Міністерство освіти і науки України
Національний педагогічний університет
ім. М.П. Драгоманова

Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Сухорукова Олена Олегівна

УДК 517.982.4

ДИСЕРТАЦІЯ

Узагальнені J-внутрішні і γ-твірні матриці-функції та індефінітні інтерполяційні проблеми

01.01.01 – математичний аналіз

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук.

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Науковий керівник: Деркач Володимир Олександрович,
професор, доктор фізико–математичних наук.

Київ – 2018

Анотація

Сухорукова О. О. "Узагальнені J-внутрішні і γ-твірні матриці-функції та індефінітні інтерполяційні проблеми". – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 «Математичний аналіз». – Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню узагальнених J-внутрішніх матриць-функцій (м. ф.) і узагальнених γ-твірних матриць.

Класичні J-внутрішні м. ф. відіграють важливу роль у теорії лінійних систем, теорії стохастичних процесів, теорії розсіювання, теорії операторів і теорії інтерполяційних проблем аналізу. У другій половині двадцятого століття значного розвитку набула теорія несамоспряжених операторів. Зокрема, у роботах М. С. Лівшиця [8, 9] було введено поняття характеристичної функції лінійного оператора, яка повністю характеризує спектральні властивості його цілком несамоспряженої частини. Характеристичні функції для різних класів операторів досліджувались у роботах М. С. Бродського, О.В. Кужеля, Е. Р. Цекановського, В. О. Золотарьова, Ю. М. Арлінського та ін (див. [6, 7, 17, 18, 44]).

Фізичним двійником цієї теорії є теорія відкритих лінійних систем, яка стрімко розвивалась у роботах Р. Калмана, М. Арбіба, Дж. Хелтона, К. Главера, Б. Франсіса останні 50 років у зв'язку з потребами часу. Аналогом характеристичної функції у лінійній системі є передаточне відображення такої системи. У випадку недисипативної системи її передаточне відображення $W(\lambda)$ є J-стискаючим для деякої сигнатурної матриці J ($J = J^* = J^{-1}$), тобто $W(\lambda)^* J W(\lambda) \leq J$ для усіх точок λ з одиничного кола $\mathbb{D}$, у яких $W(\lambda)$ є голоморфною. Факторизаційну теорію J-стискаючих м. ф. було побудовано В. П. Потаповим (див. [14]).

J-стискаюча м. ф. називається J-внутрішньою, якщо вона є J-унітарною на одиничному колі $\mathbb{T}$ майже всюди. До класу J-внутрішніх м. ф. відносяться матриці Неванлінни, які описують множину розв'язків проблеми моментів ([68], див. також [41, 74]) і резольвентні матриці проблеми Неванлінни-Піка, проблеми

Шура, проблеми Крейна і бідотичної інтерполяційної проблеми ([1, 21, 63]). У роботі Д. З. Арова [30] було введено поняття сингулярної і регулярної J-внутрішньої м. ф., показано, що резольвентні матриці узагальненої бідотичної проблеми характеризуються як регулярні J-внутрішні і доведено, що будь-яка J-внутрішня м. ф. допускає сингулярно-регулярну факторизацію.

В індефінітній інтерполяційній проблемі Неванлінни-Піка потрібно побудувати функцію, яка приймає наперед задані значення у точках інтерполяції, є обмеженою на колі $\mathbb{T}$ та, на відміну від класичної проблеми, має скінченну кількість полюсів у середині диску $\mathbb{D}$. Такі індефінітні постановки виникають при дослідженні проблеми погодження у широкосмугових електричних пристроях [45,66] та у проблемах багатоканального розсіювання у фізиці [67]. Опис множини розв'язків деяких індефінітних інтерполяційних задач було отримано Дж. Болом і Дж. Хелтоном, Г. Димом, В. Деркачем, А. Аміршадяном та ін (див. [27, 39, 48]). Резольвентні матриці таких індефінітних інтерполяційних задач вже не є J-внутрішніми, але належать до класу $\mathcal{U}_\kappa(J)$ узагальнених J-внутрішніх м. ф. Більш того, В. Деркач і Г. Дим у роботі [48] показали, що ці резольвентні матриці попадають у підклас так званих правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., де $j_{pq} = diag(I_p, -I_q)$. Для таких м. ф. вдається ввести поняття асоційованої пари, довести факторизаційні формули і завдяки цьому отримати параметризацію всіх розв'язків задачі Шура-Такагі. У зв'язку з цим виникає потреба узагальнити поняття сингулярних і регулярних (за Аровим) матриць на клас правих узагальнених j_{pq}- внутрішніх м. ф. і дослідити проблему сингулярно-регулярної факторизації у цьому класі. Досі питання існування такої факторизації для узагальненої j_{pq}- внутрішньої м. ф. було відкритим.

В 60-х роках з'явився цикл робіт В. М. Адамяна, Д.З. Арова і М.Г. Крейна [21, 22] по проблемі Нехарі, який викликав широкий резонанс у математичному світі. Проблема Нехарі – це задача про найкраще наближення функціями з H_∞ на одиничному колі $\mathbb{T}$. Резольвентна матриця абсолютно невизначеної задачі Нехарі отримала назву γ-твірної матриці (див. [31]). Питання сингулярно-регулярної факторизації γ-твірної матриці було розглянуто Д. З. Аровим. Узагальнені γ-твірні матриці виникають як резольвентні матриці для задачі Нехарі-Такагі, тобто задачі наближення функції з L_∞ раціональними функціями на колі $\mathbb{T}$, розглянутої у роботі [22] В. М. Адамяна, Д. З. Арова і М. Г. Крейна.

Перелічені вище інтерполяційні проблеми мають своїм джерелом відповідні проблеми з теорії лінійних систем. Так бідотична інтерполяційна проблема породжується задачею мінімізації чутливості системи, а задача Нехарі-Такагі є еквівалентною проблемі редукції системи в теорії H_∞-контролю. В раціональному випадку матрична задача Нехарі-Такагі досліджувалась Дж. Болом, І. Гохбергом і Л. Родманом [38]. У загальному випадку матрична задача Нехарі-Такагі залишається відкритою.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню кола питань, пов'язаних з класами узагальнених J-внутрішніх м. ф. та узагальнених γ-твірних матриць, отриманню факторизаційних теорем для м. ф. з цих класів та розв'язку задач Такагі-Сарасона і Нехарі-Такагі.

У вступі обгрунтовано актуальність теми, подано короткий аналіз сучасного стану проблеми, сформульовано мету та завдання дослідження, наукову новизну, практичне значення одержаних результатів та подано відомості про апробацію результатів дисертаційного дослідження.

Розділ 1 присвячено історичному огляду робіт, які мають відношення до теми дисертаційного досліждення. Зокрема, нагадуються поняття класів Харді $H_k^{p\times q}$, $H_\infty^{p\times q}$, класу Шура $\mathcal{S}^{p\times q}$ і узагальненого класу Шура $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$.

У розділі 2 введено новий підклас лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Визначено поняття лівої асоційованої пари. Знайдено зв'язок між класами правих та лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. За допомогою цього зв'язку отримано факторизації лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. у термінах лівої асоційованої пари. Введено поняття сингулярної узагальненої J-внутрішньої м. ф. і отримано критерій сингулярності у термінах асоційованої пари і у термінах простору Понтрягіна з відтворюючим ядром для лівих і правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.

У розділі 3 розглянуто факторизації узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Знайдено зв'язок між асоційованою парою правої узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. і асоційваними парами її дільників. Введено означення регулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. Отримано достатні умови для регулярності узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. У раціональному випадку доведено критерій регулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Також отримано умови існування регулярно-сингулярної факторизації для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Наведено приклад узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф., що не допускає регулярно-сингулярну факторизацію.

У розділі 4 розглядаються класи узагальнених γ-твірних матриць. Введено визначення класів правих та лівих узагальнених γ-твірних матриць і визначення знаменників для матриць з цих класів. Отримано зв'язок між узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. і узагальненими γ-твірними матрицями, що мають псевдопродовження. Введено поняття сингулярних, регулярних і сильно регулярних γ-твірних матриць. Знайдено достатні умови регулярності і сильної регулярності правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримано достатні умови регулярно-сингулярної факторизації узагальнених γ-твірних матриць.

У розділі 5 дисертації розглянуто задачу Такагі-Сарасона і задачу Нехарі-Такагі. Отримано опис розв'язків інтерполяційної задачі Такагі-Сарасона. Знайдено зв'язок між множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона і задачі Нехарі-Такагі. Отримано опис розв'язків цілком невизначеної задачі Нехарі-Такагі для обмежених функцій, що мають псевдопродовження. Наведено деякі означення з теорії систем і показано застосування узагальнених γ-твірних матриць у теорії H_∞-контролю.

Ключові слова: узагальнені J-внутрішні м. ф., узагальнені γ-твірні матриці, узагальнений клас Шура, узагальнений клас Смірнова, факторизація Крейна-Лангера, перетворення Потапова-Гінзбурга, задача Нехарі-Такагі, задача Такагі-Сарасона.

Список публікацій здобувача:

1. Sukhorukova O. O. Factorization formulas for some classes of generalized J-inner matrix valued functions / O.O. Sukhorukova //Methods Funct. Anal. Topology. – 2014 – **20**, 4. – P. 365 – 378.

2. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices / O.O. Sukhorukova// J. Math. Sci. – 2016. – **218**, 1. – P. 89 – 104.

3. Derkach V. A. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem

/ V. A. Derkach, O. O. Sukhorukova // Oper. Matrices. – 2016. – **10**, 4. – P. 1073 – 1091.

4. Derkach V. A. A-regular-A-singular factorizations of generalized J-inner matrix functions / V. A. Derkach, O. O. Sukhorukova // Methods Funct. Anal. Topology. – 2017. – **23**, 3. – P. 231 – 251.

5. Sukhorukova, O. O. Factorization of generalized γ-generating matrices / O. O. Sukhorukova // Ukr. Mat. Visn. – 2017. – **14**, 4. – P. 575 – 594.

6. Кузьменко О. О. Сингулярні узагальнені J-внутрішні матриці-функції / О. О. Кузьменко (О. О. Сухорукова) // Восьма міжнародна наукова конференція для молодих вчених «Сучасні проблеми математики і її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Україна, Харків, 27-28 квітня 2013 р.): Харків. – 2013. – С. 67 – 68.

7. Кузьменко О. О. Сингулярні узагальнені J-внутрішні матриці-функції /О. О. Кузьменко (О. О. Сухорукова) // Кримська Міжнародна Математична Конференція (Україна, Крим, Судак, 22 вересня – 4 жовтня 2013 р.) . – Судак. – 2013. – С. 60 – 61.

8. Sukhorukova O. O. Factorization formulas for some classes of generalized J-inner matrix valued functions / O. O. Sukhorukova // Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу (Україна, Ворохта 25 лютого – 1 березня). – Івано-Франківськ. – 2015, С. 77 – 78.

9. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // П'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики "Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання"(Україна, Київ, 25 – 26 квітня). – Київ. – 2016. – С. 25.

10. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // Сімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Україна, Київ, 19 – 20 травня). – Київ. – 2016. – С. 29 – 32.

11. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // Шоста всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Україна, Київ, 21 – 22 квітня). – Київ. – 2017. – С. 11.

12. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices / O. O. Sukhorukova // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008) (Kyiv, Ukraine, June 7 – 10). – Kyiv. – 2017. – P. 37.

13. Sukhorukova O. O. Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // Modeling, analysis, and approximation theory toward applications in tomography and inverse problems (Germany, Braunschweig, February 3 – 7). – Braunschweig. – 2018.

Annotation

Sukhorukova O. O. "Generalized J-inner and γ-generating matrix valued functions and indefinite interpolation problems". – Manuscript.

Thesis of the dissertation for obtaining of the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.01 – mathematical analysis. National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, 2018.

The dissertation is devoted to the study of generalized J-inner matrix valued functions and generalized γ-generating matrices.

The classical J-inner matrix valued functions play an important role in the theory of linear systems, stochastic processes, scattering theory, operator theory and theory of interpolation problems in analysis. In the second half of the twentieth century, the theory of non-self-adjoint operators experienced significant development. In particular the definition of the characteristic function of a linear operator was introduced by M. S. Livshits in his papers [8, 9]. This characteristic function fully characterizes the spectral properties of its completely non-self-adjoint part. Characteristic functions for different classes of operators were investigated in the works of M. S. Brodsky, O.V. Kuzhel, E. R. Tsekanovskii, V. Zolotarev, Y. M. Arlinskii and others (see [6, 7, 17, 18, 44]).

The physical twin of this theory is the theory of open linear systems, which was rapidly developed in the papers of R. Kalman, M. Arbib, J. Helton, K. Glover, B. Francis for the last 50 years in connection with the needs of the time. An analogue of the characteristic function in a linear system is the transfer function of such system. In the case of a nondissipative system, its transfer function $W(\lambda)$ is a J-contractive matrix valued function for some signature matrix J ($J = J^* = J^{-1}$), that is $W(\lambda)^* J W(\lambda) \leq J$ for all points λ of the unit circle $\mathbb{D}$, in which $W(\lambda)$ is holomorphic. The factorization theory of J-contractive matrix valued functions was constructed by V. P. Potapov (see [14]).

The J-contractive matrix valued function is called J-inner if it is J-unitary almost everywhere on unit circle $\mathbb{T}$. The class of J-inner matrix valued functions includes the Nevanlinna matrices, which describe the set of solutions of the moment problem ([68], see also [41, 74]) and the resolvent matrices of the Nevanlinna-Pick problem, the Schur problem, the Krein problem and bitangential interpolation problem ([1, 21, 63]). In the works [30] of D. Z. Arov definitions of singular and regular J-inner matrix valued functions were introduced and it was shown that the resolvent matrices of general bitangential problems are characterized as regular J-inner matrix valued functions and there was proved that any J-inner matrix valued function admits a singular-regular factorization.

In the Nevanlinna-Pick indefinite interpolation problem, one needs to find a bounded function which takes prescribed values at interpolation points on the disk $\mathbb{T}$, and, unlike the classical problem, has κ poles inside the disk $\mathbb{D}$. Such indefinite problems arise in the study of the matching problem in broadband electrical devices [45, 66] and in problems of certain multichannel scattering problems in physics [67]. Descriptions of the sets of solution of some indefinite interpolation problems were obtained by J. Helton and J. Ball, H. Dym, V. Derkach, A. Amirshadyan and others (see [27, 39, 48]). Resolvent matrices of such indefinite interpolation problems are not anymore J-inner, but rather belong to a class of generalized J-inner matrix valued functions $\mathcal{U}_\kappa(J)$. Moreover, V. Derkach and H. Dym in the work [48] showed that these resolvent matrices are contained in a subclass of so-called right-generalized j_{pq}-inner matrix valued functions, where $j_{pq} = diag(I_p, -I_q)$. For such matrix valued functions one can introduce a definition of the associated pair and to prove the factorization formulas, and to obtaine parametrization of all solutions of the Schur-Takagi problem. In view of this the following problems arise: to generalize the notions of singular and regular (by Arov) matrices on the class of right generalized j_{pq}-inner matrix valued functions and to investigate the problem of singular-regular factorization in this class. Up to now, the question of the existence of such factorization for a generalized j_{pq}-inner matrix valued function was open.

In 60's a series of works by V. M. Adamyan, D.Z. Arov and M. Krein [21, 22] on the Nehari problem was released, which causes a wide resonance in the mathematical world. The Nehari problem is the problem of the best approximation by functions from H_∞ on a unit circle $\mathbb{T}$. The resolvent matrix of completely indeterminate Nehari problem is called the γ-generating matrix (see [31]). The question of singular-regular factorization of a γ-generating matrix was considered by D. Z. Arov. Generalized γ-generating matrices arise as resolvent matrices for the Nehari-Takagi problem, that is, the problem of approximation of a function from L_∞ by rational functions on the circle $\mathbb{T}$, which was considered in the paper [22] V. M. Adamyan, D.Z. Arov and M. G. Krein.

The above-mentioned interpolation problems have their source in the corresponding problems in the theory of linear systems. Thus, a bitangential interpolation problem is related to sensitivity minimization problem, and the Nehari-Takagi problem is equivalent to the model reduction problem in the H_∞-control theory. In a rational case, matrix Nehari-Takagi problem was investigated by J.A. Ball, I. Gohberg and L. Rodman in [38]. In the general case, the matrix Nehari-Takagi problem remains open.

In the present thesis the martix Nehari-Takagi problem in the class of pseudo-continuable functions is studied, its connection to the Takagi-Sarason problem is found and full description of these problem are given.

The introduction contains the reasons for relevance of the subject, the brief analysis of the current state of the problem, goals and objectives of the research, the scientific novelty, the practical significance of the results and information of the approbation of the results of the dissertation research.

The first section is devoted to the historical review of works related to the topic of the dissertation research. In particular, the notions of the Hardy classes $H_k^{p\times q}$, $H_\infty^{p\times q}$, the Schur class $\mathcal{S}^{p\times q}$, and the generalized Schur class $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ are given and the facts from the theory of interpolation problems, such as the generalized Schur problem and the Nehari problem, are presented.

The second section is dedicated to a new class of left generalized j_{pq}-inner matrix valued functions $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$. A notion of the left associated pair is introduced. Connections between classes of left and right generalized j_{pq}-inner matrix valued functions is found. With the help of this connection the factorization of the left generalized j_{pq}-inner matrix valued functions is obtained in terms of the left associated pair. In this section we introduce also the notion of singular generalized j_{pq}-inner matrix valued functions and obtain a characterization of singular matrix valued functions in terms of associated pairs and in terms of reproducing kernel Pontryagin spaces for left and right generalized J-inner matrix valued functions.

In Section 3 factorizations of generalized j_{pq}-inner matrix valued functions are considered. Connections between associated pair of a right j_{pq}-inner matrix valued function and associated pairs of its divisors are found. The notions of right and left regular generalized j_{pq}-inner matrix valued functions are introduced. Sufficient conditions for the regularity of the generalized j_{pq}-inner matrix valued function are obtained. In the rational case, a criterion for the regularity of generalized j_{pq}-inner matrix valued function is proved. We also obtain criterion of existence of regular–singular factorization for a rational generalized j_{pq}-inner matrix valued function. An example of a right generalized j_{pq}-inner matrix valued function W is given such that W does not admit a regular–singular factorization in the class of generalized j_{pq}-inner matrix valued functions.

In Section 4 the class of generalized γ-generating matrices is considered. Definition of right and left generalized γ-generating matrices are introduced. Connections between generalized γ-generating matrices and generalized j_{pq}-inner matrix valued functions are found. We introduced definitions of singular, regular and strongly regular generalized γ-generating matrices. Sufficient conditions for the regularity and strongly regularity of the generalized γ-generating matrices is obtained. We also obtain sufficient condition of existence of regular–singular factorization for a rational generalized γ-generating matrices.

Takagi-Sarason problem and the Nehari-Takagi problem are considered in Section 5 of the thesis. A description of solutions of the Takagi-Sarason interpolation problem is obtained. Under certain mild assumption, a one-to-one correspondence between solutions of the Nehari-Takagi problem and solutions of some Takagi-Sarason interpolation problem is established. A description of the solutions of completely indeterminate Nehari-Takagi problem for a pseudo-continuable bounded function is obtained. Some definitions from the system theory are given and applications of generalized γ-generating matrices to the H_∞-control theory of is presented.

Key words and phrases: generalized J-inner matrix valued function, generalized γ-generating matrix, generalized Smirnov class, Krein-Langer factorization, Potapov-Ginzburg transform, Nehari-Takagi problem, Takagi-Sarason problem.

List of publications of the researcher:

1. Sukhorukova O. O. Factorization formulas for some classes of generalized J-inner matrix valued functions / O. O. Sukhorukova // Methods Funct. Anal.

Topology. – 2014 – V. 20, no. 4. – P. 365–378.

2. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices / O. O. Sukhorukova// J. Math. Sci. – 2016. – V. 218, no. 1. – P. 89–104.

3. Derkach V. A. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem /V. A. Derkach, O. O.Sukhorukova //Oper. Matrices. – 2016. – V. 10, no. 4. – P. 1073–1091.

4. Derkach V. A. A-regular–A-singular factorizations of generalized J-inner matrix functions. /V. A. Derkach, O. O.Sukhorukova //Methods Funct. Anal. Topology. – 2017. – V. 23, no. 3. – P. 231–251.

5. Sukhorukova, O. O. Factorization of generalized γ-generating matrices /O. O. Sukhorukova// Ukr. Mat. Visn. – 2017. – V. 14, no. 4. – P. 575–594.

6. Kuzmenko O. O. Singular generalized J-inner matrix valued functions /O. O. Kuzmenko (O. O. Sukhorukova) // Abstract "Modern problems of mathematics and its application in natural sciences and information technologies"(Ukraine, Kharkiv, 27-28 April). – Kharkiv. – 2013. – P. 67 – 68.

7. Kuzmenko O. O. Singular generalized J-inner matrix valued functions /O. O. Kuzmenko (O. O. Sukhorukova) // International Conference – Crimean International Mathematical Conference (Sudak, Crimea, Ukraine, 23 September – 3 October, 2013). – Sudak. – 2013. – P. 60 – 61.

8. Sukhorukova O. O. Factorization formulas for some classes of generalized J-inner matrix valued functions / O. O. Sukhorukova // Abstracts Ukrainian Scientific Conference "Modern Problems of Probability Theory and Mathematical Analysis"(Vorokhta, 25 February – 1 March, 2015). – Ivano-Frankivsk, 2015. P. 77 – 78.

9. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // Abstracts Fifth Ukrainian Scientific Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics "Actuarial Problems of Modern Mathematics and Physics and Methods of their Learning"(Ukraine, Kyiv, 25-26 Aplil). – Kyiv. – 2016. – P. 25.

10. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // Abstracts Seventeenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference (Ukraine, Kyiv, 19-20 May, 2016). – Kyiv. – 2016. – P. 29 – 32.

11. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // Abstracts Sixth Ukrainian Conference of Young Scientists in Mathematics and Physics (Ukraine, Kyiv, 21-22 April). – Kyiv. – 2017. – P. 11.

12. Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices / O. O. Sukhorukova // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008) (Kyiv, Ukraine, June 7 – 10). – Kyiv. – 2017. – P. 37.

13. Sukhorukova O. O. Nehari-Takagi problem / O. O. Sukhorukova // Modeling, analysis, and approximation theory toward applications in tomography and inverse problems (Germany, Braunschweig, February 3 – 7). – Braunschweig. – 2018.

Зміст

Умовні позначення **16**

Вступ **17**

1 Огляд літератури **24**

1.1 Основні класи функцій . . . 24

1.1.1 Класи Харді $H_k^{p\times q}, H_\infty^{p\times q}$ . . . 24

1.1.2 Клас Шура $\mathcal{S}^{p\times q}$. Добуток Бляшке-Потапова . . . 28

1.2 Простір Гільберта з відтворюючим ядром (RKHS) . . . 30

1.3 J-стискаючі та J-внутрішні матриці-функції . . . 30

1.3.1 Клас $\mathcal{P}(J)$ . . . 30

1.3.2 Клас $\mathcal{U}(J)$ . . . 32

1.4 Узагальнена проблема Шура . . . 33

1.5 γ-твірні матриці та задача Нехарі . . . 34

1.5.1 γ-твірні матриці . . . 34

1.5.2 Задача Нехарі . . . 37

1.6 Деякі класи узагальнених матриць-функцій . . . 38

1.6.1 Узагальнений клас Шура $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ . . . 38

1.6.2 Узагальнений клас j_{pq}-внутрішніх матриць-функцій . . . 40

1.7 Простір Понтрягіна з відтворюючим ядром (RKPS) . . . 42

2 Праві та ліві узагальнені j_{pq}-внутрішні матриць-функції **44**

2.1 Клас $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ . . . 44

2.2 Клас $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ . . . 47

2.3 Клас $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ . . . 54

2.4 Клас сингулярних узагальнених J-внутрішніх матриць-функцій . . 59

2.4.1 Визначення сингулярної узагальненої J-внутрішньої матриці-функції . . . 59

2.4.2 Критерій сингулярності в термінах асоційованих пар . . . 60

2.4.3 Критерій сингулярності в термінах RKPS . . . 63

2.5 Висновки . . . 64

3 Регулярні узагальнені j_{pq}-внутрішні матриць-функції та їх факторизація **66**

3.1 Факторизація j_{pq}-внутрішніх матриць-функцій 66

3.2 Регулярні узагальнені j_{pq}-внутрішні матриць-функції 75

3.3 Існування регулярно-сингулярної факторизації 85

3.4 Висновки 86

4 Узагальнені γ-твірні матриці **87**

4.1 Класи $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ та $\mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$ 87

4.2 Сингулярні, регулярні и сильно регулярні матриці-функції з класів $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ і $\mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$ 98

4.3 Факторизація узагальнених γ-твірних матриць 105

4.4 Висновки 109

5 Задача Нехарі-Такагі **111**

5.1 Інтерполяційна задача Такагі-Сарасона 111

5.2 Задача Нехарі-Такагі 116

5.3 Резольвентна матриця у випадку раціональної м. ф. f_0 121

5.4 Мотивація з теорії систем 127

5.5 Висновки 131

Висновки **132**

Література **133**

Умовні позначення

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;

$\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел;

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел;

$\mathbb{T}$ – множина точок на межі одиничного круга $\{\lambda : |\lambda| = 1\}$;

$\mathbb{D}$ – множина точок в середині одиничного круга $\{\lambda : |\lambda| < 1\}$;

$\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) – верхня (нижня) відкрита комплексна півплощина;

$\mathbb{C}^n$ – лінійний простір комплексних n-мірних векторів-колонок;

$\mathbb{C}^{p\times q}$ – простір комплексних матриць розміру $p \times q$;

RKHS – простір Понтрягіна з відтворюючим ядром;

м. в. – майже всюди;

м. ф. – матриця-функція;

$rankA$ – ранг матриці A;

$spanL$ – лінійна оболонка множини L;

$\mathfrak{h}_f$ – множина точок голоморфності f, $\mathfrak{h}_f^{\pm} = \mathfrak{h}_f \cap \Omega_{\pm}$;

Π_L – ортогональний проектор на підпростір $L \subset H$;

Π_- – ортогональний проектор з $\widetilde{L}_2^p$ в $(H_2^p)^{\perp}$;

$K_1 \times K_2$ – декартовий добуток K_1 і K_2;

$K_1 \oplus K_2$ – ортогональна сума K_1 і K_2;

$K_1 \ominus K_2$ – ортогональна різниця K_1 і K_2;

$\mathrm{ind}_-\mathcal{K}$ – негативний індекс простору $\mathcal{K}$;

$dim\ \mathcal{K}$ – розмірність простору $\mathcal{K}$;

$M_\pi(W,\Omega)$ – полюсна кратність на множині Ω;

$ap^r(W)$ – права асоційована пара м. ф. W;

$ap^\ell(W)$ – ліва асоційована пара м. ф. W;

Π – клас функцій, що допускають псевдопродовження;

$den(f)$ – знаменник м. ф.;

$\nu_-(A)$ – число негативних власних значень матриці A;

$\mathrm{ran}A$ – область значень матриці (оператора) A;

$\mathrm{ker}A$ – ядро матриці (оператора) A.

Вступ

Актуальність теми. Дисертація присвячена дослідженню узагальненого класу J-внутрішніх матриць-функцій і узагальнених γ-твірних матриць.

На початку 50-х років В. П. Потапов запропонував новий, пов'язаний з теорією J-стискаючих матриць-функцій підхід до вивчення широкого кола інтерполяційних задач аналізу (див. [14]). Зокрема, як показано у роботі [63], резольвентна матриця узагальненої задачі Шура є J-внутрішньої м. ф., тобто J-стискаючою в одиничному диску $\mathbb{D}$ з J-унітарними значеннями майже всюди на одиничному колі $\mathbb{T}$. Факторізаційну теорію таких м. ф. було побудовано В. П. Потаповим у [14]. У роботі [5] показано роль J-розтягуючих м. ф. у аналітичній теорії електричних мереж. J-теорія грає важливу роль у вивченні різноманітних математичних задач.

У роботах Д. З. Арова [29, 30] визначено поняття сингулярной і регулярної J-внутрішньої м. ф., показано їх роль у теорії інтерполяційних задач Шура-Неванлінни-Піка, отримано критерії сингулярності і регулярності.

У [38] розглядаються деякі інтерполяційні задачі множини розв'язків яких описуються за допомогою узагальнених J-внутрішніх м. ф. У роботі [47] було розглянуто підклас правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., які грають важливу роль в описі задачі Шура-Такагі (див. [49]). У зв'язку з цим виникає бажання узагальнити поняття сингулярних і регулярних м. ф. на клас цих функцій і дослідити дуальний клас лівих j_{pq}-внутрішніх м. ф.

У роботі [34] наведено теорему о сингулярно-регулярної факторизації J-внутрішніх м. ф. Досі питання о існуванні такої факторизації в узагальненому класі було відкритим.

Інше питання, яке вивчається у роботі – це клас узагальнених γ-твірних матриць. Класичні γ-твірні матриці було введено Д. З. Аровим у зв'язку з розглядом абсолютно невизначеної задачі Нехарі для одиничного кола $\mathbb{T}$ (див. [31]). Як показано у роботах [21, 29] будь-який розв'язок цілком невизначеної матричної задачі Нехарі описується за допомогою γ-твірної матриці. У роботі [31] отримано зв'язок між γ-твірними матрицями і J-внутрішніми м. ф. та отримано факторизацію для γ-твірних матриць. Ці питання для класу узагальнених

γ-твірних матриць будуть розглядатися в дисертації. Крім того, у роботі [34] показано, що існує зв'язок між множиною розв'язків узагальненої задачі Шура та задачею Нехарі. У [38] показано, що проблема редукції з теорії H_∞-контролю пов'язана з узагальненою задачею Нехарі, так званою, задачею Нехарі-Такагі, тому постає питання про дослідження такого зв'язку в узагальненому випадку.

Зв'язок з науковими програмами, планами, темами. Основні наукові результати, викладені у дисертації, отримано при виконанні науково-дослідницьких робіт "Гармонічний та спектральний аналіз функцій і операторів, рівняння згортки та наближення функцій"(номер державної реєстрації 0112U002701), "Метричні простори, гармонічний аналіз функцій і операторів, сингулярні та некласичні задачі для диференціальних рівнянь"(номер державної реєстрації 0115U000136), що виконувались відповідно до плану роботи Донецького національного університету; "Спектральні проблеми теорії диференціальних і різницевих операторів"(номер державної реєстрації 0115U000556), що виконувалась відповідно до плану роботи Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.

Мета і задачі дослідження.

(1) Ввести означення лівого класу узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., який є дуальним для класу правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Ввести поняття лівої асоційованої пари для лівої узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. і знайти факторизації м. ф. в термінах лівої асоційованої пари.

(2) Ввести означення сингулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф., довести критерії сингулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.

(3) Ввести означення регулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф., отримати достатні умови для регулярності узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф., довести критерій регулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. при деяких умовах, отримати умови існування регулярно-сингулярної факторизації для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.

(4) Ввести означення правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць, отримати зв'язок між узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. і множиною узагальнених γ-твірних матриць. Ввести означення сингулярних, регулярних і силь-

но регулярних γ-твірних матриць. Отримати достатні умови регулярності і сильної регулярності правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримати умови існування регулярно-сингулярної факторизації узагальнених γ-твірних матриць.

(5) Отримати опис множини розв'язків інтерполяційної задачі Такагі-Сарасона. Отримати зв'язоку між множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона і задачі Нехарі-Такагі. Отримати опис цілком невизначеної задачі Нехарі-Такагі для обмежених функцій, що мають псевдопродовження.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є класи узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. і класи узагальнених γ-твірних матриць.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є факторизаційні теореми для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. і узагальнених γ-твірних матриць, задачі Такагі-Сарасона і Нехарі-Такагі.

Методи дослідження. У дисертації використовується методи теорії мероморфних м. ф., методи J-теорії Потапова, методи просторів Харді і просторів Понтрягіна з відтворюючим ядром.

Наукова новизна отриманих результатів.

У дисертації отримані такі нові результати:

(1) Введено новий клас $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., визначено поняття лівої асоційованої пари $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$ для лівої узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. $W(\lambda)$. Доведено факторизаційні теореми для м. ф. $W(\lambda)$ у термінах лівої асоційованої пари $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$.

(2) Введено означення сингулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. Доведено критерії сингулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. у термінах асоційованої пари і у термінах простору Понтрягіна з відтворюючим ядром.

(3) Введено означення регулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф., отримано достатні умови регулярності узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф., доведено критерій регулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. у раціональному випадку, отримно умови існування регулярно-сингулярної факториза-

ції для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Наведено приклад, коли не існує регулярно-сингулярної факторизації.

(4) Введено класи правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$, $\mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$. Отримано зв'язок між узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. і множиною узагальнених γ-твірних матриць, що мають псевдопродовження. Введенно означеня сингулярних, регулярних і сильно регулярних γ-твірних матриць. Отримано достатні умови регулярності і сильної регулярності правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримано умови існування регулярно-сингулярної факторизації узагальнених γ-твірних матриць.

(5) Отримано опис множини розв'язків інтерполяційної задачі Такагі-Сарасона. Отримано зв'язоку між множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона і задачі Нехарі-Такагі. Отримано опис цілком невизначеної задачі Нехарі-Такагі для обмежених функцій, що мають псевдопродовження.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосовані при дослідженні інших типів інтерполяційних проблем та в J-теорії. Матеріали дисертації можуть бути використані у навчальному процесі - при викладанні спеціальних курсів математичного аналізу.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та плану досліджень, постановка задач та формулювання основних гіпотез належить науковому керівнику В. О. Деркачу. Всі представлені в дисертації результати отримано автором особисто.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на конференціях:

1. Восьмій міжнародній науковій конференції для молодих вчених «Сучасні проблеми математики і її застосування в природничих науках та інформаційних технологіях» (Україна, Харків, 27 – 28 квітня 2013 р.).

2. Кримській Міжнародній Математичній Конференції (Україна, Крим, Судак, 22 вересня – 4 жовтня 2013 р.).

3. Всеукраїнській науковій конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Україна, Ворохта, 25 лютого – 1 березня 2015 р.)

4. П'ятій всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики "Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методики їх навчання"(Україна, Київ, 25 – 26 квітня 2016 р.).

5. Сімнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Україна, Київ, 19 – 20 травня 2016 р.).

6. Шостій всеукраїнській конференції молодих вчених з математики та фізики (Україна, Київ, 21 – 22 квітня 2017 р.).

7. International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008) (Ukraine, Kyiv, June 7 – 10, 2017).

8. International Conference "Modeling, analysis, and approximation theory toward applications in tomography and inverse problems" (Germany, Braunschweig, February 3 – 7, 2018).

Результати дисертації доповідались на семінарах:

1. Семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, Донецького національного університету (керівник д. ф.-м. н. професор В. О. Деркач).

2. Research Seminar "Applied Analysis", Humboldt-Universitat zu Berlin, Institute of Mathematics (Seminar heads: L. Recke, I. Kmit).

3. Семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь, Національного педагогічного університет імені М. П. Драгоманова (керівник д. ф.-м. н. професор Г. М. Торбін).

4. Науковому семінарі з функціонального аналізу, Інституту математики НАН України (керівники: академік НАН України проф. Ю. М. Березанський, член-кореспондент НАН України проф. А. Н. Кочубей).

Публікації

Основні результати роботи викладено у 13 наукових публікаціях, серед яких 2 статті в українських фахових журналах [75], [77] та 3 статті у журналах, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus [76], [52], [53] та 8 тез доповідей на конференціях.

Структура і об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, 5 розділів, що подрібнені на підрозділи, висновків та списку літератури, що містить 77 найменувань. Обсяг роботи складає 140 сторінок.

Основний зміст дисертації. Дисертація присвячена дослідженню узагальненого класу J-внутрішніх м. ф. і узагальнених γ-твірних матриць. І доведенню існування регулярно-сингулярної факторизації для м. ф. з цих класів.

В роботі вводиться клас лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., який є дуальним для класу правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., що відіграє важливу роль в описі розв'язків інтерполяційної проблеми Шура. Аналогічно означенню правої асоційованої пари вводиться поняття лівої асоційованої пари для лівої узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. $W(\lambda)$. Показано зв'язок між лівими і правими узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф., завдяки якому знайдено факторизації узагальненої лівої j_{pq}-внутрішньої м. ф. $W(\lambda)$ у термінах лівої асоційованої пари $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$. Вводиться поняття сингулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. та отримано критерії сингулярності як у термінах асоційованої пари, так і у термінах просторів Понтрягіна з відтворюючим ядром. Введено означення узагальненої регулярної j_{pq}-внутрішньої м. ф. Отримано достатні умови для регулярності узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. У раціональному випадку доведено критерій регулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Також отримано умови існування регулярно-сингулярної факторизації для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.

Введено до розгляду класи правих та лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримано зв'язок між узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. і множиною узагальнених γ-твірних матриць, що мають псевдопродовження. Введенно поняття сингулярних, регулярних і сильно регулярних γ-твірних матриць. Знайдено достатні умови регулярності і сильної регулярності правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримано достатні умови регулярно-сингулярної факторизації узагальнених γ-твірних матриць.

Отримано опис розв'язків інтерполяційної задачі Такагі-Сарасона. Знайдено зв'язок між множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона і задачі Нехарі-Такагі. Отримано опис цілком невизначеної задачі Нехарі-Такагі для обмежених функцій, що мають псевдопродовження.

1 Огляд літератури

1.1 Основні класи функцій

1.1.1 Класи Харді $H_k^{p\times q}, H_\infty^{p\times q}$

Нагадаємо деякі факти з [58] окремо для диску $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$ (також [16]), і для напівплощини $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : -i(\lambda - \bar{\lambda}) > 0\}$.

Нехай $1 \leq k < \infty$ та $f(z)$ є аналітичною функцією у $\mathbb{D}$. Кажуть, що f належить до $H_k = H_k(\mathbb{D})$, якщо

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^k dt = \|f\|_{H^k}^k < \infty.$$

При $p = \infty$ кажуть, що f належить до H^∞, якщо $f(z)$ є обмеженою аналітичною функцією в $\mathbb{D}$, та пишуть

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

Очевидно, що $H_k \supset H_{k'} \supset H_\infty$ при $0 < k < k' < \infty$.

Нагадаємо деякі основні результати про класи Харді. Для більш детального огляду див. монографію [15] або [4].

Якщо $f \in H_k$, то для майже всіх (м. в.) t на одиничному колі $\mathbb{T}$ існує радіальна границя

$$f(e^{it}) = \lim_{r\to 1-0} f(re^{it}).$$

При цьому, якщо $f(\lambda)$ не є нульовою, то $\ln|f(e^{it})| \in L^1[0, 2\pi]$, тому $f(e^{it}) \neq 0$ м. в. Більш того, $f(e^{it})$ існує майже всюду як недотична границя $f(\lambda)$, тобто границя при λ, що збігаються до e^{it} всередині кута, утвореного двома хордами одиничного кола, що виходять з точки e^{it}. Гранична функція $f(e^{it})$ належить лебеговому простору $L_k[0, 2\pi]$ та при $1 \leq k < \infty$ є сильною границею $f(re^{it})$; тобто

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{it}) - f(re^{it})|^k dt \to 0 \quad (r \to 1-0).$$

При $k \geq 1$ отримуємо

$$\int_0^{2\pi} g(t) f(re^{it}) dt \to \int_0^{2\pi} g(t) f(e^{it}) dt \quad (r \to 1-0),$$

для будь-якої $g \in L_{k'}[0,2\pi]$ $(1/k+1/k'=1)$. Таким чином, формули Коши та Пуасона справедливі для граничної функції $f \in H_k$ $(k \geq 1)$. Тому

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int} f(e^{it})dt = \begin{cases} f(0), & n=0; \\ 0, & n=1,2.., \end{cases}$$

та

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho,\tau-t) f(e^{it})dt = f(\lambda) \quad (\lambda=\rho e^{i\tau}, 0\leq\rho<1),$$

де

$$P(\rho,\tau)=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\tau+\rho^2}.$$

Навпаки, будь-яка функція $g \in L_k[0,2\pi]$ $(1\leq k\leq\infty)$, для якої ряд Фур'є має вигляд

$$\sum_0^\infty c_n e^{int}$$

породжує функцію

$$f(\lambda)=\sum_0^\infty c_n\lambda^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\rho,\tau-t)f(t)dt \quad (\lambda=\rho e^{i\tau}), \tag{1.1}$$

яка належить до класу H_k і має місце рівність

$$f(e^{it})=g(t) \quad \text{м. в.} \tag{1.2}$$

Очевидно, розглянуті функції $g(t)$ утворюють підпростір у L_k, який будемо позначати L_k^+.

Формули (1.1), (1.2) встановлюють при кожному фіксованому k $(1\leq k<\infty)$ взаємно однозначну відповідність між H_k та L_k^+. Ця відповідність є лінійною та зберігає метрику.

$$\|f\|_k=\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^k\right]^{\frac{1}{k}} & (1\leq k<\infty); \\ \sup\operatorname{ess}_{t\in[0,2\pi]}|f(e^{it})| & (k=\infty). \end{cases}$$

Таким чином, H_k можна ототожнювати з L_k^+.

Розглянемо означення у випадку верхньої півплощини: нехай $f(z)$ це аналітична функція в $\mathbb{C}_+$, $1 \le k < \infty$. Кажуть, що $f \in H_k = H_k(\mathbb{C}_+)$, якщо

$$\sup_{0<y<\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^k dx = \|f\|_{H_k}^k < \infty.$$

При $k = \infty$ будемо позначати через $H_\infty = H_\infty(\mathbb{C}_+)$ простір обмежених аналітичних функцій в $\mathbb{C}_+$ з нормою

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{C}_+} |f(z)|.$$

Вимірну функцію $f(\mu)$ будемо відносити до простору $\widetilde{L}_k(\mathbb{R})$, якщо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\mu)|^k}{1+\mu^2} < \infty. \tag{1.3}$$

Далі будемо позначати Ω_+ одиничний диск $\mathbb{D}$ або верхню напівплощину $\mathbb{C}_+$.

$$\rho_\omega(\lambda) = \begin{cases} 1 - \lambda\overline{\omega}, & \text{якщо } \Omega_+ = \mathbb{D}; \\ -2\pi i(\lambda - \overline{\omega}), & \text{якщо } \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases}$$

Нехай

$$\Omega_- := \{\omega \in \mathbb{C} : \rho_\omega(\omega) < 0\} \quad \text{і} \quad \Omega_0 := \partial\Omega_+ = \{\omega \in \mathbb{C} : \rho_\omega(\omega) = 0\}.$$

Тоді у випадку $\Omega_+ = \mathbb{D}$, маємо

$$\Omega_0 = \mathbb{T} = \{\lambda : |\lambda| = 1\}, \quad \Omega_- = \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}.$$

У випадку $\Omega_+ = \mathbb{C}_+$, маємо

$$\Omega_- = \mathbb{C}_-, \quad \Omega_0 = \mathbb{R}.$$

Далі будемо розглядати випадки кола і півплощини одночасно.

