НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

СУХОРУКОВА ОЛЕНА ОЛЕГІВНА

УДК 517.982.4

УЗАГАЛЬНЕНІ J-ВНУТРІШНІ І γ-ТВІРНІ МАТРИЦІ-ФУНКЦІЇ ТА ІНДЕФІНІТНІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ПРОБЛЕМИ

01.01.01 – математичний аналіз

111 – математика

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана на кафедрі математичного аналізу і диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
ДЕРКАЧ Володимир Олександрович,
Донецький національний університет
імені Василя Стуса, м. Вінниця,
професор кафедри математичного аналізу
і диференціальних рівнянь.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЗОЛОТАРЬОВ Володимир Олексійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б. І. Вєркіна НАН України, м. Харків,
провідний науковий співробітник математичного
відділення відділу теорії функцій;

доктор фізико-математичних наук, професор
ДУДКІН Микола Євгенович,
Національний технічний університет "Київський
політехнічний інститут" імені Ігоря Сікорського, м. Київ,
в. о. завідувача кафедри диференціальних рівнянь фізико-математичного факультету.

Захист відбудеться «11» вересня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий « 6 » серпня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради РОМАНЮК А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. У другій половині двадцятого століття значного розвитку набула теорія несамоспряжених операторів. Зокрема, у роботах М. С. Лівшиця[1, 2] було введено поняття характеристичної функції лінійного оператора, яка повністю характеризує спектральні властивості його цілком несамоспряженої частини. Характеристичні функції для різних класів операторів досліджувались у роботах М. С. Бродського, О. В. Кужеля, Е. Р. Цекановського, В. О. Золотарьова, Ю. М. Арлінського та ін.

Фізичним двійником цієї теорії є теорія відкритих лінійних систем, яка стрімко розвивалась останні 50 років у роботах Р. Калмана, М. Арбіба, Дж. Хелтона, К. Главера, Б. Франсіса у зв'язку з потребами часу. Аналогом характеристичної функції у лінійній системі є передаточне відображення такої системи. У випадку недисипативної системи її передаточне відображення $W(\lambda)$ є J-стискаючим для деякої сигнатурної матриці J ($J = J^* = J^{-1}$), тобто $W(\lambda)^* J W(\lambda) \leq J$ для всіх точок λ з одиничного кола $\mathbb{D}$, у яких $W(\lambda)$ є голоморфною. Факторизаційну теорію J-стискаючих матриць-функцій (м. ф.) було побудовано В. П. Потаповим[3].

J-стискаюча м. ф. називається J-внутрішньою, якщо вона є J-унітарною на одиничному колі $\mathbb{T}$ майже всюди. До класу J-внутрішніх м. ф. відносяться матриці Неванлінни[4], які описують множину розв'язків проблеми моментів і резольвентні матриці проблеми Неванлінни-Піка, проблеми Шура, проблеми Крейна і бідотичної інтерполяційної проблеми. У роботах Д. З. Арова було введено поняття сингулярної і регулярної J-внутрішньої м. ф., показано, що резольвентні матриці узагальненої бідотичної проблеми характеризуються як регулярні J-внутрішні, і доведено, що будь-яка J-внутрішня м. ф. допускає сингулярно-регулярну факторизацію.

В індефінітній інтерполяційній проблемі Неванлінни-Піка потрібно побудувати функцію, яка приймає наперед задані значення у точках інтерполяції, є обмеженою на колі $\mathbb{T}$ та, на відміну від класичної проблеми, має скінченну кількість полюсів у середині диску $\mathbb{D}$. Такі індефінітні постановки виникають при дослідженні проблеми погодження у широкосмугових електричних пристроях та у проблемах багатоканального розсіювання у фізиці. Опис множини розв'язків деяких індефінітних інтерполяційних задач було отримано Дж. Болом і Дж. Хелтоном, Г. Димом, В. Деркачем, А. Аміршадяном та ін. Резольвентні матриці таких індефінітних інтерполяційних задач вже не є J-внутрішніми, але належать до класу

---

[1] Лившиц М. С. К теории изометрических операторов с равными дефектными числами // Докл. АН СССР – 1947. – **57**, 1 – С. 13–15.

[2] Лившиц М. С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов // Матем. сб.– 1954.– **34**, 76. – С. 145–199.

[3] Потапов В. П. Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций // Труды Моск. матем. об-ва. – 1955.– **4**. – С. 125–236.

[4] Nevanlinna R. Asymptotische Entwicklungen beschrankter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A (5) **18**. – 1922. – P. 1– 52.

$\mathcal{U}_\kappa(J)$ узагальнених J-внутрішніх м. ф. Більш того, В. Деркач і Г. Дим[5] показали, що ці резольвентні матриці попадають у підклас так званих правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., де $j_{pq} = diag(I_p, -I_q)$. Для таких м. ф. вдається ввести поняття асоційованої пари, довести факторизаційні формули і завдяки цьому отримати параметризацію всіх розв'язків задачі Шура-Такагі. У зв'язку з цим виникає потреба узагальнити поняття сингулярних і регулярних (за Аровим) матриць на клас правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. і дослідити проблему сингулярно-регулярної факторизації у цьому класі.

Інший клас м. ф., який вивчається у роботі – це клас узагальнених γ-твірних матриць. Класичні γ-твірні матриці було введено В. М. Адамяном, Д. З. Аровим і М. Г. Крейном[6] у зв'язку з розглядом абсолютно невизначеної задачі Нехарі, тобто задачі про найкраще наближення функціями з H_∞ на одиничному колі $\mathbb{T}$. Резольвентна матриця такої задачі має назву γ-твірної матриці. Питання сингулярно-регулярної факторизації γ-твірної матриці було розглянуто Д. З. Аровим. Узагальнені γ-твірні матриці виникають як резольвентні матриці для задачі Нехарі-Такагі, тобто задачі наближення функції з L_∞ раціональними функціями на колі $\mathbb{T}$, розглянутої у роботі В. М. Адамяна, Д. З. Арова і М. Г. Крейна[7].

Перелічені вище інтерполяційні проблеми мають своїм джерелом відповідні проблеми з теорії лінійних систем. Так бідотична інтерполяційна проблема породжується задачею мінімізації чутливості системи, а задача Нехарі-Такагі є еквівалентною проблемі редукції системи у теорії H_∞-контролю. У раціональному випадку матрична задача Нехарі-Такагі досліджувалась Дж. Болом, І. Гохбергом і Л. Родманом. У загальному випадку матрична задача Нехарі-Такагі залишається відкритою.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Основні наукові результати, викладені у дисертації, отримано при виконанні науково-дослідницьких робіт "Гармонічний та спектральний аналіз функцій і операторів, рівняння згортки та наближення функцій" (номер державної реєстрації 0112U002701), "Метричні простори, гармонічний аналіз функцій і операторів, сингулярні та некласичні задачі для диференціальних рівнянь" (номер державної реєстрації 0115U000136), що виконувались відповідно до плану роботи Донецького національного університету; "Спектральні проблеми теорії диференціальних і різницевих операторів" (номер державної реєстрації 0115U000556), що виконувалась відповідно до плану роботи Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.

---

[5] Derkach V. A., Dym H. Bitangential interpolation in generalized Schur classes // Complex Anal. Oper. Theory.– 2010 – **4**, 4. – P. 701–765.

[6] Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г. О бесконечных ганкелевых матрицах и обобщенных задачах Каратеодори-Фейера и Ф. Рисса // Функц. анализ и его прил. – 1968. – **2**, 1. – С. 1–19.

[7] Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г. Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура-Такаги // Матем. сб. – 1971.–**86** (128), 1 (9) – С. 34–75.

