. & \forall i_n \neq 0 : 0 < \displaystyle\sum_{i=0}^{i_n-1} p_{i,n} < 1, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\tilde{p}_{i_n,n}$ — елемент матриці P такий, що

$$\tilde{p}_{i_n,n} = \begin{cases} p_{i_n,n}, & \text{якщо } n \text{ — непарне;} \\ p_{m_n-i_n,n}, & \text{якщо } n \text{ — парне.} \end{cases}$$

$\beta_{i_n,n}$ — число вигляду

$$\beta_{i_n,n} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{i_n-1} p_{i,n} > 0, & \text{якщо } i_n \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } i_n = 0. \end{cases}$$

$\tilde{\beta}_{i_n,n}$ — число вигляду

$$\tilde{\beta}_{i_n,n} = \begin{cases} \beta_{i_n,n}, & \text{якщо } n \text{ — непарне;} \\ \beta_{m_n-i_n,n}, & \text{якщо } n \text{ — парне.} \end{cases}$$

$\square$ — кінець доведення

ВСТУП

Дисертаційна робота[1] присвячена дослідженню та застосуванню (в теорії множин і теорії функцій зі складною локальною будовою) представлення дійсних чисел рядами Кантора та його знакопочережних узагальнень — знакопочережного $\tilde{Q}$-розкладу і нега-$\tilde{Q}$-представлення, а саме: дослідженню фрактальних множин спеціального типу, що визначені в термінах рядів Кантора спеціального виду; формулюванню критеріїв представлення раціональних чисел рядами Кантора; заданню і дослідженню функцій зі складною локальною будовою, визначених в термінах представлення дійсних чисел рядами Кантора, їх частинними випадками та узагальненнями.

Актуальність теми. Адекватними математичними моделями природних об'єктів часто є фрактали [13, с. 3]. Вперше поняття «фрактал» зустрічається в роботі Мандельброта [52], яка була опублікована в 1975 році французькою мовою.

Фрактал в широкому розумінні — це множина, топологічна розмірність якої не співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича (фрактальною), а у вузькому розумінні — це множина, яка має дробову фрактальну розмірність [13, с. 5-14].

Нині інтерес до вивчення самоподібних фракталів продовжує стрімко зростати і породжений системою прикладних задач природничих та технічних наук, для розв'язання яких це поняття застосовне. Важливість фракталів полягає не тільки у моделюванні фізичних та біологічних про-

---

[1] Результати даного дисертаційного дослідження отримані в період з листопада 2010 року по жовтень 2014 року. Публікація результатів дослідження від моменту їх апробації на конференціях чи семінарах до виходу з друку журналів в силу різних обставин складала 2–4 роки. З розширеним варіантом дисертаційної роботи можна ознайомитись за посиланням www.researchgate.net/publication/309679924.

цесів — це строго математичне поняття, яке об'єднує різні математичні об'єкти такі, як, наприклад, криві та поверхні, що не мають дотичної в жодній точці, неперервні ніде недиференційовні функції, сингулярні розподіли і т. д. [13, 8]. Останні функції (функції зі складною локальною будовою) утворюють множини другої категорії Бера в деяких метричних просторах (сингулярні функції — в метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою [71], а неперервні ніде недиференційовні — у просторі неперервних на відрізку функцій з рівномірною метрикою [8]), чим і зумовлений науковий інтерес до дослідження відповідних функцій із-за доволі повільного розвитку теорій таких функцій до останнього часу.

Для моделювання та дослідження функцій зі складною локальною будовою (ніде недиференційовних, сингулярних, ніде немонотонних функцій), самоподібних фракталів, DP-перетворень (перетворень, що зберігають фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича) використовуються методи, побудовані на використанні різних систем зображень (кодувань) дійсних чисел: зі скінченним або нескінченним алфавітом, моделлю числа в яких є додатний чи знакопочережний ряд. Необхідність використання різних зображень дійсних чисел особливо притаманна і в теорії чисел для дослідження динамічних систем [2], які нерозривно пов'язані з поняттями відображення та міри.

Яскравим прикладом зображень з нескінченним алфавітом є зображення, в якому моделлю числа є подання дійсних чисел у вигляді розкладу в ряд, члени якого є числами оберненими до натуральних (наприклад, ряди Люрота, Енгеля, Остроградстького). Індивідуальний розвиток теорій розкладів дійсних чисел в ряд такого типу спричинив появу великої кількості нерозв'язаних задач. Відсутність повного викладу метричної, ймовірнісної, фрактальної теорій таких зображень сприяє виявленню багатьох не досліджених об'єктів теорій функцій зі складною локальною будовою, динамічних систем, теорії множин, фрактальної геометрії і т. п.

Зародження і початок бурхливого розвитку теорій представлення дійсних чисел розкладами в нескінченні ряди, члени яких є раціональними числами, зокрема, оберненими до натуральних чисел, припадає на період побудови аксіоматичної теорії чисел, що було логічним наслідком в розвитку математичної науки в силу створених Дедекіндом, Кантором, Вейєрштрассом підходів до викладу теорії дійсних чисел. Нині отримані наукові результати чи відомі ідеї в теорії представлень дійсних чисел згаданими щойно розкладами активно застосовуються в ергодичній, фрактальній, ймовірнісних теоріях чисел та для побудови чіткого та повного викладу метричної теорії чисел, що подаються у вигляді таких розкладів. Те чи інше представлення дійсного числа є зручним для розв'язання певних задач математики в залежності від своїх «особливостей» (геометрії, метричних відношень, наявності самоподібності і т. п.). Тому одні задачі, розв'язати які в термінах одного представлення чисел важко, можна доволі просто розв'язати в термінах іншого представлення дійсних чисел. Останнє легко помітити при конструюванні та дослідженні функцій зі складною локальною будовою певним фіксованим набором методів.

Оскільки теорії сингулярних, ніде недиференційовних, ніде немонотонних функцій за свою більш ніж 100-річну історію збагачувалися лише поодинокими прикладами та вибірковими дослідженнями властивостей таких функцій, проблема побудови якнайпростішого задання таких функцій залишається актуальною й досі. Крім того, актуальними залишаються задачі побудови узагальнень таких функцій, дослідження спеціальним чином означених класів функцій, що містять функції зі складною локальною будовою. Особливо хотілося б відмітити, що в переважній більшості робіт з даної тематики розглядаються в якості систем зображень для конструювання таких функцій зображення дійсних чисел, що ґрунтуються на розкладах чисел в додатні ряди, в той час як знакопочережні розклади майже не використовуються. Відкритою залишається і задача про моделювання, дослідження властивостей та закономірностей у властивостях відповідних функцій, що моделюються певним методом, і, аргумент яких визначений у термінах класичного зображення дійсних чисел та послідовних узагальненнях цього зображення (наприклад, s-ве зображення, зображення додатним рядом Кантора, $\tilde{Q}$-зображення). Деякі з розпочатих автором дисертаційного дослідження досліджень відповідних задач містяться в даному дисертаційному дослідженні.

У 1869 році Георг Кантор в роботі [20] розглянув розклади чисел $x \in$ $\in [0;1]$ у додатні (знакододатні) ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{d_1 d_2 \dots d_k}, \text{ де}$$

$D \equiv (d_k)$ — деяка фіксована послідовність натуральних чисел, більших 1, та $\varepsilon_k(x) \in A_{d_k} \equiv \{0, 1, \dots, d_k - 1\}$. В [20] Кантор частково розглядає проблему знаходження необхідних і достатніх умов подання раціональних чисел у формі таких рядів, довівши, що для рядів з періодичною послідовністю (d_k) критерієм раціональності числа є періодичність послідовності (ε_k). Також Кантором було доведено і властивість про те, що якщо всі члени послідовності (d_k), починаючи з деякого номеру діляться на деяке число q, то в представленні раціональних чисел $\frac{p}{q}$ елементи послідовності (ε_k), починаючи з деякого номеру, набувають значення більшого, ніж попередні.

Вбачаючи перспективність у використанні зображення чисел додатним рядом Кантора, яке є узагальненням класичного s-го зображення і частинним випадком $\tilde{Q}$-зображення, для вивчення функцій, перетворень і мір зі складною локальною будовою, доцільно розглянути геометрію та метричну теорію цього зображення, знайти критерії раціональності числа. Також виникає задача побудувати узагальнення нега-s-го представлення дійсних чисел — представлення знакопочережним рядом Кантора і знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад дійсних чисел та вивчити такі представлення. На основі постановки вказаних вище задач постає задача — вивчати взаємозв'язок між цими представленнями і застосовувати отримані результати для побудови і вивчення фрактальних множин, функцій зі складною локальною будовою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в Інституті математики НАН України у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України та на кафедрі вищої математики НПУ імені М. П. Драгоманова. Результати, опубліковані в джерелах, що зазначені у списку публікацій автора даного дисертаційного дослідження, відповідають тематиці, зокрема, таких науково-дослідних тем:

— «Фрактальний аналіз неперервних функцій і мір» (№ державної реєстрації 0111U000053);

— «Системи кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і фрактали» (№ державної реєстрації 0113U003009);

— «Фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою» (№ державної реєстрації 0107U000583);

— «Двійкове кодування дійсних чисел та фрактали» (№ державної реєстрації 0110U001279).

Мета і завдання дослідження. *Об'єктом дисертаційного дослідження* є кодування (зображення) дійсних чисел за допомогою рядів Кантора (додатним чи знакопочережним), частинні випадки останнього кодування (s-ве, нега-s-ве зображення, розклад числа в нега-s-ий ряд Кантора, змішаний s-ий ряд), узагальнення ($\tilde{Q}$-зображення, подання чисел у вигляді знакопочережного $\tilde{Q}$-розкладу, нега-$\tilde{Q}$-представлення) та їх застосування до побудови і дослідження фрактальних множин, функцій зі складною локальною будовою.

Предметом дослідження є: тополого-метрична теорія та геометрія представлень дійсних чисел рядами Кантора, знакопочережним $\tilde{Q}$-розкладом, нега-$\tilde{Q}$-представлення; тополого-метричні та фрактальні властивості множин спеціального типу, визначених у термінах представлення дійсних чисел частинними випадками рядів Кантора; різні властивості функцій зі складною локальною будовою, аргумент і значення яких визначені в термінах різних зображень дійсних чисел (рядами Кантора, їх частинними випадками чи узагальненнями).

Мета дослідження — розвиток тополого-метричної теорії та вивчення систем кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом, поглиблення теорій сингулярних, ніде немонотонних та ніде недиференційовних функцій на основі узагальнень відомих функцій, знаходження нових фрактальних множин, а також класів функцій зі складною локальною будовою, вдосконалення апарату для задання таких функцій.

Основні завдання дослідження:

- довести факт, що довільне число з деякого відрізка можна подати у вигляді розкладу в знакопочережний ряд Кантора, знайти кількість таких представлень і розробити основи метричної теорії чисел, зображених знакопочережними рядами Кантора;
- дослідити властивості множини неповних сум знакопочережного ряду Кантора;
- розробити основи метричної теорії чисел, зображених у вигляді розкладу в ряд
$$-a_{i_1,1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n a_{i_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}q_{i_j,j}\right],$$
та згенерувати знакопочережне нега-$\tilde{Q}$-зображення, яке є системою кодування при довільній фіксованій матриці $\tilde{Q}$, властивості елементів котрої описано вище (тобто, без будь-яких додаткових умов, що накладаються на елементи матриці $\tilde{Q}$), побудувати основи тополого-метричної теорії цього зображення;

— вивчити взаємозв'язок представлень дійсних чисел знакопочережним та додатним рядами Кантора, його застосування до моделювання функцій, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича. Розглянути властивості оператора зсуву цифр представлення числа знакопочережним рядом Кантора та вивчити застосування операторів зсуву символів (цифр) представлення числа рядом Кантора та $\tilde{Q}$-представлення до розв'язання різних математичних проблем, зокрема — моделювання об'єктів зі складною локальною будовою;

— знайти критерії раціональності представлення дійсних чисел додатним та знакопочережним рядами Кантора;

— вивчити тополого-метричні, фрактальні властивості нових множин спеціального типу, в поданні елементів яких у вигляді рядів Кантора спеціального виду (s-ве, нега-s-ве представлення, змішаний s-ий ряд, нега-s-ий ряд Кантора) накладається певна залежність (зокрема, функціональна) на вживання символів (цифр). Вивчити фрактальні властивості довільної множини, яка містить всі можливі числа з відрізка $[0;1]$ (або $[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}]$), в s-му (або нега-s-му) зображенні яких вживаються набори цифр лише з фіксованої множини $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_m\}$ наборів s-их цифр;

— вивчити функції з класу нових функцій, заданих перетворювачами цифр або комбінацій цифр зображення аргументу, та, аргумент і значення яких визначені у термінах s-го або нега-s-го зображень;

— побудувати та дослідити функції, аргумент яких визначений у термінах зображення чисел рядами Кантора (додатними, знакопочережними), нега-$\tilde{Q}$-зображення, і, аналітичне задання яких є узагальненням аналітичного задання класичної функції Салема.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу, теорії функцій дійсної змінної, теорії міри, фрактального аналізу, метричної теорії чисел, теорії ймовірностей.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист:

— показано, що кодування чисел, яке встановлюється через розклад числа в знакопочережний ряд Кантора має нульову надлишковість (довільне число з деякого відрізка можна подати у формі розкладу в знакопочережний ряд Кантора, причому лише числа із деякої зліченної множини мають два різних зображення знакопочережним рядом Кантора, а решта — єдине зображення), розроблено основи метричної теорії чисел, зображених знакопочережними рядами Кантора;

— детально вивчено тополого-метричні властивості множини неповних сум знакопочережного ряду Кантора;

— введено в розгляд і розроблено основи метричної теорії чисел, що подаються у вигляді знакопочережного $\tilde{Q}$-розкладу

$$-a_{i_1,1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n a_{i_n,n}\prod_{j=1}^{n-1} q_{i_j,j}\right],$$

вивчено умови приналежності останнього представлення до систем кодувань. Як доповнення до основних результатів, що стосуються узагальнень представлення чисел знакопочережним рядом Кантора, та, як допоміжний результат для досліджень узагальнень функції Салема, згенеровано знакопочережне нега-$\tilde{Q}$-зображення чисел з $[0;1]$ та розроблено основи тополого-метричної теорії цього зображення;

— вивчено взаємозв'язок кодувань дійсних чисел за допомогою знакопочережних і додатних рядів Кантора та розглянуто функції, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича, і, моделювання яких ґрунтується на цьому взаємозв'язку. Описано властивості оператора зсуву цифр знакопочережного ряду Кантора і введено поняття узагальненого оператора зсуву цифр представлення. Оператори зсуву представлення чисел додатним рядом Кантора та $\tilde{Q}$-представлення застосовано для задання нескінченними системами функціональних рівнянь функцій зі складною локальною будовою;

— у термінах оператора зсуву цифр представлення чисел рядом Кантора (додатним, знакопочережним) сформульовано критерії раціональності числа, що подається у вигляді такого ряду. Зокрема, для випадку додатного ряду Кантора сформульовано і доведено як основний результат (для випадку довільної послідовності (d_n)), так і ряд його наслідків;

— введено в розгляд множини, в поданні елементів яких у формі рядів Кантора спеціального виду (змішаний s-ий ряд, s-ве, нега-s-ве представлення) накладається певна функціональна залежність на вживання символів і детально вивчено тополого-метричні та фрактальні властивості таких множин. Зокрема, досліджено властивості циліндрів, доведено, що досліджувані множини є континуальними, ніде не щільними, досконалими множинами нульової міри Лебега та самоподібними фракталами, вказано рівняння, що їх задовольняють значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича досліджуваних множин. Вивчено фрактальні властивості деяких множин, елементи яких подаються у вигляді розкладів в нега-s-ий ряд Кантора. Сформульовано і доведено теорему про фрактальні властивості довільної множини, яка містить всі можливі числа з відрізка $[0;1]$ (або $[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}]$), в s-му (або нега-s-му) зображенні яких вживаються набори цифр лише з фіксованої множини $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \ldots, \tilde{\sigma}_m\}$ наборів s-их цифр;

— введено в розгляд і досліджено функції з одного класу Λ_s функцій, кожна з яких задана певним перетворювачем цифр або комбінацій цифр зображення аргументу, та, аргумент і значення якої визначені у термінах s-го чи нега-s-го зображення. Доведено, що усі функції з цього класу функцій, крім $y = -\frac{s-1}{s+1} - x$, $y = 1 - x$ і $y = x$, є неперервними майже скрізь та ніде недиференційовними. Показано, що значення інтеграла Лебега довільної функції по її області визначення дорівнює $\frac{1}{2}$ та значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича графіка довільної функції з Λ_s дорівнює 1. Вивчено фрактальні властивості множин інваріантних точок деяких функцій (композицією котрих можна визначити довільну функцію з Λ_s). Більш детально вивчено на прикладі однієї функції з Λ_3 властивості та різні форми задання таких функцій у термінах трійкового зображення;

— побудовано узагальнення класичної функції Салема (точніше, узагальнення аналітичного задання класичної функції Салема), аргумент яких визначено в термінах зображення дійсних чисел рядами Кантора (знакододатними, знакопочережними), нега-$\tilde{Q}$-зображення. Вивчено властивості досліджуваних функцій (неперервність, диференціальні, інтегральні властивості та ін.).

Всі одержані результати є новими, строго і повно обґрунтованими.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Отримані результати можуть бути використаними в дослідженнях із загальної теорії сингулярних мір, теорії фракталів, перетворень, що зберігають фрактальну розмірність Хаусдорфа–Безиковича, для вивчення тополого-метричних і фрактальних властивостей об'єктів зі складною локальною будовою. Запропоновані в дисертації методи можуть бути корисними при дослідженні функцій зі складною локальною будовою. Результати дослідження є внеском у теорію функцій дійсної змінної, зокрема, теорії сингулярних, ніде немонотонних та ніде недиференційовних функцій, фрактальну геометрію, метричну теорію чисел.

Особистий внесок здобувача. Усі результати отримані та майже усі задачі поставлені автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати даного дисертаційного дослідження доповідалися на наукових конференціях різного рівня та наукових семінарах. Конференції:

— Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, Київ, 28–29 квітня 2011 р.;

— Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19–21 квітня 2012 р.;

— Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування», Київ, 16–18 травня 2012 р.;

— International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov, Kyiv, August 20–26, 2012;

— International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications III» dedicated to 100th anniversary of B. V. Gnedenko and 80th anniversary of M. I. Yadrenko, Kyiv, September 10–14, 2012;

— Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, 13–14 грудня 2012 р.;

— Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25–27 квітня 2013 р.;

— Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kyiv, September 16–20, 2013;

— Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, Київ, 23–24 квітня 2014 р.;

— International Conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization», Kyiv, April 7–10, 2015;

- Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25 квітня 2015 р.;
- Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3–6 червня 2015 р.

З листопада 2010 року автором дисертаційного дослідження було проведено наступні доповіді на таких семінарах:

1. Семінар відділу топології Інституту математики НАН України (керівник: с. н. с., д. ф.-м. н. С. І. Максименко). Місце проведення: Інститут математики НАН України. Дати проведення:
   - 28.10.2015 р. Тема:«Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).
   - 04.11.2015 р. Тема:«Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (продовження, за матеріалами кандидатської дисертації).
   - 11.05.2016 р. Тема:«Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (продовження, за матеріалами кандидатської дисертації).
2. Київський семінар з функціонального аналізу (керівники: акад. НАН України, проф., д. ф.-м. н., гол. н. с. Ю. М. Березанський; чл.-кор. НАН України, проф., д. ф.-м. н. М. Л. Горбачук; чл.-кор. НАН України, проф., д. ф.-м. н. Ю. С. Самойленко). Дата проведення: 11.11.2015 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).
3. Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН України (керівник: чл.-кор. НАН України, проф., д. ф.-м. н. Ю. А. Дрозд). Дата

проведення: 17.11.2015 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).

4. Семінар відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: проф., д. ф.-м. н. Ю. Б. Зелінський). Дата проведення: 17.11.2015 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).
5. Семінар відділу диференціальних рівнянь і теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник: акад. НАН України, проф., д. ф.-м. н., директор інституту А. М. Самойленко). Дата проведення: 14.12.2015 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).
6. Семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: проф., д. ф.-м. н. А. С. Романюк). Дата проведення: 22.01.2016 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).
7. Семінар[2] з фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ ім. М. П. Драгоманова (керівник: проф., д. ф.-м. н. М. В. Працьовитий). Місце проведення: Інститут математики НАН України або НПУ імені М. П. Драгоманова. Дати проведення:

---

[2] Архів доповідей доступний за посиланням: http://www.imath.kiev.ua/events/index.php?seminarId=21&archiv=1

а) 29.09.2011 р. Тема: «Основні тополого-метричні властивості однієї множини чисел, визначеної s-адичним зображенням з обмеженнями».

б) 16.02.2012 р. Тема: «Основні тополого-метричні властивості однієї множини, заданої нега-s-адичним та s-адичним зображенням з параметром, та її використання».

в) 21.02.2013 р. Тема: «Про деякі застосування зображень чисел рядами Кантора».

г) 05.09.2013 р. Тема: «Представлення дійсних чисел знакопочережними рядами Кантора».

д) 27.02.2014 р. Тема: «Розмірність Хаусдорфа одного класу множин, визначених у термінах представлення дійсних чисел рядами Кантора».

е) 16.10.2014 р. Тема: «Задання системами функціональних рівнянь класу функцій, представлених рядами Кантора».

є) 30.10.2014 р. Тема: «Поліосновне знакододатне та знакопочережне $\tilde{Q}$-представлення та їх застосування для задання функцій системами функціональних рівнянь».

ж) 28.09.2017 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).

Публікації. Основні результати роботи викладено в 10 статтях [1ª]-[10ª] та одному препринті [11ª]. Статті [1ª]–[7ª] та [9ª] опубліковані у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України ([9ª] — у міжнародному науковому виданні), з них [4ª] — збірник наукових праць учасників міжнародної конференції (даний випуск журналу містить роботи учасників Міжнародної наукової конференції з алгебри, присвяченої 100-річчю від дня народження С. М. Чернікова). Статті [8ª] та [10ª] опубліковано у виданнях інших держав. Чотири статті ([7ª]–[10ª]) опубліковано у виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus, Google Scholar, MathSciNet (Mathematical Reviews), Zentralblatt MATH).

Додатково матеріали даного дисертаційного дослідження відображено в чотирьох препринтах [12ª]—[15ª], з них: препринти [13ª]—[15ª] стосуються огляду літератури, а препринт [12ª]— подальших наукових досліджень[3], які ґрунтуються на наукових дослідженнях, проведених в даній дисертаційній роботі. Також матеріали даної дисертаційної роботи додатково відображено в матеріалах 12 конференцій [16ª]- [27ª], з них [27ª] та [16ª] стосуються, відповідно, узагальнень досліджень та отримання допоміжного результату, вказаного для повноти викладу в огляді літератури.

Зміст (структура) роботи. Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, переліку скорочень і умовних позначень на дві сторінки, вступу, п'яти розділів, розбитих на пункти та підпункти, висновків, списку використаних джерел, списку публікацій автора та одного додатка. Загальний обсяг роботи – 209 сторінок, основний текст роботи викладено на 164 сторінках. Список використаних джерел налічує всього 71 найменування, список публікацій автора — 27.

---

[3] Відповідні дослідження, що є узагальненнями досліджень, проведених в даній дисертаційній роботі, були затверджені у запиті на відкриття наукової роботи за відомчою тематикою відділу фрактального аналізу Інституту математики Національної академії наук України на 2016–2020 рр. Останній запит успішно пройшов конкурс і відповідні дослідження були затверджені для виконання у період з 2016 до 2020 року в Інституті математики НАН України. Проект «Generalizations of classical representations of real numbers and their applications» доступний за посиланням: https://www.researchgate.net/project/Generalizations-of-classical-representations-of-real-numbers-and-their-applications

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА КЛЮЧОВІ ПОНЯТТЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

У даному розділі здійснюється огляд літератури, розглядаються ключові математичні поняття дослідження. Зокрема, розглядаються представлення дійсних чисел додатними рядами Кантора, s-ве, $\tilde{Q}$-представлення. Формулюються означення операторів зсуву цифр цих представлень.

1.1. Додатні ряди Кантора, їх частинні випадки та узагальнення

Означення 1.1. Подання числа $x_0 \in [0;1]$ у вигляді наступного ряду

$$x_0 = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \ldots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \tag{1.1}$$

де s — фіксоване натуральне число, більше 1, $\alpha_n \in A$, називається *s-им представленням числа x_0*, а символічний запис $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ — *s-им зображенням числа x_0*.

Довільне число з відрізка $[0;1]$ має не більше двох s-их зображень, причому два зображення (одне містить період (0), а друге — період $(s-1)$) мають лише числа виду $x_0 = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](s-1)}$ із зліченної підмножини відрізка $[0;1]$. Такі числа називають *s-во-раціональними*, а решту — *s-во-ірраціональними* [8, с. 20].

Розглянемо розклад довільного числа $x_0 \in \left[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}\right]$ в ряд виду

$$\frac{\alpha_1}{-s} + \frac{\alpha_2}{(-s)^2} + \frac{\alpha_3}{(-s)^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{(-s)^n} + \ldots, \quad \text{де } \alpha_n \in A. \tag{1.2}$$

Ввівши деякі поправки, ряд (1.2) зведемо до розкладу виду

$$\frac{s}{s+1}+\frac{\alpha_1}{s}-\frac{\alpha_2}{s^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s^n}(-1)^{n+1}+\ldots \tag{1.3}$$

числа $x_0 \in [0;1]$.

Кожен з розкладів (1.2), (1.3) є *нега-s-им представленням числа* x_0. Відповідно, запис $\Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ подання числа x_0 у вигляді розкладу в ряд (1.2) або (1.3) називається *нега-s-им зображенням числа* x_0. Два різних нега-s-их зображення $\Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n([s-1]0)} = \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](0[s-1])}$ мають лише числа із деякої зліченної множини, які називаються *нега-s-во-раціональними.* Решта чисел називається *нега-s-во-ірраціональними.* Вони мають єдине нега-s-ве зображення.

У 1869 році, як уже зазначалося, Г. Кантор подав ідею про можливість подання будь-якого числа з відрізка $[0;1]$ у вигляді розкладу в ряд вигляду

$$\frac{\varepsilon_1}{d_1}+\frac{\varepsilon_2}{d_1d_2}+\ldots+\frac{\varepsilon_n}{d_1d_2\ldots d_n}+\ldots, \tag{1.4}$$

де (A_{d_n}) — послідовність множин A_{d_n}, згенерована послідовністю $D \equiv (d_n)$, та $\varepsilon_n \in A_{d_n}$ для всіх натуральних чисел n $(n \in \mathbb{N})$.

Означення 1.2. Сума (1.4) називається *числовим додатним (або знакододатним) рядом Кантора.* Число d_n називається *n-им елементом*, а число ε_n — *n-ою цифрою розкладу (1.4).*

Теорема 1.1 ([12]). *Для довільного числа x з відрізка* $[0;1]$ *існує послідовність* (ε_n) *така, що x можна подати у формі розкладу в ряд* (1.4).

Означення 1.3. Подання числа $x \in [0,1]$ у вигляді розкладу в ряд (1.4) називається *представленням числа x додатним рядом Кантора* або *D-представленням числа x*. Представлення числа x рядом Кантора (1.4) позначається $x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$. Символічний запис $\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ називається *зображенням числа x додатним рядом Кантора* або *D-зображенням x.*

Означення 1.4. Числа, зображення яких рядом Кантора містять період (0), називаються *D-раціональними числами.* Загалом, D-раціональні числа мають два різних зображення рядом Кантора. Тобто,

$$\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n(0)} = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1][d_{n+3}-1]\ldots}.$$

Решта чисел з $[0;1]$ мають єдине зображення додатним рядом Кантора і називаються *D-ірраціональними числами.*

Нехай маємо матрицю $\tilde{Q} = \|q_{i,j}\|$, де $i = \overline{0, m_j}$, $m_j \in N^0_\infty \equiv \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ та $j = 1, 2, \ldots$, елементи якої володіють наступними властивостями:

$$\begin{cases} 1^\circ. & q_{i,j} > 0; \\ 2^\circ. & \forall j \in \mathbb{N} : \sum\limits_{i=0}^{m_j} q_{i,j} = 1; \\ 3^\circ. & \forall (i_j), i_j \in \mathbb{Z}_0 : \prod\limits_{j=1}^{\infty} q_{i_j,j} = 0, \end{cases}$$

де $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Теорема 1.2 ([8, с. 87-89]). *Для будь-якого $x \in [0;1)$ існує послідовність $(i_k(x))$, $i_k(x) \in N^0_{m_k} \equiv \{0, 1, \ldots, m_k\}$, така, що*

$$x = a_{i_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[a_{i_k(x),k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{i_j(x),j} \right]. \tag{1.5}$$

Означення 1.5. Подання числа x у вигляді (1.5) називається *$\tilde{Q}$-представленням числа x* і позначається $x = \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)\ldots}$. Останнє позначення називається *$\tilde{Q}$-зображенням числа x*. Число $i_k(x)$ називається k-им $\tilde{Q}$-символом x.

У випадку, коли $m_j < \infty$ для всіх $j > j_0 \in \mathbb{N}$ (j_0 — деяке число), існують числа, які мають два різних $\tilde{Q}$-зображення, одне з яких містить період (0):

$$\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2\ldots i_{n-1} i_n(0)} = \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2\ldots i_{n-1}[i_n-1]m_{n+1}m_{n+2}m_{n+3}\ldots}.$$

У випадку, коли для всіх $j \in \mathbb{N}$ $q_{i,j} = \frac{1}{d_j}$, де $i = \overline{0, d_j - 1}$, $\tilde{Q}$-представлення набуває вигляду D-представлення.

Зауваження 1.1. Цілком очевидно, що $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел є узагальненням β-розкладу (s-го представлення, де $1 \ < s = \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел). Поняття останнього представлення було введене A. Rényi у роботі [63] в 1957 році.

Хоча поняття нега-s-го представлення було введене, мабуть [27], у статті [30], опублікованій у 1885 році, поняття $(-\beta)$-розкладу (нега-s-го представлення, де $1 < s = \beta \in \mathbb{R}$), вперше зустрічається у статті [42] Shunji Ito і Taizo Sadahiro, опублікованій у 2009 році. В останній статті вивчаються деякі фундаментальні властивості досліджуваної нової системи кодування. Більшість з цих властивостей виявились аналогічними відповідним властивостям β-розкладів, однак часто — більш складнішими.

Переваги системи числення з від'ємною основою, наприклад, пов'язані з тим, що як додатні, так і від'ємні числа можуть бути представлені невід'ємними цифрами без необхідності зазначення знаку числа. Вивченню подання дійсних чисел в позиційній системі числення з від'ємною основою присвячено чимало статей (див., наприклад, [27, 54, 17]). Дослідженням $(-\beta)$-розкладів дійсних чисел займалися, зокрема, такі автори: P. Ambrož, D. Dombek, Ch. Frougny, S. Ito, A. Ch. Lai, , Z. Masáková, E. Pelantová, T. Sadahiro, T. Vávra.

Пункт 5.1 даної дисертаційної роботи присвячено моделюванню та дослідженню узагальнення $(-\beta)$-розкладу дійсних чисел, а пункт 2.1 — узагальненню нега-s-го представлення дійсних чисел.

У випадку, коли $\tilde{Q} = Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{s-1}\}$, отримаємо *Q-представлення* дійсних чисел з відрізка $[0; 1]$:

$$a_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[a_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} q_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta^{Q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}. \tag{1.6}$$

Слід звернути увагу, що залежно від змісту чисел q_i, де $i = \overline{0, s-1}$, ряд (1.6) може бути не тільки аналітичним поданням чисел, але й аналітичним виразом функції. Наприклад, останній ряд є функцією розподілу випадкової величини $\eta = \Delta^{s}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ [8, с. 82-83], для якої s-ві цифри ξ_n є випадковими та $P\{\xi_n = \alpha_n\} = q_{\alpha_n}$ для довільного $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Зображення раціональних та ірраціональних чисел рядами Кантора

Дослідженням задання[1] раціональних чисел рядами Кантора займалося чимало авторів, серед яких: Diananda P. A., Oppenheim A., Erdös P., Hančl J., Straus E. G., Rucki P.,Tijdeman R., Kuhapatanakul P., Laohakosol V., Mance B., Marques D., Pingzhi Yuan.

Зазначимо, що чимало праць (наприклад, [66, 31, 34, 32, 35]) присвячено дослідженню умов раціональності чи ірраціональності розкладів дійсних чисел у ряд Кантора вигляду (1.4), для якого послідовності (ε_n) та (d_n) є послідовностями цілих чисел (у деяких працях, наприклад, [34, 66, 26, 32, 48] на (d_n) накладається обмеження про те, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ справджується умова $1 < d_n \in \mathbb{Z}$), але досить багато статей присвячено дослідженню відповідної задачі як для розглядуваних у дисертаційному дослідженні додатних рядів Кантора [20, 21, 46, 57], так і для рядів Кантора спеціального вигляду [36, 38, 37, 34], зокрема, — рядів Ахмеса (ряд (1.4), у якому $\varepsilon_n = const = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$) [21, 35, 25].

У [21, 31, 32, 34, 35, 36, 26, 57, 66] досліджувалися критерії раціональності (ірраціональності) зображення чисел розкладами в ряд Кантора, а в [26, 21, 34, 46, 57, 66] — достатні умови раціональності (ірраціональності). Зокрема, проблему задання раціональних та ірраціональних чисел за певних умов, що накладаються на послідовності (d_n) і (ε_n) було розглянуто в [20, 26, 31, 32, 34, 46, 57, 66], у той час як результатів дослідження цієї

---

[1] Додатково з оглядом літератури, що стосується дослідження зображення раціональних чисел рядами Кантора можна ознайомитись в препринті [14^{a}].

задачі для випадку довільності послідовності (d_n) дуже мало [21, 34, 66].

Зауважимо, що у декількох статтях розглядаються умови (що накладаються на послідовності (d_n) і (ε_n)), за яких умовами (достатніми, необхідними і достатніми) зображення раціональних чисел рядом Кантора є або скінченний розклад числа [46, 32], або умова $\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const$ для всіх n, більших деякого n_0 [21, 34, 66].

У [21] P. H. Diananda та A. Oppenheim довели такий критерій, формулювання якого є подібним до формулювання теореми 2.11.

Теорема 1.3. *Необхідною і достатньою умовою того, що число x, представлене у вигляді розкладу в ряд* (1.4)*, було раціональним, є існування чисел h, k, де $(h, k) = 1$, $0 \leqslant h \leqslant k$ та $N \in \mathbb{Z}$ таких, що умова $A_i = \frac{h}{k}(B_i - 1)$ виконується для всіх $i \geqslant N$.*

У цій теоремі

$$x = X = A_0 + \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_1 B_2} + \ldots + \frac{A_n}{B_1 B_2 \ldots B_n} + \ldots,$$

де $A_0 = \varepsilon_0$ — ціла частина x, $B_i \geqslant 2$, $0 \leqslant A_i \leqslant B_i - 1$, $B_1 = d_1 d_2 \ldots d_{i_1}$, $B_2 = d_{i_1+1} d_{i_2+1} \ldots d_{i_1+i_2}, \ldots,$

$$\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_{i_1}}{d_1 d_2 ... d_{i_1}} = \frac{A_1}{B_1}.$$

Із кількості множників, наприклад, в $B_2 = d_{i_1+1} d_{i_2+1} \ldots d_{i_1+i_2}$ випливає, що у [21] використовувалась послідовність, відмінна від послідовності (i_n) (для якої $\hat{\varphi}^{i_n}(x) = const$ при доведенні теореми 2.11). Крім того, в теоремі 2.11 вказано всі можливі значення сталої $\frac{h}{k}$.

У [21] відзначено цікавість теореми 1.3 для таких випадків:

— послідовність (d_n) є такою, що $d_1 d_2 \ldots d_n \vdots q$ для будь-якого цілого числа q $(q \in \mathbb{Z})$ і всіх великих n;

— (d_n) — періодична послідовність.

В останній статті без доведення зазначено, що в першому випадку для зображення раціонального числа x $(x \in \mathbb{Q})$ додатним рядом Кантора необхідно і достатньо, щоб $\varepsilon_n = 0$ або $\varepsilon_n = d_n - 1$ $(n > n_0)$. У другому випадку $x \in \mathbb{Q}$ тоді і тільки тоді, коли (d_n) — строго періодична. Останнє твердження було доведене Кантором в [20]. Важко не помітити взаємозв'язок наслідку теореми 1.3 для першого випадку і теореми 2.8 про критерій D-раціональності, достатню умову якого було доведено Кантором у [20]. Автором дисертаційного дослідження дану умову було переформульовано, спрощено її доведення та доведено необхідну умову D-раціональності.

У [34] J. Hančl, R. Tijdeman за допомогою використання поняття суми $S_N = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_N \dots d_n}$ (поняття оператора зсуву $(N-1)$-го порядку цифр представлення) сформулювали умови ірраціональності числа, поданого у вигляді розкладу (1.4), де послідовності (d_n) і (ε_n) — послідовності цілих чисел з $d_n > 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Зокрема, у [34] зазначено, що сума (1.4) дорівнює раціональному числу, якщо $\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const$ для всіх n, більших деякого n_0. Частково остання стаття присвячена вивченю властивостей, якими повинні володіти послідовності (d_n) і (ε_n), щоб критерієм раціональності була умова $\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const$. Зокрема, розглядаються випадки, коли: $\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{d_{n+1}} - \frac{\varepsilon_n}{d_n}\right) = 0$, $\varepsilon_n = o(d_{n-1}d_n)$, $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = o(d_{n-1}d_n)$. Серед отриманих в цій статті результатів можна відмітити наступні.

Лема 1.1 ([34]). *Якщо* $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} = \frac{r}{q}$ *для деяких* $r \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, *тоді* $qS_N \in \mathbb{Z}$ *для всіх* $N \in \mathbb{N}$.

Твердження 1.1 ([34]). *Якщо* (S_n) *— обмежена знизу послідовність і для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *маємо* $S_{n+1} - S_n < \varepsilon$ *для* $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, *тоді* $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} \in \mathbb{Q}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const$ *для* $N > N_0$.

Наслідок 1.1 ([34]). *Якщо* (ε_n) *— послідовність натуральних чисел така, що* $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = o(n)$, *то* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} \in \mathbb{Q}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\frac{\varepsilon_n}{n-1} = const$ *для* $n \geqslant n_1$.

Теорема 1.4 ([34]). *Нехай* (d_n) *— монотонна послідовність натуральних чисел, що володіє властивістю* $\varepsilon_n = o(d_n^2)$. *Тоді* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} \in \mathbb{Q}$

тоді і тільки тоді, коли $\frac{\varepsilon_n}{d_n-1} = const$ *для* $n \geqslant n_0$.

Теорема 1.5 ([34]). *Нехай* (d_n) *— необмежена монотонна послідовність додатних чисел. Тоді* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{d_1 d_2 \ldots d_n} \in \mathbb{Q}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\frac{n}{d_n-1} = const$ *для* $n \geqslant n_0$.

Результати, отримані у [34], узагальнили і підкоректували в [66] Robert Tijdeman та Pingzhi Yuan. Зокрема, узагальнено результати, що стосуються випадків, коли $\varepsilon_n = n$, $d_n \to \infty$, і, коли $d_n = n$, $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = O(n)$. Показано, що в системі умов $\varepsilon_n = o(d_n^2)$, $\varepsilon_n \geqslant 0$, $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n < \varepsilon d_n$ для $n \geqslant n_1(\varepsilon)$ умовою $\varepsilon_n = o(d_n^2)$ можна знехтувати, і, при цьому критерієм раціональності залишатиметься умова $\frac{\varepsilon_n}{d_n-1} = const$ для всіх $n \geqslant n_0$. Зокрема:

Теорема 1.6 ([66]). *Нехай* (d_n) *— монотонна послідовність натуральних чисел, більших* 1, *та* (ε_n) *— послідовність цілих чисел така, що* $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = o(d_{n+1})$. *Тоді* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} \in \mathbb{Q}$ *тоді і тільки тоді, коли* $\frac{\varepsilon_n}{d_n-1} = const$ *з деякого* n_0.

У цій статті формулюються й інші тереми про умови, що задовольняють послідовності натуральних чисел (d_n) і (ε_n), щоб $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} \in \mathbb{Q}$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{\varepsilon_n}{d_n-1} = const$ з деякого n_0. Крім того, доведено таке твердження.

Теорема 1.7 ([66]). *Нехай* (d_n) *— послідовність натуральних чисел, більших* 1, *таких, що* $\varepsilon_n = O(d_n)$ *і* $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_n} = \alpha \in \mathbb{I}$ *(*α *— ірраціональне число). Тоді* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} \in \mathbb{I}$.

Останнє твердження, але з умовою $0 \leqslant \varepsilon_n < d_n$ замість $\varepsilon_n = O(d_n)$ було доведено в [57].

Зазначимо, що в [66] при доведеннях використовувались такі позначення: для підпослідовності (n_k) натуральних чисел $n_0 = 1$, $\varepsilon_k^* = \varepsilon_{n_k-1} + \varepsilon_{n_k-2} d_{n_k-1} + \ldots + \varepsilon_{n_{k-1}} d_{n_k-1} d_{n_k-2} \ldots d_{n_{k-1}+1}$, а також $d_k^* = d_{n_k-1} d_{n_k-2} \ldots d_{n_{k-1}}$.

Тоді, для $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k^*}{d_1^* d_2^* \ldots d_k^*}, \; S_{n_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\varepsilon_j^*}{d_1^* d_2^* \ldots d_j^*}, \; R_{n_k} = \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j^*}{d_{k+1}^* d_{k+2}^* \ldots d_j^*}.$$

Для ряду Кантора (1.4), де (d_n) і (ε_n) — послідовності цілих чисел з $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, що ряд (1.4) збіжний, справедливими є наступні твердження.

Лема 1.2 ([66]). *Якщо існує підпослідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що* $R_{n_k} = R_{n_{k+1}}$ *для* $k = 1, 2, \ldots,$ *тоді* $S \in \mathbb{Q}$.

Твердження 1.2 ([66]). *Якщо послідовність* (R_n) *обмежена знизу та існує підпослідовність* (n_k) *натуральних чисел, що* $R_{n_{k+1}} - R_{n_k} < \varepsilon$ *для* $k \geqslant k_0(\varepsilon)$, *то* $S \in \mathbb{Q}$ *тоді і тільки тоді, коли* $R_{n_k} = R_{n_{k+1}}$ *для всіх великих* k.

Особливістю дослідження, яке провів у [57] A. Oppenheim, є вивчення (в переважній більшості) достатніх умов ірраціональності чисел, що подаються не тільки у вигляді розкладів в ряд (1.4), а й у вигляді знакозмінного ряду (1.4) такого, що $|\varepsilon_i| < d_i - 1$ для $i = 1, 2, 3, \ldots$, а також $\varepsilon_m \varepsilon_n < 0$ для деяких $m > i$ та $n > i$, коли i — будь-яке фіксоване ціле число. В цій статті дослідження проводиться на основі використання деяких результатів з [20], а саме — достатньої умови ірраціональності числа x, що подається у вигляді ряду (1.4), а також вивчення границі відношення $c_{i_n} = \frac{\varepsilon_{i_n}}{d_{i_n}}$ при $n \to \infty$, де (i_n) — деяка підпослідовність натуральних чисел, та сум виду

$$x_{i_n} = \frac{\varepsilon_{i_n}}{d_{i_n}} + \frac{\varepsilon_{i_n+1}}{d_{i_n} d_{i_n+1}} + \frac{\varepsilon_{i_n+2}}{d_{i_n} d_{i_n+1} d_{i_n+2}} + \ldots.$$

Серед результатів, отриманих в [57], можна виділити наступний.

Лема 1.3. *Число* x, *задане у вигляді розкладу в збіжний ряд* (1.4), *де* d_n *і* ε_n *— цілі числа, буде ірраціональним тоді і тільки тоді, коли для кожного* $q \in \mathbb{N}$ *можна знайти число* $r \in \mathbb{Z}$ *та підпослідовність* (i_n) *такі,* *що*

$$\frac{r}{q} < x_{i_n} < \frac{r+1}{q}, \ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

В [26] P. Erdös, E. G. Straus вивчили критерії представлення раціональних чисел розкладами в ряди Кантора спеціального вигляду.

Теорема 1.8 ([26]). *Нехай* (ε_n) *— послідовність цілих чисел,* (d_n) *— послідовність натуральних чисел, більших* 1 *для всіх великих* n*, та* $\lim_{n\to\infty} \frac{|\varepsilon_n|}{d_{n-1}d_n} = 0$*. Тоді* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} \in \mathbb{Q}$ *тоді і тільки тоді, коли існують* $B \in \mathbb{N}$ *і послідовність* (c_n) *цілих чисел такі, що для всіх великих* n*:* $B\varepsilon_n = c_n d_n - c_{n+1}$*,* $|c_{n+1}| < \frac{d_n}{2}$*.*

Теорема 1.9 ([26]). *Нехай* p_n *—* n*-те просте число і* (d_n) *— монотонна послідовність натуральних чисел, що задовольняють умови* $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{d_n^2} = 0$*,* $\liminf_{n\to\infty} \frac{d_n}{p_n} = 0$*. Тоді* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} \in \mathbb{I}$*.*

У [32] J. Hančl розглянув властивості, якими повинні володіти послідовності (d_n) і (ε_n), щоб необхідною і достатньою умовою подання раціонального числа у вигляді ряду (1.4) був скінченний розклад в ряд (1.4).

В [53] було доведено критерій ірраціональності розкладів чисел в ряд Кантора, послідовність (d_n) елементів якого володіє спеціальною властивістю.

Теорема 1.10 ([53]). *Нехай* $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n}$*. Вважатимемо, що нескінченно багато* d_n *ділиться без остачі на кожне просте число. Тоді* $x \in \mathbb{I}$ *тоді і тільки тоді, коли умова* $0 < \varepsilon_n < d_n - 1$ *виконується для нескінченної множини значень* n*.*

У [48] Bill Mance приділив увагу умовам ірраціональності чисел (представлених розкладами в ряд (1.4), для якого $\varepsilon_n \neq d_n - 1$ нескінченно часто), що володіють властивістю певного виду нормальності. Серед наведених в останній роботі умов ірраціональності відмітимо наступний критерій ірраціональності.

Означення 1.6 ([48, с.45]). Число x називається *нормальним за D-розподілом*, якщо послідовність

$$X = (x \pmod 1, d_1 x \pmod 1, d_1 d_2 x \pmod 1, d_1 d_2 \ldots d_n x \pmod 1, \ldots)$$

рівномірно розподілена на $[0;1)$.

Теорема 1.11 ([48, с. 264]). $[0;1) \ni x \in \mathbb{I}$ *тоді і тільки тоді, коли існує базова послідовність $D = (d_n)$ така, що x — нормальне за D-розподілом.*

Насамкінець, варто відмітити, що вивченню умов раціональності та ірраціональності чисел, визначених розкладами в ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$, присвячено праці [46, 33, 66]. Зокрема, в [46] доведено необхідну умову раціональності суми $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(-1)^{n+1}}{b_n}$ за певних властивостей, якими володіють послідовності $(a_n), (b_n)$.

1.3. Метрична, ймовірнісна та фрактальна теорії зображення дійсних чисел додатними рядами Кантора

В області відповідних досліджень можна відмітити роботи наступних авторів: B. Mance, J. Galambos, G. Iommi, B. Skorulski, P. Kirschenhofer, R. F. Tichy, T. Komatsu, V. Laohakosol, S. Prugsapitak, J. Rattanamoong, B. Li, M. Paštéka, Yi Wang, Zhixiong Wen, Lifeng Xi, M. S. Waterman, P. Erdös, A. Rényi.

Відповідні дослідження можна поділити на дві групи. Перша являє собою дослідження властивостей подання дробової частини дійсного числа рядом Кантора (1.4), а інша — дослідження відповідних властивостей подання цілих невід'ємних чисел рядом Кантора виду

$$k = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n d_1 d_2 \ldots d_n,$$

де $\varepsilon_n \in A_{d_n}$.

Чимало робіт також присвячено вивченню властивостей нормальності числа та суміжним з вивченням цієї властивості проблемам, а саме: різні види властивості нормальності числа та їх взаємозв'язок (наприклад, [19, 48]); середнє значення функції суми цифр зображення числа рядом Кантора (див. [44] та посилання в ньому); поведінка частоти найбільш часто вживаної цифри серед перших цифр в зображенні числа [23]; необхідні, достатні, необхідні і достатні умови володіння числом властивістю нормальності певного виду [49, 48, 50]; повнота міри Лебега, щільність, топологічні властивості, міра Хаусдорфа множини, елементи якої володіють властивістю нормальності певного виду [49, 50]; раціональність та ірраціональність числа, що володіє властивістю нормальності певного виду і т. п. Деякі роботи стосуються вивчення властивостей узагальнень представлень дійсних чисел. Наприклад, вивчення властивостей цифр (послідовностей цифр) поліадичного числа α як функцій (послідовностей функцій) від α [58], вводиться поняття комплексного ряду Кантора і досліджується $\mathbb{Q}$-алгебраїчна та $\mathbb{Q}$-лінійна незалежність чисел, заданих в термінах рядів Кантора [45], вивчаються узагальнення розкладів чисел в ряд Кантора до матричних розкладів [68]. Окремі роботи стосуються вивчення окремих питань, пов'язаних з певними видами властивості нормальності [47, 48], зокрема, означеної в означенні 1.6 нормальності за D-розподілом [19, 49, 50].

Нехай маємо додатний ряд Кантора (1.4). Множина

$$\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n} = \{x : x = \Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\ldots\varepsilon_{n+k}\ldots}\},$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — фіксований набір цифр $c_i \in A_{d_i}$, $i = \overline{1,n}$, $\varepsilon_{n+k} \in A_{d_{n+k}}$ для $k = 1, 2, \ldots$, є відрізком, міра Лебега якого дорівнює $\frac{1}{d_1d_2\ldots d_n}$ [29].

Лема 1.4 ([29]). *Цифри (коефіцієнти) $\varepsilon_n(x)$, означені умовами для ряду (1.4), є стохастично незалежними по відношенню до міри Лебега і, для кожного $n = 1, 2, \ldots$, є рівномірно розподіленими на $0, 1, \ldots, d_n - 1$.*

Нехай маємо ймовірнісний простір (X, G, P), де $X = [0; 1)$, G — сім'я вимірних за Лебегом підмножин X, $P(A)$ — міра Лебега множини $A \in G$.

В [24] доведено, що

$$P\{\varepsilon_{n_1}(x) = k_1, \varepsilon_{n_2}(x) = k_2, \dots, \varepsilon_{n_r}(x) = k_r, \} = \frac{1}{d_{n_1} d_{n_2} \dots d_{n_r}},$$

де $0 \leqslant k_j \leqslant d_{n_j} - 1$, $j = \overline{1, r}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_r$, $r = 1, 2, \dots$, та для ряду Кантора (1.4), який володіє властивістю $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n} < +\infty$, для будь-якого $N \in \mathbb{N}$ виконується умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\varepsilon_n(x) < N\} = \sum_{d_n \leqslant N} 1 + \sum_{N < d_n} \frac{N}{d_n} < +\infty.$$

Загалом, значення міри Лебега множини

$$\Delta^{n_1 n_2 \dots n_r}_{c_1 c_2 \dots c_r} = \{x : x = \Delta^D_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}, \varepsilon_{n_j} = c_j, j = \overline{1, r}\},$$

де $c_1, c_2, \dots, c_r$ — фіксований набір чисел $c_j \in A_{d_{n_j}}$, було обчислено в [12]. В останній статті було вивчено основні топологічні, метричні та геометричні властивості розкладів чисел в знакододатний ряд (1.4), а також деякі властивості множини неповних сум останнього ряду.

Число випадків появи цифри k в послідовності $\varepsilon_n(x), \varepsilon_{n+1}(x), \dots$, позначимо $\nu_{k,n}(x)$, де $k = 0, 1, \dots$, $n = 1, 2, \dots$. Введемо позначення $m_n(x) = \sup_k \nu_{k,n}(x)$, $m(x) = \lim_{n \to +\infty} m_n(x)$, $D_N(x)$ — кількість різних цифр в послідовності $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, $R_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{d_j}$, де $n = 1, 2, \dots$.

Теорема 1.12 ([24]). *Нехай* $d_n \leqslant d_{n+1}$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n} < +\infty$.

Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} R_n^{s-1} = +\infty$, *але* $\sum_{n=1}^{\infty} R_n^s < +\infty$ *для деякого додатного цілого числа* s, *тоді* $\mathbf{P}(m(x) = s) = 1$.

Ми маємо $\mathbf{P}(m(x) = +\infty) = 1$ *тоді і тільки тоді, коли* $\sum_{n=1}^{\infty} R_n^s = +\infty$ *для всіх* $s = 1, 2, \dots$.

Теорема 1.13 ([24]). *Нехай* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n} < +\infty$. *Тоді для майже кожного* x

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{D_N(x)}{N} = 1.$$

Теорема 1.14 ([24]). *Послідовність* $(\varepsilon_n(x))$ *є зростаючою для всіх* $n \geqslant n_0(x)$ *для майже всіх* x *тоді і тільки тоді, коли* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} < +\infty$.

В [24] вивчаються також властивості множини $S(x)$ всіх натуральних чисел, що зустрічаються принаймні раз в послідовності (ε_n), зокрема, доведено наступне твердження.