Означення 1.1. *Говорять, що функція $s(\lambda)$ належить до класу Шура $\mathcal{S}$, якщо вона належить до H_∞ і задовольняє умові $s(\lambda)^* s(\lambda) \le 1$ для всіх $\lambda \in \Omega_+$.*

Означення 1.2. *Внутрішня функція – це функція з $\mathcal{S}$, для якої $|u(\lambda)| \le 1$ в Ω_+ та $|u(\mu)| = 1$ м. в. на Ω_0.*

Прикладом внутрішньої функції є добуток Бляшке, який визначається наступним чином
$$b(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}\gamma_k b_\omega(\lambda), \tag{1.4}$$
де
$$b_{\omega_k}(\lambda)=\begin{cases}(\lambda-\omega_k)/(1-\lambda\overline{\omega_k}), & \text{якщо} \quad \Omega_+=\mathbb{D};\\ (\lambda-\omega_k)/(\lambda-\overline{\omega_k}), & \text{якщо} \quad \Omega_+=\mathbb{C}_+.\end{cases} \tag{1.5}$$
$\gamma_k\in\mathbb{C}$, $|\gamma_k|=1$, $\lambda\in\Omega_+$, $\omega_k\in\Omega_+$ та задовольняють умові Бляшке
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\omega_n}{1+|\omega_n|^2}<\infty \quad \text{для} \quad \Omega_+=\mathbb{C}_+,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\omega_n|)<\infty \quad \text{для} \quad \Omega_+=\mathbb{D}.$$

Означення 1.3. *Функція f з H_∞ називається зовнішньою, якщо*
$$\overline{fH_2}\ =\ H_2.$$

Зовнішня функція з H_∞ має представлення у вигляді
$$f(\lambda)=\begin{cases}\kappa\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda}\ln k(t)dt\right], & \Omega_+=\mathbb{D};\\ \kappa\exp\left[\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{t-\lambda}-\frac{t}{t^2+1}\right)\ln k(t)dt\right], & \Omega_+=\mathbb{C}_+,\end{cases} \tag{1.6}$$
де $k(t)\geq 0, \ln k(t)\in\widetilde{L}_1$, $\kappa\in\mathbb{C}, |\kappa|=1$. При цьому $k(\mu)=|f(\mu)|$ м. в. на Ω_0.

Будь-яка ненульова функція $f\in H_\infty$ допускає факторизацію Ріса:
$$f=f_{in}f_{out},$$
де f_{in} – це внутрішня функція, f_{out} – зовнішня функція.

Означення 1.4. *Матричний клас Харді $H_k^{p\times q}$ — це клас $p\times q$ м. ф., элементи яких належать до класу Харді H_k.*

Будемо позначати $H_k^p:=H_k^{p\times 1}$.

1.1.2 Клас Шура $\mathcal{S}^{p\times q}$. Добуток Бляшке-Потапова

Говорять, що м. ф. $s(\lambda)$ порядку $p\times q$ належить до матричного класу Шура $\mathcal{S}^{p\times q}$, якщо вона належить до класу Харді $H_\infty^{p\times q}$, та задовольняє умові $s(\lambda)^*s(\lambda)\le I_p$ для всіх $\lambda\in\Omega_+$.

М. ф. $s\in\mathcal{S}^{p\times q}$ називається *зовнішньою*, якщо $\overline{sH_2^p}=H_2^q$.

М. ф. $s\in\mathcal{S}^{p\times p}$ називається *внутрішньою*, якщо

$$s(\mu)^*s(\mu)=I_p \text{ м. в. на } \Omega_0.$$

Будемо позначати через $\mathcal{S}_{in}^{p\times q}$ множину всіх внутрішніх $p\times q$ м. ф., $\mathcal{S}_{out}^{p\times q}$ – множину всіх зовнішніх $p\times q$ м. ф.

Прикладом внутрішньої м. ф. є *множник Бляшке-Потапова*, тобто м. ф., що задана формулою

$$B_\omega(\lambda)=I_n-\Pi+b_\omega(\lambda)\Pi, \tag{1.7}$$

де $b_\omega(\lambda)$ – множник Бляшке (див. (1.5)), Π – ортогональний проектор в $\mathbb{C}^n$. Множник Бляшке-Потапова $B_\omega(\lambda)$ називається простим, якщо ортогональний проектор Π в (1.7) має ранг 1. М. ф.

$$B(\lambda)=\prod_{j=1}^{\overset{\kappa}{\curvearrowright}}B_{\omega_j}(\lambda), \tag{1.8}$$

де $B_{\omega_j}(\lambda)$ – прості множники Бляшке-Потапова, називаються *правим добутком Бляшке-Потапова.* Зображення (1.8) не є однозначним, але при умові, що всі множники b_{ω_j} є простими, виявляється, що їхня кількість κ є сталою. Це число κ називається *степенем правого добутку Бляшке-Потапова.* Такі м. ф. були введені В. П. Потаповим у роботі [14].

Аналогічно визначається поняття *степеня для лівого добутку Бляшке-Потапова* та виявляється, що степені лівого та правого добутків Бляшке-Потапова співпадають.

Ненульова м. ф. $s\in\mathcal{S}^{p\times p}$ рангу p допускає внутрішньо-зовнішню та зовнішньо-внутрішню факторизації Ф. Ріса

$$s=b_\ell a_\ell=a_rb_r,\quad \text{де}\quad b_\ell,b_r\in\mathcal{S}_{in}^{p\times p},\quad a_\ell,a_r\in\mathcal{S}_{out}^{p\times p}. \tag{1.9}$$

При цьому множники b_ℓ, a_ℓ, b_r, a_r визначаються однозначно з точністю до унітарних множників u і v розміру $p \times p$:

$$b_\ell \to b_\ell u, \quad a_\ell \to u^* a_\ell \quad \text{i} \quad a_r \to a_r v, \quad b_r \to v^* b_r.$$

Означення 1.5. *Нульовою кратністю M_ζ для $F \in H_\infty^{p\times q}$ ми будемо називати степінь добутку Бляшке-Потапова b_ℓ, яка дорівнює степеню добутку Бляшке-Потапова b_r ([65]) в факторизації* (1.9)

$$M_\zeta(F) = \deg b_\ell (= \deg b_r).$$

Наступну *узагальнену Теорему Руше* було отримано в [65]. Доведення цієї теореми містило пробіл, який було усунуто в [49]. Скалярна версія цієї Теореми була доведена іншим способом у [22].

Теорема 1.6. *Нехай $\varphi, \psi \in H_\infty^{q\times q}$, $\det(\varphi+\psi) \not\equiv 0$ in Ω_+, $M_\zeta(\varphi, \Omega_+) < \infty$,*

$$\|\varphi(\mu)^{-1}\psi(\mu)\| \le 1 \quad \text{м. в. на } \Omega_0. \tag{1.10}$$

Тоді

$$M_\zeta(\varphi+\psi, \Omega_+) \le M_\zeta(\varphi, \Omega_+) \tag{1.11}$$

При цьому в (1.11) *має місто рівність, якщо*

$$(\varphi+\psi)^{-1}\varphi|_{\Omega_0} \in \widetilde{L}_1^{q\times q}, \tag{1.12}$$

де $\widetilde{L}_1^{q\times q}$ – це простір вимірних $q \times q$ м. ф. таких, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{trace} f(\mu)^* f(\mu)}{1+\mu^2} < \infty.$$

Нагадаємо означення класу Неванлінни $\mathcal{N}^{p\times q}$ та класу Смірнова $\mathcal{N}_+^{p\times q}$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{p\times q} &= \{f = h^{-1}g :\ g \in H_\infty^{p\times q},\ h \in \mathcal{S} := \mathcal{S}^{1\times 1}\}, \\ \mathcal{N}_+^{p\times q} &= \{f = h^{-1}g :\ g \in H_\infty^{p\times q},\ h \in \mathcal{S}_{out} := \mathcal{S}_{out}^{1\times 1}\}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Важливість класу Смірнова визначається тим, що в ньому виконується наступний принцип максимума Смірнова

Теорема 1.7. *[34, Th 3.59]* (Теорема Смірнова)

$$\mathcal{N}_{+}^{p\times q} \cap \widetilde{L}_{k}^{p\times q} = H_{k}^{p\times q} \quad (1 \le k \le \infty).$$

1.2 Простір Гільберта з відтворюючим ядром (RKHS)

Нагадаємо, що м. ф. $K_\omega(\lambda)$ розміру $m \times m$ називається позитивним ядром на $\Omega \times \Omega$, якщо

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_i^* K_{\omega_j}(\omega_j) u_j \ge 0 \tag{1.14}$$

для кожного $n \in \mathbb{Z}_+$ та для кожного набору точок $\omega_1, .., \omega_n$ з Ω та векторів $u_1, .., u_n$ з $\mathbb{C}^m$.

Означення 1.8. *Гільбертів простір $\mathcal{H}$ вектор-функцій розміру $m\times 1$ визначених на Ω називається простором Гільберта з відтворюючим ядром (RKHS), якщо існує м. ф. $K_\omega(\lambda)$ розміру $m \times m$ визначена на $\Omega \times \Omega$ така, що:*

(1) $K_\omega u \in \mathcal{H}$ (як функція від λ) для кожного набору $\omega \in \Omega$ та $u \in \mathbb{C}^m$.

(2) виконується відтворююча рівність

$$\langle f, K_\omega u \rangle_{\mathcal{H}} = u^* f(\omega)$$

для кожного набору $\omega \in \Omega$, $u \in \mathbb{C}^m$, $f \in \mathcal{H}$.

Теорема 1.9. *Якщо $m \times m$ м. ф. $K_\omega(\lambda)$ є позитивним ядром на $\Omega \times \Omega$, то існує єдиний RKHS для якого $K_\omega(\lambda)$ є відтворюючим ядром.*

Більш детальну інформацію щодо просторів Гільберта з відтворюючими ядрами дивіться в монографіях [54], [72].

1.3 J-стискаючі та J-внутрішні матриці-функції

1.3.1 Клас $\mathcal{P}(J)$

Матриця $J \in \mathbb{C}^{m\times m}$ називається сигнатурною, якщо вона є самоспряженою та унітарною щодо стантартного скалярного добутку в $\mathbb{C}^m$, тобто

$$J = J^* \quad \text{та} \quad J^* J = I_m.$$

Говорять, що матриця $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ є J-унітарною, якщо

$$U^*JU = J.$$

Клас J-унітарних матриць будемо позначати $\mathcal{U}_{const}(J)$.

Позначимо через $\mathfrak{h}_f$ область голоморфності м. ф. f та нехай

$$\mathfrak{h}_f^{\pm} = \mathfrak{h}_f \cap \Omega_{\pm}.$$

Означення 1.10. *Говорять, що мероморфна в Ω_+ м. ф. розміру $m \times m$ належить до класу Потапова J-стискаючих м. ф. $\mathcal{P}(J)$, якщо*

$$U(\lambda)^*JU(\lambda) \leq J \tag{1.15}$$

для будь-якої точки $\lambda \in \mathfrak{h}_U^+$.

Кожна $m\times m$ сигнатурна матриця $J \neq I_m$ є унітарно еквівалентною матриці

$$j_{pq} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}, \quad p \geq 1,\ q \geq 1,\ p+q=m, \tag{1.16}$$

де

$$P = \frac{I_m + J}{2}, \quad Q = \frac{I_m - J}{2}$$

– це ортогональні проектори в $\mathbb{C}^m$ та

$$p = \operatorname{rank} P, \quad q = \operatorname{rank} Q.$$

Як показано у [34], для м. ф. $W(\lambda)$ з класу Потапова $\mathcal{P}(J)$ матриці $i(P-W(\lambda)Q)$ і $(P+QW(\lambda))$ є оборотними і визначено перетворення Потапова-Гінзбурга, яке задається формулою

$$\begin{aligned} S(\lambda) = PG(W) : &= (PW(\lambda) + Q)(P + QW(\lambda))^{-1} \\ &= (P - W(\lambda)Q)^{-1}(W(\lambda)P - Q) \end{aligned} \tag{1.17}$$

та $S = PG(W)$ належить до класу Шура $\mathcal{S}^{m\times m}$.

Нехай м. ф. W належить до $\mathcal{P}(j_{pq})$ і має блочне представлення

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}.$$

Тоді матриця $w_{22}(\lambda)$ є оборотною для всіх $\lambda \in \mathfrak{h}_W^+$ і перетворення Потапова-Гінзбурга набуває вигляду

$$S(\lambda) := PG(W) = \begin{bmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda) \end{bmatrix}^{-1}. \tag{1.18}$$

Формулу (1.18) можна переписати у вигляді

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} - w_{12}w_{22}^{-1}w_{21} & w_{12}w_{22}^{-1} \\ -w_{22}^{-1}w_{21} & w_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{1.19}$$

Перетворення Потапова-Гінзбурга (1.17) було отримано Ю. Гінзбургом у [3]. Перетворення, визначене формулою (1.18), досліджувалось незалежно Р. Редхеффером в [70].

1.3.2 Клас $\mathcal{U}(J)$

Означення 1.11. *М. ф. $U \in \mathcal{P}(J)$ називають J-внутрішньою, якщо*

$$U(\mu)^* J U(\mu) = J \quad \text{м. в. } \mu \in \Omega_0. \tag{1.20}$$

Клас J-внутрішніх м. ф. будемо позначати $\mathcal{U}(J)$.

Якщо $U \in \mathcal{U}(j_{pq})$, то, як показано в [32], s_{11}, s_{22} допускають факторизації Ф. Ріса

$$s_{11}(\lambda) = b_1(\lambda)\varphi_1(\lambda) \quad s_{22}(\lambda) = \varphi_2(\lambda)b_2(\lambda), \tag{1.21}$$

де $b_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $\varphi_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $\varphi_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}$.
Внутрішні множники b_1 та b_2 будемо називати *асоційованою парою* та будемо писати $\{b_1, b_2\} \in ap(U)$.

Нагадаємо позначення (див. [34]):

$$\mathcal{N}_{out}^{p\times q} = \{f = h^{-1}g : g \in \mathcal{S}_{out}^{p\times q}, h \in \mathcal{S}_{out}^{1\times 1}\}.$$

Означення 1.12. *М. ф. $U \in \mathcal{U}(J)$ називаеться сингулярною, якщо вона належить до класу $\mathcal{N}_{out}^{p\times q}$. Клас сингулярних матриць функцій будемо позначати $\mathcal{U}^S(J)$.*

У роботі [32] наведено критерій сингулярності у термінах асоційованої пари

Лема 1.13. *Якщо $U \in \mathcal{U}(j_{pq})$ та $\{b_1, b_2\} \in ap(U)$, то:*

$$U \in \mathcal{U}^S(j_{pq}) \Longleftrightarrow b_i \equiv \text{const}, \ i = 1, 2.$$

Означення 1.14. *М. ф. $U \in \mathcal{U}(J)$ називаеться лівою (правою) регулярною, якщо вона не має непостійного лівого (правого) дільника, який належить до класу $\mathcal{U}^S(j_{pq})$. Клас лівих (правих) регулярних матриць функцій будемо позначати $\mathcal{U}^{\ell R}(J)$ ($\mathcal{U}^{rR}(J)$).*

У статті [32] наведені критерії регулярності та сингулярності м. ф. U класу $\mathcal{U}(J)$ у термінах Гільбертового простору $\mathcal{H}(U)$ з відтворюючим ядром:

$$K_\omega(\lambda) = \frac{J - U(\lambda) J U(\omega)}{\rho_\omega(\lambda)}, \tag{1.22}$$

Теорема 1.15. *Нехай $U \in \mathcal{U}(J)$. Тоді*

(1) $U \in \mathcal{U}^{rR}(J) \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{H}(U) \cap \widetilde{L}_2^m} = \mathcal{H}(U)$.

(2) $U \in \mathcal{U}^S(J) \Longleftrightarrow \mathcal{H}(U) \cap \widetilde{L}_2^m = \{0\}$.

У роботі [34] отримано регулярно-сингулярну факторизацію J-внутрішніх м. ф.:

Теорема 1.16. *Нехай $U \in \mathcal{U}(J)$, то W допускає факторизацію*

$$U = U_1 U_2, \quad \text{де } U_1 \in \mathcal{U}^{rR}(J), \ U_2 \in \mathcal{U}^S(J). \tag{1.23}$$

1.4 Узагальнена проблема Шура

Роль регулярних J-внутрішніх м. ф. з'ясовується при описі множини розв'язків узагальненої інтерполяційної проблеми Шура ([34], [1]), що полягає у наступному:

Маємо м. ф. $b_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $s^\circ \in \mathcal{S}^{p\times p}$. Потрібно описати множину

$$\mathcal{S}(b_1, b_2; s^\circ) = \{s \in \mathcal{S}^{p\times q} : (b_1)^{-1}(s - s^\circ)(b_2)^{-1} \in H_\infty^{p\times q}\}. \tag{1.24}$$

М. ф. $s(\lambda)$ називається розв'язком цієї проблеми, якщо вона належить до $\mathcal{S}(b_1, b_2; s^\circ)$.

Нагадаємо, що задача називається:

- *невизначеною*, якщо вона має більш ніж один розв'язок,
- *цілком невизначеною*, якщо для кожного вектора $\eta \in \mathbb{C}^q$ існує принаймні два розв'язки $s_1, s_2 \in \mathcal{S}(b_1, b_2; s^\circ)$ такі, що $\|\ (\ s_1 -\ s_2)\ \eta\|_\infty > 0$.

Позначимо через T_W^r дробово-лінійне перетворення:

$$T_W^r[\varepsilon] = (w_{11}(\mu)\varepsilon(\mu) + w_{12}(\mu))(w_{21}(\mu)\varepsilon(\mu) + w_{22}(\mu))^{-1}, \tag{1.25}$$

пов'язане з м. ф. $W \in \mathcal{U}(j_{pq})$. Позначимо

$$T_W^r[\mathcal{S}^{p\times q}] = \{T_W[\varepsilon] : \varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}\}.$$

Легко бачити, що $T_W^r[\varepsilon] \in \mathcal{S}^{p\times q}$ для кожної м. ф. $\varepsilon \ \in \ \mathcal{S}^{p\times q}$.

Теорема 1.17. *Нехай $W \in \mathcal{U}(j_{pq})$, $\{b_1, b_2\} \in ap(W)$ та $s^\circ \ \in \ T_W^r[\mathcal{S}^{p\times q}]$. Тоді узагальнена задача Шура є цілком невизначеною та*

$$T_W^r[\mathcal{S}^{p\times q}] \subseteq \mathcal{S}(b_1, b_2; s^\circ). \tag{1.26}$$

Більш того, у (1.26) буде рівність тоді і тільки тоді, коли $W \in \mathcal{U}^{rR}(j_{pq})$. Справедливо і зворотне твердження: множина розв'язків цілком невизначеної проблеми Шура співпадає з $T_W^r[\mathcal{S}^{p\times q}]$ для деякої м. ф. $W \in \mathcal{U}^{rR}(j_{pq})$.

1.5 γ-твірні матриці та задача Нехарі

1.5.1 γ-твірні матриці

Означення γ–твірної матриці було введено Д. З. Аровим [31] у зв'язку з розглядом абсолютно невизначеної задачі Нехарі для одиничного кола $\mathbb{T}$ ([21], [29], [34]) та для дійсної прямої $\mathbb{R}$ ([34]).

Для мероморфної в Ω_+ м. ф. $S(\lambda)$ введемо позначення

$$S^{\#} = \begin{cases} S(1/\overline{\lambda})^*, & \text{якщо } \Omega_+ = \mathbb{D},\ \lambda \neq 0; \\ S(\overline{\lambda})^*, & \text{якщо } \Omega_+ = \mathbb{C}_+ \end{cases} \tag{1.27}$$

Означення 1.18. *Матриця-функція*

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.28}$$

де a_{11} та a_{22} блоки розміру $p \times p$ і $q \times q$, відповідно, називається правою γ-твірною матрицею класу $\mathfrak{M}^r(j_{pq})$, якщо:

(1) *$\mathfrak{A}$ є вимірною на Ω_0 та має j_{pq}-унітарні значення для м. в. $\mu \in \Omega_0$;*

(2) *$a_{22}(\mu)$ та $a_{11}^*(\mu)$ є граничними значеннями голоморфних м. ф. $a_{22}(\lambda)$ і $a_{11}^{\#}(\lambda)$, таких, що a_{22}^{-1} та $(a_{11}^{\#})^{-1}$ є зовнішніми м. ф. з класів Шура $\mathcal{S}^{p\times p}$ та $\mathcal{S}^{q\times q}$, відповідно;*

(3^r) *м. ф. $s_{21} := -a_{22}^{-1}a_{21} \in \mathcal{S}^{q\times p}$.*

Нехай $\mathfrak{M}^\ell(j_{pq})$ позначає клас $m \times m$ м. ф. $\mathfrak{A}$ вигляду (1.28), *які відповідають умовам* (1), (2), *зазначеним вище для $\mathfrak{M}^r(j_{pq})$ та замість умови* (3^r) *задовольняють наступній умові:*

(3^ℓ) *м. ф. $s_{12} := -a_{12}a_{22}^{-1} \in \mathcal{S}^{p\times q}$.*

М. ф. з класу $\mathfrak{M}^\ell(j_{pq})$ називають лівими γ-твірними матрицями.

Клас $\mathfrak{M}^\ell(j_{pq})$ був введений у [33, Розділ 7.3.].

Означення 1.19. *М. ф. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^r(j_{pq})$ називають:*

(1) *право-сингулярною ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^{rS}(j_{pq})$), якщо $T_{\mathfrak{A}}^r[\mathcal{S}^{p\times q}] \subseteq \mathcal{S}^{p\times q}$,*

(2) *ліво-сингулярною ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^{\ell S}(j_{pq})$), якщо $T_{\mathfrak{A}}^\ell[\mathcal{S}^{p\times q}] \subseteq \mathcal{S}^{p\times q}$,*

(3) *право-регулярною ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^{rR}(j_{pq})$), якщо з факторизації $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, де $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}^r(j_{pq})$ та $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{M}^{rS}(j_{pq})$ випливає, що $\mathfrak{A}_2$ є постійною матрицею.*

(4) *ліво-регулярною ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^{\ell R}(j_{pq})$), якщо з факторизації $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1$, де $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}^r(j_{pq})$, та $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{M}^{rS}(j_{pq})$ випливає, що $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathrm{const}$.*

Щоб показати зв'язок γ-твірних матриць з j_{pq}-внутрішніми м. ф. знадобляться наступні означення:

Означення 1.20. *Упорядкована пара $\{b_1, b_2\}$ внутрішніх м. ф. $b_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$ називається знаменником м. ф. $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$, якщо*

$$b_1 f b_2 \in \mathcal{N}_+^{p\times q}.$$

Множину знаменників м. ф. f будемо позначати $den(f)$.

Граничні значення $f(\mu)$ м. ф. $f(\lambda) \in \mathcal{N}^{p\times q}(\mathbb{C}_+)$ $(\mathcal{N}^{p\times q}(\mathbb{D}))$ визначені м. в. на $\mathbb{R}$ $(\mathbb{T})$ наступним чином

$$f(\mu) = \lim_{\nu\downarrow 0} f(\mu + i\nu) \quad (f(\mu) = \lim_{r\uparrow 1} f(r\mu)). \tag{1.29}$$

Аналогічно, визначаються граничні значення м. ф. $f \in \mathcal{N}^{p\times q}(\Omega_-)$ м. в. на Ω_0.

Означення 1.21. *Говорять, що $p \times q$ м. ф. f_- в Ω_- є псевдопродовженням м. ф. $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$, якщо*

$$f_-^{\#} \in \mathcal{N}^{p\times q} \quad і \quad f_-(\mu) = f(\mu) \quad \text{м. в. на} \quad \Omega_0.$$

Підклас м. ф. $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$, що допускають псевдопродовження м. ф. f_- в Ω_- будемо позначати $\Pi^{p\times q}$. Іноді суперіндекс $p \times q$ будемо опускати, і для стислості будемо позначати цей клас Π, якщо це не призведе до плутанини.

Теорема 1.22. *Нехай $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}^r(j_{pq})$, $\{b_1, b_2\} \in den(T_{\mathfrak{A}}[0])$ та*

$$W(\mu) = \begin{bmatrix} b_1(\mu) & 0 \\ 0 & b_2^{-1}(\mu) \end{bmatrix} \mathfrak{A}(\mu), \quad \text{м. в. на } \Omega_0. \tag{1.30}$$

Тоді

$$W \in \mathcal{U}(j_{pq}) \quad \text{та} \quad \{b_1, b_2\} \in ap(W). \tag{1.31}$$

І навпаки, якщо (1.31) виконано, то

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} b_1^{-1}(\mu) & 0 \\ 0 & b_2(\mu) \end{bmatrix} W(\mu) \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}^r(j_{pq}) \quad \text{та} \quad \{b_1, b_2\} \in den(T_{\mathfrak{A}}[0]).$$

Теорема 1.23. *Якщо м. ф.* $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}^r(j_{pq})$ *та* $W \in \mathcal{U}(j_{pq})$ *зв'язані формулою* (1.30), *то*

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^{rR}(j_{pq}) \Longleftrightarrow W \in \mathcal{U}^{rR}(j_{pq}).$$

Теорема 1.24. *Якщо м. ф.* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^r(j_{pq})$, *то*

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^{rS}(j_{pq}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \in \mathcal{U}^S(j_{pq}).$$

Таким чином, класи $\mathfrak{M}^{rS}(j_{pq})$ *та* $\mathfrak{M}^{\ell S}(j_{pq})$ *співпадають з* $\mathcal{U}^S(j_{pq})$.

Як показано у [34], γ-твірні м. ф. допускають регулярно-сингулярну факторизацію

Теорема 1.25. *Кожна м. ф.* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^r(j_{pq})$ *допускає факторизацію*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}^{rR}(j_{pq}),\ \mathfrak{A}_2 \in \mathcal{U}^S(j_{pq}), \tag{1.32}$$

яка є єдиною с точністю до j_{pq}*-унітарного постійного множника*

$$\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_1 V, \quad \mathfrak{A}_2 \to V^{-1}\mathfrak{A}_2,\ V \in \mathcal{U}_{const}.$$

У зв'язку з проблемою Нехарі-Такагі в дисертації будуть введені класи узагальнених правих $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ та лівих $\mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$ γ-твірних матриць та для м. ф. з цих класів будуть знайдені достатні умови існування регулярно-сингулярної факторизації.

1.5.2 Задача Нехарі

У роботах [21], [20] показано, що регулярні γ-твірні м. ф. грають важливу роль у розв'язанні задачі Нехарі.

Нехай $f \in L^{p\times q}_\infty$ та $\Gamma(f)$ – ганкелів оператор побудований по f за правилом

$$\Gamma(f) = \Pi_- M_f|_{H_2^q}, \tag{1.33}$$

де M_f – оператор множення на f, який діє з $\widetilde{L}_2^q$ на $\widetilde{L}_2^p$ та Π_- – ортогональний проектор з $\widetilde{L}_2^p$ в $(H_2^p)^\perp$. Легко побачити, що

$$\|\Gamma(f)\| \le \|f\|_{L^{p\times q}_\infty}.$$

Задача **Нехарі** $NP(\Gamma)$ полягає у наступному:
дано оператор Ганкеля Γ з H_2^q в $(H_2^p)^\perp$. Потрібно описати множину

$$\mathcal{N}(\Gamma) = \{f \in L_\infty^{p\times q} : \Gamma(f) = \Gamma \text{ та } \|f\| \le 1\}.$$

М. ф. $f \in \mathcal{N}(\Gamma)$ називається розв'язком $NP(\Gamma)$.
Нагадаємо, що задача називається:

- *невизначеною*, якщо вона має більш ніж один розв'язок,
- *цілком невизначеною*, якщо для кожного ненульового вектора $\eta \in \mathbb{C}^q$ існує принаймні два розв'язки $f_1, f_2 \in \mathcal{N}(\Gamma)$ такі, що $\|(f_1 - f_2)\eta\|_\infty > 0$.

В [19] було отримано опис $\mathcal{N}(\Gamma)$ в цілком невизначеному випадку:

Теорема 1.26. *Нехай Γ це оператор Ганкеля такий, що задача Нехарі є цілком невизначеною. Тоді існує м. ф. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^r(j_{pq})$ така, що*

$$\mathcal{N}(\Gamma) = T_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}^{p\times q}].$$

В роботі [34] показано, що існує зв'язок між множиною розв'язків узагальненої задачі Шура $\mathcal{S}(b_1, b_2; s^\circ)$ та задачі Нехарі $\mathcal{N}(\Gamma)$, в якій $\Gamma = \Gamma(b_1^* s^\circ b_2^*)$:

$$s \in \mathcal{S}(b_1, b_2; s^\circ) \Longleftrightarrow b_1^* s b_2^* \in \mathcal{N}(\Gamma).$$

Далі в розділі 5 буде розглянуто узагальнену задачу Нехарі-Такагі і узагальнену задачу Такагі-Сарасона, та буде отримано зв'язок між множинами розв'язків цих задач.

1.6 Деякі класи узагальнених матриць-функцій

1.6.1 Узагальнений клас Шура $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$

Нехай $\kappa \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Нагадаємо, що ермітово ядро $\mathsf{K}_\omega(\lambda) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}^{m\times m}$ має κ від'ємних квадратів, якщо для кожного натурального n та кожного набору $\omega_j \in \Omega$ та $u_j \in \mathbb{C}^m$ $(j = 1, \dots, n)$ матриця

$$(\langle \mathsf{K}_{\omega_j}(\omega_k) u_j, u_k \rangle)_{j,k=1}^n$$

має не більше ніж κ від'ємних власних значень, і для деякого набору $\omega_1, \dots, \omega_n \in \Omega$ та $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}^m$ точно κ від'ємних власних значень ([65]).

Нехай $\mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$ позначає *узагальнений клас Шура* м. ф. s розміру $q \times p$ які є мероморфними в Ω_+ та для яких ядро

$$\Lambda_\omega^s(\lambda) = \frac{I_p - s(\lambda)s(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)} \tag{1.34}$$

має κ від'ємних квадратів у $\mathfrak{h}_s^+ \times \mathfrak{h}_s^+$.
У випадку $\kappa = 0$, клас $\mathcal{S}_0^{q\times p}$ співпадає з класом Шура $\mathcal{S}^{q\times p}$.

Як показано у [65] кожна м. ф. $s \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$ допускає *факторизацію Крейна-Лангера*:

$$s(\lambda) = b_\ell(\lambda)^{-1}s_\ell(\lambda) = s_r(\lambda)b_r(\lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \mathfrak{h}_s^+, \tag{1.35}$$

де $b_\ell \in \mathcal{S}^{q\times q}$, $b_r \in \mathcal{S}^{p\times p}$ добутки Бляшке-Потапова степеня κ, $s_\ell, s_r \in \mathcal{S}^{q\times p}$ та факторизації (1.35) є лівою взаємно простою та правою взаємно простою, відповідно, тобто

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} b_\ell(\lambda) & s_\ell(\lambda) \end{bmatrix} = q \quad (\lambda \in \Omega_+) \tag{1.36}$$

та

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} b_r(\lambda)^* & s_r(\lambda)^* \end{bmatrix} = p \quad (\lambda \in \Omega_+). \tag{1.37}$$

Наступна матрична тотожність була встановлена у раціональному випадку в [56], у загальному випадку див. [47].

Теорема 1.27. *Нехай $s \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$ має факторизацію Крейна-Лангера*

$$s = b_\ell^{-1}s_\ell = s_r b_r^{-1}. \tag{1.38}$$

Тоді існує набір м. ф. $c_\ell \in H_\infty^{q\times q}$, $d_\ell \in H_\infty^{p\times q}$, $c_r \in H_\infty^{p\times p}$ та $d_r \in H_\infty^{p\times q}$, який задовольняє тотожності

$$\begin{bmatrix} c_r & d_r \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_r & -d_\ell \\ s_r & c_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \tag{1.39}$$

Більш того,

$$\begin{aligned} b_r c_r + d_\ell s_\ell = I_p, &\quad b_r d_r - d_\ell b_\ell = 0, \\ s_r c_r - c_\ell s_\ell = 0, &\quad s_r d_r + c_\ell b_\ell = I_q. \end{aligned} \tag{1.40}$$

У зв'язку з Теоремою 1.27 випливає питання: чи можна для м. ф. $s \in \mathcal{S}^{q\times p}$, що допускає псевдопродовження, вибрати м. ф. c_ℓ, d_ℓ, c_r, d_r в (1.39) так, що вони теж допускають псевдопродовження?

1.6.2 Узагальнений клас j_{pq}-внутрішніх матриць-функцій

Означення 1.28. *[26] Говорять, що мероморфна у Ω_+ м. ф. $W(\lambda) = [w_{ij}(\lambda)]_{i,j=1}^2$ розміру $m\times m$ належить до класу $\mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., якщо:*

(i) ядро

$$\mathsf{K}_\omega^W(\lambda) = \frac{j_{pq} - W(\lambda)j_{pq}W(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)} \tag{1.41}$$

має κ від'ємних квадратів в $\mathfrak{h}_W^+ \times \mathfrak{h}_W^+$;

(ii) $j_{pq} - W(\mu)j_{pq}W(\mu)^* = 0$ м. в. на Ω_0.

Як відомо [26, Теорема 6.8] в кожній м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ блок $w_{22}(\lambda)$ є оборотним для $\lambda \in \mathfrak{h}_W^+$ за винятком не більше ніж κ точок в Ω_+. Таким чином, перетворення Потапова-Гінзбурга для W

$$S(\lambda) = PG(W(\lambda)) := \begin{bmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda) \end{bmatrix}^{-1} \tag{1.42}$$

визначено для тих $\lambda \in \mathfrak{h}_W^+$, для яких $w_{22}(\lambda)$ є оборотним. Добре відомо, що $S(\lambda)$ належить до класу $\mathcal{S}_\kappa^{m\times m}$ та $S(\mu)$ є унітарною для м. в. $\mu \in \Omega_0$ (див. [26], [47]).

Означення 1.29. *[47] Говорять, що $m\times m$ м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ належить класу $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, якщо*

$$s_{21} := -w_{22}^{-1}w_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}. \tag{1.43}$$

Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ та нехай факторизація Крейна-Лангера для s_{21} має вигляд

$$s_{21}(\lambda) = b_\ell(\lambda)^{-1}s_\ell(\lambda) = s_r(\lambda)b_r(\lambda)^{-1} \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{21}}^+),$$

де $b_\ell \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $b_r \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $s_\ell, s_r \in \mathcal{S}^{q\times p}$. Тоді, як показано у [47], м. ф. $b_\ell s_{22}$ та $s_{11}b_r$ голоморфні у Ω_+, та

$$s_{11}b_r \in \mathcal{S}^{p\times p}, \qquad b_\ell s_{22} \in \mathcal{S}^{q\times q}. \tag{1.44}$$

Означення 1.30. *[47] Розглянемо внутрішньо-зовнішню факторизацію* $s_{11}b_r$ *та зовнішньо-внутрішню факторизацію* $b_\ell s_{22}$

$$s_{11}b_r = b_1 a_1, \qquad b_\ell s_{22} = a_2 b_2, \tag{1.45}$$

де $b_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $a_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}$, $a_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}$. *Пара* $\{b_1, b_2\}$ *внутрішніх множників у факторизації* (1.45) *називається асоційованою парою м. ф.* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$.

Відтепер цю пару $\{b_1, b_2\}$ будемо також називати правою асоційованою парою та будемо писати $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$, оскільки вона пов'язана з правим дробово-лінійним перетворенням (1.46), див [30], [34], [32]. Це перетворення грає важливу роль в описі розв'язків різних інтерполяційних задач, див. [22], [30], [38], [36], [51], [48]. У випадку $\kappa = 0$ означення асоційованної пари було дано в [30].

Розглянемо (праве) дробово-лінійне перетворення від м. ф. $\varepsilon \in \mathcal{S}_{\kappa_2}^{p\times q}$ ($\kappa_2 \in \mathbb{Z}_+$)

$$T_W^r[\varepsilon] := (w_{11}(\lambda)\varepsilon(\lambda) + w_{12}(\lambda))(w_{21}(\lambda)\varepsilon(\lambda) + w_{22}(\lambda))^{-1}, \tag{1.46}$$

що побудовано на основі блочного вигляду

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda) \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ з блоками $w_{11}(\lambda)$ та $w_{22}(\lambda)$ розмірів $p\times p$ та $q \times q$, відповідно. Нехай

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathfrak{h}_W^+ \cap \mathfrak{h}_\varepsilon^+ : \det(w_{21}(\lambda)\varepsilon(\lambda) + w_{22}(\lambda)) = 0\}. \tag{1.48}$$

Перетворення $T_W^r[\varepsilon]$ є коректно визначеним при $\lambda \in (\mathfrak{h}_W^+ \cap \mathfrak{h}_\varepsilon^+) \setminus \Lambda$.

Лема 1.31. *Нехай* $\mathrm{W} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}(j_{pq})$, $\varepsilon \in \mathcal{S}_{\kappa_2}^{p\times q}$. *Тоді* $T_W^r[\varepsilon] \in \mathcal{S}_{\kappa'}^{p\times q}$ *з* $\kappa' \le \kappa_2 + \kappa_1$.

Для кожної $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ та $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ м. ф. $T_W^r[\varepsilon]$ допускає дуальне перетворення

$$T_W^r[\varepsilon] = (w_{11}^\# + \varepsilon w_{12}^\#)^{-1}(w_{21}^\# + \varepsilon w_{22}^\#). \tag{1.49}$$

Як показано в [47], для $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ та для м. ф. c_r, d_r, c_ℓ, d_ℓ таких як в

Теоремі 1.27, м. ф.

$$K^{\circ} := (-w_{11}d_{\ell} + w_{12}c_{\ell})(-w_{21}d_{\ell} + w_{22}c_{\ell})^{-1}, \tag{1.50}$$

належить до $H_{\infty}^{p\times q}$. Зрозуміло, що $(K^{\circ})^{\#} \in H_{\infty}^{q\times p}(\Omega_-)$.

Далі у цій дисертаційній роботі буде введено підклас узагальнених лівих j_{pq}-внутрішніх м. ф. $\mathcal{U}_{\kappa}^{\ell}(j_{pq})$.

1.7 Простір Понтрягіна з відтворюючим ядром (RKPS)

У цьому підрозділі ми введемо деякі факти та означення з [36, 42, 47], які використовуюсься в дисертації.

Лінійний простір $\mathcal{K}$ оснащений півторалінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$ на $\mathcal{K}\times\mathcal{K}$ називається простором з індефінітним скалярним добутком.

Підпростір $\mathcal{F}$ простору $\mathcal{K}$ називається позитивним (негативним) відносно форми $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}}$, якщо $\langle f, f\rangle_{\mathcal{K}} > 0\,(<0)$ для всіх $f \in \mathcal{F}$, $f \neq 0$.

Простір з індефінітним скалярним добутком $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}})$ називається простором Понтрягіна, якщо його можна представити у вигляді ортогональної суми

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \oplus \mathcal{K}_-, \tag{1.51}$$

де $\mathcal{K}_+$ – гільбертів простір та $\mathcal{K}_-$ – негативий підпростір скінченної розмірності. Число $\mathrm{ind}_-\mathcal{K} := \dim \mathcal{K}_-$ називається негативним індексом простору $\mathcal{K}$. Збіжність у просторі Понтрягіна $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}})$ розглядається відносно гільбертової норми

$$\|h\|^2 = \langle h_+, h_+\rangle_{\mathcal{K}} - \langle h_-, h_-\rangle_{\mathcal{K}}, \quad h = h_+ + h_-, \quad h_{\pm} \in \mathcal{K}_{\pm}. \tag{1.52}$$

Легко бачити, що топологія у $\mathcal{K}$ не залежить від вибору розкладання (1.51).

Простір Понтрягіна $(\mathcal{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{K}})$ $\mathbb{C}^m$-значних функцій на підмножині Ω множини $\mathbb{C}$ називається *RKPS (простором Понтрягіна з відтворюючим ядром)*, якщо ермітово ядро $\mathsf{K}_{\omega}(\lambda) : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}^{m\times m}$ таке, що:

(1) для будь-якого $\omega \in \Omega$ та кожного $u \in \mathbb{C}^m$ вектор-функція $\mathsf{K}_{\omega}(\lambda)u$ належить до $\mathcal{K}$;

(2) для кожного $h \in \mathcal{K}$, $\omega \in \Omega$ та $u \in \mathbb{C}^m$ виконується відтворююча тотожність

$$\langle h, \mathsf{K}_\omega u \rangle_{\mathcal{K}} = u^* f(\omega). \tag{1.53}$$

Як відомо (див. [73]), для кожного ермітова ядра $\mathsf{K}_\omega(\lambda) : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}^{m\times m}$ із скінченним числом від'ємних квадратів на $\Omega \times \Omega$ існує єдиний простір Понтрягіна $\mathcal{K}$ з відтворюючим ядром $\mathsf{K}_\omega(\lambda)$ та $\operatorname{ind}_-\mathcal{K} = \operatorname{sq}_-\mathsf{K} = \kappa$. У випадку $\kappa = 0$ доведення цього факту належить Ароншайну [28].

Якщо $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$, то припущення (ii) в означенні 1.28 класу $\mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ гарантує, що матриця $W(\lambda)$ є оборотною в Ω_+ за винятком ізольованого набору точок. Визначимо W в Ω_- формулою

$$W(\lambda) = j_{pq} W^\#(\lambda)^{-1} j_{pq} = j_{pq} W(\lambda^\circ)^{-*} j_{pq}, \tag{1.54}$$

якщо $\lambda^\circ \in \mathfrak{h}_W^+$ і $\det W(\lambda^\circ) \neq 0$. Оскільки W обмеженого типу, недотична границя

$$W_\pm(\mu) = \angle \lim_{\lambda\to\mu} \{W(\lambda) : \lambda \in \Omega_\pm\}$$

існує м. в. на Ω_0; та припущення (ii) в означенні 1.28 означає, що недотичні границі $W_+(\mu)$ та $W_-(\mu)$ співпадають м. в. на Ω_0, тому W в Ω_- є псевдомероморфним продовженням W в Ω_+. Якщо $W(\lambda)$ раціональна, це подовження мероморфне в $\mathbb{C}$. Символ $\mathfrak{h}_W$ буде використаний для позначення області голоморфності W у $\mathbb{C}$. Формула (1.54) означає, що $W(\lambda)$ голоморфна і оборотна у

$$\Omega_W := \mathfrak{h}_W \cap \mathfrak{h}_{W^\#}. \tag{1.55}$$

Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ та $\mathcal{K}(W)$ – це RKPS асоційований з ядром $\mathsf{K}_\omega^W(\lambda)$. Ядро $\mathsf{K}_\omega^W(\lambda)$ поширюється на Ω_W за рівністю (1.54) із збереженням числа κ від'ємних квадратів [24, Theorem 2.5.2].