Мета і задачі дослідження:

1. Ввести означення класу лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., дослідити їх властивості та отримати факторизації для цього класу.
2. Ввести означення сингулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. Отримати критерії сингулярності узагальнених j_{pq} − внутрішніх м. ф.
3. Ввести означення регулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. Знайти умови регулярності узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. і умови існування регулярно-сингулярної факторизації для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.
4. Ввести означення правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримати зв'язок між узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. і узагальненими γ-твірними матрицями. Ввести означення сингулярних і регулярних γ-твірних матриць. Знайти умови регулярності правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць та умови існування регулярно-сингулярної факторизації узагальнених γ-твірних матриць.
5. Отримати опис множини розв'язків інтерполяційної задачі Такагі-Сарасона. Дослідити зв'язок між множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона і задачі Нехарі-Такагі. Отримати опис множини розв'язків цілком невизначеної задачі Нехарі-Такагі для обмежених функцій, що мають псевдопродовження.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є класи узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. і класи узагальнених γ-твірних матриць.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є факторизаційні теореми для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. і узагальнених γ-твірних матриць, задачі Такагі-Сарасона і Нехарі-Такагі.

Методи дослідження. У дисертації використовуються методи теорії мероморфних м. ф., методи J-теорії Потапова, методи теорії просторів Харді і просторів Понтрягіна з відтворюючим ядром.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертації отримані такі нові результати:

1. Введено новий клас $\mathcal{U}_{\kappa}^{\ell}(j_{pq})$ лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Введено поняття лівої асоційованої пари для лівої узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. $W(\lambda)$. Доведено факторизаційні теореми для м. ф. $W(\lambda)$ у термінах лівої асоційованої пари.

2. Введено означення сингулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. Доведено критерії сингулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.

3. Введено означення регулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. Знайдено достатні умови регулярності узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. Доведено критерій регулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. у раціональному випадку. Отримано умови існування регулярно-сингулярної факторизації для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.

4. Введено класи правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$, $\mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Знайдено зв'язок між узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. і множиною узагальнених γ-твірних матриць. Введено означення сингулярних, регулярних і сильно регулярних γ-твірних матриць. Отримано достатні умови регулярності і сильної регулярності правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримано умови існування регулярно-сингулярної факторизації узагальнених γ-твірних матриць.

5. Отримано опис множини розв'язків інтерполяційної задачі Такагі-Сарасона. Знайдено зв'язок між множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона і задачі Нехарі-Такагі. Отримано опис множини розв'язків цілком невизначеної задачі Нехарі-Такагі для обмежених функцій, що мають псевдопродовження.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при дослідженні інших типів інтерполяційних проблем та у теорії лінійних систем. Матеріали дисертації можуть бути використані у навчальному процесі – при викладанні спеціальних курсів математичного аналізу.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та плану досліджень, постановка задач та формулювання основних гіпотез належить науковому керівнику В. О. Деркачу. Всі представлені у дисертації результати отримано автором особисто.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

- Восьмій міжнародній науковій конференції для молодих вчених «Сучасні проблеми математики і її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Україна, Харків, 27 – 28 квітня 2013 р.).
- Кримській Міжнародній Математичній Конференції (Україна, Крим, Судак, 22 вересня – 4 жовтня 2013 р.).
- Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Україна, Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р.)
- П’ятій всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики "Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання" (Україна, Київ, 25 – 26 квітня 2016 р.).
- Сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Україна, Київ, 19 – 20 травня 2016 р.).
- Шостій всеукраїнській конференції молодих вчених з математики та фізики (Україна, Київ, 21 – 22 квітня 2017 р.).
- International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008) (Ukraine, Kyiv, June 7 – 10, 2017).
- International Conference “Modeling, analysis and approximation theory toward applications in tomography and inverse problems” (Germany, Braunschweig, February 3 – 7, 2018).

– Семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, Донецького національного університету (керівник д. ф.-м. н. професор В. О. Деркач).
– Research Seminar “Applied Analysis”, Humboldt-Universitat zu Berlin, Institute of Mathematics (Seminar heads: L. Recke, I. Kmit).
– Семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, Національного педагогічного університет імені М. П. Драгоманова (керівник д. ф.-м. н. професор Г. М. Торбін).
– Науковому семінарі з функціонального аналізу, Інституту математики НАН України (керівники: академік НАН України проф. Ю. М. Березанський, член-кореспондент НАН України проф. А. Н. Кочубей).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 13 наукових публікаціях, серед яких 2 статті в українських фахових журналах [1, 5] та 3 статті у журналах, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus [2-4] та 8 тез доповідей на конференціях.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, 5 розділів, що подрібнені на підрозділи, висновків та списку літератури, що містить 77 найменувань. Обсяг роботи складає 140 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Дисертація присвячена дослідженню узагальненого класу J-внутрішніх м. ф. і узагальнених γ-твірних матриць у випадку одиничного кола $\mathbb{D}$ і верхньої півплощини $\mathbb{C}_+$ і вивченню їх ролі у розв’язку інтерполяційних задач (в авторефераті будуть наведені результати для одиничного кола $\mathbb{D}$).

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету дослідження, викладено зміст основної частини роботи та показано наукову новизну одержаних результатів.

Розділ 1 присвячено історичному огляду робіт що до теми дисертації та опису методів дослідження, які у ній використовуються. Також у цьому розділі приводяться необхідні поняття та означення.

Будемо позначати $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, $\quad \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$;

$\mathbb{C}^{p\times q}$ $(\mathbb{C}^p)$ – множина матриць розміру $p \times q$ (векторів розміру p);

J – сигнатурна матриця така, що $J = J^*$ і $JJ^* = I_m$, $j_{pq} = diag\left(I_p, -I_q\right)$.

Позначимо через H_2 (H_∞) клас Харді функцій f, голоморфних у $\mathbb{D}$ і таких, що

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\text{\^{}}2\, d\theta < \infty \qquad (\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty).$$

$H_2^{p\times q}$ $\left(H_\infty^{p\times q}\right)$ – це клас м. ф. розміру $p \times q$ з елементами з H_2 (H_∞), $H_2^p := H_2^{p\times 1}$ $\left(H_\infty^p := H_\infty^{p\times 1}\right)$.

Позначимо через $S^{p\times q}$ клас Шура, тобто клас стискаючих м. ф. розміру $p \times q$. У цьому класі виділимо підкласи зовнішніх і внутрішніх м. ф.:

$S_{out}^{p\times q} = \{s \in S^{p\times q}: \overline{s\,H_2^q} = H_2^p\}$, $\quad S_{in}^{p\times q} = \{s \in S^{p\times q}: s(\mu)^* s(\mu) = I_p$ м.в. на $\mathbb{T}\}$.

$M_\pi(G, \mathbb{D})$ позначає полюсну кратність м. ф. G на $\mathbb{D}$.

Нехай $\kappa \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Будемо говорити, що ермітове ядро $K_\omega(\lambda): \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}^{m\times m}$ має κ від'ємних квадратів і будемо писати $sq_- K_\omega = \kappa$, якщо для кожного натурального n та кожного набору $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ та $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}^m$ матриця $\left(\langle K_{\omega_j}(\omega_k)u_j, u_k\rangle\right)_{j,k=1}^n$ має не більше, ніж κ від'ємних власних значень, і для деякого набору $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ та $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}^m$ точно κ від'ємних власних значень.

Нехай $S_\kappa^{q\times p}$ позначає *узагальнений клас Шура* м. ф. $s(\lambda)$ розміру $q \times p$, які є мероморфними у $\mathbb{D}$ та для яких ядро

$$\Lambda_\omega^s(\lambda) = \frac{I_p - s(\lambda)s(\omega)^*}{1 - \lambda\overline{\omega}}$$

має κ від'ємних квадратів у $\mathfrak{h}_s^+ \times \mathfrak{h}_s^+$.