Теорема 1.15. *Щільність множини* $S(x)$ *з ймовірністю* 1 *дорівнює* 0.

У деяких роботах вивчаються фрактальні властивості розкладів чисел в додатний ряд Кантора та фрактальні властивості множин спеціального виду, елементи яких подано у формі розкладів в такі ряди [41, 67, 51, 48]. Наприклад, у [41] досліджуються фрактальні властивості, зокрема, значення розмірності Хаусдорфа множин, елементи яких означені в термінах частот цифр в своєму зображенні рядом Кантора. У [4] встановлено необхідні і достатні умови, щоб функція розподілу випадкової величини з незалежними цифрами розкладу в ряд Кантора, для якого $\sup d_n < \infty$, зберігала розмірність Хаусдорфа-Безиковича довільної підмножини відрізка $[0;1]$, а робота [69], зокрема, присвячена вивченню довірчості покриттів циліндрами $\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n}$ для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича будь-якої підмножини відрізка $[0;1]$.

1.4. Функції

Перейдемо до розгляду[2] функцій зі складною локальною будовою.

В [70] Liu Wen розглянув властивості функції $u = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n(n+1)}$, де

$$u_{n+1} = \begin{cases} -\frac{u_n}{n}, & \text{якщо } \varepsilon_{n+1} = 0, \text{ але } \varepsilon_n \neq 0, \\ & \text{чи, якщо } \varepsilon_{n+1} = d_{n+1} - 1, \text{ але } \varepsilon_n \neq d_n - 1; \\ u_n, & \text{в іншому випадку,} \end{cases}$$

---

[2] Окремо огляду літератури з відповідної тематики даної дисертаційної роботи присвячено препринт [13$^{\text{a}}$].

аргумент якої визначений у термінах розкладу в ряд (1.4). Дана функція є коректно означеною та неперервною в довільній точці $x \in (0;1)$, а також ніде недиференційовною на $(0;1)$, коли $d_n \geqslant 3$ для всіх $n = 1, 2, \dots$, і $\lim_{n\to\infty} \frac{d_1 d_2 \dots d_n}{n!} = \infty$.

У [51] Bill Mance приділив увагу дослідженню властивостей функції

$$\psi_{P,D}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min(E_n, d_n - 1)}{d_1 d_2 \dots d_n},$$

де

$$x = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_n}{p_1 p_2 \dots p_n}, \ \varepsilon_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n},$$

$E_0 \in \mathbb{Z}, \varepsilon_0 \in \mathbb{Z}$, і $D \equiv (d_n), P \equiv (p_n)$ — послідовності натуральних чисел, більших 1, $E_n \in A_{p_n}$, $\varepsilon_n \in A_{d_n}$, та $E_n \neq p_n - 1$, $\varepsilon_n \neq d_n - 1$ нескінченно часто.

Нехай p_0 — фіксоване число, $0 < p_0 < 1$, $p_1 = 1 - p_0$. Функція виду

$$S(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_n(x)} \prod_{j=1}^{n-1} p_{\alpha_j(x)} \right),$$

де $x = \Delta^2_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = p_0$, називається *функцією Салема* і є одним з найпростіших прикладів строго зростаючої сингулярної функції [64].

Працьовитим М. В. та Калашніковим А. В. в роботі [9] досліджувалось узагальнення аналітичного задання функції Салема, аргумент якого визначений у термінах s-го зображення. Подібне дослідження для випадку, коли x задано в термінах Q-зображення [8, с. 87] було проведено цими ж авторами в роботі [10].

Дослідження, проведені в роботах [9, 10], було узагальнено автором даної дисертаційної роботи (див. п. 4.3 і п. 5.3 дисертації) у 2014 році для випадків, коли аргумент функції представлений у вигляді розкладу в додатний або знакопочережний ряд Кантора [6$^{\text{a}}$, 9$^{\text{a}}$, 24$^{\text{a}}$] і в термінах нега-$\tilde{Q}$-зображення [11$^{\text{a}}$, 26$^{\text{a}}$]. Отримані результати було представлено у квітні

2014 року на Міжнародній математичній конференції «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» [24$^{\text{а}}$] і у жовтні 2014 року в доповідях «Задання системами функціональних рівнянь класу функцій, представлених рядами Кантора»[3], «Поліосновне знакододатне та знакопочережне $\tilde{Q}$-представлення та їх застосування для задання функцій системами функціональних рівнянь» на засіданнях семінару з фрактального аналізу відділу фрактального аналізу ІМ НАН та НПУ ім. М. П. Драгоманова (публікації [24$^{\text{а}}$, 6$^{\text{а}}$, 9$^{\text{а}}$, 26$^{\text{а}}$, 11$^{\text{а}}$]). Цілком очевидним стає факт, що такі дослідження можна проводити для моделювання і дослідження функцій зі складною локальною будовою, аргумент яких визначений у термінах чи не будь-якого зображення дійсних чисел.

У 2012 році в роботах [21$^{\text{а}}$] та [3$^{\text{а}}$] автором дисертаційного дослідження було введено і вивчено приклад (п. 4.1 дисертації) функції зі складною локальною будовою, що «зберігає» цифру нуль, задану перетворювачем цифр трійкового зображення аргументу, та, значення якої визначене у термінах трійкового зображення. Остання функція є одним із найпростіших прикладів ніде недиференційовних функцій. Також було згенеровано та досліджено всі можливі приклади функцій, аргумент і значення яких задано в термінах трійкового зображення, і, які можна було побудувати такими перетворювачами цифр [3$^{\text{а}}$]. В цей же рік отримані результати було узагальнено до випадку перетворювача k-цифрових комбінацій s-их цифр зображення аргументу для довільного фіксованого $1 < s \in \mathbb{N}$. Відповідні результати доповідалися на Третій міжуніверситетській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики у квітні 2013 року [22$^{\text{а}}$]. В тому ж році автором дані дослідження було проведено і для випадку нега-s-го зображення дійсних чисел. Слід зазначити, що усі функції, крім $y = x$

---

[3] Текст доповіді доступний за посиланням https://www.researchgate.net/publication/314426236

та

$$f(x) = f\left(\Delta^{s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{s}_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]\ldots[s-1-\alpha_n]\ldots} = 1 - x,$$

$$f(x) = f\left(\Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{-s}_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]\ldots[s-1-\alpha_n]\ldots} = -\frac{s-1}{s+1} - x,$$

з досліджуваного класу функцій виявилися ніде недиференційовними. Тобто, лінійними виявилися функції, в термінах s-го (нега-s-го) зображення значення яких отримується з зображення аргумента заміною цифр: 0 на $s-1$, 1 на $s-2$, $\ldots$, $s-2$ на 1, $s-1$ на 0. Всі отримані результати[4] в цьому напрямку (п. 4.2 дисертації), що є узагальненнями результатів [21ᵃ, 3ᵃ], було об'єднано в одну статтю [8ᵃ], частину матеріалів якої було представлено [23ᵃ] у вересні 2013 року на міжнародній конференції «Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations», присвяченій українському математику Г. Вороному.

Ще одним прикладом функції зі складною локальною будовою є функція Мінковського, яку у 1911 році з метою встановлення взаємно однозначної відповідності між раціональними числами та квадратичними ірраціональностями з $[0;1]$ означив Г. Мінковський в [55]. Остання функція не зберігає розмірність Хаусдорфа–Безиковича [16ᵃ]. Особливістю задання цієї функції є той факт, що її аргумент $x \in [0;1]$ заданий розкладом в ланцюговий дріб, а значення — в термінах змішаного двійкового ряду. Тобто, $x = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots]$,

$$y = G(x) = 2^{1-a_1} - 2^{1-(a_1+a_2)} + \ldots + (-1)^{n-1}2^{1-(a_1+a_2+\ldots+a_n)} + \ldots.$$

1.5. Фрактальні множини

Вперше поняття «фрактал» запропонував у 1977 році Б. Мандельброт в [52]. Проте, перші приклади фрактальних множин, які породжували сво-

---

[4] Презентації і тези відповідних довідей доступні за посиланням www.researchgate.net/profile/Symon_Serbenyuk/publications

го часу в математичній науці ряд суперечностей і дискусій, з'явилися задовго до того. Яскравим прикладом є славнозвісна множина Кантора. Приклади фрактальних множин, а особливо — самоподібних фракталів, зустрічаються чи не в кожній математичній праці, присвяченій теорії фракталів: чи то в оглядовій літературі, чи то в строгому науковому викладі. Дослідження фрактальних властивостей числових множин породжує задачу про вивчення в термінах різних зображень дійсних чисел тополого-метричних та фрактальних властивостей множини спеціального типу з фіксованими умовами, що накладаються на її елементи, та узагальнень такої множини. Зокрема, дослідження закономірностей таких властивостей множин, заданих одним і тим самим способом, але у термінах різних зображень дійсних чисел. Цим питанням приділятиметься увага в розділі 3 дисертації.

Досліджувані в даній дисертаційній роботі фрактальні множини[5] є новими. Проте, вони володіють структурою Морана (є самоподібними фракталами, поняття такої структури було введено Мораном в статті [56]). Різні множини, що володіють структурою Морана, розглядалися рядом авторів (наприклад, див. [59, 40, 61, 51, 22] і посилання в них).

Варто відмітити, що тополого-метричні, фрактальні властивості множин, на елементи яких накладається обмеження на вживання цифр чи комбінацій цифр в термінах того чи іншого зображення, вивчалися в ряді робіт (див., наприклад, [51, 13, 8, 11, 3, 7, 1]). Множини такого типу, елементи яких задано в термінах розкладів в додатний ряд Кантора, наприклад, вивчено в [51]. Зокрема, за умови, коли $\lim_{n\to\infty}\frac{\log d_n}{\log d_1 d_2 \ldots d_n} = 0$, виведено формулу для обчисленя розмірності Хаусдорфа множини

$$R_I(D) = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n}, \varepsilon_n \in I_n \subseteq A_{d_n} \right\}$$

а також знайдено умови, за яких значення розмірності Хаусдорфа та па-

---

[5] Більш детальніше з оглядом літератури з відповідної тематики можна ознайомитись в препринті [15^a].

кувальної розмірності досліджуваної множини співпадають.

1.6. Оператори зсуву цифр знакododатних представлень

Поняття оператора зсуву цифр числа, визначеного в термінах того чи іншого зображення дійсних чисел, не є новим і зустрічається у багатьох джерелах, часто без вживання самого терміну. Прикладом є описане вище застосування цього поняття для формулювання умов раціональності (ірраціональності) чисел, що подаються у вигляді розкладів в ряд Кантора.

Означення 1.7. *Оператором $\hat{\varphi}$ зсуву символів $\tilde{Q}$-представлення* називається відображення

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}\left(\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_n \ldots}\right) = a_{i_2,2} + \sum_{k=3}^{\infty}\left[a_{i_k,k}\prod_{j=2}^{k-1} q_{i_j,j}\right].$$

Останнє означення можна уточнити наступним чином.

Означення 1.8. Нехай $\left(\tilde{Q}_k\right)$ — послідовність матриць $\tilde{Q}_k$, де $k = {} = 0, 1, 2, \ldots, j = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\tilde{Q}_k = \begin{pmatrix} q_{0,k+1} & q_{0,k+2} & \cdots & q_{0,k+j} & \cdots \\ q_{1,k+1} & q_{1,k+2} & \cdots & q_{1,k+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ q_{m_{k+1}-1,k+1} & q_{m_{k+2}-2,k+2} & \cdots & q_{m_{k+j},k+j} & \cdots \\ q_{m_{k+1},k+1} & q_{m_{k+2}-1,k+2} & \cdots & & \cdots \\ & q_{m_{k+2},k+2} & \cdots & & \cdots \end{pmatrix}.$$

Нехай $\left(\mathcal{F}^{\tilde{Q}_k}_{[0;1)}\right)$ — послідовність множин $\mathcal{F}^{\tilde{Q}_k}_{[0;1)}$ всіх можливих $\tilde{Q}_k$-представлень, згенерованих матрицею $\tilde{Q}_k$, чисел з $[0;1)$, де $\tilde{Q}_0 = \tilde{Q}$.

Оператором $\hat{\varphi}^k$ зсуву символів k-го порядку $\tilde{Q}$-представлення числа $x \in [0;1)$ називається відображення $\pi\left(\hat{\varphi}^k(x, \tilde{Q})\right)$ таке, що

$$\varphi^k : [0;1) \times \tilde{Q} \to [0;1) \times \tilde{Q}_k$$

$$((i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots), \tilde{Q}) \to ((i_{k+1}, i_{k+2}, i_{k+j}, \ldots), \tilde{Q}_k),$$

$$\pi : [0;1) \times \tilde{Q}_k \to [0;1)$$

$$(x^{'}, \tilde{Q}_k) \to x^{'}.$$

Зауваження 1.2. Задля компактності викладу замість позначення $\pi\left(\hat{\varphi}^k(x, \tilde{Q})\right)$ вживатимемо в подальшому позначення $\hat{\varphi}^k$.

Оскільки $x = a_{i_1,1} + q_{i_1,1}\hat{\varphi}(x)$, тому $\hat{\varphi}(x) = \frac{x - a_{i_1,1}}{q_{i_1,1}}$.

k-кратне застосування оператора $\hat{\varphi}$ до числа x призводить до відображення $\hat{\varphi}^k$: $\hat{\varphi}^k(x) = a_{i_{k+1},k+1} + \sum_{n=k+2}^{\infty}\left[a_{i_n,n}\prod_{j=k+1}^{n-1} q_{i_j,j}\right]$.

Легко показати справедливість наступних рівностей:

$$\hat{\varphi}^k(x) = \frac{1}{q_{0,1}q_{0,2}\cdots q_{0,k}}\Delta^{\tilde{Q}}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}i_{k+1}i_{k+2}\ldots},$$

$$\hat{\varphi}^{k-1}(x) = a_{i_k,k} + q_{i_k,k}\hat{\varphi}^k(x) = \frac{1}{q_{0,1}q_{0,2}\cdots q_{0,k-1}}\Delta^{\tilde{Q}}_{\underbrace{0\ldots0}_{k-1}i_k i_{k+1}\ldots}. \qquad (1.7)$$

Зауваження 1.3. Оскільки оператор $\hat{\varphi}^k(x)$ в окремих випадках набуває двох різних значень від двох різних представлень $\tilde{Q}$-раціонального числа x, для уникнення неоднозначності без домовленості використовуватимемо лише одне з двох зображень $\tilde{Q}$-раціонального числа, а саме — зображення, що містить період (0).

Розглянемо частинні випадки описаного щойно поняття.

Означення 1.9. *Оператором зсуву цифр s-го представлення* називається відображення $\hat{\varphi}$, для якого

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha_n}{s^{n-1}} \equiv \Delta^s_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}.$$

З останнього означення випливає, що $\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = xs - \alpha_1(x)$, $\frac{i+\hat{\varphi}(x)}{s} = \Delta^s_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$.

Означення 1.10. *Оператором зсуву цифр представлення числа x додатним рядом Кантора* (1.4) називається відображення $\hat{\varphi}$ таке, що для $x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2...\varepsilon_n...}$ справедливою є рівність:

$$\hat{\varphi}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_2 d_3 \ldots d_n}.$$

Очевидно, $\hat{\varphi}(x) = d_1 x - \varepsilon_1(x)$ і $\hat{\varphi}(x) = d_1 \Delta^D_{0\varepsilon_2\varepsilon_3...\varepsilon_n...}$.

n-кратне застосування оператора $\hat{\varphi}$ до числа x призводить до оператора $\hat{\varphi}^n$, для якого

$$\hat{\varphi}^n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_k} \equiv d_1 d_2 \ldots d_n \Delta^D_{\underbrace{0\ldots0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+3}\ldots}. \qquad (1.8)$$

Крім того,

$$\frac{i}{d_n} + \frac{\hat{\varphi}^n(x)}{d_n} = d_1 d_2 ... d_{n-1} \Delta^D_{\underbrace{0...0}_{n-1} i\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+3}\ldots} = \hat{\varphi}^{n-1}(x), \qquad (1.9)$$

Узагальненням оператора зсуву представлення є узагальнений[6] оператор зсуву.

Означення 1.11. *Узагальненим оператором зсуву цифр представлення числа $x \in [0;1]$ додатним рядом Кантора* (1.4) називається відображення $\hat{\varphi}_m$, означене наступною рівністю:

$$\hat{\varphi}_m(x) = \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \ldots + \frac{\varepsilon_{m-1}}{d_1 d_2 \ldots d_{m-1}} + \frac{\varepsilon_{m+1}}{d_1 d_2 \ldots d_{m-1} d_{m+1}} + \\ + \frac{\varepsilon_{m+2}}{d_1 d_2 \ldots d_{m-1} d_{m+1} d_{m+2}} + \ldots.$$

Тобто, відображення $\hat{\varphi}_m$ — це відображення $\pi(\hat{\varphi}_m(x, D))$, а саме:

$$\hat{\varphi}_m : [0;1] \times D \to [0;1] \times D_{\bar{m}}, \text{ де } D_{\bar{m}} = (d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}, d_{m+1}, \ldots)$$

---

[6] Поняття узагальненого оператора зсуву раніше не зустрічалося. Автором даного дисертаційного дослідження означення цього поняття для випадку знакопочережного ряду Кантора було сформульовано у доповіді «Представлення дійсних чисел знакопочережними рядами Кантора» на семінарі з фрактального аналізу 5 вересня 2013 року (презентація доступна за посиланням www.researchgate.net/publication/303720347).

$$((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots), (d_1, d_2, \dots)) \to ((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_{m+1}, \dots), (d_1, \dots, d_{m-1}, d_{m+1}, \dots)),$$

$$\pi : [0; 1] \times D_{\bar{m}} \to [0; 1]$$

$$(\tilde{x}, D_{\bar{m}}) \to \tilde{x}.$$

Висновки до розділу 1

У розділі 1 здійснено огляд основної літератури в контексті досліджуваних задач, розглянуто ключові математичні поняття дослідження. Зокрема, коротко розглянуто представлення дійсних чисел додатними рядами Кантора, s-ве, нега-s-ве та $\tilde{Q}$-представлення. Наведено означення та розглянуто деякі елементарні властивості операторів зсуву цифр згаданих знакододатних представлень.

РОЗДІЛ 2

РОЗКЛАДИ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ У ЗНАКОПОЧЕРЕЖНІ РЯДИ КАНТОРА. КРИТЕРІЇ РАЦІОНАЛЬНОСТІ

Розділ 2[1] присвячено розкладам дійсних чисел в знакопочережні ряди Кантора. Зокрема, розробці основ метричної теорії чисел, зображених знакопочережними рядами Кантора, тополого-метричному аналізу множини неповних сум, розгляду відображень спеціального виду — операторів зсуву цифр та функцій, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича (останні моделюються на основі взаємозв'язку кодувань дійсних чисел за допомогою знакопочережних і додатних рядів Кантора). Розділ також присвячено необхідним і достатнім умовам подання раціонального числа у формі додатного чи знакопочережного ряду Кантора.

2.1. Знакопочережні ряди Кантора

2.1.1. Подання чисел у вигляді знакопочережного ряду Кантора. Нехай задано послідовність $D \equiv (d_n)$.

Означення 2.1. *Числовим знакопочережним рядом Кантора* називається ряд виду

$$-\frac{\varepsilon_1}{d_1}+\frac{\varepsilon_2}{d_1d_2}-\frac{\varepsilon_3}{d_1d_2d_3}+\ldots+\frac{(-1)^n\varepsilon_n}{d_1d_2d_3\ldots d_n}+\ldots, \tag{2.1}$$

де $\varepsilon_n \in A_{d_n}$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Число d_n називатимемо *n-им елементом*, а ε_n — *n-ою цифрою* розкладу (2.1).

---

[1] Результати даного розділу, які стосуються знакопочережних рядів Кантора [10^{a}], увійшли до переліку найбільш вагомих результатів фундаментальних і прикладних досліджень Інституту математики НАН України за 2013 рік. Відповідні дослідження було представлено в доповіді «Представлення дійсних чисел знакопочережними рядами Кантора» на семінарі з фрактального аналізу 5 вересня 2013 року (презентація доступна за посиланням www.researchgate.net/publication/303720347).

Подання числа x у формі ряду (2.1) називатимемо *представленням числа x знакопочережним рядом Кантора* (2.1) або *нега-D-представленням*, а його символічний запис $\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ — *зображенням числа x знакопочережним рядом Кантора* (2.1) або *нега-D-зображенням.*

Легко помітити[2], що кожен знакопочережний ряд Кантора є абсолютно збіжним, причому його сума належить відрізку $[a_0 - 1; a_0]$, де

$$a_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{2n} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{d_1 d_2 \ldots d_n}.$$

Теорема 2.1. *Кожне число $x \in [a_0 - 1; a_0]$ можна подати у вигляді знакопочережного ряду Кантора* (2.1).

Доведення. Цілком очевидно, що $a_0 - 1 = \Delta^{-D}_{[d_1-1]0[d_3-1]0[d_5-1]0\ldots}$ та $a_0 = \Delta^{-D}_{0[d_2-1]0[d_4-1]0[d_6-1]0\ldots} = -\Delta^{-D}_{(1)}$. Нехай x — довільне число з $(a_0 - 1; a_0)$. Оскільки для всіх $\varepsilon_1 \in A_{d_1}$

$$-\frac{\varepsilon_1}{d_1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k-1}} < x \leqslant -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k}}, \text{ а також}$$

$$[a_0 - 1; a_0] = I_0 = \bigcup_{i=0}^{d_1 - 1} \left[-\frac{i}{d_1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k-1}}; -\frac{i}{d_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k}} \right],$$

тому

$$-\sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k-1}} < x + \frac{\varepsilon_1}{d_1} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k}}.$$

Позначимо $x + \frac{\varepsilon_1}{d_1} = x_1$. Отримаємо випадки:

1. $x_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k}-1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k}}$. В такому разі $x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1[d_2-1]0[d_4-1]0\ldots}$ або $x = \Delta^{-D}_{[\varepsilon_1-1]0[d_3-1]0[d_5-1]0\ldots}$.
2. Якщо ж не виконується перший пункт, тоді $x = -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + x_1$, де

$$\frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k-1}} \leqslant x_1 < \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k}}.$$

---

[2] З детальним описом відповідних досліджень можна ознайомитись в [10$^{\text{a}}$].

Позначивши $x_2 = x_1 - \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2}$, отримаємо два випадки:

1. $x_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k-1}-1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k-1}}$. В такому разі або $x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 [d_3-1] 0 [d_5-1] 0 \ldots}$, або $x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1 [\varepsilon_2-1] 0 [d_4-1] 0 [d_6-1] 0 \ldots}$.
2. У разі, коли умова першого випадку не виконується, отримаємо $x =$ $= -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + x_2$, де

$$-\frac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 d_3} - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{d_{2k-1}-1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k-1}} < x_2 \leqslant -\frac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 d_3} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_{2k}-1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k}} \text{ і т. д.}$$

За скінченну кількість кроків m отримаємо:

$$\frac{(-1)^{m+1}\varepsilon_{m+1}}{d_1 d_2 \ldots d_{m+1}} - \sum_{k > \frac{m+2}{2}} \frac{d_{2k-1}-1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k-1}} < x_m < \frac{(-1)^{m+1}\varepsilon_{m+1}}{d_1 d_2 \ldots d_{m+1}} + \sum_{k > \frac{m+1}{2}} \frac{d_{2k}-1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k}},$$

причому, можливі випадки:

1.
$$x_{m+1} = \begin{cases} \sum_{k > \frac{m+2}{2}} \frac{d_{2k-1}-1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k-1}}, & \text{якщо } m \text{ — непарне;} \\ \sum_{k > \frac{m+1}{2}} \frac{d_{2k}-1}{d_1 d_2 \ldots d_{2k}}, & \text{якщо } m \text{ — парне.} \end{cases}$$

   В такому разі

$$x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m+1} [d_{m+2}-1] 0 [d_{m+4}-1] 0 \ldots} \text{ або } x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m [\varepsilon_{m+1}-1] 0 [d_{m+3}-1] 0 [d_{m+5}-1] 0 \ldots}.$$

2. У випадку, коли не існує такого $m \in \mathbb{N}$, щоб виконувалась хоча б одна з умов останньої системи, продовжуючи процес до нескінченності, отримаємо

$$x = -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + x_1 = -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + x_2 = \ldots =$$

$$= -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} - \frac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 d_3} + \ldots + \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} + x_n = \ldots.$$

З останньої рівності випливає, що $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n}$. Теорему доведено. □

Лема 2.1. *Нехай маємо деякі числа* $x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1} \varepsilon_m \varepsilon_{m+1} \ldots}$ *та* $x' =$ $= \Delta^{-D}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1} \varepsilon'_m \varepsilon'_{m+1} \ldots}$, *де* $\varepsilon_m \neq \varepsilon'_m$.

Числа $x, x^{'}$ співпадають тоді і тільки тоді, коли є справедливою одна із систем умов:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon_{m+2i-1} & = & d_{m+2i-1}-1, \\ \varepsilon_{m+2i} & =0 & =\varepsilon^{'}_{m+2i-1}, \\ \varepsilon^{'}_{m+2i} & = & d_{m+2i}-1, \\ \varepsilon^{'}_{m} & = & \varepsilon_m-1; \end{array}\right. \quad \text{або} \left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon_{m+2i} & = & d_{m+2i}-1, \\ \varepsilon_{m+2i-1} & =0 & =\varepsilon^{'}_{m+2i}, \\ \varepsilon^{'}_{m+2i-1} & = & d_{m+2i-1}-1, \\ \varepsilon^{'}_{m}-1 & = & \varepsilon_m; \end{array}\right.$$

для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\varepsilon_m = \varepsilon^{'}_m + 1$. Тоді

$$0 = x - x^{'} = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{m-1}\varepsilon_m\varepsilon_{m+1}\ldots} - \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{m-1}\varepsilon^{'}_m\varepsilon^{'}_{m+1}\ldots} = \frac{(-1)^m}{d_1d_2\ldots d_m} +$$
$$+\frac{(-1)^{m+1}(\varepsilon_{m+1}-\varepsilon^{'}_{m+1})}{d_1d_2\ldots d_{m+1}} + \ldots + \frac{\varepsilon_{m+i}-\varepsilon^{'}_{m+i}}{d_1d_2\ldots d_{m+i}}(-1)^{m+i} + \ldots =$$
$$= \frac{(-1)^m}{d_1d_2\ldots d_m}\left(1 + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i(\varepsilon_{m+i}-\varepsilon^{'}_{m+i})}{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+i}}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i(\varepsilon_{m+i}-\varepsilon^{'}_{m+i})}{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+i}} \geqslant -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_{m+i}-1}{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+i}} = -1.$$

Остання нерівність перетворюється в рівність лише в тому випадку, коли $\varepsilon_{m+2i} = \varepsilon^{'}_{m+2i-1} = 0$ і $\varepsilon_{m+2i-1} = d_{m+2i-1} - 1$, $\varepsilon^{'}_{m+2i} = d_{m+2i} - 1$. Тобто, в даному випадку з рівності $x = x^{'}$ випливають умови першої системи. Аналогічним чином, з умови $x = x^{'}$ при $\varepsilon^{'}_m = \varepsilon_m + 1$ випливають умови другої системи.

Достатність є очевидною. □

Означення 2.2. Число $x \in I_0 = [a_0 - 1; a_0]$ називається *нега-D-раціональним*, якщо воно має два різних нега-D-зображення. Тобто, його можна зобразити у вигляді $\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n[d_{n+1}-1]0[d_{n+3}-1]0[d_{n+5}-1]\ldots}$ або $\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1]0[d_{n+2}-1]0[d_{n+4}-1]0[d_{n+6}-1]\ldots}$.

Решта чисел з I_0 називаються *нега-D-ірраціональними.*

З теореми 2.1 та леми 2.1 випливає наступне твердження.

Теорема 2.2. *Кожне нега-D-ірраціональне єдиним чином представляється знакопочережним рядом Кантора. Кожне нега-D-раціональне число має рівно два подання у формі ряду* (2.1)*, причому множина нега-D-раціональних чисел є зліченною множиною.*

Означення 2.3. Нега-D-зображення $\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ числа x називається *квазіперіодичним*, якщо існують числа $m \in \mathbb{Z}_0$ і $t \in \mathbb{N}$ та функції $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_t$ (які множини A_{d_n} відображають в A_{d_n}), що

$$x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m\phi_1(d_{m+1})\phi_2(d_{m+2})\ldots\phi_t(d_{m+t})\phi_1(d_{m+t+1})\phi_2(d_{m+t+2})\ldots\phi_t(d_{m+2t})\ldots}$$

Як приклади квазіперіодичних чисел можна навести наступні числа: $x_1 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n 0[d_{n+2}-1][d_{n+3}-1]\ldots[d_{n+i}-1]\ldots}$, $x_2 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n 0[d_{n+1}-1]0[d_{n+3}-1]0[d_{n+5}-1]\ldots}$.

Зауваження 2.1. Існують такі послідовності (d_n), що деяке нега-D-раціональне число x може бути ірраціональним.

2.1.2. Знакопочережні ряди Кантора спеціального виду.

Із-за виникнення при подальших дослідженнях деяких незручностей, видозмінимо запис знакопочережного ряду Кантора (2.1) до вигляду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n}(-1)^{n+1}, \tag{2.2}$$

де $\varepsilon_n \in A_{d_n}$. Зауважимо, що

$$\inf\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{d_1 d_2 \ldots d_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{d_1 d_2 \ldots d_n} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{2i}-1}{d_1 d_2 \ldots d_{2i}} = 0,$$

$$\sup\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{d_1 d_2 ... d_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\varepsilon_n}{d_1 d_2 ... d_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{d_1 d_2 ... d_n} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{2i-1}-1}{d_1 d_2 ... d_{2i-1}} = 1.$$

Запис $\Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ для представлення числа $x \in [0;1]$ рядом (2.2) називатимемо *нега-(d_n)-зображенням числа $x \in [0;1]$*. При цьому d_n називатимемо *n-им елементом*, а $\varepsilon_n = \varepsilon_n(x)$ — *n-ою цифрою* розкладу (2.2).

Перейдемо до розгляду рядів спеціального виду.

У загальному випадку, ряд

$$\frac{\alpha_{k_1}}{(-s)^{k_1}} + \frac{\alpha_{k_2}}{(-s)^{k_2}} + \ldots + \frac{\alpha_{k_n}}{(-s)^{k_n}} + \ldots, \alpha_{k_n} \in A, \tag{2.3}$$

де (k_n) — деяка фіксована неспадна послідовність натуральних чисел, називається *нега-s-им рядом.*

Ввівши заміну: $m_1 = k_1$, $m_2 = k_2 - k_1$, $m_3 = k_3 - k_2$, $\ldots$, $m_n = k_n - k_{n-1}$, $\ldots$, отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m_1+m_2+\ldots+m_n}}{(-s)^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}, \text{ де } \alpha_{m_1+m_2+\ldots+m_n} \in A. \tag{2.4}$$

Ті числа $x \in \left[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}\right]$, які можна подати у вигляді (2.4) мають наступне нега-s-ве зображення:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m_1+m_2+\ldots+m_n}}{(-s)^{m_1+m_2+\ldots+m_n}} \equiv \Delta^{-s}_{\underbrace{0\ldots0}_{m_1-1}\alpha_{m_1}\underbrace{0\ldots0}_{m_2-1}\alpha_{m_1+m_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{m_n-1}\alpha_{m_1+m_2+\ldots+m_n}\ldots}.$$

Знакопочережний ряд Кантора, який є одночасно нега-s-им рядом, називається *нега-s-им рядом Кантора.* Тобто, нега-s-им рядом Кантора є ряд вигляду

$$-\frac{\varepsilon_1}{s^{m_1}} + \frac{\varepsilon_2}{s^{m_1+m_2}} - \frac{\varepsilon_3}{s^{m_1+m_2+m_3}} + \ldots + \frac{(-1)^n\varepsilon_n}{s^{m_1+m_2+\ldots+m_n}} + \ldots, \tag{2.5}$$

де $\varepsilon_n \in A$, (m_n) — послідовність непарних натуральних чисел.

Змішаним s-им рядом називається ряд вигляду

$$-\frac{\alpha_1}{s^{k_1}} + \frac{\alpha_2}{s^{k_2}} - \frac{\alpha_3}{s^{k_3}} + \ldots + \frac{(-1)^n\alpha_n}{s^{k_n}} + \ldots, \ \alpha_n \in A. \tag{2.6}$$

Очевидно, останній ряд є знакопочережним рядом Кантора.

2.2. Взаємозв'язок кодувань дійсного числа за допомогою додатного та знакопочережного рядів Кантора

Для будь-якого $x \in [0; 1]$ існує послідовність (α_n), $\alpha_n \in A_{d_n}$, що $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} \equiv \Delta^D_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. Очевидно, просто перейти до подання числа

x у вигляді

$$x = \frac{\alpha_1 d_2 + \alpha_2}{d_1 d_2} + \frac{\alpha_3 d_4 + \alpha_4}{d_1 d_2 d_3 d_4} + \ldots + \frac{\alpha_{2n-1} d_{2n} + \alpha_{2n}}{d_1 d_2 \ldots d_{2n}} + \ldots,$$

але останній розклад є представленням числа x додатним рядом Кантора з послідовністю елементів (d'_n), де $d'_n = d_{2n-1} d_{2n}$. Справді, оскільки $0 \leqslant \alpha_{2n-1} d_{2n} + \alpha_{2n} \leqslant d_{2n-1} d_{2n} - 1$, то

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{p_1 p_2 \ldots p_n} \equiv \Delta^{D'_1}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n \ldots}, \qquad (2.7)$$

де $\beta_n = \alpha_{2n-1} d_{2n} + \alpha_{2n}$, $p_n = d_{2n-1} d_{2n}$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Тепер перейдемо до розгляду подання числа у вигляді знакопочережного ряду Кантора (2.1). Повторивши попередній прийом, отримаємо

$$x = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 d_2}{d_1 d_2} + \frac{\varepsilon_4 - \varepsilon_3 d_4}{d_1 d_2 d_3 d_4} + \ldots + \frac{\varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n-1} d_{2n}}{d_1 d_2 \ldots d_{2n}} + \ldots.$$

Проте, $(\varepsilon_{2n} - \varepsilon_{2n-1} d_{2n})$ не при всіх значеннях ε_{2n-1} і ε_{2n} належить множині $\{0, 1, \ldots, d_{2n-1} d_{2n} - 1\}$. Тому в такому випадку доцільно використовувати саме нега-(d_n)-зображення числа x. Справді, для

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \delta_n}{d_1 d_2 \ldots d_n} (-1)^{n+1} \equiv \Delta^{-(d_n)}_{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_n \ldots}, \text{ де } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{d_1 d_2 \ldots d_n} \equiv \Delta^{-D}_{0[d_2-1]0[d_4-1]0\ldots},$$

отримаємо

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{2n} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2n}} + \frac{\delta_1 d_2 - \delta_2}{d_1 d_2} + \frac{\delta_3 d_4 - \delta_4}{d_1 d_2 d_3 d_4} + \ldots + \frac{\delta_{2n-1} d_{2n} - \delta_{2n}}{d_1 d_2 \ldots d_{2n}} + \ldots.$$

Причому, завжди $(\delta_{2n-1} d_{2n} - \delta_{2n} + d_{2n} - 1) \in \{0, 1, \ldots, d_{2n-1} d_{2n} - 1\}$. Отже,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\delta_{2n-1} + 1) d_{2n} - \delta_{2n} - 1}{d_1 d_2 \ldots d_{2n}} \equiv \Delta^{D'_1}_{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_n \ldots}, \qquad (2.8)$$

де $\gamma_n = (\delta_{2n-1} + 1) d_{2n} - \delta_{2n} - 1 = \delta_{2n-1} d_{2n} + d_{2n} - 1 - \delta_{2n}$.

Лема 2.2. *Тотожніми перетвореннями відрізка* $[0; 1]$ *є наступні функції:*

$$x = \Delta^{D}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots} \xrightarrow{f} \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 [d_2 - 1 - \varepsilon_2] \ldots \varepsilon_{2n-1} [d_{2n} - 1 - \varepsilon_{2n}] \ldots} = f(x) = y,$$

$$x = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots} \xrightarrow{g} \Delta^{D}_{\varepsilon_1 [d_2 - 1 - \varepsilon_2] \ldots \varepsilon_{2n-1} [d_{2n} - 1 - \varepsilon_{2n}] \ldots} = g(x) = y.$$

Останнє твердження випливає з наведених вище міркувань і тотожностей (2.7) та (2.8).

Як наслідок[3], на відрізку $[0;1]$ DP-функціями (функціями, що зберігають фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича) є наступні функції:

$$x = \Delta^{D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} \xrightarrow{f} \Delta^{-(d_n)}_{[d_1-1-\varepsilon_1]\varepsilon_2\ldots[d_{2n-1}-1-\varepsilon_{2n-1}]\varepsilon_{2n}\ldots} = f(x) = y,$$

$$x = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} \xrightarrow{g} \Delta^{D}_{[d_1-1-\varepsilon_1]\varepsilon_2\ldots[d_{2n-1}-1-\varepsilon_{2n-1}]\varepsilon_{2n}\ldots} = g(x) = y.$$

Лема 2.3. *Справедливими є наступні співвідношення:*

1. $\Delta^{D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} - \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} \equiv 2\Delta^{D}_{\varepsilon_1 0\varepsilon_3 0\ldots} \equiv -2\Delta^{-D}_{\varepsilon_1 0\varepsilon_3 0\ldots}$;
2. $\Delta^{D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} + \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} \equiv 2\Delta^{D}_{0\varepsilon_2 0\varepsilon_4\ldots} \equiv 2\Delta^{-D}_{0\varepsilon_2 0\varepsilon_4\ldots}$;
3. $\Delta^{D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} - \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} \equiv 2\Delta^{D'}_{\varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_6\ldots} - \Delta^{D'}_{[d_2-1][d_4-1]\ldots}$, *де* $\varepsilon_n \in A_{d_n}$, $D' \equiv$ $\equiv (d_1d_2, d_3d_4, \ldots, d_{2k-1}d_{2k}, \ldots)$;
4. $\Delta^{D'}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots} = \Delta^{D'}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots} + \Delta^{D'}_{[d_2-1][d_4-1]\ldots[d_{2n}-1]\ldots} - 2\Delta^{D'}_{\varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_6\ldots}$.

2.3. Геометрія та основи метричної теорії

Нехай $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — впорядкований набір цілих невід'ємних чисел такий, що $c_i \in A_{d_i}$ для $i = \overline{1,m}$.

Означення 2.4. *Нега-D-циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$* називається множина $\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m}$ всіх чисел з відрізка $[-1+a_0; a_0]$, які мають (в своєму нега-D-зображенні) перші m цифр відповідно рівні $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Лема 2.4. *Нега-D-циліндр є відрізком, причому* $\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m} =$

$$= \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i c_i}{d_1d_2\ldots d_i} + \frac{(-1)^m}{d_1d_2\ldots d_m}(a_m - 1); \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i c_i}{d_1d_2\ldots d_i} + \frac{(-1)^m}{d_1d_2\ldots d_m}a_m\right]$$

---

[3] З леми 2.2 та її наслідків випливає новий метод перенесення методології фрактального аналізу та побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій сімейств зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень (G-ізоморфізмів систем числення), які зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча можуть бути розривними на всюди щільних множинах).

при парному m та $\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m}=$

$$=\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^ic_i}{d_1d_2\ldots d_i}+\frac{(-1)^m}{d_1d_2\ldots d_m}a_m;\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^ic_i}{d_1d_2\ldots d_i}+\frac{(-1)^m}{d_1d_2\ldots d_m}(a_m-1)\right]$$

при непарному m, де

$$a_m=\sup\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j\varepsilon_{m+j}}{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+j}}.$$

Доведення. Нехай m — парне число та $x\in\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m}$. Тобто,

$$x=\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^ic_i}{d_1d_2\ldots d_i}+\sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^j\varepsilon_j}{d_1d_2\ldots d_j},\ \text{де } \varepsilon_j\in A_{d_j}.$$

Тоді

$$x^{'}=\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^ic_i}{d_1d_2\ldots d_i}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_{m+2k-1}-1}{d_1d_2\ldots d_{m+2k-1}}\leqslant x\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^ic_i}{d_1d_2\ldots d_i}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_{m+2k}-1}{d_1d_2\ldots d_{m+2k}}=x^{''}.$$

Звідси, $x\in[x^{'};x^{''}]$ і $\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m}\subseteq[x^{'};x^{''}]$.

Оскільки

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_{m+2j}-1}{d_1d_2\ldots d_{m+2j}}=\frac{1}{d_1d_2\ldots d_m}\sup\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j\varepsilon_{m+j}}{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+j}},$$

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_{m+2j-1}-1}{d_1d_2\ldots d_{m+2j-1}}=\frac{1}{d_1d_2\ldots d_m}\inf\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j\varepsilon_{m+j}}{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+j}},$$

то $x\in\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m}$, причому $x^{'}\in\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m}\ni x^{''}$. □

Лема 2.5. *Циліндри* $\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *мають наступні властивості:*

1. $\inf\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m}=$

$$=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^ic_i}{d_1d_2\ldots d_i}-\frac{1}{d_1d_2\ldots d_m}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_{m+2j-1}-1}{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+2j-1}}, & \textit{якщо } m \textit{ — парне,}\\ \\ \sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^ic_i}{d_1d_2\ldots d_i}-\frac{1}{d_1d_2\ldots d_m}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_{m+2j}-1}{d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+2j}}, & \textit{якщо } m \textit{ — непарне.}\end{cases}$$

2. $\sup \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m} =$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i c_i}{d_1d_2...d_i} + \frac{1}{d_1d_2...d_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{m+2j}-1}{d_{m+1}d_{m+2}...d_{m+2j}}, & \textit{якщо } m \textit{ — парне,} \\ \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i c_i}{d_1d_2...d_i} + \frac{1}{d_1d_2...d_m} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{m+2j-1}-1}{d_{m+1}d_{m+2}...d_{m+2j-1}}, & \textit{якщо } m \textit{ — непарне.} \end{cases}$$

3. $|\Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m}| = \frac{1}{d_1d_2...d_m}$.
4. $\Delta^{-D}_{c_1c_2...c_mc} \subset \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m}$.
5. $\Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m} = \bigcup_{c=0}^{d_{m+1}-1} \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_mc}$.
6. $\lim_{m\to\infty} |\Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m}| = 0$.
7. $\frac{|\Delta^{-D}_{c_1c_2...c_mc_{m+1}}|}{|\Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m}|} = \frac{1}{d_{m+1}}$.
8. $$\begin{cases} \sup \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_mc} = \inf \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m[c+1]}, & \textit{якщо } m \textit{ — непарне,} \\ \sup \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m[c+1]} = \inf \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_mc}, & \textit{якщо } m \textit{ — парне,} \end{cases}$$

   де $c \neq d_{m+1} - 1$.
9. $$\Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m} \bigcap \Delta^{-D}_{e_1e_2...e_m} = \begin{cases} \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m}, & \textit{якщо } e_i = c_i, \ i = \overline{1,m}; \\ \varnothing, & \textit{якщо } \exists i, \ i < m, \textit{ що } c_i \neq e_i; \\ \varnothing, & \textit{якщо } \exists i, \textit{ що } c_i \neq e_i, \ c_m \neq e_m - 1, \end{cases}$$

   де, в останньому випадку, $e_m \neq 0$.
10. $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m} = x = \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m...}$.

Доведення. Властивості 1 і 2 випливають безпосередньо з означення циліндра $\Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m}$. Наслідком цих властивостей є *властивість 3.* З неї випливають *властивості 6 та 7.*

Доведемо *властивість 4.* Нехай m — парне натуральне число. Покажемо, що

$$\begin{cases} \inf \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_mc} \geqslant \inf \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m}, \\ \sup \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_mc} \leqslant \sup \Delta^{-D}_{c_1c_2...c_m}. \end{cases}$$

Справді,

$$\inf \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m c} - \inf \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i c_i}{d_1d_2\ldots d_i} + \frac{(-1)^{m+1}c}{d_1d_2\ldots d_{m+1}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1}}{d_1d_2\ldots d_{m+1}} \left(\frac{d_{m+3}-1}{d_{m+2}d_{m+3}} + \frac{d_{m+5}-1}{d_{m+2}\ldots d_{m+5}} + \ldots \right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i c_i}{d_1d_2\ldots d_i} -$$

$$- \frac{(-1)^m}{d_1d_2\ldots d_m} \left(- \frac{d_{m+1}-1}{d_{m+1}} - \frac{d_{m+3}-1}{d_{m+1}d_{m+2}d_{m+3}} - \frac{d_{m+5}-1}{d_{m+1}\ldots d_{m+5}} - \ldots \right) =$$

$$= \frac{d_{m+1}-1-c}{d_1d_2\ldots d_{m+1}} \geqslant 0, \text{ причому рівність виконується при } c = d_{m+1}-1.$$

$$\sup \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m} - \sup \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m c} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i c_i}{d_1d_2\ldots d_i} +$$

$$+ \frac{(-1)^m}{d_1d_2\ldots d_m} \left(\frac{d_{m+2}-1}{d_{m+1}d_{m+2}} + \frac{d_{m+4}-1}{d_{m+1}\ldots d_{m+4}} + \ldots \right) - \sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^i c_i}{d_1d_2\ldots d_i} -$$

$$- \frac{(-1)^{m+1}c}{d_1\ldots d_{m+1}} - \frac{(-1)^{m+1}}{d_1\ldots d_{m+1}} \left(- \frac{d_{m+2}-1}{d_{m+2}} - \frac{d_{m+4}-1}{d_{m+2}\ldots d_{m+4}} - \ldots \right) =$$

$$= \frac{c}{d_1d_2\ldots d_{m+1}} \geqslant 0, \quad \text{рівність виконується при } c = 0.$$

Остання система нерівностей доводиться для непарного m аналогічно.

З *властивості 4* та означення циліндра $\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m}$ випливає *властивість 5.*

Властивість 8. Справді, для непарного m

$$\sup \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m c} - \inf \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m[c+1]} = \frac{(-1)^{m+1}c}{d_1d_2\ldots d_{m+1}} + \frac{(-1)^{m+1}}{d_1d_2\ldots d_{m+1}} a_{m+1} -$$

$$- \frac{c+1}{d_1d_2\ldots d_{m+1}}(-1)^{m+1} - \frac{(-1)^{m+1}}{d_1d_2\ldots d_{m+1}}(a_{m+1}-1) = 0.$$

При парному m

$$\sup \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m[c+1]} - \inf \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_m c} = \frac{(-1)^{m+1}}{d_1d_2\ldots d_{m+1}}(c+1) +$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1}}{d_1d_2\ldots d_{m+1}}(a_{m+1}-1) - \frac{(-1)^{m+1}c}{d_1d_2\ldots d_{m+1}} - \frac{(-1)^{m+1}}{d_1d_2\ldots d_{m+1}} a_{m+1} = 0.$$

Властивість 9 випливає з *властивостей 1, 2 та 8.*

Доведемо *властивість 10.* За *властивістю 4*

$$\Delta^{-D}_{c_1} \subset \Delta^{-D}_{c_1c_2} \subset \Delta^{-D}_{c_1c_2c_3} \subset \ldots \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n} \subset \ldots,$$

а з врахуванням попередньої леми отримаємо, що остання система є стяжною системою вкладених відрізків. За аксіомою Кантора

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n} = x = \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}.$$

□

2.4. Найпростіші метричні задачі

Розглянемо множину Δ^k_c чисел, які в своєму нега-D-зображенні $\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ на k-му місці мають фіксовану цифру $c \in A_{d_k}$.

Лема 2.6. *Множина Δ^k_c $(k > 1)$ є об'єднанням циліндрів k-го рангу.*

Доведення. Якщо $k = 1$, то $\Delta^k_c = \Delta^{-D}_c$.

Якщо $k = 2$, то $\Delta^2_c = \Delta^{-D}_{0c} \cup \Delta^{-D}_{1c} \cup \Delta^{-D}_{2c} \cup \ldots \cup \Delta^{-D}_{[d_1-1]c}$.

Нехай $k = n$, тоді

$$\Delta^n_c = \Delta^{-D}_{\underbrace{00\ldots00}_{n-1}c} \cup \Delta^{-D}_{\underbrace{00\ldots01}_{n-1}c} \cup \ldots \cup \Delta^{-D}_{[d_1-1][d_2-1]\ldots[d_{n-1}-1]c}.$$

□

Лема 2.7. *Міра Лебега множини Δ^k_c дорівнює $\frac{1}{d_k}$.*

Доведення.

$$\lambda(\Delta^k_c) = \sum_{c_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{c_{k-1}=0}^{d_{k-1}-1} |\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_{k-1}c}| = \frac{1}{d_k} \sum_{c_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{c_{k-1}=0}^{d_{k-1}-1} |\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_{k-1}}| = \frac{1}{d_k}.$$

□

Наслідок 2.1. *Міра Лебега множини $\Delta^k_{\overline{c}}$ чисел, в нега-D-зображенні яких на k-му місці знаходяться цифри, відмінні від цифри c, дорівнює* $1 - \frac{1}{d_k}$.

Лема 2.8. *Діаметр $d(\Delta_c^k)$ множини Δ_c^k обчислюється за формулою*

$$d(\Delta_c^k) = \frac{d_1 d_2 \dots d_k - d_k + 1}{d_1 d_2 \dots d_k}.$$

Доведення. Нехай $a_k = \sup \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \varepsilon_{k+j}}{d_{k+1} d_{k+2} \dots d_{k+j}}$, k — парне число. Тоді

$$d(\Delta_c^k) = \max \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^i \varepsilon_i}{d_1 d_2 \dots d_i} + \frac{(-1)^k c}{d_1 d_2 \dots d_k} + \frac{(-1)^k}{d_1 d_2 \dots d_k} a_k -$$

$$- \min \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^i \varepsilon_i}{d_1 d_2 \dots d_i} - \frac{(-1)^k c}{d_1 d_2 \dots d_k} - \frac{(-1)^k}{d_1 d_2 \dots d_k} (a_k - 1) =$$

$$= 1 - \frac{1}{d_1 \dots d_{k-1}} + \frac{(-1)^k}{d_1 d_2 \dots d_k} = \frac{d_1 d_2 \dots d_k - d_k + 1}{d_1 \dots d_k}.$$

Нехай k — непарне. Тоді

$$d(\Delta_c^k) = \frac{d_2 - 1}{d_1 d_2} + \frac{d_4 - 1}{d_1 \dots d_4} + \dots + \frac{d_{k-1} - 1}{d_1 \dots d_{k-1}} -$$

$$- \left(-\frac{d_1 - 1}{d_1} - \frac{d_3 - 1}{d_1 d_2 d_3} - \dots - \frac{d_{k-2} - 1}{d_1 \dots d_{k-2}} \right) +$$

$$+ \frac{(-1)^{k+1}}{d_1 d_2 \dots d_k} = 1 - \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_{k-1}} + \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_k} = \frac{d_1 d_2 \dots d_k - d_k + 1}{d_1 \dots d_k}.$$

□

Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_m)$ та $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ — фіксовані набори натуральних чисел такі, що $c_i \in \{0, 1, \dots, d_{k_i} - 1\}$, $i = \overline{1, m}$, $k_1 < k_2 < \dots < k_m$.

Лема 2.9. *Міра Лебега множини $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m}$ чисел, в нега-D-зображенні $\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{-D}$ яких на k_i-му місці ($i = \overline{1, m}$) знаходиться цифра c_i, обчислюється за формулою*

$$\lambda \left(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{k_1 k_2 \dots k_m} \right) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{d_{k_i}}.$$

Доведення. Для початку розглянемо множину $\Delta_{c_1 c_2}^{k_1 k_2}$, що містить лише ті числа, в нега-D-зображенні $\Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots}^{-D}$ яких на позиціях k_1 та k_2 знаходяться фіксовані цифри $c_1 \in A_{d_{k_1}}$ і $c_2 \in A_{d_{k_2}}$ відповідно.

$$\lambda \left(\Delta_{c_1 c_2}^{k_1 k_2} \right) = \frac{1}{d_{k_2}} \cdot \frac{d_{k_2 - 1}}{d_{k_2 - 1}} \cdot \dots \cdot \frac{d_{k_1 + 1}}{d_{k_1 + 1}} |\Delta_{c_1}^{k_1}| = \frac{1}{d_{k_2}} \cdot \frac{1}{d_{k_1}} = \lambda \left(\Delta_{c_1}^{k_1} \right) \cdot \lambda \left(\Delta_{c_2}^{k_2} \right).$$

$$\lambda\left(\Delta^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}\right)=\frac{1}{d_{k_m}}\left|\Delta^{k_1k_2\ldots k_{m-1}}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}}\right|=\frac{1}{d_{k_m}}\cdot\frac{1}{d_{k_{m-1}}}\left|\Delta^{k_1k_2\ldots k_{m-2}}_{c_1c_2\ldots c_{m-2}}\right|=\ldots=$$

$$=\frac{1}{d_{k_m}}\cdot\frac{1}{d_{k_{m-1}}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{d_{k_1}}=\frac{1}{d_{k_1}d_{k_2}\ldots d_{k_m}}.$$

□

Наслідок 2.2. *Множини* $\Delta^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *є метрично незалежними:*

$$\lambda\left(\Delta^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}\right)=\lambda\left(\bigcap_{i=1}^{m}\Delta^{k_i}_{c_i}\right)=\prod_{i=1}^{m}\lambda\left(\Delta^{k_i}_{c_i}\right).$$

Лема 2.10. *Діаметр* $d\left(\Delta^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}\right)$ *множини* $\Delta^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *обчислюється за формулою*

$$d\left(\Delta^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}\right)=1-\sum_{i=1}^{m}\frac{d_{k_i}-1}{d_1d_2\ldots d_{k_i}}.$$

Доведення. Введемо позначення $K=\{k_1,k_2,\ldots,k_m\}$ та нехай $l=1,2,\ldots$. Тоді $\sup\Delta^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}-\inf\Delta^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}=$

$$=\sum_{2l=j\notin K,j<k_m}\frac{d_j-1}{d_1d_2\ldots d_j}+\frac{(-1)^{k_m}}{d_1d_2\ldots d_{k_m}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{d_{k_m+2p}-1}{d_{k_m+1}\ldots d_{k_m+2p}}-$$

$$-\sum_{2l+1=j\notin K,j<k_m}\frac{1-d_j}{d_1d_2\ldots d_j}-\frac{(-1)^{k_m}}{d_1d_2\ldots d_{k_m}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1-d_{k_m+2p+1}}{d_{k_m+1}\ldots d_{k_m+2p+1}}=$$

$$=\sum_{0<j<k_m,j\notin K}\frac{d_j-1}{d_1d_2\ldots d_j}+\frac{1}{d_1d_2\ldots d_{k_m}}=1-\sum_{i=1}^{m}\frac{d_{k_i}-1}{d_1d_2\ldots d_{k_i}}.$$

□

2.5. Множина неповних сум знакопочережного ряду Кантора

Нехай заданими є послідовності $D\equiv(d_n)$ та (ε_n). Розглянемо відповідний знакопочережний ряд Кантора

$$s_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\varepsilon_n}{d_1d_2\ldots d_n}\equiv\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}. \tag{2.9}$$

Нехай (A'_n) — послідовність множин $A'_n = \{0, \varepsilon_n\}$, а також

$$L'_{s_0} = A'_1 \times A'_2 \times A'_3 \times \ldots = \{\delta : \delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots), \delta_n \in A'_n\}.$$

Означення 2.5. Число $s = s(\delta)$ виду

$$s = s(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \delta_n}{d_1 d_2 \ldots d_n}, \tag{2.10}$$

де $\delta = (\delta_n) \in L'_{s_0}$, називається *неповною сумою знакопочережного ряду Кантора* (2.9).