Для $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ введемо позначення:

$$\mathcal{L}_W^+ := \mathcal{K}(W) \cap H_2^m, \quad \mathcal{L}_W^- := \mathcal{K}(W) \cap (H_2^m)^\perp, \quad \mathcal{L}_W := \mathcal{K}(W) \cap \widetilde{L}_2^m.$$

2 Праві та ліві узагальнені j_{pq}-внутрішні матриць-функції

2.1 Клас $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$

Як відомо (див. Розділ 1.3.1), перетворення Потапова-Гінзбурга j_{pq}-внутрішніх м. ф. є внутрішньою м. ф. Нагадаємо деякі факти, що стосуються перетворення Потапова-Гінзбурга узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. За Теоремою 6.8 з [26], для кожної $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ матриця $w_{22}(\lambda)$ є оборотною для всіх $\lambda \in \mathfrak{h}_W^+$ за винятком не більше ніж κ точок в Ω_+. Таким чином, перетворення Потапова-Гінзбурга $S(\lambda)$ від $W(\lambda)$ є коректно визначеним при $\lambda \in \mathfrak{h}_S^+ \cap \mathfrak{h}_W^+$ (див. [24])

$$S(\lambda) = \begin{bmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda) \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.1}$$

Формулу (2.1) можна переписати у вигляді

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} - w_{12}w_{22}^{-1}w_{21} & w_{12}w_{22}^{-1} \\ -w_{22}^{-1}w_{21} & w_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

М. ф. $S(\lambda)$ має унітарну недотичну границю м. в. на Ω_0, тому псевдопродовження S на Ω_- можна задати за допомогою формули $S(\lambda) = (S^{\#}(\lambda))^{-1}$.

Формули (1.27) та (2.2) приводять до дуальної формули для S:

$$S = \begin{bmatrix} w_{11}^{\#} & 0 \\ w_{12}^{\#} & I_q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_p & w_{21}^{\#} \\ 0 & w_{22}^{\#} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11}^{-\#} & w_{11}^{-\#}w_{21}^{\#} \\ -w_{12}^{\#}w_{11}^{-\#} & w_{22}^{\#} - w_{12}^{\#}w_{11}^{-\#}w_{21}^{\#} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

на $\mathfrak{h}_S^+ \cap \mathfrak{h}_{W^\#}^+$.

Нагадаємо, що м. ф. $W = [w_{ij}]_{i,j=1}^2 \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ належить до класу правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, якщо (див. Означення 1.29)

$$s_{21} := -w_{22}^{-1}w_{21} \in \ \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}. \tag{2.4}$$

Нехай факторизація Крейна-Лангера для s_{21} має вигляд

$$s_{21}(\lambda) = b_\ell(\lambda)^{-1}s_\ell(\lambda) = s_r(\lambda)b_r(\lambda)^{-1} \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{21}}^+), \tag{2.5}$$

де $b_\ell \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $b_r \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $s_\ell, s_r \in \mathcal{S}^{q\times p}$.

Пропозиція 2.1. *Якщо* $s \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$ *і має факторизацію Крейна-Лангера* (2.5), *то існує набір м. ф.* $c_\ell \in H_\infty^{q\times q}$, $d_\ell \in H_\infty^{p\times q}$, $c_r \in H_\infty^{p\times p}$ *і* $d_r \in H_\infty^{p\times q}$, *такий, що*

$$\begin{bmatrix} c_r & d_r \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r & -d_\ell \\ s_r & c_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Якщо, крім того, $s \in \Pi$, *то* c_ℓ, d_ℓ, c_r, d_r *можна вибрати з* Π.

Доведення. Перше твердження було доведено в Теоремі 1.27.

Припустимо тепер, що $s \in \Pi$ і, отже $s_\ell \in \Pi$. Нехай d_ℓ раціональна м. ф. така, що

$$b_\ell^{-1}(I_q - s_\ell d_\ell) \in H_\infty^{q\times q}.$$

Таку м. ф. можна вибрати за допомогою матричного інтерполяційного многочлена Лагранжа-Сільвестра. Потім покладемо

$$c_\ell := b_\ell^{-1}(I_p - s_\ell d_\ell),$$

звідси отримуємо $c_\ell \in H_\infty^{q\times q} \cap \Pi^{q\times q}$, оскільки $b_\ell, s_\ell, d_\ell \in \Pi$.

Включення $c_r, d_r \in \Pi$ випливають з (2.6). □

Як показано в [47], для кожної $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ та c_r, d_r, c_ℓ, d_ℓ з (2.6), м. ф.

$$K_r = K_r^W := (-w_{11}d_\ell + w_{12}c_\ell)(-w_{21}d_\ell + w_{22}c_\ell)^{-1}, \tag{2.7}$$

належить до $H_\infty^{p\times q}$ та допускає представлення

$$K_r = (-w_{11}d_\ell + w_{12}c_\ell)a_2 b_2 = b_1 a_1 (c_r w_{21}^\# - d_r w_{22}^\#), \tag{2.8}$$

де $\{b_1, b_2\} \in \mathrm{ap}^r(W)$. Зрозуміло, що $K_r^\# \in H_\infty^{q\times p}(\Omega_-)$.

Надалі нам знадобляться наступні факторизації для м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, які було отримано в [47].

Теорема 2.2. *[47] Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$ *та* b_ℓ, s_ℓ, b_r, s_r *визначаються факторизацією Крейна-Лангера* (2.5). *Тоді* W *допускає факторизацію*

$$W = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{-*} & 0 \\ 0 & a_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r^* & -s_r^* \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix} \text{ м. в. на } \Omega_0. \tag{2.9}$$

Теорема 2.3. *[47] Нехай $W \in \mathcal{U}^r_\kappa(j_{pq})$, $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$, b_ℓ, s_ℓ, b_r, s_r визначаються факторизацією Крейна-Лангера (2.5), c_r, d_r, c_ℓ і d_ℓ як у Теоремі 1.27 та K_r визначена за формулою (2.7). Тоді W допускає факторизації*

$$W = \Theta\,\Phi \quad \text{в } \Omega_+ \quad \text{та} \quad W = \Theta^-\Phi^- \quad \text{в } \Omega_-, \tag{2.10}$$

де

$$\Theta = \begin{bmatrix} b_1 & K_r b_2^{-1} \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \text{ в } \Omega_+, \quad \Theta^- = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ K_r^\# b_1 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{в } \Omega_-, \tag{2.11}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_r & d_r \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix} \quad \text{в } \Omega_+, \tag{2.12}$$

$$\Phi^- = \begin{bmatrix} \varphi_{11}^- & \varphi_{12}^- \\ \varphi_{21}^- & \varphi_{22}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^{-\#} & 0 \\ 0 & a_2^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r^\# & -s_r^\# \\ d_\ell^\# & c_\ell^\# \end{bmatrix} \quad \text{в } \Omega_-. \tag{2.13}$$

Крім того, $\Phi(\lambda)$ і $\Phi^-(\lambda)$ є оборотними у Ω_+ і Ω_-, відповідно, та

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} &= \begin{bmatrix} b_r & -d_\ell \\ s_r & c_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad \text{в } \Omega_+, \\ (\Phi^-)^{-1} &= \begin{bmatrix} c_r^\# & s_\ell^\# \\ -d_r^\# & b_\ell^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^\# & 0 \\ 0 & a_2^{-\#} \end{bmatrix} \quad \text{в } \Omega_-. \end{aligned} \tag{2.14}$$

З (2.12)–(2.14), випливає, що

$$\Phi \in \mathcal{N}_{out}^{m\times m}(\Omega_+), \quad \Phi^- \in \mathcal{N}_{out}^{m\times m}(\Omega_-) \quad (m = p+q). \tag{2.15}$$

Приклад 2.4. *Говорять, що j_{pq}-внутрішня м. ф. $W(\lambda)$ називається елементарною, якщо вона не має нетривіальної факторизації в класі j_{pq}-внутрішніх м. ф. Всі елементарні j_{pq}-внутрішні м. ф. вичерпуються набором множників Бляшке-Потапова наступних трьох типів (див. [63]):*

(1) $U_\omega^{(1)}(\lambda) = U(I_m + (b_\omega(\lambda) - 1)P), \quad \omega \in \Omega_+,\ P = P^2$ *і* $Pj_{pq} \geq 0$;

(2) $U_\omega^{(2)}(\lambda) = U(I_m + (b_\omega(\lambda) - 1)P), \quad \omega \in \Omega_-,\ P = P^2$ *і* $Pj_{pq} \leq 0$;

(3) $U_\omega^{(3)}(\lambda) = U(I_m - c_\omega(\lambda)E), \quad \omega \in \Omega_0,\ E^2 = 0$ *і* $Ej_{pq} \geq 0$.

Тут U — постійна j_{pq}-внутрішня матриця, $b_\omega(\lambda)$ це елементарні множники

Бляшке вигляду

$$b_\omega(\lambda) = \begin{cases} (\lambda-\omega)/(1-\lambda\overline{\omega}), & \text{якщо } \Omega_+ = \mathbb{D}; \\ (\lambda-\omega)/(\lambda-\overline{\omega}), & \text{якщо } \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases} \tag{2.16}$$

та

$$c_\omega(\lambda) = \begin{cases} (\omega+\lambda)/(\omega-\lambda), & \text{якщо } \Omega_+ = \mathbb{D},\ \omega\in\Omega_0; \\ 1/(\pi i(\omega-\lambda)), & \text{якщо } \Omega_+ = \mathbb{C}_+,\ \omega\in\Omega_0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Якщо $\Omega_+ = \mathbb{C}_+$, *то існує ще один тип множників Бляшке-Потапова (четвертого типу), що відповідає* $\omega = \infty$,

$$U_\infty^{(4)}(\lambda) = U(I_m + i\lambda E) = U\exp(i\lambda E), \quad E^2 = 0,\ EJ \geq 0.$$

Елементарні множники Бляшке-Потапова $(1), (2)$ *або* (3) *називаються простими, якщо* $\operatorname{rank} P = 1$ *або* $\operatorname{rank} E = 1$, *відповідно. Три попередніх типи простих множників Бляшке-Потапова мають такий вигляд:*
$U_\omega^{(1)}(\lambda) = U(I_m + (b_\omega(\lambda)-1)vv^*j_{pq}),\ \omega\in\Omega_+,\ v\in\mathbb{C}^m$ *і* $v^*j_{pq}v = 1;$
$U_\omega^{(2)}(\lambda) = U(I_m - (b_\omega(\lambda)-1)vv^*j_{pq}),\ \omega\in\Omega_-,\ v\in\mathbb{C}^m$ *і* $v^*j_{pq}v = -1;$
$U_\omega^{(3)}(\lambda) = U(I_m - c_\omega(\lambda)vv^*j_{pq}),\qquad \omega\in\Omega_0,\ v\in\mathbb{C}^m$ *і* $v^*j_{pq}v = 0.$

Приклад 2.5. *Змінюючи знак* $v^*j_{pq}v$ $(v\in\mathbb{C}^m)$ *у перших двох типах елементарних множників Бляшке-Потапова можна отримати узагальнені* j_{pq}*-внутрішні м. ф., які належать до класу* $\mathcal{U}_1(j_{pq})$:

$$V_\omega^{(1)}(\lambda) = U(I_m - (b_\omega(\lambda)-1)vv^*j_{pq}), \quad \omega\in\Omega_+, \quad v^*j_{pq}v = -1; \tag{2.18}$$

$$V_\omega^{(2)}(\lambda) = U(I_m + (b_\omega(\lambda)-1)vv^*j_{pq}), \quad \omega\in\Omega_-, \quad v^*j_{pq}v = 1. \tag{2.19}$$

Більш того, м. ф. $V_\omega^{(i)}(\lambda)$ $(i = 1, 2)$ *в* (2.18) *та* (2.19) *належить до класу* $\mathcal{U}_1^r(j_{pq})$, *якщо вектор* $v = \operatorname{col}\{v_1, v_2\}$ *задовольняє умові* $v_2v_1^* \neq 0$.

2.2 Клас $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$

Введемо підклас лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.:

Означення 2.6. *Говорять, що м. ф.* $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ *розміру* $m\times m$ *належить* *до класу лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, якщо*

$$s_{12} := w_{12}w_{22}^{-1} \in \ \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}. \tag{2.20}$$

Класи $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ та $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ не співпадають. Проілюструємо це за допомогою прикладу:

Приклад 2.7. *Нехай $\Omega_+ = \mathbb{D}$,*

$$W = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\lambda \\ -1 & \sqrt{2}\lambda \end{bmatrix}.$$

Тоді ядро $\mathsf{K}_\omega^W(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$ має один від'ємний квадрат, отже $W \in \mathcal{U}_1(j_{11})$.

Знайдемо перетворення Потапова-Гінзбурга м. ф. $W(\lambda)$

$$S(\lambda) = PG(W(\lambda)) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & \sqrt{2}\lambda \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{\lambda} & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Звідси знаходимо $s_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}$, $s_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким чином, $s_{21} \in \mathcal{S}_1$ та $s_{12} \in \mathcal{S}$, отже $W \in \mathcal{U}_1^r(j_{11})$, але $W \notin \mathcal{U}_1^\ell(j_{11})$.

Для того, щоб показати зв'язок між лівими та правими узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф., введемо наступне позначення:

$$\widetilde{W}(\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{w}_{11} & \widetilde{w}_{21} \\ \widetilde{w}_{12} & \widetilde{w}_{22} \end{bmatrix} = \begin{cases} W(\overline{\lambda})^*, & \text{якщо} \quad \Omega_+ = \mathbb{D}; \\ W(-\overline{\lambda})^*, & \text{якщо} \quad \Omega_+ = \mathbb{C}_+. \end{cases} \tag{2.21}$$

Пропозиція 2.8. *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$. Тоді:*

$$W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \Longleftrightarrow \widetilde{W} \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}). \tag{2.22}$$

Більш того, якщо $S(\lambda) = [s_{ij}(\lambda)]_{i,j=1}^2$ це перетворення Потапова-Гінзбурга м. ф. $W(\lambda)$, то перетворення Потапова-Гінзбурга $\widehat{S}(\lambda) = PG(\widetilde{W}(\lambda))$ м. ф. $\widetilde{W}(\lambda)$ має вигляд

$$\widehat{S}(\lambda) = \begin{bmatrix} \widetilde{s}_{11}(\lambda) & -\widetilde{s}_{21}(\lambda) \\ -\widetilde{s}_{12}(\lambda) & \widetilde{s}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Доведення. Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Розглянемо перетворення Потапова-Гінзбурга від $\widetilde{W}$

$$\widehat{S}(\lambda) = PG(\widetilde{W}(\lambda)) = \begin{bmatrix} \widehat{s}_{11}(\lambda) & \widehat{s}_{12}(\lambda) \\ \widehat{s}_{21}(\lambda) & \widehat{s}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\widehat{s}_{21}(\lambda) = -\widetilde{w}_{22}(\lambda)^{-1}\widetilde{w}_{12}(\lambda) = -(w_{12}w_{22}^{-1})^{\sim} = -\widetilde{s}_{12}(\lambda) \in \mathcal{S}_\kappa. \tag{2.24}$$

Отже $\widetilde{W} \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$.

Тепер розглянемо наступні елементи м. ф. $\widehat{S}$:

$$\widehat{s}_{22}(\lambda) = \widetilde{w}_{22}(\lambda)^{-1} = \widetilde{s}_{22}(\lambda), \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \widehat{s}_{11}(\lambda) &= \widetilde{w}_{11}(\lambda) - \widetilde{w}_{21}(\lambda)\widetilde{w}_{22}(\lambda)^{-1}\widetilde{w}_{12}(\lambda) = \\ &= \widetilde{w}_{11}(\lambda) - (w_{12}(\lambda)w_{22}(\lambda)^{-1}w_{21}(\lambda))^{\sim} = \widetilde{s}_{11}(\lambda). \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\widehat{s}_{12}(\lambda) = \widetilde{w}_{21}(\lambda)\widetilde{w}_{22}^{-1}(\lambda) = -(-w_{22}^{-1}w_{21})^{\sim} = -\widetilde{s}_{21}(\lambda). \tag{2.27}$$

З формул (2.24) та (2.27) випливає (2.22). □

Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$. Позначимо через T_W^ℓ ліве дробово-лінійне перетворення, яке відповідає м. ф. W:

$$T_W^\ell[\varepsilon] := (\varepsilon(\lambda)w_{12}(\lambda) + w_{22}(\lambda))^{-1}(\varepsilon(\lambda)w_{11}(\lambda) + w_{21}(\lambda)). \tag{2.28}$$

Тоді ліве та праве перетворення $T_W^\ell[\varepsilon]$ і $T_W^r[\varepsilon]$ (див. (1.46)) пов'язані формулою

$$T_W^\ell[\varepsilon] = (T_{\widetilde{W}}^r[\widetilde{\varepsilon}])^{\sim}. \tag{2.29}$$

Наступне твердження випливає з (2.29) та Леми 1.31.

Лема 2.9. *Нехай* $\mathrm{W} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}(j_{pq})$, $\varepsilon \in \mathcal{S}_{\kappa_2}^{p\times q}$. *Тоді* $T_W^\ell[\varepsilon] \in \mathcal{S}_{\kappa'}^{p\times q}$ *з* $\kappa' \le \kappa_2 + \kappa_1$.

Наслідок 2.10. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *і м. ф.* s_{12} *має факторизацію Крейна-Лангера:*

$$s_{12}(\lambda) = \mathfrak{b}_\ell(\lambda)^{-1}\mathfrak{s}_\ell(\lambda) = \mathfrak{s}_r(\lambda)\mathfrak{b}_r(\lambda)^{-1}, \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{12}}^+). \tag{2.30}$$

де $\mathfrak{b}_\ell \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $\mathfrak{b}_r \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $\mathfrak{s}_\ell, \mathfrak{s}_r \in \mathcal{S}^{p\times q}$. *Тоді*

(1) *ліва факторизація Крейна-Лангера м. ф.* $\widehat{s}_{21}$ *має вигляд*

$$\widehat{s}_{21}(\lambda) = -\widetilde{s}_{12}(\lambda) = \widetilde{\mathfrak{b}}_r(\lambda)^{-1}(-\widetilde{\mathfrak{s}}_r(\lambda)), \tag{2.31}$$

де $\widehat{s}_\ell(\lambda) = -\widetilde{\mathfrak{s}}_r(\lambda)$, $\widehat{b}_\ell(\lambda) = \widetilde{\mathfrak{b}}_r(\lambda)$.

(2) *права факторизація Крейна-Лангера м. ф.* $\widehat{s}_{21}$ *має вигляд*

$$\widehat{s}_{21}(\lambda) = -\widetilde{s}_{12}(\lambda) = (-\widetilde{\mathfrak{s}}_\ell(\lambda))\widetilde{\mathfrak{b}}_\ell(\lambda)^{-1}, \tag{2.32}$$

де $\widehat{s}_r(\lambda) = -\widetilde{\mathfrak{s}}_\ell(\lambda)$, $\widehat{b}_r(\lambda) = \widetilde{\mathfrak{b}}_\ell(\lambda)$.

(3) *тотожність* (2.6) *для м. ф.* $\widehat{s}_{21}$ *набуває вигляд*

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{c}}_\ell & \widetilde{\mathfrak{d}}_\ell \\ \widetilde{\mathfrak{s}}_r & \widetilde{\mathfrak{b}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{b}}_\ell & -\widetilde{\mathfrak{d}}_r \\ -\widetilde{\mathfrak{s}}_\ell & \widetilde{\mathfrak{c}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}, \tag{2.33}$$

де

$$\widehat{c}_\ell = c_\ell(\widehat{s}_{21}) = \widetilde{\mathfrak{c}}_r, \quad \widehat{d}_\ell = d_\ell(\widehat{s}_{21}) = \widetilde{\mathfrak{d}}_r,$$

$$\widehat{c}_r = c_r(\widehat{s}_{21}) = \widetilde{\mathfrak{c}}_\ell, \quad \widehat{d}_r = d_r(\widehat{s}_{21}) = \widetilde{\mathfrak{d}}_\ell,$$

(4) *існують м. ф.* $\mathfrak{c}_\ell \in H_\infty^{p\times p}$, $\mathfrak{d}_\ell \in H_\infty^{q\times p}$, $\mathfrak{c}_r \in H_\infty^{q\times q}$, $\mathfrak{d}_r \in H_\infty^{q\times p}$ *такі, що*

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{c}_\ell & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{d}_\ell & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell & -\mathfrak{s}_\ell \\ -\mathfrak{d}_r & \mathfrak{c}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Доведення. Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, то за Пропозицією 2.8 $\widetilde{W} \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$. Нехай $\widehat{S}(\lambda) = PG(\widetilde{W})$. З формули (2.24) і факторизації Крейна-Лангера (2.30) випливає, що

$$\begin{aligned}\widehat{s}_{21}(\lambda) = -\widetilde{s}_{12}(\lambda) &= -(\mathfrak{b}_\ell(\lambda)^{-1}\mathfrak{s}_\ell(\lambda))^\sim = -\widetilde{\mathfrak{s}}_\ell(\lambda)\widetilde{\mathfrak{b}}_\ell(\lambda)^{-1} \\ &= -(\mathfrak{s}_r(\lambda)\mathfrak{b}_r(\lambda)^{-1})^\sim = -\widetilde{\mathfrak{b}}_\ell(\lambda)^{-1}\widetilde{\mathfrak{s}}_\ell(\lambda).\end{aligned}$$

Тоді м. ф. $\widehat{s}_{21}$ допускає факторизацію

$$\widehat{s}_{21} = \widehat{b}_\ell(\lambda)^{-1}\widehat{s}_\ell(\lambda) = \widehat{s}_r(\lambda)\widehat{b}_r(\lambda)^{-1},$$

де

$$\widehat{s}_\ell(\lambda) = -\widetilde{s}_r(\lambda), \quad \widehat{b}_\ell(\lambda) = \widetilde{b}_r(\lambda),$$
$$\widehat{s}_r(\lambda) = -\widetilde{s}_\ell(\lambda), \quad \widehat{b}_r(\lambda) = \widetilde{b}_\ell(\lambda).$$

І формула (2.6) перепишеться у вигляді

$$\begin{bmatrix} \widehat{c}_r & \widehat{d}_r \\ -\widehat{s}_\ell & \widehat{b}_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{b}_r & -\widehat{d}_\ell \\ \widehat{s}_r & \widehat{c}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \tag{2.35}$$

Тоді

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{c}}_\ell & \widetilde{\mathfrak{d}}_\ell \\ \widetilde{\mathfrak{s}}_r & \widetilde{\mathfrak{b}}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{b}}_\ell & -\widetilde{\mathfrak{d}}_r \\ -\widetilde{\mathfrak{s}}_\ell & \widetilde{\mathfrak{c}}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

Отже

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell & -\mathfrak{s}_\ell \\ -\mathfrak{d}_r & \mathfrak{c}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_\ell & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{d}_\ell & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}, \tag{2.37}$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{c}_\ell & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{d}_\ell & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell & -\mathfrak{s}_\ell \\ -\mathfrak{d}_r & \mathfrak{c}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}. \tag{2.38}$$

□

Теорема 2.11. *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ та нехай $\mathfrak{b}_r$, $\mathfrak{b}_\ell$ множники Бляшке-Потапова, що визначені факторизацією Крейна-Лангера* (2.30) *м. ф. s_{12}. Тоді*

$$s_{22}\mathfrak{b}_r \in \mathcal{S}^{q\times q} \quad \text{та} \quad \mathfrak{b}_\ell s_{11} \in \mathcal{S}^{p\times p}. \tag{2.39}$$

Доведення. Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, то за Пропозицією 2.8 $\widetilde{W} \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$. Отже з формул (1.44), (2.25) та (2.26) випливає:

$$\widetilde{\mathfrak{b}}_r\widetilde{s}_{22} = (s_{22}\mathfrak{b}_r)^\sim \in \mathcal{S}^{q\times q}, \quad \widetilde{s}_{11}\widetilde{\mathfrak{b}}_\ell = (\mathfrak{b}_\ell s_{11})^\sim \in \mathcal{S}^{p\times p}.$$

Отже $s_{22}\mathfrak{b}_r \in \mathcal{S}^{q\times q}$, та $\mathfrak{b}_\ell s_{11} \in \mathcal{S}^{p\times p}$. □

Означення 2.12. *Розглянемо зовнішньо-внутрішню факторизацію м. ф. $\mathfrak{b}_\ell s_{11}$ та внутрішньо-зовнішню факторизацію м. ф. $s_{22}\mathfrak{b}_r$*

$$\mathfrak{b}_\ell s_{11} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \qquad s_{22}\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2, \tag{2.40}$$

де $\mathfrak{b}_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $\mathfrak{b}_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $\mathfrak{a}_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}$, $\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}$. *Пару* $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2$ *внутрішніх множників в факторизаціях* (2.40) *будемо називати лівою асоційованою парою м. ф.* $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *та для стислості будемо писати* $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$.

Лема 2.13. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, *то* $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$ *тоді і тільки тоді, коли* $\{\widetilde{\mathfrak{b}}_1, \widetilde{\mathfrak{b}}_2\} \in ap^r(\widetilde{W})$.

Доведення. З формули (2.40) отримуємо

$$\widetilde{s}_{11}\widetilde{\mathfrak{b}}_\ell = \widetilde{\mathfrak{b}}_1\widetilde{\mathfrak{a}}_1, \quad \widetilde{\mathfrak{b}}_r\widetilde{s}_{22} = \widetilde{\mathfrak{a}}_2\widetilde{\mathfrak{b}}_2 \tag{2.41}$$

і, таким чином, за Означенням 1.30 маємо $\{\widetilde{\mathfrak{b}}_1, \widetilde{\mathfrak{b}}_2\} \in \mathrm{ap}^r(\widetilde{W})$. □

Теорема 2.14. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$, $\mathfrak{c}_\ell$, $\mathfrak{d}_\ell$, $\mathfrak{c}_r$, $\mathfrak{d}_r$ *визначені рівністю* (2.34) *та нехай* K_ℓ *визначена рівністю*

$$K_\ell = \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r w_{11} + \mathfrak{c}_r w_{21}) = (w_{12}^\#\mathfrak{c}_\ell - w_{22}^\#\mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1. \tag{2.42}$$

Тоді W *допускає факторизацію*

$$W = \Phi_1\Theta_1 \text{ в } \Omega_+ \quad \text{та} \quad W = \Phi_1^-\Theta_1^- \text{ в } \Omega_-, \tag{2.43}$$

де

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1 & 0 \\ \mathfrak{b}_2^{-1}K_\ell & \mathfrak{b}_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad \Theta_1^- = \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_1 K_\ell^\# \\ 0 & \mathfrak{b}_2^{-1} \end{bmatrix}, \tag{2.44}$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_\ell & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{d}_\ell & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad \Phi_1^- = \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell^\# & \mathfrak{d}_r^\# \\ \mathfrak{s}_\ell^\# & \mathfrak{c}_r^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_1^{-\#} & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_2^\# \end{bmatrix}. \tag{2.45}$$

Доведення. Оскільки $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, то за Пропозицією 2.8 і Лемою 2.13 випливає, що $\widetilde{W} \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ і $\{\widetilde{\mathfrak{b}}_1, \widetilde{\mathfrak{b}}_2\} \in \mathrm{ap}^r(\widetilde{W})$. Тоді з Наслідка 2.10 випливає, що м. ф.

$$\widetilde{K}_\ell := K_r^{\widetilde{W}} = (-\widetilde{w}_{11}\widetilde{\mathfrak{d}}_r + \widetilde{w}_{21}\widetilde{\mathfrak{c}}_r)(-\widetilde{w}_{12}\widetilde{\mathfrak{d}}_r + \widetilde{w}_{22}\widetilde{\mathfrak{c}}_r)^{-1}$$

належить до класу $H_\infty^{p\times q}$ і з огляду на (2.8) вона допускає представлення

$$\widetilde{K}_\ell = (-\widetilde{w}_{11}\widetilde{\mathfrak{d}}_r + \widetilde{w}_{21}\widetilde{\mathfrak{c}}_r)\widetilde{\mathfrak{a}}_2\widetilde{\mathfrak{b}}_2 = \widetilde{\mathfrak{b}}_1\widetilde{\mathfrak{a}}_1(\widetilde{\mathfrak{c}}_\ell\widetilde{w}_{12}^\# - \widetilde{\mathfrak{d}}_\ell\widetilde{w}_{22}^\#).$$

Отже м. ф. $K_\ell = (K_r^{\widetilde{W}})^\sim$ можна переписати наступним чином:

$$K_\ell = \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r w_{11} + \mathfrak{c}_r w_{21}) = (w_{12}^\# \mathfrak{c}_\ell - w_{22}^\# \mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \in H_\infty^{q\times p}. \tag{2.46}$$

За Теоремою 2.3 і Наслідком 2.10, $\widetilde{W}$ допускає факторизацію

$$\widetilde{W} = \widetilde{\Theta}_1\widetilde{\Phi}_1 \quad \text{в} \quad \Omega_+, \tag{2.47}$$

де

$$\widetilde{\Theta}_1 = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{b}}_1 & \widetilde{K}_\ell\widetilde{\mathfrak{b}}_2^{-1} \\ 0 & \widetilde{\mathfrak{b}}_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{a}}_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathfrak{a}}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{c}}_\ell & \widetilde{\mathfrak{d}}_\ell \\ \widetilde{\mathfrak{s}}_r & \widetilde{\mathfrak{b}}_r \end{bmatrix}. \tag{2.48}$$

Тоді

$$W = \Phi_1\Theta_1 = \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_\ell & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{d}_\ell & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1 & 0 \\ \mathfrak{b}_2^{-1}K_\ell & \mathfrak{b}_2^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.49}$$

Аналогічно, друга тотожність в (2.10) має вигляд

$$\widetilde{W} = \widetilde{\Theta}_1^-\widetilde{\Phi}_1^-,$$

де

$$\widetilde{\Theta}_1^- = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{b}}_1 & 0 \\ \widetilde{K}_\ell^\#\widetilde{\mathfrak{b}}_1 & \widetilde{\mathfrak{b}}_2^{-1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Phi}_1^- = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{a}}_1^{-\#} & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathfrak{a}}_2^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{b}}_\ell^\# & \widetilde{\mathfrak{s}}_\ell^\# \\ \widetilde{\mathfrak{d}}_r^\# & \widetilde{\mathfrak{c}}_r^\# \end{bmatrix}.$$

Отже

$$W = \Phi_1^-\Theta_1^- = \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell^\# & \mathfrak{d}_r^\# \\ \mathfrak{s}_\ell^\# & \mathfrak{c}_r^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_1^{-\#} & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_2^\# \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{b}_1 K_\ell^\# \\ 0 & \mathfrak{b}_2^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.50}$$

□

Далі отримуємо аналог Теореми 2.2.

Теорема 2.15. *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, та нехай $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$. Тоді W можна виразити у термінах лівої асоційованої пари наступним чином*

$$W = \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell^* & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{s}_\ell^* & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_1^{-*} & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{b}_2^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{м. в. в } \Omega_0. \tag{2.51}$$

Доведення. Оскільки $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, то за Пропозицією 2.8 $\widetilde{W} \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$. Тоді з Теореми 2.2 і Наслідка 2.10 випливає, що

$$\widetilde{W} = \begin{bmatrix} \widetilde{w}_{11} & \widetilde{w}_{21} \\ \widetilde{w}_{12} & \widetilde{w}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{b}}_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathfrak{b}}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{a}}_1^{-*} & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathfrak{a}}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{b}}_\ell^* & \widetilde{\mathfrak{s}}_\ell^* \\ \widetilde{\mathfrak{s}}_r & \widetilde{\mathfrak{b}}_r \end{bmatrix}.$$

Переходячи до W отримуємо

$$W = \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell^* & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{s}_\ell^* & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_1^{-*} & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{b}_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

□

2.3 Клас $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$

Нехай раціональна м. ф. $G(\lambda)$ порядку $p \times q$ є мероморфною в Ω_+, $\operatorname{rank} G = n$. Тоді, як показано у роботі [69] (див. с. 56), існують унімодулярні м. ф. M_1, M_2 розміру $p \times p$ і $q \times q$ відповідно, такі, що:

$$M_1 G M_2 = \begin{bmatrix} G' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де $G'(\lambda) = diag(g_1(\lambda), .., g_n(\lambda))$, $g_i \neq 0$.

Ступінь Сміта-Макміллана визначається наступним чином (див. [38], с. 90)

$$\delta(G) = \Sigma_{i=1}^n deg(g_i).$$

Нехай м. ф. $G(\lambda)$ порядку $p \times q$ є мероморфною в Ω_+ з розкладом Лорана

$$G(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{-k} G_{-k} + \cdots + (\lambda - \lambda_0)^{-1} G_{-1} + G_0 + o(\lambda - \lambda_0) \tag{2.52}$$

в околі полюса $\lambda_0 \in \Omega_+$, $G_{-j} \in \mathbb{C}^{p \times q}$ $(j = 0, 1, .., k)$.

Полюсна кратність $M_\pi(G, \lambda_0)$ визначається як (див. [64])

$$M_\pi(G, \lambda_0) = \operatorname{rank} L(G, \lambda_0), \quad L(G, \lambda_0) = \begin{bmatrix} G_{-k} & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \\ G_{-1} & \dots & G_{-k} \end{bmatrix}. \tag{2.53}$$

Полюсна кратність G на Ω_+ визначимо наступним чином

$$M_\pi(G,\Omega_+) = \sum_{\lambda\in\Omega_+} M_\pi(G,\lambda). \tag{2.54}$$

Це означення полюсної кратності у раціональному випадку збігається з означенням на основі представлення Сміта-Макміллана для G (див. [38]).

Пропозиція 2.16. *[47] Нехай $H_\ell, H_r \in H_\infty^{p\times q}$ та $G_\ell \in H_\infty^{p\times p}$ і $G_r \in H_\infty^{q\times q}$ пари м. ф. для яких $G_\ell^{-1} \in H_{\kappa,\infty}^{p\times p}$ та $G_r^{-1} \in H_{\kappa,\infty}^{q\times q}$ для деякого $\kappa \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Тоді:*

(i) Пара G_ℓ, H_ℓ є лівою взаємно-простою на Ω_+ $\iff$ $M_\pi(G_\ell^{-1}H_\ell,\Omega_+) = M_\pi(G_\ell^{-1},\Omega_+)$.

(ii) Пара G_r, H_r є правою взаємно-простою на Ω_+ $\iff$ $M_\pi(H_rG_r^{-1},\Omega_+) = M_\pi(G_r^{-1},\Omega_+)$.

Наступна лема була вперше доведена у [50] і відіграє вирішальну роль у подальшому при обчислені полюсних кратностей

Лема 2.17. *Нехай $G \in H_{\kappa,\infty}^{p\times q}$, $H_1 \in H_\infty^{p\times p}$ і $H_2 \in H_\infty^{q\times q}$. Тоді*

$$M_\pi(H_1G,\Omega_+) = M_\pi(G,\Omega_+) \Longrightarrow M_\pi(H_1GH_2,\Omega_+) = M_\pi(GH_2,\Omega_+)$$

і

$$M_\pi(GH_2,\Omega_+) = M_\pi(G,\Omega_+) \Longrightarrow M_\pi(H_1GH_2,\Omega_+) = M_\pi(H_1G,\Omega_+).$$

Лема 2.18. *[47] Якщо $S = [s_{ij}]_1^2 \in \mathcal{S}_\kappa^{m\times m}$ і $s_{21} \in S_\kappa^{q\times p}$ і, якщо $\begin{bmatrix}0 & I_q\end{bmatrix} Sh \in H_2^q$ для деякого $h \in H_2^m$, то $Sh \in H_2^m$.*

Теорема 2.19. *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})\cap\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ та $S(\lambda)$ – перетворення Потапова-Гінзбурга. Нехай $\{b_1,b_2\}$ і $\{\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2\}$ її права та ліва асоційовані пари, що визначені формулами (1.45) та (2.40), відповідно, множники Бляшке-Патапова b_ℓ, b_r, $\mathfrak{b}_\ell$, $\mathfrak{b}_r$ визначені факторизаціями Крейна-Лангера (2.5) та (2.30). Тоді:*

(i) факторизація $s_{22} = b_\ell^{-1}(a_2b_2)$ є лівою взаємно-простою на Ω_+;

(ii) факторизація $s_{22} = (\mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2)\mathfrak{b}_r^{-1}$ є правою взаємно-простою на Ω_+;

(iii) факторизація $s_{11} = \mathfrak{b}_\ell^{-1}(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1)$ є лівою взаємно-простою на Ω_+;

(iv) факторизація $s_{11} = (b_1 a_1) b_r^{-1}$ *є правою взаємно-простою на* Ω_+*;*

Доведення. (i) Позначимо через κ' полюсну кратність s_{22} на Ω_+

$$\kappa' := M_\pi(s_{22}, \Omega_+)(\leq \kappa), \tag{2.55}$$

через θ позначимо множник Бляшке-Потапова степеня κ', такий що $s_{22}\theta \in S^{q\times q}$. Тоді $s_{22}\theta u \in H_2^q$ для кожного $u \in \mathbb{C}^q$. За Лемою 2.18

$$\begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{bmatrix} \theta u \in H_2^m, \quad \text{для усіх} \quad u \in \mathbb{C}^q \tag{2.56}$$

і отже

$$M_\pi(s_{12}, \Omega_+) \leq M_\pi(\begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{bmatrix}, \Omega_+) = \kappa' \leq \kappa. \tag{2.57}$$

З іншого боку $M_\pi(s_{12}, \Omega_+) = \kappa$, якщо $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Це доводить рівність

$$M_\pi(s_{22}, \Omega_+) = \kappa = M_\pi(b_\ell^{-1}, \Omega_+). \tag{2.58}$$

За Пропозицією 2.16 це означає, що факторизація $s_{22} = b_\ell^{-1}(b_\ell s_{22})$ є лівою взаємно-простою, так, що по (1.38) факторизація $s_{22} = b_\ell^{-1}(a_2 b_2)$ є також лівою взаємно-простою.

(ii) Нехай м. ф. $\widetilde{W}(\lambda)$ задана формулою (2.21) та нехай $\widehat{S}$ це перетворення Потапова-Гінзбурга від $\widetilde{W}(\lambda)$. Тоді за Пропозицією 2.8 $\widehat{S}(\lambda)$ приймає вигляд (2.23) та, отже, $\widetilde{W} \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$.

За формулою (2.55), отримуємо, що $\kappa' = M_\pi(\widetilde{s}_{22}, \Omega_+)(\leq \kappa)$. Припустимо, що θ' – це множник Бляшке-Потапова степеня κ' такий, що $\widetilde{s}_{22}\theta' \in S^{q\times q}$. Тоді $\widetilde{s}_{22}\theta' u \in H_2^q$ для кожного $u \in \mathbb{C}^q$. За Лемою 2.18

$$\begin{bmatrix} -\widetilde{s}_{21} \\ \widetilde{s}_{22} \end{bmatrix} \theta' u \in H_2^m, \quad \text{для усіх} \quad u \in \mathbb{C}^q \tag{2.59}$$

і отже

$$M_\pi(-\widetilde{s}_{21}, \Omega_+) \leq M_\pi(\begin{bmatrix} -\widetilde{s}_{21} \\ \widetilde{s}_{22} \end{bmatrix}, \Omega_+) = \kappa' \leq \kappa. \tag{2.60}$$

З іншого боку $M_\pi(-\widetilde{s}_{21}, \Omega_+) = \kappa$, якщо $\widetilde{W} \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Це доводить рівність

$$M_\pi(\widetilde{s}_{22}, \Omega_+) = \kappa = M_\pi(\widetilde{\mathfrak{b}}_r^{-1}, \Omega_+). \tag{2.61}$$

За Пропозицією 2.16 це означає, що факторизація $\widetilde{s}_{22} = \widetilde{\mathfrak{b}}_r^{-1}(\widetilde{\mathfrak{b}}_r \widetilde{s}_{22})$ є лівою взаємно-простою, так, що по (2.30) факторизація $\widetilde{s}_{22} = \widetilde{\mathfrak{b}}_r^{-1}(\widetilde{\mathfrak{a}}_2 \widetilde{\mathfrak{b}}_2)$ є також лівою взаємно-простою. Це доводить справедливість (ii).

(iii) & (iv) Розглянемо м. ф.

$$U(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & I_q \\ I_p & 0 \end{bmatrix} W^{\#}(\lambda) \begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_q & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{22}^{\#}(\lambda) & w_{12}^{\#}(\lambda) \\ w_{21}^{\#}(\lambda) & w_{11}^{\#}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Перетворення Потапова-Гінзбурга $S' = PG(U) = \begin{bmatrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{bmatrix}$ цієї м. ф. приймає вигляд

$$\begin{aligned} S'(\lambda) = PG(U(\lambda)) &= \begin{bmatrix} w_{22}^{\#}(\lambda) & w_{12}^{\#}(\lambda) \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ w_{21}^{\#}(\lambda) & w_{11}^{\#}(\lambda) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} w_{22}^{\#}(\lambda) - w_{12}^{\#}(\lambda) w_{11}^{\#}(\lambda)^{-1} w_{21}^{\#}(\lambda) & w_{12}^{\#}(\lambda) w_{11}^{\#}(\lambda)^{-1} \\ -w_{11}^{\#}(\lambda)^{-1} w_{21}^{\#}(\lambda) & w_{11}^{\#}(\lambda)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_{22}(\lambda) & -s_{21}(\lambda) \\ -s_{12}(\lambda) & s_{11}(\lambda) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тому, $U \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$. Застосовуючи твердження (i) та (ii) до м. ф. U отримаємо, що факторизації

$$s_{11} = \mathfrak{b}_\ell^{-1}(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1) \quad \text{і} \quad s_{11} = (b_1 a_1) b_r^{-1} \tag{2.62}$$

є лівою взаємно-простою та правою взаємно-простою, відповідно, на Ω_+. $\square$

Наведемо приклад м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ такої, що ліва та права асоційовані пари не співпадають.

Приклад 2.20. *Нехай м. ф.* $W(\lambda)$ *розміру* 4×4 *задана наступним чином*

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{4-\lambda}{3\lambda} & 0 & \frac{2\lambda-2}{3\lambda} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda-2}{3\lambda} & 0 & \frac{4\lambda-1}{3\lambda} & 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді перетворення Потапова-Гінзбурга $S(\lambda) = PG(W(\lambda))$ *від* $W(\lambda)$ *приймає вигляд*

$$S(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{4-\lambda}{3\lambda} & 0 & \frac{2\lambda-2}{3\lambda} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda-2}{3\lambda} & 0 & \frac{4\lambda-1}{3\lambda} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4\lambda-1} & 0 & \frac{2\lambda-2}{4\lambda-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\lambda-2}{4\lambda-1} & 0 & \frac{3\lambda}{4\lambda-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

М. ф. $s_{21}(\lambda)$ *допускає наступну факторизацію Крейна-Лангера*

$$s_{21}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2\lambda-2}{3\lambda} & 0 \end{bmatrix} = b_\ell^{-1} s_\ell = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4\lambda-1}{4-\lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2\lambda-2}{4-\lambda} & 0 \end{bmatrix},$$

з множником Бляшке-Потапова b_ℓ *степеня* 1 *і тому* $s_{21} \in \mathcal{S}_1^{2\times 2}$.

Таким чином, враховуючи зовнішньо-внутрішню факторизацію $b_\ell s_{22}$

$$b_\ell s_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4\lambda-1}{4-\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3\lambda}{4\lambda-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3\lambda}{4-\lambda} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4-\lambda} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a_2 b_2,$$

отримуємо $b_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

З іншого боку, м. ф. $s_{12}(\lambda)$ *допускає факторизацію Крейна-Лангера*

$$s_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{2\lambda-2}{4\lambda-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{s}_r \mathfrak{b}_r^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2\lambda-2}{4-\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4\lambda-1}{4-\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

і друга формула в (2.40) *приймає вигляд*

$$s_{22}\mathfrak{b}_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3\lambda}{4\lambda-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4\lambda-4}{4-\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3\lambda}{4-\lambda} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4-\lambda} & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{b}_2 \mathfrak{a}_2.$$

Тоді $\mathfrak{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ *і, таким чином, не співпадає з* b_2.