Кожна м. ф. $s \in S_\kappa^{q\times p}$ допускає *факторизацію Крейна-Лангера*:

$$s(\lambda) = b_\ell(\lambda)^{-1} s_\ell(\lambda) = s_r(\lambda) b_r(\lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathfrak{h}_s^+, \tag{1}$$

де $b_\ell \in S^{q\times q}$, $b_r \in S^{p\times p}$ – добутки Бляшке-Потапова степеня κ, $s_\ell, s_r \in S^{q\times p}$ та факторизація (1) є лівою взаємно простою та правою взаємно простою, відповідно, тобто

$$rank[b_\ell(\lambda) \quad s_\ell(\lambda)] = q \qquad \text{і} \qquad rank[b_r(\lambda)^* \quad s_\ell(\lambda)^*] = p \ \ (\lambda \in \mathbb{D}).$$

Будемо позначати *клас Неванлінни* та *клас Смірнова* через $\mathcal{N}^{p\times q}$ та $\mathcal{N}_+^{p\times q}$ відповідно:

$$\mathcal{N}^{p\times q} = \{f = h^{-1}g: \ g \in H_\infty^{p\times q}, \qquad h \in S := S^{1\times 1}\},$$

$$\mathcal{N}_+^{p\times q} = \{f = h^{-1}g: \ g \in H_\infty^{p\times q}, \qquad h \in S_{out} := S_{out}^{1\times 1}\}.$$

$\mathcal{R}^{p\times q}$ позначає клас раціональних м. ф. розміру $p \times q$.

Означення 1.21. Говорять, що $p \times q$ м. ф. f_- у $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ є псевдопродовженням м. ф. $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$, якщо $f_-^\# \in \mathcal{N}^{p\times q}$ і $f_-(\mu) = f(\mu)$ м. в. на $\mathbb{T}$.

Підклас м. ф. $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$, що допускають псевдопродовження м. ф. f_- у $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ будемо позначати $\Pi^{p\times q}$.

М. ф. $\varphi(\lambda)$ розміру $p \times q$ належить *узагальненому класу Смірнова* $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$ ($\kappa \in \mathbb{N}$), якщо вона допускає представлення

$$\varphi(\lambda) = \varphi_0(\lambda) + r(\lambda), \qquad \text{де } \varphi_0 \in \mathcal{N}_+^{p\times q}, \ r \in \mathcal{R}^{p\times q} \text{ і } M_\pi(r, \mathbb{D}) \le \kappa.$$

Означення 1.28. *М. ф.* $W(\lambda) = \left[w_{ij}(\lambda)\right]_{i,j=1}^{2}$ *розміру* $m \times m$ *мероморфну в* $\mathbb{D}$ *відносять до класу* $\mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ *узагальнених* j_{pq}*-внутрішніх м. ф.*[8], *якщо:*

i. *ядро*

$$K_\omega^W(\lambda) = \frac{j_{pq} - W(\lambda) j_{pq} W(\omega)^*}{1 - \lambda\overline{\omega}} \tag{2}$$

має κ *від'ємних квадратів в* $\mathfrak{h}_W^+ \times \mathfrak{h}_W^+$;

ii. $j_{pq} - W(\mu) j_{pq} W(\mu)^* = 0$ *м. в. на* $\mathbb{T}$.

Для кожної м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ блок $w_{22}(\lambda)$ є оборотним для $\lambda \in \mathfrak{h}_W^+$ за винятком не більш, ніж κ точок у $\mathbb{D}$. Таким чином, перетворення Потапова-Гінзбурга для W

$$S(\lambda) := \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

є коректно визначеним для тих $\lambda \in \mathfrak{h}_W^+$, для яких $w_{22}(\lambda)$ є оборотним.

Означення 1.29. Говорять, що $m \times m$ м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ належить до класу $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, якщо $s_{21} := -w_{22}^{-1} w_{21} \in S_\kappa^{q\times p}$.

Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ та нехай факторизація Крейна-Лангера для s_{21} має вигляд

$$s_{21}(\lambda) = b_\ell(\lambda)^{-1} s_\ell(\lambda) = s_r(\lambda) b_r(\lambda)^{-1} \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{21}}^+),$$

де $b_\ell \in S_{in}^{q\times q}$, $b_r \in S_{in}^{p\times p}$, $s_\ell, s_r \in S^{q\times p}$. Тоді м. ф. $b_\ell s_{22}$ та $s_{11} b_r$ голоморфні у $\mathbb{D}$ та

$$b_\ell s_{22} \in S^{q\times q}, \qquad s_{11} b_r \in S^{p\times p}. \tag{3}$$

Означення 1.30. Розглянемо зовнішньо-внутрішню факторизацію $s_{11} b_r$ та внутрішньо-зовнішню факторизацію $b_\ell s_{22}$

$$s_{11} b_r = a_2 b_2, \qquad b_\ell s_{22} = b_1 a_1, \tag{4}$$

де $b_1 \in S_{in}^{p\times p}$, $b_2 \in S_{in}^{q\times q}$, $a_1 \in S_{out}^{p\times p}$, $a_2 \in S_{out}^{q\times q}$. Пара $\{b_1, b_2\}$ внутрішніх множників у факторизації (4) називається *асоційованою парою* м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$. Цю пару $\{b_1, b_2\}$ будемо називати *правою асоційованою парою* та будемо писати $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$.

Крім того, як показано у роботі В. Деркача і Г. Дима, існує набір м. ф. $c_\ell \in H_\infty^{q\times q}$, $d_\ell \in H_\infty^{p\times q}$, $c_r \in H_\infty^{p\times p}$ і $d_r \in H_\infty^{p\times q}$ такий, що

$$\begin{bmatrix} c_r & d_r \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r & -d_\ell \\ s_r & c_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Лінійний простір $\mathcal{K}$, оснащений півторалінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$ на $\mathcal{K} \times \mathcal{K}$ називається простором з індефінітним скалярним добутком. Підпростір $\mathcal{F}$

[8] Derkach V. A., Dym H. On linear fractional transformations associated with generalized J-inner matrix functions // Integral Equations Operator Theory. –2009. – **65**, 1 – P. 1 – 50.

простору $\mathcal{K}$ називається позитивним (негативним) відносно форми $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$, якщо $\langle f, f\rangle_{\mathcal{K}} > 0, (< 0)$ для всіх $f \in \mathcal{F},\ f \neq 0$.

Простір з індефінітним скалярним добутком $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}})$ називається простором Понтрягіна, якщо його можна представити у вигляді ортогональної суми

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{+}\langle+\rangle\, \mathcal{K}_{-},$$

де $\mathcal{K}_{+} -$ гільбертів простір та $\mathcal{K}_{-} -$ негативний підпростір скінченної розмірності. Число $ind_{-}\mathcal{K} := \dim \mathcal{K}_{-}$ називається негативним індексом простору.

Нехай $K_{\omega}(\lambda)$: $\Omega \times \Omega \to \mathbb{C}^{m\times m}$ – ермітове ядро. Простір Понтрягіна $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}})$ $\mathbb{C}^{m}$-значних функцій на підмножині Ω множини $\mathbb{C}$ називається *простором Понтрягіна з відтворюючим ядром* $K_{\omega}(\lambda)$ *(RKPS)*, якщо:

(1) для будь-якого $\omega \in \Omega$ та кожного $u \in \mathbb{C}^{m}$ вектор-функція $K_{\omega}(\lambda)u \in \mathcal{K}$;
(2) для кожного $h \in \mathcal{K},\ \omega \in \Omega$ та $u \in \mathbb{C}^{m}$ виконується відтворююча тотожність $\langle h,\ K_{\omega}u\rangle_{\mathcal{K}} = u^{*}f(\omega)$.

Для кожного ермітового ядра $K_{\omega}(\lambda)$: $\Omega \times \Omega \to \mathbb{C}^{m\times m}$ із скінченним числом κ від'ємних квадратів на $\Omega \times \Omega$ існує єдиний простір Понтрягіна $\mathcal{K}$ з відтворюючим ядром $K_{\omega}(\lambda)$, причому $ind_{-}\mathcal{K} = \mathrm{sq}_{-}K_{\omega} = \kappa$.

Якщо $W \in \mathcal{U}_{\kappa}(j_{pq})$ і ядро $K_{\omega}^{W}(\lambda)$ задається формулою (2), то простір Понтрягіна з відтворюючим ядром $K_{\omega}^{W}(\lambda)$ будемо позначати $\mathcal{K}(W)$.