Множину всіх неповних сум знакопочережного ряду Кантора (2.9) позначатимемо M_{s_0}. Тобто, $M_{s_0} = \{x : x = \Delta^{-D}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\ldots}, (\delta_n) \in L'_{s_0}\}$.

Очевидним є той факт, що

$$M_{s_0} \subset \left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{2k-1}}{d_1 d_2 \ldots d_{2k-1}}; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{2k}}{d_1 d_2 \ldots d_{2k}}\right] = I_0^{M_{s_0}} \quad \text{для} \quad s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$$

та $M_{s_0} = \{0\}$ при $s_0 = 0$. Крім того,

$$\bigcup_{s_0} M_{s_0} = \left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k-1}}{d_1 d_2 \ldots d_{2k-1}}; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{2k}}{d_1 d_2 \ldots d_{2k}}\right].$$

З метою дослідження тополого-метричних властивостей множин M_{s_0} всіх неповних сум знакопочережного ряду Кантора (2.9) означимо деякі допоміжні поняття.

Означення 2.6. Циліндром $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ рангу n з основою $c_1c_2\ldots c_n$ називається множина

$$\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} \equiv \left\{x : x = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i c_i}{d_1 d_2 \ldots d_i} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^j \delta_j}{d_1 d_2 \ldots d_j}\right\},$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — фіксовані числа з $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ відповідно та $\delta_j \in A'_j$.

Означення 2.7. Циліндричним відрізком (інтервалом) $I^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ ($\nabla^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$) рангу n з основою $c_1c_2\ldots c_n$ називається відрізок (інтервал), кінці якого співпадають з кінцями циліндра $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$.

З означення 2.6 випливають наступні властивості циліндрів.

1.

$$\inf \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} = \begin{cases} \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n0\varepsilon_{n+2}0\varepsilon_{n+4}\ldots}, & \text{якщо } n \text{ — непарне;} \\ \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n\varepsilon_{n+1}0\varepsilon_{n+3}0\varepsilon_{n+5}\ldots}, & \text{якщо } n \text{ — парне.} \end{cases}$$

2.

$$\sup \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} = \begin{cases} \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n\varepsilon_{n+1}0\varepsilon_{n+3}0\varepsilon_{n+5}\ldots}, & \text{якщо } n \text{ — непарне;} \\ \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n0\varepsilon_{n+2}0\varepsilon_{n+4}\ldots}, & \text{якщо } n \text{ — парне.} \end{cases}$$

3. $d(\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}) = \Delta^{D}_{\underbrace{0\ldots0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\ldots} \equiv \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{d_1d_2\ldots d_k} \leqslant \frac{1}{d_1d_2\ldots d_n} \to 0, n \to \infty.$

4. $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} = \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n0} \cup \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n\varepsilon_{n+1}}$, якщо $\varepsilon_{n+1} \neq 0$.

5. $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} \subset I^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} \subset \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n}$,

$$M_{s_0} \subset \bigcup_{c_i \in A'_i, i=\overline{1,n}} \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} \subset \bigcup_{c_i \in A'_i, i=\overline{1,n}} I^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}.$$

6.

$$|\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n} \setminus (\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n0} \cup \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n\varepsilon_{n+1}})| = \begin{cases} \frac{d_{n+1}-2}{d_1d_2\ldots d_{n+1}}, & \text{якщо } \varepsilon_{n+1} > 0; \\ \frac{d_{n+1}-1}{d_1d_2\ldots d_{n+1}}, & \text{якщо } \varepsilon_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Лема 2.11. *Нехай заданим є деяке число* $s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ *та* (c_n) *— довільна фіксована послідовність з* L'_{s_0}. *Тоді*

1. $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} = \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$.

2. $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} = \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n} \cap M_{s_0}$ *та*

$$M_{s_0} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{c_i \in A'_i, i=\overline{1,n}} \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} \right), \text{ де } A_i = \{0, \varepsilon_i\}.$$

Доведення. 1. Нехай $x = \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$. З означення циліндра $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ випливає, що $\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots} = x \in \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$. Тому $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$. Із властивості 5 циліндрів $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ і випливає перше твердження.

2. Нехай $x \in M_{s_0}$, тоді x належить деякому циліндру $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} \subset \Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n}$. Розглянемо множину $\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n} \cap M_{s_0}$. Елементами цієї множини, очевидно, є числа виду $\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n\delta_{n+1}\delta_{n+2}\ldots\delta_{n+k}\ldots}$, де $\delta_{n+k} \in A^{'}_{n+k}$. З цього випливає, що $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n} \subset (\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n} \cap M_{s_0})$ та той факт, що якщо $x \in (\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n} \cap M_{s_0})$, то $x \in \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$. □

Теорема 2.3. *Множина M_{s_0} неповних сум знакопочережного ряду Кантора є:*

1. *одноелементною множиною $\{0\}$, якщо $s_0 = 0$;*
2. *скінченною множиною, якщо в зображенні $s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ умова $\varepsilon_n \neq 0$ виконується лише для скінченної множини значень n;*
3. *відрізком $\left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right]$, якщо $d_n = const = 2$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та $s_0 = -\frac{1}{3}$;*
4. *об'єднанням скінченного числа відрізків, якщо існує скінченна множина номерів m_i ($i = \overline{1, k_0}$, k_0 — фіксоване число) таких, що $d_{m_i} \neq 2$ та $s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{m_{k_0}}(1)}$;*
5. *континуальною, досконалою, ніде не щільною нуль-множиною Лебега, якщо $\varepsilon_n \neq 0$ та $d_n > 2$ для нескінченної множини значень n.*

Доведення. Перші чотири твердження випливають з тих фактів, що множина M_{s_0} є множиною $C[-D, A^{'}_n]$ та трансформуванні при накладанні умови $d_n = 2$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ представлення числа знакопочережним рядом Кантора у нега-двійкове представлення.

Перейдемо до доведення п'ятого твердження. Розглянемо відображення

$$x = \Delta^{-D}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\ldots} \xrightarrow{f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\delta_1)(2+\delta_1+\delta_2)\ldots(2+\delta_1+\ldots+\delta_n)} \equiv \tag{2.11}$$
$$\equiv \Delta^{E}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\ldots} = f(x).$$

Тобто, таке відображення f, аргумент якого представлений знакопочережним рядом Кантора, а значення — знакододатним рядом Енгеля і $f : M_{s_0} \to C[E, V_n]$, де $V_n = A^{'}_n$. Останнє відображення не є біекцією лише у випадку нега-D-раціонального аргумента $\Delta^{-D}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{k-1}\delta_k[d_{k+1}-1]0[d_{k+3}-1]0\ldots} =$

$= \Delta^{-D}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_{k-1}[\delta_k-1]0[d_{k+2}-1]0[d_{k+4}-1]\ldots}$. Зазначимо, це виникає тоді, коли $s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{k-1}1[d_{k+1}-1][d_{k+2}-1]\ldots}$. Оскільки в M_{s_0} множина нега-D-раціональних чисел є не більш як зліченною і у випадку такого числа можна скористуватися лише одним його зображенням (наприклад, першим), тому з континуальності множини $C[E, V_n]$ випливає континуальність M_{s_0}.

Доведемо, що множина M_{s_0} є ніде не щільною. Оберемо циліндр $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}}$ такий, що для $s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ виконується умова $\varepsilon_n \neq 0$. Дослідимо взаємне розташування циліндрів $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}0}$, $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}\varepsilon_n}$. Нехай n — парне число.

$$\inf \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}\varepsilon_n} - \sup \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i c_i}{d_1d_2\ldots d_i} + \frac{\varepsilon_n}{d_1d_2\ldots d_n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+2k-1}}{d_1d_2\ldots d_{n+2k-1}} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^i c_i}{d_1d_2 \ldots d_i} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+2k}}{d_1d_2\ldots d_{n+2k}} = \frac{1}{d_1d_2\ldots d_n}\left(\varepsilon_n - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+k}}{d_{n+1}\ldots d_{n+k}}\right).$$

Остання різниця є невід'ємною (тобто, циліндри розташовані «зліва направо»), причому рівність нулю справджується у випадку, коли

$$s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}1[d_{n+1}-1][d_{n+2}-1][d_{n+3}-1]\ldots}.$$

Провівши подібні міркування для випадку, коли n є числом непарним, отримаємо такий же результат, але для нерівності $\inf \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}0} - \sup \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}\varepsilon_n} \geqslant 0$. Тобто, у випадку непарного n циліндри $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ розташовані «справа наліво».

Таким чином, для довільного інтервала, що включається у відрізок $[\inf M_{s_0}; \sup M_{s_0}]$ існує підінтервал, що не містить точок з множини M_{s_0}, оскільки $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}0} \cap \Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}\varepsilon_n} \neq \varnothing$ тоді і тільки тоді, коли $\varepsilon_n = 0$ або $s_0 = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}1[d_{n+1}-1][d_{n+2}-1][d_{n+3}-1]\ldots}$.

Доведемо, що M_{s_0} — замкнена без ізольованих точок. Виберемо довільну граничну точку x_0 множини M_{s_0}. Тоді, за означенням, для всіх $\varepsilon > 0$ інтервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ містить хоча б одну точку з M_{s_0}, відмінну від x_0. Якщо не існує єдиного відрізка $I^{M_{s_0}}_{\delta_1(x_0)\delta_2(x_0)\ldots\delta_n(x_0)}$, що містить x_0, тоді точка

x_0 належить одному із суміжних з множиною M_{s_0} інтервалів. З цього випливає, що існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що $(x_0 - \varepsilon_0; x_0 + \varepsilon_0) \cap M_{s_0} = \varnothing$. У такому разі точка x_0 не є граничною. Якщо ж відрізок $I^{M_{s_0}}_{\delta_1(x_0)\delta_2(x_0)\ldots\delta_n(x_0)}$ існує, то

$$M_{s_0} \ni \bigcap_{n=1}^{\infty} I^{M_{s_0}}_{\delta_1(x_0)\delta_2(x_0)\ldots\delta_n(x_0)} = x_0.$$

Отже, M_{s_0} — замкнена множина.

Припустимо, що існує деяка ізольована точка $x^{'} = \Delta^{-D}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\ldots}$. Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що

$$(x^{'} - \varepsilon_0; x^{'} + \varepsilon_0) \cap (M_{s_0} \setminus \{x^{'}\}) = \varnothing. \tag{2.12}$$

Виберемо число m таким чином, щоб $d(\Delta^{M_{s_0}}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m}) < \varepsilon_0$ та $\varepsilon_{m+1}(s_0) \neq 0$. Тоді $\Delta^{M_{s_0}}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_m} \subset (x^{'} - \varepsilon_0; x^{'} + \varepsilon_0)$ та

$$x^{'} \neq x = \Delta^{-D}_{\delta_1\delta_2\ldots\delta_n\sigma\delta_{m+2}\ldots} \in (x^{'} - \varepsilon_0; x^{'} + \varepsilon_0) \cap M_{s_0}, \text{ де}$$

$$\sigma = \begin{cases} \varepsilon_{m+1}, & \text{якщо } \delta_{m+1} = 0; \\ 0, & \text{якщо } \delta_{m+1} \neq 0. \end{cases}$$

Останнє протирічить (2.12). В силу отриманого протиріччя наше припущення є хибним. Отже, множина M_{s_0} не містить ізольованих точок.

Обчислимо міру Лебега множини M_{s_0}. Нехай F_k — об'єднання циліндричних відрізків $I^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_k}$ рангу k $(c_k \in A^{'}_k)$. Тоді $M_{s_0} \subset F_k \subset F_{k+1}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $\lambda(M_{s_0}) \leqslant \lim_{k\to\infty} F_k$. Із властивостей циліндрів $\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ та з того, що $d(\Delta^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}) = |I^{M_{s_0}}_{c_1c_2\ldots c_n}|$ випливає, що

$$\lambda(M_{s_0}) \leqslant \lim_{k\to\infty} \left(2^k \cdot \Delta^{D}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\varepsilon_{k+1}(s_0)\varepsilon_{k+2}(s_0)\varepsilon_{k+3}(s_0)\ldots} \right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2^k}{d_1d_2\ldots d_k} \cdot \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i(s_0)}{d_{k+1}\ldots d_i} \right) = 0.$$

□

2.6. Оператор зсуву цифр представлення чисел знакопочережним рядом Кантора

Нехай маємо послідовність $(-D_k)$, $k = 0, 1, \dots$, елементами якої є послідовності $(-1) \cdot D_k \equiv (-d_{k+n}) \equiv (-d_{k+1}, -d_{k+2}, -d_{k+3}, \dots)$ від'ємних натуральних чисел $(-1) \cdot d_{n+k}$, менших (-1), де $(-1) \cdot D_0 \equiv (-d_n) = (-1) \cdot D$, $n = 1, 2, \dots$.

Нехай $\left(\mathcal{F}^{-D_k}_{[\chi_k;\chi_k^{'}]}\right)$ — послідовність множин $\mathcal{F}^{-D_k}_{[\chi_k;\chi_k^{'}]}$ всіх можливих нега-D-представлень, згенерованих послідовністю $(-1) \cdot D_k$, дійсних чисел з деякого відрізка $[\chi_k; \chi_k^{'}]$.

Означення 2.8. Нехай маємо деякі фіксовані числа $x \in [\chi_0; \chi_0^{'}] = [a_0 - 1; a_0]$ та k, $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Оператором зсуву цифр $(k+1)$-го порядку представлення числа x знакопочережним рядом Кантора (2.1) називається відображення $\hat{\varphi}^{k+1}$, означене на множині $\mathcal{F}^{-D_0}_{[\chi_0;\chi_0^{'}]}$ наступним чином:

$$\hat{\varphi}^{k+1}(x) = \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k-1}\varepsilon_n}{d_{k+2}\dots d_n},$$

Тобто, *оператором зсуву цифр $(k+1)$-го порядку представлення числа знакопочережним рядом Кантора* (2.1) називається відображення $\pi_k(\hat{\varphi}^{k+1}(x, -D))$ таке, що

$$\hat{\varphi}^{k+1} : [\chi_0; \chi_0^{'}] \times (-1) \cdot D_0 \longrightarrow [\chi_{k+1}; \chi_{k+1}^{'}] \times (-1) \cdot D_{k+1}$$

$$((\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots), (-d_1, -d_2, \dots)) \longrightarrow ((\varepsilon_{k+2}, \varepsilon_{k+3}, \dots), (-d_{k+2}, -d_{k+3}, \dots)),$$

$$\pi_k : [\chi_{k+1}; \chi_{k+1}^{'}] \times (-1) \cdot D_{k+1} \longrightarrow [\chi_{k+1}; \chi_{k+1}^{'}]$$

$$(x_{k+1}, -D_{k+1}) \longrightarrow x_{k+1},$$

де $\chi_k = \inf_x \hat{\varphi}^k(x)$, $\chi_k^{'} = \sup_x \hat{\varphi}^k(x)$, $\hat{\varphi}^0(x) = x$ для довільного $x \in [a_0-1; a_0]$.

Зауваження 2.2. Домовимося в подальшому замість позначення $\pi_k(\hat{\varphi}^{k+1}(x, -D))$ використовувати позначення $\hat{\varphi}^{k+1}(x)$.

Означимо оператор, який є узагальненням оператора $\hat{\varphi}$.

Означення 2.9. *Узагальненим оператором зсуву цифр представлення числа* $x \in [a_0-1; a_0]$ *знакопочережним рядом Кантора* (2.1) називатимемо відображення $\hat{\varphi}_m$, означене на $\mathcal{F}^{-D}_{[a_0-1;a_0]}$ наступною рівністю: $\hat{\varphi}_m(x) =$

$$= -\frac{\varepsilon_1}{d_1} + \ldots + \frac{(-1)^{m-1}\varepsilon_{m-1}}{d_1 d_2 \ldots d_{m-1}} + \frac{(-1)^m \varepsilon_{m+1}}{d_1 d_2 \ldots d_{m-1} d_{m+1}} + \frac{(-1)^{m+1}\varepsilon_{m+2}}{d_1 d_2 \ldots d_{m-1} d_{m+1} d_{m+2}} + \ldots .$$

Тобто, означимо відображення $\tilde{\pi}(\hat{\varphi}_m(x, -D))$, для якого

$$\hat{\varphi}_m : [a_0 - 1; a_0] \times (-1) \cdot D \longrightarrow [b_0^{(m)}; b^{(m)}] \times (-1) \cdot D_{\bar{m}}$$

$$((\varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m, \varepsilon_{m+1}, \ldots), (-d_1, \ldots, -d_{m-1}, -d_m, -d_{m+1}, \ldots)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow ((\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_{m+1}, \ldots), (-d_1, \ldots, -d_{m-1}, -d_{m+1}, \ldots)),$$

$$\tilde{\pi} : [b_0^{(m)}; b^{(m)}] \times (-1) \cdot D_{\bar{m}} \longrightarrow [b_0^{(m)}; b^{(m)}]$$

$$(\tilde{x}_m, -D_{\bar{m}}) \longrightarrow \tilde{x}_m,$$

де $(-1) \cdot D_{\bar{m}} \equiv (-d_1, -d_2, \ldots, -d_{m-1}, -d_{m+1}, \ldots)$, $b_0^{(m)} = \inf \hat{\varphi}_m(x)$, $b^{(m)} = = \sup \hat{\varphi}_m(x)$.

Зауваження 2.3. Оскільки подання довільного числа $x \in [a_0 - 1; a_0]$ у вигляді знакопочережного ряду Кантора єдиним чином задається фіксованими послідовностями (ε_n) і $(-d_n)$, то застосування оператора $\hat{\varphi}$ чи $\hat{\varphi}_m$ призводить до переходу до зображення «іншим» рядом Кантора. Справді, $\hat{\varphi}_m(\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{m-1}\varepsilon_m\varepsilon_{m+1}\ldots}) \equiv \Delta^{-D_{\bar{m}}}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{m-1}\varepsilon_{m+1}\ldots}$, $\hat{\varphi}(\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}) \equiv \Delta^{-D_1}_{\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_n\ldots} \equiv \equiv -d_1\Delta^{-D}_{0\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$. В загальному випадку

$$\hat{\varphi}^k(\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_n\ldots}) \equiv \Delta^{-D_k}_{\varepsilon_{k+1}\varepsilon_{k+2}\ldots} \equiv (-1)^k d_1 d_2 \ldots d_k \Delta^{-D}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\varepsilon_{k+1}\varepsilon_{k+2}\ldots},$$

де $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Означення 2.10. *Оператором зсуву цифр зображення числа* $x = = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ *знакопочережним рядом Кантора* (2.1) назвемо відображення

$\tilde{\varphi}$ таке, що

$$\tilde{\varphi}(\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}) = \Delta^{-D}_{\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\varepsilon_{n+1}}{d_1d_2\ldots d_n}.$$

Зауваження 2.4. Очевидно, що відображення $\tilde{\varphi}$ не завжди коректно визначене, адже не для всіх знакопочережних рядів Кантора (2.1) виконується нерівність $\varepsilon_{n+1} \leqslant d_n - 1$. Проте, якою б не була послідовність (d_n), існують числа з $[a_0 - 1; a_0]$, для яких відображення $\tilde{\varphi}$ є коректно визначеним.

Слід зазначити, що для випадку, коли $d_n = const = s$, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, поняття операторів зсуву цифр представлення та зображення числа відповідним рядом є еквівалентними. В останньому випадку такий оператор у науковій літературі відомий як *оператор зсуву цифр*.

З останньої нерівності випливає наступне твердження.

Лема 2.12. *Оператор $\tilde{\varphi}$ є коректно визначеним для довільного $x \in \in [a_0 - 1; a_0]$ тоді і тільки тоді, коли для послідовності (d_n) елементів знакопочережного ряду Кантора* (2.1) *для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $d_{n+1} \leqslant d_n$.*

Перейдемо до розгляду властивостей оператора $\hat{\varphi}$.

Лема 2.13. *Справедливими є наступні твердження:*

1. *оператор $\hat{\varphi}$ має рівно d_1 інваріантних точок:*
$$-\frac{i}{d_1+1},\ i = \overline{0, d_1 - 1};$$
2. *оператор $\hat{\varphi}$ не є бієктивним відображенням;*
3. *якщо послідовність (d_n) — чисто періодична послідовність періоду k, тоді відображення $\hat{\varphi}$ має періодичні точки періоду k, де $k \in \mathbb{N}$. Тобто, $\hat{\varphi}^{k+j}(\Delta^{-D}_{(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k)}) = \hat{\varphi}^{kt+j}(\Delta^{-D}_{(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k)}),\quad t = 0, 1, 2, \ldots;$*
4. *нехай $x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$. Якщо існує таке $m \in \mathbb{N}$, що $\hat{\varphi}^m(x) = x$, то*
$$x = \left(1 + \frac{1}{(-1)^m d_1d_2\ldots d_m - 1}\right)\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m(0)};$$

5. *якщо для фіксованого числа* x *існують такі* $m \in \mathbb{Z}_0$ *та* $c \in \mathbb{N}$, *що* $\hat{\varphi}^m(x) = \hat{\varphi}^{m+c}(x)$, *тоді*

$$x = \frac{\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m(0)} + (-1)^{c+1} d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+c}\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{m+c}(0)}}{1 + (-1)^{c+1}d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+c}};$$

6. *для довільного* $k \in \mathbb{N}$ *справедливими є наступні рівності:*

$$\hat{\varphi}^k(x) = (-1)^k d_1 d_2 \ldots d_k x + (-1)^{k+1} d_1 d_2 \ldots d_k \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k(0)},$$

$$x = (-1)^k \frac{\hat{\varphi}^k(x) + (-1)^k d_1 d_2 \ldots d_k \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k(0)}}{d_1 d_2 \ldots d_k};$$

7. *для довільних* $m \in \mathbb{N}$ *і* $c \in \mathbb{N}$ *виконується рівність:*

$$(-1)^c d_{m+1}d_{m+2}\ldots d_{m+c} \cdot \hat{\varphi}^m(x) - \hat{\varphi}^{m+c}(x) =$$

$$= (-1)^{m+c} d_1 d_2 \ldots d_{m+c} \cdot \Delta^{-D}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}\varepsilon_{m+1}\varepsilon_{m+2}\ldots\varepsilon_{m+c}(0)};$$

8. *відображення* $\hat{\varphi}$ *є спадним на кожному з інтервалів першого рангу* $\nabla^{-D}_c = (\inf \Delta^{-D}_c; \sup \Delta^{-D}_c)$*;*

9. *відображення* $\hat{\varphi}$ *є неперервним в кожній точці інтервалу першого рангу* ∇^{-D}_c, *а кінці цього інтервалу є точками стрибків відображення* $\hat{\varphi}$*;*

10. *відображення* $\hat{\varphi}$ *має похідну майже скрізь (в розумінні міри Лебега), причому, якщо в точці* $x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ *відображення* $\hat{\varphi}$ *має похідну, то* $(\hat{\varphi}(x))' = -d_1$*;*

11. *відображення* $\hat{\varphi}^k$ *не має похідної в жодній нега-D-раціональній точці* $\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n[d_{n+1}-1]0[d_{n+3}-1]0\ldots}$, *де* $k > n-1$*;*

12. *множина*

$$C[-D, V] = \{x : x = \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}, \varepsilon_n \in \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset \{0, 1, \ldots, d_n - 1\}\},$$

де $v_1, v_2, \ldots, v_m$ *— фіксовані натуральні числа,* $1 < m \leqslant d_n - 1$, $d_n > 2$, *є інваріантною відносно відображення* $\hat{\varphi}$, *якщо лише послідовність* (d_n) *є чисто періодичною послідовністю з простим* *періодом, а множина*

$$C[-D,V_n]=\{x:x=\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots},\varepsilon_n\in V_n=\{v^{(n)}_1,v^{(n)}_2,\ldots,v^{(n)}_m\}\subset A_{d_n}\}$$

є інваріантною відносно $\hat{\varphi}^k$, коли послідовності множин (d_n) і (V_n) є чисто періодичними послідовностями з періодом довжини k.

2.7. Критерії раціональності

2.7.1. Зображення раціональних чисел знакопочережними рядами Кантора. Поняття оператора зсуву цифр представлення числа знакопочережним рядом Кантора є корисним для формулювання критеріїв раціональності числа, що подається у вигляді розкладу в такий ряд. Сформулюємо основні твердження.

Теорема 2.4. *Раціональне число $x=\frac{p}{q}$ з відрізка $[-1+a_0;a_0]$ має скінченний розклад в знакопочережний ряд Кантора* (2.1) *тоді і тільки тоді, коли існує n_0 таке, що $d_1d_2\ldots d_{n_0}\equiv 0(\mod q)$.*

Наслідок 2.3. *Існують такі послідовності (d_n), що кожне раціональне число має скінченний розклад у відповідний ряд* (2.1).

Лема 2.14. *Для довільного $n\in\mathbb{N}$ виконується рівність*

$$\Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}+\Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}+\Delta^{-D}_{(1)}=0.$$

Наслідок 2.4. *Існують такі знакопочережні ряди* (2.2)*, що число виду $\Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n(0)}$ може бути ірраціональним.*

Наступні твердження є еквівалентними.

Теорема 2.5. *Число $x_0\in(-1+a_0;a_0)$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують такі номери $k\in\mathbb{Z}_0$ та $t\in\mathbb{N}$, $k\neq t$, що $\hat{\varphi}^k(x)=\hat{\varphi}^t(x)$.*

Теорема 2.6. *Число $x_0\in(-1+a_0;a_0)$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують $k\in\mathbb{Z}_0$ і $t\in\mathbb{N}$ $(k<t)$ такі, що*

$$\Delta^{-D}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}\varepsilon_{k+1}\varepsilon_{k+2}\varepsilon_{k+3}\ldots}=(-1)^{t-k}d_{k+1}d_{k+2}\ldots d_t\Delta^{-D}_{\underbrace{0\ldots0}_{t}\varepsilon_{t+1}\varepsilon_{t+2}\varepsilon_{t+3}\ldots}.$$

Теорема 2.7. *Число x є раціональним тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\hat{\varphi}^k(x))$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, містить хоча б два однакових числа.*

Проведемо відповідні дослідження для додатних рядів Кантора і наведемо доведення основних тверджень.

2.7.2. Критерій D-раціональності.

Теорема 2.8. *Раціональне число $\frac{p}{q} \in (0, 1)$ є D-раціональним тоді і тільки тоді, коли існує такий номер n_0, що $d_1 d_2 \ldots d_{n_0} \equiv 0(mod\ q)$.*

Доведення. Необхідність. Справді, нехай

$$\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}} + \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_{n-1} d_n} +$$

$$+ \frac{0}{d_1 d_2 \ldots d_n d_{n+1}} + \frac{0}{d_1 d_2 \ldots d_n d_{n+1} d_{n+2}} + \ldots,$$

$$\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1 d_2 d_3 \ldots d_n + \varepsilon_2 d_3 \ldots d_n + \ldots + \varepsilon_{n-1} d_n + \varepsilon_n}{d_1 d_2 \ldots d_n},$$

$$p d_1 d_2 \ldots d_n = q\varepsilon_n + q(\varepsilon_1 d_2 d_3 \ldots d_n + \varepsilon_2 d_3 \ldots d_n + \ldots + \varepsilon_{n-1} d_n),$$

$$\varepsilon_n = \frac{p d_1 d_2 \ldots d_n - q(\varepsilon_1 d_2 d_3 \ldots d_n + \varepsilon_2 d_3 \ldots d_n + \ldots + \varepsilon_{n-1} d_n)}{q}.$$

Оскільки в останній рівності ε_n є натуральним числом, то вираз в правій частині також є натуральним числом. Враховуючи, що $(p, q) = 1$, отримаємо $d_1 d_2 \ldots d_n \equiv\ 0(mod\ q)$.

Достатність.[4] Нехай $(p, q) = 1,\ p < q$, існує такий номер n_0, що $d_1 d_2 \ldots d_{n_0} \equiv 0(mod\ q)$ та

$$\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_{n_0}}{d_1 d_2 \ldots d_{n_0}} + \frac{\varepsilon_{n_0+1}}{d_1 d_2 \ldots d_{n_0} d_{n_0+1}} + \ldots = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{\varepsilon_k}{d_1 d_2 \ldots d_k} + r_{n_0},$$

де $r_{n_0} = \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_{n_0}} \left(\frac{\varepsilon_{n_0+1}}{d_{n_0+1}} + \frac{\varepsilon_{n_0+2}}{d_{n_0+1} d_{n_0+2}} + \ldots \right)$ — залишок ряду. Тоді

$$\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1 d_2 \ldots d_{n_0} + \ldots + \varepsilon_{n_0}}{d_1 d_2 \ldots d_{n_0}} + r_{n_0}.$$

---

[4] Достатня умова D-раціональності була сформульована Г. Кантором в [20], однак у неї було дещо інше формулювання та більш громіздке доведення.

Позначивши $\phi = \frac{d_1 d_2 \ldots d_{n_0}}{q} \in \mathbb{N}$ (за умовою) , отримаємо

$$p\phi = (\varepsilon_1 d_2 \ldots d_{n_0} + \ldots + \varepsilon_{n_0}) + d_1 d_2 \ldots d_{n_0} r_{n_0}.$$

Оскільки у лівій частині останньої рівності знаходиться натуральне число, то й в правій також натуральне. Звідси випливає, що $d_1 d_2 \ldots d_{n_0} r_{n_0} = 0$ або $d_1 d_2 \ldots d_{n_0} r_{n_0} = 1$. Що й потрібно було довести. □

2.7.3. Загальні критерії раціональності. Основним результатом даного пункту є наступне твердження.

Теорема 2.9. *Число x є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують $n \in \mathbb{Z}_0$ і $c \in \mathbb{N}$ такі, що $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$.*

Доведення. Необхідність. Нехай маємо послідовність $(\hat{\varphi}^n(x))$, породжену оператором зсуву цифр представлення (1.4) числа x:

$$\hat{\varphi}^0(x) = x,$$

$$\hat{\varphi}(x) = d_1 x - \varepsilon_1,$$

$$\hat{\varphi}^2(x) = d_2 \hat{\varphi}(x) - \varepsilon_2 = d_1 d_2 x - d_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\hat{\varphi}^n(x) = d_n \hat{\varphi}^{n-1}(x) - \varepsilon_n = x \prod_{j=1}^{n} d_j - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i d_{i+1} d_{i+2} \ldots d_n \right) - \varepsilon_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

З (1.8) випливає, що

$$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{d_1 d_2 \ldots d_j} + \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_n} \hat{\varphi}^n(x). \tag{2.13}$$

Нехай $\mathbb{Q} \ni x = \frac{a}{b}$, $a < b$ та $(a, b) = 1$. Тоді для довільного $n \in \mathbb{N}$:

$$\hat{\varphi}^n(x) = \frac{a d_1 d_2 \ldots d_n - b(\varepsilon_1 d_2 d_3 \ldots d_n + \ldots + \varepsilon_{n-1} d_n + \varepsilon_n)}{b} = \frac{a_n}{b}. \tag{2.14}$$

Оскільки $0 \leqslant \frac{a_n}{b} \leqslant 1$ при $n \to \infty$, з того, що $b = const$, випливає $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, b - 1\}$, а отже існує таке $c \in \mathbb{N}$, що $a_n = a_{n+c}$. Більше того, існує підпослідовність (n_m) натуральних чисел, що $a_{n_m} = const$ для всіх $m \in \mathbb{N}$.

Достатність. Справді, якщо існують такі $n \in \mathbb{Z}_0$ і $c \in \mathbb{N}$, що $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$, тоді з (1.8) випливає

$$x\left(\prod_{k=n+1}^{n+c} d_k - 1\right) = \left(\prod_{k=n+1}^{n+c} d_k\right) \cdot \sum_{i=1}^{n+c} \frac{\varepsilon_i}{d_1 d_2 \ldots d_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j}{d_1 d_2 \ldots d_j},$$

$$x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n(0)} + \frac{d_{n+1}\ldots d_{n+c}}{d_{n+1}\ldots d_{n+c} - 1}\Delta^D_{\underbrace{0\ldots0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\ldots\varepsilon_{n+c}(0)}.$$

Отже, $x \in \mathbb{Q}$ і з врахуванням (2.13) справедливим є наступне твердження. □

Лема 2.15. *Якщо існують такі $n \in \mathbb{Z}_0$ і $c \in \mathbb{N}$, що $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$, то $x \in \mathbb{Q}$ і виконується наступна рівність:*

$$\hat{\varphi}^n(x) = \frac{d_1 d_2 \ldots d_n d_{n+1} \ldots d_{n+c}}{d_{n+1}\ldots d_{n+c} - 1}\Delta^D_{\underbrace{0\ldots0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\ldots\varepsilon_{n+c}(0)}.$$

Теорема 2.10. *Число $x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли існують $n \in \mathbb{Z}_0$ і $c \in \mathbb{N}$ такі, що*

$$\Delta^D_{\underbrace{0\ldots0}_{n}\varepsilon_{n+1}\varepsilon_{n+2}\varepsilon_{n+3}\ldots} = d_{n+1}\ldots d_{n+c}\Delta^D_{\underbrace{0\ldots0}_{n+c}\varepsilon_{n+c+1}\varepsilon_{n+c+2}\varepsilon_{n+c+3}\ldots}.$$

Теореми 2.9 і 2.10 є еквівалентними.

2.7.4. Деякі наслідки із загальних критеріїв.

Розглянемо самий простий випадок, коли $c = const = 1$ і $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тобто, коли $\hat{\varphi}^n(x) = const$ для довільного $n \in \mathbb{Z}_0$. Такі числа, відмінні від 0 та 1, справді існують. Наприклад,

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3\cdot5} + \frac{3}{3\cdot5\cdot7} + \ldots + \frac{n}{3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)} + \ldots = \hat{\varphi}^n(x) = \frac{1}{2}.$$

Знайдемо критерії виконання умови $\hat{\varphi}^n(x) = const$.

Лема 2.16. *Якщо* $\hat{\varphi}^n(x) = x$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$, *то* $\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const = x$.

Доведення. Якщо $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+1}(x) = const$, тоді $\hat{\varphi}^n(x) = d_{n+1}\hat{\varphi}^n(x) - \varepsilon_{n+1}$. Звідки,

$$\hat{\varphi}^n(x) = \frac{\varepsilon_{n+1}}{d_{n+1} - 1} = const. \tag{2.15}$$

Тобто,

$$x = \frac{\varepsilon_1}{d_1 - 1} = \frac{\varepsilon_1}{d_2} + \frac{\varepsilon_2}{d_1(d_2 - 1)} = \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2}{d_1 d_2} + \frac{\varepsilon_3}{d_1 d_2 (d_3 - 1)} = \ldots =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{d_1 ... d_i} + \frac{\varepsilon_n}{d_1 \ldots d_{n-1}(d_n - 1)} = \ldots .$$

□

Зауваження 2.5. Якщо $\hat{\varphi}^n(x) = const$ для всіх $n \geqslant n_0$, де n_0 — фіксоване додатне ціле число, то з (2.13) випливає, що умова $\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const$ є справедливою для всіх $n > n_0$ та

$$x = \sum_{i=1}^{n_0} \frac{\varepsilon_i}{d_1 d_2 \ldots d_i} + \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_{n_0}} \cdot \frac{\varepsilon_{n_0+1}}{d_{n_0+1} - 1}.$$

Лема 2.17. *Нехай* $\mathbb{Z}_0 \ni n_0$ *— фіксоване число. Умова* $\hat{\varphi}^n(x) = const$ *є справедливою для всіх* $n \geqslant n_0$ *тоді і тільки тоді, коли* $\frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = const$ *для всіх* $n > n_0$.

Доведення. Необхідність випливає з останньої леми.

Достатність. Нехай для всіх $n > n_0$

$$const = p = \frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} = \frac{\varepsilon_{n+1}}{d_{n+1} - 1} = \ldots = \frac{\varepsilon_{n+i}}{d_{n+i} - 1} = \ldots .$$

Скориставшись рівністю $\frac{\varepsilon_n}{d_n} = \frac{\varepsilon_n}{d_n - 1} - \frac{\varepsilon_n}{d_n(d_n - 1)}$, отримаємо

$$\hat{\varphi}^n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{d_{n+1} \ldots d_i} = \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{d_{n+1} - 1} - \frac{\varepsilon_{n+1}}{d_{n+1}(d_{n+1} - 1)} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(\prod_{j=n+1}^{n+i} \frac{1}{d_j} \right) \left(\frac{\varepsilon_{n+i+1}}{d_{n+i+1} - 1} - \frac{\varepsilon_{n+i+1}}{d_{n+i+1}(d_{n+i+1} - 1)} \right) \right] =$$

$$= p\left(1 - \frac{1}{d_{n+1}}\right) + p\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(1 - \frac{1}{d_{n+i+1}}\right)\left(\prod_{j=n+1}^{n+i}\frac{1}{d_j}\right)\right] = p.$$

□

Наслідок 2.5. *Множина чисел, для представлення яких рядом Кантора* (1.4) *справедливою є умова* $\hat{\varphi}^n(x) = x$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$, *є скінченною множиною порядку* $\min_n d_n$, *причому* $x = \frac{\varepsilon}{d-1}$, *де* $d = \min_n d_n$ *та* $\varepsilon \in \{0, 1, \dots, d-1\}$.

При дослідженні критерію раціональності важливою є задача обчислення значень елементів послідовності (ε_n) раціонального числа $x = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$. Відповідні значення просто визначити для випадку $\hat{\varphi}^n(x) = x, n = 1, 2, \dots$.

Лема 2.18. *Нехай* $d = \min_n d_n$ *та* $A_d \ni \varepsilon$ *— фіксоване число.*

Рівності $\hat{\varphi}^n(x) = x = \frac{\varepsilon}{d-1}$ *виконуються тоді і тільки тоді, коли у представленні числа* x *рядом Кантора* (1.4) *для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *справедливою є умова:*

$$\mathbb{Z}_0 \ni \varepsilon_n = \frac{d_n - 1}{d - 1}\varepsilon.$$

Доведення. *Необхідність* випливає з наслідку 2.5 та рівності (2.15).

Достатність. Справді, нехай $\varepsilon_n = \frac{d_n-1}{d-1}\varepsilon$. Тоді

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{d_n-1}{d-1}\varepsilon}{d_1d_2\ldots d_n} = \frac{\varepsilon}{d-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_n - 1}{d_1d_2\ldots d_n} = \frac{\varepsilon}{d-1}.$$

□

Наслідок 2.6. *Нехай* n_0 *— фіксоване ціле додатне число,* ε_0 *— чисельник звичайного дробу* $\frac{\varepsilon_{n_0+k}}{d_1d_2\ldots d_{n_0}d_{n_0+1}\ldots d_{n_0+k}}$ *та* $d_0 = \min_{n>n_0} d_n$ *в розкладі* (1.4) *числа* x *за умови, що* $d_{n_0+k} = d_0$.

Умова $\hat{\varphi}^n(x) = const$ *є справедливою для всіх* $n \geqslant n_0$ *тоді і тільки тоді, коли в розкладі* (1.4) *числа* x *для кожного* $n > n_0$ *виконується умова*

$$\mathbb{Z}_0 \ni \varepsilon_n = \frac{d_n - 1}{d_0 - 1}\varepsilon_0.$$

Повернимось тепер до рівностей (2.14). Зокрема, до існування послідовності (n_m) такої, що $a_{n_m} = const$ в цих рівностях. Нехай в розкладі (1.4) числа $x \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$ існує послідовність (n_m), що $\hat{\varphi}^{n_m}(x) = const$. Останню умову можна записати наступним чином:

$$const = \sum_{i=n_1+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{d_{n_1+1}\dots d_i} = \sum_{i=n_2+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{d_{n_2+1}\dots d_i} = \dots = \sum_{i=n_m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{d_{n_m+1}\dots d_i} = \dots.$$

Очевидно, можливо звести ряд Кантора (1.4) до ряду Кантора, для якого умова $\hat{\varphi}^{n_m}(x) = const$ еквівалентна умові $\hat{\varphi}^{k}(x) = const$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тобто,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1 d_2 \dots d_n} = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\varepsilon_j}{d_1 d_2 \dots d_j} + \frac{1}{d_1 \dots d_{n_1}} x',$$

$x' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_m}{(\delta_1+1)(\delta_2+1)\dots(\delta_m+1)} =$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n_m+1} d_{n_m+2} d_{n_m+3} \dots d_{n_{m+1}} + \dots + \varepsilon_{n_{m+1}-1} d_{n_{m+1}} + \varepsilon_{n_{m+1}}}{(d_{n_1+1}\dots d_{n_2})(d_{n_2+1}\dots d_{n_3})\dots(d_{n_m+1}\dots d_{n_{m+1}})}. \tag{2.16}$$

Саме для ряду Кантора (2.16) і є справедливою умова $\hat{\varphi}^{m}(x') = const$ для $m = 0, 1, 2, \dots$.

Підсумовуючи наведені вище результати, отримаємо твердження.

Теорема 2.11. *Число x, подане у вигляді ряду Кантора* (1.4)*, є раціональним тоді і тільки тоді, коли існує така підпослідовність (n_m) натуральних чисел, що для всіх $m = 1, 2, \dots$, виконуються умови:*

$$\frac{\sigma_m}{\delta_m} = \frac{\varepsilon_{n_m+1} d_{n_m+2} \dots d_{n_{m+1}} + \dots + \varepsilon_{n_{m+1}-1} d_{n_{m+1}} + \varepsilon_{n_{m+1}}}{d_{n_m+1} d_{n_m+2} \dots d_{n_{m+1}} - 1} = const;$$

$\sigma_m = \dfrac{\delta_m}{\delta}\sigma$, *де* $\delta = \min\limits_{m\in\mathbb{N}} \delta_m$ *та* σ*— число в чисельнику звичайного дробу із нескінченної суми* (2.16)*, знаменник якого дорівнює* $(\delta_1+1)(\delta_2+1)\dots(\delta+1)$.

Нехай існують такі $n \in \mathbb{Z}_0$ та $n \in \mathbb{N}$, що справедливою є теорема 2.9. Тоді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{d_1 d_2 \dots d_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{d_1 d_2 \dots d_i} +$$

$$+ \left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{d_1 d_2 \dots d_n d_{n+1}} + \dots + \frac{\varepsilon_{n+c}}{d_1 d_2 \dots d_n d_{n+1} \dots d_{n+c}} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+c+j}}{d_1 d_2 \dots d_{n+c+j}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{n+1} d_{n+2} \dots d_{n+c} + \varepsilon_{n+2} d_{n+3} \dots d_{n+c} + \dots + \varepsilon_{n+c-1} d_{n+c} + \varepsilon_{n+c}}{d_1 d_2 \dots d_n (d_{n+1} d_{n+2} \dots d_{n+c})} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{n+c+j}}{d_1 d_2 \dots d_{n+c+j}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{d_1 d_2 \dots d_i}.$$

Для заданого початкового ряду справджується $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+c}(x)$, в той час як для ряду, записаному в останньому рядку, справедливою є умова $\hat{\varphi}^n(x) = \hat{\varphi}^{n+1}(x)$. З останньої умови випливає, що

$$\hat{\varphi}^n(x) = \frac{\varepsilon_{n+1} d_{n+2} \dots d_{n+c} + \varepsilon_{n+2} d_{n+3} \dots d_{n+c} + \dots + \varepsilon_{n+c-1} d_{n+c} + \varepsilon_{n+c}}{d_{n+1} d_{n+2} \dots d_{n+c} - 1}.$$

А отже, справедливим є наступне твердження.

Теорема 2.12. *Якщо число x подане у формі ряду (1.4) та $\mathbb{Q} \ni x = \frac{a}{b}$, тоді існують такі числа $n \in \mathbb{Z}_0$ і $c \in \mathbb{N}$, що*

$$d_1 d_2 \dots d_n (d_{n+1} d_{n+2} \dots d_{n+c} - 1) \vdots\, b.$$

Висновки до розділу 2

У розділі 2 введено в розгляд і вивчено кодування дійсних чисел, яке ґрунтується на розкладі чисел у знакопочережний ряд Кантора. Зокрема:

— розроблено основи метричної теорії чисел, зображених знакопочережними рядами Кантора;

— вивчено тополого-метричні властивості множини неповних сум знакопочережного ряду Кантора;

- — описано властивості операторів зсуву цифр представлення та зображення числа знакопочережним рядом Кантора, введено поняття узагальненого оператора зсуву цифр представлення;
- — досліджено взаємозв'язок предсталень дійсних чисел знакопочережним та додатним рядами Кантора;
- — розглянуто функції, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича, і, моделювання яких ґрунтується на взаємозв'язку кодувань дійсних чисел за допомогою знакопочережних і додатних рядів Кантора;
- — доведено загальні критерії[5] раціональності чисел, поданих у вигляді рядів Кантора.

Дослідження, викладені в даному розділі, є новими. Формулювання деяких з наслідків загальних критеріїв раціональності чисел, поданих у формі додатних рядів Кантора, є дещо подібними із окремими відомими твердженнями, але доповнюють відомі результати та доведені іншими способами.

Результати розділу опубліковані у роботах [4^{a}, 10^{a}] і тезах конференції [19^{a}], а також апробовані в доповідях на семінарах та звітних конференціях.

---

[5] В дане дисертаційне дослідження внесено лише найбільш загальні результати (для випадку довільної послідовності (d_n)). Більш детальніше з проведеними дослідженнями автора з цієї тематики можна ознайомитись в публікаціях за посиланням www.researchgate.net/profile/Symon_Serbenyuk/publications.

РОЗДІЛ 3

САМОПОДІБНІ ФРАКТАЛИ

Розділ присвячено дослідженню тополого-метричних і фрактальних властивостей[1] нових фрактальних множин (накладається певна функціональна залежність на вживання символів в поданні елементів досліджуваних множин у формі рядів Кантора спеціального виду).

У даному розділі фактично розглядаються функції, означенні на множинах канторівського типу з допомогою проекторів, і здійснюється тополого-метричний і фрактальний аналіз їх множин значень.

Нехай s — фіксоване ціле число з множини $\mathbb{Z} \setminus \{-2,-1,0,1,2\}$, $A_0 \equiv$ $\equiv A \setminus \{0\} \equiv \{1,2,\ldots,s-1\}$ та $L \equiv (A_0)^{\infty} \equiv (A_0) \times (A_0) \times (A_0) \times \ldots .$ — простір односторонніх послідовностей елементів множини A_0.

Розглянемо нові класи Υ_s та Υ_{-s}, відповідно, множин $\mathbb{S}_{(s,u)}$ та $\mathbb{S}_{(-s,u)}$ виду

$$\mathbb{S}_{(s,u)} \equiv \left\{ x : x = \Delta^{s}_{\underbrace{u\ldots u}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{u\ldots u}_{\alpha_2-1}\alpha_2\ldots\underbrace{u\ldots u}_{\alpha_n-1}\alpha_n\ldots}, (\alpha_n) \in L \right\}, \tag{3.1}$$

$$\mathbb{S}_{(-s,u)} \equiv \left\{ x : x = \Delta^{-s}_{\underbrace{u\ldots u}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{u\ldots u}_{\alpha_2-1}\alpha_2\ldots\underbrace{u\ldots u}_{\alpha_n-1}\alpha_n\ldots}, (\alpha_n) \in L \right\}, \tag{3.2}$$

де $\alpha_n \neq u$, $\alpha_n \neq 0$, $u = \overline{0, s-1}$ і число u є фіксованим для множин $\mathbb{S}_{(s,u)}$ та $\mathbb{S}_{(-s,u)}$. Тобто, клас множин Υ_s містить множини $\mathbb{S}_{(s,0)}, \mathbb{S}_{(s,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(s,s-1)}$. Аналогічно, Υ_{-s} містить множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}, \mathbb{S}_{(-s,1)}, \ldots, \mathbb{S}_{(-s,s-1)}$. Означимо Υ

---

[1] Відповідні результати частково було представлено автором в тезах доповідей на конференціях [17$^{\text{а}}$, 18$^{\text{а}}$, 20$^{\text{а}}$], а також в доповідях на семінарах від 29.09.2011 р. та 16.02.2012 р. (див. вступ). З повними дослідженнями можна ознайомитись за посиланням www.researchgate.net/profile/Symon_Serbenyuk/publications

як клас множин, що містить класи

$$\ldots, \Upsilon_{-n}, \ldots, \Upsilon_{-4}, \Upsilon_{-3}, \Upsilon_3, \Upsilon_4, \ldots, \Upsilon_n, \ldots.$$

У даному розділі вивчатимемо також властивості множини

$$S^{-} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}, (\alpha_n) \in L, \right\},$$

елементи якої подано у вигляді змішаного s-го ряду (2.6), та $\tilde{S}$, яка містить всі числа з $[0;1]$, в s-му зображенні яких дозволено вживати лише набори s-их цифр з множини $\{\underbrace{u \ldots u}_{c-1} c\}$, де $c = \overline{1, s-1}$, $u \in\ A$, $c \neq u$, $u = \overline{0, s-1}$.

Очевидними є наступні рівності:

$$\mathbb{S}_{(s,u)} \equiv \left\{ x : x = \frac{u}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - u}{s^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}, (\alpha_n) \in L, \alpha_n \neq u, \alpha_n \neq 0 \right\}, \quad (3.3)$$

$$\mathbb{S}_{(-s,u)} \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n - u}{(-s)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}} \right) - \frac{u}{s+1}, (\alpha_n) \in L, \alpha_n \neq u, \alpha_n \neq 0 \right\}.$$

3.1. Тополого-метричні та фрактальні властивості

Теорема 3.1. *Усі множини з* $\Upsilon \setminus \left\{\mathbb{S}_{(-3,1)}, \mathbb{S}_{(-3,2)}, \mathbb{S}_{(3,1)}, \mathbb{S}_{(3,2)}\right\}$ *та множина* S^{-} *є: континуальними, ніде не щільними, досконалими нуль-множинами Лебега, а також самоподібними фракталами, розмірність Хаусдорфа-Безиковича* $\alpha_0(\cdot)$ *яких задовольняє рівняння:*

$$2\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0(S^{-})} - \left(\frac{1}{s}\right)^{s\alpha_0(S^{-})} = 1,$$

$$\sum_{p \neq u, p \in A_0} \left(\frac{1}{s}\right)^{p\alpha_0(\mathbb{S}_{(\pm s,u)})} = 1,$$

де під позначенням $\mathbb{S}_{(\pm s,u)}$ *маємо на увазі множину* $\mathbb{S}_{(s,u)}$ *або* $\mathbb{S}_{(-s,u)}$.

Доведення. Розпочнемо з детального дослідження властивостей множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$. Рівність

$$\mathbb{S}_{(s,0)} \ni x_0 = \frac{c_1}{s^{c_1}} + \frac{c_2}{s^{c_1+c_2}} + \frac{c_3}{s^{c_1+c_2+c_3}} + \ldots + \frac{c_n}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}} + \ldots$$

скорочено позначатимемо через $x_0 = \Delta'_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$.

З означення множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$ випливає, що вона не містить s-во-раціональних чисел. Тобто, кожен її елемент має єдине s-ве зображення. Для доведення континуальності $\mathbb{S}_{(s,0)}$ достатньо побудувати взаємно однозначну відповідність між множиною $\mathbb{S}_{(s,0)}$ та множиною $C[s, A_0]$ всіх чисел з відрізка $[0, 1]$, s-ве зображення яких не містить цифри нуль. Такою є

$$\forall(\alpha_n) \in L : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n} = y = f(x), \tag{3.4}$$

що еквівалентно

$$x = \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}c_1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}c_2\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_n-1}c_n\ldots} \to \Delta^s_{c_1c_2\ldots c_n\ldots} = y = f(x). \tag{3.5}$$

З відповідності (3.5) випливає, що відповідність (3.4) є взаємно однозначною відповідністю між множинами $\mathbb{S}_{(s,0)}$ та $C[s, A_0]$. Із континуальності множини $C[s, A_0]$ випливає *континуальність множини* $\mathbb{S}_{(s,0)}$.