Аналогічно, отримуємо $b_1 = \mathfrak{b}_1 = I_2$.

2.4 Клас сингулярних узагальнених J-внутрішніх матриць-функцій

2.4.1 Визначення сингулярної узагальненої J-внутрішньої матриці-функції

Означення 2.21. *Будемо говорити, що м. ф.* $U \in \mathcal{U}_\kappa(J)$ *є сингулярною, якщо* $U, U^{-1} \in \mathcal{N}_+^{m\times m}$. *Клас узагальнених сингулярних* J*-внутрішніх м. ф. будемо позначати* $\mathcal{U}_\kappa^S(J)$.

У випадку $\kappa = 0$ це означення було введено Д. З. Аровим в [30].

Найпростіший приклад сингулярних j_{pq}-внутрішніх м. ф. є множник Бляшке-Потапова третього типу, що має вигляд

$$U_\omega^{(3)}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_p - c_\omega(\lambda)I_p & c_\omega(\lambda)I_q \\ -c_\omega(\lambda)I_p & I_q + c_\omega(\lambda)I_q \end{bmatrix}$$

де $c_\omega(\lambda)$ визначається формулою (2.17), або множник Бляшке-Потапова четвертого типу, що має вигляд

$$U_\infty^{(4)}(\lambda) = \begin{bmatrix} I_p - i\lambda I_p & i\lambda I_q \\ -i\lambda I_p & I_q + i\lambda I_q \end{bmatrix}.$$

(див. [32]).

Нижче ми наведемо приклад сингулярної узагальненої J-внутрішньої м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^{2\times 2}(j_{pq})$ у випадку $\kappa = 1$.

Приклад 2.22. *Нехай* $W(\lambda) = U(I_m - c_\omega(\lambda)vv^* j_{pq})$,

де

$$\Omega_+ = \mathbb{D}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \omega = 1.$$

Тоді матриця $E = vv^* j_{pq}$ *задовольняє умові* $E^2 = 0$, *тобто* $W(\lambda)$ *є аналогом множника Бляшке-Потапова 3-го типу (див. Приклад 2.4) але замість умови*

$EJ \geq 0$ *виконується умова* $EJ \leq 0$.

$$W(\lambda) = \frac{1}{2(1-\lambda)} \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1-\lambda \\ 1+\lambda & 1-3\lambda \end{bmatrix},$$

$$W(\lambda)JW(\mu)^* = \frac{1}{(1-\lambda)(1-\mu^*)} \begin{bmatrix} 2-\lambda-\mu^* & 1-\lambda\mu^* \\ 1-\lambda\mu^* & \lambda+\mu^*-2\lambda\mu^* \end{bmatrix},$$

та

$$K_\mu^W(\lambda) = \frac{1}{(1-\lambda)(1-\mu^*)} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки матриця $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ *має 1 від'ємне власне значення, то ядро* $K_\mu^W(\lambda)$ *має 1 від'ємний квадрат у* $\mathbb{D}$ *та* $J - W(\mu)JW(\mu)^* = 0$ *для м. в.* $\mu \in \mathbb{T}$, *отже* $W \in \mathcal{U}_1^r(J)$. *Далі, оскільки* $\det W(\lambda) \equiv 1$, *то* W *є зовнішньою, і, таким чином,* $W \in \mathcal{U}_1^{r,S}(J)$.

Пропозиція 2.23. *Нехай* $U = U_1U_2$, *де* $U_i \in \mathcal{U}_{\kappa_i}^S(J)$, $i = 1, 2$ *узагальнені сингулярні* J*-внутрішні м. ф. Тоді* $U \in \mathcal{U}_\kappa^S(J)$ *для деякого* $\kappa \in \mathbb{Z}_+$ *такого, що* $\kappa \leq \kappa_1 + \kappa_2$.

Доведення. Нехай U_1, U_2 – узагальнені сингулярні J-внутрішні м. ф. Тоді $U_1, U_1^{-1} \in \mathcal{N}_+^{m\times m}$ та $U_2, U_2^{-1} \in \mathcal{N}_+^{m\times m}$, тому $U = U_1U_2$ належить до класу $\mathcal{N}_+^{m\times m}$. Більш того, $U^{-1} = U_2^{-1}U_1^{-1}$ належить до $\mathcal{N}_+^{m\times m}$. Отже $U \in \mathcal{N}_{out}^{m\times m}$, тобто м. ф. U є сингулярною.

Включення $U \in \mathcal{U}_\kappa(J)$, де $\kappa \leq \kappa_1 + \kappa_2$ це загальний факт, який випливає з тотожності

$$K_\omega^U(\lambda) = K_\omega^{U_1}(\lambda) + U_1(\lambda)K_\omega^{U_2}(\lambda)U_1(\omega)^*$$

і Теореми 4.11 з [24] □

2.4.2 Критерій сингулярності в термінах асоційованих пар

Усюди далі будемо вважати, що $J = j_{pq}$.

Лема 2.24. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *та* $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$. *Тоді* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_+^{m\times m}$ *тоді і тільки тоді, коли* $b_2 \equiv \mathrm{const}$.

Доведення. 1) Без втрати загальності ми можемо припустити, що $b_2 = I_q$. Тоді з (2.10) та (2.11) випливає, що

$$W = \begin{bmatrix} b_1 & K \\ 0 & I \end{bmatrix} \Phi,$$

де $\Phi \in \mathcal{N}_{out}^{m\times m}(\Omega_+) \subset \mathcal{N}_+^{m\times m}$. Отже, $W \in \mathcal{N}_+^{m\times m} \cap \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$.

2) Припустимо тепер, що $W \in \mathcal{N}_+^{m\times m}$. Тоді також $W\Phi^{-1} \in \mathcal{N}_+^{m\times m}$ та за формулою (2.10)

$$W\Phi^{-1} = \Theta = \begin{bmatrix} b_1 & Kb_2^{-1} \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{N}_+^{m\times m} \cap L_\infty.$$

Тому, за принципом максимуму Смірнова (Теорема 1.7)

$$\begin{bmatrix} b_1 & Kb_2^{-1} \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \in H_\infty^{m\times m},$$

і отже $b_2^{-1} \in H_\infty^{m\times m}$. Таким чином $b_2 \equiv \mathrm{const}$. □

Лема 2.25. *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ та $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$. Тоді $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_-^{m\times m}$ тоді і тільки тоді, коли $b_1 \equiv \mathrm{const}$.*

Доведення. 1) Без втрати загальності припустимо, що $b_1 = I_p$. Тоді з формул (2.10), (2.11) та (2.12) випливає, що

$$W = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K^{\#} & b_2^{-1}I \end{bmatrix} \Phi^-,$$

де $\Phi^- \in \mathcal{N}_{out}^{m\times m}(\Omega_-) \subset \mathcal{N}_-^{m\times m}$. Отде $W \in \mathcal{N}_-^{m\times m} \cap \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$.

2) Навпаки, нехай $W \in \mathcal{N}_-^{m\times m}$. Тоді $W(\Phi^-)^{-1} \in \mathcal{N}_-^{m\times m}$ та за формулою (2.10)

$$W(\Phi^-)^{-1} = \Theta^- = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ K^{\#}b_1 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{N}_-^{m\times m} \cap L_\infty.$$

Таким чином, за принципом максимуму Смірнова (Теорема 1.7)

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ K^{\#}b_1 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \in H_\infty^{m\times m}(\Omega_-),$$

і отже $b_1 \in H_\infty^{m\times m}(\Omega_-)$. Це доводить, що $b_1 \equiv \mathrm{const}$. □

Теорема 2.26. *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ та $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$. Тоді W є сингулярною тоді і тільки тоді, коли $b_1 \equiv \mathrm{const}$ та $b_2 \equiv \mathrm{const}$.*

Доведення. Якщо $b_2 \equiv \mathrm{const}$, то за Лемою 2.24

$$W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_+^{m\times m}. \tag{2.63}$$

Якщо $b_1 \equiv \mathrm{const}$, то за Лемою 2.25 $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_-^{m\times m}$. З тотожності

$$W(\lambda) j_{pq} W^\#(\lambda) = j_{pq}, \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}_W \cap \mathfrak{h}_{W^\#}),$$

випливає, що

$$W(\lambda)^{-1} = j_{pq} W^\#(\lambda) j_{pq}. \tag{2.64}$$

Оскільки $W \in \mathcal{N}_-^{m\times m}$, то $W^\# \in \mathcal{N}_+^{m\times m}$. Отже,

$$W^{-1} \in \mathcal{N}_+^{m\times m}. \tag{2.65}$$

Беручи до уваги ці дві умови (2.63), (2.65) отримуємо, що $W \in \mathcal{U}_\kappa^S(j_{pq})$ за Означенням 2.21.

Навпаки, нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,S}(j_{pq})$. Тоді

$$W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_{out}^{m\times m}(\Omega_+),$$

і отже $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_+^{m\times m}$. За Лемою 2.24 ця умова еквівалентна умові $b_2 \equiv \mathrm{const}$.

Далі з (2.64) та (2.65) випливає, що $W^\# \in \mathcal{N}_{out}^{m\times m}$. Отже $W \in \mathcal{N}_-^{m\times m}$ і за Лемою 2.25 ця умова еквівалентна умові $b_1 \equiv \mathrm{const}$. □

В якості наслідка з Лем 2.24, 2.25 і Теореми 2.26, отримуємо наступний результат для узагальненого класу лівих j_{pq}- внутрішніх м. ф. $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$.

Наслідок 2.27. [75] *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ і $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$. Тоді:*

(1) $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_+$ тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{b}_2 \equiv \mathrm{const}$;

(2) $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_-$ тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{b}_1 \equiv \mathrm{const}$;

(3) $W \in \mathcal{U}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq})$ тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{b}_1 \equiv \mathrm{const}$ і $\mathfrak{b}_2 \equiv \mathrm{const}$.

Наслідок 2.28. *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^{\ell}(j_{pq})$ та $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$. Тоді W є сингулярною тоді і тільки тоді, коли $\mathfrak{b}_1 \equiv \mathrm{const}$ та $\mathfrak{b}_2 \equiv \mathrm{const}$.*

Доведення. Випливає з Пропозиції 2.8, Леми 2.13 і Теореми 2.26. □

2.4.3 Критерій сингулярності в термінах RKPS

У випадку, коли W належить до підкласу $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ підпростори

$$\mathcal{L}_W^+ := \mathcal{K}(W) \cap H_2^m, \quad \mathcal{L}_W^- := \mathcal{K}(W) \cap (H_2^m)^\perp, \quad \mathcal{L}_W := \mathcal{K}(W) \cap \widetilde{L}_2^m \tag{2.66}$$

можна охарактеризувати наступним чином

Теорема 2.29. ([47, Theorem 4.19]) *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$, K визначено як в (2.8), та нехай*

$$\mathcal{H}(b_1) = H_2^m \ominus b_1 H_2^m, \quad \mathcal{H}_*(b_2) = (H_2^m)^\perp \ominus b_2^*(H_2^m)^\perp, \tag{2.67}$$

$$\Gamma_{11} : f \in H_2^q \longrightarrow P_{\mathcal{H}(b_1)} K f, \quad \Gamma_{22} : f \in \mathcal{H}_*(b_2) \longrightarrow P_{(H_2^p)^\perp} K f.$$

Тоді:

$$\mathcal{L}_W^+ = \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ \Gamma_{11}^* u_1 \end{bmatrix} : u_1 \in \mathcal{H}(b_1) \right\}, \tag{2.68}$$

$$\mathcal{L}_W^- = \left\{ \begin{bmatrix} \Gamma_{22} u_2 \\ u_2 \end{bmatrix} : u_2 \in \mathcal{H}_*(b_2) \right\}, \tag{2.69}$$

$$\mathcal{L}_W = \mathcal{L}_W^+ \dot{+} \mathcal{L}_W^-. \tag{2.70}$$

Теорема 2.30. *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$. Тоді*

(1) $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_+$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}_W^- = \{0\}$;

(2) $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_-$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}_W^+ = \{0\}$;

(3) $W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,S}(j_{pq})$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}_W = \{0\}$.

Доведення. Припустимо, що $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_+$. Тоді за Теоремою 2.24 (1) $b_2 \equiv \mathrm{const}$. Отже

$$\mathcal{H}_*(b_2) = (H_2^m)^\perp \ominus b_2^*(H_2^m)^\perp = \{0\}$$

та за Теоремою 2.29 отримуємо

$$\mathcal{L}_W^- = \{0\}.$$

І навпаки, якщо $\mathcal{L}_W^- = \{0\}$, то за формулою (2.69)

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{22} \\ I \end{bmatrix} \mathcal{H}^*(b_2) = \{0\},$$

маємо $\mathcal{H}_*(b_2) = \{0\}$. Тоді $b_2 \equiv \mathrm{const}$, і, отже, $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_+$.

Аналогічно еквівалентність (2) Теореми 2.24 випливає з (1) та (2.68), та еквівалентність (3) випливає з (1), (2) та (2.70). $\square$

Наслідок 2.31. *Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Тоді:*

(1) $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_+$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}_{\widetilde{W}}^+ = \{0\}$;

(2) $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{N}_-$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}_{\widetilde{W}}^- = \{0\}$;

(3) $W \in \mathcal{U}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq})$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}_{\widetilde{W}} = \{0\}$.

Доведення. Оскільки $W \in \mathcal{U}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq})$, то $\widetilde{W} \in \mathcal{U}_\kappa^{r,S}(j_{pq})$, та за Теоремою 2.30 це можливо тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{L}_{\widetilde{W}} = \{0\}$. $\square$

У випадку $\kappa = 0$ описи лінійного многовиду $\mathcal{L}_W^\pm$, $\mathcal{L}_W$ у вигляді (2.68) та критерій сингулярності м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ в термінах $\mathcal{L}_W$ було представлено у [32].

2.5 Висновки

Результати глави були представлені в [53, 75].

Введено клас $\mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., який є дуальним для класу правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Введено поняття лівої асоційованої пари $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$ для лівої узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. $W(\lambda)$ і знайдено факторизації м. ф. $W(\lambda)$ у термінах лівої асоційованої пари $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$. Введено поняття сингулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. та отримано критерії її сингулярності як у термінах асоційованої пари, так і у термінах просторів Понтрягіна з відтворюючим ядром.

3 Регулярні узагальнені j_{pq}-внутрішні матриць-функції та їх факторизація

3.1 Факторизація j_{pq}-внутрішніх матриць-функцій

У роботі Д. З. Арова було доведено, що для м. ф. $W \in \mathcal{U}(j_{pq})$, яка допускає представлення

$$W = W^{(1)}W^{(2)}, \text{ де } W^{(1)}, W^{(2)} \in \mathcal{U}(j_{pq}) \text{ та } \{b_1, b_2\} \in \mathrm{ap}(W),$$
$$\{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\} \in \mathrm{ap}(W^{(1)}),$$

$b_1^{(1)}$ є лівим дільником b_1 та $b_2^{(1)}$ є правим дільником b_2, див. [30], [34, Lemma 4.28]. У цьому розділі буде доведено аналог цього твердження для узагальнених правих і лівих j_{pq}-внутрішніх м. ф. Співвідношення між RKPS's, що відповідають W, $W^{(1)}$ і $W^{(2)}$ представлено у наступному твердженні.

Теорема 3.1. *[24, Theorem 4.11] Нехай м. ф. $W(\lambda)$ допускає факторизацію*

$$W = W^{(1)}W^{(2)}, \quad W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}(j_{pq}), \quad W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}(j_{pq}). \tag{3.1}$$

Тоді $W \in \mathcal{U}_{\kappa}(j_{pq})$, де $\kappa \le \kappa_1 + \kappa_2$ і

$$\mathcal{K}(W) \subseteq \mathcal{K}(W^{(1)}) + W^{(1)}\mathcal{K}(W^{(2)}), \tag{3.2}$$

де $\mathcal{K}(W)$, $\mathcal{K}(W^{(1)})$ і $\mathcal{K}(W^{(2)})$ це простори Понтрягіна з відтворюючими ядрами $\mathsf{K}_\omega^W(\lambda)$, $\mathsf{K}_\omega^{W^{(1)}}(\lambda)$ і $\mathsf{K}_\omega^{W^{(2)}}(\lambda)$, відповідно. Наступні умови еквівалентні:

1. *$\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$;*
2. *$\mathcal{K}(W^{(1)}) \subset \mathcal{K}(W)$ і це вкладення є стискаючим;*
3. *$\mathcal{K}(W^{(1)}) \cap W^{(1)}\mathcal{K}(W^{(2)})$ є гільбертовим підпростором в $\mathcal{K}(W)$,*

у цьому випадку в (3.2) буде рівність. Більш того, $\mathcal{K}\ (W^{(1)})$ ізометрічно вкладено в $\mathcal{K}(W)$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{K}(W^{(1)}) \cap W^{(1)}\mathcal{K}(W^{(2)}) = \{0\}$, та рівність (3.2) є ортогональною сумою

$$\mathcal{K}(W) = \mathcal{K}(W^{(1)})[+]W^{(1)}\mathcal{K}(W^{(2)}). \tag{3.3}$$

Важливість умови (1) з Теореми 3.1 проілюструємо наступним прикладом:

Приклад 3.2. *Нехай* $\Omega_+ = \mathbb{D}$ *і м. ф.* $U^{(1)}(\lambda)$, $U^{(2)}(\lambda)$ *задані наступним чином*

$$U^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{2(1-\lambda)} \begin{bmatrix} 3-\lambda & -\lambda-1 \\ 1+\lambda & 1-3\lambda \end{bmatrix},$$

$$U^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{2(1-\lambda)} \begin{bmatrix} 1-3\lambda & \lambda+1 \\ -1-\lambda & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Тоді відповідні ядра $\mathsf{K}_\omega^{U^{(1)}}(\lambda)$ *та* $\mathsf{K}_\omega^{U^{(2)}}(\lambda)$ *мають вигляд*

$$\mathsf{K}_\omega^{U^{(1)}}(\lambda) = \frac{-1}{(1-\lambda)(1-\bar{\omega})} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathsf{K}_\omega^{U^{(2)}}(\lambda) = \frac{1}{(1-\lambda)(1-\bar{\omega})} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ядро $\mathsf{K}_\omega^{U^{(1)}}(\lambda)$ *має* 1 *від'ємний квадрат, а ядро* $\mathsf{K}_\omega^{U^{(2)}}(\lambda)$ *є позитивним, тому* $U^{(1)} \in \mathcal{U}_1^r(j_{11})$, $U^{(2)} \in \mathcal{U}(j_{11})$ *та*

$$\mathcal{K}(U^{(1)}) = \mathcal{K}(U^{(2)}) = U^{(1)}\mathcal{K}(U^{(2)}) = span \left\{ \frac{1}{1-\lambda} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Але

$$U(\lambda) = U^{(1)}(\lambda) U^{(2)}(\lambda) \equiv I$$

і отже в силу Теореми 3.1

$$\mathcal{K}(U) = \{0\} \neq \mathcal{K}(U^{(1)}) + U^{(1)}\mathcal{K}(U^{(2)}).$$

У цьому прикладі всі припущення Теореми 3.1 виконано окрім (1). Зауважимо, що $U^{(1)} \in \mathcal{U}_1^{r,S}(j_{11})$, *так як* $s_{21}^{(1)} \in \mathcal{S}_1$ *і* $det U^{(1)} \equiv 1$.

Наведемо Теорему Ліча (Теорема 8 з [25]) у наших позначеннях.

Теорема 3.3. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$ *і* $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}(j_{pq})$, *де* $0 \leq \kappa_1 \leq \kappa$, $\kappa_1 = \kappa - \kappa_1$. *Тоді наступні умови еквівалентні*

(i) *$W(\lambda)$ допускає факторизацію* $W(\lambda) = W^{(1)}(\lambda) W^{(2)}(\lambda)$, *де* $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}(j_{pq})$.

(ii) ядро

$$\frac{W^{(1)}(\lambda)j_{pq}W^{(1)}(\omega)^* - W(\lambda)j_{pq}W(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)}$$

має κ_2 *від'ємних квадрата.*

Лема 3.4. *Нехай м. ф.* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *допускає факторизацію* (3.1), *де* $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$. *Тоді:*

(i) $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq})$*;*

(ii) Для $\{b_1, b_2\} \in \mathrm{ap}^r(W)$ *та* $\{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\} \in \mathrm{ap}^r(W^{(1)})$ *маємо*

$$\theta_1 := (b_1^{(1)})^{-1} b_1 \in S_{in}^{p\times p}, \quad \theta_2 := b_2 (b_2^{(1)})^{-1} \in S_{in}^{q\times q}. \tag{3.4}$$

Доведення. Доведення поділимо на етапи.

1. *Перевіримо (i):* Нехай м. ф. W, $W^{(k)}$ та їх перетворення Потапова-Гінзбурга S, $S^{(k)}$ $(k = 1, 2)$, які визначені формулою (2.1), мають блочні представлення:

$$\begin{gathered} W = (w_{ij})_{i,j=1}^2, \quad W^{(k)} = (w_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^2, \\ S = (s_{ij})_{i,j=1}^2, \quad S^{(k)} = (s_{ij}^{(k)})_{i,j=1}^2, \quad k = 1, 2, \end{gathered} \tag{3.5}$$

З рівності $W = W^{(1)} W^{(2)}$ випливає, що

$$w_{21} = w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} + w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)}, \quad w_{22} = w_{21}^{(1)} w_{12}^{(2)} + w_{22}^{(1)} w_{22}^{(2)}. \tag{3.6}$$

Оскільки $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ та $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}(j_{pq})$, то за Теоремою 6.8 з [26] м. ф. $w_{22}(\lambda)$ та $w_{22}^{(1)}(\lambda)$ є оборотними для кожного $\lambda \in (\mathfrak{h}_W^+ \cap \mathfrak{h}_{W^{(1)}}^+)$ окрім скінченного числа точок і

$$s_{21} = -w_{22}^{-1} w_{21} \in S_\kappa^{p\times q}, \quad s_{21}^{(1)} = -(w_{22}^{(1)})^{-1} w_{21}^{(1)} \in S_{\kappa'}^{p\times q}, \quad \text{де} \quad \kappa' \le \kappa_1. \tag{3.7}$$

З формули (3.6) отримуємо, що

$$\begin{aligned} w_{22}^{-1} w_{21} &= (w_{21}^{(1)} w_{12}^{(2)} + w_{22}^{(1)} w_{22}^{(2)})^{-1} (w_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} + w_{22}^{(1)} w_{21}^{(2)}) \\ &= (-s_{21}^{(1)} w_{12}^{(2)} + w_{22}^{(2)})^{-1} (-s_{21}^{(1)} w_{11}^{(2)} + w_{21}^{(2)}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

З умови, що $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}(j_{pq})$ та Леммі 2.9 випливає, що

$$w_{22}^{-1} w_{21} = T^{\ell}_{W^{(2)}}[-s_{21}^{(1)}] \in S^{q\times p}_{\kappa''}, \quad \text{де} \quad \kappa'' \le \kappa' + \kappa_2. \tag{3.9}$$

З іншого боку $w_{22}^{-1} w_{21} \in S^{q\times p}_{\kappa}$, так як за припущенням $W \in \mathcal{U}^r_{\kappa}(j_{pq})$. Порівнюючи рівність $\kappa = \kappa''$ з (3.9) отримуємо

$$\kappa = \kappa'' \le \kappa' + \kappa_2 \le \kappa_1 + \kappa_2 = \kappa \tag{3.10}$$

З (3.10) випливає, що в (3.10) має місце рівність, тому $\kappa' = \kappa_1$. У наслідок цього, $s_{21}^{(1)} \in S^{p\times q}_{\kappa_1}$. Це доводить, що $W^{(1)} \in \mathcal{U}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$.

2. *Перевіримо (ii):* Нехай $\mathcal{K}(W)$ – простір з відтворюючим ядром (1.41) та $\mathcal{K}(W^{(j)})$ $(j = 1, 2)$ простори з відтворюючими ядрами

$$\mathsf{K}^{W^{(j)}}_{\omega}(\lambda) = \frac{j_{pq} - W^{(j)}(\lambda) j_{pq} W^{(j)}(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)} \quad (j = 1, 2).$$

З Теореми 3.1 випливає, що

$$\mathcal{K}(W) \cap H_2^m \supset \mathcal{K}(W^{(1)}) \cap H_2^m, \quad \mathcal{K}(W) \cap (H_2^m)^\perp \supset \mathcal{K}(W^{(1)}) \cap (H_2^m)^\perp.$$

Використовуючи формули для $\mathcal{K}(W) \cap H_2^m$ та $\mathcal{K}(W) \cap (H_2^m)^\perp$ з Теореми 2.29 отримуємо

$$\mathcal{H}(b_1) \supseteq \mathcal{H}(b_1^{(1)}), \quad \mathcal{H}_*(b_2) \supseteq \mathcal{H}_*(b_2^{(1)}). \tag{3.11}$$

Включення (3.11) еквівалентні (3.4). □

Як показує наступний приклад, припущення $W \in \mathcal{U}^r_{\kappa}(j_{pq})$ з Леми 3.4 має важливе значення.

Приклад 3.5. *Нехай $\Omega_+ = \mathbb{D}$. Розглянемо м. ф.*

$$W^{(1)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & 2\lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{U}^r_1(j_{11}),$$

$$W^{(2)}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathcal{U}_1(j_{11}) \setminus \mathcal{U}^{\ell}_1(j_{11}),$$

та нехай

$$W(\lambda) = W^{(1)}(\lambda)W^{(2)}(\lambda).$$

Тоді

$$W(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & \lambda \\ 1 & 2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda^2 \\ \lambda & 2\lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Ядро:

$$\mathsf{K}_\omega^W(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \frac{\lambda\overline{\omega}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

має 2 від'ємних квадрати, отже $W \in \mathcal{U}_2(j_{11})$. *Однак,* $W \notin \mathcal{U}_2^r(j_{11})$, *оскільки* $s_{21} = -\frac{1}{2\lambda} \in \mathcal{S}_1$. *Це показує, що зворотнє твердження до Леми 3.4 (i) не є вірним.*

Наступне твердження є дуальною версією Леми 3.4.

Лема 3.6. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *допускає факторизацію* (3.1), *де* $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$. *Тоді:*

(i) $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^\ell(j_{pq})$;

(ii) Якщо $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in \operatorname{ap}^\ell(W)$ *та* $\{\mathfrak{b}_1^{(2)}, \mathfrak{b}_2^{(2)}\} \in \operatorname{ap}^\ell(W^{(2)})$, *то маємо*

$$\vartheta_1 := \mathfrak{b}_1(\mathfrak{b}_1^{(2)})^{-1} \in S_{in}^{p\times p}, \quad \vartheta_2 := (\mathfrak{b}_2^{(2)})^{-1}\mathfrak{b}_2 \in S_{in}^{q\times q}. \qquad (3.12)$$

Доведення. Якщо $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ та $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in \operatorname{ap}^\ell(W)$, то, як показано в Лемі 2.13, $\{\widetilde{\mathfrak{b}}_1, \widetilde{\mathfrak{b}}_2\} \in \operatorname{ap}^r(\widetilde{W})$ та $\widetilde{W} \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ згідно з формулою (2.22). Використовуючи Лему 3.4, отримуємо $\widetilde{W} = \widetilde{W}^{(2)}\widetilde{W}^{(1)}$, де $\widetilde{W}^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^r(j_{pq})$. Застосовуючи (2.22) одержимо твердження (i).

Далі, якщо $\{\mathfrak{b}_1^{(2)}, \mathfrak{b}_2^{(2)}\} \in \operatorname{ap}^\ell(W^{(2)})$, то в силу Леми 2.13, $\{\widetilde{\mathfrak{b}}_1^{(2)}, \widetilde{\mathfrak{b}}_2^{(2)}\} \in \operatorname{ap}^r(\widetilde{W}^{(2)})$ та за Лемою 3.4

$$(\widetilde{\mathfrak{b}}_1^{(2)})^{-1}\widetilde{\mathfrak{b}}_1 \in S_{in}^{p\times p}, \quad \widetilde{\mathfrak{b}}_2(\widetilde{\mathfrak{b}}_2^{(2)})^{-1} \in S_{in}^{q\times q}. \qquad (3.13)$$

Ці включення еквівалентні (3.12). □

Наслідок 3.7. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *допускає факторизацію* (3.1), *де* $\kappa_1 = \kappa$, $\kappa_2 = 0$. *Тоді* $W^{(1)} \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *та, якщо* $\{b_1, b_2\} \in \operatorname{ap}^r(W)$ *і* $\{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\} \in \operatorname{ap}^r(W^{(1)})$, *то* (3.4) *виконано.*

Наслідок 3.8. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *допускає факторизацію* (3.1), *з* $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = \kappa$. *Тоді* $W^{(2)} \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ *та, якщо* $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in \mathrm{ap}^\ell(W)$ *і* $\{\mathfrak{b}_1^{(1)}, \mathfrak{b}_2^{(1)}\} \in \mathrm{ap}^\ell(W^{(2)})$, *то* (3.12) *виконано.*

Лема 3.9. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *допускає факторизацію* (3.1), *де*

$$W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq}), \quad W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^\ell(j_{pq}), \quad \kappa = \kappa_1 + \kappa_2,$$

та нехай $\{b_1, b_2\} \in \mathrm{ap}^r(W)$, $\{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\} \in \mathrm{ap}^r(W^{(1)})$, $\{\mathfrak{b}_1^{(2)}, \mathfrak{b}_2^{(2)}\} \in \mathrm{ap}^\ell(W^{(2)})$. *Тоді*

$$\deg b_1 \geq \deg b_1^{(1)} + \deg \mathfrak{b}_1^{(2)}, \qquad \deg b_2 \geq \deg b_2^{(1)} + \deg \mathfrak{b}_2^{(2)}. \tag{3.14}$$

Якщо, окрім цього, $W^{(1)} \in \widetilde{L}_2^m$, *то виконуються наступні рівності*

$$\deg b_1 = \deg b_1^{(1)} + \deg \mathfrak{b}_1^{(2)}, \qquad \deg b_2 = \deg b_2^{(1)} + \deg \mathfrak{b}_2^{(2)}. \tag{3.15}$$

Доведення. **1.** *Отримаємо формули для елементів* $s_{11}(\lambda)$ *та* $s_{22}(\lambda)$ *перетворення Потапова-Гінзбурга* $S(\lambda)$ *м. ф.* $W(\lambda)$. Нехай м. ф. $W(\lambda)$, $W^{(k)}(\lambda)$ та їх перетворення Потапова-Гінзбурга $S(\lambda)$, $S^{(k)}(\lambda)$ $(k = 1, 2)$, що визначені формулою (2.1), мають блочне представлення (3.5). Використовуючи рівність

$$w_{11} = w_{11}^{(1)} w_{11}^{(2)} + w_{12}^{(1)} w_{21}^{(2)} \tag{3.16}$$

та (2.3) отримуємо наступні рівності, що є вірними на $\mathfrak{h}_S^+ \cap \mathfrak{h}_{W^\#}^+$

$$\begin{aligned} s_{11} = w_{11}^{-\#} &= \left((w_{11}^{(2)})^\# (w_{11}^{(1)})^\# + (w_{21}^{(2)})^\# (w_{12}^{(1)})^\# \right)^{-1} \\ &= (w_{11}^{(1)})^{-\#} \left(I_p + (w_{11}^{(2)})^{-\#} (w_{21}^{(2)})^\# (w_{12}^{(1)})^\# (w_{11}^{(1)})^{-\#} \right)^{-1} (w_{11}^{(2)})^{-\#} \\ &= s_{11}^{(1)} (I_p - s_{12}^{(2)} s_{21}^{(1)})^{-1} s_{11}^{(2)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Аналогічно, з (3.6) та (2.2) випливає, що

$$w_{22} = w_{22}^{(1)} (I_q - s_{21}^{(1)} s_{12}^{(2)}) w_{22}^{(2)}, \tag{3.18}$$

$$s_{22} = w_{22}^{-1} = s_{22}^{(2)} (I_q - s_{21}^{(1)} s_{12}^{(2)})^{-1} s_{22}^{(1)}. \tag{3.19}$$

2. *Перепишемо факторизації у* (3.18) *та* (3.19) *у термінах асоційованих пар* *для м. ф.* $W(\lambda)$, $W^{(1)}(\lambda)$ *та* $W^{(2)}(\lambda)$.

Оскільки $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq})$ та $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^\ell(j_{pq})$, то

$$s_{21} \in S_\kappa^{p\times q}, \quad s_{21}^{(1)} \in S_{\kappa_1}^{p\times q}, \quad s_{12}^{(2)} \in S_{\kappa_2}^{p\times q}$$

Нехай b_ℓ, b_r, $b_\ell^{(1)}$, $b_r^{(1)}$, $\mathfrak{b}_\ell^{(2)}$ та $\mathfrak{b}_r^{(2)}$ – внутрішні множники, що визначені факторизацією Крейна-Лангера м. ф. s_{21}, $s_{21}^{(1)}$, $s_{12}^{(2)}$:

$$s_{21} = b_\ell^{-1} s_\ell = s_r b_r^{-1},$$

$$s_{21}^{(1)} = (b_\ell^{(1)})^{-1} s_\ell^{(1)} = s_r^{(1)} (b_r^{(1)})^{-1},$$
$$s_{12}^{(2)} = (\mathfrak{b}_\ell^{(2)})^{-1} \mathfrak{s}_\ell^{(2)} = \mathfrak{s}_r (\mathfrak{b}_r^{(2)})^{-1}.$$

Тоді, як випливає з [47, Theorem 4.6] (див. (1.45)) та [75, Theorem 3.8]

$$b_\ell s_{22},\ b_\ell^{(1)} s_{22}^{(1)},\ s_{22}^{(2)} \mathfrak{b}_r^{(2)} \in \mathcal{S}^{q\times q}, \quad s_{11} b_r,\ s_{11}^{(1)} b_r^{(1)},\ \mathfrak{b}_\ell^{(2)} s_{11}^{(2)} \in \mathcal{S}^{p\times p}.$$

Розглянемо внутрішньо-зовнішні (і зовнішньо-внутрішні, відповідно) факторизації для цих м. ф.

$$s_{11} b_r = b_1 a_1, \quad b_\ell s_{22} = a_2 b_2, \tag{3.20}$$

$$s_{11}^{(1)} b_r^{(1)} = b_1^{(1)} a_1^{(1)}, \quad b_\ell^{(1)} s_{22}^{(1)} = a_2^{(1)} b_2^{(1)}, \tag{3.21}$$

$$\mathfrak{b}_\ell^{(2)} s_{11}^{(2)} = \mathfrak{a}_1^{(2)} \mathfrak{b}_1^{(2)}, \quad s_{22}^{(2)} \mathfrak{b}_r^{(2)} = \mathfrak{b}_2^{(2)} \mathfrak{a}_2^{(2)}, \tag{3.22}$$

де b_1, $b_1^{(1)}, \mathfrak{b}_1^{(2)} \in S_{in}^{p\times p}$, b_2, $b_2^{(1)}, \mathfrak{b}_2^{(2)} \in S_{in}^{q\times q}$, a_1, $a_1^{(1)}, \mathfrak{a}_1^{(2)} \in S_{out}^{p\times p}$, a_2, $a_2^{(1)}, \mathfrak{a}_2^{(2)} \in S_{out}^{q\times q}$.

Помножимо (3.17) на b_r справа та, використовуючи (3.20)-(3.22), отримуємо

$$\begin{aligned} b_1 a_1 =& s_{11}^{(1)} (I_p - (\mathfrak{b}_\ell^{(2)})^{-1} \mathfrak{s}_\ell^{(2)} s_r^{(1)} (b_r^{(1)})^{-1})^{-1} s_{11}^{(2)} b_r \\ &= b_1^{(1)} a_1^{(1)} (\mathfrak{b}_\ell^{(2)} b_r^{(1)} - \mathfrak{s}_\ell^{(2)} s_r^{(1)})^{-1} \mathrm{a}_1^{(2)} \mathfrak{b}_1^{(2)} b_r. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Аналогічно, помножимо (3.19) на b_ℓ зліва та, використовуючи (3.20)-(3.22), отримуємо

$$\begin{aligned} a_2 b_2 &= b_\ell s_{22}^{(2)} (I_q - (b_\ell^{(1)})^{-1} s_\ell^{(1)} \mathfrak{s}_r^{(2)} (\mathfrak{b}_r^{(2)})^{-1})^{-1} \left(b_\ell^{(1)}\right)^{-1} a_2^{(1)} b_2^{(1)} \\ &= b_\ell \mathfrak{b}_2^{(2)} \mathfrak{a}_2^{(2)} (b_\ell^{(1)} \mathfrak{b}_r^{(2)} - s_\ell^{(1)} \mathfrak{s}_r^{(2)})^{-1} a_2^{(1)} b_2^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

3. *Перевіримо* (3.14)*:* Нехай θ_1, θ_2 м. ф., що визначені формулами (3.4). Тоді з (3.23) та (3.24) випливає, що

$$\theta_1 a_1 = a_1^{(1)}(\mathfrak{b}_\ell^{(2)} b_r^{(1)} - \mathfrak{s}_\ell^{(2)} s_r^{(1)})^{-1}\mathfrak{a}_1^{(2)}\mathfrak{b}_1^{(2)} b_r, \tag{3.25}$$

$$(\mathfrak{b}_\ell^{(2)} b_r^{(1)} - \mathfrak{s}_\ell^{(2)} s_r^{(1)})(a_1^{(1)})^{-1}\theta_1 a_1 = \mathfrak{a}_1^{(2)}\mathfrak{b}_1^{(2)} b_r. \tag{3.26}$$

За узагальненою Теоремою Руше (Теорема 1.6)

$$\mathcal{M}_\zeta(\mathfrak{b}_\ell^{(2)} b_r^{(1)} - \mathfrak{s}_\ell^{(2)} s_r^{(1)}, \Omega_+) \le \kappa. \tag{3.27}$$

З іншого боку

$$\mathcal{M}_\zeta(\mathfrak{a}_1^{(2)}\mathfrak{b}_1^{(2)} b_r, \Omega_+) = \deg b_r + \deg \mathfrak{b}_1^{(2)} = \kappa + \deg \mathfrak{b}_1^{(2)}. \tag{3.28}$$

Тепер (3.27), (3.28) означають нерівність

$$\kappa + \deg \mathfrak{b}_1^{(2)} \le \kappa + \deg \theta = \kappa + \deg b_1 - \deg b_1^{(1)}, \tag{3.29}$$

що збігається з першою нерівністю в (3.14).

Аналогічно, з (3.24) випливає, що

$$a_2\theta_2(a_2^{(1)})^{-1}(b_\ell^{(1)}\mathfrak{b}_r^{(2)} - s_\ell^{(1)}\mathfrak{s}_r^{(2)}) = b_\ell \mathfrak{b}_2^{(2)}\mathfrak{a}_2^{(2)}. \tag{3.30}$$

Порівнюючи нульові кратності обох частин (3.30) та використовуючи Теорему 1.6 отримаємо нерівність

$$\begin{aligned}\deg \mathfrak{b}_2^{(2)} + \kappa &= \mathcal{M}_\zeta(b_\ell \mathfrak{b}_2^{(2)}\mathfrak{a}_2^{(2)}, \Omega_+) = \mathcal{M}_\zeta(\theta_2(a_2^{(1)})^{-1}(b_\ell^{(1)}\mathfrak{b}_r^{(2)} - s_\ell^{(1)}\mathfrak{s}_r^{(2)}), \Omega_+)\\ &\le \kappa + \deg b_2 - \deg b_2^{(1)},\end{aligned} \tag{3.31}$$

що збігається з другою нерівністю в (3.14).

4. *Перевіримо* (3.15)*:* Використовуючи [47, Lemma 4.22] та припущення $W^{(1)} \in \widetilde{L}_2^{m\times m}$ маємо, що

$$(I_p - \varepsilon s_{21}^{(1)})^{-1} \in \widetilde{L}_1^{p\times p} \quad \text{і} \quad (I_p - s_{21}^{(1)}\varepsilon)^{-1} \in \widetilde{L}_1^{p\times p}.$$

для усіх $\varepsilon \in S^{p\times q}$. Тоді, за узагальненою Теоремою Руше (Теорема 1.6) отримуємо

$$\mathcal{M}_\zeta(\mathfrak{b}_\ell^{(2)} b_r^{(1)} - \mathfrak{s}_\ell^{(2)} s_r^{(1)}, \Omega_+) = \mathcal{M}_\zeta(b_\ell^{(1)} \mathfrak{b}_r^{(2)} - s_\ell^{(1)} \mathfrak{s}_r^{(2)}, \Omega_+) = \kappa. \tag{3.32}$$

Тому нерівності (3.29), (3.31) перетворюються на рівності (3.15). □

Лема 3.10. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *та* $W = W^{(1)}W^{(2)}$*, де* $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq})$*,* $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^\ell(j_{pq})$ *та* $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$*. Тоді має місце наступна імплікація*

$$\mathrm{ap}^r(W^{(1)}) = \mathrm{ap}^r(W) \Rightarrow W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq}). \tag{3.33}$$

Якщо, окрім цього, $W^{(1)} \in \widetilde{L}_2^m$*, то справедливо і зворотнє твердження, і, отже, буде справедлива еквівалентність*

$$\mathrm{ap}^r(W^{(1)}) = \mathrm{ap}^r(W) \Longleftrightarrow W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq}). \tag{3.34}$$

Доведення. Припустимо, що $\mathrm{ap}^r(W^{(1)}) = \mathrm{ap}^r(W)$, тобто

$$b_1 = b_1^{(1)}\theta_1, \quad b_2 = \theta_2 b_2^{(1)} \tag{3.35}$$

для деяких постійних унітарних матриць θ_1, θ_2. Тоді, за Лемою 3.9 $\deg \mathfrak{b}_1^{(2)} = 0$ та $\deg \mathfrak{b}_2^{(2)} = 0$. З огляду на Теорему 2.24 це означає, що $W^{(2)} \in \mathcal{U}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq})$.

І навпаки, якщо $W^{(1)} \in \widetilde{L}_2^{m\times m}$ та $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq})$, то за Теоремою 2.24 $\deg \mathfrak{b}_1^{(2)} = 0$ та $\deg \mathfrak{b}_2^{(2)} = 0$. Тепер використовуючи друге твердження Леми 3.9, отримуємо рівність $\mathrm{ap}^r(W^{(1)}) = \mathrm{ap}^r(W)$. □

У випадку $\kappa_2 = 0$ попередня Лема приймає вигляд.