Розділ 2 присвячено дослідженню класів правих і лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Зокрема у § 2.2 введено означення класу лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.

Означення 2.6. *Говорять, що* $m \times m$ *м. ф.* $W \in \mathcal{U}_{\kappa}(j_{pq})$ *належить до класу лівих узагальнених* j_{pq}*-внутрішніх м. ф.* $\mathcal{U}_{\kappa}^{\ell}(j_{pq})$, *якщо* $s_{12} := w_{12}w_{22}^{-1} \in S_{\kappa}^{q\times p}$.

Показано, що класи $\mathcal{U}_{\kappa}^{\ell}(j_{pq})$ та $\mathcal{U}_{\kappa}^{r}(j_{pq})$ не співпадають (див. Приклад 2.5).

Введемо позначення:

$$\widetilde{W}(\lambda) = W\big(\bar{\lambda}\big)^{*}. \tag{6}$$

Наступна пропозиція показує зв'язок між лівими та правими узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф.

Пропозиція 2.8. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_{\kappa}(j_{pq})$. *Тоді*

$$W \in \mathcal{U}_{\kappa}^{r}\big(j_{pq}\big) \Leftrightarrow \widetilde{W} \in \mathcal{U}_{\kappa}^{\ell}(j_{pq})\,.$$

Теорема 2.11. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_{\kappa}^{\ell}(j_{pq})$ *і* s_{12} *має факторизацію Крейна-Лангера:*

$$s_{12}(\lambda) = \mathfrak{b}_{\ell}(\lambda)^{-1}\mathfrak{s}_{\ell}(\lambda) = \mathfrak{s}_{r}(\lambda)\mathfrak{b}_{r}(\lambda)^{-1}\mathfrak{s}_{\ell},\ \ \lambda \in \mathfrak{h}_{s_{12}}^{+}, \tag{7}$$

де $\mathfrak{b}_{\ell} \in S_{in}^{p\times p}, \mathfrak{b}_{\ell} \in S_{in}^{q\times q}, \mathfrak{s}_{\ell}, \mathfrak{s}_{r} \in S^{p\times q}$. *Тоді*

$$\mathfrak{b}_\ell s_{11} \in S^{p\times p}, \qquad s_{22}\mathfrak{b}_r \in S^{q\times q}. \tag{8}$$

Окрім цього, існують м. ф. $\mathfrak{c}_\ell \in H_\infty^{p\times p}$, $\mathfrak{d}_\ell \in H_\infty^{q\times p}$, $\mathfrak{c}_r \in H_\infty^{q\times q}$, $\mathfrak{d}_r \in H_\infty^{q\times p}$ такі, що

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{c}_\ell & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{d}_\ell & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell & -\mathfrak{s}_\ell \\ -\mathfrak{d}_r & \mathfrak{c}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Означення 2.12. *Розглянемо зовнішньо-внутрішню факторизацію м. ф.* $\mathfrak{b}_\ell s_{11}$ *та внутрішньо-зовнішню факторизацію м. ф.* $s_{22}\mathfrak{b}_r$

$$\mathfrak{b}_\ell s_{11} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \qquad s_{22}\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2. \tag{10}$$

де $\mathfrak{b}_1 \in S_{in}^{p\times p}$, $\mathfrak{b}_2 \in S_{in}^{q\times q}$, $\mathfrak{a}_1 \in S_{out}^{p\times p}$, $\mathfrak{a}_2 \in S_{out}^{q\times q}$. *Пару* $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ *внутрішніх множників у факторизаціях (10) будемо називати лівою асоційованою парою м. ф.* $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *та для стислості будемо писати* $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$.

Завдяки зв'язку між лівими та правими узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. отримано наступну факторизацію лівого класу у термінах асоційованої пари.

Теорема 2.15. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *та нехай* $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$. *Тоді* W *можна виразити у термінах лівої асоційованої пари наступним чином:*

$$W = \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell^* & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{s}_\ell^* & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_1^{-*} & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{b}_2^{-1} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

§ 2.4 присвячено сингулярним узагальненим J-внутрішнім м. ф.

Означення 2.21. *Будемо говорити, що м. ф.* $W \in \mathcal{U}_\kappa(J)$ *є сингулярною, якщо* $W, W^{-1} \in \mathcal{N}_+^{m\times m}$. Клас узагальнених сингулярних J-внутрішніх м. ф. будемо позначати $\mathcal{U}_\kappa^S(J)$.[9]

Теорема 2.26. (Критерій сингулярності у термінах асоційованої пари).

Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *та* $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$. *Тоді* W *є сингулярною тоді і тільки тоді, коли* $b_1 \equiv const$ та $b_2 \equiv const$.

Наслідок 2.27. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *та* $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$. *Тоді* $W \in \mathcal{U}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq})$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathfrak{b}_1 \equiv const$ та $\mathfrak{b}_2 \equiv const$.

Теорема 2.30. (Критерій сингулярності у термінах RKPS).

Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *та* $\{b_1, b_2\} \in \mathrm{ap}^r(W),$), $\mathcal{K}(W)$ − *це простір Понтрягіна з відтворюючим ядром* $K_\omega^W(\lambda)$, *визначеним у (2). Тоді* $W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,S}(j_{pq})$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{L}_W := \mathcal{K}(W) \cap L_2^m = \{0\}$.

---

[9] У випадку $\kappa = 0$ це означення було введено у роботі Д. З. Арова (Аров Д. З. О регулярных и сингулярных J-внутренних матрицах-функциях и соответствующих задачах экстраполяции // Функц. анализ и его прил. 1988.– **22**, 1. – С. 57–59).

Наслідок 2.31. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$. *Тоді* $W \in \mathcal{U}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq})$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathcal{L}_{\widetilde{W}} = \{0\}$.

Розділ 3 присвячено регулярним узагальненим м. ф. і пошуку умов регулярності та факторизації j_{pq}-внутрішніх м. ф.

Означення 3.12. *М. ф.* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *називається правою регулярною узагальненою* j_{pq}*-внутрішньою, якщо для кожної факторизації*

$$W = W^{(1)}W^{(2)}, \qquad W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq}),\ W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^\ell(j_{pq}), \tag{12}$$

з $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$ *припущення* $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq})$ *означає, що* $W^{(2)} \equiv const$.

Аналогічно, м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *називається лівою регулярною узагальненою* j_{pq}*-внутрішньою, якщо для кожної факторизації (12) з* $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$ *припущення* $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^{r,S}(j_{pq})$ *означає, що* $W^{(1)} \equiv const$.

У наступній лемі знайдено достатні умови для регулярності м. ф. $W(\lambda)$.

Лема 3.17. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, $\mathcal{K}(W) -$ *це простір Понтрягіна з відтворюючим ядром* $K_\omega^W(\lambda)$, *визначеним у (2), та нехай* $\mathcal{L}_W := \mathcal{K}(W) \cap L_2^{m\times m}$, $ind\_\mathcal{L}_W = \kappa$. *Припустимо, що:*

(A1) $\mathfrak{h}_W \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, *;*

(A2) замикання $\overline{\mathcal{L}_W}$ *лінеала* $\mathcal{L}_W$ *є невиродженим підпростором у* $\mathcal{K}(W)$.

Тоді справедливі наступні імплікації:

1. $W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,R}(j_{pq}) \Longrightarrow \overline{\mathcal{L}_W} = \mathcal{K}(W)$;
2. $\mathcal{K}(\widetilde{W}) \subset L_2^{m\times m} \Longrightarrow W \in \mathcal{U}_{\kappa(j_{pq})}^{r,R}$;
3. $W \in L_2^{m\times m} \cap \mathcal{R}^{m\times m} \Longrightarrow W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,R}(j_{pq})$.

У раціональному випадку маємо такий критерій регулярності.