З метою детального вивчення властивостей множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$ дослідимо властивості корисного для цього поняття циліндра.

Нехай $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ — фіксований набір s-их цифр, відмінних від цифри 0.

Означення 3.1. *Циліндром* $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_n}$ *рангу* n *з основою* $c_1c_2\ldots c_n$ називається підмножина множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$, всі елементи якої мають в своєму s-му зображенні перші n ненульові цифри відповідно рівні $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Лема 3.1. *Циліндри мають наступні властивості:*

1.

$$\inf \Delta'_{c_1c_2\ldots c_n} = \Delta'_{c_1c_2\ldots c_n(s-1)} = g_n + \frac{s-1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}\left(s^{s-1}-1\right)},$$

$$\sup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_n} = \Delta^{'}_{c_1c_2\ldots c_n(1)} = g_n + \frac{1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}(s-1)},$$

$$\textit{де} \quad g_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}}.$$

2. $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_n} \subset I_{c_1c_2\ldots c_n}$, *де* $I_{c_1c_2\ldots c_n}$ *— відрізок з тими ж самими кінцями, що й відповідний циліндр* $\Delta^{'}_{c_1c_2\ldots c_n}$*:*

$$I_{c_1c_2\ldots c_n} = \left[g_n + \frac{s-1}{(s^{s-1}-1)s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}; g_n + \frac{1}{(s-1)s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}} \right]. \tag{3.6}$$

3. $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_n} \subset \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}c_1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}c_2\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_n-1}c_n}, \quad c_i \in A_0.$

4. $\Delta^{'}_{c_1c_2\ldots c_n} = \bigcup_{i=1}^{s-1} \Delta^{'}_{c_1c_2\ldots c_n i} \quad \forall c_n \in A_0, \quad n \in \mathbb{N}.$

5. $$d(\Delta'_{c_1c_2\ldots c_n}) = \frac{s^{s-1}-1-(s-1)^2}{(s-1)(s^{s-1}-1)s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}.$$

6. $$\frac{d(\Delta'_{c_1c_2\ldots c_{n+1}})}{d(\Delta'_{c_1c_2\ldots c_n})} = \frac{1}{s^{c_{n+1}}}.$$

7. *Циліндри* $\Delta'_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1}, \Delta'_{c_1c_2\ldots c_{n-1}2}, \Delta'_{c_1c_2\ldots c_{n-1}3}, \ldots, \Delta'_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[s-1]}$ *розташовані «справа наліво». Тобто,* $\inf \Delta'_{c_1c_2\ldots c_{n-1}p} > \sup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[p+1]}$ *для буь-якого* $p \in N^1_{s-2} \equiv \{1, 2, \ldots, s-2\}$.

8. *Інтервалом, що не містить жодної точки з множини* $\mathbb{S}_{(s,0)}$ *є будь-який інтервал виду*

$$T_{c_1\ldots c_{n-1}p} = (\sup \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}[p+1]}; \inf \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}p}) = (b_{p+1}; a_p), \textit{ де}$$

$$b_{p+1} = \frac{p+1}{s^{c_1+\ldots+c_{n-1}+p+1}} + \frac{1}{(s-1)s^{c_1+\ldots+c_{n-1}+p+1}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}},$$

$$a_p = \frac{p}{s^{c_1+\ldots+c_{n-1}+p}} + \frac{s-1}{(s^{s-1}-1)s^{c_1+\ldots+c_{n-1}+p}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}}.$$

9. $\Delta^{'}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}p} \cap \Delta^{'}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[p+1]} = \varnothing \quad \forall p \in N^1_{s-2}.$

10. *Якщо* $x_0 \in \mathbb{S}_{(s,0)}$, *то*

$$x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta'_{c_1c_2\ldots c_n}.$$

Доведення. Властивість 1. Оскільки $\frac{a}{s^a} > \frac{b}{s^b}$ при $a < b$, тому

$$\inf \Delta'_{c_1c_2\ldots c_n} = \frac{1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}\left(\frac{s-1}{s^{s-1}} + \frac{s-1}{s^{2(s-1)}} + \ldots\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}}\right) + \frac{s-1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}\left(s^{s-1}-1\right)} = \Delta'_{c_1c_2\ldots c_n(s-1)},$$

$$\sup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_n} = \frac{1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \ldots\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}}\right) + \frac{1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}\left(s-1\right)} = \Delta'_{c_1c_2\ldots c_n(1)}.$$

Властивість 2 випливає з властивості 1, а *властивість 3* випливає з попередніх двох властивостей та рівності

$$\Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}c_1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}c_2\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_n-1}c_n} = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}}; \frac{1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}}\right].$$

Властивості 4, 5 та 6 є також наслідками попередніх властивостей циліндрів.

Для доведення *властивості 7* розглянемо різницю

$$\inf \Delta'_{c_1c_2\ldots c_{n-1}p} - \sup \Delta'_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[p+1]} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}}\right) + \frac{p}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}+p}} +$$

$$+ \frac{1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}+p}} \cdot \frac{s-1}{s^{s-1}-1} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_k}}\right) - \frac{p+1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}+p+1}} -$$

$$- \frac{1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}+p+1}} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{(s^{s-1}-1)(p(s-1)^2 - s) + s(s-1)^2}{(s-1)(s^{s-1}-1)s^{c_1+c_2+\ldots+c_{n-1}+p+1}} > 0.$$

Властивість 8 доведемо, показавши, що виконуються нерівності:

$$1) \inf \Delta'_{c_1\ldots c_{n-1}p} - \inf \Delta'_{c_1c_2\ldots c_{n-1}pc_{n+1}} \leqslant 0, \quad p \in N^1_{s-2}.$$

$$2)\sup\Delta'_{c_1\dots c_{n-1}[p+1]}-\sup\Delta'_{c_1c_2\dots c_{n-1}[p+1]c_{n+1}}\geqslant 0,\quad p\in N^1_{s-2}.$$

$$1)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\dots+c_k}}\right)+\frac{p}{s^{c_1+\dots+c_{n-1}+p}}+\frac{s-1}{(s^{s-1}-1)s^{c_1+\dots+c_n+c_{n-1}+p}}-$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\dots+c_k}}\right)-\frac{p}{s^{c_1+\dots+c_{n-1}+p}}-\frac{c_{n+1}}{s^{c_1+\dots+c_{n-1}+p+c_{n+1}}}-$$

$$-\frac{1}{s^{c_1+\dots+p+c_{n+1}}}\cdot\frac{s-1}{s^{s-1}-1}=\frac{(s-1)(s^{c_{n+1}}-1)-c_{n+1}(s^{s-1}-1)}{(s^{s-1}-1)s^{c_1+\dots+c_{n-1}+p+c_{n+1}}}\leqslant 0.$$

При $c_{n+1}=s-1$ виконується рівність.

$$2)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\dots+c_k}}\right)+\frac{p+1}{s^{c_1+\dots+c_{n-1}+p+1}}+\frac{1}{(s-1)s^{c_1+\dots+c_n+c_{n-1}+p+1}}-$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{c_k}{s^{c_1+c_2+\dots+c_k}}\right)-\frac{p+1}{s^{c_1+\dots+c_{n-1}+p+1}}-\frac{c_{n+1}}{s^{c_1+\dots+c_{n-1}+p+1+c_{n+1}}}-$$

$$-\frac{1}{s^{c_1+\dots+c_{n-1}+p+1+c_{n+1}}}\cdot\frac{1}{s-1}=\frac{s^{c_{n+1}}-c_{n+1}(s-1)-1}{(s-1)s^{c_1+\dots+c_{n-1}+p+1+c_{n+1}}}\geqslant 0,$$

при $c_{n+1}=1$ виконується рівність.

Властивість 9 є наслідком останньої властивості.

Властивість 10. Якщо $x_0=\Delta'_{c_1c_2\dots c_n\dots}\in\mathbb{S}_{(s,0)}$, то очевидним є той факт, що $x_0=\Delta'_{c_1c_2\dots c_n\dots}\in\Delta'_{c_1}\cap\Delta'_{c_1c_2}\cap\dots\cap\Delta'_{c_1c_2\dots c_n}\cap\dots$. В результаті отримуємо, що $x_0\in I_{c_1}\cap I_{c_1c_2}\cap\dots\cap I_{c_1c_2\dots c_n}\cap\dots$. З властивостей циліндрів випливає, що $I_{c_1}\supset I_{c_1c_2}\supset\dots\supset I_{c_1c_2\dots c_n}\supset\ \dots$. Тобто, отримали систему вкладених відрізків, яка за аксіомою Кантора містить єдину точку, якою і є точка x_0. Лему доведено. □

Повернимось до доведення властивостей множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$.

Ніде не щільність $\mathbb{S}_{(s,0)}$. Оскільки, за означенням, у довільно вибраному інтервалі, який є підмножиною відрізка I_0, існують циліндри $\Delta'_{c_1\dots c_n}$ рангу n та виконуються властивість 8 і нерівності з властивості 7 для цих циліндрів, то для будь-якого інтервала, що включається у відрізок I_0, існує підінтервал, що не містить точок з множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$. Отже, $\mathbb{S}_{(s,0)}$ — ніде не щільна множина.

Нульмірність за Лебегом $\mathbb{S}_{(s,0)}$. Для знаходження міри Лебега $\lambda(\cdot)$ знайдемо суму довжин всіх суміжних з множиною $\mathbb{S}_{(s,0)}$ інтервалів.

Введемо наступні позначення: $\mathbb{S}_{(s,0)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, де

$$E_1 = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_{s-1},$$

$$E_2 = I_{11} \cup \ldots \cup I_{[s-1][s-1]},$$

$$E_3 = I_{111} \cup \ldots \cup I_{[s-1][s-1][s-1]},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$E_k = I_{\underbrace{1\ldots1}_{k}} \cup \ldots \cup I_{\underbrace{[s-1]\ldots[s-1]}_{k}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

та $I_{c_1c_2\ldots c_n}$ — відрізок, кінці якого співпадають з кінцями відповідного циліндра $\Delta^{'}_{c_1c_2\ldots c_n}$. Причому, $E_k = E_{k+1} \cup \bar{E}_{k+1}$, оскільки $E_{k+1} \subset E_k$.

Маємо початковий відрізок I_0 такий, що $\lambda(I_0) = d_0$. Таким чином, отримаємо

$$\lambda(E_1) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \ldots + \frac{1}{s^{s-1}}\right) d_0.$$

Позначимо

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} + \ldots + \frac{1}{s^{s-1}} = \sigma.$$

Тому $\lambda(\bar{E}_1) = d_0 - \sigma d_0 = d_0(1-\sigma)$. Аналогічно,

$$\lambda(\bar{E}_2) = d_i^{'(1)} - \sigma d_i^{'(1)} = d_i^{'(1)}(1-\sigma) = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \ldots + \frac{1}{s-1}\right) d_0(1-\sigma) =$$

$$= \sigma d_0(1-\sigma), \quad \text{де} \quad i = \overline{1, s-1}.$$

$$\lambda(\bar{E}_3) = d_i^{'(2)} - \sigma d_i^{'(2)} = d_i^{'(2)}(1-\sigma) = \sigma d_i^{'(1)}(1-\sigma) = \sigma^2 d_0(1-\sigma).$$

Таким чином, отримаємо послідовність, яка є нескінченно спадною геометричною прогресією: $d_0(1-\sigma), \sigma d_0(1-\sigma), \sigma^2 d_0(1-\sigma), \ldots, \sigma^{n-1} d_0(1-\sigma), \ldots$. Як наслідок,

$$\lambda(\mathbb{S}_{(s,0)}) = d_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\bar{E}_k) = d_0 - \sum_{j=1}^{\infty} \sigma^{j-1} d_0(1-\sigma) = d_0 - \frac{d_0(1-\sigma)}{1-\sigma} = 0.$$

Замкненість $\mathbb{S}_{(s,0)}$. Оскільки $E_k = I_{\underbrace{1\ldots1}_{k}} \cup \ldots \cup I_{\underbrace{[s-1]\ldots[s-1]}_{k}}$ — замкнена як об'єднання відрізків, то й $\mathbb{S}_{(s,0)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ є замкненою як перетин замкнених множин.

Досконалість $\mathbb{S}_{(s,0)}$. Доведемо, що множина $\mathbb{S}_{(s,0)}$ не містить ізольованих точок. Нехай $x \in \mathbb{S}_{(s,0)}$ і нехай P - будь-який інтервал, що містить x, J_n — відрізок множини E_n, що містить x. Виберемо достатньо велике n таке, щоб $J_n \subset P$. Нехай x_n — той кінець відрізка J_n, для якого $x_n \neq x$. Із побудови випливає, що $x_n \in \mathbb{S}_{(s,0)}$. Отже, x — гранична точка множини, що означає відсутність ізольованих точок.

Множина $\mathbb{S}_{(s,0)}$ замкнена та не містить ізольованих точок, а отже — досконала.

Перейдемо до вивчення тополого-метричних властивостей множин $\mathbb{S}_{(s,u)}$, де $u \in A_0$. Рівність

$$x_0 = \frac{u}{s-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k - u}{s^{c_1+\ldots+c_k}}$$

скорочено позначатимемо через $x_0 = \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n\ldots}$. Тобто,

$$x_0 = \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n\ldots} = \Delta^{s}_{\underbrace{u\ldots u}_{c_1-1}c_1\underbrace{u\ldots u}_{c_2-1}c_2\ldots\underbrace{u\ldots u}_{c_n-1}c_n\ldots}.$$

Для доведення *континуальності* $\mathbb{S}_{(s,u)}$ достатньо побудувати взаємно однозначну відповідність між множиною $\mathbb{S}_{(s,u)}$ та множиною $C[s, A_0 \setminus \{u\}]$ всіх чисел з відрізка $[0;1]$, s-ве зображення яких не містить цифр 0 та u. Такою є наступна відповідність

$$\forall(\alpha_n) \in L : x = \left(\frac{u}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - u}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}\right) \xrightarrow{f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n} = y = f(x),$$

що еквівалентно

$$x = \Delta^{s}_{\underbrace{u\ldots u}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{u\ldots u}_{\alpha_2-1}\alpha_2\ldots\underbrace{u\ldots u}_{\alpha_n-1}\alpha_n\ldots} \xrightarrow{f} \Delta^{s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = y = f(x).$$

Подальші міркування є аналогічними[2] відповідним міркуванням, що були

---

[2] Повне доведення наведене в статті [2ª].

наведені при доведенні континуальності множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$.

Перейдемо до вивчення властивостей поняття циліндра, необхідного для вивчення тополого-метричних властивостей множини $\mathbb{S}_{(s,u)}$.

Означення 3.2. *Циліндром* $\Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n}$ *рангу* n *з основою* $c_1c_2\ldots c_n$ називатимемо множину виду

$$\Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n} \equiv \left\{x : x = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k - u}{s^{c_1+\ldots+c_k}}\right) + \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n}}\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_i - u}{s^{\alpha_{n+1}+\ldots+\alpha_i}}\right) + \frac{u}{s-1}\right\},$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — фіксовані s-ві цифри та $\alpha_n \neq u, \alpha_n \neq 0$, $2 < s \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

Лема 3.2. *Циліндри* $\Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n}$ *мають наступні властивості:*

1.

$$\inf \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n\ldots} = \begin{cases} \tau + \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n}}\left(\frac{s-1-u}{s^{s-1}-1} + \frac{u}{s-1}\right), & \textit{якщо } u \in \{0,1\}; \\ \tau + \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n}}\frac{1}{s-1}, & \textit{якщо } u \in \{2,\ldots,s-1\}. \end{cases}$$

$$\sup \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n\ldots} = \begin{cases} \tau + \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n}}\frac{1}{s-1}, & \textit{якщо } u = 0, \\ \tau + \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n}}\left(\frac{1}{s^{u+1}-1} + \frac{u}{s-1}\right), & \textit{якщо } u \in \{1,\ldots,s-2\}; \\ \tau + \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n}}\left(1 - \frac{1}{s^{s-2}-1}\right), & \textit{якщо } u = s-1, \end{cases}$$

де

$$\tau = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k - u}{s^{c_1+\ldots+c_k}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{u}{s^k}.$$

2.

$$d(\Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n}) = \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n}} d(\mathbb{S}_{(s,u)});$$

3.

$$\frac{d(\Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n c_{n+1}})}{d(\Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n})} = \frac{1}{s^{c_{n+1}}};$$

4.

$$\Delta^{(s,u)}_{c_1c_2\ldots c_n} = \bigcup_{i=1}^{s-1} \Delta^{(s,u)}_{c_1c_2\ldots c_n i} \quad \forall c_n \in A_0, \quad n \in \mathbb{N}, \ i \neq u.$$

5. *Для циліндрів одного і того ж рангу виконуються наступні співвідношення:*

а) $\inf \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n p} > \sup \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n [p+1]}$ *при* $u \in \{0,1\}$,

б) *при* $u \in \{2,3,\ldots,s-3\}$

$$\begin{cases} \sup \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n p} < \inf \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n [p+1]} & \textit{для всіх } p+1 \leqslant u; \\ \inf \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n p} > \sup \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n [p+1]} & \textit{для всіх } u < p, \end{cases}$$

в) $\sup \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n p} < \inf \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n [p+1]}$ *при* $u \in \{s-2, s-1\}$.

Доведення. Перша властивість випливає із рівностей:

$$\inf \mathbb{S}_{s,u} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\max\{\alpha_k\}-u}{s^{\max\{\alpha_1\}+\ldots+\max\{\alpha_k\}}} + \frac{u}{s-1}, & \text{якщо } u \in \{0,1\}; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{\alpha_k\}-u}{s^{\min\{\alpha_1\}+\ldots+\min\{\alpha_k\}}} + \frac{u}{s-1}, & \text{якщо } u \in \{2,3,\ldots,s-1\}, \end{cases}$$

$$\sup \mathbb{S}_{(s,u)} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\min\{\alpha_k\}}{s^{\min\{\alpha_1\}+\ldots+\min\{\alpha_k\}}}, & \text{якщо } u = 0, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s^{(1+u)k}} + \frac{u}{s-1}, & \text{якщо } u \in \{1,2,\ldots,s-2\}; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\max\{\alpha_k\}-s+1}{s^{\max\{\alpha_1\}+\ldots+\max\{\alpha_k\}}} + 1, & \text{якщо } u = s-1, \end{cases}$$

що, в свою чергу, випливають із означення множини $\mathbb{S}_{s,u}$.

Очевидно, що *друга властивість* є наслідком першої, а *третя* — наслідком другої. *Четверта властивість* випливає з означення.

Доведемо *п'яту властивість*. Доведемо першу нерівність для $u = 1$.

$$\inf \Delta^{(s,1)}_{c_1\ldots c_n p} - \sup \Delta^{(s,1)}_{c_1\ldots c_n [p+1]} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k - 1}{s^{c_1+\ldots+c_k}}\right) + \left(\sum_{k=1}^{c_1+\ldots+c_n} \frac{1}{s^k}\right) +$$

$$+\frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+1}} + \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+2}} + \ldots + \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p-1}} + \frac{p}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}} + \frac{\inf \mathbb{S}_{(s,1)}}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}} -$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k - 1}{s^{c_1+\ldots+c_k}}\right) - \left(\sum_{k=1}^{c_1+\ldots+c_n} \frac{1}{s^k}\right) - \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+1}} - \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+2}} - \ldots -$$

$$-\frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p-1}} - \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}} - \frac{p+1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p+1}} - \frac{\sup \mathbb{S}_{(s,1)}}{s^{c_1+\ldots+c_n+p+1}} = \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}} \times$$

$$\times \left(\left(p - 1 - \frac{p+1}{s}\right) + \left(\frac{(s^{s-1}-1)((s+1)s - s - 2) + (s-2)(s^2-1)s}{(s-1)s(s+1)(s^{s-1}-1)}\right)\right) >$$

> 0, де $1 < p < s-1,\ s > 2$.

Перейдемо до доведення системи нерівностей. Доведемо першу нерівність. Нагадаємо, що $p+1 \leqslant u$.

$$\sup \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n p} - \inf \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n [p+1]} = \frac{p}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}} + \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(\frac{1}{s^{u+1}-1}+\frac{u}{s-1}\right) -$$

$$-\frac{u}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}} - \frac{p+1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p+1}} - \frac{1}{(s-1)s^{c_1+\ldots+c_n+p+1}} =$$

$$= \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(\frac{1}{s^{u+1}-1}+\frac{u}{s-1} - u - \frac{p+1}{s} - \frac{1}{s(s-1)} + p\right) <$$

$$< \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(\frac{1}{s^{u+1}-1} - \frac{1}{s(s-1)} + \frac{u}{s-1} - \frac{p+1}{s} - 1\right) < 0.$$

Доведемо другу нерівність. Нагадаємо, що $p > u$, тобто $p-u \geqslant 1$.

$$\sup \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n [p+1]} - \inf \Delta^{(s,u)}_{c_1\ldots c_n p} = \frac{p}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}} + \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\frac{1}{s-1} - \frac{u}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}} -$$

$$-\frac{p+1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p+1}} - \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p+1}}\left(\frac{1}{s^{u+1}-1}+\frac{u}{s-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(p + \frac{1}{s-1} - u - \frac{p+1}{s} - \frac{1}{s(s^{u+1}-1)} - \frac{u}{s(s-1)}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(1 + \frac{1}{s-1} - \frac{p+1}{s} - \frac{1}{s(s^{u+1}-1)} - \frac{u}{s(s-1)}\right) > 0.$$

Остання нерівність леми є наслідком системи нерівностей і доводиться аналогічно. Лему доведено. □

З того, що $\mathbb{S}_{(s,u)} \subset C[s,A_0] = \left\{x : x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in A_0\right\}$ для всіх $u = \overline{1, s-1}$, випливає *ніде не щільність* та *нульмірність за Лебегом множини* $\mathbb{S}_{(s,u)}$. *Досконалість* доводиться по аналогії з доведенням відповідної властивості множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$.

Перейдемо до вивчення *фрактальних властивостей множин* $\mathbb{S}_{(s,u)}$. Проведемо відповідні дослідження для множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$. Оскільки $\mathbb{S}_{(s,0)} \subset I_0$ і $\mathbb{S}_{(s,0)}$ — досконала, то вона є компактом. Крім того

$$\mathbb{S}_{(s,0)} = [I_1 \cap \mathbb{S}_{(s,0)}] \cup [I_2 \cap \mathbb{S}_{(s,0)}] \cup \ldots \cup [I_{s-1} \cap \mathbb{S}_{(s,0)}],$$

$$[I_1 \cap \mathbb{S}_{(s,0)}] \overset{s^{-1}}{\sim} \mathbb{S}_{(s,0)}, [I_2 \cap \mathbb{S}_{(s,0)}] \overset{s^{-2}}{\sim} \mathbb{S}_{(s,0)}, \ldots, [I_{s-1} \cap \mathbb{S}_{(s,0)}] \overset{s^{-(s-1)}}{\sim} \mathbb{S}_{(s,0)}.$$

Оскільки множина $\mathbb{S}_{(s,0)}$ є компактною самоподібною множиною простору $\mathbb{R}^1$, то її самоподібна розмірність співпадає з фрактальною розмірністю Хаусдорфа-Безиковича. Врахувавши рівняння (див. [56]), що його задовольняє значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича самоподібного фрактала, отримаємо, що розмірність Хаусдорфа-Безиковича α_0 множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$ задовольняє рівняння

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0} + \left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0} + \left(\frac{1}{s}\right)^{3\alpha_0} + \ldots + \left(\frac{1}{s}\right)^{(s-1)\alpha_0} = 1.$$

Доведення фрактальних властивостей множини $\mathbb{S}_{(s,u)}$, де $u \in A_0$, є аналогічним доведенню відповідних властивостей для множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$, але з врахуванням умови, що $\alpha_n \neq u$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, в означенні множини $\mathbb{S}_{(s,u)}$.

Перейдемо до вивчення множини $S_{(-s,0)}$. Спочатку доведемо твердження про її континуальність[3]. Для цього покажемо, що множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ та $C[-s, A_0]$ є еквівалентними. Тобто, побудуємо взаємно однозначну відповідність між цими множинами, а саме:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \cdot (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{s^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}} \xrightarrow{f} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-s)^n} = f(x) = y,$$

що еквівалентно

$$x = \Delta^{-s}_{\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_2-1}\alpha_2\ldots\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_n-1}\alpha_n\ldots} \xrightarrow{f} \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} = f(x) = y.$$

Подальші міркування є аналогічними з наведеними вище в доведеннях континуальності множин.

Очевидно, що

$$\inf \mathbb{S}_{(-s,0)} = -\frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^5} - \ldots = -\frac{s^2+1}{s(s^2-1)},$$

---

[3] Відповідне доведення повністю описане в [5ᵃ].

$$\sup \mathbb{S}_{(-s,0)} = \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^6} + \ldots = \frac{2}{s^2-1}.$$

Нехай задано набір $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ відмінних від 0 s-их цифр.

Означення 3.3. *Циліндром $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}$ рангу n з основою $c_1c_2\ldots c_n$* називатимемо підмножину множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$, всі елементи якої мають в своєму нега-s-му зображенні перші n відмінних від 0 цифр, рівних $c_1, c_2, \ldots, c_n$ відповідно.

Лема 3.3. *Циліндри $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}$ мають наступні властивості:*

1.
$$\inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n} = \begin{cases} g_n^{(-s)} + \frac{\inf \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}, & \textit{якщо } c_1+\ldots+c_n \textit{ — парне;} \\ g_n^{(-s)} + \frac{\sup \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}, & \textit{якщо } c_1+\ldots+c_n \textit{ — непарне,} \end{cases}$$

$$\sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n} = \begin{cases} g_n^{(-s)} + \frac{\sup \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}, & \textit{якщо } c_1+\ldots+c_n \textit{ — парне;} \\ g_n^{(-s)} + \frac{\inf \mathbb{S}_{(-s,0)}}{(-s)^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}, & \textit{якщо } c_1+\ldots+c_n \textit{ — непарне,} \end{cases}$$

де
$$g_n^{(-s)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i(-1)^i}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_i}}.$$

2.
$$d\left(\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}\right) = \frac{d\left(\mathbb{S}_{(-s,0)}\right)}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}.$$

3.
$$\frac{d\left(\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}}\right)}{d\left(\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}\right)} = \frac{1}{s^{c_{n+1}}}.$$

4.
$$\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n} = \bigcup_{i=1}^{s-1} \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_ni}.$$

5. *Циліндри $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}}$ $(n+1)$-го рангу з основою $c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}$ задовольняють наступні співвідношення:*

$$\inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np} > \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n[p+1]}, \textit{ якщо } c_1+c_2+\ldots+c_n+p \textit{ — парне,}$$

$$\inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n[p+1]} > \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np}, \textit{ якщо } c_1+c_2+\ldots+c_n+p \textit{ — непарне.}$$

6. $T^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np} \cap \mathbb{S}_{(-s,0)} = \varnothing$, *де* $T^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np}$ *— інтервал, причому* $T^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np} =$
$$= \begin{cases} \left(\sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n[p+1]}; \inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np}\right), & c_1+\ldots+c_n+p \text{ — парне;} \\ \left(\sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np}; \inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n[p+1]}\right), & c_1+\ldots+c_n+p \text{ — непарне,} \end{cases}$$
$1 \leqslant p < s-1$, p *— натуральне число.*
7. $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np} \cap \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n[p+1]} = \varnothing$, *де* $p \in \{1, 2, \ldots, s-2\}$.
8. *Якщо* $x_0 \in \mathbb{S}_{(-s,0)}$, *то*
$$x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}.$$

Доведення. Властивості 1 — 4 випливають з означеннь циліндра $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}$ та множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$.

Доведемо *властивість 5*. Маємо циліндри $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np}$, $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n[p+1]}$, де $1 \leqslant p < s-1$. Введемо позначення:
$$g^{(-s)}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(-s)^{c_1+c_2+\ldots+c_i}}, \quad \varpi_n = c_1+c_2+\ldots+c_n.$$

З означення циліндра $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}$ випливає, що
$$\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np} \subset \begin{cases} \left[g^{(-s)}_n + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}}; g^{(-s)}_n + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}}\right], \\ \left[g^{(-s)}_n + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}}; g^{(-s)}_n + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}}\right], \end{cases}$$
де в першому випадку число $\varpi_n + p$ парне, а в другому — непарне.

Аналогічно, $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n[p+1]} \subset$
$$\subset \begin{cases} \left[g^{(-s)}_n + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}}; g^{(-s)}_n + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}}\right], \\ \left[g^{(-s)}_n + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{2}{(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}}; g^{(-s)}_n + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}}\right], \end{cases}$$
де в першому випадку число $(\varpi_n + p + 1)$ — парне, а в другому — непарне.

Перейдемо тепер до доведення нерівностей. Нехай парним є число $\varpi_n + p = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + p$. Тоді $\inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np} - \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n[p+1]} =$
$$= g^{(-s)}_n + \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}} - g^{(-s)}_n - \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} -$$

$$-\frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}} = \frac{1}{s^{\varpi_n+p}}\left(ps+p+1-\frac{s^3+s^2+s+1}{s(s^2-1)}\right) > 0,$$

оскільки

$$\frac{s^3+s^2+s+1}{s(s^2-1)} = 1+\frac{(s+1)^2}{s(s^2-1)} = 1+\frac{s+1}{s(s-1)} < 2.$$

Нехай $\varpi_n + p$ — непарне. Тоді $\inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n[p+1]} - \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_np} =$

$$= g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{\varpi_n+p+1}} + \frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p+1}} - g_n^{(-s)} - \frac{p}{(-s)^{\varpi_n+p}} -$$

$$-\frac{-(s^2+1)}{s(s^2-1)(-s)^{\varpi_n+p}} = \frac{1}{s^{\varpi_n+p+1}}\left(ps+p+1-\frac{s^3+s^2+s+1}{s(s^2-1)}\right) > 0.$$

Для доведення *властивості 6* достатньо довести наступні нерівності:

— при умові, що $c_1+c_2+\ldots+c_n+p$ — парне число:

$$\begin{cases} \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1\ldots c_n[p+1]c_{n+2}} - \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1\ldots c_n[p+1]} & < & 0, \\ \inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1\ldots c_npc_{n+2}} - \inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1\ldots c_np} & > & 0; \end{cases}$$

— при умові, що $c_1+c_2+\ldots+c_n+p$ — непарне число:

$$\begin{cases} \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1\ldots c_npc_{n+2}} - \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1\ldots c_np} & < & 0, \\ \inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1\ldots c_n[p+1]c_{n+2}} - \inf \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1\ldots c_n[p+1]} & > & 0. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$l_0(c_1,c_2,\ldots,c_n,p) = \begin{cases} -\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}, & \text{якщо } c_1+c_2+\ldots+c_n+p \text{ — парне;} \\ \frac{2}{s^2-1}, & \text{якщо } c_1+c_2+\ldots+c_n+p \text{ — непарне.} \end{cases}$$

$$l(c_1,c_2,\ldots,c_n,p) = \begin{cases} \frac{2}{s^2-1}, & \text{якщо } c_1+c_2+\ldots+c_n+p \text{ — парне;} \\ -\frac{s^2+1}{s(s^2-1)}, & \text{якщо } c_1+c_2+\ldots+c_n+p \text{ — непарне.} \end{cases}$$

Якщо $c_1+\ldots+c_n+p$ — парне, то $\sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1\ldots c_n[p+1]c_{n+2}} - \sup \Delta^{(-s,0)}_{c_1\ldots c_n[p+1]} =$

$$= g_n^{(-s)} + \frac{p+1}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+1}} + \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+1+c_{n+2}}} +$$

$$+\frac{l(c_1,\ldots,c_n,p+1,c_{n+2})}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+1+c_{n+2}}} - g_n^{(-s)} - \frac{p+1}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+1}} - \frac{l(c_1,\ldots,c_n,p+1)}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+1}} =$$

$$= -\frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p+1}}\left(\frac{c_{n+2}}{(-s)^{c}_{n+2}} + \frac{l(c_1,\ldots,c_n,p+1,c_{n+2})}{(-s)^{c}_{n+2}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p+1}}\left(\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{s^2+1}{s(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) < 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — парне;}\\ -\frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p+1}}\left(-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) < 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — непарне,}\end{cases}$$

оскільки

$$-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)} = \frac{(s^2+1)s^{c_{n+2}} + sc_{n+2} - (s^2c_{n+2}+2)s}{(s^2-1)s^{1+c_{n+2}}} \geqslant 0.$$

Аналогічно, $\inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1\ldots c_n p c_{n+2}} - \inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1\ldots c_n p} =$

$$= \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+c_{n+2}}} + \frac{l_0(c_1,c_2,\ldots,c_n,p,c_{n+2})}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+c_{n+2}}} - \frac{l_0(c_1,c_2,\ldots,c_n,p)}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{s^2+1}{s(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) > 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — парне;}\\ \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) > 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — непарне.}\end{cases}$$

Нехай $c_1+c_2+\ldots+c_n+p$ — непарне. Тоді $\sup\Delta^{(-s,0)}_{c_1\ldots c_n p c_{n+2}} - \sup\Delta^{(-s,0)}_{c_1\ldots c_n p} =$

$$= \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+c_{n+2}}} + \frac{l(c_1,\ldots,c_n,p,c_{n+2})}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+c_{n+2}}} - \frac{l(c_1,\ldots,c_n,p)}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p}} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{s^2+1}{s(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) < 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — парне;}\\ -\frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) < 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — непарне.}\end{cases}$$

Аналогічно, $\inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1\ldots c_n[p+1]c_{n+2}} - \inf\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_1\ldots c_n[p+1]} =$

$$= \frac{c_{n+2}}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+1+c_{n+2}}} + \frac{l_0(c_1,\ldots,c_n,p+1,c_{n+2})}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+1+c_{n+2}}} - \frac{l_0(c_1,\ldots,c_n,p+1)}{(-s)^{c_1+\ldots+c_n+p+1}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{s^2+1}{s(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) > 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — парне;}\\ \frac{1}{s^{c_1+\ldots+c_n+p}}\left(-\frac{c_{n+2}}{s^{c_{n+2}}} - \frac{2}{(s^2-1)s^{c_{n+2}}} + \frac{s^2+1}{s(s^2-1)}\right) > 0, & \text{якщо } c_{n+2} \text{ — непарне.}\end{cases}$$

Властивість 7 є наслідком властивості 6.

Властивість 8. З властивостей циліндрів досліджуваної множини випливає, що якщо $x_0 \in \mathbb{S}_{(-s,0)}$, то $x_0 \in \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1} \cap \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2} \cap \ldots \cap \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} \cap \ldots$, де $x_0 = \Delta^{-s}_{\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_1-1}\alpha_1\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_2-1}\alpha_2\ldots\underbrace{0\ldots0}_{\alpha_n-1}\alpha_n\ldots}$. Крім того,

$$x_0 \in \left[\inf \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1}; \sup \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1}\right] \cap \ldots \cap \left[\inf \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}; \sup \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right] \cap \ldots.$$

Як наслідок, x_0 належить системі відрізків

$$\left[\inf \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1}; \sup \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1}\right] \supset \ldots \supset \left[\inf \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}; \sup \Delta^{(-s,0)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}\right] \supset \ldots.$$

Тому, з аксіоми Кантора випливає, що $x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}$. □

Ніде не щільність $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ випливає із властивості 6 циліндрів $\Delta^{(-s,0)}_{c_1c_2\ldots c_n}$. *Рівність міри Лебега нулю та досконалість* цієї множини доводяться по аналогії з доведенням відповідних властивостей для множини $\mathbb{S}_{(s,0)}$.

Розглянемо фрактальні властивості $\mathbb{S}_{(-s,0)}$. Оскільки множина $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ обмежена і замкнена, то вона є компактом. Крім того

$$\mathbb{S}_{(-s,0)} = \bigcup_{i=1}^{s-1} \left[\left[\inf \Delta^{(-s,0)}_{i}; \sup \Delta^{(-s,0)}_{i}\right] \cap \mathbb{S}_{(-s,0)}\right],$$

$$\left[\left[\inf \Delta^{(-s,0)}_{i}; \sup \Delta^{(-s,0)}_{i}\right] \cap \mathbb{S}_{(-s,0)}\right] \overset{s^{-i}}{\sim} \mathbb{S}_{(-s,0)} \text{ для всіх } i = \overline{1, s-1}.$$

Із зазначеного вище та [56] випливає, що значення α_0 розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$ задовольняє рівняння

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0} + \left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0} + \ldots + \left(\frac{1}{s}\right)^{(s-1)\alpha_0} = 1.$$

Дослідимо тополого-метричні і фрактальні властивості множини S^-.

Циліндром $\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n}$ *з основою* $c_1c_2\ldots c_n$ *рангу* n називатимемо множину всіх можливих чисел з S^-, для яких справедливою є умова $\alpha_i = c_i$ для всіх $i = \overline{1,n}$, де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — фіксований набір чисел.

Очевидно, що

$$\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n} \subset \begin{cases} \left[\sigma_{2k} + \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots c_{2k}}}; \sigma_{2k} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots c_{2k}}}\right], & \text{якщо } n = 2k; \\ \left[\sigma_{2k+1} - \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots c_{2k+1}}}; \sigma_{2k+1} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots c_{2k+1}}}\right], & \text{якщо } n = 2k+1, \end{cases}$$

де $k \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_i}}, \ \inf S^- = \frac{-s^{s-1}+s-1}{s^s-1}, \ \sup S^- = \frac{-s^2+s+1}{s^s-1}.$$

Лема 3.4. *Справедливими є наступні властивості:*

1.
$$d(\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n}) = \frac{s^{s-1}-s^2+2}{(s^s-1)s^{c_1+c_2+\ldots+c_n}}.$$

2.
$$\frac{\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}}}{\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n}} = \frac{1}{s^{c_{n+1}}}.$$

3.
$$\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}} \subset \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n} \ \forall c_n \in A_0, \ n \in \mathbb{N}.$$

4. *Циліндри* $\Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1}, \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{n-1}2}, \ldots, \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[s-1]}$ *розташовані:*

— *«справа наліво», якщо n — парне. Тобто,*

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sup \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}[c_{2k}+1]} < \inf \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}c_{2k}},$$

— *«зліва направо», якщо n — непарне. Тобто,*

$$\forall k \in \mathbb{N} : \sup \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{2k}c_{2k+1}} < \inf \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_{2k}[c_{2k+1}+1]}.$$

Доведення. Перша та *друга* властивості випливають з означення циліндрів.

Для доведення *третьої* властивості потрібно розглянути випадки для парного та непарного n.

1. Нехай $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Тоді нерівність $\inf \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_nc_{n+1}} \geqslant \inf \Delta^-_{c_1c_2\ldots c_n}$ можна записати у вигляді:

$$\sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+\ldots+c_m}} - \frac{c_{2k+1}}{s^{c_1+\ldots+c_{2k+1}}} - \frac{\sup S^-}{s^{c_1+\ldots+c_{2k+1}}} \geqslant \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1+\ldots+c_m}} + \frac{\inf S^-}{s^{c_1+\ldots+c_{2k}}},$$

що еквівалентно $-c_{2k+1} - \sup S^- \geqslant s^{c_{2k+1}} \inf S^-$,

$$\frac{(s^2 - s - 1) + s^{c_{2k+1}}(s^{s-1} - s + 1) - c_{2k+1}(s^s - 1)}{s^s - 1} \geqslant 0.$$

Очевидно, що остання нерівність перетворюється в рівність при $c_{2k+1} = 1$.

Перевіримо виконання нерівності $\sup \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_n c_{n+1}} \leqslant \sup \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ для випадку парного n:

$$\sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1 + \ldots + c_m}} - \frac{c_{2k+1}}{s^{c_1 + \ldots + c_{2k+1}}} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1 + \ldots + c_{2k+1}}} \leqslant \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1 + \ldots + c_m}} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1 + \ldots + c_{2k}}},$$

$$-c_{2k+1} - \inf S^- \leqslant s^{c_{2k+1}} \sup S^-,$$

що еквівалентно

$$(1 + c_{2k+1} + s^{2 + c_{2k+1}} + s^{s-1}) - s - s^{1 + c_{2k+1}} - c_{2k+1} s^s - s^{c_{2k+1}} \leqslant 0.$$

Остання нерівність перетворюється в рівність при $c_{2k+1} = s - 1$.

2. Нехай $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Тоді нерівність $\inf \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_n c_{n+1}} \geqslant \inf \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ еквівалентна нерівності

$$\sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1 + \ldots + c_m}} + \frac{c_{2k+2}}{s^{c_1 + \ldots + c_{2k+2}}} + \frac{\inf S^-}{s^{c_1 + \ldots + c_{2k+2}}} \geqslant \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1 + \ldots + c_m}} - \frac{\sup S^-}{s^{c_1 + \ldots + c_{2k+1}}}.$$

В результаті отримаємо

$$(s - 1 - c_{2k+2}) - s^{c_{2k+2}}(s^2 - s - 1) + s^{s-1}(s c_{2k+2} - 1) \geqslant 0.$$

При $c_{2k+2} = s - 1$ остання нерівність перетворюється в рівність.

Аналогічно, для нерівності $\sup \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_n c_{n+1}} \leqslant \sup \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ отримаємо:

$$\sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1 + \ldots + c_m}} + \frac{c_{2k+2}}{s^{c_1 + \ldots + c_{2k+2}}} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1 + \ldots + c_{2k+2}}} \leqslant \sum_{m=1}^{2k+1} \frac{(-1)^m c_m}{s^{c_1 + \ldots + c_m}} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1 + \ldots + c_{2k+1}}},$$

$$\sup S^- + c_{2k+2}(s^s - 1) \leqslant -s^{c_{2k+2}} \inf S^-,$$

$$(s - s^2) + (1 - c_{2k+2}) + (s - 1)s^{c_{2k+2}} + s^{s-1}(s c_{2k+2} - s^{c_{2k+2}}) \leqslant 0,$$

що справджується для всіх можливих значень c_{2k+2} та $s > 2$ і перетворюється в рівність при $c_{2k+2} = 1$.

Перейдемо до доведення *четвертої* властивості про розташування циліндрів. Розглянемо різниці: $\sup \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_{2k-1}[c_{2k}+1]} - \inf \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_{2k-1} c_{2k}} =$

$$= \frac{c_{2k}+1}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}+1}} + \frac{\sup S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}+1}} - \frac{c_{2k}}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}}} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}}} =$$

$$= \frac{s^s(2+c_{2k}-sc_{2k}) + s(c_{2k}+2-2s) - c_{2k}}{s(s^s-1)s^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}}} < 0,$$

$$\sup \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_{2k} c_{2k+1}} - \inf \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_{2k}[c_{2k+1}+1]} = \frac{c_{2k+1}}{s^{c_1+\ldots+c_{2k}+c_{2k+1}}} - \frac{\inf S^-}{s^{c_1+\ldots+c_{2k}+c_{2k+1}}} -$$

$$- \frac{1+c_{2k+1}}{s^{1+c_1+c_2+\ldots+c_{2k}+c_{2k+1}}} + \frac{\sup S^-}{s^{1+c_1+c_2+\ldots+c_{2k}+c_{2k+1}}} =$$

$$= \frac{s^s(2+c_{2k+1}-sc_{2k+1}) + s(2-2s-c_{2k+1}) - c_{2k+1}}{(s^s-1)s^{1+c_1+c_2+\ldots+c_{2k}+c_{2k+1}}} < 0.$$

Лему доведено. □

Наслідок 3.1. *Для всіх* $c_n \in \{1, 2, \ldots, s-2\}$ *виконується умова*

$$\Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_{n-1} c_n} \cap \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_{n-1}[c_n+1]} = \varnothing.$$

Наслідок 3.2. *Інтервали виду*

$$\left(\sup \Delta^-_{c_1 \ldots c_{2k-1}}; \inf \Delta^-_{c_1 \ldots c_{2k-2}[c_{2k-1}+1]}\right), \quad \left(\sup \Delta^-_{c_1 \ldots c_{2k-1}[c_{2k}+1]}; \inf \Delta^-_{c_1 \ldots c_{2k-1} c_{2k}}\right),$$

де $k \in \mathbb{N}$*, є «дірками» множини* S^-*.*

Наслідок 3.3. *Для довільного* $x_0 \in S^-$ *виконується рівність*

$$x_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^-_{c_1 c_2 \ldots c_n}.$$

Доведення твердження про те, що множина S^- є континуальною, ніде не щільною, досконалою нуль-множиною Лебега та самоподібним фракталом проводиться по аналогії з доведеннями відповідних властивостей для множини $\mathbb{S}_{(-s,0)}$, але з врахуванням тверджень останньої леми, її наслідків та властивостей розкладів чисел в знакопочережний ряд Кантора.

Очевидно, що зазначені вище властивості множини $S_{(-s,u)}$ доводяться аналогічно. $\square$

3.2. Фрактальна розмірність довільної множини з одного класу самоподібних фракталів

Теорема 3.2. *Нехай E — множина, яка містить всі можливі числа з відрізка $[0;1]$ (або $[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}]$), в s-му (або нега-s-му) зображенні яких вживаються набори цифр лише з фіксованої множини $\tilde{\Sigma}=\{\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\ldots,\tilde{\sigma}_m\}$ наборів s-их цифр.*

Тоді розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(E)$ множини E задовольняє рівняння

$$N(\sigma_m^1)\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0}+\ldots+N(\sigma_m^k)\left(\frac{1}{s}\right)^{k\alpha_0}+\ldots+N(\sigma_m^l)\left(\frac{1}{s}\right)^{l\alpha_0}=1, \qquad (3.7)$$

де $N(\sigma_m^1)+N(\sigma_m^2)+\ldots+N(\sigma_m^l)=m$, $N(\sigma_m^k)$ — кількість k-цифрових ($k=\overline{1,l}$) наборів σ_m^k з множини $\tilde{\Sigma}$.

Доведення. Доведення проведемо для випадку s-го зображення. З доведенням для випадку нега-s-го зображення можна ознайомитись в [5$^{\text{a}}$].

Нехай маємо скінченну множину $\tilde{\Sigma}=\{\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\ldots,\tilde{\sigma}_m\}$ фіксованих наборів s-их цифр, за допомогою яких можна подати у формі s-го зображення довільне число з деякої множини E.

Очевидно, існують набори σ',σ'' з множини $\tilde{\Sigma}$ такі, що $\Delta^s_{\sigma'\sigma'\ldots}=\inf E$, $\Delta^s_{\sigma''\sigma''\ldots}=\sup E$.

Циліндром $\Delta^{(s,E)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}$ рангу n з основою $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ множини E називатимемо таку підмножину множини E, всі елементи якої мають в своєму s-му зображенні n перших фіксованих набори $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$.

Очевидно, що

$$d(\Delta^{(s,E)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n})=\frac{1}{s^{N(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n)}}d(E),$$

де $N(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n)$ — кількість s-их цифр в наборі $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$.

Оскільки E — множина, на елементи якої накладається обмеження на вживання цифр в своєму зображенні, $E \subset [\inf E; \sup E]$, а також

$$\frac{d(\Delta^{(s,E)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\sigma_{n+1}})}{d(\Delta^{(s,E)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n})} = \frac{s^{N(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n)}}{s^{N(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n+\sigma_{n+1})}} = \frac{1}{s^{N(\sigma_{n+1})}},$$

$E = [I_{\sigma_1} \cap E] \cup [I_{\sigma_2} \cap E] \cup \ldots \cup [I_{\sigma_m} \cap E]$, де $I_{\sigma_i} = [\inf \Delta^{(s,E)}_{\sigma_i}; \sup \Delta^{(s,E)}_{\sigma_i}]$ та $i = 1, 2, \ldots, m$, тому

$$[I_{\sigma^1_m} \cap E] \overset{s^{-1}}{\sim} E, [I_{\sigma^2_m} \cap S] \overset{s^{-2}}{\sim} E, [I_{\sigma^3_m} \cap E] \overset{s^{-3}}{\sim} E, \ldots, [I_{\sigma^l_m} \cap E] \overset{s^{-l}}{\sim} E.$$

Врахувавши рівняння (див. [56]), що його задовольняє значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича самоподібного фрактала, та існування у множині $\tilde{\Sigma}$ кількох наборів з однаковою кількістю s-их цифр, отримаємо рівняння (3.7). □

З останньої теореми випливає наступне твердження.

Теорема 3.3. *Множина $\tilde{S}$ є: континуальною, ніде не щільною, досконалою нуль-множиною Лебега та самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(\tilde{S})$ якого задовольняє рівняння*

$$\left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha_0(\tilde{S})} + (s-1)\left(\left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0(\tilde{S})} + \left(\frac{1}{s}\right)^{3\alpha_0(\tilde{S})} + \ldots + \left(\frac{1}{s}\right)^{(s-1)\alpha_0(\tilde{S})}\right) = 1.$$

Доведення. Справедливість твердження про те, що множина $\tilde{S}$ є континуальною, ніде не щільною, досконалою нуль-множиною Лебега, випливає з фрактальних властивостей цієї множини. Останні, в свою чергу, випливають з теореми 3.2.

Справді, в s-му зображенні елемента з множини $\tilde{S}$ дозволено вживати такі набори s-их цифр:

$$02, 003, \ldots, \underbrace{0\ldots00}_{s-2}(s-1);$$

$$1, 12, 113, \ldots, \underbrace{1\ldots 11}_{s-2}(s-1);$$

$$223, 2224, \ldots, \underbrace{2\ldots 22}_{s-2}(s-1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u2, uu3, \ldots, \underbrace{u\ldots uu}_{u-2}(u-1), \underbrace{u\ldots uu}_{u}(u+1), \ldots, \underbrace{u\ldots uu}_{s-2}(s-1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(s-1)2, (s-1)(s-1)3, \ldots, \underbrace{(s-1)\ldots(s-1)(s-1)}_{s-3}(s-2).$$

Загалом $s^2 - 3s + 3$ набори, з них 1 — одноцифровий, а всі решта містять від двох до $s-1$ цифр (їх по $s-1$). $\square$

3.3. Самоподібні фрактали, означені у термінах нега-s-их рядів Кантора

З теореми 3.2 випливають наступні твердження.

Теорема 3.4. *Нехай $s > 1$ — фіксоване натуральне число та для всіх $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_{m_1+m_2+\ldots+m_n} \neq 0$ і $m_n \in \{3, 5, 7, \ldots, 2i+1, \ldots\}$.*

Множина $M_{(-D,s)} \equiv \left\{ x : x = \Delta^{-s}_{\underbrace{0\ldots0}_{m_1-1}\alpha_{m_1}\underbrace{0\ldots0}_{m_2-1}\alpha_{m_1+m_2}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{m_n-1}\alpha_{m_1+m_2+\ldots+m_n}\ldots} \right\}$

є N-самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якого дорівнює

$$\log_s \left(\sqrt[3]{\frac{s-1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{27(s-1)^2-4}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{s-1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{27(s-1)^2-4}{3}}} \right).$$

Доведення. З (2.5) та теореми 3.2 випливає, що розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини $M_{(-D,s)}$ при $m_n \in \{3, 5, 7, \ldots, 2i+1, \ldots\}$, $\alpha_{m_1+\ldots+m_n} \neq$ $\neq 0$ та фіксованому $s > 1$ задовольняє рівняння

$$(s-1)\left(\frac{1}{s}\right)^{3\alpha_0} + (s-1)\left(\frac{1}{s}\right)^{5\alpha_0} + \ldots + (s-1)\left(\frac{1}{s}\right)^{(2i+1)\alpha_0} + \ldots = 1,$$

$i = 1, 2, \dots$, яке еквівалентне рівнянню $s^{3\alpha_0} - s^{\alpha_0} - (s-1) = 0$. За формулами Кардано отримаємо відповідний результат. $\square$

Висновки до розділу 3

У розділі 3 здійснено детальний тополого-метричний і фрактальний аналіз нових множин, в поданні елементів яких рядами Кантора спеціального виду накладається певна функціональна залежність на вживання символів (цифр). Зокрема:

- доведено, що досліджувані множини є континуальними, досконалими, ніде не щільними нуль-множинами Лебега;
- вивчено властивості циліндрів досліджуваних множин;
- показано, що усі досліджувані множини є самоподібними фракталами;
- для кожної з досліджуваних множин або зазначено формулу для обчислення значення фрактальної розмірності Хаусдорфа-Безиковича, або вказано відповідне рівняння, що його задовольняє значення фрактальної розмірності множини;
- вивчено фрактальні властивості довільної множини, яка містить всі можливі числа з відрізка $[0; 1]$ (або $[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}]$), в s-му (або нега-s-му) зображенні яких вживаються набори цифр лише з фіксованої множини $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \dots, \tilde{\sigma}_m\}$ наборів s-их цифр.

Основні результати цього розділу опубліковані у роботах [1ª, 2ª, 5ª] і тезах наукових конференцій [17ª, 18ª, 20ª], а також апробовані в доповідях на семінарах та звітних конференціях.

Дослідження, проведені у розділі 3, є новими.

РОЗДІЛ 4
ФУНКЦІЇ ЗІ СКЛАДНОЮ ЛОКАЛЬНОЮ БУДОВОЮ

Даний розділ[1] присвячено дослідженню функцій зі складною локальною будовою. Вивчаються функції, задані перетворювачами цифр або комбінацій цифр зображення аргументу, та, аргумент і значення яких визначені у термінах s-го або нега-s-го зображень. Досліджуються функції, аргумент яких визначений у термінах зображення дійсних чисел рядами Кантора, і, аналітичне задання яких є узагальненням аналітичного задання класичної функції Салема.