Наслідок 3.11. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *та нехай* $W = W^{(1)}W^{(2)}$*, де* $W^{(1)} \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$*,* $W^{(2)} \in \mathcal{U}(j_{pq})$*. Тоді має місце наступна імплікація:*

$$\mathrm{ap}^r(W^{(1)}) = \mathrm{ap}^r(W) \Rightarrow W^{(2)} \in \mathcal{U}^S(j_{pq}). \tag{3.36}$$

Якщо, окрім цього, $W^{(1)} \in \widetilde{L}_2^m$*, то справедливо і зворотнє твердження, і, отже, має місце наступна еквівалентність*

$$\mathrm{ap}^r(W^{(1)}) = \mathrm{ap}^r(W) \Longleftrightarrow W^{(2)} \in \mathcal{U}^S(j_{pq}). \tag{3.37}$$

3.2 Регулярні узагальнені j_{pq}-внутрішні матриць-функції

Означення 3.12. *М. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ називається право-регулярною узагальненою j_{pq}-внутрішньою, якщо для кожної факторизації*

$$W = W^{(1)}W^{(2)}, \quad W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq}), \quad W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^\ell(j_{pq}), \tag{3.38}$$

з $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$ припущення $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq})$ означає, що $W^{(2)}\ (\lambda)\ \equiv\ \mathrm{const}$.

Аналогічно, м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ називається ліво-регулярною узагальненою j_{pq}-внутрішньою, якщо для кожної факторизації (3.38) *з $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$ припущення $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^S(j_{pq})$ означає, що $W^{(1)}(\lambda) \equiv \mathrm{const}$.*

Щоб довести наступну теорему, нам знадобиться наступний результат [35, Theorems 4.1 і 4.2] сформульований у термінах резольвентного оператора R_α, що діє у просторі з відтворюючим ядром $\mathcal{K}(W)$ ($W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{p,q})$) за формулою

$$(R_\alpha f)(\lambda) = \frac{f(\lambda) - f(\alpha)}{\lambda - \alpha}, \quad f \in \mathcal{K}(W), \quad \lambda, \alpha \in \mathfrak{h}_W.$$

Нагадаємо, що $\mathcal{K}(W)$ позначає RKPS з відтворюючим ядром $\mathsf{K}_\omega^W(\lambda)$.

Теорема 3.13. *Нехай $\mathcal{K}$ – це RKPS вектор-функцій в $\mathbb{C}^m$, голоморфних на області визначення $\mathfrak{h}_\mathcal{K}$ з від'ємним індексом $\kappa \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Він є простором $\mathcal{K}(W)$ для деякої $W \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$, тоді і тільки тоді, коли виконані наступні три умови:*

(1) простір $\mathcal{K}$ є інваріантним відносно R_α для усіх $\alpha \in \mathfrak{h}_\mathcal{K}$;

(2) для всіх $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}_\mathcal{K}$ та $f, g \in \mathcal{K}$ виконана одна з наступних рівностей

$$\begin{aligned}[f,g]_\mathcal{K} + \alpha[R_\alpha f, g]_\mathcal{K} + \overline{\beta}[f, R_\beta g]_\mathcal{K} - \\ - (1 - \alpha\overline{\beta})[R_\alpha f, R_\beta g]_\mathcal{K} = g(\beta)^* j_{pq} f(\alpha),\end{aligned} \tag{3.39}$$

у випадку $\Omega_+ = \mathbb{D}$, або

$$\begin{aligned}[R_\alpha f, g]_\mathcal{K} - [f, R_\beta g]_\mathcal{K} - (\alpha - \overline{\beta})[R_\alpha f, R_\beta g]_\mathcal{K} \\ = 2\pi i g(\beta)^* j_{pq} f(\alpha),\end{aligned} \tag{3.40}$$

у випадку $\Omega_+ = \mathbb{C}_+$;

(3) $\mathfrak{h}_{\mathcal{K}} \cap \Omega_0 \neq \emptyset$.

Нагадаємо, що гільбертів простір з відтворючим ядром $\mathcal{K}(W)$ вперше був охарактеризований Л. де Бранжем [43] у випадку $\Omega_+ = \mathbb{C}_+$, випадок кола розглядав Дж. Болл [37]; уніфікована версія обох випадків, що застосовується до просторів Крейна представлена в [35].

Наступна теорема забезпечує існування певної факторизації вигляду (3.1). У цьому розділі ми представимо деякі достатні умови для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ ($W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$) для визначення такої факторизації.

Теорема 3.14. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, $\mathcal{K}(W)$ *– це простір Понтрягіна з відтворюючим ядром* $\mathsf{K}_\omega^W(\lambda)$, *визначеним рівністю* (1.41), *та нехай* $\mathcal{L}_W := \mathcal{K}(W) \cap \widetilde{L}_2^m$, $\kappa_1 = \mathrm{ind}_-(\mathcal{L}_W)$, $\kappa_2 = \kappa - \kappa_1$. *Припустимо, що:*

(A1) $\mathfrak{h}_W \cap \Omega_0 \neq \emptyset$;

(A2) замикання $\overline{\mathcal{L}_W}$ *від* $\mathcal{L}_W$ *є невиродженим підпростором в* $\mathcal{K}(W)$.

Тоді м. ф. $W(\lambda)$ *допускає факторизацію* (3.1), *таку, що:*

(i) RKPS $\mathcal{K}(W^{(1)})$ *співпадає з* $\overline{\mathcal{L}_W}$ *та ізометрично вкладений в* $\mathcal{K}(W)$;

(ii) $\mathcal{L}_{W^{(1)}} = \mathcal{L}_W$ *та* $\mathrm{ap}^r(W^{(1)}) = \mathrm{ap}^r(W)$.

Доведення. *1. Перевірка того, що замикання* $\overline{\mathcal{L}_W}$ *від* $\mathcal{L}_W$ *є RKPS.*

Дійсно, $\overline{\mathcal{L}_W}$ є невиродженим підпростором в $\mathcal{K}(W)$ та тому $\overline{\mathcal{L}_W}$ – це простір Понтрягіна з від'ємним індексом κ_1. Оскільки $\mathcal{K}(W)$ це RKPS, то оператор евалюції $E(\lambda)$ є обмеженим як оператор, що діє з $\mathcal{K}(W)$ в $\mathbb{C}^m$. Відтворююче ядро для $\mathcal{K}(W)$ задано формулою

$$\mathsf{K}_\omega(\lambda) = E(\lambda)E(\omega)^*.$$

Нехай $F(\lambda)$ звуження $E(\lambda)$ на $\overline{\mathcal{L}_W}$, [24]. $F(\lambda)$ це обмежений оператор з $\overline{\mathcal{L}_W}$ у $\mathbb{C}^m$. Відтворююче ядро $\overline{\mathcal{L}_W}$ має вигляд

$$\mathsf{K}_\omega^{(1)}(\lambda) = F(\lambda)F(\omega)^*.$$

2. Перевірка того, що RKPS $\overline{\mathcal{L}_W}$ це простір $\mathcal{K}(W^{(1)})$, тобто його ядро може бути представлено наступним чином

$$\mathsf{K}_\omega^{(1)}(\lambda) = \mathsf{K}_\omega^{W^{(1)}}(\lambda) := \frac{j_{pq} - W^{(1)}(\lambda) j_{pq} W^{(1)}(\omega)^*}{\rho_\omega(\lambda)},$$

для деякого $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}(j_{pq})$.

Перевіримо умови (1) – (3) з Теореми 3.13 для RKPS $\overline{\mathcal{L}_W}$. Умова (1) виконана, оскільки лінеал $\mathcal{L}_W$ є інваріантним для всіх $\alpha \in \mathfrak{h}_W$. Умова (2) виконана, оскільки виконана тотожність де Бранжа для усіх $f, g \in \mathcal{K}(W)$ та $\overline{\mathcal{L}_W} \subset \mathcal{K}(W)$. Остання умова випливає з (A1). Отже, $\overline{\mathcal{L}_W}$ це простір Понтрягіна $\mathcal{K}(W^{(1)})$ з відтворюючим ядром $\mathsf{K}_\omega^W(\lambda)$ для деякого $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}(j_{pq})$.

3. Побудова м. ф. $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}(j_{pq})$ такої, що виконано (3.1).

Нехай P – ортогональний проектор в $\mathcal{K}(W)$ на

$$\mathcal{K}(W^{(1)}) := \overline{\mathcal{L}_W}. \tag{3.41}$$

Тоді

$$P E(\cdot) E(\omega)^*|_{\overline{\mathcal{L}_W}} = F(\cdot) F(\omega)^* \quad (\omega \in \mathfrak{h}_W).$$

Дійсно, для всіх $f \in \mathcal{K}(W^{(1)})$ та $u \in \mathcal{K}^m$ отримуємо

$$\begin{aligned} \langle f, P(E(\cdot)E(\omega)^* u\rangle_{\mathcal{K}(W^{(1)})} &= \langle f, E(\cdot)E(\omega)^* u\rangle_{\mathcal{K}(W)} \\ &= u^* f(\omega) = \langle f, F(\cdot)F(\omega)^* u\rangle_{\mathcal{K}(W^{(1)})}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Нехай ядро $\mathsf{K}_\omega^{(2)}(\lambda)$ визначено наступним чином

$$\mathsf{K}_\omega^{(2)}(\lambda) = \mathsf{K}_\omega(\lambda) - \mathsf{K}_\omega^{(1)}(\lambda) \quad (\omega, \lambda \in \mathfrak{h}_W).$$

Ядро $\mathsf{K}_\omega^{(2)}(\lambda)$ має $\kappa_2 = \kappa - \kappa_1$ від'ємних квадрати. Дійсно, для кожного $u, v \in \mathcal{K}^m$ маємо

$$\begin{aligned} \langle \mathsf{K}_\omega^{(2)}(\lambda) u, v\rangle &= \langle E(\omega)^* u, E(\lambda)^* v\rangle_{\mathcal{K}(W)} - \langle F(\omega)^* u, F(\lambda)^* v\rangle_{\mathcal{K}(W)} \\ &= \langle (1-P)E(\omega)^* u, (1-P)E(\lambda)^* v\rangle_{\mathcal{K}(W)}. \end{aligned}$$

Отже, одержуємо рівність

$$\sum_{j,k=1}^{n} \langle \mathsf{K}^{(2)}_{\omega_j}(\omega_k)u_j, u_k\rangle \xi_j\overline{\xi_k}$$
$$= \sum_{j,k=1}^{n} \langle (I-P)E(\omega_j)^*u_j, (I-P)E(\omega_k)^*u_k\rangle_{\mathcal{K}(W)}\xi_j\overline{\xi_k}$$

яка показує, що $\mathsf{K}^{(2)}_{\omega}(\lambda)$ має κ_2 від'ємних квадрата.

За Теоремою Ліча 3.3 ця м. ф. $W^{(2)} \in \mathcal{P}_{\kappa_2}(j_{pq})$ є такою, що $W(\lambda) = W^{(1)}(\lambda)W^{(2)}(\lambda)$. Більш того, $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}(j_{pq})$, оскільки обидві м. ф. $W(\lambda)$ та $W^{(1)}(\lambda)$ мають j_{pq}-унітарні недотичні границі м. в. на Ω_0.

4. Перевірка того, що $W^{(1)} \in \mathcal{U}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$, $\mathrm{ap}^r(W^{(1)}) = \mathrm{ap}^r(W)$.

Включення $W^{(1)} \in \mathcal{U}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$ доведене у Лемі 3.4. Тепер з [26, Theorem 6.14] випливає, що

$$\mathcal{K}(W) = \mathcal{K}(W^{(1)})[\dot{+}]W^{(1)}\mathcal{K}(W^{(2)}). \tag{3.43}$$

Рівність (3.43) випливає з твердження (ii). Більш того, з (3.43) отримуємо, що

$$\mathcal{L}_{W^{(1)}} = \mathcal{K}(W^{(1)}) \cap \widetilde{L}^m_2 \subset \mathcal{K}(W) \cap \widetilde{L}^m_2 = \mathcal{L}_W.$$

З іншого боку з (3.41) випливає, що

$$\mathcal{L}_{W^{(1)}} = \mathcal{K}(W^{(1)}) \cap \widetilde{L}^m_2 = \overline{\mathcal{L}_W} \cap \widetilde{L}^m_2 \supset \mathcal{L}_W.$$

У наслідок цього, $\mathcal{L}_{W^{(1)}} = \mathcal{L}_W$ і тому $\mathrm{ap}^r(W^{(1)}) = \mathrm{ap}^r(W)$ за Теоремою 2.29. Це завершує доказ. □

Наслідок 3.15. *Нехай* $W \in \mathcal{U}^r_\kappa(j_{pq}) \cap \mathcal{U}^\ell_\kappa(j_{pq})$ *та виконані припущення Теореми 3.14,* $W^{(1)} \in \mathcal{U}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$ *і* $W^{(2)} \in \mathcal{U}^\ell_{\kappa_2}(j_{pq})$ *м. ф., що визначені в Теоремі 3.14. Тоді*

$$W^{(2)} \in \mathcal{U}^{\ell,S}_{\kappa_2}(j_{pq}). \tag{3.44}$$

Доведення. Оскільки $W \in \mathcal{U}^r_\kappa(j_{pq}) \cap \mathcal{U}^\ell_\kappa(j_{pq})$, $W^{(1)} \in \mathcal{U}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$ та $W^{(2)} \in \mathcal{U}^\ell_{\kappa_2}(j_{pq})$, то за Теоремою 3.14 має місце рівність

$$\mathrm{ap}^r(W^{(1)}) = \mathrm{ap}^r(W). \tag{3.45}$$

За Лемою 3.10 з цієї рівності випливає, що $W^{(2)} \in \mathcal{U}^{\ell,S}_{\kappa_2}(j_{pq})$. $\square$

Наслідок 3.16. *Нехай виконані припущення Теореми 3.14,* $W \in \mathcal{U}^r_\kappa(j_{pq})$, $W^{(1)} \in \mathcal{U}^r_\kappa(j_{pq})$ *і* $W^{(2)} \in \mathcal{U}(j_{pq})$ *– це м. ф., що побудовані в Теоремі 3.14, та нехай* $\mathrm{ind}_{-}\mathcal{L}_W = \kappa$. *Тоді* $W^{(2)} \in \mathcal{U}^{\ell,S}(j_{pq})$.

Доведення. Оскільки $\mathrm{ind}_{-}\mathcal{L}_W = \kappa$, простір $\overline{\mathcal{L}_W} = \overline{(\mathcal{K}(W) \cap \widetilde{L}^m_2)}$ є невиродженим, тобто припущення (A2) виконано, то за Теоремою 3.14 існують м. ф. $W^{(1)} \in \mathcal{U}^r_\kappa(j_{pq})$ і $W^{(2)} \in \mathcal{U}(j_{pq})$ такі, що $W = W^{(1)}W^{(2)}$ і (3.45) виконано. За Наслідком 3.11 $W^{(2)} \in \mathcal{U}^S(j_{pq})$. $\square$

У наступній лемі ми знайдемо достатні умови для регулярності м. ф. $W(\lambda)$. Нагадаємо, що $\mathcal{R}^{m\times m}$ множину раціональних $m \times m$ м. ф.

Лема 3.17. *Нехай* $W \in \mathcal{U}^r_\kappa(j_{pq})$ *і виконані припущення Теореми 3.14, і* $\mathrm{ind}_{-}\mathcal{L}_W = \kappa$. *Тоді справедливі наступні імплікації:*

1. $W \in \mathcal{U}^{r,R}_\kappa(j_{pq}) \Longrightarrow \overline{\mathcal{L}_W} = \mathcal{K}(W)$;

2. $\mathcal{K}(\widetilde{W}) \subset \widetilde{L}^{m\times m}_2 \Longrightarrow W \in \mathcal{U}^{r,R}_\kappa(j_{pq})$;

3. $W \in \widetilde{L}^{m\times m}_2 \cap \mathcal{R}^{m\times m} \Longrightarrow W \in \mathcal{U}^{r,R}_\kappa(j_{pq})$.

Доведення. За Теоремою 3.14 і Наслідком 3.16 W допускає факторизацію $W = W^{(1)}W^{(2)}$, де $W^{(1)} \in \mathcal{U}^r_\kappa(j_{pq})$ і $W^{(2)} \in \mathcal{U}^S(j_{pq})$.

(1) Нехай $W \in \mathcal{U}^{r,R}_\kappa(j_{pq})$ і припустимо, що $\overline{\mathcal{L}_W} = \overline{\mathcal{K}(W) \cap \widetilde{L}^m_2} \neq \mathcal{K}(W)$. Тоді

$$\mathcal{K}(W^{(1)}) = \overline{\mathcal{K}(W) \cap \widetilde{L}^m_2} \neq \mathcal{K}(W), \tag{3.46}$$

і виконана рівність (3.43). $\mathcal{K}(W^{(2)}) \neq \{0\}$, тобто $W^{(2)} \not\equiv \mathrm{const}$. Але це суперечить припущенню, що $W \in \mathcal{U}^{rR}_\kappa(j_{pq})$.

(2) Нехай $\widetilde{W}$ – це м. ф., що визначена формулою (2.21), $\mathcal{K}(\widetilde{W}) \subset \widetilde{L}^{m\times m}_2$ і припустимо, що

$$W = W^{(3)}W^{(4)}, \quad W^{(3)} \in \mathcal{U}^r_{\kappa_1}(j_{pq}),\ W^{(4)} \in \mathcal{U}^{\ell,S}_{\kappa_2}(j_{pq}), \quad \kappa_3 + \kappa_4 = \kappa.$$

Тоді

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}^{(4)}\widetilde{W}^{(3)}, \quad \text{де} \quad \widetilde{W}^{(3)} \in \mathcal{U}_{\kappa_3}(j_{pq}),\ \widetilde{W}^{(4)} \in \mathcal{U}^{r,S}_{\kappa_4}(j_{pq}).$$

За Теоремою 3.1
$$\mathcal{K}(\widetilde{W}) = \mathcal{K}(\widetilde{W}^{(4)}) + \widetilde{W}^{(4)}\mathcal{K}(\widetilde{W}^{(3)}). \tag{3.47}$$
Оскільки $\mathcal{K}(\widetilde{W}) \subset \widetilde{L}_2^{m\times m}$ і $\mathcal{K}(\widetilde{W}^{(4)}) \subset \mathcal{K}(\widetilde{W})$ отримуємо, що $\mathcal{K}(\widetilde{W}^{(4)}) = \{0\}$, і тому $W^{(4)} \equiv \mathrm{const}$.

(3) Припустимо, що $W \in \widetilde{L}_2^{m\times m} \cap \mathcal{R}^{m\times m}$. Тоді $\mathsf{K}_\omega u \in \widetilde{L}_2^m$ для усіх $\omega \in \mathfrak{h}_W$ і $u \in \mathbb{C}^m$ і, отже, множина $\mathcal{L}_W = \mathcal{K}(W) \cap \widetilde{L}_2^m$ є щільною в $\mathcal{K}(W)$. Насправді, $\mathcal{K}(W)$ є скінченновимірним простором, оскільки W раціональна, і тому $\mathcal{K}(W) = \mathcal{L}_W \subset \widetilde{L}_2^{m\times m}$.

З припущення $W \in \widetilde{L}_2^{m\times m} \cap \mathcal{R}^{m\times m}$ випливає також, що $\widetilde{W} \in \widetilde{L}_2^{m\times m} \cap \mathcal{R}^{m\times m}$ та отже, як і вище, одержимо $\mathcal{K}(\widetilde{W}) \subset \widetilde{L}_2^{m\times m}$. Далі в силу (2) отримуємо $W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,R}$.
□

Зауваження 3.18. *На відміну від дефінітного випадку, результат Леми 3.17 набагато слабкіший. Якщо* $\kappa = 0$, *твердження (1) і (3) мають наступний вигляд (див. [34, Theorems 5.86, 5.90]):*

(1′) $W \in \mathcal{U}^{r,R}(j_{pq}) \Longleftrightarrow \overline{\mathcal{L}_W} = \mathcal{K}(W)$;

(3′) $W \in \widetilde{L}_2^{m\times m} \cap \mathcal{U}^{r}(j_{pq}) \Longrightarrow W \in \mathcal{U}^{r,R}(j_{pq})$.

У наступній теоремі доведено критерій регулярності для раціональної м. ф. $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$.

Теорема 3.19. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ *– раціональна м. ф. Тоді*
$$W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,R}(j_{pq}) \Longleftrightarrow \mathcal{L}_W = \mathcal{K}(W).$$

Доведення. **1.** *Перевірка імплікації* $\mathcal{L}_W = \mathcal{K}(W) \Rightarrow W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,R}(j_{pq})$.
З припущення $\mathcal{L}_W = \mathcal{K}(W)$ випливає, що $\mathcal{K}(W) \subset \widetilde{L}_2^{m\times m}$. Тоді $W \in \widetilde{L}_2^{m\times m}$. За Лемою 3.17(3) $W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,R}(j_{pq})$.

2. *Перевірка імплікації* $W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,R}(j_{pq}) \Rightarrow \mathcal{L}_W = \mathcal{K}(W)$.
Припустимо, що $\mathcal{L}_W \neq \mathcal{K}(W)$. Тоді W має полюс ω_0 в Ω_0, тому $\widetilde{W}$ має полюс ω_0. Отже простір $\mathcal{K}(\widetilde{W})$ містить вектор-функцію $f(\lambda) = \frac{v}{\lambda - \overline{\omega_0}}$, дивіться [26, Theorem 5.2]. Вектор-функція $f(\lambda)$ є власною функцією для оператора зворотнього зсуву R_α, що відповідає власному значенню $\frac{1}{\overline{\omega}_0 - \alpha}$, $\alpha \in \Omega_+$. Оскільки

$\mathcal{K} = \mathcal{K}(\widetilde{W})$ це RKPS з ядром $\mathsf{K}_\omega^{\widetilde{W}}(\lambda)$ за [26, Theorem 6.9], то для кожного вибору $f, g \in \mathcal{K}(\widetilde{W})$ та кожного $\alpha, \beta \in \Omega_+$ виконується тотожність (3.39), якщо $\Omega_+ = \mathbb{D}$, або тотожность (3.40), якщо $\Omega_+ = \mathbb{C}_+$.

Підставляючи $\beta = \alpha$ і $g = f = \frac{v}{\lambda - \overline{\omega}_0}$ в (3.39), якщо $\Omega_+ = \mathbb{D}$ (або в (3.40), якщо $\Omega_+ = \mathbb{C}_+$), отримуємо (3.39) ((3.40), відповідно)

$$v^* j_{pq} v = 0. \tag{3.48}$$

Розглянемо м. ф.

$$V_\varepsilon(\lambda) := I_m - \frac{\varepsilon}{2} c_{\omega_0}(\lambda) v v^* j_{pq}, \quad W_\varepsilon(\lambda) := V_\varepsilon(\lambda)^{-1} \widetilde{W}(\lambda), \quad \varepsilon > 0.$$

Тоді $V_\varepsilon \in \mathcal{U}(j_{pq})$ і $\mathcal{K}(V_\varepsilon) = \operatorname{span} f$, (див. Приклад 2.4), $W_\varepsilon \in \mathcal{U}_{\kappa'}(j_{pq})$ для деякого $\kappa' \geq \kappa$,

$$\widetilde{W}(\lambda) = V_\varepsilon(\lambda) W_\varepsilon(\lambda) \tag{3.49}$$

та

$$\mathcal{K}(\widetilde{W}) \subseteq \mathcal{K}(V_\varepsilon) + V_\varepsilon(\mathcal{K}(W_\varepsilon)). \tag{3.50}$$

Якщо $[f, f]_{\mathcal{K}} \leq 0$, то виконується наступна нерівність

$$[f, f]_{\mathcal{K}} \leq 0 \leq [f, f]_{\mathcal{K}(V_\varepsilon)} \tag{3.51}$$

і тому простір $\mathcal{K}(V_\varepsilon)$ є вкладеним в $\mathcal{K}(\widetilde{W})$.

Якщо $[f, f]_{\mathcal{K}} > 0$, то нерівність (3.51) буде справедливою для досить малого ε ([26, Theorem 5.4]), і, отже, знову вкладення $\mathcal{K}(V_\varepsilon) \subset \mathcal{K}(\widetilde{W})$ буде стискаючим. За Теоремою 3.1 отримаємо, що $\kappa' = \kappa$, отже $W_\varepsilon \in \mathcal{U}_\kappa(j_{pq})$. Застосовуючи перетворення (2.21) отримуємо факторизацію

$$W(\lambda) = \widetilde{W}_\varepsilon(\lambda) \widetilde{V}_\varepsilon(\lambda),$$

де $W_\varepsilon \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, $V_\varepsilon \in \mathcal{U}^S(j_{pq})$ і $V_\varepsilon \not\equiv \text{const}$. Це суперечить припущенню, що $W \in \mathcal{U}_\kappa^{r,R}(j_{pq})$. $\square$

У випадку $\kappa = 0$ в якості приклада регулярної j_{pq}-внутрішньої м. ф. виступають множники Бляшке першого та другого типу. В індефінітному випадку ($\kappa > 0$) ці приклади можуть бути трохи модифіковані.

Приклад 3.20. *За Теоремою 3.19 кожна раціональна м. ф. з* $\mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$*, що не має полюсів в* Ω_0*, є правою регулярною, зокрема, м. ф.* $U_\omega(\lambda)$ *в* (2.18) *і* (2.19) *належать до класу* $\mathcal{U}_1^{r,R}(j_{pq})$*, якщо* $v_2v_1^* \neq 0$*.*

У наступному прикладі ми розглянемо раціональну узагальнену j_{pq}-внутрішню м. ф. з полюсами на границі Ω_0, яка не є регулярною та сингулярною і не допускає регулярно-сингулярну факторизацію.

Приклад 3.21. *Нехай* $\Omega_+ = \mathbb{D}$ *та м. ф.* $W(\lambda)$ *визначена формулою (див. [26, (7.5)])*

$$W(\lambda) = (I_2 + \{b_{\beta,\alpha}(\lambda) - 1\}W_{1,2})(I_2 + \{b_{\alpha,\beta}(\lambda) - 1\}j_{pq}W_{1,2}^*j_{pq}),$$

де

$$W_{1,2} = u_1(u_2^*j_{pq}u_1)^{-1}u_2^*j_{pq}, \quad b_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{\lambda - \alpha}{1 - \lambda\beta^*},$$

та u_1, u_2 *вектори з* $\mathbb{C}^2$ *такі, що* $u_2^*j_{pq}u_1 \neq 0$*. Тоді для* $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha = 0 \in \Omega_+$, $\beta = 1$, *(помітимо, що* $\beta \notin \Omega_+$*) та отримуємо*

$$W(\lambda) = \frac{1}{2\lambda - 2}\begin{bmatrix} \lambda^2 - 3\lambda + 1 & \lambda^2 - \lambda + 1 \\ \lambda^2 - \lambda + 1 & \lambda^2 - 3\lambda + 1 \end{bmatrix}.$$

М. ф. $W(\lambda)$ *має наступні властивості:*

1. $W \in \mathcal{U}_1^r(j_{pq})$;
2. $W(\cdot)$ *не є сингулярною, ні регулярною;*
3. $W(\cdot)$ *не допускає регулярно-сингулярну факторизацію.*

Дійсно, ядро

$$\mathsf{K}_\omega^W(\lambda) = \frac{1}{2(\lambda - 1)(\overline{\omega} - 1)}\begin{bmatrix} 2 - \lambda - \overline{\omega} & \lambda - \overline{\omega} \\ -(\lambda - \overline{\omega}) & -(2 - \lambda - \overline{\omega}) \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

має 1 від'ємний квадрат в $\mathfrak{h}_W^+$*;* $W(\lambda)$ *є* j_{pq}*-унітарною м. в. на* $\mathbb{T}$ *і тому* $W \in \mathcal{U}_1(j_{pq})$*. Перетворення Потапова-Гінзбурга* $S(\lambda) = PG(W(\lambda))$ *від* $W(\lambda)$ *має* *вигляд*

$$S(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 - 3\lambda + 1} \begin{bmatrix} -2\lambda(\lambda-1) & \lambda^2 - \lambda + 1 \\ -(\lambda^2 - \lambda + 1) & 2(\lambda - 1) \end{bmatrix}.$$

Якщо λ_1 *і* λ_2 *це два нулі многочлена* $\lambda^2 - 3\lambda + 1$ *такі, що* $\lambda_1 \in \mathbb{D}$ *і* $\lambda_2 \notin \mathbb{D}$, *то факторизація Крейна-Лангера для* $s_{21}(\lambda)$ *має вигляд*

$$s_{21}(\lambda) = -\frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{\lambda^2 - 3\lambda + 1} = b_\ell^{-1} s_\ell = s_r b_r^{-1},$$

де $b_r(\lambda) = b_\ell(\lambda) = \frac{\lambda - \lambda_1}{1 - \overline{\lambda_1}\lambda}$ *і тому* $s_{21} \in \mathcal{S}_1$ *і* $W \in \mathcal{U}_1^r(j_{pq})$.

Оскільки функція

$$b_\ell s_{22} = \frac{\lambda - \lambda_1}{1 - \overline{\lambda_1}\lambda} \cdot \frac{2(\lambda - 1)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} = \frac{2(\lambda - 1)}{(1 - \overline{\lambda_1}\lambda)(\lambda - \lambda_2)}, \quad \lambda_2 \notin \mathbb{D}$$

зовнішня, множник b_2 *в* (1.45)*відсутній, тобто* $b_2 = 1$.

Функція

$$s_{11} b_r = -\frac{2\lambda(\lambda - 1)}{\lambda^2 - 3\lambda + 1} \cdot \frac{\lambda - \lambda_1}{1 - \overline{\lambda_1}\lambda} = -\frac{2\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda - \lambda_2)(1 - \overline{\lambda_1}\lambda)}$$

має внутрішній множник $b_1 = \lambda$. *Тому асоційована пара* $\mathrm{ap}^r(W)$ *співпадає з* $\{\lambda, 1\}$ *і за Теоремою 2.24 м. ф.* $W(\cdot)$ *не є сингулярною.*

RKPS $\mathcal{K}(W)$ *та підпростір* $\mathcal{L}_W$ *мають вигляд*

$$\mathcal{K}(W) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\lambda - 1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{L}_W = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

За Теоремою 3.19 м. ф. $W(\lambda)$ *не є регулярною, оскільки* $\mathcal{L}_W \neq \mathcal{K}(W)$.

Звернемо увагу, що той факт, що $W(\lambda)$ *не є правою регулярною можна також перевірити безпосередньо. Дійсно,* $W(\lambda)$ *допускає факторизацію*

$$W(\lambda) = W^{(1)}(\lambda) U^{(2)}(\lambda),$$

де $U^{(2)}(\lambda)$ *– це матриця з Прикладу 3.2 та*

$$W^{(1)}(\lambda) = W(\lambda)(U^{(2)}(\lambda))^{-1} = \frac{1}{2(1 - \lambda)} \begin{bmatrix} 3\lambda - 2 & -\lambda(2\lambda - 1) \\ \lambda - 2 & -\lambda(2\lambda - 3) \end{bmatrix}.$$

Відповідне відтворююче ядро $\mathsf{K}_\omega^{W^{(1)}}(\lambda)$ *та RKPS* $\mathcal{K}(W^{(1)})$ *мають вигляд*

$$\mathsf{K}_\omega^{W^{(1)}}(\lambda) = \frac{-1}{2(1-\lambda)(1-\overline{\omega})}\begin{bmatrix} 2\lambda\overline{\omega}-\lambda-\overline{\omega} & 2\lambda\overline{\omega}-3\lambda-\overline{\omega}+2 \\ 2\lambda\overline{\omega}-\lambda-3\overline{\omega}+2 & 2\lambda\overline{\omega}-3\lambda-3\overline{\omega}+4 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{K}(W^{(1)}) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\lambda-1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}.$$

Легко перевірити, що $\kappa_-(\mathcal{K}(W^{(1)})) = 1$ *і тому* $W^{(1)} \in \mathcal{U}_1^r(j_{11})$. *Оскільки* $U^{(2)} \in \mathcal{U}^S(j_{11})$ *та* $U^{(2)} \not\equiv \mathrm{const}$, *це означає, що* $W(\lambda)$ *не є регулярною.*

Крім того, м. ф. $W(\lambda)$ *не допускає регулярно-сингулярну факторизацію. Дійсно, якщо*

$$W(\lambda) = W^{(3)}(\lambda)W^{(4)}(\lambda),\ W^{(3)} \in \mathcal{U}_{\kappa_3}^{r,R}(j_{11}),\ W^{(4)} \in \mathcal{U}_{\kappa_4}^{\ell,S}(j_{11}), \tag{3.53}$$

то $W^{(3)}(\lambda)$ *та* $W^{(4)}(\lambda)$ *є факторами степеня* 1, *оскільки* W *не є ні регулярною, ні сингулярною м. ф. Якщо* $\kappa_3 = 0$, *то м. ф.* $W^{(3)}$ *є фактором Бляшке-Потапова 1-го типу з полюсом в* ∞,

$$W^{(3)}(\lambda) = I + (\lambda-1)vv^*j_{pq}, \quad v^*j_{pq}v = 1, \tag{3.54}$$

де $v \in \mathbb{C}^2$ *визначається з рівності* $v^*j_{pq}W^{(3)}(0) = 0$.

Однак, рівняння $v^*j_{pq}W(0) = 0$ *має єдиний (с точністю до* j_{pq}*-унітарного множника) розв'язок* $v = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ *та цей вектор не задовольняє умові* $v^*j_{pq}v = 1$.

У випадку $\kappa_3 = 1$ *м. ф.* $W^{(3)}$ *допускає представлення* (2.18) *(Див. Приклад 2.4)*

$$W^{(3)}(\lambda) = I - (\lambda-1)vv^*j_{pq}, \quad \text{де} \quad v^*j_{pq}v = -1$$

і знову $v \in \mathbb{C}^2$ *визначається наступним чином* $v^*j_{pq}W^{(3)}(0) = 0$. *Але це означає, що* $v^*j_{pq}W(0) = 0$ *та розв'язок* $v = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ *рівняння* $v^*j_{pq}W(0) = 0$ *не задовольняє умові* $v^*j_{pq}v = -1$.

Це доводить, що м. ф. $W(\lambda)$ *не допускає факторизацію* (3.53).

3.3 Існування регулярно-сингулярної факторизації

Теорема 3.22. *Нехай* $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \mathcal{R}^{m\times m}$. *Тоді наступні твердження еквівалентні:*

(1) W *допускає факторизацію*

$$W = W^{(1)}W^{(2)}, \quad W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^{r,R}(j_{pq}) \quad W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq}) \tag{3.55}$$

з $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$*;*

(2) $\mathcal{L}_W$ *є невиродженим підпростором* $\mathcal{K}(W)$.

Більш того, множники $W^{(1)}$ *та* $W^{(2)}$ *в* (3.55) *є однозначно визначеними з точністю до* j_{pq}*-унітарного множника.*

Доведення. **1.** *Перевірка імплікації* (2) $\Longrightarrow$ (1). Розглянемо факторизацію $W = W^{(1)}W^{(2)}$, що побудована у Теоремі 3.14, в якій $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq})$ та $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}(j_{pq})$. За Лемою 3.6 $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^\ell(j_{pq})$ та в силу Наслідка 3.15 $W^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq})$. Оскільки

$$\mathcal{K}(W^{(1)}) = \overline{\mathcal{L}_W} = \mathcal{L}_W \subset \widetilde{L}_2^m,$$

і $W^{(1)} \in \mathcal{R}^{m\times m}$, то $W^{(1)} \in \widetilde{L}_2^{m\times m}$ та, за Лемою 3.17, $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^{r,R}(j_{pq})$.
2. *Перевірка імплікації* (1) $\Longrightarrow$ (2). Нехай W допускає факторизацію (3.55) з $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$. За Теоремою 3.1 виконується наступна рівність

$$\mathcal{K}(W) = \mathcal{K}(W^{(1)}) + W^{(1)}\mathcal{K}(W^{(2)}). \tag{3.56}$$

Оскільки $W^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^{r,R}(j_{pq})$ не має нулів на Ω_0, то $W^{(1)}\mathcal{K}(W^{(2)}) \cap \widetilde{L}_2^m = \{0\}$. Це означає, що $W^{(1)}\mathcal{K}(W^{(2)}) \cap \mathcal{K}(W^{(1)}) = \{0\}$, та одже за Теоремою 3.1 сума (3.56) є ортогональною. Тому підпростір $\mathcal{L}_W = \mathcal{K}(W) \cap \widetilde{L}_2^m = \mathcal{K}(W^{(1)})$ є невиродженим у $\mathcal{K}(W)$.
3. *Перевірка единості* (3.55). Припустимо, що тепер $W = W^{(3)}W^{(4)}$ інша факторизація W така, що $W^{(3)} \in \mathcal{U}_{\kappa_3}^{r,R}(j_{pq})$ та $W^{(4)} \in \mathcal{U}_{\kappa_4}^S(j_{pq})$.

За Теоремою 3.19 $\mathcal{L}_{W^{(3)}} = \mathcal{K}(W^{(3)})$. Внаслідок цього $\mathcal{K}(W^{(3)}) \subset \widetilde{L}_2^m$, тому $W^{(3)} \in \widetilde{L}_2^{m\times m}$. Використовуючи Лему 3.9, отримуємо рівність

$$\mathrm{ap}^r(W^{(3)}) = \mathrm{ap}^r(W).$$

Це означає, що $(\mathcal{K}(W^{(3)}) =)\mathcal{L}_{W^{(3)}} = \mathcal{L}_W$. Крім того, з огляду на Теорему 3.17

$$\mathcal{K}(W^{(1)}) = \mathcal{L}_{W^{(1)}} = \mathcal{L}_W.$$

Таким чином, за [47, Theorem 4.19] $W^{(3)} = W^{(1)}V$, отже $W^{(4)} = V^{-1}W^{(2)}$, де V постійна j_{pq}-унітарна матриця. □

3.4 Висновки

Результати глави були представлені у [53].

Введено означення регулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. Отримано достатні умови для регулярності узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. У раціональному випадку доведено критерій регулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Також отримано умови існування регулярно-сингулярної факторизації для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Наведено приклад коли такої факторизації не існує.

4 Узагальнені γ-твірні матриці

4.1 Класи $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ та $\mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$

Означення 4.1. *Нехай $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ позначає клас $m \times m$ м. ф.*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} a_{11}(\mu) & a_{12}(\mu) \\ a_{21}(\mu) & a_{22}(\mu) \end{bmatrix}, \tag{4.1}$$

з блоками a_{11}, a_{22} розміру $p \times p$ та $q \times q$ відповідно, таких, що:

(1) $\mathfrak{A}(\mu)$ є вимірною на Ω_0 м. ф., що є j_{pq}-унітарною м. в. на Ω_0;

(2) м. ф. $a_{22}(\mu)$ та $a_{11}(\mu)^*$ оборотні м. в. на $\mu \in \mathbb{T}$ та

$$s_{21}(\mu) = -a_{22}(\mu)^{-1}a_{21}(\mu) = -a_{12}(\mu)^*(a_{11}(\mu)^*)^{-1} \tag{4.2}$$

є граничним значенням $s_{21}(\lambda) \in \mathcal{S}^{q\times p}_\kappa$;

(3) $(a^\#_{11})^{-1}b_r = a_1 \in \mathcal{S}^{p\times p}_{out}$, $b_\ell a^{-1}_{22} = a_2 \in \mathcal{S}^{q\times q}_{out}$, де b_ℓ, b_r добутки Бляшке-Потапова степеня κ, які визначаються факторизацією Крейна-Лангера для s_{21}.

М. ф. класу $\mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ називаються узагальненими правими γ-твірними матрицями.

Означення 4.2. *Нехай $\mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$ позначає клас $m \times m$ м. ф. $\mathfrak{A}(\mu)$ вигляду* (4.1) *таких, що:*

(1) $\mathfrak{A}(\mu)$ є вимірною на Ω_0, j_{pq}-унітарною м. в. на Ω_0 м. ф.;

(2) м. ф. $a_{22}(\mu)$ та $a_{11}(\mu)^*$ оборотні м. в. на $\mu \in \mathbb{T}$ та

$$s_{12}(\mu) = a_{12}(\mu)a_{22}(\mu)^{-1} = (a_{11}(\mu)^{-1})^* a_{21}(\mu)^* \in \mathcal{S}^{p\times q}_\kappa; \tag{4.3}$$

(3) $\mathfrak{b}_\ell(a^\#_{11})^{-1} = \mathfrak{a}_1 \in \mathcal{S}^{p\times p}_{out}$, $a^{-1}_{22}\mathfrak{b}_r = \mathfrak{a}_2 \in \mathcal{S}^{q\times q}_{out}$, де $\mathfrak{b}_\ell$, $\mathfrak{b}_r$ добутки Бляшке-Потапова степеня κ, які визначаються факторизацією Крейна-Лангера для s_{12}.

М. ф. класу $\mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq})$ називаються узагальненими лівими γ-твірними матрицями.

Для того, щоб показати зв'язок між лівими та правими узагальненими γ-твірними м. ф., введемо наступне позначення:

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(\mu) = \begin{bmatrix} \widetilde{a}_{11} & \widetilde{a}_{21} \\ \widetilde{a}_{12} & \widetilde{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathfrak{A}(\overline{\mu})^*, & \text{якщо} \quad \Omega_0 = \mathbb{T}; \\ \mathfrak{A}(-\overline{\mu})^* & \text{якщо} \quad \Omega_0 = \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Пропозиція 4.3.

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \Longleftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}). \tag{4.5}$$

Доведення. Нехай $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$. Перевіримо умови Означення 4.2 для м. ф. $\widetilde{\mathfrak{A}}$, що задана формулою (4.4). Очевидно, що (1) виконана.

$$\widetilde{s}_{12} = \widetilde{a}_{21}\widetilde{a}_{22}^{-1} = (a_{22}^{-1}a_{21})^\sim = -\widetilde{s}_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}.$$

Отримуємо факторизацію Крейна-Лангера для $\widetilde{s}_{12}$

$$\widetilde{s}_{12} = -\widetilde{s}_{21} = -(b_\ell^{-1}s_\ell)^\sim = -(s_r b_r^{-1})^\sim = (-\widetilde{s}_\ell)\widetilde{b}_\ell^{-1} = \widetilde{b}_r^{-1}(-\widetilde{s}_r),$$

тоді

$$\widetilde{s}_{12} = \widetilde{\mathfrak{b}}_\ell^{-1}\widetilde{\mathfrak{s}}_\ell = \widetilde{\mathfrak{s}}_r\widetilde{\mathfrak{b}}_r^{-1} \quad \text{де} \quad \begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{b}}_r &= \widetilde{b}_\ell, & \widetilde{\mathfrak{s}}_r &= -\widetilde{s}_\ell, \\ \widetilde{\mathfrak{b}}_\ell &= \widetilde{b}_r, & \widetilde{\mathfrak{s}}_\ell &= -\widetilde{s}_r. \end{aligned}$$

Тоді

$$\widetilde{\mathfrak{b}}_\ell(\widetilde{a}_{11}^\#)^{-1} = \widetilde{b}_r(\widetilde{a}_{11}^\#)^{-1} = ((a_{11}^\#)^{-1}b_r)^\sim = \widetilde{a}_1 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q},$$

$$\widetilde{a}_{22}^{-1}\widetilde{\mathfrak{b}}_r = \widetilde{a}_{22}^{-1}\widetilde{b}_\ell = (b_\ell a_{22}^{-1})^\sim = \widetilde{a}_2 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}.$$

Тобто $\widetilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Очевидно, зворотне твердження теж є вірним. □

Означення 4.4. *Упорядкована пара $\{b_1, b_2\}$ внутрішніх м. ф. $b_1 \in \mathcal{N}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{N}^{q\times q}$ називаєтьcя знаменником м. ф. $f \in \mathcal{N}^{p\times q}$, якщо $b_1 f b_2 \in \mathcal{N}_+^{p\times q}$. Множину знаменників м. ф. f будемо позначати $den(f)$.*

Теорема 4.5. *Нехай $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ і b_ℓ, s_ℓ, b_r, s_r визначені факторизацією Крейна-Лангера м. ф. $s_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$. Нехай c_ℓ, d_ℓ, c_r, d_r визначені рівністю (2.6) і нехай*

$$f_0^r := (-a_{11}d_\ell + a_{12}c_\ell)a_2, \tag{4.6}$$

Тоді:

(i) f_0^r *допускає дуальне представлення*

$$f_0^r = a_1(c_r a_{21}^{\#} - d_r a_{22}^{\#}) \tag{4.7}$$

і, якщо $den(f_0^r) \neq \emptyset$ *і* $\{b_1, b_2\} \in den(f_0^r)$, *то*

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{A}(\lambda) \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}), \quad \{b_1, b_2\} \in ap^r(W) \tag{4.8}$$

і тому $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m}$. *Навпаки, якщо*

$$W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq}) \quad і \quad \{b_1, b_2\} \in ap^r(W), \tag{4.9}$$

то

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} W(\lambda) \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \quad і \quad \{b_1, b_2\} \in den(f_0^r);$$

(ii) якщо $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m}$, *то* $den(f_0^r) \neq \emptyset$ *і, крім того, для деякого вибору м. ф.* c_ℓ, d_ℓ, c_r, d_r *в* (2.6) $f_0^r \in \Pi$;

(iii) якщо $\{c_\ell^{(i)}, d_\ell^{(i)}, c_r^{(i)}, d_r^{(i)}\}$ $(i = 1, 2)$ *два набори м. ф., що задовольняють рівності* (2.6) *і*

$$f_0^{r,i} = (-a_{11} d_\ell^{(i)} + a_{12} c_\ell^{(i)}) a_2, \quad i \in \{1, 2\}, \tag{4.10}$$

то $den(f_0^{r,1}) = den(f_0^{r,2})$.