Теорема 3.19. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) -$ *раціональна м. ф. Тоді*

$$W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,R}(j_{pq}) \Leftrightarrow \mathcal{L}_W = \mathcal{K}(W).$$

Основним результатом **розділу 3** є теорема існування регулярно-сингулярної факторизації[10].

Теорема 3.22. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap R^{m\times m}$. *Тоді наступні твердження еквівалентні:*

---

[10] У класі $\mathcal{U}(j_{pq})$ теорему про регулярно-сингулярну факторизацію доведено у роботі Д. З. Арова та Г. Дима
(D. Z. Arov, H. Dym. J-inner matrix function, interpolation and inverse problems for canonical system, I: foundation // Integral Equations. Operator Theory. –1997. – **28**. – P. 1–16).

(1) W *допускає факторизацію*

$$W = W^{(1)}W^{(2)}, \text{ де } W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^{r,R}(j_{pq}),\ W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq}), \tag{13}$$

з $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$*;*

(2) $\mathcal{L}_W$ *є невиродженим підпростором* $\mathcal{K}(W)$.

Більш того, множники $W^{(1)}$ *та* $W^{(2)}$ *у (13) є однозначно визначеними з точністю до* j_{pq}*-унітарного множника.*

У **розділі 4** розглядаються класи правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ і $\mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$[11] .

Означення 4.1. *Нехай* $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ *позначає клас* $m\times\ m$ *м. ф.*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{bmatrix} \tag{14}$$

з блоками $a_{11}(\mu), a_{22}(\mu)$ *розміру* $p\times\ p$ *та* $q\times\ q$ *відповідно, таких, що:*

(1) $\mathfrak{A}(\mu)$ *є вимірною та* j_{pq}*-унітарною м.в. на* $\mathbb{T}$;

(2) $s_{21} = -a_{22}^{-1}a_{21} \in S_\kappa^{q\times\ p}$;

(3) $\left(a_{11}^{\#}\right)^{-1}b_r = a_1 \in S_{out}^{p\times\ p}$, $b_\ell\, a_{22}^{-1} = a_2 \in S_{out}^{q\times\ q}$, *де* b_ℓ, b_r *– добутки Бляшке-Потапова степеня* κ*, які визначаються факторизацією Крейна-Лангера для* s_{21}.

М. ф. класу $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ *називаються узагальненими правими* γ*-твірними матрицями.*

Означення 4.2. *Нехай* $\mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *позначає клас* $m\times\ m$ *м. ф.* $\mathfrak{A}(\mu)$ *вигляду (14) таких, що:*

(1) $\mathfrak{A}(\mu)$ *є вимірною та* j_{pq}*-унітарною м.в. на* $\mathbb{T}$;

(2) $s_{12} = a_{12}a_{22}^{-1} \in S_\kappa^{p\times\ q}$;

(3) $\mathfrak{b}_\ell\left(a_{11}^{\#}\right)^{-1} = \mathfrak{a}_1 \in S_{out}^{p\times\ p}$, $a_{22}^{-1}\mathfrak{b}_r = \mathfrak{a}_2 \in S_{out}^{q\times q}$, *де* $\mathfrak{b}_\ell, \mathfrak{b}_r$ *добутки Бляшке-Потапова степеня* κ*, які визначаються факторизацією Крейна-Лангера для* s_{12}.

М. ф. класу $\mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *називаються узагальненими лівими* γ *−твірними матрицями.*

Означення 4.4. *Упорядкована пара* $\{b_1, b_2\}$ *внутрішніх м. ф.* $b_1 \in \mathcal{N}^{p\times\ p}$, $b_2 \in \mathcal{N}^{q\times\ q}$ *називається знаменником м. ф.* $f \in \mathcal{N}^{p\times\ q}$, *якщо* $b_1\, f\, b_2 \in \mathcal{N}_+^{p\times\ q}$. *Множину знаменників м. ф.* f *будемо позначати* $den\ (f)$.

Узагальнені γ-твірні матриці пов'язані з узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. наступним чином.

---

[11] Означення γ-твірної матриці для одиничного кола було введено у роботі Д. З. Арова (Аров Д. З. γ-производящие матрицы, J-внутренние матрицы-функции и связанные с ними проблемы экстраполяции //Функц. анализ и его прил. –1989. – **51**. – С. 61 – 67).

Теорема 4.5. *Нехай* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ *і* b_ℓ, s_ℓ, b_r, s_r *визначені факторизацією Крейна-Лангера м. ф.* $s_{21} \in S_\kappa^{q\times p}$. *Нехай* $c_\ell,\ d_\ell, c_r,\ d_r$ *визначені рівністю (5) і нехай*

$$f_0^r := (-a_{11}d_\ell + a_{12}c_\ell)(-a_{21}d_\ell + a_{22}c_\ell)^{-1} = (-a_{11}d_\ell + a_{12}c_\ell)a_2. \qquad (15)$$

Тоді, якщо $den(f_0^r) \neq \emptyset$ і $\{b_1, b_2\} \in\ den(f_0^r)$, то

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{A}(\lambda) \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}), \qquad \{b_1, b_2\} \in\ \mathrm{ap}^r(W) \qquad (16)$$

і тому $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m}$.

Навпаки, якщо

$$W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \quad \text{і} \quad \{b_1, b_2\} \in\ \mathrm{ap}^r(W), \qquad (17)$$

то

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} W(\lambda) \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \qquad (18)$$

і $\{b_1, b_2\} \in\ den(f_0^r)$.

Аналогічний зв'язок для класів лівих м. ф. доведено у лемі 4.6.

Означення 4.7. *Визначимо знаменник для узагальненого класу правих* γ*-твірних матриць* $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$: $den^r(\mathfrak{A}) := den(f_0^r)$ *та знаменник для узагальненого класу лівих* γ*-твірних матриць* $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$: $den^\ell(\mathfrak{A}) := den(f_0^\ell)$, *де* $f_0^\ell = \mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r\ a_{11} + \mathfrak{c}_r\ a_{21})$, *а* $\mathfrak{c}_r, \mathfrak{d}_r$ *визначаються формулою (9).*

У § 4.2 розглядаються сингулярні, регулярні та сильно регулярні м. ф. з класів $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ і $\mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Отримано достатні умови для сильної регулярності.

Означення 4.10. *М. ф.* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ *називається*

1) *право-сингулярною* ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,S}(j_{pq})$), *якщо* $f_0^r = (-a_{11}d_\ell + a_{12}c_\ell)a_2 \in\ H_\infty^{p\times q}$;

2) *право-регулярною* ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,R}(j_{pq})$), *якщо з факторизації* $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, *з* $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}_{\kappa_1}^r(j_{pq})$ *і* $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{M}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq})$, $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$ *випливає, що* $\mathfrak{A}_2 \equiv\ const$;

3) *сильно право-регулярною* ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,s\,R}(j_{pq})$), *якщо знайдеться м. ф.* $f \in T_{\mathfrak{A}}^r[S^{p\times p}]$ *така, що* $\|f\|_\infty < 1$, *де* $T_{\mathfrak{A}}^r[S^{p\times p}] := \{T_{\mathfrak{A}}^r[\varepsilon]\ = (a_{11}\varepsilon + a_{12})(a_{21}\varepsilon + a_{22})^{-1}:\ \varepsilon \in S^{p\times p}\}$.

Означення 4.11. *М. ф.* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}))$ *називається:*

1) *ліво-сингулярною* ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq})$), *якщо* $f_0^\ell = \mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r\ a_{11} + \mathfrak{c}_r\ a_{21}) \in\ H_\infty^{p\times q}$;

2) *ліво-регулярною* $\left(\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,R}(j_{pq})\right)$, *якщо з факторизації* $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1$, *де* $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}_{\kappa_1}^\ell(j_{pq})$ *і* $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}_{\kappa_2}^{r,S}(j_{pq})$, $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$ *випливає, що* $\mathfrak{A}_2 \equiv\ const$;

3) сильно ліво-регулярною ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,s\,R}(j_{pq})$), *якщо знайдеться м. ф.* $f \in T_{\mathfrak{A}}^{\ell}[S^{p\times p}]$ *така, що* $\|f\|_\infty < 1$, *де* $T_{\mathfrak{A}}^{\ell}[S^{p\times p}] := \{T_{\mathfrak{A}}^{\ell}[\varepsilon] = (\varepsilon a_{11} + a_{12})(\varepsilon a_{21} + a_{22})^{-1}\colon\ \varepsilon \in S^{p\times p}\}$.

