Національна академія наук України
Інститут математики

Свинчук Ольга Василівна

УДК 517.51

Сингулярні немонотонні функції канторівського типу та їх фрактальні властивості

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України
Самойленко Анатолій Михайлович,
Інститут математики НАН України, директор, завідувач відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Маслюченко Володимир Кирилович,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, завідувач кафедри математичного аналізу;

доктор фізико-математичних наук, доцент
Самойленко Ігор Валерійович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, доцент кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики.

Захист відбудеться «11» вересня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01601 м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «6» серпня 2018 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В останній час з'явилася потреба і можливості ґрунтовно вивчати функції, які мають нетривіальні (неоднорідні) локальні властивості і складну "варіаційну" поведінку. Вони все частіше з'являються у моделях реальних процесів та явищ, а геометрична теорія дійсних чисел, фрактальна геометрія та фрактальний аналіз дозволяють проводити їх ґрунтовне вивчення. Мова йде про функції сингулярні (неперервна функція, відмінна від константи, називається сингулярною, якщо її похідна майже скрізь рівна нулю в розумінні міри Лебега), ніде не диференційовні, ніде не монотонні (неперервна функція називається ніде не монотонною, якщо вона не має жодного як завгодно малого інтервалу монотонності), або функції, які не мають проміжків монотонності, крім проміжків сталості. За більш ніж столітню історію розвитку теорії таких функцій доведено не так багато теоретичних фактів загального плану. Більшість з відомого стосується окремих прикладів таких функцій або їх класів. Індивідуальна теорія кожного з представників продовжує розвиватись. Ще у 1931 році незалежно один від одного С. Банах та С. Мазуркевич довели, що множина ніде не диференційовних у просторі $C_{[0,1]}$, неперервних на відрізку $[0,1]$, функцій є множиною другої категорії Бера. У 1932 році С. Сакс зробив уточнення до теореми Банаха-Мазуркевича, довівши, що множина неперервних на $[0,1]$ функцій, у яких або існує скінченна права похідна, або ця похідна рівна $+\infty$ на множині континуум, є множиною другої категорії Бера у просторі $C_{[0,1]}$. У 1983 році аналогічний результат для звивистих функцій, які на кожному як завгодно малому відрізку досягають свого глобального максимуму та мінімуму, отримав С. Б. Козирєв. Зовсім недавно були встановлені нові факти стосовно фрактальних властивостей (розмірність графіка) відомого з 1872 року прикладу ніде не диференційовної функції Вейєрштрасса.

Історія вивчення сингулярних функцій як самостійного об'єкту дослідження розпочалася більш ніж 100 років тому. У 1981 році Т. Замфіреску довів, що "більшість" неперервних монотонних функцій є сингулярними, оскільки сингулярні функції у метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера. За своїми властивостями, пов'язаними з монотонністю, сингулярні функції бувають принципово різними. Простішими для дослідження є монотонні функції. Найпростішим класичним прикладом неспадної сингулярної функції є функція Кантора (G.Cantor, 1883, H. Lebesque, 1904), її графіком є «канторівські сходи», строго зростаючої — функції Салема (R. Salem, 1943) та Мінковського (H. Minkowski, 1911), строго спадної — інверсори цифр Q_2- і Q_3-зображення чисел (М. В. Працьовитий, С. В. Скрипник, 2013, М. В. Працьовитий, І. В. Замрій, 2013 відповідно). Сингулярні функції фігурували в роботах різних авторів, зокрема, Л. Шварца, Н. Вінера та А. Вінтнера, В. Джессена та А. Вінтнера, Я. Ф. Виннишина, М. В. Працьовитого, Г. М. Торбіна, Я. В. Гончаренко, О. М. Барановського, А. А. Довгошея, А.В. Калашнікова, О. В. Косопльоткіної та ін. Слід зауважити, що лише строго зростаючій сингулярній функції Мінковського лише за останні 10 років присвячено більше десяти статей (O. Beaver – T. Garrity, 2004, M. Kessebohmer – B. Stratmann, 2008, M. Lamberger, 2006, H. Okamoto – M. Wunsch, 2007, G. Panti, 2008, G. Alkauskas, 2008-2012, А. А. Душистова – Н. Г. Мощевитин, 2009-2012) і побудовано її нові узагальнення (М. В. Працьовитий – А. В. Калашніков, 2009-2011 і М. В. Працьовитий – Т. М. Ісаєва, 2015-2016).

Зовсім недавно дослідники зацікавилися немонотонними сингулярними функціями. Локальна поведінка таких функцій в деякій мірі є складнішою за поведінку сингулярних монотонних функцій. Досі відомо дуже мало загальних фактів щодо їх диференціальних властивостей. Але виявляється, що існують сингулярні ніде не монотонні функції. У XX ст. вперше був побудований приклад такої функції індійським математиком O. K. Shukla (1957), пізніше вони фігурували е роботах іншого індійського математика K. M. Garg (1969, 1985). Проте тривалий час не було нових публікацій, що стосувались ніде не монотонних функцій. І лише недавно дослідження їх продовжились (М. В. Працьовитий, 2011, А. Н. Агаджанов, 2014).