4.1. Приклад функції зі складною локальною будовою

У даному пункті вводиться функція[2] (аргумент і значення якої визначені у термінах трійкового зображення), значення якої отримується із значення аргументу заміною цифри 2 на 1, 1 на 2, а 0 — інваріант. Тобто, досліджувана функція «зберігає цифру 0». Дослідженню властивостей цілого класу функцій, побудованих подібним чином, буде присвячено наступний пункт дисертації.

---

[1] Дослідження даного розділу, що стосуються знакододатних і знакопочережних рядів Кантора, увійшли до переліку найбільш вагомих результатів фундаментальних і прикладних досліджень Інституту математики НАН України за 2014 рік.

[2] Така функція є одним із найпростіших серед нині відомих прикладів функцій зі складною локальною будовою. Відповідний результат було представлено у 2012 році в [21$^{\mathrm{a}}$], а дослідження дали поштовх до моделювання дуже простим методом, а саме — заміною цифри (комбінацій цифр) на цифру (комбінацію цифр) в зображенні аргументу, цілого класу функцій зі складною локальною будовою. Відповідні дослідження проводились автором у 2012–першому півріччі 2013 рр. [3$^{\mathrm{a}}$, 22$^{\mathrm{a}}$, 23$^{\mathrm{a}}$]. З основними та додатковими публікаціями відповідних досліджень можна ознайомитись за посиланням www.researchgate.net/profile/Symon_Serbenyuk/publications

4.1.1. Означення. Домовившись у трійковому зображенні не розглядати трійково-раціональні числа, зображення яких містить період (2) (крім числа 1), дослідимо функцію f, яка на відрізку $[0;1]$ визначається рівністю:

$$f(x) = f\left(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^3_{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_n)\ldots}, \tag{4.1}$$

де $\varphi(i) = \frac{-3i^2+7i}{2}$, $i \in \{0,1,2\}$. Вивчимо диференціальні, інтегральні, фрактальні та інші властивості функції f.

Означимо додаткові функції, потрібні для дослідження деяких властивостей функції f.

Нехай i, j, k — цифри трійкової системи числення, причому попарно різні. Означимо функцію $\varphi_{ij}(\alpha)$, визначену на алфавіті трійкової системи числення наступним чином:

	i	j	k
$\varphi_{ij}(\alpha)$	0	0	1

Під функцією f_{ij} розумітимемо функцію, яка визначається рівністю:

$$f_{ij}(x) = f_{ij}\left(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^3_{\varphi_{ij}(\alpha_1)\varphi_{ij}(\alpha_2)\ldots\varphi_{ij}(\alpha_n)\ldots}.$$

Зауваження 4.1. З означення функції f_{ij} цілком очевидно, що $f_{01} = f_{10}$, $f_{02} = f_{20}$, $f_{12} = f_{21}$. Тому надалі використовуватимемо лише позначення f_{01}, f_{02}, f_{12}.

Лема 4.1. *Функція f може бути визначена одною із трьох еквівалентних між собою рівностей:*

$$f(x) = 2x - 3f_{01}(x), \tag{4.2}$$

де $f_{01}\left(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^3_{\varphi_{01}(\alpha_1)\varphi_{01}(\alpha_2)\ldots\varphi_{01}(\alpha_n)\ldots}$, $\varphi_{01}(i) = \frac{i^2-i}{2}$, $i \in \{0,1,2\}$;

$$f(x) = \frac{3}{2} - x - 3f_{12}(x), \tag{4.3}$$

де $f_{12}\left(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^3_{\varphi_{12}(\alpha_1)\varphi_{12}(\alpha_2)\ldots\varphi_{12}(\alpha_n)\ldots}$, $\varphi_{12}(i) = \frac{i^2-3i+2}{2}$, $i \in \{0,1,2\}$;

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}f_{02}(x),$$

де $f_{02}\left(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^3_{\varphi_{02}(\alpha_1)\varphi_{02}(\alpha_2)\ldots\varphi_{02}(\alpha_n)\ldots}$, $\varphi_{02}(i) = -i^2 + 2i$, $i \in \{0, 1, 2\}$.

Доведення. Очевидно, що кожне число $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ можна представити у вигляді суми двох чисел $\Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ та $\Delta^3_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots}$ таких, що $\beta_n \in \{0, 1\}$ та $\gamma_n \in \{0, 1\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Причому, очевидно, що $\alpha_n = 2$ тоді і тільки тоді, коли $\beta_n = \gamma_n = 1$.

Легко показати, що на множині $C[3, N_1^0] = \{x : x = \Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in \{0, 1\}\}$ досліджувана функція має вигляд $f(x) = 2x$. Цей факт, насамперед, випливає з означення функції f.

Проте, $1 = \varphi(2) \neq \varphi(1) + \varphi(1) = 4$. Саме тому $\varphi(2) = \varphi(1) + \varphi(1) - 3$. Таким чином,

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) - 3\Delta^3_{\underbrace{000\ldots00}_{k_1-1}1\underbrace{000\ldots00}_{k_2-k_1-1}1\ldots\underbrace{000\ldots00}_{k_n-(k_1+\ldots+k_{n-1})-1}1\ldots} =$$

$$= 2x - 3\Delta^3_{\underbrace{000\ldots00}_{k_1-1}1\underbrace{000\ldots00}_{k_2-k_1-1}1\ldots\underbrace{000\ldots00}_{k_n-(k_1+\ldots+k_{n-1})-1}1\ldots}, \text{ де}$$

$x = \Delta^3_{e_1e_2\ldots e_{k_1-1}2e_{k_1+1}\ldots e_{k_2-1}2e_{k_2+1}\ldots e_{k_n-1}2e_{k_n+1}\ldots}$, $e_k \in \{0, 1\}$. Тобто, k_n — позиція n-ої двійки в зображенні числа x. Останнє задання функції f еквівалентне заданню $f(x) = 2x - 3f_{01}(x)$, де $f_{01}(x) = f_{01}\left(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^3_{\varphi_{01}(\alpha_1)\varphi_{01}(\alpha_2)\ldots\varphi_{01}(\alpha_n)\ldots}$, $\varphi_{01}(i) = \frac{i^2-i}{2}$ при $i \in N_2^0 = \{0, 1, 2\}$. Тобто,

$$\varphi_{01}(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_i \in \{0, 1\}; \\ 1, & \text{якщо } \alpha_i = 2. \end{cases}$$

Легко показати, що $f_{01}(x) = x - \Delta^3_{111\ldots} + f_{12}(x) = x - \frac{1}{2} + f_{12}(x)$, де $f_{12}(x) = f_{12}\left(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^3_{\varphi_{12}(\alpha_1)\varphi_{12}(\alpha_2)\ldots\varphi_{12}(\alpha_n)\ldots}$, $\varphi_{12}(i) = \frac{i^2-3i+2}{2}$, $i \in N_2^0$. Таким чином,

$$f(x) = 2x - 3f_{01}(x) = 2x - 3\left(x - \frac{1}{2} + f_{12}(x)\right) = \frac{3}{2} - x - 3f_{12}(x).$$

Варто зазначити, що для будь-якого $x \in [0; 1]$:

$$f_{01}(x) + f_{12}(x) + f_{02}(x) = \Delta^3_{111\ldots} = \frac{1}{2}.$$

Тому з останньої рівності та суми (4.2) і (4.3) випливає, що $2f(x) = x + \frac{3}{2} - 3(f_{01}(x) + f_{12}(x)) = x + \frac{3}{2} - 3(\frac{1}{2} - f_{02}(x)) = x + 3f_{02}(x)$. □

4.1.2. Основні властивості.

Лема 4.2. *Функції $f, f_{01}, f_{02}, f_{12}$ володіють наступними властивостями:*

1. $[0;1] \xrightarrow{f} \left([0;1] \setminus \{\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 111\ldots}\}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$*;*
2. *єдиною інваріантною точкою функції f є точка $x_0 = 0$;*
3. *функція f не є бієктивним відображенням на деякій зчисленній підмножині точок відрізка $[0;1]$;*
4. *для кожного $x \in [0;1]$:*

$$f(x) - f(1-x) = f_{01}(x) - f_{12}(x), \tag{4.4}$$

$$f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2} + 3f_{02}(x), \tag{4.5}$$

$$f_{01}(x) + f_{02}(x) + f_{12}(x) = \frac{1}{2}, \tag{4.6}$$

$$2f_{01}(x) + f_{02}(x) = x, \tag{4.7}$$

$$f_{01}(x) - f_{12}(x) = x - \frac{1}{2}; \tag{4.8}$$

5. *функція f є ні зростаючою, ні спадною. Зокрема, на множині*

$$\{x : x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 = \Delta^3_{c_1\ldots c_{n_0} 1\alpha_{n_0+2}\alpha_{n_0+3}\ldots} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1\ldots c_{n_0} 2\beta_{n_0+2}\beta_{n_0+3}\ldots})\},$$

де $n_0 \in \mathbb{Z}_0$, $c_1, c_2, \ldots, c_{n_0}$ — фіксований набір трійкових цифр, α_{n_0+i} і β_{n_0+i} належать $\{0,1,2\}$, $i \in \mathbb{N}$, f є спадною, а на множині

$$\{x : x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 = \Delta^3_{c_1\ldots c_{n_0} 0\alpha_{n_0+2}\alpha_{n_0+3}\ldots} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1\ldots c_{n_0} r\beta_{n_0+2}\beta_{n_0+3}\ldots})\},$$

де $r \in \{1,2\}$, — зростаючою.

Доведення. Перша та *друга властивості* функції f випливають з означення (4.1).

Доведемо третю властивість. Умова $f(x_1) = f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$ виконується для всіх x, що належать таким множинам:

$$G_1 = \{x : x_1 = \Delta^3_{c_1c_2\ldots c_{n_0}2000\ldots} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1c_2\ldots c_{n_0}0111\ldots}\},$$
$$G_2 = \{x : x_1 = \Delta^3_{c_1c_2\ldots c_{n_0}1000\ldots} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1c_2\ldots c_{n_0}2111\ldots}\},$$
$$G_3 = \{x : x_1 = \Delta^3_{c_1c_2\ldots c_{n_0}0111\ldots} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1c_2\ldots c_{n_0}2000\ldots}\},$$
$$G_4 = \{x : x_1 = \Delta^3_{c_1c_2\ldots c_{n_0}2111\ldots} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1c_2\ldots c_{n_0}1000\ldots}\},$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_{n_0}$ — фіксовані трійкові цифри, $n_0 \in \mathbb{Z}_0$. Це випливає з наступних міркувань.

Нехай маємо $x_1 = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ та $x_2 = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ такі, що $x_1 \neq x_2$. Знайдемо множину $G = \{x : f(x_1) = f(x_2), x_1 \neq x_2\}$.

Нехай $f(x_1) = f(x_2) = y_{1,2}$ — трійково-ірраціональне число. Тоді $\varphi(\alpha_n) = \varphi(\beta_n)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, серед яких існує хоча б один номер $n_0 > 0$, що $\alpha_{n_0} \neq \beta_{n_0}$. Проте, з останньої нерівності та означення (4.1) випливає, що $\varphi(\alpha_{n_0}) \neq \varphi(\beta_{n_0})$. Таким чином, отримано протиріччя. Множина трійково-ірраціональних чисел не належить множині G.

Нехай $f(x_1) = f(x_2) = y_{1,2}$ — трійково-раціональне число. Тоді існує таке $n_0 \in \mathbb{Z}_0$, що $y_{1,2} = \Delta^3_{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n_0})\varphi(\alpha_{n_0+1})(0)} = \Delta^3_{\varphi(\beta_1)\varphi(\beta_2)\ldots\varphi(\beta_{n_0})[\varphi(\alpha_{n_0+1})-1](2)}$ або $y_{1,2} = \Delta^3_{\varphi(\beta_1)\varphi(\beta_2)\ldots\varphi(\beta_{n_0})\varphi(\beta_{n_0+1})(0)} = \Delta^3_{\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_{n_0})(\varphi(\beta_{n_0+1})-1)(2)}$. Тобто,

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases}
\varphi(\alpha_{n_0+2}) = \varphi(\alpha_{n_0+3}) = \ldots = 0, \\
\varphi(\beta_{n_0+2}) = \varphi(\beta_{n_0+3}) = \ldots = 2, \\
\qquad\qquad \varphi(\beta_{n_0+1}) = \varphi(\alpha_{n_0+1}) - 1.
\end{cases} \\
\begin{cases}
\varphi(\beta_{n_0+2}) = \varphi(\beta_{n_0+3}) = \ldots = 0, \\
\varphi(\alpha_{n_0+2}) = \varphi(\alpha_{n_0+3}) = \ldots = 2, \\
\qquad\qquad \varphi(\alpha_{n_0+1}) = \varphi(\beta_{n_0+1}) - 1,
\end{cases}
\end{array}\right.$$

причому $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\beta_1), \varphi(\alpha_2) = \varphi(\beta_2), \ldots, \varphi(\alpha_{n_0}) = \varphi(\beta_{n_0})$. Звідси,

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \alpha_{n_0+2} = \alpha_{n_0+3} = \ldots = 0, \\ \beta_{n_0+2} = \beta_{n_0+3} = \ldots = 1; \\ \qquad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \alpha_{n_0+1} = 2, \\ \beta_{n_0+1} = 0; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \alpha_{n_0+1} = 1, \\ \beta_{n_0+1} = 2; \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \alpha_{n_0+2} = \alpha_{n_0+3} = \ldots = 1, \\ \beta_{n_0+2} = \beta_{n_0+3} = \ldots = 0; \\ \qquad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \alpha_{n_0+1} = 0, \\ \beta_{n_0+1} = 2; \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \alpha_{n_0+1} = 2, \\ \beta_{n_0+1} = 1; \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Множина $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$ є зчисленною як підмножина раціональних чисел.

Доведемо *властивість* (4.4). З означення функції f відомо, що $\varphi(i) = \frac{-3i^2+7i}{2}$, $i \in \{0, 1, 2\}$ та $1 = \Delta^3_{222\ldots}$. Тому розглянемо різницю

$$\varphi(i) - \varphi(2-i) = \frac{-3i^2 + 7i}{2} - \frac{-3(2-i)^2 + 7(2-i)}{2} =$$
$$= \frac{-3i^2 + 7i + 3(4 - 4i + i^2) - 7(2-i)}{2} = \frac{2i-2}{2} = i - 1.$$

Аналогічно, з означень функцій f_{01} і f_{12} випливає, що

$$\varphi_{01}(i) - \varphi_{12}(i) = \frac{i^2 - i}{2} - \frac{i^2 - 3i + 2}{2} = \frac{2i-2}{2} = i - 1.$$

Властивість (4.5) доводиться по аналогії з доведенням властивості (4.4):

$$\varphi(i) + \varphi(2-i) = \frac{-3i^2 + 7i}{2} + \frac{-3(2-i)^2 + 7(2-i)}{2} =$$

$$= \frac{-3i^2 + 7i - 3(4 - 4i + i^2) + 14 - 7i}{2} = \frac{-6i^2 + 12i + 2}{2} =$$
$$= -3i^2 + 6i + 1 = 1 - 3(-i^2 + 2i) = \frac{1}{2} + 3\varphi_{02}(i).$$

Властивості (4.6) *та* (4.7) випливають з означень функцій f_{01}, f_{02}, f_{12}.

Для доведення властивості (4.8) скористаємось означенням функції f. Зокрема, від рівності (4.2) віднімемо рівність (4.3) та отриману різницю поділимо на 3. В результаті отримаємо рівність, еквівалентну шуканій рівності.

Немонотонність. Нехай $x_1 = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $x_2 = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$. У нашому випадку функція f є спадною, якщо існує таке $n_0 \in \mathbb{Z}_0$, що $\varphi(\alpha_{n_0+1}) > > \varphi(\beta_{n_0+1})$ при $\alpha_{n_0+1} < \beta_{n_0+1}$ і $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{n_0} = \beta_{n_0}$. Тому з означення функції f випливає, що $\alpha_{n_0+1} = 1$ і $\beta_{n_0+1} = 2$. А отже, множиною, на якій досліджувана функція є спадною, буде множина виду

$$\{x : x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 = \Delta^3_{c_1\ldots c_{n_0}1\alpha_{n_0+2}\alpha_{n_0+3}\ldots} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1\ldots c_{n_0}2\beta_{n_0+2}\beta_{n_0+3}\ldots})\},$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_{n_0}$ — фіксований набір трійкових цифр.

Функція f є зростаючою, якщо існує $n_0 \in \mathbb{Z}_0$, що $\varphi(\alpha_{n_0+1}) < \varphi(\beta_{n_0+1})$ при $\alpha_{n_0+1} < \beta_{n_0+1}$ і $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{n_0} = \beta_{n_0}$. Тому, провівши аналогічні міркування, отримаємо множину зростання функції

$$\{x : x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 = \Delta^3_{c_1\ldots c_{n_0}0\alpha_{n_0+2}\alpha_{n_0+3}\ldots} \wedge x_2 = \Delta^3_{c_1\ldots c_{n_0}r\beta_{n_0+2}\beta_{n_0+3}\ldots})\},$$

де $r \in \{1, 2\}$. □

Лема 4.3. *Функція f задовольняє функціональне рівняння*

$$f(x) - f(1 - x) = x - \frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

Доведення. Властивість (4.9) випливає з (4.4) та (4.8). □

Знайдемо значення фрактальної розмірності Хаусдорфа-Безиковича всіх рівнів функцій f_{01}, f_{02}, f_{12}.

Теорема 4.1. *Якщо в трійковому зображенні числа* y_0 *є хоча б одна цифра* 2, *то* $f_{ij}^{-1}(y_0) = \varnothing$.

Якщо $y_0 = 0$ *або* y_0 *— трійково-раціональне число з множини* $C[3, \{0, 1\}]$, *то* $\alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0)) = \log_3 2$.

Якщо y_0 *— трійково-ірраціональне число з множини* $C[3, \{0, 1\}]$, *то* $0 \leqslant \alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0)) \leqslant \log_3 2$.

Доведення. З означення функції f_{ij} очевидно, що якщо в трійковому зображенні числа y_0 є хоча б одна цифра 2, то $f_{ij}^{-1}(y_0) = \varnothing$. Тобто, множиною значень функції f_{ij} є множина

$$E_1 = \{x : x = \Delta^3_{e_1 e_2 \ldots e_n \ldots}, \ e_n \in \{0, 1\}\} = C[3, \{0, 1\}].$$

Якщо $y_0 = 0$, то множиною прообразів є множина канторівського типу, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\log_3 2$, що випливає з означень функцій f_{01}, f_{02}, f_{12}. Множинами прообразів нуля для цих функцій, відповідно, будуть множини: $E_3 = \{x : x = \Delta^3_{v_1 v_2 \ldots v_n \ldots}, \ v_n \in \{1, 2\}\}$, $E_2 = \{x : x = \Delta^3_{u_1 u_2 \ldots u_n \ldots}, u_n \in \{0, 2\}\}$, E_1.

Нехай y_0 — трійково-раціональне число з E_1. Тобто,

$$y_0 = \frac{1}{3^{l_1}} + \frac{1}{3^{l_2}} + \ldots + \frac{1}{3^{l_{n_0}}} + \frac{0}{3^{l_{n_0}+1}} + \frac{0}{3^{l_{n_0}+2}} + \ldots.$$

Тоді множиною прообразів $f_{01}^{-1}(y_0)$, $f_{02}^{-1}(y_0)$, $f_{12}^{-1}(y_0)$ будуть всі раціональні числа з відрізка $[0; 1]$, трійкове зображення яких має період з використанням цифр $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$ відповідно, а також ірраціональні числа, у трійковому зображенні яких, після фіксованого номеру n_0 вживаються лише цифри з відповідної двоелементної множини цифр.

Легко показати, що розмірність Хаусдорфа-Безиковича такої множини прообразів фіксованого трійково-раціонального елемента y_0 з множини значень однієї з функцій $f_{01}(y_0)$, $f_{02}(y_0)$, $f_{12}(y_0)$, дорівнює $\log_3 2$.

Доведення проведемо, наприклад, для функції $f_{01}(x)$. Отож,

$$f_{01}^{-1}(y_0) = \left\{ x : x = a_{l_{n_0}} + \frac{1}{3^{l_{n_0}}} \left(\frac{e_{l_{n_0}+1}}{3} + \frac{e_{l_{n_0}+2}}{3^2} + \ldots + \frac{e_{l_{n_0}+m}}{3^m} + \ldots \right) \right\} =$$

$= \left\{x : x = a_{l_{n_0}} + \frac{1}{3^{l_{n_0}}}z, z \in E_1\right\}$, де $a_{l_n} = \Delta^3_{e_1\ldots e_{l_1-1}2e_{l_1+1}\ldots e_{l_2-1}2e_{l_2+1}\ldots e_{l_{n_0}-1}200\ldots}$, n_0 — фіксоване число з множини додатних цілих чисел, $e_{l_n} \in \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки n_0 — фіксоване число, яке залежить лише від y_0, то $\alpha_0(f_{01}^{-1}(y_0)) = \alpha_0(E_1) = \log_3 2$. Аналогічно можна провести доведення і для інших двох функцій.

Нехай y_0 — трійково-ірраціональне число з E_1. Тобто,

$$y_0 = \frac{1}{3^{l_1}} + \frac{1}{3^{l_2}} + \ldots + \frac{1}{3^{l_n}} + \ldots.$$

Тоді $f_{ij}^{-1}(y_0) = \{x : x = \widehat{\Delta}^{l_1 l_2 \ldots l_n \ldots}_{kk\ldots k\ldots}, l_n \in \mathbb{N}\}$, де $\widehat{\Delta}^{l_1 l_2 \ldots l_n \ldots}_{kk\ldots k\ldots}$ — число, в трійковому зображенні якого на позиціях $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$, знаходиться цифра k, а на інших позиціях в зображенні — лише цифри з множини $\{i, j\}$.

Слід зауважити, що натуральні числа $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ — фіксовані і залежать від числа y_0 такого, що $y_0 = f_{ij}(x_0)$. Тобто, маємо задану монотонно зростаючу послідовність натуральних чисел (l_n). Тоді, в залежності від частоти цифри 1 в трійковому зображенні числа y_0, отримаємо $0 \leqslant \alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0)) \leqslant \log_3 2$. Справді, оскільки

$$\widehat{\Delta}^{l_1 l_2 \ldots l_n \ldots}_{kk\ldots k\ldots} = \Delta^3_{\underbrace{00\ldots00}_{l_1-1}k\underbrace{000\ldots000}_{l_2-l_1-1}k\ldots} + \widehat{\Delta}^{l_1 l_2 \ldots l_n \ldots}_{00\ldots0\ldots}, \quad \text{де}$$

$\Delta^3_{\underbrace{00\ldots00}_{l_1-1}k\underbrace{000\ldots000}_{l_2-l_1-1}k\ldots}$ — фіксоване число, яке залежить тільки від y_0, а $\widehat{\Delta}^{l_1 l_2 \ldots l_n \ldots}_{00\ldots0\ldots}$ — підмножина множини $C[3, \{i, j\}]$ (при $k \neq 0$), причому для $n \to \infty$ виконуються умови:

$$\alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0)) \to 0 \quad \text{при} \quad \frac{n}{l_n} \to 1,$$

$$\alpha_0(f_{ij}^{-1}(y_0)) \to \log_3 2 \quad \text{при} \quad \frac{n}{l_n} \to 0.$$

Останні два рядки справедливі і при $k = 0$. □

Теорема 4.2. *Функція f є неперервною в трійково-ірраціональних точках, а трійково-раціональні точки є точками неусувних розривів першого роду (точками стрибків функції). Причому, трійково-раціональна точка* $x_0 = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n000...}$ *є точкою стрибку функції* $\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$ *вгору при* $\alpha_n = 1$ *та* $\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$ *вниз при* $\alpha_n = 2$.

Функція f є ніде недиференційовною, інтеграл Лебега від функції f дорівнює $\frac{1}{2}$, *а розмірність Хаусдорфа-Безиковича графіка дорівнює* 1.

Остання теорема наводиться без доведення[3], оскільки доведення відповідних властивостей наведені в пункті 4.2 для довільної функції, що належить класу функцій, змодельованих подібним чином.

4.1.3. Деякі подібні за властивостями функції.

В термінах трійкового зображення дійсних чисел можна означити $m = 3! = 6$ функцій f_m, що визначаються на відрізку $[0;1]$ наступним чином:

$$f_m(x) = f_m\left(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}\right) = \Delta^3_{\varphi_m(\alpha_1)\varphi_m(\alpha_2)...\varphi_m(\alpha_n)...},$$

де функція $\varphi_m(\alpha_n)$, визначена на алфавіті трійкової системи числення, для кожної з функцій $f_m, m = \overline{1,6}$, задається з наступної таблиці.

	0	1	2
$\varphi_1(\alpha_n)$	0	1	2
$\varphi_2(\alpha_n)$	0	2	1
$\varphi_3(\alpha_n)$	1	0	2
$\varphi_4(\alpha_n)$	1	2	0
$\varphi_5(\alpha_n)$	2	0	1
$\varphi_6(\alpha_n)$	2	1	0

Очевидно, що функція $f_1(x)$ є функцією $y = x$, а функція $f_6(x)$ — функцією $y = 1 - x$.

---

[3] З доведенням теореми 4.2 можна ознайомитись в статті [3ᵃ].

Лема 4.4. *Довільна функція* f_m *визначається за допомогою функцій* f_{ij} *наступною рівністю:* $f_m = a_m^{(ij)}x + b_m^{(ij)} + c_m^{(ij)}f_{ij}(x)$, *де* $a_m^{(ij)}, b_m^{(ij)}, c_m^{(ij)} \in \mathbb{Q}$.

Теорема 4.3. *Довільна функція* f_m, *відмінна від функцій* $y = x$, $y = 1 - x$, *володіє наступними властивостями: 1) майже скрізь неперервна; 2) ніде недиференційовна; 3) розмірність Хаусдорфа-Безиковича графіка дорівнює* 1*; 4) інтегровна за Лебегом, причому, інтеграл Лебега дорівнює* $\frac{1}{2}$.

4.2. Один клас функцій зі складною локальною структурою, визначених перетворювачами цифр

4.2.1. Коректність означення функцій з досліджуваного класу функцій.

Нехай s — фіксоване натуральне число, більше 1. Позначення $x = \Delta^{\pm s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ означає, що $x = \Delta^{s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ або $x = \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, $\alpha_n \in A$.

Нехай Λ_s — клас функцій типу

$$f : x = \Delta^{\pm s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \to \Delta^{\pm s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots} = f(x) = y, \tag{4.10}$$

де $\left(\beta_{km+1}, \beta_{km+2}, \ldots, \beta_{(m+1)k}\right) = \theta\left(\alpha_{km+1}, \alpha_{km+2}, \ldots, \alpha_{(m+1)k}\right)$, для конкретної функції f число k — фіксоване натуральне, $m = 0, 1, 2, \ldots$, а також $\theta(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$ — деяка функція k змінних (причому, взаємно однозначна відповідність), областю визначення і множиною значень якої є множина

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k}.$$

Тобто, для фіксованого числа $s > 1$ кожній комбінації $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$ з k s-их чи нега-s-их цифр (залежно від зображення, в термінах якого визначений аргумент функції) ставиться у відповідність єдина комбінація $\theta(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$ з k s-их чи нега-s-их цифр (залежно від зображення, в термінах якого визначене значення функції) і навпаки, комбінації $\theta(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k)$ ставиться у відповідність єдина комбінація $(\gamma_1^{'}, \gamma_2^{'}, \ldots, \gamma_k^{'})$, яка може й не співпадати з $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k)$. Функція θ на множині A^k є бієкцією. Очевидно, що довільна функція $f \in \Lambda_s$ є однією з функцій:

$$f_k^s, \quad f_+, \quad f_+^{-1}, \quad f_+ \circ f_k^s, \quad f_k^s \circ f_+^{-1}, \quad f_+ \circ f_k^s \circ f_+^{-1}, \text{ де}$$

$$f_k^s \left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}\right) = \Delta^s_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots}, \tag{4.11}$$

$\left(\beta_{km+1}, \beta_{km+2}, \dots, \beta_{(m+1)k}\right) = \theta\left(\alpha_{km+1}, \alpha_{km+2}, \dots, \alpha_{(m+1)k}\right)$ для $m = 0, 1, \dots,$ і деякого фіксованого натурального числа k. Тобто,

$$\left(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\right) = \theta\left(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\right),$$

$$\left(\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_{2k}\right) = \theta\left(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{2k}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(\beta_{km+1}, \beta_{km+2}, \dots, \beta_{(m+1)k}\right) = \theta\left(\alpha_{km+1}, \alpha_{km+2}, \dots, \alpha_{(m+1)k}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

і

$$f_+ \left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}\right) = \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}, \tag{4.12}$$

$$f_+^{-1} \left(\Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}\right) = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}. \tag{4.13}$$

Тобто, для функцій f_+, f_+^{-1} інваріантом є цифри в зображенні аргументу, функція f_k^s будується наступним чином: маємо фіксовані натуральні числа k та $s > 1$, кожній з усіх можливих k-цифрових комбінацій s-их цифр поставимо у відповідність деяку k-цифрову комбінацію s-их цифр таким чином, щоб будь-яким двом різним комбінаціям ставилися у відповідність різні комбінації.

Функція f виду (4.1), яку було досліджено в п. 4.1, є функцією f_1^3. Наведемо приклад функції f_2^2: $f_2^2(x) = f_2^2\left(\Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}\right) = \Delta^2_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots}$, де $(\beta_{2m+1}, \beta_{2(m+1)}) = \theta(\alpha_{2m+1}, \alpha_{2(m+1)})$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots,$ та

$\alpha_{2m+1}\alpha_{2(m+1)}$	00	01	10	11
$\beta_{2m+1}\beta_{2(m+1)}$	10	11	00	01

Очевидно, що у випадку двійкового зображення, множина функцій f_1^2 складається лише з функцій $y = x$ та $y = 1 - x$, але множина функцій f_2^2 є множиною порядку 4! і також містить $y = x$ та $y = 1 - x$.

Даному класу Λ_s функцій належить кілька лінійних функцій (далі — лінійні функції). Це функції $y = x$ та

$$f(x) = f\left(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^s_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]\ldots[s-1-\alpha_n]\ldots} = 1 - x,$$

$$f(x) = f\left(\Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{-s}_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]\ldots[s-1-\alpha_n]\ldots} = -\frac{s-1}{s+1} - x.$$

Лема 4.5. *Для довільної функції f з класу функцій Λ_s, крім лінійних функцій, значення f для різних зображень s-во-раціонального числа з $[0;1]$ (нега-s-во-раціонального числа з $[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}]$ відповідно) є різними.*

Доведення. Нехай маємо s-во-раціональне число

$$x_{(0,n)} = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)} = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](s-1)} = x_{(s-1,n)},\ n \in \mathbb{Z}_0.$$

Достатньо розглянути випадок, коли $n = k$. Тоді рівність $f_k^s(x_{(0,n)}) = f_k^s(x_{(s-1,n)})$ буде справедливою для чисел $x_{(0,k)} = \Delta^s_{\underbrace{0\ldots01}_{k}(0)}$ та $x_{(s-1,k)} = \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(s-1)}$ лише у випадку, коли справедливою буде система:

$$\begin{cases} \theta(\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 0}_{k}) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 0}_{k}), \\ \theta(\underbrace{s-1, s-1, \ldots, s-1, s-1}_{k}) = (\underbrace{s-1, s-1, \ldots, s-1, s-1}_{k}); \end{cases}$$

та $f_k^s(\Delta^s_{\underbrace{0\ldots01}_{k}000\ldots}) = \Delta^s_{\underbrace{0\ldots01}_{k}000\ldots} = \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{k}[s-1][s-1][s-1]\ldots}$.

У загальному випадку

$$f_k^s(x_{(0,n)}) = f_k^s(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n000\ldots}) = \Delta^s_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}\beta_n000\ldots} \text{ та}$$

$$f_k^s(x_{(s-1,n)}) = f_k^s(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](s-1)}) = \Delta^s_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n-1}[\beta_n-1](s-1)}.$$

Тобто, $f_k^s(x_{(s-1,n)}) = f_k^s(x_{(0,n)})$ у випадку, коли $f_k^s = x$.

У випадку, коли

$$\begin{cases} \theta(\underbrace{0,0,\ldots,0,0}_{k}) = (\underbrace{s-1,s-1,\ldots,s-1,s-1}_{k}), \\ (\underbrace{0,0,\ldots,0,0}_{k}) = \theta(\underbrace{s-1,s-1,\ldots,s-1,s-1}_{k}), \end{cases}$$

провівши аналогічні міркування, отримаємо, що $f_k^s(x_{(s-1,n)}) = f_k^s(x_{(0,n)})$ виконується за умови, коли $f_k^s = 1 - x$.

Аналогічно,

$$f_+(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)}) \neq f_+(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1](s-1)}),$$

$$f_+^{-1}(\Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n[s-1]0[s-1]0\ldots}) \neq f_+^{-1}(\Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}[\alpha_n-1]0[s-1]0[s-1]0\ldots}).$$

Таким самим чином можна показати, що умова леми справедлива і для суперпозицій $f_+ \circ f_k^s$, $f_k^s \circ f_+^{-1}$, $f_+ \circ f_k^s \circ f_+^{-1}$. □

Зауваження 4.2. З єдиності зображення довільного s-во-ірраціонального числа із $[0;1]$ випливає коректність означення функції f_k^s в s-во-ірраціональних точках.

В силу останньої леми, при дослідженні функцій $f \in \Lambda_s$ (крім $y = x$ та $y = 1 - x$) не розглядатимемо s-ве зображення, що містить період $(s-1)$ для чисел з $[0;1)$ у випадку, коли аргумент визначений у термінах s-го зображення.

У випадку ж, коли аргумент визначений у термінах нега-s-го зображення, при дослідженні $f \in \Lambda_s$ (крім $y = x$ та $y = -\frac{s-1}{s+1} - x$) не розглядатимемо нега-s-ве зображення, що містить період $(0[s-1])$ для чисел з $[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1})$.

Лема 4.6. *Множина функцій f_k^s з визначеною в ній операцією «композиція функцій» утворює скінченну групу порядку $\left(s^k\right)!$.*

Доведення. Зафіксувавши довільне натуральне число $s > 1$ та довільне $k \in \mathbb{N}$, утворимо множину $A^k_{(s)}$ всіх впорядкованих з повтореннями вибірок k чисел з множини $A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$. Множина функцій f_k^s є групою перестановок елементів множини $A^k_{(s)}$. Тобто, симетричною групою. □

4.2.2. Немонотонність.

Лема 4.7. *Довільна функція* $f \in \Lambda_s$*, відмінна від лінійних функцій, володіє наступними властивостями:*

1. *відображає відрізок* $[0;1]$ *або* $[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}]$ *(залежно від зображення, в термінах якого визначений аргумент) в один з відрізків (залежно від зображення, в термінах якого визначене значення функції)* $[0;1]$ *або* $[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}]$ *без зліченної підмножини точок.*
2. *немонотонна;*
3. *не задовольняє умови бієктивного відображення на області визначення.*

Доведення. Перша властивість для f та друга для f_k^s випливають із задання (4.11) функції f_k^s.

Немонотонність f_+. Нехай маємо $x_1 = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ та $x_2 = \Delta^s_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ такі, що $x_1 < x_2$. Очевидно, існує таке n_0, що $\alpha_j = \beta_j$ для всіх $j = \overline{1, n_0 - 1}$ та $\alpha_{n_0} < \beta_{n_0}$. Звідси,

$$\begin{cases} f(x_1) = \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_0-1}\alpha_{n_0}\ldots} < \Delta^{-s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n_0-1}\beta_{n_0}\ldots} = f(x_2), & \text{якщо } n_0 \text{ — парне;} \\ f(x_1) = \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n_0-1}\alpha_{n_0}\ldots} > \Delta^{-s}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{n_0-1}\beta_{n_0}\ldots} = f(x_2), & \text{якщо } n_0 \text{ — непарне.} \end{cases}$$

Що й треба було довести.

Доведемо, що f_k^s є бієктивним відображенням на відрізку $[0;1]$ лише у випадку, коли $y_k^s = x$ або $y_k^s = 1 - x$. Нехай маємо $x_1 = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$ та $x_2 = \Delta^s_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ такі, що $x_1 \neq x_2$.

Нехай $y_{1,2} = \Delta^s_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\ldots} = f_k^s(x_1) = f_k^s(x_2)$ — s-во-ірраціональне число. Тоді для всіх $m = 0, 1, \ldots$, $(\gamma_{km+1}, \gamma_{km+2}, \ldots, \gamma_{(m+1)k}) =$
$= \theta(\alpha_{km+1}, \alpha_{km+2}, \ldots, \alpha_{(m+1)k}) = \theta(\beta_{km+1}, \beta_{km+2}, \ldots, \beta_{(m+1)k})$. З останніх рівностей, в свою чергу, випливає, що $x_1 = x_2$, а це суперечить умові.

Нехай $y_{1,2}$ — s-во-раціональне число. Тобто,

$$y_{1,2} = \Delta^s_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}\gamma_n(0)} = \Delta^s_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{n-1}[\gamma_n-1](s-1)}. \tag{4.14}$$

Очевидно, легко підібрати таку підмножину M множини раціональних чисел з відрізка $[0;1]$, образами якої під дією f^s_k були б точки виду (4.14). На M функція f^s_k не є бієкцією.

Небієктивність на $[0;1]$ f_+. Для доведення цієї властивості достатньо знайти такі два числа $x_1 \neq x_2$, що $f(x_1) = f(x_2)$. З означення функції f та властивостей s-го та нега-s-го представлення чисел випливає, що за x_1 та x_2 можна вибрати прообрази деякого нега-s-во-раціонального числа.

Очевидно, легко підібрати такі підмножини s-во-раціональних чи нега-s-во-раціональних чисел, на яких не будуть бієктивними відображеннями й функції типів: $f_+^{-1}, f_+ \circ f^s_k, f^s_k \circ f_+^{-1}, f_+ \circ f^s_k \circ f_+^{-1}$. □

Лема 4.8. *Для довільного числа* $x \in [0;1]$ *функція* f_+ *задовольняє рівняння:*

$$f(x) + f(1-x) = -\frac{s-1}{s+1}; \tag{4.15}$$

Доведення. Справді, вибравши довільне $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, отримаємо: $f_+(x)+f_+(1-x) = f_+(\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})+f_+(\Delta^s_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]\ldots[s-1-\alpha_n]\ldots}) = \Delta^{-s}_{(s-1)} =$
$= -\frac{s-1}{s+1}$. □

Лема 4.9. *Для довільного числа* $y \in \left[-\frac{s}{s+1}; \frac{1}{s+1}\right]$ *функція* f_+^{-1} *задовольняє рівняння:*

$$f^{-1}(y) + f^{-1}\left(-\frac{s-1}{s+1} - y\right) = 1; \tag{4.16}$$

Доведення останньої леми є аналогічним доведенню леми 4.8.

4.2.3. Фрактальні властивості множин інваріантних точок.

Лема 4.10. *Для множини інваріантних точок функції* f^s_k *справедливими є наступні властивості:*

— *множина інваріантних точок функції* f^s_k *є континуальною множиною зі значенням розмірності Хаусдорфа-Безиковича, рівним* $\frac{1}{k}\log_s j$*, якщо існує множина* $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_j\}$ $(j \geqslant 2)$ *k-цифрових наборів s-их цифр таких, що* $\theta(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_k^{(i)}) = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots, a_k^{(i)})$, *де*

$\sigma_i = (a_1^{(i)} a_2^{(i)} \dots a_k^{(i)})$, $i = \overline{1, j}$;

- *множина інваріантних точок функції* f_k^s *є скінченною, якщо існує єдиний набір* $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_k)$ *з* k *s-их цифр такий, що*
$$\theta(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, a_2, \dots, a_k);$$
- *множина інваріантних точок функції* f_k^s *є порожньою множиною, якщо не існує жодного k-цифрового набору* σ *s-их цифр такого, що* $\theta(a_1, a_2, \dots, a_k) = (a_1, a_2, \dots, a_k)$, $\sigma = (a_1 a_2 \dots a_k)$.

Доведення. З теореми 3.2 випливає, що множина всіх можливих чисел з відрізка $[0; 1]$, s-ве зображення яких містить лише набори s-их цифр з $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j\}$ $(j \geqslant 2)$, є самоподібним фракталом, значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича якого задовольняє рівняння $j \left(\frac{1}{s}\right)^{k\alpha_0} = 1$.

У випадку існування єдиного набору σ з умови леми, множиною інваріантних точок є одноелементна множина $\{x : x = \Delta^s_{(a_1 a_2 \dots a_k)}\}$. □

Лема 4.11. *Множини інваріантних точок функцій* f_+ *і* f_+^{-1} *є самоподібним фракталом, значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича якого дорівнює* $\frac{1}{2}$.

Доведення. З того, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{s^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^n}$$

випливає, що множина $\{x : f_+(x) = x\}$ є множиною всіх чисел з відрізка $[0; 1]$, в s-му зображенні яких використовуються лише двоцифрові набори s-их цифр з множини $\{00, 01, \dots, 0(s-1)\}$. Тобто, $\left\{x : x = \Delta^s_{0\alpha_2 \dots 0\alpha_{2n} 0\alpha_{2n+2} 0 \dots}\right\}$. З теореми 3.2 випливає, що множина інваріантних точок функцій f_+ та f_+^{-1} є самоподібним фракталом, розмірність Хаусдорфа-Безиковича α_0 якого задовольняє рівняння $s \left(\frac{1}{s}\right)^{2\alpha_0} = 1$. Звідки, $\alpha_0 = \frac{1}{2}$. □

4.2.4. Основні властивості.

Теорема 4.4. *Справедливими є наступні твердження:*

1. *довільна функція $f \in \Lambda_s$, за винятком лінійних функцій, є неперервною майже скрізь. Зокрема, функція f є неперервною в s-во-ірраціональних точках $[0;1]$ або нега-s-во-ірраціональних точках $[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}]$ (залежно від зображення, у термінах якого визначений аргумент функції f), s-во-раціональні точки чи, відповідно, нега-s-во-раціональні точки є точками стрибків функції f;*
2. *довільна функція з класу функцій Λ_s, за винятком лінійних функцій, є ніде недиференційовною;*
3. *довільна функція $f \in \Lambda_s$ є інтегровною за Лебегом, причому*

   $$\int\limits_{D(f)} f(x)dx = \frac{1}{2},\ \textit{де } D(f) \textit{ — область визначення функції } f;$$

4. *значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича графіка довільної функції $f \in \Lambda_s$ дорівнює 1.*

Доведення. Неперервність. Доведення проведемо для функцій f_k^s. Нехай маємо довільне число $x = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \in [0;1]$.

Нехай число x_0 — s-во-ірраціональне. Тоді існує таке $n_0 = n_0(x)$, що

$$\begin{cases} \alpha_m(x) = \alpha_m(x_0), & m = \overline{1, n_0 - 1}; \\ \alpha_{n_0}(x) \neq \alpha_{n_0}(x_0). \end{cases}$$

З останньої системи очевидною є еквівалентність умов $x \to x_0$ та $n_0 \to \infty$. Розглянемо модуль різниці:

$$|f_k^s(x) - f_k^s(x_0)| = \left|\sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{\beta_j(x) - \beta_j(x_0)}{s^k}\right| \leqslant \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{|\beta_j(x) - \beta_j(x_0)|}{s^k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{s-1}{s^k} = \frac{1}{s^{n_0-1}} \to 0 \quad \text{при} \quad n_0 \to \infty.$$

Таким чином, функція f_k^s є неперервною в s-во-ірраціональних точках. Для решти функцій з Λ_s доведення цього факту є однаковим.

Нехай $x_0 = \Delta^s_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$ — s-во-раціональне число. Тоді

$$\lim_{x\to x_0-0} f^s_k(x) = \Delta^s_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_t\tau\tau\tau\ldots},$$

де $t \equiv 0(\mod k)$, $(\underbrace{\tau\tau\ldots\tau}_{k}) = \theta(\underbrace{s-1, s-1, \ldots, s-1}_{k})$, а також

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = \theta(\beta_1, \ldots, \beta_k), (\gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_{2k}) = \theta(\beta_{k+1}, \ldots, \beta_{2k}), \ldots,$$

$$(\gamma_{r+1}, \gamma_{r+2}, \ldots, \gamma_t) = \theta(\underbrace{\beta_{r+1}, \ldots, \beta_{n-1}, (\beta_n - 1), s-1, s-1, \ldots, s-1}_{k}),$$

$r = \left[\frac{n}{k}\right]$ — ціла частина $\frac{n}{k}$.

$$\lim_{x\to x_0+0} f^s_k(x) = \Delta^s_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_r\delta_{r+1}\delta_{r+2}\ldots\delta_t\xi\xi\xi\ldots}, \text{ де } \theta(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}) = (\underbrace{\xi, \ldots, \xi}_{k}),$$

а також

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = \theta(\beta_1, \ldots, \beta_k), \ldots, (\gamma_{r-k+1}, \ldots, \gamma_r) = \theta(\beta_{r-k+1}, \ldots, \beta_r),$$

$$(\underbrace{\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \ldots, \delta_t}_{k}) = \theta(\underbrace{\beta_{r+1}, \beta_{r+2}, \ldots, \beta_n, 0, 0, \ldots, 0}_{k}).$$

Отже, точка x_0 є точкою стрибку:

$$\sum_{j=r+1}^{t} \frac{\delta_j - \gamma_j}{s^j} + \sum_{j=t+1}^{\infty} \frac{\xi - \tau}{s^j} = \sum_{j=r+1}^{t} \frac{\delta_j - \gamma_j}{s^j} + \frac{\xi - \tau}{(s-1)s^t}.$$

По аналогії відповідне доведення проводиться і для функцій f_+, f_+^{-1}, $f_+ \circ f^s_k$, $f^s_k \circ f_+^{-1}$, $f_+ \circ\ f^s_k \circ\ f_+^{-1}$.

Недиференційовність. Розглянемо функції f^s_k. Розглянемо послідовність (x_n) чисел $x_n = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots}$ з $[0;1]$. Виберемо $x_0 = \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}c\alpha_{n+1}\ldots}$, де c — фіксована s-ва цифра, яка в s-му зображенні числа x_0 використовується нескінченну кількість разів і є n-ою s-ою цифрою числа x_0. Тоді

$$x_n - x_0 = \frac{\alpha_n - c}{s^n},$$

$$f^s_k(x_n) - f^s_k(x_0) = \Delta^s_{\underbrace{0\ldots0}_{r}[\gamma_{r+1}-\gamma'_{r+1}][\gamma_{r+2}-\gamma'_{r+2}]\ldots[\gamma_n-\gamma'_n]\ldots[\gamma_{r+k}-\gamma'_{r+k}]000\ldots}, \text{ де}$$

$r = \left[\frac{n}{k}\right]$ — ціла частина від числа $\frac{n}{k}$ та

$$(\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_n, \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_{r+k}) = \theta(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{r+k}),$$

$$(\gamma'_{r+1}, \ldots, \gamma'_{n-1}, \gamma'_n, \gamma'_{n+1}, \ldots, \gamma'_{r+k}) = \theta(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{n-1}, c, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{r+k}).$$

Очевидно, що умова $x \to x_0$ еквівалентна умові $n \to \infty$. Тому

$$f_k^{s'}(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=r+1}^{r+k} \frac{\gamma_i - \gamma'_i}{s^i}}{\frac{\alpha_n - c}{s^n}}.$$

Оскільки при різних наборах $\alpha_{r+1} \ldots \alpha_n \ldots \alpha_{r+k}$ та $\alpha_{r+1} \ldots \alpha_{n-1} c \alpha_{n+1} \ldots \alpha_{r+k}$ s-их цифр похідна функції f_k^s в точці x_0 набуває різних значень, то функція f_k^s ніде недиференційовна.

Єдиним випадком існування похідної буде випадок, коли

$$\sum_{i=r+1}^{r+k} \frac{\gamma_i - \gamma'_i}{s^i} = \pm \frac{\alpha_n - c}{s^n}$$

Тобто, у випадку, коли $f_k^s = x$ або $f_k^s = 1 - x$.

Доведемо, що ніде недиференційовною є функція f_+. Справді, позначивши

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2n-1}(x)}{s^{2n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2n-1}(x_0)}{s^{2n-1}},$$

$$b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2n}(x)}{s^{2n}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2n}(x_0)}{s^{2n}},$$

отримаємо:

$$(f_+(x_0))' = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{a\to 0, b\to 0} \frac{b-a}{a+b} =$$

$$= \left[\begin{array}{lcl} a & = & \rho\cos(\varphi), \\ b & = & \rho\sin(\varphi), \\ & & \rho \to 0. \end{array}\right] = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin(\varphi) - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi) + \cos(\varphi)}.$$

Тобто, границі не існує. Такі ж міркування можна провести і для f_+^{-1} та й решти функцій $f \in \Lambda_s$.

Інтегральні властивості. Для функції f_k^s умови існування інтеграла Лебега виконуються, причому, в силу її самоподібних властивостей, значення I інтеграла Лебега можна визначити з рівності:

$$I = \frac{1}{s^{2k}} s^k I + \frac{s^{2k} - s^k}{2} \cdot \frac{1}{s^{2k}},$$

$$I \left(1 - \frac{1}{s^k}\right) = \frac{s^k - 1}{2s^k}, I = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно, для функцій f_+ та f_+^{-1}

$$I = \frac{(s-1)s}{2s^2} + sI\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} I + \frac{s-1}{2s},$$

звідки $I = \frac{1}{2}$.

Для інших функцій з Λ_s можна обчислити значення інтеграла Лебега за означенням відповідного інтеграла.

Розмірність Хаусдорфа-Безиковича графіків функцій. З означення і властивостей функцій f_+ та f_+^{-1} випливає, що графік кожної з них належить s з s^2 квадратів першого рангу:

$$\sqcap_{(ii)} = \left[\frac{i}{s}; \frac{i+1}{s}\right] \times \left[-\frac{i+1}{s}; -\frac{i}{s}\right], \ i \in A \quad \text{— у випадку функції } f_+,$$

$$\sqcap_{(ii)} = \left[-\frac{i+1}{s}; -\frac{i}{s}\right] \times \left[\frac{i}{s}; \frac{i+1}{s}\right], \ i \in A \quad \text{— у випадку функції } f_+^{-1},$$

а саме: $\sqcap_{(00)}, \sqcap_{(11)}, \sqcap_{(22)}, \ldots, \sqcap_{((s-1)(s-1))}$.

Графік кожної з досліджуваних функцій належить s^2 із s^4 квадратів другого рангу:

$$\sqcap_{(i_1 i_1)(i_2 i_2)} = \left[\frac{i_1}{s} + \frac{i_2}{s^2}; \frac{i_1}{s} + \frac{i_2 + 1}{s^2}\right] \times \left[-\frac{i_1}{s} + \frac{i_2}{s^2}; -\frac{i_1}{s} + \frac{i_2 + 1}{s^2}\right] \text{— для } f_+,$$

$$\sqcap_{(i_1 i_1)(i_2 i_2)} = \left[-\frac{i_1}{s} + \frac{i_2}{s^2}; -\frac{i_1}{s} + \frac{i_2 + 1}{s^2}\right] \times \left[\frac{i_1}{s} + \frac{i_2}{s^2}; \frac{i_1}{s} + \frac{i_2 + 1}{s^2}\right] \text{— для } f_+^{-1},$$

$i_1 \in A, i_2 \in A$, а саме:

- та частина графіка, що належала квадрату $\sqcap_{(00)}$, належить s квадратам $\sqcap_{(00)(00)}, \sqcap_{(00)(11)}, \sqcap_{(00)(22)}, \ldots, \sqcap_{(00)((s-1)(s-1))}$;

— та частина графіка, що належала квадрату $\sqcap_{(11)}$, належить s квадратам $\sqcap_{(11)(00)}, \sqcap_{(11)(11)}, \sqcap_{(11)(22)}, \ldots, \sqcap_{(11)((s-1)(s-1))}$;

....

— та частина графіка, що належала квадрату $\sqcap_{((s-1)(s-1))}$, належить s квадратам $\sqcap_{((s-1)(s-1))(00)}, \sqcap_{((s-1)(s-1))(11)}, \sqcap_{((s-1)(s-1))(22)}, \ldots,$ $\sqcap_{((s-1)(s-1))((s-1)(s-1))}$; і т. д.

Графіки Γ_{f_+}, $\Gamma_{f_+^{-1}}$ функцій f_+ та f_+^{-1}, відповідно, містяться в s^m квадратах m-го рангу з довжиною сторони s^{-m}. Тому

$$\widehat{H}_\alpha(\Gamma_{f_+}) = \widehat{H}_\alpha(\Gamma_{f_+^{-1}}) = \varliminf_{m\to\infty} s^m \left(\sqrt{s^{-2m} + s^{-2m}}\right)^\alpha = \varliminf_{m\to\infty} s^m \left(2 \cdot s^{-2m}\right)^{\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= \varliminf_{m\to\infty} \left(s^{\frac{2m}{\alpha}-2m} \cdot 2\right)^{\frac{\alpha}{2}} = \varliminf_{m\to\infty} \left(2^{\frac{\alpha}{2}} \cdot (s^{1-\alpha})^m\right).$$

Оскільки $s^{(1-\alpha)m} \to 0$ при всіх $\alpha > 1$ і графіки досліджуваних функцій володіють самоподібними властивостями, то $\alpha^K(\Gamma_{f_+}) = \alpha^K(\Gamma_{f_+^{-1}}) = \alpha_0(\Gamma_{f_+^{-1}}) = \alpha_0(\Gamma_{f_+}) = 1$, де $\alpha^K(\cdot)$ — фрактальна клітинкова ентропійна розмірність множини, $\widehat{H}_\alpha(\cdot)$ — α-мірна міра Хаусдорфа множини.