Лема 4.16. *Якщо* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap L_\infty^{m\times m}$, *то* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,sR}(j_{pq})$. *Якщо* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap L_\infty^{m\times m}$, *то* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,sR}(j_{pq})$.

§ 4.3 присвячено пошуку зв'язку між сингулярними узагальненими підкласами γ-твірних матриць і j_{pq}-внутрішніх м. ф., отриманню умов регулярності узагальнених γ-твірних матриць і факторизації узагальнених γ-твірних матриць.

Лема 4.17. *Нехай* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \Pi^{m\times m}$. *Тоді*

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,S}(j_{pq}) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \in \mathcal{U}_\kappa^{r,S}(j_{pq}).$$

Лема 4.22. *Нехай* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap L_2^{p\times q} \cap \mathcal{R}^{m\times m}$. *Тоді* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,R}(j_{pq})$.

Використовуючи перетворення (6), легко отримати аналогічні твердження для класу узагальнених лівих γ-твірних матриць.

Основний результат цього розділу – це теорема про факторизацію.

Теорема 4.24. *Нехай м. ф.* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{R}^{m\times m}$, $\{b_1, b_2\} \in den^r(\mathfrak{A})$, W *задана рівністю (16) та нехай:*

(1) $W(\lambda) \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$,
(2) $\mathcal{L}_W$ *є невиродженим підпростором у* $\mathcal{K}(W)$.

Тоді м. ф. $\mathfrak{A}$ *допускає регулярно-сингулярну факторизацію*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{A}^{(2)}, \qquad \mathfrak{A}^{(1)} \in \mathfrak{M}_{\kappa_1}^{r,R}(j_{pq}), \qquad \mathfrak{A}^{(2)} \in \mathfrak{M}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq}), \tag{19}$$

де $\kappa_1 = ind\_\mathcal{L}_W$ і $\kappa_2 = \kappa - \kappa_1$.

Розділ 5 присвячено застосуванням узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. і узагальнених γ-твірних матриць.

У § 5.1 розглядається наступна *інтерполяційна задача Такагі-Сарасона* $\boldsymbol{TSP}_\kappa(b_1, b_2, K)$. *Нехай* $b_1 \in S_{in}^{p\times p}$, $b_2 \in S_{in}^{q\times q}$ *та* $K \in H_\infty^{p\times q}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. *Знайти м. ф.* s *розміру* $p \times q$ *таку, що* s *належить до* $S_{\kappa'}^{p\times q}$ *для деякого* $\kappa' \le \kappa$ *та задовольняє умову*

$$b_1^{-1}(s - K)b_2^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}. \tag{20}$$

Множину розв'язків задачі Такагі-Сарасона будемо позначати

$$\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K) = \bigcup_{\kappa' \le \kappa} \{S_{\kappa'}^{p\times q}\colon b_1^{-1}(s - K)b_2^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}\}. \tag{21}$$

Побудуємо резольвентну матрицю проблеми $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K)$. Нехай

$$\mathcal{H}(b_1) := H_2^p \ominus b_1 H_2^p, \qquad \mathcal{H}_*(b_2) := \left(H_2^q\right)^\perp \ominus\ b_2^*\left(H_2^q\right)^\perp,$$
$$\mathcal{H}(b_1, b_2) := \mathcal{H}(b_1) \oplus \mathcal{H}_*(b_2)$$

та нехай оператори

$$K_{11}: H_2^q \to \mathcal{H}(b_1),\ \ K_{12}: \mathcal{H}_*(b_2) \to \mathcal{H}(b_1), \quad K_{22}: \mathcal{H}_*(b_2) \to \left(H_2^p\right)^\perp$$

визначені формулами

$$\begin{aligned} K_{11}h_+ &= \Pi_{\mathcal{H}(b_1)} K h_+, \qquad h_+ \in\ H_2^q, \\ K_{12}h_2 &= \Pi_{\mathcal{H}(b_1)} K h_2, \qquad h_2 \in \mathcal{H}_*(b_2), \\ K_{22}h_2 &= \Pi_- K h_2, \qquad h_2 \in \mathcal{H}_*(b_2), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\mathbf{K} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{22} \end{bmatrix} : \begin{array}{c} H_2^q \\ \oplus \\ \mathcal{H}_*(b_2) \end{array} \to \begin{array}{c} \mathcal{H}(b_1) \\ \oplus \\ \left(H_2^p\right)^\perp \end{array}. \tag{23}$$

Розглянемо оператор $\boldsymbol{P}: \mathcal{H}(b_1, b_2) \to \mathcal{H}(b_1, b_2)$, який задається блочною матрицею

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} - \mathrm{K}_{11}\mathrm{K}_{11}^* & -\mathrm{K}_{12} \\ -\mathrm{K}_{12}^* & \mathrm{I} - \mathrm{K}_{22}^*\mathrm{K}_{22} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Набір даних $b_1,\ b_2,\ K$ підлягає таким обмеженням:

(H1) $b_1 \in\ S_{in}^{p\times p},\ b_2 \in S_{in}^{q\times q},\ K \in\ H_\infty^{p\times p}$.

(H2) $\kappa_1 = \nu_-(\boldsymbol{P}) < \infty$.

(H3) $0 \in \rho(\boldsymbol{P})$.

(H4) $\mathfrak{h}_{b_1} \cap \mathfrak{h}_{b_2^\#} \cap \Omega_0 \neq \emptyset$.

Визначимо наступний оператор:

$$F = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{K}_{22} \\ \mathrm{K}_{11}^* & \mathrm{I} \end{bmatrix} : \begin{array}{c} \mathcal{H}(b_1) \\ \oplus \\ \mathcal{H}_*(b_2) \end{array} \to \begin{array}{c} b_1\left(H_2^p\right)^\perp \\ \oplus \\ b_2^*(H_2^q) \end{array} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{K}. \tag{25}$$

Для кожного $h_1 \in \mathcal{H}(b_1)$ та $h_2 \in \mathcal{H}_*(b_2)$ вектор-функції $(K_{11}^* h_1)(\lambda)$ та $(K_{22}h_2)(\lambda)$ допускають псевдопродовження обмеженого типу, які є голоморфними на $\mathfrak{h}_{b_1}$ та $\mathfrak{h}_{b_2^\#}$, відповідно. Це дозволяє визначити оператор-функцію $\lambda \to F(\lambda)$, де $F(\lambda)$ діє з $\mathcal{H}(b_1, b_2)$ у $\mathbb{C}^m$ за формулою

$$F(\lambda)h = (Fh)(\lambda), \qquad h \in \mathcal{H}(b_1, b_2), \qquad \lambda \in \mathfrak{h}_{b_1} \cap \mathfrak{h}_{b_2^\#}. \tag{26}$$

Нехай $\mu \in \mathfrak{h}_{b_1} \cap \mathfrak{h}_{b_2^\#}$. Тоді оператор $F(\mu)^*$ є обмеженим як оператор з $\mathbb{C}^m$ у $\mathcal{H}(b_1, b_2)$ і м. ф.

$$W(\lambda) = I - (1 - \lambda\bar{\mu})F(\lambda)P^{-1}F(\mu)^* j_{pq} \qquad (27)$$

є коректно визначеною для $\lambda \in \mathfrak{h}_{b_1} \cap \mathfrak{h}_{b_2^\#}$. Наступна теорема дає опис множини $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K)$.