Неперервна функція f називається *функцією канторівського типу*, якщо її множина несталості є ніде не щільною множиною. Неперервна функція f називається *сингулярною функцією канторівського типу*, якщо її множина несталості є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Нами не виявлено робіт, присвячених немонотонним сингулярним функціям канторівського типу. Саме на них ми акцентуємо увагу в даному дисертаційному дослідженні.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках наступних науково-дослідних тем:

— Двійкове кодування дійсних чисел і фрактали (номер державної реєстрації 0110U001279);

— Фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (номер державної реєстрації 0107U000583);

— Фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ними пов'язаних (номер державної реєстрації 0118U002059).

Об'єктом дослідження даної дисертаційної роботи є неперервні функції, визначені на відрізку $[0, 1]$, множини несталості яких є ніде не щільними, мають нульову або додатну міру Лебега (функції канторівського типу).

Предметом дослідження є структурні, варіаційні, диференціально-інтегральні, автомодельні та фрактальні властивості функцій, їх множини рівнів, спектральні та структурні властивості розподілів їх значень.

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є введення у розгляд континуального класу неперервних функцій канторівського типу, залежних від нескінченної кількості параметрів, вивчення їх глобальних властивостей та локальної поведінки, тополого-метричних і фрактальних властивостей суттєвих для функцій множин.

Основні завдання дисертаційного дослідження:

— використовуючи Q_s^*-зображення дійсних чисел, що є узагальненням s-ого зображення та Q_s-зображення, коректно означити континуальний клас неперервних функцій канторівського типу, суттєво збагачений підкласом сингулярних функцій;

— описати структурні, варіаційні, інтегрально-диференціальні, автомодельні та фрактальні властивості класу функцій;

— вивчити локальні та глобальні тополого-метричні і фрактальні властивості множин несталості немонотонних функцій канторівського типу;

— вивчити лебегівську структуру (вміст сингулярної, абсолютно неперервної та дискретної компонент) і спектральні властивості випадкової величини $Y = f(X)$, де f — функція з досліджуваного класу, X — випадкова величина із заданим розподілом.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу та теорії функцій дійсної змінної, метричної теорії чисел, теорії ймовірностей, фрактального аналізу та фрактальної геометрії.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, наступні.

— Введено у розгляд континуальний клас неперервних функцій, залежних від скінченного набору параметрів, зі складною локальною поведінкою: сингулярних монотонних, сингулярних немонотонних, ніде не монотонних функцій, доведено ознаки належності до кожного з вказаних типів. Вивчено їх структурні властивості, множини особливостей (зокрема, максимумів - мінімумів), масивність множин рівнів.

— За допомогою Q_s^*-зображення дійсних чисел, що є узагальненням класичного s-кового зображення, сконструйовано нескінченнопараметричну сім'ю неперервних функцій з неоднорідними локальними властивостями, які у залежності від набору параметрів є строго монотонними, але у переважній більшості сингулярними, немонотонними сингулярними функціями канторівського типу та ніде не монотонними. Вивчено їх варіаційні та функціональні, диференціальні й інтегральні, автомодельні і фрактальні властивості, а також властивості множин рівнів функції.

— Для немонотонної сингулярної функції канторівського типу f, означеної у термінах Q_5^*-зображення чисел і нескінченної послідовності параметрів, та випадкової величини X, цифри Q_5^*-зображення якої є незалежними випадковими величинами, вивчено лебегівську структуру (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) розподілу випадкової величини $Y = f(X)$, тополого-метричні і фрактальні властивості спектра.

— Сфокусовано увагу на немонотонних сингулярних функціях канторівського типу, окремі дослідження яким раніше не присвячувались. Запропоновано методологію їх вивчення.

Одержані результати є новими, строго і повно обґрунтованими.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має в основному теоретичний характер. Отримані результати є певним внеском у теорію функцій дійсної змінної, фрактальний аналіз та фрактальну геометрію, теорію розподілів випадкових величин. Запропоновані у дисертації прийоми та методи можуть бути використані при дослідженні різних математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, які виносяться на захист, отримані автором самостійно. У спільних з М. В. Працьовитим публікаціях співавтору належать загальна постановка задач, ідеї доведень та перевірка результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися на конференціях різних рівнів та наукових семінарах, а саме:

— Міжнародній науковій конференції "Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін", присвяченій 80-річчю І. Т. Горбачука, Київ, 18 січня 2013 р.;

— Всеукраїнській науково-методичній конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", Київ, 26-27 червня 2013 р.;

— Міжнародній математичній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження Г. М. Положого, Київ, 23-24 квітня 2014 р.;

— П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 15-17 травня 2014 р.;

— Четвертій всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2015 р.;