Доведення. *(i)* Нехай $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$. Тоді з формул (4.1), (1.35), (4.2) випливає, що

$$-a_{21}d_\ell + a_{22}c_\ell = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_\ell \\ c_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{22}s_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_\ell \\ c_\ell \end{bmatrix}$$
$$= a_{22} b_\ell^{-1} \begin{bmatrix} -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_\ell \\ c_\ell \end{bmatrix} = a_2^{-1}(s_\ell d_\ell + b_\ell c_\ell) = a_2^{-1}.$$

Нехай f_0^r визначена формулою (4.6). Тоді

$$f_0^r = (-a_{11}d_\ell + a_{12}c_\ell)(-a_{21}d_\ell + a_{22}c_\ell)^{-1}.$$

Тотожність

$$\begin{bmatrix} c_r & -d_r \end{bmatrix} \mathfrak{A}^\# j_{pq} \mathfrak{A} \begin{bmatrix} -d_\ell \\ c_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_r & -d_r \end{bmatrix} j_{pq} \begin{bmatrix} -d_\ell \\ c_\ell \end{bmatrix} = 0$$

означає, що

$$(c_r a_{11}^\# - d_r a_{12}^\#)(-a_{11}d_\ell + a_{12}c_\ell) = (c_r a_{21}^\# - d_r a_{22}^\#)(-a_{21}d_\ell + a_{22}c_\ell).$$

Отже f_0^r допускає дуальне представлення

$$f_0^r = (c_r a_{11}^\# - d_r a_{12}^\#)^{-1}(c_r a_{21}^\# - d_r a_{22}^\#).$$

Використовуючи тотожність

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_r & -d_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^\# \\ a_{12}^\# \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_r & -d_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^\# \\ -s_{21}a_{11}^\# \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_r & -d_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ -s_r b_r^{-1} \end{bmatrix} b_r a_1^{-1} = a_1^{-1} \end{aligned}$$

отримуємо (4.7).

Нехай $\{b_1, b_2\} \in den(f_0^r)$, тобто $b_1 f_0^r b_2 \in \mathcal{N}_+^{p\times q}$. Оскільки $b_1 f_0 b_2 \in L_\infty^{p\times q}$, то за Теоремою Смірнова (Теорема 1.7)

$$b_1 f_0^r b_2 \in H_\infty^{p\times q}.$$

Знайдемо перетворення Потапова-Гінзбурга $S(\lambda) = PG(W(\lambda))$ від м. ф. $W(\lambda)$, див. (2.1). З формули (4.8) випливає, що

$$s_{21} = -w_{22}^{-1}w_{21} = -a_{22}^{-1}a_{21} = -b_\ell^{-1}s_\ell, \tag{4.11}$$

$$s_{22} = w_{22}^{-1} = a_{22}^{-1}b_2 = b_\ell^{-1}a_2 b_2, \tag{4.12}$$

$$
\begin{aligned}
s_{11} &= w_{11}^{-*} = b_1 a_1 a_1^{-1} b_1^{-1} w_{11}^{-*} \qquad (4.13)\\
&= b_1 a_1 (c_r a_{11}^* - d_r a_{12}^*) b_1^{-1} w_{11}^{-*}\\
&= b_1 a_1 (c_r w_{11}^* - d_r w_{12}^*) w_{11}^{-*}\\
&= b_1 a_1 (c_r + d_r s_{21}),\\
s_{12} &= -w_{11}^{-*} w_{21}^* = b_1 a_1 (c_r w_{11}^* - d_r w_{12}^*) w_{11}^{-*} w_{21}^* \qquad (4.14)\\
&= b_1 a_1 (c_r w_{11}^* - d_r w_{22}^* + d_r s_{22}) = b_1 f_0 b_2 + b_1 a_1 d_r s_{22}.
\end{aligned}
$$

За допомогою (4.11)-(4.14) отримуємо формулу

$$
\begin{aligned}
S(\lambda) &= \begin{bmatrix} b_1 a_1 c_r + b_1 a_1 d_r s_{21} & b_1 f_0 b_2 + b_1 a_1 d_r s_{22} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} b_1 a_1 c_r & b_1 f_0 b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 a_1 d_r \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}\\
&= T(\lambda) + \begin{bmatrix} b_1 a_1 d_r \\ I \end{bmatrix} b_\ell^{-1} \begin{bmatrix} -s_\ell & a_2 b_2 \end{bmatrix}, \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

де $T(\lambda) \in H_\infty^{m\times m}$. З (4.15) випливає, що $M_\pi(S, \Omega_+) \le \kappa$. З іншого боку

$$
M_\pi(s_{21}, \Omega_+) = M_\pi(-b_\ell^{-1} s_\ell, \Omega_+) = \kappa,
$$

і, отже,

$$
M_\pi(S, \Omega_+) = \kappa.
$$

Таким чином, $S \in \mathcal{S}_\kappa^{m\times m}$, тому $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$.

Тепер доведемо (ii). Оскільки $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m}$, то $a_{11}, a_{12}, a_2 \in \Pi$. За Пропозицією 2.1 м. ф. c_ℓ і d_ℓ можна вибрати з Π. Тому, $f_0^r \in \Pi$.

Доведемо зворотнє твердження з (i). Нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$, $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$ і нехай

$$
\mathfrak{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} W(\lambda). \qquad (4.16)
$$

Оскільки W є j_{pq}-унітарною на Ω_0, то $\mathfrak{A}$ є вимірною. W допускає псевдопродовження на Ω_-, тому $\mathfrak{A} \in \mathcal{N}^{m\times m}$ і теж допускає псевдопродовження на Ω_-.

Розглянемо

$$\mathfrak{s}_{21} = -a_{22}^{-1}a_{21} = -w_{22}^{-1}b_2^{-1}b_2w_{21} = -w_{22}^{-1}w_{21} = s_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}. \qquad (4.17)$$

Далі, оскільки $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$, то

$$(a_{11}^{\#})^{-1}b_r = (b_1^{-1}w_{11}^{\#})^{-1}b_r = b_1^{-1}s_{11}b_r = b_1^{-1}b_1a_1 = a_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}, \qquad (4.18)$$

$$b_\ell a_{22}^{-1} = b_\ell(b_2w_{22})^{-1} = b_\ell w_{22}^{-1}b_2^{-1} = b_\ell s_{22}b_2^{-1} = a_2b_2b_2^{-1} = a_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}.$$

Тобто за Означенням 4.1 $\mathfrak{A}$ належить до класу $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$. Окрім цього, м. ф. f_0^r, що побудована за формулою (4.6), допускає псевдопродовження. Доведемо, що $\{b_1, b_2\} \in den(f_0^r)$. Це випливає з тотожності

$$b_1f_0^rb_2 = b_1(-a_{11}d_\ell + a_{12}c_\ell)a_2b_2 = (-w_{11}d_\ell + w_{12}c_\ell)a_2b_2 \in H_\infty^{p\times q}.$$

(iii) Нехай $\{b_1, b_2\} \in den(f_0^{r,1})$, то за твердженням (i) $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ і $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$. Нехай

$$K^{(i)} = (-w_{11}d_\ell^{(i)} + w_{12}c_\ell^{(i)})a_2b_2, \quad i = \{1, 2\}.$$

Тоді за [47, Theorem 4.11]

$$(b_1a_1)^{-1}(K^{(1)} - K^{(2)})(a_2b_2)^{(-1)} \in H_\infty^{p\times q}. \qquad (4.19)$$

Оскільки $K^{(i)} = b_1f_0^{r,i}b_2$ $(i = 1, 2)$, то за фомулою (4.19) отримуємо

$$f_0^{r,1} - f_0^{r,2} \in H_\infty^{p\times q}.$$

Тому, $\{b_1, b_2\} \in den(f_0^{r,2})$. Очевидно, зворотне твердження теж є вірним. □

Аналогічне твердження справедливе і для класу узагальнених лівих γ-твірних матриць.

Лема 4.6. *Нехай* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$, $\mathfrak{b}_\ell, \mathfrak{s}_\ell, \mathfrak{b}_r, \mathfrak{s}_r$ *визначені в факторизації Крейна-Лангера м. ф.* $s_{12} \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$. *Нехай* $\mathfrak{c}_\ell, \mathfrak{d}_\ell, \mathfrak{c}_r, \mathfrak{d}_r$ *визначені тотожністю* (2.34) *і нехай*

$$f_0^\ell := \mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_ra_{11} + \mathfrak{c}_ra_{21}). \qquad (4.20)$$

Тоді:

(i) f_0^ℓ *допускае дуальне представлення*

$$f_0^\ell = (a_{12}^{\#}\mathfrak{c}_\ell - a_{22}^{\#}\mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1. \tag{4.21}$$

і, якщо $den(f_0^\ell) \neq \emptyset$ *і* $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in den(f_0^\ell)$, *то*

$$W(\lambda) = \mathfrak{A}(\lambda)\begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{b}_2^{-1} \end{bmatrix} \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \tag{4.22}$$

і $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$. *Навпаки, якщо*

$$W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq}) \quad i \quad \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W). \tag{4.23}$$

Тоді

$$\mathfrak{A}(\lambda) = W(\lambda)\begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{b}_2 \end{bmatrix} \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \quad i \quad \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in den(f_0^\ell);$$

(ii) якщо $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m}$, *то* $den(f_0^\ell) \neq \emptyset$ *і, більш того, м. ф.* $\mathfrak{c}_\ell, \mathfrak{d}_\ell, \mathfrak{c}_r, \mathfrak{d}_r$ *в* (2.34) *можна вибрати з* Π *і тоді* $f_0^\ell \in \Pi$;

(iii) якщо $\{\mathfrak{c}_\ell^{(i)}, \mathfrak{d}_\ell^{(i)}, \mathfrak{c}_r^{(i)}, \mathfrak{d}_r^{(i)}\}$ $(i = 1, 2)$ *два набори, що задовольняють тотожності* (2.34) *і*

$$f_0^{\ell,i} = \mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r^{(i)}a_{11} + \mathfrak{c}_r^{(i)}a_{21}), \qquad i = \{1, 2\}.$$

то $den f_0^{\ell,1} = den f_0^{\ell,2}$.

Доведення. Нехай $\mathfrak{A} \in \Pi \cap \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$. Розглянемо тотожність

$$-\mathfrak{d}_r a_{12} + \mathfrak{c}_r a_{22} = \begin{bmatrix} -\mathfrak{d}_r & \mathfrak{c}_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathfrak{d}_r & \mathfrak{c}_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \mathfrak{b}_r \end{bmatrix}\mathfrak{a}_2^{-1} = \mathfrak{a}_2^{-1}. \tag{4.24}$$

Нехай f_0^ℓ визначена за формулою (4.20). Отже, (4.20) можна переписати у вигляді

$$f_0^\ell = (-\mathfrak{d}_r a_{12} + \mathfrak{c}_r a_{22})^{-1}(-\mathfrak{d}_r a_{11} + \mathfrak{c}_r a_{21}). \tag{4.25}$$

Тотожність

$$\begin{bmatrix} -\mathfrak{d}_r & \mathfrak{c}_r \end{bmatrix} \mathfrak{A} j_{pq} \mathfrak{A}^{\#} \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_\ell \\ -\mathfrak{d}_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathfrak{d}_r & \mathfrak{c}_r \end{bmatrix} j_{pq} \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_\ell \\ -\mathfrak{d}_\ell \end{bmatrix} = 0$$

означає, що

$$(-\mathfrak{d}_r a_{11} + \mathfrak{c}_r a_{21})(a_{11}^{\#}\mathfrak{c}_\ell - a_{21}^{\#}\mathfrak{d}_\ell) = (-\mathfrak{d}_r a_{12} + \mathfrak{c}_r a_{22})(a_{12}^{\#}\mathfrak{c}_\ell - a_{22}^{\#}\mathfrak{d}_\ell),$$

тому f_0^ℓ допускає дуальне представлення

$$f_0^\ell = (a_{12}^{\#}\mathfrak{c}_\ell - a_{22}^{\#}\mathfrak{d}_\ell)(a_{11}^{\#}\mathfrak{c}_\ell - a_{21}^{\#}\mathfrak{d}_\ell)^{-1} = (a_{12}^{\#}\mathfrak{c}_\ell - a_{22}^{\#}\mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1, \tag{4.26}$$

що співпадає з (4.21).

Нехай $\{\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1\} \in den(f_0^\ell)$, тобто

$$\mathfrak{b}_2 f_0^\ell \mathfrak{b}_1 \in H_\infty^{p\times q} \tag{4.27}$$

та нехай $S = PG(W)$ – перетворення Потапова-Гінзбурга м. ф. W. Формула (4.22) означає, що

$$s_{12} = w_{12}w_{22}^{-1} = a_{12}\mathfrak{b}_2^{-1}\mathfrak{b}_2 a_{22}^{-1} = a_{12}a_{22}^{-1} = \mathfrak{b}_\ell^{-1}\sigma_\ell, \tag{4.28}$$

$$s_{22} = w_{22}^{-1} = (a_{22}\mathfrak{b}_2^{-1})^{-1} = \mathfrak{b}_2 a_{22}^{-1}, \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} s_{11} &= w_{11}^{-*} = w_{11}^{-*}\mathfrak{b}_1^{-1}\mathfrak{a}_1^{-1}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = w_{11}^{-*}\mathfrak{b}_1^{-1}(a_{11}^*\mathfrak{c}_\ell - a_{21}^*\mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \\ &= w_{11}^{-*}(w_{11}^*\mathfrak{c}_\ell - w_{21}^*\mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 = (\mathfrak{c}_\ell + s_{12}\mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1, \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} s_{21} &= w_{12}^* w_{11}^{-*} = w_{12}^* w_{11}^{-*}\mathfrak{b}_1^{-1}\mathfrak{a}_1^{-1}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \\ &= w_{12}^* w_{11}^{-*}(w_{11}^*\mathfrak{c}_\ell - w_{21}^*\mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \\ &= (w_{12}^*\mathfrak{c}_\ell - w_{12}w_{11}^{-*}w_{21}^*\mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \\ &= (w_{12}^*\mathfrak{c}_\ell + s_{22}\mathfrak{d}_\ell - w_{22}^*\mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \\ &= \mathfrak{b}_2(a_{12}^*\mathfrak{c}_\ell - a_{22}^*\mathfrak{d}_\ell)\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + s_{22}\mathfrak{d}_\ell\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 \\ &= \mathfrak{b}_2 f_0^*\mathfrak{b}_1 + s_{22}\mathfrak{d}_\ell\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Формули (4.28)-(4.31) дозволяють переписати $S(\lambda)$ у вигляді

$$
\begin{aligned}
S(\lambda) &= \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_\ell \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 + s_{12}\mathfrak{d}_\ell \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 & s_{12} \\ \mathfrak{b}_2 f_0^\ell \mathfrak{b}_1 + s_{22}\mathfrak{d}_\ell \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 & s_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_\ell \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 & 0 \\ \mathfrak{b}_2 f_0^\ell \mathfrak{b}_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_\ell \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 & I_q \end{bmatrix} \\
&= T(\lambda) + \begin{bmatrix} \sigma_r \mathfrak{b}_r^{-1} \\ \mathfrak{b}_2 \mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_r^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_\ell \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 & I_q \end{bmatrix} \\
&= T(\lambda) + \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \mathfrak{b}_2 \mathfrak{a}_2 \end{bmatrix} \mathfrak{b}_r^{-1} \begin{bmatrix} \mathfrak{d}_\ell \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 & I_q \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

де $T(\lambda) \in H_\infty^{m\times m}$. З формул (4.32) випливає, що

$$M_\pi(S, \Omega_+) \le \kappa.$$

З іншого боку

$$M_\pi(s_{21}, \Omega_+) = M_\pi(\sigma_r \mathfrak{b}_r^{-1}, \Omega_+) = \kappa,$$

тому

$$M_\pi(S, \Omega_+) = \kappa.$$

Таким чином, $S \in \mathcal{S}_\kappa^{m\times m}$ і тому $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$.

Навпаки, нехай $W \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$, $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$ і нехай

$$\mathfrak{A}(\lambda) = W(\lambda) \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathfrak{b}_2 \end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

Тоді м. ф. $\mathfrak{A}(\lambda)$ є вимірної і j_{pq}-унітарною на Ω_0. Окрім цього $\mathfrak{A}$ належить до $\mathcal{N}^{m\times m}$ і допускає псевдопродовження в Ω_-.

Розглянемо

$$\mathfrak{s}_{12} = a_{12}a_{22}^{-1} = w_{12}\mathfrak{b}_2\mathfrak{b}_2^{-1}w_{22} = w_{12}w_{22} \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}.$$

Далі, оскільки $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(W)$, то

$$a_{22}^{-1}\mathfrak{b}_r = \mathfrak{b}_2^{-1}w_{22}^{-1}\mathfrak{b}_r = \mathfrak{a}_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q},$$

$$\mathfrak{b}_\ell(a_{11}^{\#})^{-1} = \mathfrak{b}_\ell(w_{11}\mathfrak{b}_1^{-1})^{-\#} = \mathfrak{b}_\ell s_{11}\mathfrak{b}_1^{-1} = \mathfrak{a}_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}.$$

Отже, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$.

Твердження (ii) і (iii) доводяться так само, як в Теоремі 4.5. Тому $f_0^\ell \in \Pi$. Покажемо, що $\{\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1\} \in den(f_0^\ell)$. Це випливає з тотожності

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_2 f_0^\ell \mathfrak{b}_1 &= \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r a_{11} + \mathfrak{c}_r a_{21})^{-1}\mathfrak{b}_1 \\
&= \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r w_{11}\mathfrak{b}_1^{-1} + \mathfrak{c}_r w_{21}\mathfrak{b}_1^{-1})\mathfrak{b}_1 \\
&= \mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r w_{11} + \mathfrak{c}_r w_{21}).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Належність $\mathfrak{b}_2\mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r w_{11} + \mathfrak{c}_r w_{21}) \in H_\infty^{q\times p}$ доведено в (2.42). □

Означення 4.7. *Визначимо знаменник для узагальненого правого класу γ-твірних матриць $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$:*

$$den^r(\mathfrak{A}) := den(f_0^r),$$

та знаменник для узагального лівого класу γ-твірних матриць $\mathfrak{A} \in \Pi^{m\times m} \cap \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$:

$$den^\ell(\mathfrak{A}) := den(f_0^\ell).$$

Враховуючи твердження (iii) Теореми 4.5 і Леми 4.6 ці означення коректні.

Лема 4.8. *Нехай $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \widetilde{L}_2^{m\times m}$ і м. ф. $s_{21} = -a_{22}^{-1}a_{21}$ має факторизацію Крейна-Лангера*

$$s_{21}(\lambda) = b_\ell(\lambda)^{-1}s_\ell(\lambda) = s_r(\lambda)b_r(\lambda)^{-1} \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{21}}^+).$$

Тоді для будь-якої м. ф. $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ маємо

$$M_\zeta(b_\ell - s_\ell\varepsilon, \Omega_+) = M_\zeta(b_r - \varepsilon s_r, \Omega_+) = \kappa. \tag{4.35}$$

Доведення. В силу узагальненої Теореми Руше (Теорема 1.6)

$$M_\zeta(b_\ell - s_\ell\varepsilon, \Omega_+) \le M_\zeta(b_\ell, \Omega_+) = \kappa,$$

$$M_\zeta(b_r - \varepsilon s_r, \Omega_+) \le M_\zeta(b_r, \Omega_+) = \kappa.$$

Доведення включення $(b_\ell - s_\ell\varepsilon)^{-1} \in \widetilde{L}_1$ міститься у Лемі 4.22 з [47]. Наведемо його для повноти викладу.

Нехай $u \in \mathbb{C}^q$ і $\|u\| = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \|(I_q - \varepsilon^* s_{21}^*)u\| &\geq 1 - \|s_{21}^* u\| \geq \frac{1}{2}(1 - \|s_{21}^* u\|^2) \\ &= \frac{1}{2}u^*(I_q - s_{21}s_{21}^*)u = \frac{1}{2}u^* a_{22}^{-1} a_{22}^{-*} u. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Звідси випливає, що

$$\|(I_q - s_{21}\varepsilon)^{-1}\| = \|(I_q - \varepsilon^* s_{21}^*)^{-1}\| \leq 2\|a_{22}a_{22}^*\|.$$

З умови $\mathfrak{A} \in \widetilde{L}_2^{m\times m}$ слідує, що $(1 - s_{21}\varepsilon)^{-1} \in \widetilde{L}_1^{q\times q}$, отже, справедлива перша рівність в (4.35). Доведення другої рівності в (4.35) аналогічно. □

Лема 4.9. *Нехай $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \widetilde{L}_2^{m\times m}$ і м. ф. $s_{12} = a_{12}a_{22}^{-1}$ має факторизацію Крейна-Лангера*

$$s_{12}(\lambda) = \mathfrak{b}_\ell(\lambda)^{-1}\mathfrak{s}_\ell(\lambda) = \mathfrak{s}_r(\lambda)\mathfrak{b}_r(\lambda)^{-1} \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{21}}^+). \tag{4.37}$$

Тоді для будь-якої м. ф. $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ маємо

$$M_\zeta(\mathfrak{b}_r + \varepsilon\mathfrak{s}_r, \Omega_+) = M_\zeta(\mathfrak{b}_\ell + \mathfrak{s}_\ell\varepsilon, \Omega_+) = \kappa. \tag{4.38}$$

Доведення. Якщо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \widetilde{L}_2^{m\times m}$ і s_{12} має факторизацію Крейна-Лангера (4.37), то за Пропозицією 4.3 $\widetilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \widetilde{L}_2^{m\times m}$, $\widetilde{s}_{21} = -\widetilde{s}_{12}$ і має факторизацію Крейна-Лангера

$$\widetilde{s}_{21}(\lambda) = (-\widetilde{\mathfrak{s}}_\ell(\lambda))\widetilde{\mathfrak{b}}_\ell(\lambda)^{-1} = \widetilde{\mathfrak{b}}_r(\lambda)^{-1}(-\widetilde{\mathfrak{s}}_r(\lambda)) \quad (\lambda \in \mathfrak{h}_{s_{21}}^+).$$

Тоді за Лемою 4.8 для будь-якої м. ф. $\varepsilon \in \mathcal{S}^{q\times p}$ маємо

$$M_\zeta(\widetilde{\mathfrak{b}}_r - (-\widetilde{\mathfrak{s}}_r)\varepsilon, \Omega_+) = M_\zeta(\widetilde{\mathfrak{b}}_\ell - \varepsilon(-\widetilde{\mathfrak{s}}_\ell), \Omega_+) = \kappa, \tag{4.39}$$

і, отже,

$$M_\zeta(\mathfrak{b}_r + \varepsilon\mathfrak{s}_r, \Omega_+) = M_\zeta(\mathfrak{b}_\ell + \mathfrak{s}_\ell\varepsilon, \Omega_+) = \kappa.$$

□

4.2 Сингулярні, регулярні и сильно регулярні матриці-функції з класів $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ і $\mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$

Означення 4.10. *М. ф. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ називаеться*

(1) право-сингулярною ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,S}$), якщо $f_0^r = (-a_{11}d_\ell + a_{12}c_\ell)a_2 \in H_\infty^{p\times q}$;

(2) право-регулярною ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,R}$), якщо з факторизації $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, з $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}_{\kappa_1}^r(j_{pq})$ і $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{M}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq})$, $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$ випливає, що $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathrm{const}$;

(3) сильно право-регулярною ($\mathfrak{M}_\kappa^{r,sR}(j_{pq})$), якщо знайдеться м. ф. $f \in T_{\mathfrak{A}}^r[\mathcal{S}^{p\times p}]$ така, що $\|f\|_\infty < 1$.

Означення 4.11. *М. ф. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$ називаеться*

(1) ліво-сингулярною ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,S}$), якщо $f_0^\ell = \mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r a_{11} + \mathfrak{c}_r a_{21}) \in H_\infty^{p\times q}$;

(2) ліво-регулярною ($\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,R}$), якщо у факторизації $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1$, де $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{M}_{\kappa_1}^\ell(j_{pq})$ і $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{M}_{\kappa_2}^{rS}(j_{pq})$, $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$ випливає, що $\mathfrak{A}_2 \equiv \mathrm{const}$;

(3) сильно ліво-регулярною ($\mathfrak{M}_\kappa^{\ell,sR}(j_{pq})$), якщо знайдеться м. ф. $f \in T_{\mathfrak{A}}^\ell[\mathcal{S}^{p\times p}]$ така, що $\|f\|_\infty < 1$.

У випадку $\kappa = 0$, ліво-сингулярна матриця співпадає з право-сингулярною матрицею, отже це означення співпадає з означенням в [31].

Лема 4.12. *Нехай $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ і $s = s_{21}$ має факторизацію Крейна-Лангера* (2.5). *Тоді*

$$s \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p} \quad i \quad \ln\det\{I_q - s_\ell s_\ell^*\} \in \widetilde{L}_1, \quad \ln\det\{I_p - s_r^* s_r\} \in \widetilde{L}_1 \tag{4.40}$$

Навпаки, якщо s задовольняє умовам (4.40), *то існує м. ф. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$, така що $s = -a_{22}^{-1}a_{21}$. При цьому $\mathfrak{A}$ визначена однозначно с точністю до лівого діагонального j_{pq}-унітарного множника формулою*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} a_-(\mu) & 0 \\ 0 & a_+(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r^* & -s_r^* \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix}, \tag{4.41}$$

де a_+ і a_- – суттєво єдині розв'язки рівнянь

$$a_+^{-1}a_+^{-*} = I_q - s_\ell s_\ell^*, \quad a_+^{-1} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}, \tag{4.42}$$

$$a_-^{-1}a_-^{-*} = I_q - s_r^* s_r, \quad a_-^{-\#} \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}. \tag{4.43}$$

Доведення. Якщо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$, то $s = s_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}$. З j_{pq}-унітарності м. ф. $\mathfrak{A}$ випливає, що

$$a_{21}a_{21}^* - a_{22}a_{22}^* = -I_q,$$

тоді

$$I_q - s_{21}s_{21}^* = a_{22}^{-1}a_{22}^{-*}.$$

Оскільки $s_{21} = b_\ell^{-1}s_\ell$, то

$$b_\ell b_\ell^* - s_\ell s_\ell^* = (b_\ell a_{22}^{-1})(a_{22}^{-*}b_\ell^*),$$

$$I_q - s_\ell s_\ell^* = a_2 a_2^*,$$

де $a_2 = a_+^{-1} = b_\ell a_{22}^{-1}$.

Аналогічно, з тотожності

$$a_{11}a_{11}^* - a_{12}a_{12}^* = I_p$$

і рівностей (4.2) і $s_{21} = s_r b_r^{-1}$, отримуємо

$$I_p - (a_{11}^{-1}a_{12})(a_{12}^* a_{11}^{-*}) = a_{11}^{-1}a_{11}^{-*},$$

$$I_p - s^* s = a_{11}^{-1}a_{11}^{-*},$$

$$b_r^* b_r - s_r^* s_r = a_1^* a_1,$$

де $a_1 = a_{11}^{-*}b_r = a_-^{-*}$.

Таким чином, м. ф. $I_q - s_\ell s_\ell^*$, $I_p - s_r^* s_r$ допускають факторизації (4.42), (4.43) і, отже, (див. [34], Теорема 3.78)

$$\ln\det\{I_q - s_\ell s_\ell^*\} \in \widetilde{L}_1, \quad \ln\det\{I_p - s_r^* s_r\} \in \widetilde{L}_1.$$

І навпаки, якщо виконана умова (4.40), то факторизаційні задачи (4.42), (4.43) мають розв'язок. В силу Теореми Засухіна-Крейна (див. [71, Теорема 14]) існують $a_1 \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}$, $a_2 \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}$, такі що

$$I_q - s_\ell s_\ell^* = a_2 a_2^*,$$

$$I_p - s_r^* s_r = a_1^* a_1.$$

Якщо факторизація Крейна-Лангера м. ф. s має вигляд

$$s = b_\ell^{-1} s_\ell = s_r b_r^{-1},$$

то покладемо

$$a_{11} := a_1^{-1} b_r^*, \quad a_{12} := -a_1^{-*} s_r,$$

$$a_{21} := -a_2^{-1} s_\ell, \quad a_{22} := a_2^{-1} b_\ell.$$

Тоді матриця $\mathfrak{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$ належить до класу $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ і допускає факторизацію

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} a_1^{-*} & 0 \\ 0 & a_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_r^* & -s_r^* \\ -s_\ell & b_\ell \end{bmatrix}. \tag{4.44}$$

Вважаючи, що $a_+ = a_2^{-1}$, $a_- = a_1^{-\#}$, отримуємо (4.41). □

Лема 4.13. *Нехай $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$ і $s := s_{12}$ має факторизацію Крейна-Лангера* (4.37)*. Тоді*

$$s \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q} \quad i \quad \ln\det\{I_q - \mathfrak{s}_\ell^* \mathfrak{s}_\ell\} \in \widetilde{L}_1, \quad \ln\det\{I_p - \mathfrak{s}_r \mathfrak{s}_r^*\} \in \widetilde{L}_1 \tag{4.45}$$

Навпаки, якщо s задовольняє умовам (4.45)*, то існує м. ф. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$, така що $s = a_{12}a_{22}^{-1}$. При цьому $\mathfrak{A}$ визначена однозначно с точністю до правого діагонального j_{pq}-унітарного множника за формулою*

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell^* & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{s}_\ell & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_-(\mu) & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_+(\mu) \end{bmatrix}, \tag{4.46}$$

де $\mathfrak{a}_+$ і $\mathfrak{a}_-$ суттево єдині розв'язки рівнянь

$$\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_2^* = \mathfrak{a}_+^{-1} \mathfrak{a}_+^{-*} = I_q - \mathfrak{s}_r \mathfrak{s}_r^*, \quad \mathfrak{a}_-^{-1} \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}, \tag{4.47}$$

$$\mathfrak{a}_1^* \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_-^{-1} \mathfrak{a}_-^{-*} = I_q - \mathfrak{s}_\ell^* \mathfrak{s}_\ell, \quad \mathfrak{a}_+^{-1} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}. \tag{4.48}$$

Доведення. Якщо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$ і $s = s_{12} \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$, то за Пропозицією 4.3

$\widetilde{\mathfrak{A}} =\in \mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq})$ і за Лемою 4.12

$$\ln\det\{I_q - \widetilde{\mathfrak{s}}_\ell \widetilde{\mathfrak{s}}_\ell^*\} \in \widetilde{L}_1 \quad \Longrightarrow \quad \ln\det\{I_q - \mathfrak{s}_\ell^* \mathfrak{s}_\ell\} \in \widetilde{L}_1, \tag{4.49}$$

$$\ln\det\{I_q - \widetilde{\mathfrak{s}}_r^* \widetilde{\mathfrak{s}}_r\} \in \widetilde{L}_1 \quad \Longrightarrow \quad \ln\det\{I_p - \mathfrak{s}_r \mathfrak{s}_r^*\} \in \widetilde{L}_1. \tag{4.50}$$

Навпаки, нехай виконані умови (4.45). Тоді факторизаційні задачі (4.47), (4.48) мають розв'язки та існує м. ф.

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(\mu) = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{a}}_-(\mu) & 0 \\ 0 & \widetilde{\mathfrak{a}}_+(\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{\mathfrak{b}}_\ell^* & \widetilde{\mathfrak{s}}_\ell^* \\ \widetilde{\mathfrak{s}}_r & \widetilde{\mathfrak{b}}_r \end{bmatrix}.$$

Отже, факторизація м. ф. $\mathfrak{A}$ буде мати вигляд

$$\mathfrak{A}(\mu) = \begin{bmatrix} \mathfrak{b}_\ell^* & \mathfrak{s}_r \\ \mathfrak{s}_\ell^* & \mathfrak{b}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}_-(\mu) & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_+(\mu) \end{bmatrix}.$$

$\square$

Лема 4.14. *Нехай $b \in \mathcal{S}^{q\times q}$ – множник Бляшке-Потапова степеня κ і $s \in \mathcal{S}^{q\times q}$. Тоді*

$$b - s = \widetilde{b}\widetilde{s},$$

де $\widetilde{b}$ – множник Бляшке-Потапова степеня $\kappa' \le \kappa$, $\widetilde{s} \in \mathcal{N}_{out}$.

Якщо до того ж $(b-s)^{-1} \in \widetilde{L}_1$, то $\deg \widetilde{b} = \kappa$.

Доведення. Оскільки $b - s \in H_\infty^{q\times q}$, то даний вираз допускає внутрішньо-зовнішню факторизацію

$$b - s = \widetilde{b}\widetilde{s}, \quad \text{де} \quad \widetilde{b} \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}, \ \widetilde{s} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}.$$

Згідно з узагальненою Теоремою Руше (Теорема 1.6)

$$\kappa' = M_\zeta(\widetilde{b}, \Omega_+) = M_\zeta(b - s, \Omega_+) \le M_\zeta(b, \Omega_+) = \kappa,$$

тобто, $\widetilde{b}$ – множник Бляшке-Потапова степеня $\kappa' \le \kappa$. Більш того, якщо $(b-s)^{-1} \in \widetilde{L}_1$, то за Теоремою 1.6 $\kappa' = \kappa$. $\square$

Надалі будемо використовувати наступні позначення:

$$s_{12}(\mu) = a_{12}(\mu)a_{22}^{-1}(\mu), \quad s_{21}(\mu) = -a_{22}^{-1}(\mu)a_{21}(\mu), \tag{4.51}$$

$$\Delta_r(\mu) = \begin{bmatrix} I_p & -s_{21}(\mu)^* \\ -s_{21}(\mu) & I_q \end{bmatrix}, \quad \Delta_\ell(\mu) = \begin{bmatrix} I_p & s_{12}(\mu) \\ s_{12}(\mu)^* & I_q \end{bmatrix}, \tag{4.52}$$

$$\dot{\mathcal{S}}_{const} = \{A \in \mathbb{C}^{p\times q} : A^*A < I_q\}.$$

Теорема 4.15. *Нехай* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cup \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$, $m = p+q$ *і м. ф.* $s_{12}, s_{21}, \Delta_r, \Delta_\ell$, *визначені формулами* (4.51) *і* (4.52). *Тоді наступні умови є еквівалентними:*

(1) $\mathfrak{A} \in L_\infty^{m\times m}$*;*

(2) $\|s_{12}\| < 1$*;*

(3) $\|s_{21}\| < 1$*;*

(4) $\Delta_r^{-1} \in L_\infty^{m\times m}$*;*

(5) $\Delta_\ell^{-1} \in L_\infty^{m\times m}$*;*

(6) $\|T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon]\| < 1$ *для принаймні однієї матриці* $\varepsilon \in \mathcal{S}_{const}^{p\times q}$*;*

(7) $\|T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon]\| < 1$ *для будь-якої матриці* $\varepsilon \in \dot{\mathcal{S}}_{const}^{p\times q}$.

У дефінітному випадку ($\kappa = 0$) доведення Теореми 4.15 приведено в [34, Lemma 7.11].

Доведення. Оскільки $\mathfrak{A}(\mu)$ є j_{pq}-унітарною майже всюди на Ω_0, блоки $a_{11}(\mu)$, $a_{22}(\mu)$ є оборотними м. в. на Ω_0 та виконані наступні рівності м. в. на Ω_0

$$\begin{aligned} a_{11}(\mu)a_{11}(\mu)^* &= (I_p - s_{12}(\mu)s_{12}(\mu)^*)^{-1}, \\ a_{22}(\mu)^*a_{22}(\mu) &= (I_p - s_{21}(\mu)s_{21}(\mu)^*)^{-1}, \\ a_{22}(\mu)a_{22}(\mu)^* &= (I_p - s_{12}^*(\mu)s_{12}(\mu))^{-1}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

З рівностей (4.53) випливають еквівалентності

$$a_{11} \in L_\infty^{p\times q} \iff \|s_{12}\|_\infty < 1 \iff a_{22} \in L_\infty^{q\times q} \iff \|s_{21}\|_\infty < 1.$$

Більш того, з умови $a_{22} \in L_\infty^{p\times q}$ і умови (2) з Означення 4.1 випливає, що $a_{12} \in L_\infty^{q\times p}$. З умови $a_{11} \in L_\infty^{p\times p}$ і умови (2) з Означення 4.2 випливає, що $a_{21} \in L_\infty^{p\times q}$.

Таким чином, доведені еквівалентності (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3). Більш того, з формули для доповнення Шура

$$\Delta_\ell(\mu) = \begin{bmatrix} I_p & s_{12}(\mu) \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I - s_{12}(\mu)s_{12}(\mu)^* & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ s_{12}(\mu)^* & I_q \end{bmatrix}$$

випливає еквівалентність (2) $\Longleftrightarrow$ (5), а з аналогічної формули для $\Delta_r(\mu)$ випливає еквівалентність (3) $\Longleftrightarrow$ (4).

Далі, нехай $\varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}$ і $f_\varepsilon = T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon]$ та припустимо, що виконано (3). Тоді вірна тотожність

$$I_q - f_\varepsilon^* f_\varepsilon = a_{22}^{-*} b_\ell^* (b_\ell - s_\ell \varepsilon)^{-*} (I_p - \varepsilon^* \varepsilon)(b_\ell - s_\ell \varepsilon)^{-1} b_\ell a_{22}^{-1} \tag{4.54}$$

і, отже,

$$\|f_\varepsilon\|_\infty < 1 \Longleftrightarrow \|\varepsilon\| < 1.$$

Таким чином (3) $\Longrightarrow$ (7). Оскільки імплікація (7) $\Longrightarrow$ (6) очевидна, залишилось перевірити (6) $\Longrightarrow$ (1).

Припустимо, що виконано (6) і $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$, тобто $\|f_\varepsilon\|_\infty < 1$ для деякої постійної $p \times q$ стискаючої матриці ε. Тоді, згідно з формулою (4.54), $\|\varepsilon\| < 1$. Таким чином, матриця

$$V_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \varepsilon\varepsilon^*)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (1 - \varepsilon^*\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}. \end{bmatrix}$$

є постійною j_{pq}-внутрішньою матрицею із властивістю $T_{V_\varepsilon}[0] = \varepsilon$.

Припустимо, що

$$\widehat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} V_\varepsilon \quad \text{і} \quad \widehat{\mathfrak{A}} = \begin{bmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\widehat{a}_{21} = a_2^{-1}(-s_\ell + b_\ell \varepsilon^*)(1 - \varepsilon\varepsilon^*)^{-\frac{1}{2}}, \quad \widehat{a}_{22} = a_2^{-1}(b_\ell - s_\ell \varepsilon)(1 - \varepsilon^*\varepsilon)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\widehat{s}_{21} = -\widehat{a}_{22}^{-1}\widehat{a}_{21} = (1-\varepsilon^*\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(b_\ell - s_\ell\varepsilon)^{-1}(-s_\ell + b_\ell\varepsilon^*)(1-\varepsilon\varepsilon^*)^{-\frac{1}{2}}.$$

Згідно з Лемою 4.14 $M_\pi(b_\ell - s_\ell\varepsilon, \Omega_+) = \kappa$ і, отже, справедлива наступна факторизація

$$\widehat{a}_{22} = \varphi_{out} b_{in}, \quad b_{in} \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}, \quad \varphi_{out} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}.$$

Таким чином,

$$\widehat{a}_{22}^{-1} = b_{in}^{-1}\varphi_{out}^{-1}.$$

Оскільки $\|a_{22}^{-1}\|_{ess} \le 1$ та $b_{in}\widehat{a}_{22}^{-1} \in \mathcal{N}_{out}^{q\times q}$, то в силу Теореми Смірнова (Теорема 1.7)

$$\widehat{a} = b_{in}a_{22}^{-1} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}.$$

Далі $rank(b_\ell - s_\ell\varepsilon, -s_\ell + b_\ell\varepsilon^*) = q$, тому $(b_\ell - s_\ell\varepsilon)^{-1}(-s_\ell + b_\ell\varepsilon^*) \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times q}$, отже, $\widehat{s}_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$.

Оскільки $M_\pi(\widehat{s}_{21}) = M_\pi(\widehat{a}_{22}^{-1}) = \kappa$, то в силу Леми 2.17

$$M_\pi(b_{in}\widehat{s}_{21}) = M_\pi(b_{in}\widehat{a}_{22}^{-1}) = 0, \quad \text{тобто} \quad \widehat{s}_\ell := b_{in}\widehat{s}_{21} \in \mathcal{S}^{q\times p}.$$

Тому $\widehat{s}_{21} = b_{in}^{-1}\widehat{s}_\ell$ – факторизація Крейна-Лангера. Отже, $\widehat{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$. Крім того,

$$T_{\widehat{\mathfrak{A}}}[0_{p\times q}] = T_{\mathfrak{A}} = f_\varepsilon,$$

тому $\|T_{\widehat{\mathfrak{A}}}[0_{p\times q}]\| < 1$. Тоді, враховуючи імплікацію (2) $\Longrightarrow$ (1) для м. ф. $\widehat{\mathfrak{A}}$, отримуємо $\widehat{\mathfrak{A}} \in L_\infty^{m\times m}$ і, отже, $\mathfrak{A} \in L_\infty^{m\times m}$, Доведення імплиікації (6) $\Longrightarrow$ (1) для $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$ аналогічно. □

Лема 4.16. *Якщо* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap L_\infty^{m\times m}$, *то* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,sR}(j_{pq})$.