Теорема 5.2. *Нехай виконані умови (H1) – (H4) та нехай* $W(\lambda)$ *− це м. ф., яка задана формулою (27). Тоді* $W \in \mathcal{U}^r_{\kappa_1}(j_{pq}) \cap L_2^{m\times m}$ *та*

(1) $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K) \neq \emptyset \Leftrightarrow \nu_-(\boldsymbol{P}) \leq \kappa$.
(2) Якщо $\kappa_1 := \nu_-(\boldsymbol{P}) \leq \kappa$, то

$$\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K) = T_W[S^{p\times q}_{\kappa-\kappa_1}] := \{T_W[\varepsilon] : \varepsilon \in S^{p\times q}_{\kappa-\kappa_1}\}, \qquad (28)$$

де $T_W[\varepsilon] = (w_{11}\varepsilon + w_{12})(w_{21}\varepsilon + w_{22})^{-1}$.

У § 5.2 розглядається наступна *задача Нехарі-Такагі* $\boldsymbol{NTP}_\kappa(f_0)$. *Нехай* $\kappa \in \mathbb{N}$ і $f_0 \in L_\infty^{p\times q}$. Треба знайти $f \in L_\infty^{p\times q}$ таку, що

$$rank\big(\Gamma(f) - \Gamma(f_0)\big) \leq \kappa \text{ і } \|f\|_\infty \leq 1. \qquad (29)$$

Множину розв'язків задачі $\boldsymbol{NTP}_\kappa(f_0)$ будемо позначати наступним чином:

$$\mathcal{NT}_\kappa(f_0) = \{f \in L_\infty^{p\times q} : rank\big(\Gamma(f) - \Gamma(f_0)\big) \leq \kappa \text{ і } \|f\|_\infty \leq 1.$$

У наступній теоремі отримано зв'язок між розв'язками задач $\boldsymbol{NTP}_\kappa(f_0)$ і $\boldsymbol{TSP}_\kappa(b_1, b_2, K)$.

Теорема 5.4. *Нехай* $f_0 \in L_\infty^{p\times q} \cap \Pi^{p\times q}$, $\Gamma = \Gamma(f_0)$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $\{b_1, b_2\} \in den(f_0)$ *і* $K = b_1 f_0 b_2$. *Тоді*

$$f \in \mathcal{N}_\kappa(f_0) \Leftrightarrow s = b_1 f b_2 \in \mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K).$$

Теорема 5.6. *Нехай* $f_0 \in L_\infty^{p\times q} \cap \Pi^{p\times q}$, $\Gamma = \Gamma(f_0)$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $\{b_1, b_2\} \in den(f_0)$ *і* $K = b_1 f_0 b_2$, *та* $\boldsymbol{P}$ *визначений формулами (22) і (24), нехай виконуються умови (H1)–(H4), м. ф.* $W(\lambda)$ *визначена формулою (27) і*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} W(\mu), \quad \mu \in \mathfrak{h}_{b_1} \cap \mathfrak{h}_{b_2^\#} \cap \Omega_0.$$

Тоді

(1) $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$;
(2) $\mathcal{N}_\kappa(f_0) \neq \emptyset$ *тоді і тільки тоді, коли* $\kappa \geq \kappa_1 := \nu_-(I - \Gamma^*\Gamma)$;
(3) $\mathcal{N}_\kappa(f_0) = T_{\mathfrak{A}}[S^{p\times q}_{\kappa-\kappa_1}]$, *при* $\kappa \geq \kappa_1$;
(4) $\mathcal{NT}_\kappa(f_0) = \bigcup_{k=\kappa_1}^{\kappa} T_{\mathfrak{A}}[S^{p\times q}_{\kappa-\kappa_1}]$, при $\kappa \geq \kappa_1$.

У § 5.3 знайдено явну формулу для резольвентної матриці у випадку раціональної м. ф. f_0. У § 5.4 наведено застосування проблеми Нехарі-Такагі до проблеми редукції у теорії H_∞-контролю лінійних систем. Як було показано

К. Гловером у випадку складної системи можна змоделювати її значно меншою системою, якщо поряд з рівнем толерантності використовувати інший параметр – степінь Макміллана. При цьому виявляється, що проблема редукції системи є еквівалентною деякій проблемі Нехарі-Такагі.

ВИСНОВКИ

1) Введено клас $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., який є дуальним для класу правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., що відіграє важливу роль в описі розв'язків інтерполяційної проблеми Шура. Введено поняття лівої асоційованої пари $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$ для лівої узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. $W(\lambda)$ і знайдено факторизацію м. ф. $W(\lambda)$ у термінах асоційованої пари $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$. Введено поняття сингулярної узагальненої j_{pq} – внутрішньої м. ф. та отримано критерії сингулярності як у термінах асоційованої пари, так і у термінах просторів Понтрягіна з відтворюючим ядром.

2) Введено означення регулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. Отримано достатні умови для регулярності узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. У раціональному випадку доведено критерій регулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Також отримано умови існування регулярно-сингулярної факторизації для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.

3) Введено підкласи правих та лівих узагальнених γ-твірних матриць. Введено поняття сингулярних і регулярних узагальнених γ-твірних матриць. Отримано зв'язок між узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. і множиною узагальнених γ-твірних матриць, що мають псевдопродовження. Завдяки цьому зв'язку знайдено достатні умови регулярності правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць і отримано достатні умови регулярно-сингулярної факторизації узагальнених γ-твірних матриць.

4) Отримано опис розв'язків інтерполяційної задачі Такагі-Сарасона. Знайдено зв'язок між множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона і задачі Нехарі-Такагі. Отримано опис розв'язків цілком невизначеної задачі Нехарі-Такагі для обмежених функцій, що мають псевдопродовження.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Sukhorukova O. O. Factorization formulas for some classes of generalized J-inner matrix valued functions / O. O. Sukhorukova //Methods Funct. Anal. Topology. – 2014 – **20**, 4. – P. 365 – 378.

2. Sukhorukova O. O. Generalized γ –generating matrices / O. O. Sukhorukova// J. Math. Sci. – 2016. – **218**, 1. – P. 89–104.

3. Derkach V. A. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / V. A. Derkach, O. O. Sukhorukova //Oper. Matrices. – 2016. – **10**, 4. – P. 1073–1091.

4. Derkach V. A. A-regular-A-singular factorizations of generalized J-inner matrix functions. /V. A. Derkach, O. O. Sukhorukova //Methods Funct. Anal. Topology. – 2017. – **23**, 3. – P. 231–251.

5. Sukhorukova, O. O. Factorization of generalized γ-generating matrices / O. O. Sukhorukova // Ukr. Mat. Visn. – 2017. – **14**, 4. – P. 575 – 594.

6. Кузьменко О. О. Сингулярні узагальнені J-внутрішні матриці-функції / О. О. Кузьменко (О. О. Сухорукова)// Восьма міжнародна наукова конференція для молодих вчених «Сучасні проблеми математики і її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Україна, Харків, 27-28 квітня 2013 р.): Харків. – 2013. – С. 67 – 68.

7. Кузьменко О. О. Сингулярні узагальнені J-внутрішні матриці-функції / О. О. Кузьменко (О. О. Сухорукова) // Кримська Міжнародна Математична Конференція (Україна, Крим, Судак, 22 вересня – 4 жовтня 2013 р.) . – Судак. – 2013. – С. 60 – 61.

8. Sukhorukova O. O. Factorization formulas for some classes of generalized J-inner matrix valued functions / O. O. Sukhorukova // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу (Україна, Ворохта 25 лютого – 1 березня). – Івано-Франківськ. – 2015, С. 77–78.

9. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // П’ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики "Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання" (Україна, Київ, 25 – 26 квітня). – Київ. – 2016. – С. 25.

10. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Україна, Київ, 19 – 20 травня). – Київ. – 2016. – С. 29 – 32.

11. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // Шоста всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Україна, Київ, 21 – 22 квітня). – Київ. – 2017. – С. 11.

12. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices / O. O. Sukhorukova // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008) (Kyiv, Ukraine, June 7 – 10). – Kyiv. – 2017. – P. 37.