Для знаходження розмірності Хаусдорфа-Безиковича графіка функції f_k^s використовуватимемо s-ві квадрати рангу, кратного числу k.

З означення функції f_k^s та її властивостей випливає, що її графік належить s^k із s^{2k} квадратів k-го рангу.

Графік $\Gamma_{f_k^s}$ функції f_k^s належить s^{2k} квадратам із s^{4k} квадратів $2k$-го рангу і т. д.

Таким чином, графік $\Gamma_{f_k^s}$ функції f_k^s міститься в s^{mk} квадратах mk-го рангу з довжинами сторін s^{-mk}, $m \in \mathbb{N}$. Всього таких квадратів існує s^{2mk}. Тому

$$\widehat{H}_\alpha(\Gamma_{f_k^s}) = \varliminf_{m\to\infty} s^{mk} \left(\sqrt{2 \cdot s^{-2mk}}\right)^\alpha = \varliminf_{m\to\infty} s^{mk} \left(2^{\frac{\alpha}{2}} \cdot s^{-\alpha mk}\right) =$$
$$= \varliminf_{m\to\infty} s^{mk} \left(2^{\frac{\alpha}{2}} \cdot s^{(1-\alpha)mk}\right).$$

По аналогії з функціями f_+ і f_+^{-1}, $s^{(1-\alpha)mk} \to 0$ для всіх $\alpha > 1$ та $\alpha^K(\Gamma_{f_k^s}) = = \alpha_0(\Gamma_{f_k^s}) = 1$.

Таким самим чином можна довести дане твердження і для решти функцій з досліджуваного класу. □

4.3. Функції, аргумент яких визначений у термінах рядів Кантора

4.3.1. Означення та задання. Нехай маємо послідовність $D \equiv (d_n)$ та фіксовану матрицю $P = \|p_{i,n}\|$, де $n = 1, 2, \ldots$, $i = \overline{0, m_n}$, і, для якої справедливою є наступна система властивостей:

$$\begin{cases} 1^\circ. & \forall n \in \mathbb{N} : p_{i,n} \in (-1; 1); \\ 2^\circ. & \forall n \in \mathbb{N} : \sum\limits_{i=0}^{m_n} p_{i,n} = 1; \\ 3^\circ. & \forall (i_n) : \prod\limits_{n=1}^{\infty} |p_{i_n,n}| = 0; \\ 4^\circ. & \forall i_n \neq 0 : 0 < \sum\limits_{i=0}^{i_n - 1} p_{i,n} < 1, \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

У нашому випадку $m_n = d_n - 1$ для всіх $n = 1, 2, \ldots$.

Розглянемо нескінченну систему функціональних рівнянь

$$f(\hat{\varphi}^k(x)) = \beta_{\varepsilon_{k+1},k+1} + p_{\varepsilon_{k+1},k+1} f(\hat{\varphi}^{k+1}(x)), \tag{4.17}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\varepsilon_{k+1} \in A_{d_{k+1}}$, $\hat{\varphi}$ — оператор зсуву цифр представлення та

$$\beta_{\varepsilon_{k+1},k+1} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \varepsilon_{k+1} = 0; \\ \sum_{i=0}^{\varepsilon_{k+1}-1} p_{i,k+1}, & \text{якщо } \varepsilon_{k+1} \neq 0. \end{cases}$$

Система (4.17) в силу рівності (1.9) є еквівалентною нескінченній системі

$$f\left(\frac{i + \hat{\varphi}^k(x)}{d_k}\right) = \beta_{i,k} + p_{i,k} \cdot f(\hat{\varphi}^k(x)), \tag{4.18}$$

де $k = 1, 2, \dots, i \in A_{d_k}$.

Теорема 4.5. *Система функціональних рівнянь* (4.18) *в класі обмежених та визначених на відрізку* $[0;1]$ *функцій має єдиний розв'язок, який має вигляд*

$$F(x) = \beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\varepsilon_k(x),k} \prod_{n=1}^{k-1} p_{\varepsilon_n(x),n} \right). \tag{4.19}$$

Доведення. З системи (4.17) та визначеності функції F в усіх точках відрізка $[0;1]$ випливає, що

$$F(x) = \beta_{\varepsilon_1,1} + p_{\varepsilon_1,1} \cdot f(\hat{\varphi}(x)) = \beta_{\varepsilon_1,1} + p_{\varepsilon_1,1} \cdot \big(\beta_{\varepsilon_2,2} + p_{\varepsilon_2,2} \cdot f(\hat{\varphi}^2 x)\big) =$$

$$= \beta_{\varepsilon_1,1} + p_{\varepsilon_1,1}\beta_{\varepsilon_2,2} + p_{\varepsilon_1,1}p_{\varepsilon_2,2} \cdot \big(\beta_{\varepsilon_3,3} + p_{\varepsilon_3,3} \cdot f(\hat{\varphi}^3 x)\big) = \ldots =$$

$$= \beta_{\varepsilon_1,1} + p_{\varepsilon_1,1}\beta_{\varepsilon_2,2} + \beta_{\varepsilon_3,3}p_{\varepsilon_1,1}p_{\varepsilon_2,2} + \ldots + \beta_{\varepsilon_k,k}\prod_{n=1}^{k-1} p_{\varepsilon_n,n} + \left(\prod_{n=1}^{k} p_{\varepsilon_n,n}\right) f(\hat{\varphi}^k(x)).$$

Тому

$$\lim_{m\to\infty} \left(\beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\beta_{\varepsilon_k(x),k} \prod_{n=1}^{k-1} p_{\varepsilon_n(x),n} \right) \right) = f(\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_m\ldots}),$$

оскільки F — визначена та обмежена на $[0;1]$ і

$$\prod_{n=1}^{k} p_{\varepsilon_n,n} \leqslant \prod_{n=1}^{k} \left(\max_{i=\overline{0,d_n-1}} p_{i,n} \right) \leqslant p_M^k \to 0 \quad (k \to \infty),$$

де $p_M = \max_{n=\overline{1,k}} p_{\varepsilon_n,n}$. □

Легко помітити, що $F(x) = x$ за умови, коли $p_{i,n} = \frac{1}{d_n}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Нехай $x = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$. Розглянемо функцію виду

$$\tilde{F}(x) = \beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_n(x),n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x),j} \right),$$

де

$$\tilde{\beta}_{\varepsilon_n(x),n} = \begin{cases} \beta_{\varepsilon_n(x),n}, & \text{якщо } n \text{ — непарне;} \\ \beta_{d_n-1-\varepsilon_n(x),n}, & \text{якщо } n \text{ — парне,} \end{cases}$$

$$\tilde{p}_{\varepsilon_n(x),n} = \begin{cases} p_{\varepsilon_n(x),n}, & \text{якщо } n \text{ — непарне;} \\ p_{d_n-1-\varepsilon_n(x),n}, & \text{якщо } n \text{ — парне.} \end{cases}$$

Легко показати, що досліджувана функція $\tilde{F}$ в класі визначених та обмежених на відрізку функцій є єдиним розв'язком наступних (еквівалентних між собою в силу рівності (1.9)) нескінченних систем функціональних рівнянь, а саме:

$$f\left(\frac{\tilde{i}(x) + \hat{\varphi}^k(y)}{d_k}\right) = \tilde{\beta}_{i(x),k} + \tilde{p}_{i(x),k} \cdot f(\hat{\varphi}^k(y)),$$

де $k = 1, 2, \dots, i \in A_{d_k}$,

$$\tilde{i}(x) = \begin{cases} i(x), & \text{якщо } k \text{ — непарне;} \\ d_k - 1 - i(x), & \text{якщо } k \text{ — парне,} \end{cases}$$

та

$$f(\hat{\varphi}^k(y)) = \tilde{\beta}_{\varepsilon_{k+1}(x),k+1} + \tilde{p}_{\varepsilon_{k+1}(x),k+1} f(\hat{\varphi}^{k+1}(y)),$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, \varepsilon_{k+1} \in A_{d_{k+1}}$ і $y = \Delta^D_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3\ldots[d_{2n}-1-\varepsilon_{2n}]\varepsilon_{2n+1}\ldots}$.

Справді,

$$\tilde{F}(x) = \beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{n=2}^{k}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_n(x),n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j(x),j}\right) + \left(\prod_{j=1}^{k}\tilde{p}_{\varepsilon_j(x),j}\right) \cdot f(\hat{\varphi}^k(y)),$$

де $y = \Delta^D_{\varepsilon_1(x)[d_2-1-\varepsilon_2(x)]\varepsilon_3(x)[d_4-1-\varepsilon_4(x)]\ldots}$. Оскільки функція $\tilde{F}$ є визначеною та обмеженою на $[0;1]$, в силу третьої властивості матриці P при граничному переході в останній рівності при $k \to \infty$ легко помітити справедливість доводжуваного твердження.

Лема 4.12. *Функції $y = F(x)$, $y = \tilde{F}(x)$ є коректно означеними в довільній точці відрізка* $[0;1]$.

Доведення. Нехай x — D-раціональне число. Розглянемо різницю

$$\delta = F(\Delta^D_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\ldots}) - F(\Delta^D_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n(0)}) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j}\right) \cdot (-\beta_{\varepsilon_n,n} + \beta_{\varepsilon_n-1,n} + \beta_{d_{n+1}-1,n+1} p_{\varepsilon_n-1,n} +$$

$$+ \beta_{d_{n+2}-1,n+2} p_{\varepsilon_n-1,n} p_{d_{n+1}-1,n+1} + \ldots) = \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j}\right) \cdot$$

$$\cdot (-\beta_{\varepsilon_n,n} + \beta_{\varepsilon_n-1,n} + (1 - p_{d_{n+1}-1,n+1}) p_{\varepsilon_n-1,n} +$$

$$+ (1 - p_{d_{n+2}-1,n+2}) p_{\varepsilon_n-1,n} p_{d_{n+1}-1,n+1} + \ldots) = 0.$$

Відповідне твердження для функції $y = \tilde{F}(x)$ доводиться аналогічно (див. [9^{a}]): розглядається різниця

$$\delta = \tilde{F}(\Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n[d_{n+1}-1]0[d_{n+3}]0\ldots}) - \tilde{F}(\Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1]0[d_{n+2}-1]0[d_{n+4}-1]0\ldots})$$

значень функції від різних нега-(d_n)-раціональних зображень аргументу, але з врахуванням випадків парного і непарного n. □

4.3.2. Основні властивості.

Теорема 4.6. *Функції F, $\tilde{F}$ володіють наступними властивостями:*

- *є неперервними;*
- *монотонно неспадні за умови невід'ємності елементів матриці P, зокрема, строго зростаючі за умови, коли всі елементи $p_{i,n}$ матриці P є додатними;*
- *інтегровні за Лебегом, причому*

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 \tilde{F}(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{0,n} + \beta_{1,n} + \beta_{2,n} + \ldots + \beta_{d_n-1,n}}{d_1 d_2 \ldots d_n}.$$

Доведення. *Неперервність.* Доведення проведемо для випадку функції $\tilde{F}$, оскільки доведення неперервності функції F є аналогічним.

Нехай маємо довільне число $x_0 = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1(x_0)\ldots\varepsilon_{n_0}(x_0)\varepsilon_{n_0+1}(x_0)\ldots}$ з відрізка $[0;1]$. Нехай $x = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\ldots\varepsilon_{n_0}(x)\varepsilon_{n_0+1}(x)\ldots}$ — таке число, для якого справедливими є умови $\varepsilon_j(x) = \varepsilon_j(x_0)$ при $j = \overline{1, n_0 - 1}$ та $\varepsilon_{n_0}(x) \neq \varepsilon_{n_0}(x_0)$. Розглянемо різницю

$$\tilde{F}(x) - \tilde{F}(x_0) = \left(\prod_{j=1}^{n_0-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x_0),j}\right) \left(\tilde{F}(\hat{\varphi}^{n_0-1}(x)) - \tilde{F}(\hat{\varphi}^{n_0-1}(x_0))\right).$$

$$|\tilde{F}(x)-\tilde{F}(x_0)| \leqslant \left(\prod_{j=1}^{n_0-1} |\tilde{p}_{\varepsilon_j(x_0),j}|\right) \leqslant \left(\max_{j=\overline{1,n_0-1}} |\tilde{p}_{\varepsilon_j(x_0),j}|\right)^{n_0-1} \to 0 \quad (n_0 \to \infty),$$

що еквівалентно умові $\lim_{x\to x_0} \tilde{F}(x) = \tilde{F}(x_0)$.

Справді, для нега-(d_n)-ірраціонального числа x_0 еквівалентними є умови $x \to x_0$ та $n_0 \to \infty$ і тому не виникає сумнівів щодо неперервності функції $\tilde{F}$.

Нехай x_0 — нега-(d_n)-раціональне число. У такому разі неперервність функції $\tilde{F}$ в нега-(d_n)-раціональній точці x_0 можна довести, використовуючи поняття односторонніх границь з врахуванням випадків парного та непарного n_0.

Монотонність. Проведемо доведення спочатку для випадку функції F. Очевидно, що

$$F(0) = \beta_{0,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{0,n} \prod_{j=1}^{n-1} p_{0,j}\right) = \min_{x\in[0;1]} F(x) = 0,$$

$$F(1) = \beta_{d_1-1,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\beta_{d_n-1,n} \prod_{j=1}^{n-1} p_{d_j-1,j}\right) = \max_{x\in[0;1]} F(x) = 1.$$

Нехай маємо $x_1 = \Delta^D_{\varepsilon_1(x_1)\varepsilon_2(x_1)...\varepsilon_n(x_1)...}$ та $x_2 = \Delta^D_{\varepsilon_1(x_2)\varepsilon_2(x_2)...\varepsilon_n(x_2)...}$ такі, що $x_1 < x_2$. Тоді існує такий номер n_0, що $\varepsilon_j(x_1) = \varepsilon_j(x_2)$ для всіх $j = \overline{1, n_0 - 1}$ та $\varepsilon_{n_0}(x_1) < \varepsilon_{n_0}(x_2)$. Отже,

$$F(x_2) - F(x_1) = \left(\prod_{j=1}^{n_0-1} p_{\varepsilon_j(x_2),j}\right) \cdot (\beta_{\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0} - \beta_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\beta_{\varepsilon_{n_0+m}(x_2),n_0+m} \prod_{j=0}^{m-1} p_{\varepsilon_{n_0+j}(x_2),n_0+j}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\beta_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m} \prod_{j=0}^{m-1} p_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j}\right)).$$

Оскільки

$$\beta_{\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0} - \beta_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} = p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} + p_{\varepsilon_{n_0}(x_1)+1,n_0} + \ldots + p_{\varepsilon_{n_0}(x_2)-1,n_0} \geqslant p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0},$$

$$\delta = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_{\varepsilon_{n_0+m}(x_2),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1} p_{\varepsilon_{n_0+j}(x_2),n_0+j}\right) -$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1} p_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j}\right) \geqslant$$

$$\geqslant -\sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1} p_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j}\right) \geqslant$$

$$\geqslant -\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left(\beta_{d_{n_0+m}-1,n_0+m}\prod_{j=1}^{m-1} p_{d_{n_0+j}-1,n_0+j}\right)\right) p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} = -p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0},$$

то

$$F(x_2) - F(x_1) \geqslant p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} - p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} = 0.$$

Цілком очевидним є той факт, що у випадку, коли всі елементи $p_{i,n}$ матриці P є додатними, справедливою буде умова $F(x_2) - F(x_1) > 0$.

Доведемо монотонність функції $\tilde{F}$. Нехай елементи $p_{i,n}$ матриці P є невід'ємними. Очевидно, що

$$\tilde{F}(0) = \tilde{F}(\Delta^{-(d_n)}_{0[d_2-1]0[d_4-1]\ldots}) = \beta_{0,1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\beta_{0,n}\prod_{j=1}^{n-1} p_{0,j}\right) = \min_{x\in[0;1]} \tilde{F}(x) = 0,$$

$$\tilde{F}(1) = \tilde{F}(\Delta^{-(d_n)}_{[d_1-1]0[d_3-1]0\ldots}) = \beta_{d_1-1,1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\beta_{d_n-1,n}\prod_{j=1}^{n-1} p_{d_j-1,j}\right) =$$

$$= \max_{x\in[0;1]} \tilde{F}(x) = 1.$$

Нехай $x_1 = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1(x_1)\varepsilon_2(x_1)\ldots\varepsilon_n(x_1)\ldots}$ та $x_2 = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1(x_2)\varepsilon_2(x_2)\ldots\varepsilon_n(x_2)\ldots}$ — деякі числа $(x_1 < x_2)$. Очевидно, існує такий номер n_0, що $\varepsilon_j(x_1) = \varepsilon_j(x_2)$ для всіх $j = \overline{1, n_0-1}$ та $\varepsilon_{n_0}(x_1) < \varepsilon_{n_0}(x_2)$ при непарному n_0 або $\varepsilon_{n_0}(x_1) > \varepsilon_{n_0}(x_2)$ у випадку парного n_0. Розглянемо різницю

$$\tilde{F}(x_2) - \tilde{F}(x_1) = \left(\prod_{j=1}^{n_0-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x_2),j}\right) \cdot (\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0} - \tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0} +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0+m}(x_2),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1}\tilde{p}_{\varepsilon_{n_0+j}(x_2),n_0+j}\right)-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1}\tilde{p}_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j}\right)\bigg).$$

Отже,

$$\begin{aligned}\kappa=\sum_{m=1}^{\infty}&\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0+m}(x_2),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1}\tilde{p}_{\varepsilon_{n_0+j}(x_2),n_0+j}\right)-\\ -\sum_{m=1}^{\infty}&\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1}\tilde{p}_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j}\right)\geqslant\\ \geqslant-\sum_{m=1}^{\infty}&\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0+m}(x_1),n_0+m}\prod_{j=0}^{m-1}\tilde{p}_{\varepsilon_{n_0+j}(x_1),n_0+j}\right),\end{aligned}$$

де для непарного n_0

$$\kappa\geqslant-p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}(1-p_{d_{n_0+1}-1,n_0+1}+\sum_{m=2}^{\infty}\left[(1-p_{d_{n_0+m}-1,n_0+m})\prod_{j=1}^{m-1}p_{d_{n_0+j}-1,n_0+j}\right])=$$

$=-p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}$ та для парного n_0 по аналогії отримаємо

$$\kappa\geqslant-p_{d_{n_0}-1-\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}\cdot\left(\max_{x\in[0,1]}\tilde{F}(\hat{\varphi}^{n_0}(x_1))\right)=-p_{d_{n_0}-1-\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}.$$

Як наслідок, у випадку непарного n_0

$$\tilde{F}(x_2)-\tilde{F}(x_1)=\left(\prod_{j=1}^{n_0-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j(x_2),j}\right)\cdot(\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0}-\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}+\kappa)\geqslant$$

$$\geqslant\left(\prod_{j=1}^{n_0-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j(x_2),j}\right)\cdot(p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}+p_{\varepsilon_{n_0}(x_1)+1,n_0}+\ldots+p_{\varepsilon_{n_0}(x_2)-1,n_0}-p_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0})\geqslant0$$

та у випадку парного n_0

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x_2)-\tilde{F}(x_1)&=\left(\prod_{j=1}^{n_0-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j(x_2),j}\right)\cdot(\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0}-\tilde{\beta}_{\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}+\kappa)=\\ &=\left(\prod_{i=1}^{n_0-1}\tilde{p}_{i,\varepsilon_i(x_2)}\right)\cdot(p_{d_{n_0}-1-\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}+p_{d_{n_0}-\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0}+\ldots+\\ &+p_{d_{n_0}-2-\varepsilon_{n_0}(x_2),n_0}-p_{d_{n_0}-1-\varepsilon_{n_0}(x_1),n_0})\geqslant0.\end{aligned}$$

Цілком очевидно, що коли коли всі елементи $p_{i,n}$ матриці P є додатними, справедливою буде умова $\tilde{F}(x_2) - \tilde{F}(x_1) > 0$.

Інтегральні властивості. Використовуючи означення функції F та властивості інтеграла Лебега, отримаємо

$$\int\limits_0^1 F(x)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{d_1}} F(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} F(x)dx + \int\limits_{\frac{2}{d_1}}^{\frac{3}{d_1}} F(x)dx + \ldots + \int\limits_{\frac{d_1-1}{d_1}}^{1} F(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{d_1}} p_{0,1}F(\hat{\varphi}(x))dx + \int\limits_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} \left[p_{0,1} + p_{1,1}F(\hat{\varphi}(x))\right] dx +$$

$$+ \int\limits_{\frac{2}{d_1}}^{\frac{3}{d_1}} \left[p_{0,1} + p_{1,1} + p_{2,1}F(\hat{\varphi}(x))\right] dx + \ldots + \int\limits_{\frac{d_1-1}{d_1}}^{1} \left[\beta_{d_1-1,1} + p_{d_1-1,1}F(\hat{\varphi}(x))\right] dx =$$

$$= \left[\begin{array}{rcl} x & = & \frac{\varepsilon_1}{d_1} + \frac{1}{d_1}\hat{\varphi}(x), \\ dx & = & \frac{1}{d_1}d(\hat{\varphi}(x)). \end{array}\right] = \frac{p_{0,1}}{d_1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) + p_{0,1}x|_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} +$$

$$+ \frac{p_{1,1}}{d_1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) + (p_{0,1} + p_{1,1})x|_{\frac{2}{d_1}}^{\frac{3}{d_1}} +$$

$$+ \frac{p_{2,1}}{d_1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) + \ldots + \beta_{d_1-1,1}x|_{\frac{d_1-1}{d_1}}^{1} + \frac{p_{d_1-1,1}}{d_1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) =$$

$$= \frac{\beta_{1,1} + \beta_{2,1} + \ldots + \beta_{d_1-1,1}}{d_1} + \frac{1}{d_1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) =$$

$$= \frac{\beta_{1,1} + \beta_{2,1} + \ldots + \beta_{d_1-1,1}}{d_1} + \frac{1}{d_1} \times (\int\limits_0^{\frac{1}{d_2}} p_{0,2}F(\hat{\varphi}^2(x))d(\hat{\varphi}(x)) +$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{d_2}}^{\frac{2}{d_2}} \left[p_{0,2} + p_{1,2}F(\hat{\varphi}^2(x))\right] d(\hat{\varphi}(x)) +$$

$$+\int\limits_{\frac{2}{d_2}}^{\frac{3}{d_2}} \left[p_{0,2}+p_{1,2}+p_{2,2}F(\hat{\varphi}^2(x))\right] d(\hat{\varphi}(x)) + \ldots +$$

$$+\int\limits_{\frac{d_2-1}{d_2}}^{1} \left[\beta_{d_2-1,2}+p_{d_2-1,2}F(\hat{\varphi}^2(x))\right] d(\hat{\varphi}(x))) = \ldots =$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_{0,j}+\beta_{1,j}+\ldots+\beta_{d_j-1,j}}{d_1d_2\ldots d_j}+\frac{1}{d_1d_2\ldots d_n}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}^n(x))d(\hat{\varphi}^n(x)) = \ldots .$$

Продовжуючи процес до нескінченності, отримаємо

$$\int\limits_0^1 F(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_{0,n}+\beta_{1,n}+\beta_{2,n}+\ldots+\beta_{d_n-1,n}}{d_1d_2\ldots d_n}.$$

Що й потрібно було довести.

Розглянемо функцію $\tilde{F}$. Позначимо $y=g(x)$ допоміжну функцію g, де

$$g(x)=g\left(\Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}\right)=\Delta^{D}_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\ldots\varepsilon_{2n-1}[d_{2n}-1-\varepsilon_{2n}]\ldots}.$$

З означення досліджуваної функції $\tilde{F}$ та властивостей інтеграла Лебега випливає наступне:

$$\int\limits_0^1 \tilde{F}(x)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{d_1}} F(y)dy + \int\limits_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} F(y)dy + \ldots + \int\limits_{\frac{d_1-1}{d_1}}^{1} F(y)dy =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{d_1}} p_{0,1}F(\hat{\varphi}(y))dy + \int\limits_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} \left[p_{0,1}+p_{1,1}F(\hat{\varphi}(y))\right]dy +$$

$$+\int\limits_{\frac{2}{d_1}}^{\frac{3}{d_1}} \left[\beta_{2,1}+p_{2,1}F(\hat{\varphi}(y))\right]dy + \ldots + \int\limits_{\frac{d_1-1}{d_1}}^{1} \left[\beta_{d_1-1,1}+p_{d_1-1,1}F(\hat{\varphi}(y))\right]dy.$$

Оскільки $y=\frac{\varepsilon_1}{d_1}+\frac{1}{d_1}\hat{\varphi}(y)$ і, як наслідок, $dy=\frac{1}{d_1}d(\hat{\varphi}(y))$, то

$$\int\limits_0^1 \tilde{F}(x)dx =$$

$$= \frac{p_{0,1}}{d_1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(y))d(\hat{\varphi}(y)) + \beta_{1,1}y|_{\frac{1}{d_1}}^{\frac{2}{d_1}} + \frac{p_{1,1}}{d_1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(y))d(\hat{\varphi}(y)) + \beta_{2,1}y|_{\frac{2}{d_1}}^{\frac{3}{d_1}} +$$

$$+ \frac{p_{2,1}}{d_1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(y))d(\hat{\varphi}(y)) + \ldots + \beta_{d_1-1,1}y|_{\frac{d_1-1}{d_1}}^{1} + \frac{p_{d_1-1,1}}{d_1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(y))d(\hat{\varphi}(y)) =$$

$$= \frac{\beta_{1,1} + \beta_{2,1} + \ldots + \beta_{d_1-1,1}}{d_1} + \frac{1}{d_1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(y))d(\hat{\varphi}(y)).$$

Враховуючи взаємозв'язок D-представлення та нега-(d_n)-представлення, на другому кроці отримаємо:

$$\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(y))d(\hat{\varphi}(y)) = \int\limits_{\frac{d_2-1}{d_2}}^1 p_{0,2}F(\hat{\varphi}^2(y))d(\hat{\varphi}(y)) +$$

$$+ \int\limits_{\frac{d_2-2}{d_2}}^{\frac{d_2-1}{d_2}} \left[\beta_{1,2} + p_{1,2}F(\hat{\varphi}^2(y))\right] d(\hat{\varphi}(y)) + \ldots +$$

$$+ \int\limits_0^{\frac{1}{d_2}} \left[\beta_{d_2-1,2} + p_{d_2-1,2}F(\hat{\varphi}^2(y))\right] d(\hat{\varphi}(y)).$$

Оскільки $\hat{\varphi}(y) = \frac{d_2-1-\varepsilon_2}{d_2} + \frac{1}{d_2}\hat{\varphi}^2(y)$ та $d(\hat{\varphi}(y)) = \frac{1}{d_2}d(\hat{\varphi}^2(y))$, то

$$\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(y))d(\hat{\varphi}(y)) = \frac{p_{0,2}}{d_2}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}^2(y))d(\hat{\varphi}^2(y)) + \beta_{1,2}y|_{\frac{d_2-2}{d_2}}^{\frac{d_2-1}{d_2}} +$$

$$+ \frac{p_{1,2}}{d_2}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}^2(y))d(\hat{\varphi}^2(y)) + \ldots + \beta_{d_2-1,2}y|_0^{\frac{1}{d_2}} + \frac{p_{d_2-1,2}}{d_2}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}^2(y))d(\hat{\varphi}^2(y)) =$$

$$= \frac{\beta_{1,2} + \beta_{2,2} + \ldots + \beta_{d_2-1,2}}{d_2} + \frac{1}{d_2}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}^2(y))d(\hat{\varphi}^2(y)).$$

Отже,

$$\int\limits_0^1 \tilde{F}(x)dx = \frac{\beta_{1,1}+\beta_{2,1}+\ldots+\beta_{d_1-1,1}}{d_1}+$$

$$+\frac{\beta_{1,2}+\beta_{2,2}+\ldots+\beta_{d_2-1,2}}{d_1 d_2}+\frac{1}{d_1 d_2}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}^2(y))d(\hat{\varphi}^2(y)).$$

По аналогії, на кроці n отримаємо

$$\int\limits_0^1 \tilde{F}(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{\beta}_{0,j}+\tilde{\beta}_{1,j}+\tilde{\beta}_{2,j}+\ldots+\tilde{\beta}_{d_j-1,j}}{d_1 d_2 \ldots d_j}+$$

$$+\frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_n}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}^n(y))d(\hat{\varphi}^n(y)).$$

Продовжуючи процес до нескінченності, отримаємо

$$\int\limits_0^1 \tilde{F}(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\beta}_{0,n}+\tilde{\beta}_{1,n}+\tilde{\beta}_{2,n}+\ldots+\tilde{\beta}_{d_n-1,n}}{d_1 d_2 \ldots d_n}.$$

$\square$

Лема 4.13. *Справедливими є наступні рівності:*

$$\mu_F\left(\Delta^D_{c_1 c_2 \ldots c_n}\right) = \prod_{j=1}^{n} p_{c_j,j}, \quad \mu_{\tilde{F}}\left(\Delta^{-(d_n)}_{c_1 c_2 \ldots c_n}\right) = \prod_{j=1}^{n} \tilde{p}_{c_j,j}.$$

Нехай $x_0 = \Delta^D_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots}$ *— D-ірраціональна точка,* $x_1 = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \ldots}$ *— нега-*(d_n)*-ірраціональна точка. Тоді*

$$F^{'}(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{n} d_j p_{\varepsilon_j,j}\right), \qquad \tilde{F}^{'}(x_1) = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{n} d_j \tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right).$$

Доведення. Обчислимо приріст $\mu_{\tilde{F}}$ функції $\tilde{F}$ на циліндрах $\Delta^{-(d_n)}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$:

$$\mu_{\tilde{F}}\left(\Delta^{-(d_n)}_{c_1 c_2 \ldots c_{2n-1}}\right) = \tilde{F}\left(\Delta^{-(d_n)}_{c_1 c_2 \ldots c_{2n-1} 0 [d_{2n+1}-1] 0 [d_{2n+3}-1] \ldots}\right) -$$

$$-\tilde{F}\left(\Delta^{-(d_n)}_{c_1 c_2 \ldots c_{2n-1} [d_{2n}-1] 0 [d_{2n+2}-1] 0 [d_{2n+4}-1] \ldots}\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{p}_{c_j,j}\right) (\beta_{d_{2n}-1,2n} + \beta_{d_{2n+1}-1,2n+1} p_{d_{2n}-1,2n} +$$

$$+ \beta_{d_{2n+2}-1,2n+2} p_{d_{2n}-1,2n} p_{d_{2n+1}-1,2n+1} + \ldots) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{p}_{c_j,j}\right) (1 - p_{d_{2n}-1,2n} + (1 - p_{d_{2n+1}-1,2n+1}) p_{d_{2n}-1,2n} +$$

$$+ (1 - p_{d_{2n+2}-1,2n+2}) p_{d_{2n}-1,2n} p_{d_{2n+1}-1,2n+1} + \ldots) = \left(\prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{p}_{c_j,j}\right),$$

$$\mu_{\tilde{F}}\left(\Delta^{-(d_n)}_{c_1c_2\ldots c_{2n}}\right) = \tilde{F}\left(\Delta^{-(d_n)}_{c_1c_2\ldots c_{2n}[d_{2n+1}-1]0[d_{2n+3}-1]0[d_{2n+5}-1]\ldots}\right) -$$

$$- \tilde{F}\left(\Delta^{-(d_n)}_{c_1c_2\ldots c_{2n}0[d_{2n+2}-1]0[d_{2n+4}-1]\ldots}\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{2n} \tilde{p}_{c_j,j}\right) (\beta_{d_{2n+1}-1,2n+1} + \beta_{d_{2n+2}-1,2n+2} p_{d_{2n+1}-1,2n+1} +$$

$$+\beta_{d_{2n+3}-1,2n+3} p_{d_{2n+1}-1,2n+1} p_{d_{2n+2}-1,2n+2} + \ldots) = \left(\prod_{j=1}^{2n} \tilde{p}_{c_j,j}\right).$$

Знайдемо похідну функції $\tilde{F}$ в нега-(d_n)-ірраціональній точці $x_0 = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}$. Оскільки $x_0 = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}$, то

$$\tilde{F}'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_{\tilde{F}}\left(\Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}\right)}{|\Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n} \tilde{p}_{\varepsilon_j,j}}{\frac{1}{d_1d_2\ldots d_n}} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(d_j \tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right).$$

Аналогічно,

$$\mu_F\left(\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n}\right) = F\left(\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n[d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\ldots}\right) - F\left(\Delta^D_{c_1c_2\ldots c_n(0)}\right) = \prod_{j=1}^{n} p_{c_j,j}$$

та

$$F'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_F\left(\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}\right)}{|\Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n} p_{\varepsilon_j,j}}{\frac{1}{d_1d_2\ldots d_n}} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(d_j p_{\varepsilon_j,j}\right).$$

□

Наслідок 4.1. *Оскільки досліджувані функції є неперервними та монотонними, то вони (згідно теореми Лебега) мають скінченну похідну майже скрізь в розумінні міри Лебега. Проте, у випадку, коли* $a_n =$

$= d_n\tilde{p}_{\varepsilon_n,n} > \ 1$ ($a_n = d_n p_{\varepsilon_n,n} > 1$) для всіх $n \in \mathbb{N}$ за винятком, можливо, скінченної кількості, отримаємо $\tilde{F}'(x_0) = \infty$ ($F'(x_0) = \infty$). Тому:

- *— у випадку, коли для скінченної множини значень n виконується $a_n \geqslant 1$, отримаємо $\tilde{F}'(x_0) = 0$ ($F'(x_0) = 0$);*
- *— у випадку, коли $a_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ (що є справедливим лише для функції $\tilde{F}(x) = x$), отримаємо $\tilde{F}'(x_0) = 1$ ($F'(x_0) = 1$);*
- *— у випадку, коли лише для скінченної кількості номерів виконується умова $p_{\varepsilon_n,n} \neq \frac{1}{d_n}$, отримаємо $0 \leqslant \tilde{F}'(x_0) < \infty$ ($F'(x_0) < \infty$).*

Нехай елементи $p_{i,n}$ матриці P є невід'ємними і нехай η — випадкова величина, представлена у вигляді наступного канторівського розкладу

$$\eta = \frac{\xi_1}{d_1} + \frac{\xi_2}{d_1 d_2} + \frac{\xi_3}{d_1 d_2 d_3} + \ldots + \frac{\xi_k}{d_1 d_2 \ldots d_k} + \ldots \equiv \Delta^D_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \ldots},$$

де

$$\xi_k = \begin{cases} \varepsilon_k, & \text{якщо } k \text{ — непарне;} \\ d_k - 1 - \varepsilon_k, & \text{якщо } k \text{ — парне;} \end{cases}$$

та цифри ξ_k ($k = 1, 2, \ldots$) є випадковими і набувають значень $0, 1, \ldots, d_k - 1$ з ймовірностями $p_{0,k}, p_{1,k}, \ldots, p_{d_k-1,k}$. Тобто, ξ_k — незалежні та $P\{\xi_k = i_k\} = p_{i_k,k}$, $i_k \in A_{d_k}$.

З означення функції розподілу та рівностей

$$\{\eta < x\} = \{\xi_1 < \varepsilon_1(x)\} \cup \{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 < d_2 - 1 - \varepsilon_2(x)\} \cup \ldots \cup$$

$$\cup \{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 = d_2 - 1 - \varepsilon_2(x), \ldots, \xi_{2k-1} < \varepsilon_{2k-1}(x)\} \cup$$

$$\cup \{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \ldots, \xi_{2k-1} = \varepsilon_{2k-1}(x), \xi_{2k} < d_{2k} - 1 - \varepsilon_{2k}(x)\} \cup \ldots,$$

$$P\{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 = d_2 - 1 - \varepsilon_2(x), \ldots, \xi_{2k-1} < \varepsilon_{2k-1}(x)\} =$$

$$= \beta_{\varepsilon_{2k-1}(x), 2k-1} \prod_{j=1}^{2k-2} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x), j}$$

і

$$P\{\xi_1 = \varepsilon_1(x), \xi_2 = d_2 - 1 - \varepsilon_2(x), \ldots, \xi_{2k} < d_{2k} - 1 - \varepsilon_{2k}(x)\} =$$

$$= \beta_{d_{2k}-1-\varepsilon_{2k}(x),2k} \prod_{j=1}^{2k-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x),j}$$

випливає, що наслідком останньої теореми є наступна лема.

Лема 4.14. *Функція розподілу $\tilde{F}_\eta$ випадкової величини η має вигляд*

$$\tilde{F}_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \beta_{\varepsilon_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\tilde{\beta}_{\varepsilon_k(x),k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{p}_{\varepsilon_j(x),j} \right], & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$$

де $\tilde{p}_{\varepsilon_{j(x)},j} \geqslant 0$.

4.3.3. Недиференційовні функції.

Розглянемо випадок, коли елементи матриці $P = \|p_{i,n}\|$ можуть бути як невід'ємними, так і від'ємними числами. Тобто, нехай $p_{i,n} \in (-1; 1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $i = \overline{0, d_n - 1}$.

В такому разі з пункту 1 леми 4.13 випливає, що якщо для кожного $n \in \mathbb{N}$ числа $p_{i,n}$, $i = \overline{0, d_n - 1}$, є як невід'ємними, так і від'ємними числами, то функції $F, \tilde{F}$ не мають жодного проміжку монотонності.

Теорема 4.7. *Нехай матриця P є такою, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються умови: $p_{\varepsilon_n,n} \cdot p_{\varepsilon_n - 1,n} < 0$, причому $d_n \cdot p_{d_n-1,n} \geqslant 1$ або $d_n \cdot p_{d_n-1,n} \leqslant 1$, та*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} d_k p_{0,k} \neq 0, \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} d_k p_{d_k-1,k} \neq 0$$

одночасно. Тоді функція F є ніде недиференційовною на $[0; 1]$.

Доведення. Нехай x_0 — деяка D-раціональна точка, тобто $x_0 =$ $= x_0^{(1)} = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n(0)} = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1][d_{n+3}-1]\ldots} = x_0^{(2)}$, $\varepsilon_n \neq 0$. Розглянемо послідовності $(x_k^{'})$, $(x_k^{''})$ чисел

$$x_k^{'} = x_0^{(1)} + \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_{n+k}} = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \underbrace{0\ldots0}_{k-1} 1(0)},$$

$$x_k^{''} = x_0^{(2)} - \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_{n+k}} = \Delta^D_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\ldots[d_{n+k}-1](0)}$$

такі, що $x^{'} \to x_0$ і $x^{''} \to x_0$ при $k \to \infty$. Тоді

$$F(x_k^{'}) - F(x_0) = [\beta_{\varepsilon_1,1} + \beta_{\varepsilon_2,2} p_{\varepsilon_1,1} + \ldots + \beta_{\varepsilon_n,n} \prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j} +$$

$$+ \beta_{1,n+k} \left(\prod_{j=1}^{n} p_{\varepsilon_j,j} \right) \left(\prod_{m=n+1}^{n+k-1} p_{0,m} \right)] -$$

$$- \left[\beta_{\varepsilon_1,1} + \beta_{\varepsilon_2,2} p_{\varepsilon_1,1} + \ldots + \beta_{\varepsilon_n,n} \prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j} \right] = \left(\prod_{j=1}^{n} p_{\varepsilon_j,j} \right) \cdot \left(\prod_{m=n+1}^{n+k} p_{0,m} \right),$$

$$F(x_0) - F(x_k^{''}) = [\beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1} \left[\beta_{\varepsilon_t,t} \prod_{j=1}^{t-1} p_{\varepsilon_j,j} \right] + \beta_{\varepsilon_n-1,n} \prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j} +$$

$$+ p_{\varepsilon_n-1,n} \beta_{d_{n+1}-1,n+1} \prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j} + \ldots + p_{\varepsilon_n-1,n} \beta_{d_{n+k}-1,n+k} \prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j} \prod_{l=n+1}^{n+k-1} p_{d_l-1,l} +$$

$$+ p_{\varepsilon_n-1,n} \beta_{d_{n+k+1}-1,n+k+1} \prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j} \prod_{l=n+1}^{n+k} p_{d_l-1,l} + \ldots] -$$

$$- [\beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1} \left[\beta_{\varepsilon_t,t} \prod_{j=1}^{t-1} p_{\varepsilon_j,j} \right] + \beta_{\varepsilon_n-1,n} \prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j} +$$

$$+ \sum_{l=n+1}^{n+k} \left[\beta_{d_l-1,l} \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j} \right) p_{\varepsilon_n-1,n} \left(\prod_{m=n+1}^{l-1} p_{d_m-1,m} \right) \right]] =$$

$$= p_{\varepsilon_n-1,n} \left(\prod_{j=1}^{n-1} p_{\varepsilon_j,j} \right) \cdot \left(\prod_{m=n+1}^{n+k} p_{d_m-1,m} \right).$$

Звідки,

$$B_k^{'} = \frac{F(x_k^{'}) - F(x_0)}{x_k^{'} - x_0} = (d_n p_{\varepsilon_n,n}) \left(\prod_{j=1}^{n-1} d_j p_{\varepsilon_j,j} \right) \left(\prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{0,m} \right),$$

$$B_k^{''} = \frac{F(x_0) - F(x_k^{''})}{x_0 - x_k^{''}} = (d_n p_{\varepsilon_n-1,n}) \left(\prod_{j=1}^{n-1} d_j p_{\varepsilon_j,j} \right) \left(\prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{d_m-1,m} \right).$$

Позначимо $b_{0,k} = \prod_{m=n+1}^{n+k} (d_m p_{0,m})$ і $b_{d_k-1,k} = \prod_{m=n+1}^{n+k} (d_m p_{d_m-1,m})$.

Лема 4.15. *Якщо для довільного $n \in \mathbb{N}$ справедливою є система умов*

$$\begin{cases} p_{0,n} > 0, \\ p_{1,n} < 0, \\ \dots \\ p_{2t-1,n} < 0, \\ p_{2t,n} > 0, \\ \dots \end{cases}$$

де $t \in \mathbb{N}$, тоді

$$\left[\begin{array}{rcl} d_n p_{0,n} & \geqslant & 1, \\ d_n p_{2,n} & \geqslant & 1, \\ & \dots & \\ d_n p_{d_n-1,n} & \geqslant & 1. \end{array}\right.$$

Справді, з умов $p_{\varepsilon_n,n} p_{\varepsilon_n-1,n} < 0$ та $0 < \ \beta_{1,n} = p_{0,n}$ випливає система в формулюванні останньої леми.

Доведення проводиться методом від супротивного. Припустимо, що для всіх $i_n \in \ A_{d_n} \setminus \{1\}$ виконується нерівність $d_n p_{i_n,n} < 1$. Тоді

$$\sum_{i_n \in A_{d_n} \setminus \{1\}} d_n p_{i_n,n} < d_n - 1,$$

звідки $p_{1,n} > \frac{1}{d_n}$. Останнє суперечить умові $p_{1,n} < 0$. Отже, припущення є хибним. Лему 4.15 доведено.

Оскільки, $\prod_{j=1}^{n-1} d_j p_{\varepsilon_j,j} = const$, $p_{\varepsilon_n,n} p_{\varepsilon_n-1,n} < 0$ та за умовою теореми послідовності $(b_{0,k})$, $(b_{d_k-1,k})$ не збігаються до 0 одночасно, отримаємо наступні випадки ($m = \ \overline{n+1, n+k}, k \to \infty$):

1. якщо для всіх $k \in \mathbb{N}$ за винятком, можливо, скінченної множини номерів k справедливими є нерівності $d_m p_{0,m} > 1$ та $d_m p_{d_m-1,m} > 1$, то одна з послідовностей $B_k^{'}$, $B_k^{''}$ прямує до ∞, а інша — до $-\infty$;
2. якщо для всіх $k \in \mathbb{N}$ за винятком, можливо, скінченної множини номерів k один з добутків $d_m p_{0,m}$, $d_m p_{d_m-1,m}$ є більшим 1, а інший —

меншим 1, тоді одна з послідовностей B'_k, B''_k прямує до $\pm\infty$, а інша — до 0;

3. якщо для всіх $k \in \mathbb{N}$ за винятком, можливо, скінченної множини номерів k один з добутків $d_m p_{0,m}$, $d_m p_{d_m-1,m}$ є більшим 1, а інший — рівним 1, тоді одна з послідовностей B'_k, B''_k прямує до $\pm\infty$, а інша є сталою послідовністю;
4. якщо для всіх $k \in \mathbb{N}$ за винятком, можливо, скінченної множини номерів k один з добутків $d_m p_{0,m}$, $d_m p_{d_m-1,m}$ є меншим 1, а інший — рівним 1, тоді одна з послідовностей B'_k, B''_k прямує до 0, а інша є сталою послідовністю;
5. якщо для всіх $k \in \mathbb{N}$ добутки $d_m p_{0,m}$, $d_m p_{d_m-1,m}$ є рівними 1, то послідовності B'_k, B''_k є різними сталими послідовностями, оскільки $p_{\varepsilon_n,n} \neq p_{\varepsilon_n-1,n}$ в силу умов $p_{\varepsilon_k,k} \in (-1;1)$, $\beta_{\varepsilon_k,k} > 0$.

Таким чином, функція F є ніде недиференційовною на $[0;1]$, оскільки у всіх випадках $\lim_{k\to\infty} B'_k \neq \lim_{k\to\infty} B''_k$. □

Теорема 4.8. *Нехай* $p_{\varepsilon_n,n} \cdot p_{\varepsilon_n-1,n} < 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n \in A_{d_n} \setminus \{0\}$ *та*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} d_k p_{0,k} \neq 0, \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} d_k p_{d_k-1,k} \neq 0$$

одночасно. Тоді функція $\tilde{F}$ *є ніде недиференційовною на* $[0;1]$.

Доведення. Виберемо деяку нега-(d_n)-раціональну точку $x_0 = = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n[d_{n+1}-1]0[d_{n+3}-1]\ldots} = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1]0[d_{n+2}-1]0[d_{n+4}-1]\ldots}$, де $\varepsilon_n \neq 0$.

Нехай n — непарне, Ξ_p — множина парних чисел, Ξ_o — множина непарних чисел. Тоді

$$x_0 = x_0^{(1)} = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n[d_{n+1}-1]0[d_{n+3}-1]\ldots} = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1]0[d_{n+2}-1]0[d_{n+4}-1]\ldots} = x_0^{(2)}$$

та у випадку парного n

$$x_0 = x_0^{(1)} = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1]0[d_{n+2}-1]0[d_{n+4}-1]\ldots} = \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n[d_{n+1}-1]0[d_{n+3}-1]\ldots} = x_0^{(2)}.$$

Розглянемо числові послідовності $(x^{'}_k)$, $(x^{''}_k)$: $x^{'}_k =$

$$\begin{cases} \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n [d_{n+1}-1]0[d_{n+3}-1]0\ldots[d_{n+k-1}-1]1[d_{n+k+1}-1]0[d_{n+k+3}-1]\ldots}, & n \in \Xi_o,\ k \in \Xi_p; \\ \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n [d_{n+1}-1]0\ldots[d_{n+k-2}-1]0[d_{n+k}-2]0[d_{n+k+2}-1]0[d_{n+k+4}-1]\ldots}, & n \in \Xi_o,\ k \in \Xi_o; \\ \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1]0[d_{n+2}-1]0[d_{n+4}-1]0\ldots[d_{n+k-1}-1]1[d_{n+k+1}-1]0[d_{n+k+3}-1]\ldots}, & n \in \Xi_p,\ k \in \Xi_o; \\ \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1]0[d_{n+2}-1]0\ldots[d_{n+k-2}-1]0[d_{n+k}-2]0[d_{n+k+2}-1]0[d_{n+k+4}-1]\ldots}, & n \in \Xi_p,\ k \in \Xi_p, \end{cases}$$

$x^{''}_k =$

$$\begin{cases} \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1]0[d_{n+2}-1]0\ldots[d_{n+k-1}-1]00[d_{n+k+2}-1]0[d_{n+k+4}-1]\ldots}, & n \in \Xi_o,\ k \in \Xi_o; \\ \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}[\varepsilon_n-1]0[d_{n+2}-1]0\ldots[d_{n+k}-1][d_{n+k+1}-1]0[d_{n+k+3}-1]0[d_{n+k+5}-1]\ldots}, & n \in \Xi_o,\ k \in \Xi_p; \\ \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n [d_{n+1}-1]0[d_{n+3}-1]\ldots0[d_{n+k}-1][d_{n+k+1}-1]0[d_{n+k+3}-1]\ldots}, & n \in \Xi_p,\ k \in \Xi_o; \\ \Delta^{-(d_n)}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}\varepsilon_n [d_{n+1}-1]0\ldots[d_{n+k-1}-1]00[d_{n+k+2}-1]0[d_{n+k+4}-1]0[d_{n+k+6}-1]\ldots}, & n \in \Xi_p,\ k \in \Xi_p, \end{cases}$$

Тобто,

$$x^{'}_k = x^{(1)}_0 + \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_{n+k}}, \quad x^{''}_k = x^{(2)}_0 - \frac{1}{d_1 d_2 \ldots d_{n+k}}$$

та $x^{'}_k \to x_0$, $x^{''}_k \to x_0$ при $k \to \infty$.

Нехай n — непарне. Тоді

$$y^{(1)}_0 = g(x^{(1)}_0) = \Delta^D_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\varepsilon_5\ldots[d_{n-1}-1-\varepsilon_{n-1}]\varepsilon_n(0)},$$

$$y^{(2)}_0 = g(x^{(2)}_0) = \Delta^D_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\ldots[d_{n-1}-1-\varepsilon_{n-1}][\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1][d_{n+3}-1]\ldots},$$

$$y^{'}_k = g(x^{'}_k) = \Delta^D_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\ldots[d_{n-1}-1-\varepsilon_{n-1}]\varepsilon_n \underbrace{0\ldots0}_{k-1} 1(0)},$$

$$y^{''}_k = g(x^{''}_k) = \Delta^D_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\ldots[d_{n-1}-1-\varepsilon_{n-1}][\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\ldots[d_{n+k}-1](0)},$$

де $\tilde{F}(x) = F(g(x)) = F \circ g$. Отже,

$$\tilde{F}(x^{'}_k) = F(y^{'}_k) = \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t}\prod_{j=1}^{t-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right) + \beta_{\varepsilon_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j} +$$

$$+\left(\sum_{l=n+1}^{n+k-1}\left(\beta_{0,l}\prod_{m=n+1}^{l-1}p_{0,m}\right)\right)\left(\prod_{j=1}^{n}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right) + \beta_{1,n+k}\left(\prod_{j=1}^{n}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\prod_{m=n+1}^{n+k-1}p_{0,m}\right),$$

$$\tilde{F}(x_0^{(1)}) = F(y_0^{(1)}) = \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t}\prod_{j=1}^{t-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right) + \beta_{\varepsilon_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j},$$

$$\tilde{F}(x_k^{'}) - \tilde{F}(x_0^{(1)}) = \beta_{1,n+k}\left(\prod_{j=1}^{n}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\prod_{m=n+1}^{n+k-1}p_{0,m}\right) = \left(\prod_{j=1}^{n}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\prod_{m=n+1}^{n+k}p_{0,m}\right),$$

$$\tilde{F}(x_0^{(2)}) = F(y_0^{(2)}) = \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t}\prod_{j=1}^{t-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right) + \beta_{\varepsilon_n-1,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j} +$$

$$+ p_{\varepsilon_n-1,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\sum_{l=n+1}^{\infty}\left[\beta_{d_l-1,l}\prod_{m=n+1}^{l-1}p_{d_m-1,m}\right]\right),$$

$$\tilde{F}(x_k^{''}) = F(y_k^{''}) = \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t}\prod_{j=1}^{t-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right) + \beta_{\varepsilon_n-1,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j} +$$

$$+ p_{\varepsilon_n-1,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\sum_{l=n+1}^{n+k}\left[\beta_{d_l-1,l}\prod_{m=n+1}^{l-1}p_{d_m-1,m}\right]\right).$$

Звідки

$$\tilde{F}(x_0^{(2)}) - \tilde{F}(x_k^{''}) = p_{\varepsilon_n-1,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\cdot\left(\prod_{m=n+1}^{n+k}p_{d_m-1,m}\right).$$

Перейдемо до розгляду випадку, коли n — парне. В такому разі

$$y_0^{(1)} = g(x_0^{(1)}) = \Delta^D_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\ldots\varepsilon_{n-1}[d_n-\varepsilon_n](0)},$$

$$y_0^{(2)} = g(x_0^{(2)}) = \Delta^D_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\ldots\varepsilon_{n-1}[d_n-\varepsilon_n-1][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\ldots},$$

$$y_k^{'} = g(x_k^{'}) = \Delta^D_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\ldots\varepsilon_{n-1}[d_n-\varepsilon_n]\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1(0)},$$

$$y_k^{''} = g(x_k^{''}) = \Delta^D_{\varepsilon_1[d_2-1-\varepsilon_2]\varepsilon_3[d_4-1-\varepsilon_4]\ldots\varepsilon_{n-1}[d_n-1-\varepsilon_n][d_{n+1}-1][d_{n+2}-1]\ldots[d_{n+k}-1](0)}.$$

Як наслідок,

$$\tilde{F}(x_k^{'}) = F(y_k^{'}) = \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t}\prod_{j=1}^{t-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right) + \beta_{d_n-\varepsilon_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j} +$$

$$+ \beta_{1,n+k}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\cdot\left(\prod_{m=n+1}^{n+k-1}p_{0,m}\right)p_{d_n-\varepsilon_n,n},$$

$$\tilde{F}(x_0^{(1)}) = F(y_0^{(1)}) = \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t}\prod_{j=1}^{t-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right) + \beta_{d_n-\varepsilon_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}.$$

Отже,

$$\tilde{F}(x_k^{'}) - \tilde{F}(x_0^{(1)}) = \beta_{1,n+k}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\cdot\left(\prod_{m=n+1}^{n+k-1}p_{0,m}\right)p_{d_n-\varepsilon_n,n} = \\ = \left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\cdot\left(\prod_{m=n+1}^{n+k}p_{0,m}\right)p_{d_n-\varepsilon_n,n},$$

$$\tilde{F}(x_0^{(2)}) = F(y_0^{(2)}) = \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t}\prod_{j=1}^{t-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right) + \beta_{d_n-1-\varepsilon_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j} + \\ + \left(\prod_{j=1}^{n}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\sum_{l=n+1}^{\infty}\left[\beta_{d_l-1,l}\prod_{m=n+1}^{l-1}p_{d_m-1,m}\right]\right),$$

$$\tilde{F}(x_k^{''}) = F(y_k^{''}) = \beta_{\varepsilon_1,1} + \sum_{t=2}^{n-1}\left(\tilde{\beta}_{\varepsilon_t,t}\prod_{j=1}^{t-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right) + \beta_{d_n-1-\varepsilon_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j} + \\ + \left(\prod_{j=1}^{n}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\sum_{l=n+1}^{n+k}\left[\beta_{d_l-1,l}\prod_{m=n+1}^{l-1}p_{d_m-1,m}\right]\right),$$

$$\tilde{F}(x_0^{(2)}) - \tilde{F}(x_k^{''}) = p_{d_n-1-\varepsilon_n,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\cdot\left(\prod_{m=n+1}^{n+k}p_{d_m-1,m}\right).$$

Таким чином,

$$B_k^{'} = \frac{\tilde{F}(x_k^{'}) - \tilde{F}(x_0)}{x_k^{'} - x_0} =$$

$$= \begin{cases} (d_n p_{\varepsilon_n,n})\left(\prod_{j=1}^{n-1} d_j\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{0,m}\right), & n \text{ — непарне;} \\ (d_n p_{d_n-\varepsilon_n,n})\left(\prod_{j=1}^{n-1} d_j\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{0,m}\right), & n \text{ — парне.} \end{cases}$$

$$B_k^{''} = \frac{\tilde{F}(x_0) - \tilde{F}(x_k^{''})}{x_0 - x_k^{''}} =$$

$$= \begin{cases} (d_n p_{\varepsilon_n-1,n})\left(\prod_{j=1}^{n-1} d_j\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{d_m-1,m}\right), & n \text{ — непарне;} \\ (d_n p_{d_n-1-\varepsilon_n,n})\left(\prod_{j=1}^{n-1} d_j\tilde{p}_{\varepsilon_j,j}\right)\left(\prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{d_m-1,m}\right), & n \text{ — парне.} \end{cases}$$

Позначимо $b_{0,k} = \prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{0,m}$ і $b_{d_k-1,k} = \prod_{m=n+1}^{n+k} d_m p_{d_m-1,m}$.