Якщо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap L_\infty^{m\times m}$, *то* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,sR}(j_{pq})$.

Доведення. Якщо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap L_\infty^{m\times m}$, то за Лемою 4.15 існує $\varepsilon \in \mathcal{S}_{const}^{p\times q}$ така, що $\|T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon]\| < 1$. Припустимо, що $f = T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon]$. Тоді $\|f\|_\infty < 1$, і таким чином $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,sR}(j_{pq})$.

Друге твердження випливає з першого твердження і наступних еквівалентностей

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \Longleftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}),$$

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,sR}(j_{pq}) \Longleftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,sR}(j_{pq}),$$

$$\mathfrak{A} \in L_\infty^{m\times m} \Longleftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \in L_\infty^{m\times m}.$$

$\square$

4.3 Факторизація узагальнених γ-твірних матриць

Лема 4.17. *Нехай* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \Pi^{m\times m}$. *Тоді:*

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,S}(j_{pq}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \in \mathcal{U}_\kappa^{r,S}(j_{pq}).$$

Доведення. Якщо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,S}(j_{pq})$, то $f_0^r = (-a_{11}d_\ell + a_{12}c_\ell)a_2 \in H_\infty^{p\times p}$, отже $\{I_p, I_q\} \in den(f_0^r)$. За Теоремою 4.5, отримуємо, що $\mathfrak{A} \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$ і $\{I_p, I_q\} \in ap^r(\mathfrak{A})$. Тоді за Теоремою 2.26 $\mathfrak{A} \in \mathcal{U}_\kappa^{r,S}(j_{pq})$.

Навпаки, якщо $\mathfrak{A} \in \mathcal{U}_\kappa^{r,S}(j_{pq})$ і $\{b_1, b_2\} \in ap^r(\mathfrak{A})$, то $b_i \equiv \mathrm{const}$, $i = \{1,2\}$. Отже за Теоремою 4.5 $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$, $\{b_1, b_2\} \in den(f_0^r)$, тобто $f_0^r \in H_\infty^{p\times q}$, і тоді $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,S}(j_{pq})$. $\square$

Лема 4.18. *Нехай* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq}) \cap \Pi^{m\times m}$. *Тоді*

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \in \mathcal{U}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq}).$$

Доведення. Якщо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq})$, то $f_0^\ell = \mathfrak{a}_2(-\mathfrak{d}_r\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{c}_r a_{21}) \in H_\infty^{q\times q}$, отже $\{I_q, I_p\} \in den(f_0^\ell)$. За Теоремою 4.6, отримуємо, що $\mathfrak{A} \in \mathcal{U}_\kappa^\ell(j_{pq})$ і $\{I_q, I_p\} \in ap^\ell(\mathfrak{A})$. Тоді за Наслiжком 2.27 $\mathfrak{A} \in \mathcal{U}_\kappa^{r,S}(j_{pq})$.

Навпаки, якщо $\mathfrak{A} \in \mathcal{U}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq})$ і $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in ap^\ell(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{b}_i \equiv \mathrm{const}$, $i = \{1,2\}$. Отже за Теоремою 4.6 $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^\ell(j_{pq})$, $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in den(f_0^\ell)$, тобто $f_0^\ell \in H_\infty^{p\times q}$, і тоді $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq})$. $\square$

Зауваження 4.19. *Використовуючи Леми 4.17, 4.18 і Пропозицію 2.8 отри-*

муємо наступні еквівалентності

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq}) \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \in \mathcal{U}_\kappa^{\ell,S}(j_{pq}) \Longleftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \in \mathcal{U}_\kappa^{r,S}(j_{pq}) \\ \Longleftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,S}(j_{pq}).$$

Лема 4.20. *Нехай* $\mathfrak{A}', \mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$ *і* $\mathfrak{A}' = \begin{bmatrix} \theta_1^{-1} & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \mathfrak{A}$, $\theta_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $\theta_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$. *Тоді* $\theta_1 \equiv \mathrm{const}$, $\theta_2 \equiv \mathrm{const}$.

Доведення. Нехай м. ф.

$$\mathfrak{A}'(\mu) = \begin{bmatrix} a'_{11}(\mu) & a'_{12}(\mu) \\ a'_{21}(\mu) & a'_{22}(\mu) \end{bmatrix}$$

і $\mathfrak{A}(\mu)$, має представлення (4.1). Тоді

$$\mathfrak{A}' = \begin{bmatrix} \theta_1^{-1} & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} \theta_1^{-1} a_{11} & \theta_1^{-1} a_{12} \\ \theta_2 a_{21} & \theta_2 a_{22} \end{bmatrix},$$

і, отже, за Означенням 4.1

$$s'_{21} := -(a'_{22})^{-1} a'_{21} = -a_{22}^{-1} \theta_2^{-1} \theta_2 a_{21} = -a_{22}^{-1} a_{21} = s_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times p}.$$

Це означає, що факторизації Крейна-Лангера s_{21} і s'_{21} співпадають

$$s'_{21} = s_{21} = b_\ell^{-1} s_\ell = s_r b_r^{-1},$$

де $b_\ell \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $b_r \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $s_\ell, s_r \in \mathcal{S}^{q\times p}$. Тому

$$a'_1 = (a'_{11})^{-\#} b_r = \theta_1^{\#} (a_{11})^{-\#} b_r \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}, \quad \text{і} \quad a_1 = a_{11}^{-\#} b_r \in \mathcal{S}_{out}^{q\times p}.$$

Це можливо тільки тоді, коли $\theta_1 \equiv \mathrm{const}$. Аналогічно,

$$a'_2 = b_\ell ({a'}_{22}^{-1}) = b_\ell a_{22}^{-1} \theta_2^{-1} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q} \quad \text{і} \quad a_2 = b_\ell a_{22}^{-1} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}.$$

Отже $\theta_2 \equiv \mathrm{const}$. $\square$

Лема 4.21. *Нехай м. ф.* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \Pi^{m\times m}$ *допускає факторизацію*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{A}^{(2)}, \quad \textit{де} \quad \mathfrak{A}^{(1)} \in \mathfrak{M}_{\kappa_1}^r(j_{pq}), \quad \mathfrak{A}^{(2)} \in \mathfrak{M}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq}), \tag{4.55}$$

з $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$. *Тоді* $den^r(\mathfrak{A}^{(1)}) \subset den^r(\mathfrak{A})$.

Доведення. Нехай м. ф. $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \Pi^{m\times m}$ допускає факторизацію (4.55). Оскільки $\mathfrak{A}^{(2)} \in \mathfrak{M}_{\kappa_2}^{\ell,S}$, то $f_0^\ell \in H_\infty$ і тому $\mathfrak{A}^{(2)} \in \Pi^{m\times m}$. Так як $\mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{A}(\mathfrak{A}^{(2)})^{-1}$, то $\mathfrak{A}^{(1)} \in \Pi^{m\times m}$. Нехай $\{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\} \in den^r(\mathfrak{A}^{(1)})$ і $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$. За Теоремою 4.5

$$W^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & 0 \\ 0 & (b_2^{(1)})^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq}), \quad \{b_1^{(1)}, b_2^{(2)}\} \in ap^r W^{(1)},$$

$$W^{(2)} = \mathfrak{A}^{(2)} \in \mathcal{U}_{\kappa_2}^{\ell,S}(j_{pq}).$$

Покладемо, що

$$W' := \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & 0 \\ 0 & (b_2^{(1)})^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & 0 \\ 0 & (b_2^{(1)})^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{A}^{(2)} = W^{(1)}W^{(2)}.$$

Тоді за Теоремою 3.1 $W' \in \mathcal{U}_{\kappa'}$, $\kappa' \leq \kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$.

З іншого боку, $s_{21} = -(w_{22}')^{-1}w_{21}' = -a_{22}^{-1}a_{21} \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$, тому $\kappa' \geq \kappa$, отже $\kappa' = \kappa$. Таким чином $W' \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$.

Нехай $\{b'_1, b'_2\} \in ap^r(W')$, тоді за Лемою 3.4 $b_1' = b_1^{(1)}\theta_1$, $b_2' = \theta_2 b_2^{(1)}$. За Теоремою 4.5

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}' &= \begin{bmatrix} b'^{-1}_1 & 0 \\ 0 & b_2' \end{bmatrix} W' = \begin{bmatrix} b'^{-1}_1 & 0 \\ 0 & b_2' \end{bmatrix} W^{(1)}W^{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} b'^{-1}_1 & 0 \\ 0 & b_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & 0 \\ 0 & (b_2^{(2)})^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{A}^{(2)} \\ &= \begin{bmatrix} \theta_1^{-1} & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} \mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}), \end{aligned}$$

отже, за Лемою 4.20 $\theta_1 \equiv \text{const}$, $\theta_2 \equiv \text{const}$. Тому $\{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\} \in ap^r(W')$. Таким чином, за Теоремою 4.5 $\{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\} \in den^r(\mathfrak{A})$. $\square$

Лема 4.22. *Нехай м. ф.* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq}) \cap \widetilde{L}_2^{p\times q} \cap \mathcal{R}^{m\times m}$. *Тоді* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}_\kappa^{r,R}(j_{pq})$.

Доведення. Нехай $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{A}^{(2)}$, де $\mathfrak{A}^{(1)} \in \mathfrak{M}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$, $\mathfrak{A}^{(2)} \in \mathfrak{M}^{\ell,S}_{\kappa_2}(j_{pq})$, $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$ і $\{b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\} \in den^r(\mathfrak{A}^{(1)})$. Тоді за Лемою 4.21 пара $\{b_1^{(1)}, b_2^{(2)}\} \in den^r(\mathfrak{A})$. За Теоремою 4.5

$$W^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & 0 \\ 0 & (b_2^{(1)})^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} \in \mathcal{U}^r_{\kappa_1}(j_{pq}) \quad W^{(2)} = \mathfrak{A}^{(2)} \in \mathcal{U}^{\ell,S}_{\kappa_2}(j_{pq}),$$

$$W = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & 0 \\ 0 & (b_2^{(1)})^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} & 0 \\ 0 & (b_2^{(1)})^{-1} \end{bmatrix} \mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{A}^{(2)} = W^{(1)}W^{(2)}.$$

Так як $W \in \mathcal{U}^r_\kappa(j_{pq}) \cap \widetilde{L}_2^{m\times m}$, то за Теоремою 3.17(3) $W \in \mathcal{U}^{r,R}_\kappa(j_{pq})$. За цією умовою $\mathfrak{A}^{(2)} = W^{(2)} \equiv \text{const}$. Це означає, що $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^{r,R}_\kappa(j_{pq})$. $\square$

Використовуючи перетворення (4.4), легко отримати таке твердження для класу узагальнених лівих γ-твірних матриць:

Лема 4.23. *Нехай м. ф.* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^\ell_\kappa(j_{pq}) \cap \widetilde{L}_2^{p\times q} \cap \mathcal{R}^{m\times m}$. *Тоді* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^{\ell,R}_\kappa(j_{pq})$.

Теорема 4.24. *Нехай м. ф.* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^r_\kappa(j_{pq}) \cap \mathcal{R}^{m\times m}$, $\{b_1, b_2\} \in den^r(\mathfrak{A})$, W *задана рівністю* (4.8) *та нехай:*

(1) $W(\lambda) \in \mathcal{U}^\ell_\kappa(j_{pq})$,

(2) $\mathcal{L}_W$ *є невиродженим підпростором в* $\mathcal{K}(W)$.

Тоді м. ф. $\mathfrak{A}$ *допускає регулярно-сингулярну факторизацію*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{A}^{(2)}, \quad \mathfrak{A}^{(1)} \in \mathfrak{M}^{r,R}_{\kappa_1}(j_{pq}), \quad \mathfrak{A}^{(2)} \in \mathfrak{M}^{\ell,S}_{\kappa_2}(j_{pq}), \tag{4.56}$$

де $\kappa_1 = ind_-\mathcal{L}_W$ *і* $\kappa_2 = \kappa - \kappa_1$.

Доведення. Нехай умови (1) і (2) виконані. За Теоремою 4.5 $W \in \mathcal{U}^r_\kappa(j_{pq})$ і $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$. Тоді за Теоремою 5.6, W допускає факторизацію

$$W = W^{(1)}W^{(2)},$$

де

$$W^{(1)} \in \mathcal{U}^{r,R}_{\kappa_1}(j_{pq}) \quad \text{і} \quad W^{(2)} \in \mathcal{U}^{\ell,S}_{\kappa_2}(j_{pq}), \quad \kappa = \kappa_1 + \kappa_2.$$

За Теоремою 3.17 (3) і Лемою 3.10 $ap^r(W) = ap^r(W^{(1)})$.

Отже, застосовуючи $\begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ до W, та за Теоремою 4.5 і Лемою 4.17 отримуємо

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{A}^{(2)}$$

де

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} W^{(1)} \in \mathfrak{M}^{r}_{\kappa_1}(j_{pq}), \quad \mathfrak{A}^{(2)} = W^{(2)} \in \mathfrak{M}^{\ell,S}_{\kappa_2}(j_{pq}),$$

$\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$. Оскільки м. ф. $W^{(1)} \in \mathcal{U}^{r,R}_{\kappa}(j_{pq})$, то за Теоремою 3.17 $W^{(1)} \in \widetilde{L}_2^{m\times m}$. Тому $\mathfrak{A}^{(1)} \in \widetilde{L}_2^{m\times m}$, і таким чином, за Лемою 4.22 $\mathfrak{A}^{(1)} \in \mathfrak{M}^{r,R}_{\kappa}(j_{pq})$. □

Теорема 4.25. *Нехай м. ф.* $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^{\ell}_{\kappa}(j_{pq}) \cap \mathcal{R}^{m\times m}$, $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\} \in den^{\ell}(\mathfrak{A})$, W *задана рівністю* (4.22) *та нехай:*

(1) $W(\lambda) \in \mathcal{U}^{r}_{\kappa}(j_{pq})$,

(2) $\mathcal{L}_{\widetilde{W}}$ *невироджений підпростір в* $\mathcal{K}(\widetilde{W})$, *з від'ємним індексом* $ind_{-}\mathcal{L}_W = \kappa_1$.

Тоді $\mathfrak{A}$ *допускає регулярно-сингулярну факторизацію*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(2)}\mathfrak{A}^{(1)}, \quad \mathfrak{A}^{(1)} \in \mathfrak{M}^{\ell,R}_{\kappa_1}(j_{pq}), \quad \mathfrak{A}^{(2)} \in \mathfrak{M}^{r,S}_{\kappa_2}(j_{pq}), \tag{4.57}$$

де $\kappa_1 = ind_{-}\mathcal{L}_W$ *і* $\kappa_2 = \kappa - \kappa_1$.

Доведення. Якщо $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^{\ell}_{\kappa}(j_{pq})$, то за Пропозицією 4.3 $\widetilde{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{M}^{r}_{\kappa}(j_{pq})$ і м. ф. $\widetilde{W}$ задовольняють усім умовам Теореми 4.24. За Теоремою 4.24 $\widetilde{\mathfrak{A}}$ допускає факторизацію

$$\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\mathfrak{A}}^{(1)}\widetilde{\mathfrak{A}}^{(2)}, \quad \widetilde{\mathfrak{A}}^{(1)} \in \mathfrak{M}^{r,R}_{\kappa_1}(j_{pq}), \quad \widetilde{\mathfrak{A}}^{(2)} \in \mathfrak{M}^{\ell,S}_{\kappa_2}(j_{pq}), \tag{4.58}$$

де $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa$.

Знову використовуючи перетворення (2.21), отримуємо (4.57). □

4.4 Висновки

Результати глави були представлені в [52, 53, 76].

Введено підкласи правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримано зв'язок між узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. і множиною узагальнених γ-твірних матриць, що мають псевдопродовження. Введено поняття сингулярних, регулярних і сильно регулярних γ-твірних матриць. Знайдено достатні умови регулярності і сильної регулярності правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримано достатні умови регулярно-сингулярної факторизації узагальнених γ-твірних матриць.

5 Задача Нехарі-Такагі

5.1 Інтерполяційна задача Такагі-Сарасона

Перед тим як почнемо розглядати задачу Нехарі-Такагі розглянемо задачу Такагі-Сарасона і далі знайдемо їх зв'язок. Для цього нагадаємо деякі означення.

Нехай $\mathcal{R}^{p\times q}$ позначає клас раціональних м. ф. розміру $p\times q$ та нехай $\kappa\in\mathbb{N}$. Говорять, що м. ф. $\varphi(\lambda)$ розміру $p\times q$ належить узагальненому класу Смірнова $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$, якщо вона допускає представлення

$$\varphi(\lambda)=\varphi_0(\lambda)+r(\lambda),\quad \text{де}\quad \varphi_0\in\mathcal{N}_+^{p\times q},\ r\in\mathcal{R}^{p\times q}\quad \text{і}\quad M_\pi(r,\Omega_+)\le\kappa.$$

Якщо $\kappa=0$, то клас $\mathcal{N}_{+,0}^{p\times q}$ співпадає з класом Смірнова $\mathcal{N}_+^{p\times q}$, введеним у (1.13).

Узагальнений клас Смірнова $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$ був введений у [13]. У [49] м. ф. φ з $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$ була охарактеризована наступною лівою взаємно простою факторизацією

$$\varphi(\lambda)=b_\ell(\lambda)^{-1}\varphi_\ell(\lambda),\tag{5.1}$$

де $b_\ell\in S_{in}^{p\times p}$ – добуток Бляшке-Потапова степеня κ, $\varphi_\ell\in\mathcal{N}_+^{p\times q}$ та

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} b_\ell(\lambda) & \varphi_\ell(\lambda)\end{bmatrix}=p\quad \text{для } \lambda\in\Omega_+.$$

Зрозуміло, що для $\varphi\in\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$ існує також права взаємно проста факторизація

$$\varphi(\lambda)=\varphi_r(\lambda)b_r(\lambda)^{-1},\tag{5.2}$$

де $b_r\in S_{in}^{q\times q}$ – добуток Бляшке-Потапова степеня κ, $\varphi_r\in\mathcal{N}_+^{p\times q}$ та

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} b_r(\lambda)^* & \varphi_r(\lambda)^*\end{bmatrix}=q\quad \text{для } \lambda\in\Omega_+.$$

Це означає, що клас $\mathcal{S}_\kappa^{p\times q}$ міститься у $\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$ і виконується наступна

Лема 5.1. *[49] Нехай $\varphi\in\mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$, $b_\ell\in\mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_r\in\mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $\varphi_\ell,\ \varphi_r\ \in\ \mathcal{N}_+^{p\times q}$. Тоді:*

(i) факторизація (5.1) *є лівою взаємнопростою тоді і тільки тоді, коли існує*

пара м. ф. $c_\ell \in H_\infty^{p\times p}$ *і* $d_\ell \in H_\infty^{q\times p}$ *таких, що*

$$b_\ell(\lambda)c_\ell(\lambda) + \varphi_\ell(\lambda)d_\ell(\lambda) = I_p \quad \textit{для } \lambda \in \Omega_+;$$

(ii) факторизація (5.2) *є правою взаємнопростою тоді і тільки тоді, коли існує пара м. ф.* $c_r \in H_\infty^{q\times q}$ *і* $d_r \in H_\infty^{q\times p}$ *таких, що*

$$c_r(\lambda)b_r(\lambda) + d_r(\lambda)\varphi_r(\lambda) = I_q \quad \textit{для } \lambda \in \Omega_+.$$

Задача $\mathbf{TSP}_\kappa(b_1, b_2, K)$: Нехай $b_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$ – внутрішні м. ф. та $K \in H_\infty^{p\times q}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. М. ф. s розміру $p \times q$ називається розв'язком задачі Такагі-Сарасона $\mathbf{TSP}_\kappa(b_1, b_2, K)$, якщо s належить до $\mathcal{S}_{\kappa'}^{p\times q}$ для деякого $\kappa' \le \kappa$ та задовольняє умові

$$b_1^{-1}(s-K)b_2^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}. \tag{5.3}$$

Множину розв'язків задачі Такагі-Сарасона будемо позначати

$$\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K) = \bigcup_{\kappa'\le\kappa}\{s \in \mathcal{S}_{\kappa'}^{p\times q} : b_1^{-1}(s-K)b_2^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}\}.$$

Проблема $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K)$ вивчалась Дж. Боллом і Дж. Хелтоном в [39], у раціональному випадку в [38]. Загальний, але строго цілком невизначений випадок проблеми $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K)$ вичерпно досліджено у [48,49]. Для випадку $\kappa = 0$ повне дослідження проблеми $\mathcal{TS}_0(b_1, b_2, K)$ приведено у [60, 62] методом зведення до абстрактної інтерполяційної проблеми.

Побудуємо резольвентну матрицю проблеми $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K)$. Нехай

$$\mathcal{H}(b_1) = H_2^p \ominus b_1 H_2^p, \quad \mathcal{H}_*(b_2) := (H_2^q)^\perp \ominus b_2^*(H_2^q)^\perp,$$

$$\mathcal{H}(b_1, b_2) := \mathcal{H}(b_1) \oplus \mathcal{H}_*(b_2),$$

та нехай оператори $K_{11} : H_2^q \to \mathcal{H}(b_1)$, $K_{12} : \mathcal{H}_*(b_2) \to \mathcal{H}(b_1)$, $K_{22} : \mathcal{H}_*(b_2) \to (H_2^p)^\perp$ визначені формулами

$$K_{11}h_+ = \Pi_{\mathcal{H}(b_1)}Kh_+, \quad h_+ \in H_2^q, \tag{5.4}$$

$$K_{12}h_2 = \Pi_{\mathcal{H}(b_1)}Kh_2, \quad h_2 \in \mathcal{H}_*(b_2), \tag{5.5}$$

$$K_{22}h_2 = \Pi_- K h_2, \qquad h_2 \in \mathcal{H}_*(b_2), \tag{5.6}$$

$$\mathbf{K} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & K_{22} \end{pmatrix} : \begin{array}{c} H_2^q \\ \oplus \\ \mathcal{H}_*(b_2) \end{array} \to \begin{array}{c} \mathcal{H}(b_1) \\ \oplus \\ (H_2^p)^\perp \end{array}. \tag{5.7}$$

Розглянемо оператор $\mathbf{P} : \mathcal{H}(b_1, b_2) \to \mathcal{H}(b_1, b_2)$, який задається блочною матрицею

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} I - K_{11}K_{11}^* & -K_{12} \\ -K_{12}^* & I - K_{22}^*K_{22} \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Набір даних b_1, b_2, K розглянутий у [49] підлягає таким обмеженням:

(H1) $b_1 \in \mathcal{S}_{in}^{p\times p}$, $b_2 \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$, $K \in H_\infty^{p\times p}$.

(H2) $\kappa_1 = \nu_-(\mathbf{P}) < \infty$.

(H3) $0 \in \rho(\mathbf{P})$.

(H4) $\mathfrak{h}_{b_1} \cap \mathfrak{h}_{b_2^\#} \cap \Omega_0 \neq \emptyset$.

Визначимо наступний оператор

$$F = \begin{bmatrix} I & K_{22} \\ K_{11}^* & I \end{bmatrix} : \begin{array}{c} \mathcal{H}(b_1) \\ \oplus \\ \mathcal{H}_*(b_2) \end{array} \to \begin{array}{c} b_1(H_2^p)^\perp \\ \oplus \\ b_2^*(H_2^q) \end{array} \stackrel{def}{=} \mathcal{K}. \tag{5.9}$$

Як показано у [49] для кожного $h_1 \in \mathcal{H}(b_1)$ та $h_2 \in \mathcal{H}_*(b_2)$ вектор-функції $(K_{11}^*h_1)(\lambda)$ та $(K_{22}h_2)(\lambda)$ допускають псевдопродовження обмеженого типу, які є голоморфними на $\mathfrak{h}_{b_1}$ та $\mathfrak{h}_{b_2^\#}$, відповідно. Це дозволяє визначити оператор-функцію $\lambda \to F(\lambda)$, де $F(\lambda)$ діє з $\mathcal{H}(b_1, b_2)$ в $\mathbb{C}^m$ за формулою

$$F(\lambda)h = (Fh)(\lambda), \quad h \in \mathcal{H}(b_1, b_2),\ \lambda \in \mathfrak{h}_{b_1} \cap \mathfrak{h}_{b_2^\#}. \tag{5.10}$$

Нехай $\mu \in \mathfrak{h}_{b_1} \cap \mathfrak{h}_{b_2^\#}$. Тоді оператор $F(\mu)^*$ є обмеженим як оператор з $\mathbb{C}^m$ у $\mathcal{H}(b_1, b_2)$ і м. ф.

$$W(\lambda) = I - \rho_\mu(\lambda)F(\lambda)P^{-1}F(\mu)^*j_{pq} \quad \text{для } \lambda \in \mathfrak{h}_{b_1} \cap \mathfrak{h}_{b_2^\#}, \tag{5.11}$$

є коректно визначеною для $\lambda \in \mathfrak{h}_{b_1} \cap \mathfrak{h}_{b_2^\#}$. Як показано у [49], $W(\lambda)$ належить до класу $\mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq})$ *узагальнених* j_{pq}*-внутрішніх* м. ф. та приймає значення в $\widetilde{L}_2^{m\times m}$. Тоді, у раціональному випадку, з Леми 3.17(3) випливає, що $W \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^{r,R}(j_{pq})$.

Наступна теорема дає опис множини $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K)$.

Теорема 5.2. *Нехай виконані умови (H1)–(H4) та нехай* $W(\lambda)$ *– це м. ф., яка задана формулою* (5.11). *Тоді* $W \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq}) \cap \widetilde{L}_2^{m\times m}$ *та*

(1) $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2;\, K) \neq \emptyset \iff \nu_-(\mathbf{P}) \le \kappa.$

(2) *Якщо* $\kappa_1 = \nu_-(\mathbf{P}) \le \kappa$, *то*

$$\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2; K) = T_W[\mathcal{S}_{\kappa-\kappa_1}^{p\times q}] := \{T_W[\varepsilon] : \varepsilon \in \mathcal{S}_{\kappa-\kappa_1}^{p\times q}\}, \tag{5.12}$$

де $T_W[\varepsilon]$ *дробово-лінійне перетворення, що задано в* (1.25).

Доведення. За умовою $(H3)$ $0 \in \rho(\mathbf{P})$ і тому з (5.9), (5.10), (5.11) випливає, що $Wu \in \widetilde{L}_2^{m\times m}$ для кожного $u \in \mathbb{C}^m$, тобто $W \in \widetilde{L}_2^{m\times m}$. Як було показано у [49, див. Lemma 4.1 і Corollary 4.4] м. ф. W належить до класу $\mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq})$ і $\{b_1, b_2\} \in ap^r(W)$. Тоді за [49, Теоремою 4.2] м. ф. W має факторизацію

$$W = \Theta\Phi = \begin{bmatrix} b_1 & Kb_2^{-1} \\ 0 & b_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.13}$$

де Φ є зовнішньою м. ф. і пара $\{\varphi_{21}, \varphi_{22}\}$ є взаємно простою.

1. Нехай $\kappa_1 := \nu_-(\mathbf{P}) \le \kappa$ і покажемо, що тоді $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2; K) \neq \emptyset$. Дійсно, нехай $\varepsilon \in \mathcal{S}_{\kappa_2}^{p\times q}$ $(\kappa_2 = \kappa - \kappa_1)$ має факторизацію Крейна-Лангера $\varepsilon = s_r\theta_r^{-1}$, де $s_r \in \mathcal{S}^{p\times q}$, $\theta_r \in \mathcal{S}_{in}^{q\times q}$. Тоді

$$\begin{aligned} s := T_W[\varepsilon] &= (w_{11}\varepsilon + w_{12})(w_{11}\varepsilon + w_{22})^{-1} \\ &= (w_{11}\varepsilon_r + w_{12}\theta_r)(w_{11}\varepsilon_r + w_{22}\theta_r)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

За Лемою 1.31 $s \in \mathcal{S}_{\kappa'}^{p\times q}$, де $\kappa' \le \kappa$. Покажемо, що s задовольняє умову (5.3). В силу [49, Теореми 4.3] $s_{21} = -\varphi_{22}^{-1}\varphi_{21} \in \mathcal{S}_{\kappa_1}^{q\times p}$ і

$$M_\xi(\varphi_{22}, \Omega_+) = M_\pi(\varphi_{22}^{-1}, \Omega_+) = M_\pi(\varphi_{22}^{-1}\varphi_{21}, \Omega_+) = \kappa_1.$$

За узагальненою Теоремою Руше 1.6 отримуємо

$$M_\xi(\varphi_{21}\varepsilon_r + \varphi_{22}\theta_r, \Omega_+) = M_\xi(\varphi_{22}\theta_r, \Omega_+) = \kappa_1 + \kappa_2 = \kappa. \tag{5.15}$$

З (5.14) випливає, що

$$G := b_1^{-1}(s-K)b_2^{-1} = (\varphi_{11}\varepsilon_r + \varphi_{12}\theta_r)(\varphi_{21}\varepsilon_r + \varphi_{22}\theta_r)^{-1} \tag{5.16}$$

Оскільки Φ є зовнішньою, то

$$\ker \begin{bmatrix} \varphi_{11}\varepsilon_r + \varphi_{12}\theta_r \\ \varphi_{21}\varepsilon_r + \varphi_{22}\theta_r \end{bmatrix} = \ker \Phi \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \theta_r \end{bmatrix} = \{0\}$$

для всіх $\lambda \in \Omega_+$. Тому факторизація (5.16) є взаємно простою і в силу Пропозиції 2.16

$$M_\pi(b_1^{-1}(s-K)b_2^{-1}, \Omega_+) = M_\pi(\varphi_{21}\varepsilon_r + \varphi_{22}\theta_r, \Omega_+) = \kappa.$$

Це доводить, що $s \in \mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2; K)$.

2. Припустимо тепер, що $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2; K) \neq \emptyset$ і $s \in \mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2; K)$. Покладемо $\varepsilon = T_{W^{-1}}[s]$, тоді $s = T_W[\varepsilon]$. З рівності (1.49) випливає, що для $\lambda \in \mathfrak{h}_s^+ \cap \mathfrak{h}_W^+$

$$\begin{bmatrix} I_p & -s \end{bmatrix} W = (w_{11}^\# + \varepsilon w_{12}^\#)^{-1} \begin{bmatrix} I_p & -\varepsilon \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_p & -s \end{bmatrix} W j_{pq} W^* \begin{bmatrix} I_p \\ -s^* \end{bmatrix} = (w_{11}^\# + \varepsilon w_{12}^\#)^{-1}(I_p - \varepsilon\varepsilon^*)(w_{11}^\# + \varepsilon w_{12}^\#)^{-*}.$$

Звідси отримуємо тотожність з $\lambda \in \mathfrak{h}_s^+ \cap \mathfrak{h}_W^+$

$$\begin{aligned} I_p - s(\lambda)s(\lambda)^* - \begin{bmatrix} I_p & -s(\lambda) \end{bmatrix} (j_{pq} - W(\lambda) j_{pq} W(\lambda)^*) \begin{bmatrix} I_p \\ -s(\lambda)^* \end{bmatrix} \\ = (w_{11}^\#(\lambda) + \varepsilon(\lambda) w_{12}(\lambda)^\#)^{-1}(I_p - \varepsilon(\lambda)\varepsilon(\lambda)^*)(w_{11}(\lambda)^\# + \varepsilon(\lambda) w_{12}(\lambda)^\#)^{-*} \end{aligned}$$

з якої випливає, що

$$1 - \varepsilon(\mu)\varepsilon(\mu)^* \geq 0 \quad \text{для м. в.} \quad \mu \in \Omega_0. \tag{5.17}$$

Нехай $V(\lambda) = W(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$. Тоді має місце рівність

$$\varepsilon(\lambda) = (v_{11}(\lambda)s(\lambda) + v_{12})(v_{21}(\lambda)s(\lambda) + v_{22})^{-1}$$

з якої випливає, що $\varepsilon \in \mathcal{N}^{p\times q}$ і у відповідності до [34, Theorem 3.66] ε допускає факторизацію

$$\varepsilon = \varepsilon_R d_R^{-1}, \quad \text{де} \quad \varepsilon_R \in \mathcal{N}_+^{p\times q}, d_R \in \mathcal{S}_{in}^{p\times q}.$$

За нерівністю (5.17) і Теоремою Смірнова (Теорема 1.13) отримуємо $\varepsilon_R \in \mathcal{S}^{p\times q}$. Позначимо $\kappa_2 = deg\ d_R(\le \infty)$. Оскільки $W \in \mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq})$, то за Лемою 1.31 $s = T_W[\varepsilon]$ належить до класу $\mathcal{S}_{\kappa'}^{p\times q}$, де $\kappa' \le \kappa_1 + \kappa_2$. Крім того, доведення першої частини показує, що м. ф. $b_1^{-1}(s - K)b_2^{-1}$ має полюсну кратність $M_\pi(b_1^{-1}(s-K)b_2^{-1}, \Omega_+) = \kappa = \kappa_1 + \kappa_2$, тобто $\kappa \ge \kappa_1 = \nu_-(\mathbf{P})$. Це доводить пряму імплікацію в (1). $\square$

Зауваження 5.3. *У випадку коли b_1, b_2, K раціональні м. ф. Теорема 5.2 доведена у [48, Theorem 5.17]. У загальному випадку Теорема 5.2 не була сформульована для довільного κ, але ідею її доведення можна вилучити з [49, Theorem 5.7].*

5.2 Задача Нехарі-Такагі

Розглянемо наступну задачу Нехарі-Такагі:

Задача $\mathbf{NTP}_\kappa(f_0)$: нехай $\kappa \in \mathbb{N}$ і $f_0 \in L_\infty^{p\times q}$. Треба знайти $f \in L_\infty^{p\times q}$ таку, що

$$\operatorname{rank}(\Gamma(f) - \Gamma(f_0)) \le \kappa \quad \text{і} \quad \|f\|_\infty \le 1. \tag{5.18}$$

У скалярному випадку задача $\mathbf{NTP}_\kappa(f_0)$ була розв'язана В. М. Адамяном, Д. З. Аровим та М. Г. Крейном у [21] у випадку $\kappa = 0$ і у [22] для довільного $\kappa \in \mathbb{N}$. У матричному випадку опис розв'язків проблеми $\mathbf{NTP}_0(f_0)$ було отримано у невизначеному випадку В. М. Адамяном [20], і в загальному випадку А. Хейфецем [61]. Індефінітна матрична проблема $\mathbf{NTP}_\kappa(f_0)$ (при $\kappa \in \mathbb{N}$) розглядалась у [39] (дивіться також [38], де у раціональному випадку було отримано явну формулу для резольвентної матриці).

Далі ми обмежимося випадком, коли м. ф. f_0 має псевдопродовження в Ω_- і den $(f_0) \neq \emptyset$ і дамо опис всіх розв'язків проблеми $\mathbf{NTP}_\kappa(f_0)$. Нехай $f_0 \in L_\infty^{p\times q}$

$$\mathcal{N}_\kappa(f_0) = \{f \in L_\infty^{p\times q} : f - f_0 \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}, \|f\| \leq 1\}$$

і позначимо набір розв'язків задачі $\mathbf{NTP}_\kappa(f_0)$:

$$\mathcal{NT}_\kappa(f_0) = \{f \in L_\infty^{p\times q} : \mathrm{rank}(\Gamma(f) - \Gamma(f_0)) \leq \kappa \ \text{ i } \ \|f\| \leq 1\}.$$

За теоремою Кронекера ([57, Theorem 4]), умова $f - f_0 \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}$ є еквівалентною умові

$$\mathrm{rank}(\Gamma(f) - \Gamma(f_0)) = \kappa,$$

Таким чином, множину $\mathcal{NT}_\kappa(f_0)$ можна представити у вигляді

$$\mathcal{NT}_\kappa(f_0) = \bigcup_{\kappa' \leq \kappa} \mathcal{N}_{\kappa'}(f_0). \tag{5.19}$$

Далі встановимо зв'язок між множиною розв'язків задачі Нехарі-Такагі і множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона у випадку, коли $f_0 \in \Pi$.

Теорема 5.4. *Нехай $f_0 \in L_\infty^{p\times q} \cap \Pi^{p\times q}$, $\Gamma = \Gamma(f_0)$, $\kappa \in \mathbb{Z}_+$, $\{b_1, b_2\} \in den(f_0)$ і $K = b_1 f_0 b_2$. Тоді*

$$f \in \mathcal{N}_\kappa(f_0) \Leftrightarrow s = b_1 f b_2 \in \mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K_0).$$

Доведення. Нехай $f \in \mathcal{N}_\kappa(f_0)$. Тоді м. ф. $\varphi(\mu) := f(\mu) - f_0(\mu)$, $f_0(\mu)$ і $f(\mu)$ допускають мероморфні продовження $\varphi(\lambda)$, $f_0(\lambda)$ та $f(\lambda)$ на Ω_+, такі, що

$$M_\pi(f - f_0, \Omega_+) = \kappa. \tag{5.20}$$

Нехай $s = b_1 f b_2$ і $K = b_1 f_0 b_2$. Тоді $M_\pi(s - K, \Omega_+) \leq \kappa$. Оскільки $K \in H_\infty^{p\times q}$, то

$$\kappa' := M_\pi(s, \Omega_+) = M_\pi(s - K, \Omega_+) \leq \kappa.$$

Враховуючи, що $\|s\|_\infty = \|f\|_\infty \leq 1$, отримуємо, що $s \in \mathcal{S}_{\kappa'}$. Окрім цього, умова (5.20) еквівалентна умові (5.3), отже $s \in \mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K)$.

І навпаки, якщо $s \in \mathcal{S}_{\kappa'}^{p\times q}$ з $\kappa' \leq \kappa$ та умова (5.3) виконана, то для $f = b_1^{-1} s b_2^{-1}$,

$f_0 = b_1^{-1} K b_2^{-1}$ отримуємо, що (5.20) виконується та $\|f\|_\infty \le 1$. Тому, $f \in \mathcal{N}_\kappa(f_0)$.
$\square$

Лема 5.5. *Нехай* $f_0 \in L_\infty^{p\times q} \cap \Pi^{p\times q}$, $\Gamma = \Gamma(f_0)$, $\{b_1, b_2\} \in den(f_0)$, $K = b_1 f_0 b_2$ *та нехай* $\mathbf{P}$ *– оператор в* $\mathcal{H}(b_1) \oplus \mathcal{H}_*(b_2)$, *заданий формулами* (5.4)-(5.6) *і* (5.8). *Тоді*

$$\nu_-(\mathbf{P}) = \nu_-(I - \Gamma^*\Gamma).$$

Більш того, якщо $\nu_-(I - \Gamma^*\Gamma) < \infty$, *то*

$$0 \in \rho(\mathbf{P}) \Longleftrightarrow 0 \in \rho(I - \Gamma^*\Gamma).$$

Доведення. Простори H_2^q і $(H_2^p)^\perp$ розкладаються у пряму суму:

$$H_2^q = b_2(H_2^q) \oplus \mathcal{H}(b_2), \quad (H_2^p)^\perp = \mathcal{H}_*(b_1) \oplus b_1^*(H_2^p)^\perp.$$

Зауважимо, що ортогональний проектор на підпростір $b_1^*(H_2^p)^\perp$ визначається формулою $\Pi_{b_1^*(H_2^p)^\perp} = b_1^* \Pi_{(H_2^p)^\perp} b_1$. Оператор Γ, що діє з H_2^q в $(H_2^p)^\perp$, представимо наступним чином

$$\Gamma \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & \Gamma_{22} \end{pmatrix} : \begin{array}{c} b_2(H_2^q) \\ \oplus \\ \mathcal{H}(b_2) \end{array} \to \begin{array}{c} \mathcal{H}_*(b_1) \\ \oplus \\ b_1^*(H_2^p)^\perp \end{array}, \tag{5.21}$$

де оператори

$$\Gamma_{11} : b_2(H_2^q) \to \mathcal{H}_*(b_1), \quad \Gamma_{12} : \mathcal{H}(b_2) \to \mathcal{H}_*(b_1),$$
$$\Gamma_{22} : \mathcal{H}(b_2) \to b_1^*(H_2^p)^\perp$$

визначаються формулами

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} h_+ &= \Pi_{\mathcal{H}_*(b_1)} f_0 u_+, & u_+ &\in b_2(H_2^q), \\ \Gamma_{12} h_2 &= \Pi_{\mathcal{H}_*(b_1)} f_0 u_2, & u_2 &\in \mathcal{H}(b_2), \\ \Gamma_{22} h_2 &= (b_1^* \Pi_- b_1) f_0 u_2, & u_2 &\in \mathcal{H}(b_2). \end{aligned} \tag{5.22}$$

З (5.21), (5.22) та (5.4)-(5.6) випливає, що оператор $\Gamma : H_2^q \to (H_2^p)^\perp$ та оператор

K з (5.7) пов'язані між собою наступним чином

$$\Gamma = \mathcal{M}_{b_1^*}|_{b_1(H_2^p)^\perp}\mathbf{K}\mathcal{M}_{b_2^*}|_{H_2^q}.$$

де

$$\mathcal{M}_{b_1^*}:\begin{pmatrix}\mathcal{H}(b_1)\\(H_2^p)^\perp\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\mathcal{H}_*(b_1)\\b_1^*(H_2^p)^\perp\end{pmatrix},$$
$$\mathcal{M}_{b_2^*}:\begin{pmatrix}b_2H_2^q\\\mathcal{H}(b_2)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}H_2^q\\\mathcal{H}_*(b_2)\end{pmatrix}.$$

Отже, оператори Γ та $\mathbf{K}$ унітарно еквівалентні. Останнє твердження випливає з [55, Lemma 5.10]. □

Теорема 5.6. *Нехай* $f_0 \in L_\infty^{p\times q}\cap\Pi^{p\times q}$, $\Gamma=\Gamma(f_0)$, $\kappa\in\mathbb{Z}_+$, $\{b_1,b_2\}\in den(f_0)$, $K=b_1f_0b_2$, *та* $\mathbf{P}$ *визначений формулами* (5.4)-(5.6) *і* (5.8), *нехай виконуються умови (H1)–(H4), та м. ф.* $W(\lambda)$ *визначена формулой* (5.11) *і*

$$\mathfrak{A}(\mu)=\begin{bmatrix}b_1(\mu)^{-1} & 0\\ 0 & b_2(\mu)\end{bmatrix}W(\mu),\quad \mu\in\mathfrak{h}_{b_1}\cap\mathfrak{h}_{b_2^\#}\cap\Omega_0. \tag{5.23}$$

Тоді:

(1) $\mathfrak{A}\in\mathfrak{M}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$;

(2) $\mathcal{N}_\kappa(f_0)\neq\emptyset$ *тоді і тільки тоді, коли* $\kappa\ge\kappa_1:=\nu_-(I-\Gamma^*\Gamma)$;

(3) $\mathcal{N}_\kappa(f_0)=T_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}^{p\times q}_{\kappa-\kappa_1}]$, *при* $\kappa\ge\kappa_1$,

(4) $\mathcal{NT}_\kappa(f_0)=\cup_{k=\kappa_1}^{\kappa}T_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}^{p\times q}_{k-\kappa_1}]$, *при* $\kappa\ge\kappa_1$.