13. Sukhorukova O. O. Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // Modeling, analysis and approximation theory toward applications in tomography and inverse problems (Germany, Braunschweig, February 3 – 7). – Braunschweig. – 2018.

АНОТАЦІЇ

Сухорукова О. О. Узагальнені J-внутрішні і γ-твірні матриці-функції та індефінітні інтерполяційні проблеми. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01. – Математичний аналіз (111 – математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню кола питань, пов'язаних з класами узагальнених J-внутрішніх м. ф. та узагальнених γ-твірних матриць та розв'язку задач Такагі-Сарасона і Нехарі-Такагі.

У роботі введено новий підклас лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Знайдено зв'язок між класами правих та лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Введено поняття сингулярної і регулярної узагальненої J-внутрішньої м. ф. і отримано умови сингулярності і регулярності. Отримано умови існування регулярно-сингулярної факторизації для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. і наведено приклад узагальненої j_{pq} —внутрішньої м. ф., що не допускає регулярно-сингулярну факторизацію.

Введено визначення класів правих та лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримано зв'язок між узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. і узагальненими γ-твірними матрицями, що мають псевдопродовження. Введено поняття сингулярних і регулярних γ-твірних матриць. Отримано достатні умови регулярно-сингулярної факторизації узагальнених γ-твірних матриць.

У дисертації розглянуто інтерполяційні задачі Такагі-Сарасона і Нехарі-Такагі. Знайдено зв'язок між множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона і задачі Нехарі-Такагі. Завдяки цьому отримано опис розв'язків цілком невизначеної задачі Нехарі-Такагі для обмежених функцій, що мають псевдопродовження.

***Ключові слова*:** узагальнені J-внутрішні м. ф., узагальнені γ-твірні матриці, узагальнений клас Шура, факторизація Крейна-Лангера, перетворення Потапова-Гінзбурга, задача Нехарі-Такагі, задача Такагі-Сарасона.

Сухорукова Е. О. Обобщенные J-внутренние и γ-производящие матрицы-функции и индефинитные интерполяционные задачи. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.01 – Математический анализ (111–математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена исследованию круга вопросов, связанных с классами обобщенных J-внутренних м. ф. и обобщенных γ-производящих матриц и решению задач Такаги-Сарасона и Нехари-Такаги.

В работе введено новый подкласс левых обобщенных j_{pq}-внутренних м. ф. $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Найдена связь между классами правых и левых обобщенных j_{pq}-внутренних м. ф. Введено определение сингулярной и регулярной обобщенной J-внутренней м. ф. и найдены условия их сингулярности и регулярности. Также получено условие существования регулярно-сингулярной факторизации для обобщенных j_{pq}-внутренних м. ф. Приведен пример обобщенной j_{pq}-внутренней м. ф., которая не допускает регулярно-сингулярную факторизацию.

Введены определения классов правых и левых обобщенных γ-производящих матриц. Получена связь между обобщенными j_{pq}-внутренними м. ф. и обобщенными γ-производящими матрицами, которые имеют псевдопродолжение. Введено определение сингулярных и регулярных γ-производящих матриц. Получены достаточные условия регулярно-сингулярной факторизации обобщенных γ-производящих матриц.

В диссертации рассмотрены интерполяционные задачи Такаги-Сарасона и Нехари-Такаги. Найдена связь между множествами решений задачи Такаги-Сарасона и задачи Нехари-Такаги. Благодаря этому, получено описание множества решений вполне неопределенной задачи Нехари-Такаги для ограниченных функций, которые имеют псевдопродолжение.

Ключевые слова: обобщенные J-внутренние м. ф., обобщенные γ-производящие матрицы, обобщенный класс Шура, факторизация Крейна-Лангера, преобразование Потапова-Гинзбурга, задача Нехари-Такаги, задача Такаги-Сарасона.

Sukhorukova O. O. Generalized J-inner and γ-generating matrix valued functions and indefinite interpolation problems. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.01 – mathematical analysis (111 – mathematics). – Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

Thesis is devoted to the study of generalized J-inner matrix valued functions and generalized γ-generating matrices and to solving of the Takagi-Sarason and Nechari-Takagi problems.

In the second half of the twentieth century in the works of M. S. Livshits the concept of the characteristic function of a non-unitary linear operator was introduced, which turned out to be a crucial tool in the spectral theory of such operators. An important property of the characteristic function is that it is J-contractive in the unit disc for some signature matrix J. The physical analogue of the characteristic function in the theory of linear systems is the transfer function of such system. The theory of linear systems, which has been rapidly developing during the last 50 years, is a source of new problems in the theory of $J-$contractive matrices. In particular, in the works of G. Zames, J. Helton, B. Francis, K. Glover, it was shown that the sensitivity minimization problem leads to some bitangential interpolation problem, and the reduction problem in the theory of H_∞-control is equivalent to a Nehari-Takagi problem.

A J-contractive matrix valued function is called J-inner, if it is J-unitary on the unit circle almost everywhere. The class of J-inner matrix valued functions includes the Nevanlinna matrices, which are using in the description of the set of solutions to the moment problem and the resolvent matrices of the Schur problem, the Krein problem, and the bitangential interpolation problem. In 1988 D.Z. Arov introduced the notions of singular and regular J-inner matrix valued functions and shown that the resolvent matrices of generalized bitangential interpolation problems can be characterized as right regular J-inner matrix valued functions. Moreover, it was also proved that any J-inner matrix valued function allows an essentially unique singular-regular factorization.

In the works of J. Ball, I. Gohberg, L. Rodman and V. Derkach new indefinite interpolation problems were considered, which sets of solutions are described by the so-called generalized J-inner matrix valued functions. Moreover, in 2010 V. Derkach and H. Dym shown that these matrices fall into a subclass of right generalized J-inner matrix valued functions for which it is possible to introduce the concept of associated pair, and in these terms to give a parameterization of solutions of the Schur-Takagi problem.

In the present thesis new classes of left generalized j_{pq}-inner matrix valued functions are introduced and their connection with the classes of right generalized j_{pq}-inner matrix valued functions is studied. The notion of singular and regular generalized j_{pq}-inner matrix valued functions are introduced and characterization of singular matrix valued functions is found. Sufficient conditions for the regularity of a generalized j_{pq}-inner matrix valued function and a criterion for the existence of regular-singular factorization for a rational generalized j_{pq}-inner matrix valued function are found. An example of a right generalized j_{pq}-inner matrix valued function W, which does not admit a regular-singular factorization is given.

Another class of matrix valued functions that is studied in the thesis is the class of generalized γ-generating matrices. The classical γ-generating matrices were introduced in 1968 by V. M. Adamyan, D. Z. Arov and M. G. Krein in connection with the completely indeterminate Nehari problem, that is the problem of the best approximation by H_∞-functions on the unit circle. The resolvent matrix of such problem is called the γ- generating matrix. The existence of singular-regular factorization of the γ-generating matrix was considered by D. Z. Arov. Generalized γ-generating matrix appear as resolvent matrices of Nehari-Takagi problem, that is the problem of approximation of L_∞-function by rational functions on the circle, considered in the scalar case by V. M. Adamyan, D. Z. Arov and M. G. Krein in 1971.

We introduce definitions of right and left generalized γ-generating matrices. A connection between generalized γ-generating matrices and generalized j_{pq}-inner matrix valued functions is established. A criterion of existence of regular-singular factorization for a rational generalized γ-generating matrices is found.

The Takagi-Sarason problem and the Nehari-Takagi problem are studied in the thesis. A full description of solutions of the Takagi-Sarason interpolation problem is found. Under certain mild assumption, a one-to-one correspondence between solutions of the Nehari-Takagi problem and solutions of some Takagi-Sarason interpolation problem is established. A description of solutions of completely indeterminate Nehari-Takagi problem for bounded functions which allow pseudocontinuations is obtained.

Key words: generalized J-inner matrix valued function, generalized γ-generating matrix, generalized Schur class, Krein-Langer factorization, Potapov-Ginzburg transform, Nehari-Takagi problem, Takagi-Sarason problem.