Оскільки, $\prod_{j=1}^{n-1} d_j\tilde{p}_{\varepsilon_j,j} = const$, $p_{\varepsilon_n,n}p_{\varepsilon_n-1,n} < 0$, $p_{d_n-\varepsilon_n,n}p_{d_n-1-\varepsilon_n,n} < 0$ та за умовою теореми послідовності $(b_{0,k})$, $(b_{d_k-1,k})$ не збігаються до 0 одночасно, розглянувши усі можливі випадки, коли $d_kp_{0,k} > 1$, $d_kp_{0,k} = 1$, $d_kp_{0,k} < 1$, $d_kp_{d_k-1,k} > 1$, $d_kp_{d_k-1,k} = 1$, $d_kp_{d_k-1,k} < 1$, отримаємо, що у всіх випадках $\lim_{k\to\infty} B_k^{'} \neq \lim_{k\to\infty} B_k^{''}$. Тобто, функція $\tilde{F}$ є недиференційовною. □

Висновки до розділу 4

У розділі 4 досліджено функції з одного класу Λ_s функцій, кожна з яких задана певним перетворювачем цифр або комбінацій цифр зображення аргументу, та, аргумент і значення якої визначені у термінах s-го чи нега-s-го зображення. Відповідний спосіб моделювання функцій зі складною локальною будовою є новим і найпростішим серед відомих способів моделювання таких функцій. Доведено, що усі функції з цього класу функцій, крім $y = -\frac{s-1}{s+1} - x$, $y = 1 - x$ і $y = x$, є неперервними майже скрізь та ніде недиференційовними. Показано, що значення інтеграла Лебега довільної функції по її області визначення дорівнює $\frac{1}{2}$ та значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича графіка довільної функції з Λ_s дорівнює 1. Вивчено фрактальні властивості множин інваріантних точок деяких функцій (композицією котрих можна визначити довільну функцію з Λ_s). Більш детально вивчено на прикладі однієї функції з Λ_3 властивості та різні форми задання таких функцій у термінах трійкового зображення. Отримані результати, досліджувані функції є новими.

У даному розділі побудовано і вивчено властивості (неперервність, умови монотонності, умови недиференційовності, інтегральні властивості та ін.) узагальнень функції Салема, аргумент яких визначений у термінах зображення чисел рядами Кантора (додатними, знакопочережними). Особливостями проведеного дослідження є наступне: вперше вивчено властивості функцій, різні цифри зображення аргументу та значення яких належать різним алфавітам; вперше запропоновано і досліджено узагальнення функції Салема, визначені у термінах знакопочережних представлень дійсних чисел. Проведені дослідження для випадку подання аргумента досліджуваних функцій у формі додатного ряду Кантора є узагальненням відомих результатів, а для випадку подання аргумента досліджуваних функцій у вигляді знакопочережного ряду Кантора — новими.

Результати розділу опубліковані у роботах [3ª, 6ª, 8ª, 9ª] і апробовані на наукових конференціях [21ª]–[24ª] та семінарах.

РОЗДІЛ 5

ЗНАКОПОЧЕРЕЖНИЙ $\tilde{Q}$-РОЗКЛАД, НЕГА-$\tilde{Q}$-ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ТА ФУНКЦІЇ ЗІ СКЛАДНОЮ ЛОКАЛЬНОЮ БУДОВОЮ

В цьому розділі досліджується подання чисел у формі знакопочережного $\tilde{Q}$-розкладу та розглядається нега-$\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел — відповідно узагальнення представлення дійсних чисел знакопочережним рядом Кантора та узагальнення взаємозв'язку кодувань чисел за допомогою додатного і знакопочережного рядів Кантора.

Вивчаються функції, аргумент яких визначений у термінах нега-$\tilde{Q}$-зображення, і, які є узагальненнями класичної функції Салема.

5.1. Знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад дійсного числа

Нехай заданою є матриця $\tilde{Q}$. Розглянемо ряд виду

$$-a_{i_1,1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n a_{i_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}q_{i_j,j}\right]. \tag{5.1}$$

Розклад (5.1) можна змоделювати, використовуючи аналітичний підхід. Суть аналітичного підходу до побудови знакопочережного $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел полягає в тому, що якщо основою нега-s-го представлення є фіксоване число $(-s)$, де $1 < s \in \mathbb{N}$, та за основу представлення чисел знакопочережним рядом Кантора приймається фіксована послідовність $(-d_n)$, де $1 < d_n \in \mathbb{N}$, то знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад можна побудувати, прийнявши за основу представлення дійсних чисел фіксовану матрицю

$(-1)\cdot\tilde{Q}=(-1)\cdot\|q_{i,j}\|$. Отже, розглянемо суму

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{i=0}^{i_n-1}(-q_{i,n})\right)\prod_{j=1}^{n-1}(-q_{i_j,j})\right]=-a_{i_1,1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n a_{i_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}q_{i_j,j}\right].$$

Очевидно, що останній знакочережний ряд є абсолютно збіжним, причому його сума належить відрізку $[t_0^{'};t_0^{''}]$, де

$$t_0^{'}=-a_{m_1,1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n\tilde{a}_{m_n,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\tilde{q}_{m_j,j}\right),$$

$$t_0^{''}=\sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n\tilde{a}_{0,n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{0,j}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n}\tilde{q}_{0,j}\right),$$

$$t_0^{''}-t_0^{'}=a_{m_1,1}+a_{m_2,2}q_{0,1}+a_{m_3,3}q_{m_1,1}q_{0,2}+a_{m_4,4}q_{0,1}q_{m_2,2}q_{0,3}+\ldots.$$

Позначатимемо $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{i_1i_2\ldots i_n\ldots}$ подання числа x у вигляді розкладу (5.1) та $\mathcal{F}^{(-\tilde{Q})}_{[t_0^{'};t_0^{''}]}$ — множину всіх можливих представлень дійсних чисел з $[t_0^{'};t_0^{''}]$ знакочережним $\tilde{Q}$-розкладом (5.1).

Легко помітити, що подання чисел у формі ряду (5.1) набуває виду нега-s-го представлення, якщо $q_{i,j}=\frac{1}{s}$ для всіх $j\in\mathbb{N}$, $i=\overline{0,s-1}$; у випадку, коли $q_{i,j}=\frac{1}{d_j}$ для будь-якого $j\in\mathbb{N}$, $i=\overline{0,d_j-1}$, — представлення знакочережним рядом Кантора (нега-D-представлення).

Означення 5.1. *Циліндром* $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_n}$ *рангу* n *з основою* $c_1c_2\ldots c_n$ називається множина виду $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_n}\equiv\left\{x:x=\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_ni_{n+1}i_{n+2}\ldots i_{n+k}\ldots},x\in[t_0^{'};t_0^{''}]\right\}$, де $c_1,\ldots,c_n$ — фіксовані числа, $i_{n+k}\in N^0_{m_{n+k}}=\{0,1,\ldots,m_{n+k}\}$, $k=1,2,\ldots$.

Дослідимо відображення $\phi:\mathcal{F}^{(-\tilde{Q})}_{[t_0^{'};t_0^{''}]}\to[t_0^{'};t_0^{''}]$ і дамо відповідь на питання про те, чи є подання дійсних чисел з $[t_0^{'};t_0^{''}]$ у вигляді розкладу в ряд (5.1) системою кодування (числення).

Лема 5.1. *Справедливими є наступні властивості:*

1. *Циліндр* $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_n}$ *є відрізком.*

2. *«Основне метричне відношення»:* $\frac{d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_kc}\right)}{d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_k}\right)} = q_{c,k+1}\times$

$$\times\frac{a_{m_{k+2},k+2} + \sum_{t=k+3}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=k+2}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right] + \sum_{t=k+3}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=k+2}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]}{a_{m_{k+1},k+1} + \sum_{t=k+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=k+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right] + \sum_{t=k+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=k+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]},$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\tilde{q}_{i_n,n} = \begin{cases} q_{i_n,n}, & \textit{якщо } n \text{ — } \textit{непарне;} \\ q_{m_n-i_n,n}, & \textit{якщо } n \text{ — } \textit{парне,} \end{cases}$$

$$\tilde{a}_{i_n,n} = \begin{cases} a_{i_n,n}, & \textit{якщо } n \text{ — } \textit{непарне;} \\ a_{m_n-i_n,n}, & \textit{якщо } n \text{ — } \textit{парне.} \end{cases}$$

3. *Якщо* $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c_nm_{n+1}0m_{n+3}0m_{n+5}\ldots} = \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c_n-1]0m_{n+2}0m_{n+4}0m_{n+6}\ldots}$, *де* $c_n \neq 0$, *тоді при парному* n *справедливою є наступна рівність*

$$\frac{t_0'' - \sum_{k=2}^{n-2}\left[\tilde{a}_{0,k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{0,j}\right] - \prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{0,j}}{t_0' + a_{m_1,1} + \sum_{k=2}^{n-1}\left[\tilde{a}_{m_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]} = \frac{q_{c_n,n}\prod_{j=1}^{n}\tilde{q}_{0,j}}{q_{c_n-1,n}\prod_{j=1}^{n}\tilde{q}_{m_j,j}}$$

та

$$\frac{t_0'' - \sum_{k=2}^{n-1}\left[\tilde{a}_{0,k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{0,j}\right]}{t_0' + a_{m_1,1} + \sum_{k=2}^{n-2}\left[\tilde{a}_{m_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right] + \prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{m_j,j}} = \frac{q_{c_n-1,n}\prod_{j=1}^{n}\tilde{q}_{0,j}}{q_{c_n,n}\prod_{j=1}^{n}\tilde{q}_{m_j,j}}$$

при непарному n.

Доведення. Покажемо, що довільний циліндр $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_n}$ *є відрізком.* Доведення проведемо для парного n. Нехай $x \in \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_n}$. Тобто,

$$x = -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right] +$$

$$+\prod_{j=1}^{n}q_{c_j,j}\left(-a_{i_{n+1},n+1} + \sum_{l=n+2}^{\infty}\left[(-1)^l a_{i_l,l}\prod_{r=n+1}^{l-1}q_{i_r,r}\right]\right).$$

Звідси,

$$x' = -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j,j}\right] -$$

$$-\prod_{j=1}^{n} q_{c_j,j}\left(a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_{n+t},n+t}\prod_{r=n+1}^{n+t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right) \leqslant$$

$$\leqslant x \leqslant -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j,j}\right] + \left(\prod_{j=1}^{n} q_{c_j,j}\right)\sum_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,n+t}\prod_{r=n+1}^{n+t-1}\tilde{q}_{0,r}\right] = x''.$$

Отже, $x \in [x'; x''] \supseteq \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_n}$.

Оскільки

$$x' = -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j,j}\right] +$$

$$+\left(\prod_{j=1}^{n} q_{c_j,j}\right)\inf\left\{-a_{i_{n+1},n+1} + \sum_{l=n+2}^{\infty}\left[(-1)^l a_{i_l,l}\prod_{r=n+1}^{l-1} q_{i_r,r}\right]\right\},$$

$$x'' = -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^{n}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j,j}\right] +$$

$$+\left(\prod_{j=1}^{n} q_{c_j,j}\right)\sup\left\{-a_{i_{n+1},n+1} + \sum_{l=n+2}^{\infty}\left[(-1)^l a_{i_l,l}\prod_{r=n+1}^{l-1} q_{i_r,r}\right]\right\},$$

то x', x'', x належать $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_n}$.

«Основне метричне відношення». В нега-s-му, нега-D-представленнях для відповідних циліндрів $\Delta^{-s}_{c_1c_2\ldots c_n}$, $\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n}$ рангу n з основою $c_1c_2\ldots c_n$ справедливими є наступні співвідношення:

— для довільного $n \in \mathbb{N}$: $|\Delta^{-s}_{c_1c_2\ldots c_n}| =$

$$= \frac{1}{s^n}\hat{\varphi}^n(\Delta^s_{(s-1)}) = \frac{1}{s^n}\hat{\varphi}^n\left(\left|\sup_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} - \inf_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{s^n}\left|\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\inf_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{s^n}\left|\hat{\varphi}^n\left(\Delta^{-s}_{(0[s-1])}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\Delta^{-s}_{([s-1]0)}\right)\right|,$$

де $\hat{\varphi}$ — оператор зсуву цифр відповідного представлення.

Таким чином,

$$\left|\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\inf_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right)\right| =$$

$$= \hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} - \inf_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}\right) = const =$$

$$= \sup_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} - \inf_x \Delta^{-s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

— для кожного $n \in \mathbb{N}$:

$$|\Delta^{-D}_{c_1c_2\ldots c_n}| = \frac{1}{d_1d_2\ldots d_n}\hat{\varphi}^n(\Delta^{D}_{[d_1-1][d_2-1]\ldots[d_n-1]\ldots}) =$$

$$= \frac{1}{d_1d_2\ldots d_n}\hat{\varphi}^n\left(\left|\sup_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} - \inf_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{d_1d_2\ldots d_n}\left|\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\inf_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{d_1d_2\ldots d_n}\left|\hat{\varphi}^n\left(\Delta^{-D}_{(0[d_2-1]\ldots0[d_{2k}-1]\ldots)}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\Delta^{-D}_{[d_1-1]0\ldots[d_{2k-1}-1]0\ldots}\right)\right|,$$

де $k = 1, 2, \ldots$, $\hat{\varphi}$ — оператор зсуву цифр відповідного представлення.

Отже,

$$\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} - \inf_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}\right) =$$

$$= \left|\hat{\varphi}^n\left(\sup_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}\right) - \hat{\varphi}^n\left(\inf_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}\right)\right| = const =$$

$$= \sup_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots} - \inf_x \Delta^{-D}_{\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_n\ldots}.$$

Розглянемо розклад (5.1). Нехай $n = 1$. В такому разі

$$d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1}\right) = \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1m_20m_4\ldots0m_{2k}\ldots} - \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_10m_30m_5\ldots0m_{2k-1}\ldots} =$$

$$= q_{c_1,1}\left(a_{m_2,2} + \sum_{k=3}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,k}\prod_{j=2}^{k-1}\tilde{q}_{0,j}\right] + \sum_{k=3}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_k,k}\prod_{j=2}^{k-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]\right) =$$

$$= q_{c_1,1}\left(\frac{t_0^{''}}{q_{0,1}} - \frac{t_0^{'} + a_{m_1,1}}{q_{m_1,1}}\right) = \frac{q_{m_1,1}t_0^{''} - q_{0,1}t_0^{'} - a_{m_1,1}q_{0,1}}{q_{0,1}q_{m_1,1}}q_{c_1,1} = q_{c_1,1}(t_0^{''} - t_0^{'}),$$

якщо справедливою є умова

$$t_0^{''} = \frac{q_{0,1}(1-q_{m_1,1})}{q_{m_1,1}(1-q_{0,1})}(1+t_0^{'}).$$

Очевидно, остання умова не завжди є справедливою залежно від матриці $\tilde{Q}$. Наприклад, розглянемо випадок, коли для всіх натуральних значень n справедливо $m_n < \infty$ та для всіх $n > 1$ $q_{0,n} = const = q_0$, $q_{m_n} = const = q_m$, $q_0 \neq q_m$, $q_{0,1} = q_1$, $q_{m_1,1} = q_2$, $q_1 \neq q_2$. Тоді

$$t_0^{'} = \Delta^{(-\tilde{Q})}_{m_1 0 m_3 0 m_5 \ldots} \equiv -\left(1 - q_2 + q_2 \sum_{k=1}^{\infty}\left((1-q_m)q_0^k q_m^{k-1}\right)\right) =$$

$$= q_2\left(1 - \frac{(1-q_m)q_0}{1-q_0 q_m}\right) - 1,$$

$$t_0^{''} = \Delta^{(-\tilde{Q})}_{0 m_2 0 m_4 0 m_6 \ldots} \equiv q_1\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-q_m)q_0^{k-1}q_m^{k-1}\right) = \frac{1-q_m}{1-q_0 q_m}q_1.$$

Отож,

$$\frac{q_{0,1}(1-q_{m_1,1})}{q_{m_1,1}(1-q_{0,1})}(1+t_0^{'}) = \frac{q_1(1-q_2)}{q_2(1-q_1)}q_2\left(1 - \frac{(1-q_m)q_0}{1-q_0 q_m}\right) =$$

$$= \frac{q_1(1-q_2)(1-q_0)}{(1-q_1)(1-q_0 q_m)} = t_0^{''},$$

якщо

$$\frac{1-q_m}{1-q_0} = \frac{1-q_2}{1-q_1}.$$

Цілком очевидно, що останнє співвідношення справедливе не завжди. Тобто, метричне відношення $\frac{d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_k c}\right)}{d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_k}\right)}$, де $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, при $k = 0$ циліндром вважатимемо відрізок $[t_0^{'}; t_0^{''}]$, залежно від матриці $\tilde{Q}$ не завжди дорівнює $q_{c,k+1}$. В загальному випадку

$$\frac{d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_k c}\right)}{d\left(\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_k}\right)} =$$

$$= q_{c,k+1}\frac{a_{m_{k+2},k+2}+\sum_{t=k+3}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=k+2}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]+\sum_{t=k+3}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=k+2}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]}{a_{m_{k+1},k+1}+\sum_{t=k+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=k+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]+\sum_{t=k+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=k+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]}.$$

Твердження про представлення чисел, що мають два різних зображення. Нехай $x_1 = \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c_nm_{n+1}0m_{n+3}0m_{n+5}\ldots}, \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c_n-1]0m_{n+2}0m_{n+4}0m_{n+6}\ldots} = x_2$, де $c_n \neq 0$.

Якщо n — парне число, то

$$x_1 = -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^{n-1}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right] + (-1)^n\left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\times$$

$$\times\left(a_{c_n,n} - q_{c_n,n}\left(a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[a_{m_{n+2k-1},n+2k-1}\prod_{j=n+1}^{n+2k-2}\tilde{q}_{m_j,j}\right]\right)\right) =$$

$$= -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^{n-1}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right] + \left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\times$$

$$\times\left(a_{c_n,n} + q_{c_n,n}\left(t_0^{'} + a_{m_1,1} + \sum_{k=2}^{n-1}\left[\tilde{a}_{m_k,k}\prod_{j=n+1}^{k-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]\right)\prod_{j=1}^{n}(\tilde{q}_{m_j,j})^{-1}\right),$$

$$x_2 = -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^{n-1}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right] + (-1)^n\left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\times$$

$$\times\left(a_{c_n-1,n} + q_{c_n-1,n}\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{m_{n+2k},n+2k}\prod_{j=n+1}^{n+2k-1}\tilde{q}_{0,j}\right]\right) =$$

$$= -a_{c_1,1} + \sum_{k=2}^{n-1}\left[(-1)^k a_{c_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{c_j,j}\right] + \left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\times$$

$$\times\left(a_{c_n-1,n} + q_{c_n-1,n}\left(t_0^{''} - \sum_{k=2}^{n}\left[\tilde{a}_{0,k}\prod_{j=n+1}^{k-1}\tilde{q}_{0,j}\right]\right)\prod_{j=1}^{n}(\tilde{q}_{0,j})^{-1}\right).$$

З умови $x_1 = x_2$ випливає перша рівність в третьому пункті леми.

Нехай n — непарне число. Тоді за умови, що $x_1 = x_2$, отримаємо

$$-q_{c_n-1,n} + q_{c_n,n}\left(t_0^{''} - \sum_{k=2}^{n-1}\left[\tilde{a}_{0,k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{0,j}\right]\right)\prod_{j=1}^{n}(\tilde{q}_{0,j})^{-1} =$$

$$= q_{c_n-1,n}\left(t_0^{'} + a_{m_1,1} + \sum_{k=2}^{n}\left[\tilde{a}_{m_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{q}_{m_j,j}\right]\right)\prod_{j=1}^{n}(\tilde{q}_{m_j,j})^{-1},$$

звідки випливає друга рівність в третьому пункті леми. □

Теорема 5.1. *Для довільного числа* $x \in [t_0^{'}; t_0^{''}]$ *існує послідовність* (i_k), $i_k \in N_{m_k}^0$, *така, що*

$$x = -a_{i_1,1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[(-1)^k a_{i_k,k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{i_j,j}\right],$$

якщо для всіх $k \in \mathbb{N}$ *справедливою є наступна система умов*

$$\begin{cases} q_{c+1,2k}\left(a_{m_{2k+1},2k+1} + \sum\limits_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_{2k+t},2k+t}\prod\limits_{r=2k+1}^{2k+t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right) \geqslant \\ \qquad \geqslant q_{c,2k}\left(1 - \sum\limits_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,2k+t}\prod\limits_{r=2k+1}^{2k+t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]\right); \\ q_{c+1,2k-1}\left(a_{m_{2k},2k} + \sum\limits_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,2k+t-1}\prod\limits_{r=2k}^{2k+t-2}\tilde{q}_{0,r}\right]\right) \geqslant \\ \qquad \geqslant q_{c,2k-1}\left(1 - \sum\limits_{t=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_{2k+t-1},2k+t-1}\prod\limits_{r=2k}^{2k+t-2}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right). \end{cases}$$

Доведення. З леми 5.1 відомо, що довільний циліндр $\Delta_{c_1c_2...c_n}^{(-\tilde{Q})}$ є відрізком. Дослідимо задачу про розташування циліндрів однакового рангу.

Оскільки у згаданих вище нега-s-му та нега-D-зображеннях циліндри є відрізками, що розташовані «зліва направо» при парному n та «справа наліво», якщо n — непарне, то «щось подібне» мало б справджуватися і для представлення рядом (5.1).

Розглянемо необхідні для подальшого дослідження розташування циліндрів $\Delta_{c_1c_2...c_n}^{(-\tilde{Q})}$ співвідношення. Нехай n — деяке фіксоване натуральне число.

Якщо циліндри $\Delta_{c_1c_2...c_{n-1}c}^{(-\tilde{Q})}$, $\Delta_{c_1c_2...c_{n-1}[c+1]}^{(-\tilde{Q})}$ *перекриваються* і розташовані:

— *«зліва направо»*, то $\kappa_1 = \sup \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c} - \inf \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]} > 0;$

— *«справа наліво»*, то $\kappa_2 = \sup \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]} - \inf \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c} > 0.$

Причому, у першому випадку

$$\kappa_1 < \kappa_2 = |\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c}| + |\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]}| - |\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c} \cap \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]}| = W.$$

У другому ж випадку $\kappa_2 < \kappa_1 = W$.

Якщо циліндри $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c}$, $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]}$ *не перекриваються* і розташовані:

— *«зліва направо»*, то $\nu_1 = \inf \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1\ldots c_{n-1}[c+1]} - \sup \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1\ldots c_{n-1}c} = -\kappa_1 > 0;$

— *«справа наліво»*, то $\nu_2 = \inf \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1\ldots c_{n-1}c} - \sup \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1\ldots c_{n-1}[c+1]} = -\kappa_2 > 0.$

Проте, в такому разі у першому випадку

$$\nu_1 > \nu_2 = V = -|\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c}| - |\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]}| - \varpi,$$

де ϖ — міра Лебега спільного суміжного з цилідрами $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1\ldots c_{n-1}c}$, $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1\ldots c_{n-1}[c+1]}$ інтервала. У другому випадку $V = \nu_1 < \nu_2$.

Перевіримо, які ж із наведених вище співвідношень є справедливими. Отже, нехай n — парне. Розглянемо різницю

$$\kappa_1 = \sup \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c} - \inf \Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]} =$$

$$= a_{c,n}\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} + q_{c,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j}\right)\left(a_{0,n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]\right) -$$

$$-a_{c+1,n}\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j} + q_{c+1,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j}\right)\left(a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j}\right) \times (q_{c+1,n}\left(a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right) +$$

$$+q_{c,n}\left(-1 + \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]\right)).$$

Позначивши

$$\omega_1 = a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right], \quad \omega_2 = \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right],$$

отримаємо $\kappa_1 = (q_{c+1,n}\omega_1 - q_{c,n} + q_{c,n}\omega_2)q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}$.

Таким чином, справедливими є подвійна нерівність

$$-q_{c,n} < \frac{\kappa_1}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}} \leqslant -q_{c,n} + \max\{q_{c,n}, q_{c+1,n}\}$$

та умови

$$\kappa_1 < 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 < (1-\omega_2)q_{c,n},$$

$$\kappa_1 = 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 = (1-\omega_2)q_{c,n},$$

$$\kappa_1 \geqslant 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 \geqslant (1-\omega_2)q_{c,n}.$$

Крім того,

$$\kappa_2 = \sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1\ldots c_{n-1}[c+1]} - \inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1\ldots c_{n-1}c} = (q_{c,n} + q_{c+1,n}\omega_2 + q_{c,n}\omega_1)\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j} > 0,$$

$$\frac{\kappa_2-\kappa_1}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}} = (2-\omega_2)q_{c,n} + (q_{c,n} - q_{c+1,n})\omega_1 + q_{c+1,n}\omega_2 =$$

$$= (2-\omega_2)q_{c,n} - (\omega_1-\omega_2)q_{c+1,n} + q_{c,n}\omega_1 > 0,$$

де $\omega_1 > \omega_2$.

Отже, у випадку парного n циліндри розташовані «зліва направо», але, залежно від матриці $\tilde{Q}$, суміжні циліндри $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_n}$ можуть або перекриватися, або не перекриватися, або перетинатися в одній точці.

Аналогічно, якщо n — непарне число, тоді

$$\kappa_2 = \sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]} - \inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c} = -q_{c,n}\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j} +$$

$$+q_{c+1,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}q_{c_j,j}\right)\left(a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right]\right) +$$

$$+q_{c,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j}\right)\left(\sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right]\right).$$

Позначивши

$$\omega_1 = a_{m_{n+1},n+1} + \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{0,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{0,r}\right], \quad \omega_2 = \sum_{t=n+2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{m_t,t}\prod_{r=n+1}^{t-1}\tilde{q}_{m_r,r}\right],$$

отримаємо $\kappa_2 = (-q_{c,n} + q_{c+1,n}\omega_1 + q_{c,n}\omega_2)q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}$.

Отже,

$$-q_{c,n} < \frac{\kappa_2}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}} \leqslant -q_{c,n} + \max\{q_{c,n}, q_{c+1,n}\}.$$

Причому,

$$\kappa_2 < 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 < (1-\omega_2)q_{c,n},$$

$$\kappa_2 = 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 = (1-\omega_2)q_{c,n},$$

$$\kappa_2 \geqslant 0, \text{ якщо } q_{c+1,n}\omega_1 \geqslant (1-\omega_2)q_{c,n}.$$

Оскільки

$$\kappa_1 = \sup\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c} - \inf\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]} =$$
$$= (q_{c,n} + q_{c,n}\omega_1 + q_{c+1,n}\omega_2)\left(\prod_{j=1}^{n-1} q_{c_j,j}\right) > 0$$

та

$$\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{q_{c_1,1}q_{c_2,2}\cdots q_{c_{n-1},n-1}} = (2-\omega_2)q_{c,n} + (q_{c,n} - q_{c+1,n})\omega_1 + q_{c+1,n}\omega_2 > 0,$$

то у випадку непарного n циліндри розташовані «справа наліво», але, залежно від матриці $\tilde{Q}$, суміжні циліндри $\Delta^{(-\tilde{Q})}_{c_1c_2\ldots c_n}$ можуть або перекриватися, або не перетинатися, або перетинатися в одній точці. □

5.2. Нега-$\tilde{Q}$-зображення дійсних чисел

Дослідження, описані в даному пункті дисертаційної роботи, є допоміжними. Їх застосування у моделюванні функцій зі складною локальною будовою буде описано в наступному пункті.

Нехай маємо матрицю $\tilde{Q}$. Розглянемо ряд виду

$$\sum_{i=0}^{i_1-1} q_{i,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \tilde{\delta}_{i_n,n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{q}_{i_j,j} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{q}_{i_j,j} \right), \tag{5.2}$$

де перша сума дорівнює 0 при $i_1 = 0$,

$$\tilde{\delta}_{i_n,n} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i_n = 0 \text{ та } n \text{ — непарне;} \\ \sum_{i=0}^{i_n-1} q_{i,n}, & \text{якщо } i_n \neq 0 \text{ та } n \text{ — непарне;} \\ \sum_{i=m_n-i_n}^{m_n} q_{i,n}, & \text{якщо } n \text{ — парне.} \end{cases}$$

Означення 5.2. Подання числа x у вигляді розкладу в ряд (5.2) називається *нега-$\tilde{Q}$-представленням числа x*, а його символічний запис $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)\ldots}$ — *нега-$\tilde{Q}$-зображенням числа x.*

Оскільки $a_{m_{2k}-i_{2k}} = q_{0,2k} + q_{1,2k} + \ldots + q_{m_{2k}-i_{2k}-1,2k} = 1 - q_{m_{2k}-i_{2k},2k} - q_{m_{2k}-i_{2k}+1,2k} - \ldots - q_{m_{2k},2k}$, то очевидним є наступне твердження.

Лема 5.2. *Справедливими є наступні тотожності:*

$$\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1i_2\ldots i_n\ldots} \equiv \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{2k-1}[m_{2k}-i_{2k}]\ldots}, \ \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1i_2\ldots i_n\ldots} \equiv \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{2k-1}[m_{2k}-i_{2k}]\ldots}.$$

За умови, що $m_n < \infty$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, числа із зліченної підмножини відрізка $[0;1]$ мають два різних нега-$\tilde{Q}$-зображення, а саме:

$$\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1i_2\ldots i_{n-1}i_nm_{n+1}0m_{n+3}0m_{n+5}\ldots} = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1i_2\ldots i_{n-1}[i_n-1]0m_{n+2}0m_{n+4}\ldots}, \ i_n \neq 0.$$

Такі числа називаються *нега-$\tilde{Q}$-раціональними*, а решта, що мають єдине нега-$\tilde{Q}$-зображення, — *нега-$\tilde{Q}$-ірраціональними.*

Приділимо увагу вивченню розкладів дійсних чисел в ряд (5.2) та змоделюємо[1] останнє представлення. Нехай маємо деяку матрицю $\tilde{Q}' = \|\tilde{q}_{i,j}\|$ ($i = \overline{0, m_j}$, $m_j \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, $j = 1, 2, \ldots$), яка володіє такими самими властивостями, що й матриця $\tilde{Q}$.

---

[1] Такий спосіб моделювання представлення дійсних чисел не є новим (див., наприклад, [8, с. 87-89]).

Слідуючи «зліва направо», точками $\tilde{a}_{0,1}, \tilde{a}_{1,1}, \dots, \tilde{a}_{m_1,1}$ розіб'ємо відрізок $[0;1]$ на відрізки, які назвемо відрізками першого рангу та позначимо $\Delta_0^{-\tilde{Q}}, \Delta_1^{-\tilde{Q}}, \dots,$ відповідно. Очевидно, що $|\Delta_{i_1}^{-\tilde{Q}}| = \tilde{q}_{i_1,1}$. Слідуючи «справа наліво», розіб'ємо (точками $\tilde{a}_{i_1+1,1}, \tilde{a}_{0,2}, \tilde{a}_{1,2}, \dots$) кожен з відрізків $\Delta_{i_1}^{-\tilde{Q}}$ першого рангу на відрізки $\Delta_{i_1 i}^{-\tilde{Q}}$ другого рангу, де $i = \overline{0, m_2}$, таким чином, щоб $|\Delta_{i_1 i}^{-\tilde{Q}}| = \tilde{q}_{i_1,1}\tilde{q}_{i,2}$ і т. д. Кожен відрізок $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k-1}}^{-\tilde{Q}}$ $(2k-1)$-го рангу, слідуючи «справа наліво», розіб'ємо на відрізки $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i}^{-\tilde{Q}}$ $2k$-го рангу, де $i = \overline{0, m_{2k}}$, таким чином, що $|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i}^{-\tilde{Q}}| = \tilde{q}_{i,2k} \prod_{j=1}^{2k-1} \tilde{q}_{i_j,j}$, а кожний відрізок $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k-1} i_{2k}}^{-\tilde{Q}}$ $2k$-го рангу, слідуючи «зліва направо», розіб'ємо на відрізки $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k} i}^{-\tilde{Q}}$ $(2k+1)$-го рангу, де $i = \overline{0, m_{2k+1}}$, так, що $|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{2k} i}^{-\tilde{Q}}| = \tilde{q}_{i,2k+1} \prod_{j=1}^{2k} \tilde{q}_{i_j,j}$, і т. д. В результаті отримаємо систему відрізків різних рангів, які володіють властивостями:

1. $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k i}^{-\tilde{Q}} \subset \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{-\tilde{Q}}$ для всіх $i \in N_{m_{k+1}}^0$;
2. $|\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{-\tilde{Q}}| = \prod_{j=1}^{k} \tilde{q}_{i_j,j} \to 0 \quad (k \to \infty)$.

Як наслідок, за аксіомою Кантора

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x)}^{-\tilde{Q}} = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x) \dots}^{-\tilde{Q}}.$$

Тобто, кожна послідовність (i_k), $i_k \in N_{m_k}^0$, а разом з нею і послідовність відрізків $(\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}^{-\tilde{Q}})$ визначає єдину точку $x \in [0;1)$, яку позначатимемо $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k \dots}^{-\tilde{Q}}$. І навпаки, для кожної точки $x \in [0;1)$ існує послідовність відрізків $\Delta_{i_1(x)}^{-\tilde{Q}}$, $\Delta_{i_1(x) i_2(x)}^{-\tilde{Q}}$, $\dots$, $\Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x)}^{-\tilde{Q}}$, $\dots$, кожен з яких містить x.

Накладемо умови, щоб $\tilde{Q}' = \tilde{Q}$. Тобто, що $\tilde{q}_{i_k,k}$ є елементами матриці $\tilde{Q}$.

Якщо $x = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_k(x) \dots}^{-\tilde{Q}}$, то існує рівно i_1 відрізків 1-го рангу, які лежать лівіше точки x; $m_2 - i_2$ відрізків 2-го рангу, які належать $\Delta_{i_1(x)}^{-\tilde{Q}}$ і лежать лівіше x; i_{2k-1} відрізків $(2k-1)$-го рангу, які належать $\Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_{2k-2}(x)}^{-\tilde{Q}}$, лежать лівіше x і мають сумарну довжину $a_{i_{2k-1},2k-1} \prod_{j=1}^{2k-2} \tilde{q}_{i_j,j}$; $m_{2k} - i_{2k}$ відрізків $2k$-го рангу, які належать $\Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots i_{2k-1}(x)}^{-\tilde{Q}}$, лежать лівіше x і мають сумарну довжину $a_{m_{2k}-i_{2k},2k} \prod_{j=1}^{2k-1} \tilde{q}_{i_j,j}$, і т. д. Тому для будь-якого $x \in [0;1)$

існує послідовність $(i_k(x))$, $i_k(x) \in N^0_{m_k}$, така, що

$$x = a_{i_1(x),1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\tilde{a}_{i_k(x),k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i_j(x),j} \right]. \tag{5.3}$$

Зауваження 5.1. Варто зазначити, що подання чисел у формі розкладу (5.3) є узагальненням нега-(d_n)-представлення та дещо видозміненого нега-s-го представлення (1.3).

Таким чином, $\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots} \equiv \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{2k-1}[m_{2k}-i_{2k}]\ldots}$ і навпаки, $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots} \equiv$ $\equiv \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{2k-1}[m_{2k}-i_{2k}]\ldots}$.

Оскільки $a_{m_{2k}-i_{2k}} = q_{0,2k} + q_{1,2k} + \ldots + q_{m_{2k}-i_{2k}-1,2k} = 1 - q_{m_{2k}-i_{2k},2k} -$ $-q_{m_{2k}-i_{2k}+1,2k} - \ldots - q_{m_{2k},2k}$, то

$$\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots} \equiv \sum_{i=0}^{i_1-1} q_{i,1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[(-1)^{k-1} \tilde{\delta}_{i_k,k} \prod_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i_j,j} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{2k-1} \tilde{q}_{i_j,j} \right).$$

Означення 5.3. *Циліндром $\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ рангу n з основою $c_1 c_2 \ldots c_n$* називається множина всіх можливих чисел з $[0;1]$, в нега-$\tilde{Q}$-зображенні яких перші n символів $i_1, i_2, \ldots, i_n$ рівні $c_1, c_2, \ldots, c_n$ відповідно, де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — фіксований набір символів з $N^0_{m_1}, N^0_{m_2}, \ldots, N^0_{m_n}$ відповідно.

З наведених вище міркувань випливає наступне твердження.

Лема 5.3. *Циліндри $\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ володіють наступними властивостями:*

1. *циліндр $\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ є відрізком, причому*

$$\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n} = \left[\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n m_{n+1} 0 m_{n+3} \ldots}; \Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n 0 m_{n+2} 0 m_{n+4} \ldots} \right], \ n \text{ — непарне},$$

$$\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n} = \left[\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n 0 m_{n+2} 0 m_{n+4} \ldots}; \Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n m_{n+1} 0 m_{n+3} \ldots} \right], \ n \text{ — парне};$$

2. *для будь-якого $n \in \mathbb{N}$: $\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n c} \subset \Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$;*
3. *для всіх $n \in \mathbb{N}$: $\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n} = \bigcup_{c=0}^{m_{n+1}} \Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n c}$;*
4. *циліндри $\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ розташовані «зліва направо», якщо n — непарне, та «справа наліво», якщо n — парне число. Тобто,*

$$\sup \Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_{n-1} c} = \inf \Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_{n-1}[c+1]}, \text{ якщо } n \text{ — непарне},$$

$$\sup \Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}[c+1]} = \inf \Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_{n-1}c}, \text{ якщо } n \text{ — парне};$$

5. *для будь-якого* $n \in \mathbb{N}$: $|\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_n}| = \prod_{j=1}^{n} \tilde{q}_{c_j,j}$;
6. *для довільного* $x \in [0;1]$: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_n} = x = \Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$.

5.3. Функції зі складною локальною будовою, аргумент яких визначений у термінах нега-$\tilde{Q}$-зображення

5.3.1. Задання та коректність означення функцій. Нехай задано матриці однакового порядку $\tilde{Q} = \|q_{i,n}\|$ та $P = \|p_{i,n}\|$, де $i = \overline{0, m_n}$, $m_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $m_n < \infty$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо[2] деякий клас функцій Λ_F, аргумент x і значення y кожної функції з якого подаються наступним чином:

$$x = \sum_{i=0}^{i_1-1} q_{i,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^{n-1}\tilde{\delta}_{i_n,n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{q}_{i_j,j}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{q}_{i_j,j}\right),$$

$$y = F(x) = \sum_{i=0}^{i_1-1} p_{i,1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(-1)^{n-1}\tilde{\zeta}_{i_n,n} \prod_{j=1}^{n-1} \tilde{p}_{i_j,j}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{2n-1} \tilde{p}_{i_j,j}\right),$$

де перша сума в останніх рівностях дорівнює 0 при $i_1 = 0$,

$$\tilde{\zeta}_{i_n,n} = \begin{cases} \sum_{i=m_n-i_n}^{m_n} p_{i,n}, & \text{якщо } n \text{ — парне та } i_n \neq m_n; \\ 0, & \text{якщо } n \text{ — непарне та } i_n = 0; \\ \sum_{i=0}^{i_n-1} p_{i,n}, & \text{якщо } n \text{ — непарне та } i_n \neq 0, \end{cases}$$

Тобто, розглядатимемо функції, аргумент яких визначений в термінах нега-$\tilde{Q}$-представлення, але подання значення функції має лише «формальний» вигляд нега-P-представлення і є останнім лише за умови додатності всіх елементів $p_{i,n}$ матриці P. Клас функцій, аргумент і значення яких подаються у вигляді нега-$\tilde{Q}$- і нега-P-представлення відповідно та інваріантом

---

[2] Більш детальніше відповідні дослідження описано в препринті [11[a]].

яких є символ i_n нега-$\tilde{Q}$-зображення дійсного числа, є підкласом досліджуваного класу функцій.

З леми 5.2 випливає, що

$$F\left(\tilde{a}_{i_1(x),1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\tilde{a}_{i_n(x),n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{i_j(x),j}\right]\right)=\tilde{\beta}_{i_1(y),1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\tilde{\beta}_{i_n(y),n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{i_j(y),j}\right],$$

де, як наголошується, $\tilde{Q}$ та P — фіксовані матриці.

Розглянемо нескінченну систему функціональних рівнянь

$$f\left(\hat{\varphi}^k(x)\right)=\tilde{\beta}_{i_{k+1},k+1}+\tilde{p}_{i_{k+1},k+1}f\left(\hat{\varphi}^{k+1}(x)\right), \tag{5.4}$$

де $k=0,1,\ldots$.

Врахувавши (1.7), систему (5.4) можна записати наступним чином

$$f\left(\tilde{a}_{i_k,k}+\tilde{q}_{i_k,k}\hat{\varphi}^k(x)\right)=\tilde{\beta}_{i_k,k}+\tilde{p}_{i_k,k}f\left(\hat{\varphi}^k(x)\right),$$

де $k=1,\ldots$, $i\in N^0_{m_k}$.

Лема 5.4. *Функція* $y=F(x)$ *є коректно означеною в довільній точці відрізка* $[0;1]$.

Для доведення леми достатньо оцінити різницю значень досліджуваної функції від двох різних нега-$\tilde{Q}$-зображень довільної фіксованої нега-$\tilde{Q}$-раціональної точки. Відповідні обчислення описано в препринті [11$^{\text{a}}$].

Теорема 5.2. *Нескінченна система функціональних рівнянь* (5.4) *в класі обмежених та визначених на* $[0;1]$ *функцій має єдиний розв'язок*

$$F(x)=\beta_{i_1(x),1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\tilde{\beta}_{i_k(x),k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{p}_{i_j(x),j}\right]. \tag{5.5}$$

Доведення. Справді, для довільного $x=\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1(x)i_2(x)\ldots i_k(x)\ldots}$ з $[0;1]$ отримаємо:

$$\begin{aligned}f(x)&=\beta_{i_1(x),1}+p_{i_1(x),1}f\left(\hat{\varphi}(x)\right)=\\&=\beta_{i_1(x),1}+p_{i_1(x),1}\left(\beta_{m_2-i_2(x),2}+p_{m_2-i_2(x),2}f\left(\hat{\varphi}^2(x)\right)\right)=\end{aligned}$$

$$=\beta_{i_1(x),1}+\beta_{m_2-i_2(x),2}p_{i_1(x),1}+p_{i_1(x),1}p_{m_2-i_2(x),2}\left(\beta_{i_3(x),3}+p_{i_3(x),3}f\left(\hat{\varphi}^3(x)\right)\right)=\ldots$$

$$\ldots=\beta_{i_1(x),1}+\tilde{\beta}_{i_2(x),2}\tilde{p}_{i_1(x),1}+\tilde{\beta}_{i_3(x),3}\tilde{p}_{i_1(x),1}\tilde{p}_{i_2(x),2}+\ldots$$

$$\ldots+\tilde{\beta}_{i_k(x),k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{p}_{i_j(x),j}+\left(\prod_{j=1}^{k}\tilde{p}_{i_j(x),j}\right)f\left(\hat{\varphi}^k(x)\right).$$

Оскільки $\hat{\varphi}^k(x)\in[0;1]$ для довільних $x\in[0;1]$ та $k\in\mathbb{Z}_0$, функція f визначена в усіх точках відрізка $[0;1]$, обмежена на цьому відрізку (тобто, існує таке $M>0$, що для будь-якого $x\in[0;1]$ виконується умова $|f(x)|\leqslant\leqslant M$) і нескінчений добуток $\prod_{j=1}^{k}\tilde{p}_{i_j(x),j}\leqslant\prod_{j=1}^{k}|\tilde{p}_{i_j(x),j}|$ прямує до нуля при $k\to\infty$, тому $f\left(\Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1i_2\ldots i_k\ldots}\right)=$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\beta_{i_1(x),1}+\sum_{n=2}^{k}\left[\tilde{\beta}_{i_n(x),n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{i_j(x),j}\right]+\left(\prod_{j=1}^{k}\tilde{p}_{i_j(x),j}\right)f\left(\hat{\varphi}^k(x)\right)\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\beta_{i_1(x),1}+\sum_{n=2}^{k}\left[\tilde{\beta}_{i_n(x),n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{i_j(x),j}\right]\right)=\beta_{i_1(x),1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\tilde{\beta}_{i_k(x),k}\prod_{j=1}^{k-1}\tilde{p}_{i_j(x),j}\right].$$

□

5.3.2. Неперервність та умови монотонності.

Лема 5.5. *Функція $y=F(x)$ є неперервною в усіх точках відрізка $[0;1]$.*

Доведення. Нехай $[0;1]\ni x_0$ — деяке число. Розглянемо різницю

$$F(x)-F(x_0)=\left(\prod_{j=1}^{n_0}\tilde{p}_{i_j,j}\right)\left(\tilde{\beta}_{i_{n_0+1}(x),n_0+1}-\tilde{\beta}_{i_{n_0+1}(x_0),n_0+1}\right)+\left(\prod_{j=1}^{n_0}\tilde{p}_{i_j,j}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{k=n_0+2}^{\infty}\left(\tilde{\beta}_{i_k(x),k}\prod_{l=n_0+1}^{k-1}\tilde{p}_{i_l(x),l}\right)-\sum_{k=n_0+2}^{\infty}\left(\tilde{\beta}_{i_k(x_0),k}\prod_{l=n_0+1}^{k-1}\tilde{p}_{i_l(x_0),l}\right)\right),$$

де $i_{n_0+1}(x)\neq i_{n_0+1}(x_0)$, $i_j(x)=i_j(x_0)$, $j=\overline{1,n_0}$.

Нехай x_0 — нега-$\tilde{Q}$-ірраціональна точка. Перейшовши до границі при $x\to x_0$, в силу обмеженості F, отримаємо

$$\lim_{x\to x_0}|F(x)-F(x_0)|=\lim_{n_0\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{n_0}|\tilde{p}_{i_j,j}|\right)=0,$$

оскільки умови $x \to x_0$ та $n_0 \to \infty$ є еквівалентними. Таким чином,

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0).$$

У випадку нега-$\tilde{Q}$-раціонального x_0 для доведення неперервності слід довести неперервність зліва та неперервність справа функції $y = F(x)$ в точці x_0. Справді, позначивши

$$x_0 = x_0^{(1)} = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}[i_n - 1]0 m_{n+2} 0 m_{n+4} \ldots} = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n m_{n+1} 0 m_{n+3} \ldots} = x_0^{(2)},$$

якщо n — непарне, та

$$x_0 = x_0^{(1)} = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n m_{n+1} 0 m_{n+3} \ldots} = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}[i_n - 1]0 m_{n+2} 0 m_{n+4} \ldots} = x_0^{(2)},$$

якщо n — парне, розглянемо границі

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = \lim_{x \to x_0^{(2)}} F(x), \quad \lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = \lim_{x \to x_0^{(1)}} F(x)$$

і скористаємось міркуваннями, наведеними для випадку, коли точка x_0 є нега-$\tilde{Q}$-ірраціональною. □

Лема 5.6. *Значення приросту* $\mu_F\left(\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}\right)$ *функції* F *на циліндрі (відрізку)* $\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ *обчислюється за формулою:*

$$\mu_F\left(\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1 c_2 \ldots c_n}\right) = \prod_{j=1}^{n} \tilde{p}_{i_j, j}. \tag{5.6}$$

Теорема 5.3. *Функція* $y = F(x)$ *є:*

— *монотонно неспадною (зростаючою), якщо всі елементи* $p_{i,n}$ *матриці* P *є невід'ємними (додатними);*

— *немонотонною на відрізку* $[0; 1]$, *але такою, що має хоча б один проміжок монотонності на цьому відрізку, якщо матриця* P *не містить нулів та існує лише скінченний набір* $\{p_{i,n}\}$ *елементів* $p_{i,n} < 0$ *матриці* P*;*

— *такою, що не має жодного проміжку монотонності на* $[0;1]$*, якщо матриця* P *не містить нулів та існує нескінченна підпослідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що для довільного* $k \in \mathbb{N}$ *існує хоча б один елемент* $p_{i,n_k} < 0$ *матриці* P*, де* $i = \overline{0, m_{n_k}}$*;*

— *сталою майже скрізь на* $[0;1]$*, якщо існує нескінченна підпослідовність* (n_k) *натуральних чисел така, що для довільного* $k \in \mathbb{N}$ *існує хоча б один елемент* $p_{i,n_k} = 0$ *матриці* P*, де* $i = \overline{0, m_{n_k}}$*.*

5.3.3. Інтегральні властивості.