Доведення. (1) За [49, Theorem 4.2] блочні рядки $W(\lambda)$ допускають факторизацію

$$\begin{bmatrix}w_{11} & w_{12}\end{bmatrix}=b_1\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}w_{21} & w_{22}\end{bmatrix}=b_2^{-1}\begin{bmatrix}a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},$$

де $a_{11}\in(H_2^{p\times p})^\perp, a_{12}\in(H_2^{p\times q})^\perp$, $a_{21}\in H_2^{q\times p}$, $a_{22}\in H_2^{q\times q}$ та

$$s_{21}=-w_{22}^{-1}w_{21}=-a_{22}^{-1}a_{21}\in\mathcal{S}^{p\times q}_\kappa.$$

Якщо м. ф. b_ℓ, s_ℓ, b_r, s_r визначаються факторизаціями Крейна-Лангера для s_{21}

$$s_{21} = b_\ell^{-1} s_\ell = s_r b_r^{-1},$$

то відповідно до [49, Theorem 4.3] (див. (4.26), (4.27))

$$a_2 := b_\ell a_{22}^{-1} \in \mathcal{S}_{out}^{q\times q}, \quad a_1 := (a_{11}^{\#})^{-1} b_r \in \mathcal{S}_{out}^{p\times p}.$$

За Означенням 1.30 пара $\{b_1, b_2\}$ є правою асоційованою парою м. ф. $W(\lambda)$ класу $\mathcal{U}_{\kappa_1}^r(j_{pq})$. Таким чином

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$$

належить до класу $\mathfrak{M}_\kappa^r(j_{pq})$.

(2) За Теоремою 5.4 множина $\mathcal{N}_\kappa(f_0)$ є непустою тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K)$ не пуста. Внаслідок цього (2) випливає з Теореми 5.2 та Леми 5.5.

(3) Твердження (3) випливає з формули (5.12), яка доказана в Теоремі 5.2, і з еквівалентності

$$f \in \mathcal{N}_\kappa(f_0) \Longleftrightarrow b_1 f b_2 \in \mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K) = T_W[\mathcal{S}_{\kappa-\kappa_1}^{p\times q}]$$

(Теорема 5.4). Це означає, що для кожної $f \in \mathcal{N}_\kappa(f_0)$ м. ф. $s = b_1 f b_2$ належить до $\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2, K)$ і, отже, допускає представлення

$$s = (w_{11}\varepsilon + w_{12})(w_{21}\varepsilon + w_{22})^{-1} = T_W[\varepsilon]$$

для деякого $\varepsilon \in \mathcal{S}_{\kappa-\kappa_1}$. Тому м. ф. $f = b_1^{-1} s b_2^{-1}$ можна представити наступним чином

$$f = b_1^{-1}(w_{11}\varepsilon + w_{12})(b_2 w_{21}\varepsilon + b_2 w_{22})^{-1} = T_{\mathfrak{A}}[\varepsilon].$$

(4) Як випливає з (2) $\mathcal{N}_{\kappa'}(f_0) = \emptyset$ для $\kappa' < \kappa_1$. Тому, (4) випливає з (5.19) та твердження (3). □

5.3 Резольвентна матриця у випадку раціональної м. ф. f_0

Припустимо тепер, що $\Omega_+ = \mathbb{D}$ і f_0 – це раціональна м. ф. вигляду

$$f_0(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}B, \tag{5.24}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{p\times n}$,

$$\sigma(A) \subset \mathbb{D}. \tag{5.25}$$

Тоді відповідний оператор Ганкеля $\Gamma = \Gamma(f_0) : H_2^q \to (H_2^p)^\perp$ побудований по f_0 за правилом (1.33) має наступне блочне представлення $(\gamma_{j+k-1})_{j,k=1}^\infty$

$$(\gamma_{j+k-1})_{j,k=1}^\infty = (CA^{j+k-2}B)_{j,k=1}^\infty. \tag{5.26}$$

де γ_j задаються формулою

$$\gamma_j(f_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ij\theta} f_0(e^{i\theta})d\theta \quad (j = 1, 2, ..). \tag{5.27}$$

Формула (5.26) може бути переписана у вигляді

$$\Gamma = \Omega\Xi,$$

де

$$\Xi = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad \text{і} \quad \Omega = \begin{bmatrix} CA^0 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{5.28}$$

Представлення (5.24) називається *мінімальним*, якщо розмірність матриці A у (5.24) є мінімальною. Пара (A, B) називається *керованою*, якщо $\operatorname{ran}\Xi = \mathbb{C}^n$. Пара (C, A) називається *спостережуваною*, якщо $\ker\Omega = \{0\}$.

Як відомо, див. [38, Теорема 4.14] представлення (5.24) є мінімальним, тоді і тільки тоді, коли пара (A, B) є керованою і пара (C, A) є спостережуваною, тобто

$$\operatorname{ran}\Xi = \mathbb{C}^n \quad \text{та} \quad \ker\Omega = \{0\}. \tag{5.29}$$

Нехай P – це граміан, який відповідає за керованість та Q – це граміан, який відповідає за спостереженність, які визначаються наступним чином

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} A^k BB^*(A^*)^k = \Xi\Xi^*, \quad Q = \sum_{k=0}^{\infty} (A^*)^k CC^*(A)^k = \Omega^*\Omega$$

та виявляються розв'язками наступних рівнянь Ляпунова-Стейна

$$P - APA^* = BB^*, \quad Q - A^*QA = C^*C. \tag{5.30}$$

Будемо розшукувати правий знаменник м. ф. $F_0(\lambda) = (\lambda I_n - A)B$ у вигляді

$$b_2(\lambda) = I_q - (1-\lambda)B^*(I_n - \lambda A^*)^{-1}P^{-1}(I_n - A)^{-1}B. \tag{5.31}$$

Формула (5.31) для $b_2(\lambda)$ інспірована роботою [48, Зауваження 4.2]. Той факт, що м. ф. $b_2(\lambda)$ є внутрішньою випливає з наступного твердження, яке міститься в [51]

Теорема 5.7. *Нехай пара (A, B) є керованою, $P = P^*$ є оборотною і задовольняє першому з рівнянь* (5.30)*. Тоді м. ф. $b_2(\lambda)$ є узагальненою внутрішньою, тобто $b_2 \in \mathcal{S}_\kappa^{q\times q}$, де $\kappa = \nu_-(P)$.*

Таким чином, для всіх $\mu \in \mathbb{T}$ виконується рівність

$$b_2(\mu)^{-1} = b_2(\mu)^*. \tag{5.32}$$

Покажемо тепер, що

$$F_0(\lambda)b_2(\lambda) \in H_\infty^{p\times q}. \tag{5.33}$$

Покладемо

$$R_\lambda = (\lambda I_n - A)^{-1}, \quad R_1 = (I_n - A)^{-1}.$$

Прямі розрахунки показують, що

$$\begin{aligned} F_0(\lambda)Bb_2(\lambda) &= R_\lambda B[I_q - (1-\lambda)B^*(I_n - \lambda A^*)^{-1}P^{-1}R_1 B] \\ &= R_\lambda[R_1^{-1}P(I_n - \lambda A^*) - (1-\lambda)BB^*](I_n - \lambda A^*)^{-1}P^{-1}R_1 B \end{aligned}$$

Використовуючи першу з тотожностей Ляпунова-Стейна (5.30) перепишемо попередній вираз у вигляді

$$\begin{aligned}&R_\lambda[R_1^{-1}P(I_n-\lambda A^*)-(1-\lambda)(P-APA^*)](I_n-\lambda A^*)^{-1}P^{-1}R_1B\\&=R_\lambda[-\lambda PA^*-AP+APA^*+\lambda P](I_n-\lambda A^*)^{-1}P^{-1}R_1B\\&=P(I_n-A^*)(I_n-\lambda A^*)^{-1}P^{-1}(I_n-A)^{-1}B.\end{aligned}$$

Отже

$$F_0(\lambda)Bb_2(\lambda)=P(I_n-A^*)(I_n-\lambda A^*)^{-1}P^{-1}(I_n-A)^{-1}B. \tag{5.34}$$

Таким чином виконується (5.33) і $\{I_p,b_2\}\in den(f_0)$. Оскільки м. ф. $b_2(\lambda)$ є внутрішньою, то

$$b_2(\lambda)^{-1}=I_q+(1-\lambda)B^*(I_n-A^*)^{-1}P^{-1}(\lambda I_n-A)^{-1}B. \tag{5.35}$$

Теорема 5.8. *Нехай $f_0(\lambda)$ м. ф. вигляду* (5.24), *де $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{n\times q}$, $C\in\mathbb{C}^{p\times n}$ задовольняють умовам* (5.25) *і* (5.29), *та нехай*

$$M=\begin{bmatrix}-A&0\\0&I_n\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}-I_n&0\\0&A^*\end{bmatrix},\quad \Lambda=\begin{bmatrix}-Q&I_n\\I_n&-P\end{bmatrix}, \tag{5.36}$$

$$G(\lambda)=\begin{bmatrix}C&0\\0&B^*\end{bmatrix}(M-\lambda N)^{-1}. \tag{5.37}$$

Припустимо, що $1\notin\sigma(PQ)$. Тоді:

(1) $\mathcal{N}_\kappa(f_0)\neq\emptyset$ тоді і тільки тоді, коли

$$\kappa_1:=\nu_-(I-PQ)\le\kappa; \tag{5.38}$$

(2) якщо виконано (1), то матриця Λ є оборотною та $\mathcal{N}_\kappa(f_0)=T_{\mathfrak{A}}[\mathcal{S}_{\kappa-\kappa_1}]$, де

$$\mathfrak{A}(\mu)=I_m-(1-\mu)G(\mu)\Lambda^{-1}G(1)^*j_{pq}; \tag{5.39}$$

(3) М. ф. $\mathfrak{A}(\mu)$ є узагальненою правою γ-твірною матрицею класу $\mathfrak{M}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$.

Зауваження 5.9. *Твердження (1), (2) Пропозиції 5.8 та формула* (5.39) *для резольвентної матриці $\mathfrak{A}(\mu)$ добре відомі з [38, Theorem 20.5.1]. Покажемо,* що (5.39) *може бути отримана із загальної формули* (5.11) *для резольвентної матриці задачі* $\mathbf{TSP}_\kappa(I_p, b_2, K)$ *з*

$$K(\lambda) = f_0(\lambda)b_2(\lambda) = C(\lambda I_n - A)^{-1}Bb_2(\lambda). \tag{5.40}$$

Доведення. (1) За Теоремою 5.4, $f \in \mathcal{N}_\kappa(f_0)$ тоді і тільки тоді, коли $s = fb_2 \in \mathcal{TS}_\kappa(I_p, b_2, K)$. Поряд з $\mathbf{TSP}_\kappa(I_p, b_2, K)$ розглянемо також задачу $\mathbf{GSTP}_\kappa(I_p, b_2, K)$: Знайти м. ф. s розміру $p \times q$ таку, що:

$$s \in \mathcal{S}_\kappa^{p\times q} \quad \text{і} \quad (s - K)b_2^{-1} \in \mathcal{N}_{+,\kappa}^{p\times q}. \tag{5.41}$$

Як відомо [48, Theorem 5.17], ці проблеми мають однакову резольвентну матрицю. Припустимо, що s задовольняє (5.41). Тоді

$$\mathcal{M}_\pi((s-K)b_2^{-1}, \Omega_+) = \mathcal{M}_\pi(s, \Omega_+) = \kappa.$$

За Лемою 5.1

$$\mathcal{M}_\pi(b_\ell(s-K)b_2^{-1}, \Omega_+) = \mathcal{M}_\pi(b_\ell s, \Omega_+) = \mathcal{M}_\pi(s_\ell, \Omega_+) = 0. \tag{5.42}$$

За (5.35) та (5.40) вираз $b_\ell(s-K)b_2^{-1} = (s_\ell - b_\ell K)b_2^{-1}$ приймає форму

$$s_\ell(I_q + (1-\lambda)B^*(I_n - A^*)^{-1}P^{-1}(\lambda I_n - A)^{-1}B) - b_\ell C(\lambda I_n - A)^{-1}B.$$

Враховуючи, що

$$(1-\lambda)(\lambda I_n - A)^{-1} = -I_n + (I_n - A)(\lambda I_n - A)^{-1},$$

умову (5.42) можна переписати наступним чином

$$\{s_\ell B^*(I_n - A^*)^{-1}P^{-1}(I_n - A) - b_\ell C\}(\lambda I_n - A)^{-1}B \in \mathcal{N}_+. \tag{5.43}$$

Оскільки пара (A, B) є керованою, то (5.43) можна переписати як

$$\begin{bmatrix} b_\ell & -s_\ell \end{bmatrix} F \in \mathcal{N}_+, \tag{5.44}$$

де

$$F(\lambda)=\widehat{C}(A-\lambda I_n)^{-1}, \quad \widehat{C}=\begin{bmatrix} C \\ B^*(I_n-A^*)^{-1}P^{-1}(I_n-A) \end{bmatrix}. \tag{5.45}$$

Таким чином задача $\mathbf{GSTP}_\kappa(I_p, b_2, K)$ еквівалентна інтерполяційній задачі (5.44), що розглядалася в [48]. Як показано в [48, (1.14)] матриця Піка $\widehat{P}$, що відповідає задачі (5.44), є єдиним розв'язком рівняння Ляпунова-Стейна

$$A^*\widehat{P}A-\widehat{P}=\widehat{C}^*j_{pq}\widehat{C} \tag{5.46}$$

та задача (5.44) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\kappa_1 := \nu_-(\widehat{P}) \le \kappa$. Отже за (5.30) і враховуючи, що

$$(I_n-A)^{-1}BB^*(I_n-A^*)^{-1}=(I_n-A)^{-1}P+PA^*(I_n-A^*)^{-1}, \tag{5.47}$$

розглянемо

$$\begin{aligned}
\widehat{C}^*j_{pq}\widehat{C} &= C^*C-(I_n-A^*)P^{-1}(I_n-A)^{-1}BB^*(I_n-A^*)^{-1}P^{-1}(I_n-A)\\
&= C^*C-(I_n-A^*)P^{-1}[(I_n-A)^{-1}P+PA^*(I_n-A^*)^{-1}]P^{-1}(I_n-A)\\
&= C^*C-[(I_n-A^*)P^{-1}+(I_n-A^*)A^*(I_n-A^*)^{-1}P^{-1}(I_n-A)]\\
&= C^*C-(I_n-A^*)P^{-1}-A^*P^{-1}(I_n-A)\\
&= Q-A^*QA-P^{-1}-A^*+A^*P^{-1}A\\
&= (Q-P^{-1})-A^*(Q-P^{-1})A.
\end{aligned}$$

Тобто

$$\widehat{C}^*j_{pq}\widehat{C}=(Q-P^{-1})-A^*(Q-P^{-1})A,$$

тоді

$$\widehat{P}=P^{-1}-Q=P^{-1/2}(I-P^{1/2}QP^{1/2})P^{-1/2}. \tag{5.48}$$

З (5.48) та Теореми 5.2 випливає, що $\mathcal{TS}_\kappa(I_p, b_2, K)\neq\emptyset$ тоді і тільки тоді, коли

$$\kappa_1 := \nu_-(I-P^{1/2}QP^{1/2})\le\kappa.$$

Відзначимо, що $\sigma(I-P^{1/2}QP^{1/2})=\sigma(I-PQ)$. За Теоремою 5.4 це доводить (1).

(2) В силу [48, Theorem 3.1, Theorem 5.17] резольвентна матриця $W(\lambda)$, що

описує множину $\mathcal{TS}_\kappa(I_p, b_2, K_0)$ за формулою (5.12), приймає форму

$$W(\lambda) = I_m - (1-\lambda)F(\lambda)\widehat{P}^{-1}F(1)^* j_{pq},$$

де $\widehat{P}$ задається формулою (5.46). За [48, Lemma 4.8] $W \in \mathcal{U}_\kappa^r(j_{pq})$. Покладемо, що

$$\mathfrak{A}(\mu) := \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & b_2(\mu) \end{bmatrix} W(\mu) \tag{5.49}$$

та покажемо, що м. ф.

$$\mathfrak{A}(\mu) := \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & b_2(\mu) \end{bmatrix} + (\mu - 1) \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & b_2(\mu) \end{bmatrix} F(\mu)\widehat{P}^{-1}F(1)^* j_{pq} \tag{5.50}$$

збігається з м. ф. $\mathfrak{A}(\mu)$, що задана формулою (5.39). З (5.34) випливає, що

$$b_2(\mu)^{-1}B^*(I_n - \mu A^*)^{-1} = B^*(I_n - A^*)^{-1}P^{-1}(\mu I_n - A)^{-1}(I_n - A)P.$$

Враховуючи (5.32), отримуємо

$$b_2(\mu)B^*(I_n - A^*)^{-1}P^{-1}(\mu I_n - A)^{-1}(I_n - A) = B^*(I_n - \mu A^*)^{-1}P^{-1}. \tag{5.51}$$

З (5.51), (5.45), (5.36) та (5.37) це означає, що

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & b_2(\mu) \end{bmatrix} F(\mu) = \begin{bmatrix} C(A - \mu I_n)^{-1} \\ B^*(I_n - A^*)^{-1}P^{-1} \end{bmatrix} = G(\mu) \begin{bmatrix} I_n \\ P^{-1} \end{bmatrix}. \tag{5.52}$$

Далі, з огляду на(5.45) та (5.31)

$$F(1)^* = \begin{bmatrix} (A^* - I_n)^{-1}C^* & P^{-1}(A - I_n)^{-1}B \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_n & P^{-1} \end{bmatrix} G(1)^*, \tag{5.53}$$

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & b_2(\mu) \end{bmatrix} = I_m - (1-\mu)G(\mu) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -P^{-1} \end{bmatrix} G(1)^* j_{pq}. \tag{5.54}$$

Підставляючи (5.52), (5.53) і (5.54) у (5.50) отримуємо

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= I_m - (1-\mu)G(\mu)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -P^{-1}\end{bmatrix} G(1)^* j_{pq} \\
&+ (1-\mu)G(\mu)\begin{bmatrix} I_n \\ P^{-1}\end{bmatrix}(P-Q^{-1})\begin{bmatrix} I_n & P^{-1}\end{bmatrix} G(1)^* j_{pq} \\
&= I_m - (1-\mu)G(\mu)\begin{bmatrix} P-Q^{-1} & I_n - Q^{-1}P^{-1} \\ I_n - P^{-1}Q^{-1} & -P^{-1}Q^{-1}P^{-1}\end{bmatrix} G(1)^* j_{pq} \\
&= I_m - (1-\mu)G(\mu)\Lambda^{-1}G(1)^* j_{pq}.
\end{aligned}$$

За Теоремою 5.2 та [48, Theorem 3.1 і Theorem 5.17] множина $\mathcal{TS}_\kappa(I_p, b_2, K_0)$ описується формулою

$$\mathcal{TS}_\kappa(b_1, b_2; K) = T_W[\mathcal{S}^{p\times q}_{\kappa-\kappa_1}] = \{T_W[\varepsilon] : \varepsilon \in \mathcal{S}^{p\times q}_{\kappa-\kappa_1}\}.$$

Тому твердження (2) випливає з Теореми 5.6 (3).

(3) Оскільки $W \in \mathcal{U}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$ з (5.49) та Теореми 5.6 випливає, що $\mathfrak{A} \in \mathfrak{M}^r_{\kappa_1}(j_{pq})$. □

5.4 Мотивація з теорії систем

У скалярному випадку задача Нехарі-Такагі була поставлена і розв'язана у [22]. Незабаром з'ясувалося, що ця задача може бути використана у теорії систем при розгляді проблеми редукції скалярної лінійної системи, що привело до створення теорії H_∞-контроля у [38, 58]. У випадку складної лінійної системи інженери намагаються створити її спрощену модель, яка зробить обчислювальні алгоритми більш практичними. На жаль, бажання створити більш точну модель приводить, як правило, до збільшення кількості параметрів і збільшення складності обчислювальних операторів. Якщо деякі параметри мають незначний вплив, то має сенс відмовитися від них. Взагалі кажучі, проблема редукції моделі полягає у наближенні (у певному сенсі) даної моделі менш складною і тим самим простішою для роботи.

Розглянемо систему з дискретним часом, у якій змінна k приймає цілочисельні значення. Нехай система управляється різницевими рівняннями першого порядку:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, \\ y_k &= Cx_k + Du_k. \end{aligned}, \quad x_0 = 0,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{5.55}$$

де A, B, C, D постійні (комплексні) матриці (A-квадратна матриця), x_k описує стан системи в момент часу k, u_k – це вхідний сигнал, y_k – це відповідний вихідний сигнал.

Систему (5.55) можно однозначно розв'язати в термінах $\{u_k\}$:

$$y_k = Du_k + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-j-1}Bu_j, \quad k \geq 0. \tag{5.56}$$

Далі будемо використовувати Z-перетворення, яке визначається наступним чином:

$$\{v_k\}_{k\geq 0} \longrightarrow V(z) = \sum_{j=0}^{\infty} v_j z^{-j}.$$

Застосуємо Z-перетворення до системи (5.55), тоді вона перепишеться наступним чином

$$zX(z) = AX(z) + BU(z),$$
$$Y(z) = CX(z) + DU(z).$$

Розв'язуючи перше рівняння щодо $X(t)$ і підставляючи в друге рівняння, отримуємо

$$Y(z) = [D + C(zI - A)^{-1}B]U(z).$$

Таким чином, множення на м. ф.

$$W(z) = D + C(zI - A)^{-1}B$$

реалізує відображення входу системи (5.55) на її вихід, де вхідний та вихідний сигнали виражаються через Z-перетворення. Тому $W(z)$ називається передаточною функцією системи, та говорять, що (A, B, C, D) реалізує передаточну функцію W. У Розділі 6 [38] показано, що раціональна функція W має таку реалізацію тоді і тільки тоді, коли W є *власною*, тобто аналітичною у ∞.

Якщо (C, A) – це *нульова пара ядра*, тобто $\bigcap_{i=0}^{\infty} Ker(CA^i) = \{0\}$, та (A, B) –

це *пара повного ранга*, тобто $\sum_{i=0}^{\infty} Im(A^i B) = \mathbb{C}^p$, де $p \times p$ – це розмір матриці A, то розмір n простору співпадає зі степенем Макмілана раціональної м. ф. W та є вже мінімально можливим розміром для простору складеного з усіх систем вигляду (5.55), які породжують однакову поведінку входу-виходу. Якщо цей мінімальний розмір все ще більший, ніж треба для практичних цілей, можна досягти лише розумного наближення точної вхідної поведінки, щоб досягти меньшої розмірності або зменшити ступінь Макміллана. Це призводить до проблеми редукції моделі. Залишається обговорити, яка міра наближення є розумною і практичною для використання.

Припустимо, що $W(z)$ є *строго власною* (тобто аналітичною на нескінченності, $W(\infty) = 0$) раціональною м. ф. розміру $M \times N$ з усіма полюсами у $\mathbb{D}$. Такі раціональні м. ф. називають *стійкими*. Таким чином, стійка раціональна м. ф. $W(z)$ має мінімальну реалізацію наступного вигляду

$$W(z) = C(zI - A)^{-1}B$$

де спектр $\sigma(A)$ знаходиться у $\mathbb{D}$. Норма $\|W\|_\infty$ індукована оператором входу-виходу $\{u(t)\}_{k\geq 0} \to \{y(t)\}_{k\geq 0}$ системи (5.55) визначається наступним чином

$$\|W\|_\infty = \sup\{\|W(z)\| : |z| = 1\}. \tag{5.57}$$

За м. ф. W побудуємо оператор Ганкеля

$$\Gamma(W) = \Pi_{(L_2^p)^\perp} W|_{L_2^q}$$

з блочним представленням $(\gamma_{j+k-1})_{j,k=1}^{\infty}$, де

$$\gamma_j(W) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ij\theta} W(e^{i\theta}) d\theta \quad (k = 1, 2, ..). \tag{5.58}$$

За теоремою Нехарі (Теорема 20.2.1, [38]) норму $\|\Gamma(W)\|$ можна ідентифікувати з відстанню від W до множини антистійких раціональних м. ф. (тобто функцій з усіма полюсами поза $\mathbb{D} \cup \mathbb{T}$) у нормі $\|\cdot\|_\infty$, тобто

$$\|\Gamma(W)\| = \inf\{\|W - R\|_\infty : R \in \mathcal{R}^{m\times n}(\mathbb{D} \cup \mathbb{T})\} \tag{5.59}$$

Наступний результат дає корисний зв'язок між нормою Ганкеля і $\|W\|_\infty$.

Теорема 5.10. *Нехай $W(z)$ строго власна м. ф. розміру $M \times N$ з усіма полюсами у $\mathbb{D}$ і степенем Макміллана n. Тоді*

$$\|\mathcal{H}_W\| \leq \|W\|_\infty \leq 2n\|\mathcal{H}_W\|.$$

Наступна Проблема мінімізації моделі була розглянута К. Гловером у [58]: Нехай задана власна і стійка раціональна м. ф. $W_0(z)$ з мінімальною реалізацією

$$W_0(z) = C(zI - A)^{-1}B$$

степеня Макміллана $\delta(W_0) = n$. Нехай також дано бажаний рівень допустимості $\mu > 0$. Проблема полягає у тому, щоб знайти

$$\kappa_0 = min\{\kappa : \text{існує стійка раціональна}\, W, \delta(W) \leq \kappa, \|W_0 - W\|_* < \mu\},$$

де $\|\cdot\|_*$ – це деяка підходяща норма, а потім описати множину всіх κ_0-наближень:

$$\{W(z) : W \text{ строго стійка}, \delta(W) = \kappa_0, \|W_0 - W\|_* < \mu\}. \tag{5.60}$$

З точки зору фізики правильно було би використовувати норму $\|W\|_\infty$ оскільки вона індукована оператором входу-виходу, але в цьому випадку математичну проблему складно вирішити. Розумним компромісом, запропонованим у [58], є використання норми Ганкеля $\|W\|_* = \|\mathcal{H}_W\|$.

Дійсно, згідно з Теоремою 5.10 норма Ганкеля та норма $\|\cdot\|_\infty$ еквівалентні, якщо ми обмежуємося передаточними функціями обмеженого степеня Макміллана. У цьому випадку проблема редукції моделі для W_0 зводиться до проблеми Нехарі-Такагі для $f_0 = W_0$.

Зв'язок між розв'язком W задачі (5.60) і розв'язком f задачі $\mathbf{NTP}(f_0)$ задається формулою $W = W_0 + f$. Ідея застосування проблеми Нехарі-Такагі до проблеми редукції моделі належить К. Гловеру і викладена у [58].

5.5 Висновки

Результати глави були представлені у [52].

Отримано опис розв'язків інтерполяційної задачі Такагі-Сарасона. Знайдено зв'язок між множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона і задачі Нехарі-Такагі. Отримано опис цілком невизначеної задачі Нехарі-Такагі для обмежених функцій, що мають псевдопродовження. Отримано формулу для розв'язку задачі Нехарі-Такагі у раціональному випадку.

Висновки

1. Введено клас $\mathcal{U}_{\kappa}^{\ell}(j_{pq})$ лівих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., який є дуальним для класу правих узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф., що відіграє важливу роль в описі розв'язків інтерполяційної проблеми Шура. Показано зв'язок між лівими і правими узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. Введено поняття лівої асоційованої пари $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$ для лівої узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. $W(\lambda)$ і знайдено факторизації м. ф. $W(\lambda)$ у термінах лівої асоційованої пари $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\}$. Введено поняття сингулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. та отримано критерії її сингулярності як у термінах асоційованої пари, так і у термінах просторів Понтрягіна з відтворюючим ядром.

2. Введено означення регулярної узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. Отримано достатні умови для регулярності узагальненої j_{pq}-внутрішньої м. ф. У раціональному випадку доведено критерій регулярності узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф. Також отримано умови існування регулярно-сингулярної факторизації для узагальнених j_{pq}-внутрішніх м. ф.

3. Введено підкласи правих та лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримано зв'язок між узагальненими j_{pq}-внутрішніми м. ф. і множиною узагальнених γ-твірних матриць, що мають псевдопродовження. Введено поняття сингулярних, регулярних і сильно регулярних γ-твірних матриць. Знайдено достатні умови регулярності і сильної регулярності правих і лівих узагальнених γ-твірних матриць. Отримано достатні умови регулярно-сингулярної факторизації узагальнених γ-твірних матриць.

4. Отримано опис розв'язків інтерполяційної задачі Такагі-Сарасона. Знайдено зв'язок між множиною розв'язків задачі Такагі-Сарасона і задачі Нехарі-Такагі. Отримано опис цілком невизначеної задачі Нехарі-Такагі для обмежених функцій, що мають псевдопродовження.

Література

[1] Аров Д. З. Обобщенная бикасательная проблема Каратеодори-Неванлинны-Пика и $(j; J_0)$-внутренние матрицфункции/ Д. З. Аров// Изв. Рос. Акад. Наук, Сер. Матем. – 1993.– **57**, 1. – С. 121–135.

[2] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции/ Дж. Гарнетт // Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.-Мир. – 1984. – 469 с.

[3] Гинзбург Ю. П. О J-нерастягивающих оператор-функциях/ Ю. П. Гинзбург// Докл. АН СССР. – 1957.– **2**, 117. – С. 171—173.

[4] Гофман К. Банаховы пространства аналитических функций/ К. Гофман// М.:Изд. ин. лит. – 1963.

[5] Ефимов А. В. J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической тео рии электрических цепей /А. В. Ефимов, В. П. Потапов// УМН. – 1973. – **28**, 1(169). – С. 65–130.

[6] Золотарев В. А. Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов /В. А. Золотарев// Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина. – 2003. – 342 с.

[7] Золотарев В. А. Коммутативные системы несамосопряженных (неунитарных) операторов и их модельные представления /В. А. Золотарев// Харьков, Днепропетровск: ХНУ им. В. Н. Каразина. – 2014. – 672 с.

[8] Лившиц М. С. К теории изометрических операторов с равными дефектными числами / М. С. Лившиц// ДАН СССР – 1947. – **57**, 1. – С. 13–15.

[9] Лившиц М. С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов / М. С. Лившиц// Матем. сб. – 1954.– **34**, 76. – С. 145–199.

[10] Лившиц М. С. Операторы, колебания, волны. Открытые системы/ М. С. Лившиц// М.:Наука – 1966.– 298 с.

[11] Лившиц М. С. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах/ М. С. Лившиц, А. А. Янцевич// Х.: Издательство Харьковского университета – 1971.– 160 с.

[12] Лившиц М. С. Теорема умножения характеристических матриц- функций /М. С. Лившиц, В. П. Потапов// Докл. АН СССР. – 1950. – **72**, 4. – С. 625–628.

[13] Нейман Е. В. Аналог теоремы Руше в обощённом классе Смирнова/ Е. В. Нейман // Труды Института прикладной математики и механики. – 2008. – **17**.– С. 148–153.

[14] Потапов В. П. Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций / В. П. Потапов// Труды Моск. Матем. об-ва. – 1955. – **4**. – С. 125–236.

[15] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций /И. И. Привалов// Государственное издательство технико-теоретической литературы. – 1950. – 336 с.

[16] Секефальви-Надь Б. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве/Б. Секефальви-Надь и Ч. Фойаш// М.: Мир. – 1970. – 431 с.

[17] Цекановский Э. Р. Обобщенные расширения несимметрических операторов /Э. Р. Цекановский// Матем. сб. –1965. – **68 (110)**, 4. – С. 527–548.

[18] Цекановский Э. Р. Теория бирасширений операторов в оснащенных гильбертовых пространствах. Неограниченные операторные узлы и характеристические функции /Э. Р. Цекановский, Ю. Л. Шмульян//УМН. –1977. – **32**, 5. – С. 69—124.

[19] Adamjan V. M. The Theory of Couplings of Semi-unitary Operators/ V. M. Adamjan// Doctoral Thesis, Odessa State University. – 1973.

[20] Adamjan V. M. Nondegenerate unitary couplings of semiunitary operators/ V. M. Adamjan// (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 1973. – **7**, 4.– P. 1–16.

[21] Adamjan V. M. Infinite Hankel matrices and generalized problems of Carathodory-Fejer and I. Schur problems /V. M. Adamjan, D. Z. Arov and M. G. Krein// (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 1968. – **2**, 4. – P. 1–17.

[22] Adamjan V. M. Analytic properties of the Schmidt pairs of a Hankel operator and the generalized Schur-Takagi problem /V. M. Adamjan, D. Z. Arov and M. G. Krein// Mat. Sb. (N.S.). – 1971. – **86**, 128. – P. 34–75.

[23] Alpay D. Interpolation problems, extensions of symmetric operators and reproducing kernel spaces. Part I/D. Alpay, P. Bruinsma, A. Dijksma, H. S. V. de Snoo // Operator Theory: Adv. and Appl. Birkhäuser, Basel– 1991.– **50**. – P. 35–82.

[24] Alpay D. Schur functions, operator colligations, and reproducing kernel Pontryagin spaces/D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak and H. S. V. de Snoo// Oper. Theory: Adv. Appl. –1997. – **96**. – P. xii–229.

[25] Alpay D. Realization and Factorization in Reproducing Kernel Pontryagin Spaces / D. Alpay, A. Dijksma, J. Rovnyak and H. S. V. de Snoo // Oper. Theory Adv. Appl. – 2001. – **123**. – P. 43–65.

[26] Alpay D. On applications of reproducing kernel spaces to the Schur algorithm and rational J unitary factorization/ D. Alpay and H. Dym // I. Schur methods in operator theory and signal processing. – 1986. – **18**, 4. – P. 89–159.

[27] Amirshadyan A. Interpolation in generalized Nevanlinna and Stieltjes classes/ A. Amirshadyan, V. Derkach // J. Operator Theor. – 1999. – **42**. – 145–188.

[28] Aronszajn N. Theory of reproducing kernels /N. Aronszajn // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – **168**. – P. 337–404.

[29] Arov D. Z. Realization of matrix-valued functions according to Darlington / D. Z. Arov// Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. – 1973. – **37**. – P. 1299–1331.

[30] Arov D. Z. Regular and singular J-inner matrix functions and corresponding extrapolation problems / D. Z. Arov// Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 1988. – **22**, 1. – P. 57–59.

[31] Arov D. Z. γ-generating matrices, j-inner matrix-functions and related extrapolation problems / D. Z. Arov// Teor. Funkt. Anal. i ikh Prilozhen. – 1989. – **51**. – 61–67.

[32] Arov D. Z. J-inner matrix functions, interpolation and inverse problems for canonical systems. I. Foundations /D. Z. Arov and H. Dym// Integral Equations Operator Theory. – 1997. – **29**, 4. – P. 373–454.

[33] Arov D. Z. Matricial Nehari problems J-inner matrix functions and the Muckenhoupt condition /D. Z. Arov and H. Dym// J. Funct. Anal. – 2001. – **181**. – P. 227–299.

[34] Arov D. Z. J-Contractive Matrix Valued Functions and Related Topics/ D. Z. Arov and H. Dym// Cambridge University Press, Cambridge. – 2008. – Pp. xii+575.

[35] Alpay D. On a new class of structured reproducing kernel spaces /D. Alpay and H. Dym// J. Funct. Anal. – 1993 .– **111**. – P. 1–28.

[36] Azizov T. Ya. Linear operators in spaces with an indefinite metric /T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov// Pure and Applied Mathematics, New York. – 1989. – Pp. xii–304.

[37] Ball J. A. Models for noncontractions /J. A. Ball // J. Math. Anal. Apl. – 1975. – P. 235–254.

[38] Ball J. A. Interpolation of rational matrix functions /J. A. Ball, I. Gohberg and L. Rodman// Birkhäuser Verlag, Basel. – 1990. **45**. – Pp. xii–605.

[39] Ball J. A. A Beurling-Lax theorem for the Lie group $\mathrm{U}(m, n)$ which contains most classical interpolation theory /J. A. Ball and J. W. Helton// J. Operator Theory. – 1983. – **9**. – P. 632–658.

[40] Ball J. A. Interpolation problems of Pick-Navanlinna and loewner types for meromorphic matrix functions /J. A. Ball // Integral Equations and Operator Theory. – 1983. – **8**, no. 1. – P. 804–840.

[41] Berezansky Y. M. The strong Hamburger moment problem and related direct and inverse spectral problems for block Jacobi-Laurent matrices/ Y. M. Berezansky, M. E. Dudkin// Methods Funct. Anal. Topology – 2010. – **16**, 3, 203—241.

[42] Bognar J. Indefinite inner product spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete /J. Bognar// Springer-Verlag. – 1974. – **78**. Pp. ix–224.

[43] de Branges S. Some Hilbert spaces of analytic functions /S. de Branges// Trans. Amer. Math. Soc. – 1963. – **106**. – P. 445–668.

[44] Brodskii M. S. Triangular and Jordan representations of linear operators / M. S. Brodskii// M: Nauka. – 1968. – Pp. 287.

[45] Chen W. K.Theory and Design of Broadband Matching Networks/ W. K. Chen// Pergamon, Oxford. – 1976.

[46] Derevyagin M. S. On the convergence of Padé approximants of generalized Nevanlinna functions /M. S. Derevyagin and V. A. Derkach// Tr. Mosk. Mat. Obs. – 2007. – **686**. – P. 133–182.

[47] Derkach V. A. On linear fractional transformations associated with generalized J-inner matrix functions /V. A. Derkach and H. Dym// Integral Equations Operator Theory. – 2009. – **65**, 1. – P. 1–50.

[48] Derkach V. A. Bitangential interpolation in generalized Schur classes / V. A. Derkach and H. Dym// Complex Anal. Oper. Theory.– 2010 – **4**, 4. – P. 701–765.

[49] Derkach V. A. A Generalized Schur-Takagi Interpolation Problem / V. A. Derkach and H. Dym// Integ. Eq. Oper. Th. – 2014. – **80**, 2. – P. 165-227.

[50] Derkach V. A. On indefinite abstract interpolation problem / V. A. Derkach// Methods of Funct. Analysis and Topology. – 2001. – **7**, 4. – 87–100.

[51] Derkach V. A. On the indefinite Schur-Nevanlinna-Pick interpolation problem /V. A. Derkach// Ukraïn. Mat. Zh. – 2003. – **55**, 10. – P. 1299–1314.

[52] Derkach V. A. Generalized γ-generating matrices and Nehari-Takagi problem / V. A. Derkach, O. O. Sukhorukova. // Oper. Matrices. — 2016. – **10**, 4. – P. 1073–1091.

[53] Derkach V. A. A-regular–A-singular factorizations of generalized J-inner matrix functions. /V. A. Derkach, O. O.Sukhorukova//Methods Funct. Anal. Topology. – 2017. – **23**, 3. – P. 231–251.

[54] Dym H. J-contractive matrix functions, reproducing Kernel Hilbert spaces and interpolation / H. Dym // CBMS Regional Conference series. —1989.

[55] Dym H., Riccati equations and bitangential interpolation problems with singular Pick matrices, in Fast algorithms for structured matrices: theory and applications/ H. Dym// Contemp. Math. – 2003. – **323**. – P. 361 – 391.

[56] Francis B. A. A course in H_∞ control theory / B. A. Francis// Lecture Notes in Control and Information Sciences. – 1987.– **88**. – P. x–150.

[57] Gantmacher F. R. The theory of matrices /F. R. Gantmacher// AMS Chelsea Publishing, Providence, RI. – 1998. – **1**. — Pp. x–374.

[58] Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multi variable systems and their l_∞ error bounds /K. Glover// Int. J. Control. – 1984. – **39**. – P. 1115–1193.

[59] Kalman R. E. Topics in mathematical system theory/ R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arbib // McGraw Hill Book Co.– 1969.

[60] Katsnelson V. E. The abstract interpolation problem and extension theory of isometric operators /V. E. Katsnelson, A. Ya. Kheifets and P. M. Yuditskii// Operators in Spaces of Functions and Problems in Function Theory, Naukova Dumka. – 1987. – Pp. 83–96.

[61] Kheifets A. Parametrization of solutions of the Nehari problem and nonorthogonal dynamics /A. Kheifets// Operator theory and interpolation (Bloomington, IN, 1996). – 2000. – **115**. – P. 213–233.

[62] Kheifets A. Ya. Generalized bitangential Schur-Nevanlinna-Pick problem and the related Parseval equality/ A. Ya. Kheifets// Teor. Funkts. Funkts. Anal. Prilozhen. Kharkov. – 1990. – **54**. – P. 89–96.

[63] Kovališina I. V. An indefinite metric in the Nevanlinna-Pick problem/ I. V. Kovališina and V. P. Potapov// Akad. Nauk Armjan. SSR Dokl. – 1974. – **59**, 1. – P. 17–22.

[64] Kreĭn M. G. Über die verallgemeinerten Resolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators im Raume Π_κ/ M. G. Kreĭn and H. Langer// Hilbert space operators and operator algebras (Proc. Internat. Conf., Tihany, 1970),North-Holland, Amsterdam. – 1972. – P. 353–399.

[65] Kreĭn M. G. Some propositions on analytic matrix functions related to the theory of operators in the space Π_κ /M. G. Kreĭn and H. Langer// (Acta Sci. Math. (Szeged). – 1981. – **43**, 1-2. – P. 181–205.

[66] Kuh E. Theory of Linear Active Networks /E. Kuh and R. A. Roher// Holden-Day, San Francisco. – 1967.

[67] Nenciu G. General solution of multichannel partial-wave dispersion relations II. Noncoincident thresholds, one pole approximation /G. Nenciu, G. Rasche and W. S. Woolcock// Helve tica Physica Acta. – 1980. – **53**. – P. 134-158.

[68] Nevanlinna R. Asymptotische Entwicklungen beschrankter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem/R. Nevanlinna// Ann. Acad. Sci. Fenn. – 1922.– Ser. A.– **18**, 5. – P. 1—52.

[69] Polderman J. W. andWillems J. C. Introduction to mathematical system theory /J. W. Polderman and J. C. Willems// A Behavioral Approach. Springer. – 1998. – **11**. – Pp. xxx+424.

[70] Redheffer R. On a certain linear fractional transformation / R. Redheffer// J. Math. and Phys. 1960. – **39** – P. 269–286.

[71] Rozanov Yu. A. Spectral theory of multi-dimensional stationary random processes with discrete time /Yu. A. Rozanov// Inst. Math. Statist. and Amer.

Math. Soc., Providence, R. I. Select. Transl. Math. Statist. and Probability. – 1961. – **1**. – P. 253–306.

[72] Saitoh S. Theory of reproducing kernels and its applications /S. Saitoh// Pitman Research Notes in Mathematics Series. Longman Scientific Technical, Harlow. – 1988.

[73] Schwartz L. Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants)/L. Schwartz // J. Analyse Math. – 1964. – **13**. – P. 115–256.

[74] Simonov K. K. Strong matrix moment problem of Hamburger/K. K. Simonov// Methods Funct. Anal. Topology. – 2006.– **12**, 2. – P. 183–196.

[75] Sukhorukova O. O. Factorization formulas for some classes of generalized J-inner matrix valued functions/ O. O. Sukhorukova// Methods Funct. Anal. Topology. – 2014.– **20**, 4. – P. 365–378.

[76] Sukhorukova O. O. Generalized γ-generating matrices /O. O. Sukhorukova// Ukr. Mat. Visn. – 2015. – **12**, 4. – P. 539–558.

[77] Sukhorukova O. O. Factorization of generalized γ-generating matrices / O. O. Sukhorukova// Ukr. Mat. Visn. – 2017. – **14**, 4. – P. 575–594.