Теорема 5.4. *Функція* F *є інтегровною за Лебегом, причому*

$$\int\limits_0^1 F(x)dx = z_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(z_n \prod_{k=1}^{n-1} \sigma_k\right), \quad \textit{де}$$

$$z_n = \tilde{\beta}_{0,n}\tilde{q}_{0,n} + \tilde{\beta}_{1,n}\tilde{q}_{1,n} + \ldots + \tilde{\beta}_{m_n,n}\tilde{q}_{m_n,n} = \beta_{0,n}q_{0,n} + \beta_{1,n}q_{1,n} + \ldots + \beta_{m_n,n}q_{m_n,n},$$

$$\sigma_n = \tilde{p}_{0,n}\tilde{q}_{0,n} + \tilde{p}_{1,n}\tilde{q}_{1,n} + \ldots + \tilde{p}_{m_n,n}\tilde{q}_{m_n,n} = p_{0,n}q_{0,n} + p_{1,n}q_{1,n} + \ldots + p_{m_n,n}q_{m_n,n}.$$

Доведення. З рівності (1.7) випливає, що $d(\hat{\varphi}^n(x)) = \tilde{q}_{i_{n+1},n+1} d(\hat{\varphi}^{n+1}(x))$. Використовуючи означення функції та адитивну властивість інтеграла Лебега, отримаємо:

$$\int\limits_0^1 \tilde{F}(x)dx = \int\limits_0^{a_{1,1}} F(x)dx + \int\limits_{a_{1,1}}^{a_{2,1}} F(x)dx + \ldots + \int\limits_{a_{m_1,1}}^{1} F(x)dx =$$

$$= \int\limits_0^{a_{1,1}} p_{0,1}F(\hat{\varphi}(x))dx + \int\limits_{a_{1,1}}^{a_{2,1}} \left[\beta_{1,1} + p_{1,1}F(\hat{\varphi}(x))\right]dx + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{a_{m_1,1}}^{1} \left[\beta_{m_1,1} + p_{m_1,1}F(\hat{\varphi}(x))\right]dx = p_{0,1}q_{0,1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x)) +$$

$$+\beta_{1,1}q_{1,1}+p_{1,1}q_{1,1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x))+\ldots+\beta_{m_1,1}q_{m_1,1}+$$

$$+p_{m_1,1}q_{m_1,1}\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x))=\beta_{0,1}q_{0,1}+\beta_{1,1}q_{1,1}+\ldots+\beta_{m_1,1}q_{m_1,1}+$$

$$+(p_{0,1}q_{0,1}+p_{1,1}q_{1,1}+\ldots+p_{m_1,1}q_{m_1,1})\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x))=$$

$$=z_1+\sigma_1\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi}(x))d(\hat{\varphi}(x))=$$

$$=z_1+\sigma_1(\int\limits_0^{a_{1,2}}\Big(\tilde{\beta}_{m_2,2}+\tilde{p}_{m_2,2}F(\hat{\varphi}^2(x))\Big)\,d(\hat{\varphi}(x))+\ldots$$

$$\ldots+\int\limits_{a_{m_2,2}}^1\Big(\tilde{\beta}_{0,2}+\tilde{p}_{0,2}F(\hat{\varphi}^2(x))\Big)\,d(\hat{\varphi}(x)))=z_1+\sigma_1(\beta_{0,2}q_{0,2}+\beta_{1,2}q_{1,2}+\ldots$$

$$\ldots+\beta_{m_2,2}q_{m_2,2}+(p_{0,2}q_{0,2}+\ldots+p_{m_2,2}q_{m_2,2}))\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi^2}(x))d(\hat{\varphi^2}(x)))=$$

$$=z_1+z_2\sigma_1+\sigma_1\sigma_2\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi^2}(x))d(\hat{\varphi^2}(x))=\ldots$$

$$\ldots=z_1+z_2\sigma_1+z_3\sigma_1\sigma_2+\ldots+z_n\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{n-1}+$$

$$+\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n\int\limits_0^1 F(\hat{\varphi^n}(x))d(\hat{\varphi^n}(x))=\ldots.$$

Продовжуючи процес до нескінченності, отримаємо

$$\int\limits_0^1 F(x)dx=z_1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(z_n\prod_{k=1}^{n-1}\sigma_k\right).$$

□

Лема 5.7. *Якщо функція F має похідну $F'(x_0)$ в нега-$\tilde{Q}$-ірраціональній* *точці* x_0*, то* $F^{'}(x_0)$ *має вигляд*

$$F^{'}(x_0) = \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\tilde{p}_{i_j(x_0),j}}{q_{i_j(x_0),j}}\right).$$

Доведення. Твердження випливає з властивості 6 циліндрів $\Delta^{-\tilde{Q}}_{c_1c_2\ldots c_n}$ та з еквівалентності умов $x \to x_0, n \to \infty$. □

Лема 5.8. *Якщо для всіх* $n \in \mathbb{N}$ *та* $i = \overline{0, m_n}$ *виконується умова* $p_{i,n} \geqslant 0$*, то функція* F *є неперервною функцією розподілу ймовірностей на* $[0;1]$*.*

Нехай η — випадкова величина, представлена наступним чином:

$$\eta = \Delta^{\tilde{Q}}_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}, \text{ де } \xi_n = \begin{cases} i_n, & \text{якщо } n \text{ — непарне;} \\ m_n - i_n, & \text{якщо } n \text{ — парне,} \end{cases}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$, цифри ξ_n — випадкові, незалежні та набувають значень $0, 1, \ldots, m_n$ з ймовірностями $p_{0,n}, p_{1,n}, \ldots, p_{m_n,n}$.

Теорема 5.5. *Функція розподілу* $\tilde{F}_\eta$ *випадкової величини* η *має вигляд*

$$\tilde{F}_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \beta_{1,i_1(x)} + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\tilde{\beta}_{i_n(x),n}\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{i_j(x),j}\right], & 0 \leqslant x < 1; \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

5.3.4. Умови, за яких похідна функції не існує в жодній нега-$\tilde{Q}$-раціональній точці.

Теорема 5.6. *Якщо матриця* P *володіє наступними властивостями:*

— *для всіх* $n \in \mathbb{N}$*,* $i_n \in N^1_{m_n} \equiv \{1, 2, \ldots, m_n\}$*:* $p_{i_n,n} \cdot p_{i_n-1,n} < 0$;

— *границі*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{p_{0,k}}{q_{0,k}} \neq 0, \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{p_{m_k,k}}{q_{m_k,k}} \neq 0$$

одночасно, то функція F *не має ні скінченної, ні нескінченної похідної в жодній нега-*$\tilde{Q}$*-раціональній точці відрізка* $[0;1]$*.*

Доведення. Нехай x_0 — деяка нега-$\tilde{Q}$-раціональна точка. У випадку непарного n позначимо

$$x_0 = x_0^{(1)} = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n m_{n+1} 0 m_{n+3} 0 m_{n+5} \ldots} = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} [i_n - 1] 0 m_{n+2} 0 m_{n+4} - \ldots} = x_0^{(2)}.$$

У випадку ж парного n

$$x_0 = x_0^{(1)} = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} [i_n - 1] 0 m_{n+2} 0 m_{n+4} \ldots} = \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n m_{n+1} 0 m_{n+3} 0 m_{n+5} \ldots} = x_0^{(2)}.$$

Розглянемо послідовності $(x_k^{'})$, $(x_k^{''})$ чисел такі, що $x_k^{'} \to x_0$, $x_k^{''} \to x_0$ при $k \to \infty$ і при непарному n

$$x_k^{'} = \begin{cases} \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n m_{n+1} 0 m_{n+3} 0 \ldots m_{n+k-1} 1 m_{n+k+1} 0 m_{n+k+3} \ldots}, & \text{якщо } k \text{ — парне;} \\ \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n m_{n+1} 0 \ldots m_{n+k-2} 0 [m_{n+k} - 1] 0 m_{n+k+2} 0 m_{n+k+4} \ldots}, & \text{якщо } k \text{ — непарне,} \end{cases}$$

$$x_k^{''} = \begin{cases} \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 \ldots i_{n-1} [i_n - 1] 0 m_{n+2} 0 \ldots m_{n+k-1} 0 0 m_{n+k+2} 0 m_{n+k+4} \ldots}, & \text{якщо } k \text{ — непарне;} \\ \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 \ldots i_{n-1} [i_n - 1] 0 m_{n+2} 0 \ldots m_{n+k} m_{n+k+1} 0 m_{n+k+3} 0 m_{n+k+5} \ldots}, & \text{якщо } k \text{ — парне,} \end{cases}$$

та при парному n

$$x_k^{'} = \begin{cases} \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 \ldots i_{n-1} [i_n - 1] 0 m_{n+2} 0 m_{n+4} 0 \ldots m_{n+k-1} 1 m_{n+k+1} 0 m_{n+k+3} \ldots}, & \text{якщо } k \text{ — непарне;} \\ \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 \ldots i_{n-1} [i_n - 1] 0 m_{n+2} 0 \ldots m_{n+k-2} 0 [m_{n+k} - 1] 0 m_{n+k+2} 0 m_{n+k+4} \ldots}, & \text{якщо } k \text{ — парне,} \end{cases}$$

$$x_k^{''} = \begin{cases} \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n m_{n+1} 0 m_{n+3} \ldots 0 m_{n+k} m_{n+k+1} 0 m_{n+k+3} \ldots}, & \text{якщо } k \text{ — непарне;} \\ \Delta^{-\tilde{Q}}_{i_1 \ldots i_{n-1} i_n m_{n+1} 0 \ldots m_{n+k-1} 0 0 m_{n+k+2} 0 m_{n+k+4} 0 m_{n+k+6} \ldots}, & \text{якщо } k \text{ — парне.} \end{cases}$$

Отже, якщо n — непарне, тоді

$$x_k^{'} - x_0^{(1)} = \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 [m_2 - i_2] i_3 [m_4 - i_4] \ldots i_n \underbrace{0 \ldots 0}_{k-1} 1(0)} - \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 [m_2 - i_2] \ldots i_n (0)} \equiv$$

$$\equiv a_{1,n+k} \left(\prod_{j=1}^{n} \tilde{q}_{i_j,j} \right) \left(\prod_{t=n+1}^{n+k-1} q_{0,t} \right),$$

$$F\left(x_k^{'}\right) - F\left(x_0^{(1)}\right) = \beta_{1,n+k} \left(\prod_{j=1}^{n} \tilde{p}_{i_j,j} \right) \left(\prod_{t=n+1}^{n+k-1} p_{0,t} \right) = \left(\prod_{j=1}^{n} \tilde{p}_{i_j,j} \right) \left(\prod_{t=n+1}^{n+k} p_{0,t} \right),$$

$$x_0^{(2)} - x_k^{''} = \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots[m_{n-1}-i_{n-1}][i_n-1]m_{n+1}m_{n+2}\ldots} -$$

$$- \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots[m_{n-1}-i_{n-1}][i_n-1]m_{n+1}m_{n+2}\ldots m_{n+k}(0)} \equiv$$

$$\equiv q_{i_n-1,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{i_j,j}\right)\left(\prod_{t=n+1}^{n+k} q_{m_t,t}\right),$$

$$F\left(x_0^{(2)}\right) - F\left(x_k^{''}\right) = p_{i_n-1,n}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{i_j,j}\right)\left(\prod_{t=n+1}^{n+k} p_{m_t,t}\right).$$

Якщо ж n — парне, то

$$x_k^{'} - x_0^{(1)} = \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{n-1}[m_n-i_n+1]\underbrace{0\ldots0}_{k-1}1(0)} - \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{n-1}[m_n-i_n+1](0)} \equiv$$

$$\equiv a_{1,n+k}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{i_j,j}\right)\left(\prod_{t=n+1}^{n+k-1} q_{0,t}\right) q_{m_n-i_n+1,n} =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{q}_{i_j,j}\right)\left(\prod_{t=n+1}^{n+k} q_{0,t}\right) q_{m_n-i_n+1,n},$$

$$F\left(x_k^{'}\right) - F\left(x_0^{(1)}\right) = \beta_{1,n+k}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{i_j,j}\right)\left(\prod_{t=n+1}^{n+k-1} p_{0,t}\right) p_{m_n-i_n+1,n} =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{n-1}\tilde{p}_{i_j,j}\right)\left(\prod_{t=n+1}^{n+k} p_{0,t}\right) p_{m_n-i_n+1,n},$$

$$x_0^{(2)} - x_k^{''} = \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{n-1}[m_n-i_n]m_{n+1}m_{n+2}\ldots} - \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1[m_2-i_2]\ldots i_{n-1}[m_n-i_n]m_{n+1}\ldots m_{n+k}(0)} \equiv$$

$$\equiv \left(\prod_{j=1}^{n}\tilde{q}_{i_j,j}\right)\left(\prod_{t=n+1}^{n+k} q_{m_t,t}\right),$$

$$F\left(x_0^{(2)}\right) - F\left(x_k^{''}\right) = \left(\prod_{j=1}^{n}\tilde{p}_{i_j,j}\right)\left(\prod_{t=n+1}^{n+k} p_{m_t,t}\right).$$

Таким чином,

$$B_k^{'} = \frac{F(x_k^{'}) - F(x_0)}{x_k^{'} - x_0} = \begin{cases} \frac{p_{i_n,n}}{q_{i_n,n}}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\tilde{p}_{i_j,j}}{\tilde{q}_{i_j,j}}\right)\left(\prod_{t=n+1}^{n+k}\frac{p_{0,t}}{q_{0,t}}\right), & n \text{ — непарне;} \\ \\ \frac{p_{m_n-i_n+1,n}}{q_{m_n-i_n+1,n}}\left(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\tilde{p}_{i_j,j}}{\tilde{q}_{i_j,j}}\right)\left(\prod_{t=n+1}^{n+k}\frac{p_{0,t}}{q_{0,t}}\right), & n \text{ — парне.} \end{cases}$$

$$B_k^{''} = \frac{F(x_0) - F(x_k^{''})}{x_0 - x_k^{''}} = \begin{cases} \frac{p_{i_{n-1},n}}{q_{i_{n-1},n}} \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{p}_{i_j,j}}{\tilde{q}_{i_j,j}}\right) \left(\prod_{t=n+1}^{n+k} \frac{\tilde{p}_{m_t,t}}{\tilde{q}_{m_t,t}}\right), \ n \text{ — непарне;} \\ \\ \frac{p_{m_n-i_n,n}}{q_{m_n-i_n,n}} \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{\tilde{p}_{i_j,j}}{\tilde{q}_{i_j,j}}\right) \left(\prod_{t=n+1}^{n+k} \frac{\tilde{p}_{m_t,t}}{\tilde{q}_{m_t,t}}\right), n \text{ — парне.} \end{cases}$$

Позначимо

$$b_{0,k} = \prod_{t=n+1}^{n+k} \frac{p_{0,t}}{q_{0,t}}, \quad b_{m_k,k} = \prod_{m=n+1}^{n+k} \frac{p_{m_t,t}}{q_{m_t,t}}.$$

Оскільки $\prod_{j=1}^{n-1} (\tilde{p}_{i_j,j}/\tilde{q}_{i_j,j}) = const$, $p_{i_n,n}p_{i_n-1,n} < 0$, $p_{m_n-i_n+1,n}p_{m_n-i_n,n} < 0$ та послідовності $(b_{0,k})$, $(b_{m_k,k})$ не збігаються до 0 одночасно, тому у всіх можливих випадках виконується умова

$$\lim_{k\to\infty} B_k^{'} \neq \lim_{k\to\infty} B_k^{''},$$

що свідчить про те, що функція F не має ні скінченної, ні нескінченної похідної. □

Висновки до розділу 5

У розділі 5 вводиться поняття знакопочережного $\tilde{Q}$-розкладу. Побудовано основи метричної теорії та вивчено умови приналежності останнього представлення, яке є узагальненням нега-s-го представлення та представлення знакопочережним рядом Кантора, до систем кодувань.

Описано основи тополого-метричної теорії нега-$\tilde{Q}$-зображення дійсних чисел з $[0;1]$.

Досліджено властивості функцій, аргумент яких визначений у термінах нега-$\tilde{Q}$-зображення, і, аналітичне задання яких є узагальненням аналітичного задання класичної функції Салема. Зокрема, досліджено умови монотонності та немонотонності, недиференційовності, інтегральні та інші властивості таких функцій.

Основні результати цього розділу опубліковані у роботах [7$^{\text{a}}$, 11$^{\text{a}}$] і апробовані на наукових конференціях [25$^{\text{a}}$, 26$^{\text{a}}$] та семінарах.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена застосуванню різних зображень дійсних чисел у теорії множин і теорії функцій зі складною локальною будовою (ніде немонотонних, ніде недиференційовних функцій). Основна увага акцентована на зображеннях дійсних чисел, що ґрунтуються на розкладах чисел в ряди Кантора. Зокрема, розглянуто додатний, знакопочережний ряди Кантора, їх узагальнення ($\tilde{Q}$-представлення, нега-$\tilde{Q}$-представлення, знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад) та подання чисел у формі рядів Кантора спеціального виду (s-ве, нега-s-ве представлення, змішаний s-ий ряд, нега-s-ий ряд Кантора).

У процесі проведення дослідження було змодельовано узагальнення нега-s-го представлення дійсних чисел: представлення знакопочережним рядом Кантора та його узагальнення — знакопочережне $\tilde{Q}$-представлення. При моделюванні знакопочережного $\tilde{Q}$-представлення згенеровано знакопочережний $\tilde{Q}$-розклад і вивчено умови, за яких довільне число з деякого відрізка можна подати у вигляді останнього розкладу, а також побудовано і розглянуто нега-$\tilde{Q}$-зображення дійсних чисел. Розроблено основи метричних теорій чисел, зображених у термінах змодельованих представлень.

Основними результатами проведеного дослідження є наступні:

- Розв'язано задачу про знаходження критеріїв раціональності числа, що подається у формі додатного ряду Кантора. Основні результати сформульовано і для випадку знакопочережного ряду Кантора.
- Розроблено основи метричної теорії чисел, зображених знакопочережними рядами Кантора, досліджено тополого-метричні властивості множини неповних сум знакопочережного ряду Кантора. Досліджено взаємозв'язок кодувань дійсних чисел за допомогою знакопоче-

режних і додатних рядів Кантора. З цих закономірностей випливає новий метод перенесення методології фрактального аналізу та побудови метричної, ймовірнісної та розмірнісної теорій сімейств зображень дійсних чисел на основі дослідження спеціальних відображень (G-ізоморфізмів систем числення), які зберігають міру Лебега та розмірність Хаусдорфа–Безиковича (хоча можуть бути розривними на всюди щільних множинах). Розглянуто функції, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича, і, моделювання яких ґрунтується на вказаному вище взаємозв'язку.

— Змодельовано та досліджено узагальнення нега-s-го (з довільною основою $-s < -1$) представлення дійсних чисел, а саме — представлення чисел з деякого відрізка знакопочережним $\tilde{Q}$-розкладом.

— Сконструйовано новий клас функцій, аргумент і значення яких визначені у термінах s-го або нега-s-го зображення, і, які задані певними перетворювачами цифр або комбінацій цифр зображення аргументу. Вивчено їх фрактальні, інтегральні, диференціальні та інші властивості. Зокрема, показано, що всі функції, окрім $y = x$, $y = 1 - x$ та $y = -\frac{s-1}{s+1} - x$, з даного класу функцій є ніде недиференційовними, неперервними майже скрізь. Доведено, що значення інтеграла Лебега довільної функції по її області визначення дорівнює $\frac{1}{2}$ та значення розмірності Хаусдорфа-Безиковича графіка довільної функції з Λ_s дорівнює 1. Вивчено фрактальні властивості множин інваріантних точок функцій, композицією котрих можна визначити довільну функцію з Λ_s. Більш детально вивчено на прикладі однієї функції з Λ_3 властивості та різні форми задання таких функцій у термінах трійкового зображення.

— Побудовано і вивчено властивості узагальнень функції Салема, аргумент яких визначений у термінах зображення чисел рядами Кантора (додатними, знакопочережними), нега-$\tilde{Q}$-зображення. Особливостями проведеного дослідження є наступне: вперше вивчено властивості функцій (узагальнень функції Салема), різні цифри зображення аргументу та значення яких належать різним алфавітам; вперше запропоновано і досліджено узагальнення функції Салема, визначені у термінах знакопочережних представлень дійсних чисел.

- Змодельовано та вивчено тополого-метричні властивості нових множин, елементи яких подаються у вигляді ряду Кантора спеціального виду (змішаного s-го ряду, нега-s-го ряду Кантора і s-го та нега-s-го представлень), та, на вживання цифр в зображеннях елементів яких накладено обмеження, що виражається функціональною залежністю. Введено поняття нега-s-го ряду Кантора і змішаного s-го ряду.
- Вивчено фрактальні властивості довільної множини, яка містить всі можливі числа з відрізка $[0;1]$ (або $[-\frac{s}{s+1};\frac{1}{s+1}]$), в s-му (або нега-s-му) зображенні яких вживаються набори цифр лише з фіксованої множини $\tilde{\Sigma}=\{\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\ldots,\tilde{\sigma}_m\}$ наборів s-их цифр.
- Описано властивості операторів зсуву цифр представлення і зображення числа знакопочережним рядом Кантора, введено поняття узагальненого оператора зсуву цифр. Застосовано поняття операторів зсуву цифр (символів) представлення числа додатним рядом Кантора, $\tilde{Q}$-представлення до моделювання функцій зі складною локальною будовою за допомогою нескінченних систем функціональних рівнянь.

Проведені дослідження лежать в руслі сучасних математичних досліджень в області метричної теорії чисел та математичних об’єктів зі складною локальною будовою, представлених у різних системах числення.

Отримані результати та запропоновані методи можуть бути корисними при розв’язанні задач метричної теорії чисел, фрактальної геометрії, теорій ніде недиференційовних, ніде немонотонних та сингулярних функцій.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Барановський О. М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського / О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 9. — С. 1155–1168.
2. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация / П. Биллингслей. — М.: Мир, 1969. — 238 с.
3. *Гетьман Б. І.* Про властивості однієї сім'ї множин канторівського типу, що визначається умовами на елементи розкладу в ряд Енгеля / Б. І. Гетьман, М. В. Працьовитий, О. М. Барановський // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2010, № 11. — С. 119–142.
4. *Лебідь М. В.* Про DP-перетворення, породжені випадковими величинами з незалежними С-символами / М. В. Лебідь, Г. М. Торбін // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14. — С. 240–252.
5. *Козырев С. Б.* О топологической густоте извивающихся функций / С. Б. Козырев // Мат. заметки. — 1983. — 33, № 3. — С. 71–76.
6. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. — 496 с.
7. *Працьовита І. М.* Про метричну теорію розкладів Остроградського 2-го виду / І. М. Працьовита, Г. М. Торбін // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2008, № 9. — С. 148–160.

8. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

9. *Працьовитий М. В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні / М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. — 2011. — № 23. — С. 178–189.

10. *Працьовитий М. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням дійсних чисел / М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков // Укр. мат. журн.— 2013. — Т. 65, № 3. — С. 405–417.

11. *Працьовитий М. В.* Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування / М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2010, № 11. — С. 102–118.

12. *Ралко Ю. В.* Зображення чисел рядами Кантора та деякі його застосування / Ю. В. Ралко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2009, № 10. — С. 132–140.

13. *Турбин А. Ф.* Фрактальные множества, функции, распределения / А. Ф. Турбин, Н. В. Працевитый. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.

14. *Федер Е.* Фракталы / Е. Федер. — М.: Мир, 1991. — 254 с.

15. *Фомин С. В.* Системы счисления / С. В. Фомин; [5-е изд.] — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 48 с.

16. *Ambrož P.* Arithmetics on number systems with irrational bases / P. Ambrož, Ch. Frougny, Z. Masáková, E. Pelantová // Bull. Belg. Math. Soc. — 2003. — **10**. — Pp. 641–659.

17. *Ambrož P.* Numbers with integer expansion in the numeration system with negative base / P. Ambrož, D. Dombek, Z. Masáková, E. Pelantová //

Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici. — 2012. — **47**, no. 2. — Pp. 241–266.

18. *Beardon A. F.* On the Hausdorff dimension of general Cantor sets / A. F. Beardon // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1965. — **61.** — Pp. 679–694.
19. *Beros Achilles A.* Normal numbers and limit computable Cantor series [Електронний ресурс] / Achilles A. Beros, Kostantinos A. Beros. — arXiv:1404.2178v1 [math. LO] 8 Apr. 2014. — Режим доступу: http://arxiv.org/pdf/1404.2178v1.pdf (дата звернення 15.02.2016).
20. *Cantor G.* Ueber die einfachen Zahlensysteme / G. Cantor. // Z. Math. Phys. — 1869. — Bd. 14. — S. 121–128.
21. *Diananda P. H.* Criteria for irrationality of certain classes of numbers II / P. H. Diananda, A. Oppenheim // Amer. Math. Monthly. — 1955. — **62**, no. 4. — Pp. 222–225.
22. *DiMartino R.* On Cantor-like sets and Cantor-Lebesgue singular functions [Електронний ресурс] / R. DiMartino, W. O. Urbina. — arXiv:1403.6554v1 [math. CA] 26 Mar. 2014. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1403.6554.pdf (дата звернення 19.10.2017).
23. *Erdös P.* Some further statistical properties of the digits in Cantor's series / P. Erdös, A. Rényi // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1959. — **10**. — Pp. 21–29.
24. *Erdös P.* On Cantor's series with convergent $\sum \frac{1}{q_n}$ / P. Erdös, A. Rényi // Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. — 1959. — **2**. — Pp. 93–109.
25. *Erdös P.* On the irrationality of certain Ahmes series / P. Erdös, Straus E. G. // J. Indian. Math. Soc. — 1968. — **27**. — Pp. 129–133.
26. *Erdös P.* On the irrationality of certain series / P. Erdös, Straus E. G. // Pacific J. Math. — 1974. — **55**, no. 1. — Pp. 85–92.
27. *Frougny Ch.* Negative bases and automata [Електронний ресурс] / Ch. Frougny, A. Ch. Lai. — arXiv:1012.3721v1 [cs. FL] 16 Dec. 2010. —

Режим доступу: http://arxiv.org/pdf/1012.3721v1.pdf (дата звернення 15.02.2016).

28. *Galambos J.* Representations of real numbers by infinite series / J. Galambos // Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, Hiedelberg, New York. — 1976. — **502**.
29. *Galambos J.* Uniformly distributed sequences mod 1 and Cantor's series representation / J. Galambos // Czehoslovak Mathematical Journal. — 1976. — **26**, no. 4. — Pp. 636–641.
30. *Grünvald V.* Intorno all'aritmetica dei sistemi numerici a base negativa con particolare riguardo al sistema numerico a base negativo-decimale per lo studio delle sue analogie coll'aritmetica ordinaria (decimale) / V. Grünvald // Giornale di Matematiche di Battaglini. — 1885. — **367**. — Pp. 203–221.
31. *Hančl J.* A note to the rationality of infinite series I / J. Hančl // Acta Math. Inf. Univ. Ostr. — 1997. — **5**, no. 1. — Pp. 5–11.
32. *Hančl J.* A note on a paper of Oppenheim and Šalát concerning series of Cantor type / J. Hančl // Acta Math. Inf. Univ. Ostr. — 2002. — **10**, no. 1. — Pp. 35–41.
33. *Hančl J.* A note to the transcendence of special infinite series / J. Hančl, P. Rucki // Mathematica Slovaka. — 2006. — **56**, no. 4. — Pp. 409–414.
34. *Hančl J.* On the irrationality of Cantor series / J. Hančl, R. Tijdeman // J. Reine Angew. Math. — 2004. — **571**. — Pp. 145–158.
35. *Hančl J.* On the irrationality of Cantor and Ahmes series / J. Hančl, R. Tijdeman // Publ. Math. Debrecen. — 2004. — **65**, no. 3–4. — P. 371–380.
36. *Hančl J.* On the irrationality of factorial series / J. Hančl, R. Tijdeman // Acta Arith. — 2005. — **118**. — Pp. 383–401.
37. *Hančl J.* On the irrationality of factorial series III / J. Hančl, R. Tijdeman // Indag. Mathem., N. S. — 2009. — **20**, no. 4. — Pp. 537–549.

38. *Hančl Jaroslav.* On the irrationality of factorial series II / J. Hančl, R. Tijdeman // J. Number Theory. — 2010. — **130**, no. 3. — Pp. 595–607.
39. *Hofer R.* Distribution properties of sequences generated by Q-additive functions with respect to Cantor representations of integers / R. Hofer, F. Pillichshammer, G. Pirsic // Acta Arith. — 2009. — **138**, no. 2. — P. 179–200.
40. *Hua S.* On the structures and dimensions of Moran sets / S. Hua, H. Rao, Zh. Wen, J. Wu // Sci. China Ser. A-Math. — 2000. — **43**, no. 8. — Pp. 836–852.
41. *Iommi G.* Hausdorff dimension of Cantor series [Електронний ресурс] / G. Iommi, B. Skorulski. — Режим доступу: http://www.mat.uc.cl/∼giommi/new_cantor_series091118-3.pdf (дата звернення: 02.04.2016)
42. *Ito S.* Beta-expansions with negative bases / S. Ito, T. Sadahiro // Integers. — 2009. — **9**. — Pp. 239–259.
43. *Kalpazidou S.* Lüroth-type alternating series representations for real numbers / S. Kalpazidou, A. Knopfmacher, J. Knopfmacher // Acta Arith. — 1990. — **55**. — Pp. 311–322.
44. *Kirschenhofer P.* On the distribution of digits in Cantor representations of integers / P. Kirschenhofer, R. F. Tichy // J. Number Theory. — 1984. — **18**. — Pp. 121–134.
45. *Komatsu T.* Independence of complex Cantor series and Cantor products [Електронний ресурс] / T. Komatsu, V. Laohakosol, S. Prugsapitak, J. Rattanamoong. — Режим доступу: http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/∼kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1898-05.pdf (дата звернення: 02.04.2016)
46. *Kuhapatanakul P.* Irrationality of some series with rational terms / P. Kuhapatanakul, V. Laohakosol // Kasetsart J. (Nat. Sci.). — 2001. — **35**. — Pp. 205–209.

47. *Li B.* Number theoretic applications of a class of Cantor series fractal functions, II / B. Mance, B. Li // Int. J. Number Theory. — 2015. — **11**, no. 2. — Pp. 407–435.

48. *Mance B.* Normal numbers with respect to the Cantor series expansion / B. Mance. Dissertation. — The Ohio State University, 2010. — 290 p.

49. *Mance B.* Cantor series constructions of sets of normal numbers [Електронний ресурс] / B. Mance. — arXiv:1010.2782v2 [math. NT] 21 Feb. 2012. — Режим доступу: http://arxiv.org/pdf/1010.2782v2.pdf (дата звернення 15.02.2016).

50. *Mance B.* On the Hausdorff dimension of countable intersections of certain sets of normal numbers [Електронний ресурс] / B. Mance. — arXiv:1302.7064v2 [math. NT] 16 Apr. 2014. — Режим доступу: http://arxiv.org/pdf/1302.7064v2.pdf (дата звернення 15.02.2016).

51. *Mance B.* Number theoretic applications of a class of Cantor series fractal functions, I [Електронний ресурс] / B. Mance. — arXiv:1310.2377v2 [math. NT] 3 Feb. 2015. — Режим доступу: http://arxiv.org/pdf/1310.2377v2.pdf (дата звернення 15.02.2016).

52. *Mandelbrot B. B.* Fractals: Form, Chance and Dimension / B. B. Mandelbrot. — San Francisco: Freeman, 1977. — 346 p.

53. *Marques D.* A geometric proof to Cantor's theorem and an irrationality measure for some Cantor's series / D. Marques // Annales Mathematicae et Informaticae. — 2009. — **36**. — Pp. 117–121.

54. *Masáková Z.* Arithmetics in number systems with a negative base / Z. Masáková, E. Pelantová, T. Vávra // Theoretical Computer Science. — 2011. — **412**, no. 8–10. — P. 835–845.

55. *Minkovski H.* Gesammeine Abhandlungen. — Berlin. 1911. — Bd. 2. — Pp. 50–51.

56. *Moran P. A. P.* Additive functions of intervals and Hausdorff measure / P. A. P. Moran // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical

Society. — 1946. — **42**, no. 1. — Pp. 15–23.

57. *Oppenheim A.* Criteria for irrationality of certain classes of numbers / A. Oppenheim // Amer. Math. Monthly. — 1954. — **61**, no. 4. — P. 235–241.
58. *Paštéka M.* The Cantor series of polyadic numbers / M. Paštéka // Acta Math Inf. Univ. Ostr.. — 1996. — **4**, no. 1. — P. 75–82.
59. *Pesin Ya.* On the Dimension of Deterministic and Random Cantor-like Sets, Symbolic Dynamics, and the Eckmann-Ruelle Conjecture / Yakov Pesin and Howard Weiss // Commun. Math. Phys. — 1996. — **182**. — Pp. 105–153.
60. *Pierce T. A.* On an algorithm and its use in approximating roots of an algebraic equation / T. A. Pierce // Amer. Math. Monthly. — 1929. — **36**. — Pp. 523–525.
61. *Pollicott M.* The Hausdorff dimension of λ-expansions with deleted digits / M. Pollicott, Károly Simon // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — **347**. — Pp. 967–983.
62. *Rényi A.* On the distribution of the digits in Cantor's series / A. Rényi // (Hungarian) Mat. Lapok. — 1956. — **7**. — Pp. 77–100.
63. *Rényi A.* Representations for real numbers and their ergodic properties / A. Rényi // Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. — 1957. — **8**. — Pp. 477–493.
64. *Salem R.* On some singular monotonic functions which are stricly increasing / R. Salem // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — **53**. — Pp. 423–439.
65. *Sylvester J. J.* On a point in the theory of vulgar fractions / J. J. Sylvester // Amer. Journal of Math. — 1880. — **3**. — Pp. 332–335, postscript ibid. 388–389.
66. *Tijdeman R.* On the rationality of Cantor and Ahmes series / Robert Tijdeman, Pingzhi Yuan // Indag. Math. (N.S.). — 2002. — **13**, no. 3. — Pp. 407–418.
67. *Wang Yi.* Some fractals associated with Cantor expansions / Yi Wang, Zhixiong Wen, Lifeng Xi // J. Math. Anal. Appl. — 2009. — **354**. — Pp. 445–

450.

68. *Waterman M. S.* Cantor's series for vectors / M. S. Waterman // Amer. Math. Monthly. — 1975. — **82**, no. 6. — Pp. 622–625.

69. *Wegmann H.* Die Hausdorffsche Dimension von Mengen reeller Zahlen, die durch Zifferneigenschaften einer Cantorentwicklung charakterisiert sind / H. Wegmann // Czechoslovak Math. J. — 1968. — **18**, no. 4. — Pp. 622–632.

70. *Wen Liu.* A nowhere differentiable continuous function constructed using Cantor series / Liu Wen // Mathematics Magazine. — December 2001. — **74**, no. 5. — Pp. 400–402.

71. *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular / T. Zamfirescu // Amer. Math. Monthly. — 1981. — **88**. — Pp. 47–49.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ АВТОРА

$1^{\text{а}}$. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини дійсних чисел, визначеної в термінах s-кового зображення / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2010, № 11. — С. 241–250.

$2^{\text{а}}$. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні властивості та використання однієї узагальненої множини, заданої s-ковим зображенням з параметром / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2011, № 12. — С. 66–75.

$3^{\text{а}}$. *Сербенюк С. О.* Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'яттю / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2).

$4^{\text{а}}$. *Сербенюк С. О.* Зображення чисел знакододатними рядами Кантора: задання раціональних чисел// Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14. — С. 253–267.

$5^{\text{а}}$. *Сербенюк С. О.* Про деякі множини дійсних чисел, визначені в термінах нега-s-кового та канторівського нега-s-кового зображень / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 168–187.

$6^{\text{а}}$. *Сербенюк С. О.* Функції, означені системами функціональних рівнянь в термінах зображення чисел рядами Кантора / С. О. Сербенюк // Наукові записки НаУКМА. — 2015. — Т. 165: Фізико-математичні науки. — С. 34–40.

7$^{\text{a}}$. *Сербенюк С. О.* Нега-$\tilde{Q}$-представлення як узагальнення деяких знакопочережних представлень дійсних чисел / С. О. Сербенюк // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». — 2016, № 1(35). — С. 32–39.

8$^{\text{a}}$. *Serbenyuk S.* On one class of functions with complicated local structure / S. Serbenyuk // Šiauliai Mathematical Seminar. — 2016. — **11 (19)**. — Pp. 75–88.

9$^{\text{a}}$. *Serbenyuk S. O.* Continuous Functions with Complicated Local Structure Defined in Terms of Alternating Cantor Series Representation of Numbers / S. O. Serbenyuk // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2017. — **13**, no. 1. — Pp. 57–81.

10$^{\text{a}}$. *Serbenyuk S.* Representation of real numbers by the alternating Cantor series [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk // Integers. — 2017. — **17**. — Paper No. A15, 27 pp. — Режим доступу: http://math.colgate.edu/∼integers/vol17.html (дата звернення 16.06.2017).

11$^{\text{a}}$. *Сербенюк С. О.* Про один клас функцій зі складною локальною будовою, які є розв'язками нескінченних систем функціональних рівнянь [On one class of functions with complicated local structure that the solutions of infinite systems of functional equations] [Електронний ресурс] / С. О. Сербенюк. — arXiv:1602.00493v2 [math.CA] 1 Feb. 2016 (last revised 10 May 2016 (this version, v2)). — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1602.00493.pdf (дата звернення 16.06.2017).

12$^{\text{a}}$. *Serbenyuk S.* Про деякі узагальнення зображень дійсних чисел [On some generalizations of real numbers representations] [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk. — arXiv:1602.07929v1 [math.NT] 25 Feb. 2016. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1602.07929.pdf (дата звернення 16.06.2017).

13ᵃ. *Serbenyuk S.* Non-differentiable functions defined in terms of classical representations of real numbers [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk. — arXiv:1705.05575v1 [math.CA] 16 May 2017. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1705.05575v1.pdf (дата звернення 16.06.2017).

14ᵃ. *Serbenyuk S.* Cantor series expansions of rational numbers [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk // ResearchGate.net. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/317099134 (дата звернення 16.06.2017).

15ᵃ. *Serbenyuk S.* More on one class of fractals [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk. — arXiv:1706.01546v1 [math.CA] 25 Jun. 2017. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1706.01546.pdf (дата звернення 16.06.2017).

16ᵃ. *Сербенюк С. О.* Збереження розмірності Хаусдорфа-Безиковича монотонними сингулярними функціями розподілу / С. О. Сербенюк // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для молодих науковців, 28-29 квітня 2011 року, Київ: Тези доповідей. — Київ: Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, 2011. — С. 106–107.

17ᵃ. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини, заданої з використанням s-кового зображення / С. О. Сербенюк // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 р.: Матеріали конференції. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. — Київ: НТУУ «КПІ», 2012. — С. 220.

18ᵃ. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множин з класу, породженого однією множиною з використанням s-кового зображення / С. О. Сербенюк // Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування», Київ, 16-18 травня 2012 р.: Тези доповідей. — Київ: Інст-т матем. НАН України, 2012. — С. 42.

19^{a}. *Serbenyuk S. O.* Real numbers representation by the Cantor series / S. O. Serbenyuk // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov: Abstracts, Kyiv: Dragomanov National Pedagogical University, 2012. — P. 136.

20^{a}. *Serbenyuk S. O.* Topological, metric and fractal properties of the set with parameter, that the set defined by s-adic representation of numbers / S. O. Serbenyuk // International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications III» dedicated to 100th anniversary of B. V. Gnedenko and 80th anniversary of M. I. Yadrenko: Abstracts, Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2012. — P. 13.

21^{a}. *Сербенюк С. О.* Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'яттю / С. О. Сербенюк // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, 13-14 грудня 2012 р.: Матеріали конференції. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — С. 93.

22^{a}. *Сербенюк С. О.* Про одне узагальнення функцій, які задані автоматами зі скінченною пам'яттю / С. О. Сербенюк // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 року: Матеріали конференції. — Київ: Національний університет «Києво-Могилянська академія», 2013. — С. 112–113.

23^{a}. *Serbenyuk S.* On two functions with complicated local structure / S. Serbenyuk // Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts, Kyiv: Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine and Institute of Physics and Mathematics of the National Pedagogical Dragomanov University, 2013. —

Pp. 51–52.

24^{a}. *Сербенюк С. О.* Задання системами функціональних рівнянь класу функцій, аргументи яких представлені рядами Кантора / С. О. Сербенюк // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, Київ, 23-24 квітня 2014 р.: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. — С. 121.

25^{a}. *Serbenyuk S. O.* Nega-$\tilde{Q}$-representation of real numbers / S. O. Serbenyuk // International Conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization»: Abstracts, Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2015. — P. 24.

26^{a}. *Сербенюк С. О.* Про одну функцію з класу функцій зі складною локальною будовою, означену в термінах нега-$\tilde{Q}$-представлення / С. О. Сербенюк // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ, 2015. — С. 52.

27^{a}. *Сербенюк С. О.* Квазінега-$\tilde{Q}$-представлення як узагальнення представлення дійсних чисел деякими знакозмінними рядами / С. О. Сербенюк // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3-6 червня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2015. — С. 85.

Додаток А

Список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації

Результати[1] цієї дисертаційної роботи було апробовано в ряді доповідей на наукових семінарах Інституту математики НАН України та Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, в тезах доповідей на міжнародних та всеукраїнських конференціях (переліки наведено нижче). Також отримані в дисертації результати проходили оцінку на Вченій раді Інституту математики НАН України при проходженні щорічних атестацій здобувача як аспіранта (2011–2013 рр.) та щорічних звітах співробітників ІМ НАН України (2013–2015 рр., неодноразово результати дисертаційного дослідження зазначалися в списку найбільш вагомих результатів фундаментальних і прикладних досліджень Інституту математики НАН України за рік), у жовтні 2015 року здобувачем успішно пройдено атестацію молодшого наукового співробітника ІМ НАН України. Крім того, апробація результатів також відбувалася (2012–2014 рр.) на секційних доповідях Звітно-наукової конференції[2] викладачів, аспірантів та докторантів Фізико-математичного інституту НПУ імені М.П. Драгоманова.

Дослідження[3], що є узагальненнями досліджень, проведених в даній

---

[1] Результати дисертаційного дослідження отримані в період з 01 листопада 2010 року по 01 листопада 2014 року. Публікація результатів дослідження від моменту їх апробації на конференціях чи семінарах до виходу з друку журналів в силу різних обставин складала 2–4 роки.

[2] Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Останній відділ є спільним науковим підрозділом Інституту математики НАН України та Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова подвійного підпорядкування Національній академії наук України та Міністерству освіти і науки України.

[3] Проект «Generalizations of classical representations of real numbers and their applications» досту-

дисертаційній роботі, були затверджені у запиті на відкриття наукової роботи за відомчою тематикою відділу фрактального аналізу Інституту математики Національної академії наук України на 2016–2020 рр. Останній запит успішно пройшов конкурс і відповідні дослідження були затверджені для виконання у період з 2016 до 2020 року в Інституті математики НАН України.

З листопада 2010 року автором дисертаційного дослідження було проведено наступні доповіді на таких семінарах:

1. Семінар відділу топології Інституту математики НАН України (керівник: с. н. с., д. ф.-м. н. С. І. Максименко). Місце проведення: Інститут математики НАН України. Дати проведення:
   - — 28.10.2015 р. Тема:«Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).
   - — 04.11.2015 р. Тема:«Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (продовження, за матеріалами кандидатської дисертації).
   - — 11.05.2016 р. Тема:«Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (продовження, за матеріалами кандидатської дисертації).
2. Київський семінар з функціонального аналізу (керівники: акад. НАН України, проф., д. ф.-м. н., гол. н. с. Ю. М. Березанський; чл.-кор. НАН України, проф., д. ф.-м. н. М. Л. Горбачук; чл.-кор. НАН України, проф., д. ф.-м. н. Ю. С. Самойленко). Дата проведення: 11.11.2015 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами

пний за посиланням: https://www.researchgate.net/project/Generalizations-of-classical-representations-of-real-numbers-and-their-applications кандидатської дисертації).

3. Алгебраїчний семінар Інституту математики НАН України (керівник: чл.-кор. НАН України, проф., д. ф.-м. н. Ю. А. Дрозд). Дата проведення: 17.11.2015 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).
4. Семінар відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: проф., д. ф.-м. н. Ю. Б. Зелінський). Дата проведення: 17.11.2015 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).
5. Семінар відділу диференціальних рівнянь і теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник: акад. НАН України, проф., д. ф.-м. н., директор інституту А. М. Самойленко). Дата проведення: 14.12.2015 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).
6. Семінар відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник: проф., д. ф.-м. н. А. С. Романюк). Дата проведення: 22.01.2016 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).
7. Семінар[4] з фрактального аналізу Інституту математики НАН Укра-

---

[4] Архів доповідей доступний за посиланням: http://www.imath.kiev.ua/events/index.php?seminarId=21&archiv=1

їни та НПУ ім. М. П. Драгоманова (керівник: проф., д. ф.-м. н. М. В. Працьовитий). Місце проведення: Інститут математики НАН України або НПУ імені М. П. Драгоманова. Дати проведення:

а) 29.09.2011 р. Тема: «Основні тополого-метричні властивості однієї множини чисел, визначеної s-адичним зображенням з обмеженнями».

б) 16.02.2012 р. Тема: «Основні тополого-метричні властивості однієї множини, заданої нега-s-адичним та s-адичним зображенням з параметром, та її використання».

в) 21.02.2013 р. Тема: «Про деякі застосування зображень чисел рядами Кантора».

г) 05.09.2013 р. Тема: «Представлення дійсних чисел знакопочережними рядами Кантора».

д) 27.02.2014 р. Тема: «Розмірність Хаусдорфа одного класу множин, визначених у термінах представлення дійсних чисел рядами Кантора».

е) 16.10.2014 р. Тема: «Задання системами функціональних рівнянь класу функцій, представлених рядами Кантора».

є) 30.10.2014 р. Тема: «Поліосновне знакододатне та знакопочережне $\tilde{Q}$-представлення та їх застосування для задання функцій системами функціональних рівнянь».

ж) 28.09.2017 р. Місце проведення: Інститут математики НАН України. Тема: «Ряди Кантора як засіб задання і дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями» (за матеріалами кандидатської дисертації).

Результати, зазначені в даній дисертаційній роботі, доповідалися[5] на наукових конференціях різного рівня, а саме:

---

[5] Доповіді проводилися на секційних засіданнях за винятком останньої конференції, на якій матеріали було представлено на постерній сесії.

- Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих науковців, Київ, 28–29 квітня 2011 р.;
- Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19–21 квітня 2012 р.;
- Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування», Київ, 16–18 травня 2012 р.;
- International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov, Kyiv, August 20–26, 2012;
- International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications III» dedicated to 100th anniversary of B. V. Gnedenko and 80th anniversary of M. I. Yadrenko, Kyiv, September 10–14, 2012;
- Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, 13–14 грудня 2012 р.;
- Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25–27 квітня 2013 р.;
- Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Kyiv, September 16–20, 2013;
- Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, Київ, 23–24 квітня 2014 р.;
- International Conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization», Kyiv, April 7–10, 2015;
- Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23–25 квітня 2015 р.;
- Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3–6 червня 2015 р.

Основні результати роботи викладено в 10 статтях [1$^\text{a}$]-[10$^\text{a}$] та одному препринті [11^а]. Статті [1^а]–[7^а] та [9^а] опубліковані у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України ([9^а] — у міжнародному науковому виданні), з них [4^а] — збірник наукових праць учасників міжнародної конференції (даний випуск журналу містить роботи учасників Міжнародної наукової конференції з алгебри, присвяченої 100-річчю від дня народження С. М. Чернікова). Статті [8^а] та [10^а] опубліковано у виданнях інших держав. Чотири статті ([7^а]–[10^а]) опубліковано у виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus, Google Scholar, MathSciNet (Mathematical Reviews), Zentralblatt MATH).

Додатково матеріали даного дисертаційного дослідження відображено у чотирьох препринтах [12^а]—[15^а], з них: препринти [13^а]—[15^а] стосуються огляду літератури, а препринт [12^а]— подальших наукових досліджень, які ґрунтуються на наукових дослідженнях, проведених в даній дисертаційній роботі. Також матеріали цієї дисертаційної роботи додатково відображено у матеріалах 12 конференцій [16^а]- [27^а], з них [27^а] та [16^а] стосуються, відповідно, узагальнень досліджень та отримання допоміжного результату, вказаного для повноти викладу в огляді літератури.

Список публікацій, які відображають основні наукові результати дисертації:

1. *Serbenyuk S.* Representation of real numbers by the alternating Cantor series [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk // Integers. — 2017. — **17**. — Paper No. A15, 27 pp. — Режим доступу: http://math.colgate.edu/∼integers/vol17.html (дата звернення 16.06.17).
2. *Serbenyuk S. O.* Continuous Functions with Complicated Local Structure Defined in Terms of Alternating Cantor Series Representation of Numbers / S. O. Serbenyuk // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. — 2017. — **13**, no. 1. — Pp. 57–81.
3. *Serbenyuk S.* On one class of functions with complicated local structure / S. Serbenyuk // Šiauliai Mathematical Seminar. — 2016. — **11 (19)**. —

Pp. 75–88.

4. *Сербенюк С. О.* Нега-$\tilde{Q}$-представлення як узагальнення деяких знакопочережних представлень дійсних чисел / С. О. Сербенюк // Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка. — Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». — 2016, № 1(35). — С. 32–39.
5. *Сербенюк С. О.* Функції, означені системами функціональних рівнянь в термінах зображення чисел рядами Кантора / С. О. Сербенюк // Наукові записки НаУКМА. — 2015. — Т. 165: Фізико-математичні науки. — С. 34–40.
6. *Сербенюк С. О.* Про деякі множини дійсних чисел, визначені в термінах нега-s-кового та канторівського нега-s-кового зображень / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 168–187.
7. *Сербенюк С. О.* Зображення чисел знакододатними рядами Кантора: задання раціональних чисел / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2013, № 14. — С. 253–267.
8. *Сербенюк С. О.* Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'яттю / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2).
9. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні властивості та використання однієї узагальненої множини, заданої s-ковим зображенням з параметром / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені

М. П. Драгоманова. — 2011, № 12. — С. 66–75.

10. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини дійсних чисел, визначеної в термінах s-кового зображення / С. О. Сербенюк // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2010, № 11. — С. 241–250.

Список публікацій, які додатково відображають наукові результати дисертації:

1. *Сербенюк С. О.* Про один клас функцій зі складною локальною будовою, які є розв'язками нескінченних систем функціональних рівнянь [On one class of functions with complicated local structure that the solutions of infinite systems of functional equations] [Електронний ресурс] / С. О. Сербенюк. — arXiv:1602.00493v2 [math.CA] 1 Feb. 2016 (last revised 10 May 2016 (this version, v2)). — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1602.00493.pdf (дата звернення 16.06.17).
2. *Serbenyuk S.* Non-differentiable functions defined in terms of classical representations of real numbers [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk. — arXiv:1705.05575v1 [math.CA] 16 May 2017. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1705.05575v1.pdf (дата звернення 16.06.2017).
3. *Serbenyuk S.* Cantor series expansions of rational numbers [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk // ResearchGate.net. — Режим доступу: https://www.researchgate.net/publication/317099134 (дата звернення 16.06.2017).
4. *Serbenyuk S.* More on one class of fractals [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk. — arXiv:1706.01546v1 [math.CA] 25 Jun. 2017. — Доступ: https://arxiv.org/pdf/1706.01546.pdf (дата звернення 16.06.17).
5. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості однієї множини, заданої з використанням s-кового зображення / С. О. Сербенюк // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені ака-

деміка М. Кравчука, Київ, 19-21 квітня 2012 р.: Матеріали конференції. Т. 2. Алгебра. Геометрія. Математичний та чисельний аналіз. — Київ: НТУУ «КПІ», 2012. — С. 220.

6. *Сербенюк С. О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множин з класу, породженого однією множиною з використанням s-кового зображення / С. О. Сербенюк // Міжнародна конференція «Динамічні системи та їх застосування», Київ, 16-18 травня 2012 р.: Тези доповідей. — Київ: Інст-т матем. НАН України, 2012. — С. 42.
7. *Serbenyuk S. O.* Real numbers representation by the Cantor series / S. O. Serbenyuk // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov: Abstracts, Kyiv: Dragomanov National Pedagogical University, 2012. — P. 136.
8. *Serbenyuk S. O.* Topological, metric and fractal properties of the set with parameter, that the set defined by s-adic representation of numbers / S. O. Serbenyuk // International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications III» dedicated to 100th anniversary of B. V. Gnedenko and 80th anniversary of M. I. Yadrenko: Abstracts, Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2012. — P. 13.
9. *Сербенюк С. О.* Про одну майже скрізь неперервну і ніде не диференційовну функцію, яка задана автоматом зі скінченною пам'яттю / С. О. Сербенюк // Міжнародна наукова конференція «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», Київ, 13-14 грудня 2012 р.: Матеріали конференції. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — С. 93.
10. *Сербенюк С. О.* Про одне узагальнення функцій, які задані автоматами зі скінченною пам'яттю / С. О. Сербенюк // Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 25-27 квітня 2013 року: Матеріали конференції. — Київ: Національний університет «Києво-Могилянська академія», 2013. —

С. 112–113.

11. *Serbenyuk S.* On two functions with complicated local structure / S. Serbenyuk // Fifth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations: Abstracts, Kyiv: Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine and Institute of Physics and Mathematics of the National Pedagogical Dragomanov University, 2013. — Pp. 51–52.
12. *Сербенюк С. О.* Задання системами функціональних рівнянь класу функцій, аргументи яких представлені рядами Кантора / С. О. Сербенюк // Міжнародна математична конференція «Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки» до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Положого Георгія Миколайовича, Київ, 23-24 квітня 2014 р.: Матеріали конференції. — Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. — С. 121.
13. *Serbenyuk S. O.* Nega-$\tilde{Q}$-representation of real numbers / S. O. Serbenyuk // International Conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization»: Abstracts, Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2015. — P. 24.
14. *Сербенюк С. О.* Про одну функцію з класу функцій зі складною локальною будовою, означену в термінах нега-$\tilde{Q}$-представлення / С. О. Сербенюк // Четверта всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ, 2015. — С. 52.

Список публікацій, які доповнюють наукові результати дисертації:

1. *Serbenyuk S.* Про деякі узагальнення зображень дійсних чисел [On some generalizations of real numbers representations] [Електронний ресурс] / S. Serbenyuk. — arXiv:1602.07929v1 [math.NT] 25 Feb. 2016. — Режим доступу: https://arxiv.org/pdf/1602.07929.pdf (дата звернен-

ня 16.06.2017).

2. *Сербенюк С. О.* Збереження розмірності Хаусдорфа-Безиковича монотонними сингулярними функціями розподілу / С. О. Сербенюк // Друга міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для молодих науковців, 28-29 квітня 2011 року, Київ: Тези доповідей. — Київ: Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, 2011. — С. 106–107.
3. *Сербенюк С. О.* Квазінега-$\tilde{Q}$-представлення як узагальнення представлення дійсних чисел деякими знакозмінними рядами / С. О. Сербенюк // Міжнародна конференція молодих математиків, Київ, 3-6 червня 2015 р.: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2015. — С. 85.