— Міжнародній науково-методичній конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", Київ, 25-26 червня 2015 р.;

— П'ятій всеукраїнській науковій конференція молодих вчених з математики та фізики "Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання", Київ, 25-26 квітня 2016 р.;

— Четвертій міжнародній науково-практичній конференції "Відкриті еволюціонуючі системи", Ніжин, 20-21 травня 2016 р.;

— Всеукраїнській науково-методичній конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", присвяченій пам'яті професора С. С. Левіщенка, Київ, 7-8 жовтня 2016 р.;

— Шостій всеукраїнській конференції молодих вчених з математики та фізики, Київ, 21-22 квітня 2017 р.;

— Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, Київ, 7-10 червня 2017 р.;

— Міжнародній науковій конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь”, присвяченій 85-річчю професора М. І. Шкіля, Київ, 13-14 грудня 2017 р.

— семінарі відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник — доктор фізико-математичних наук, професор М. В. Працьовитий);

— семінарі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: академік НАН України А. М. Самойленко, академік НАН України М. О. Перестюк).

Публікації. Основні результати дослідження викладено у 6 статтях [1] — [6], опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, з них 1 стаття [6] у науковому виданні, що входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus, та дотатково відображено у матеріалах конференцій [7] — [18].

Структура дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу та загальних висновків, списку використаних джерел (140 найменувань) та списку публікацій автора (18 найменувань), списку умовних позначень. Загальний обсяг роботи — 125 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність дисертаційного дослідження, вивчено його об’єкт, предмет, мету і завдання, висвітлено наукову новизну, практичне значення, анонсовано основні наукові результати.

Розділ 1 «Концептуальні основи дослідження та огляд літератури» носить вступний характер. У ньому описано Q_s^*-зображення (М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін), що є узагальненням s-кового зображення та Q_s-зображення дійсних чисел; описано його властивості, необхідні для подальшого конструювання та дослідження функцій.

Нехай $1 < s$ — фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1 \ldots, s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення, $Q_s^* = \|q_{ij}\|$ — нескінченна стохастична матриця з додатними елементами, $i \in A_s$, $j \in N$ така, що:

1. $q_{0j} + q_{1j} + \ldots + q_{[s-1]j} = 1$;   2. $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \max\{q_{0j}, q_{1j} \ldots, q_{[s-1]j}\} = 0$.

Відомо (М. В. Працьовитий), що для будь-якого $x \in [0,1]$ *існує послідовність* (α_k), $\alpha_k = \alpha_k(x) \in A_s$ *така, що* $x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j}\right]$.

Подання числа x у вигляді даного ряду називається його Q_s^*-*представленням*, а його символічний запис $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ — Q_s^*-*зображенням.* При цьому $\alpha_j(x)$ називається j-тим Q_s^*-*символом (цифрою)* зображення числа x. Існують числа, що мають два Q_s^*-зображення. Це числа виду $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s-1)}$. Їх називають Q_s^*-*раціональними.* Числа, що не містять період (0) або $(s-1)$, мають єдине Q_s^*-зображення і називаються Q_s^*-*ірраціональними.* Якщо для всіх $i \in A_s$, $j \in N$ виконується $q_{ij} = q_i$, тобто всі стовпці матриці $\|q_{ij}\|$ однакові, то Q_s^*-зображення називається Q_s-*зображенням*, якщо ж при цьому $q_i = \frac{1}{s}$,то Q_s-зображення є звичайним *s-ковим зображенням.*

Розглядаються приклади відомих неперервних функцій зі складною локальною будовою: монотонних сингулярних функцій, ніде не монотонних сингулярних функцій, монотонних та немонотонних сингулярних функцій канторівського типу, недиференційовних функцій.

У другому розділі **«Сингулярні немонотонні функції, визначені у термінах Q_s^*-зображення аргумента»** введено у розгляд континуальний клас неперервних функцій, залежних від скінченного набору параметрів, що є сингулярними монотонними, ніде не монотонними або сингулярними функціями канторівського типу.

Для заданого набору дійсних чисел $(a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ таких, що $a_0 + +a_1 + \ldots + a_{s-1} = 1$, $|a_i| < 1$, $\gamma_0 \equiv 0, 0 < \gamma_i \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1} < 1$ для всіх $i \in \overline{1, s-1}$, розглядається функція f, означена рівністю

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\gamma_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j(x)} \right], \qquad (2.1)$$

де $\alpha_k(x)$ – k-ий символ Q_s^*-зображення числа x.

У підрозділі 2.2 доведено, що функція f є неперервною на відрізку $[0, 1]$ і набуває всіх значень з цього відрізка. Підрозділ 2.3 присвячений доведенню фактів, що стосуються умов монотонності, строгої монотонності та ніде не монотонності функції, а підрозділ 2.4 — сингулярності канторівського типу.

Теорема 2.3.1. *Неперервна на $[0, 1]$ функція f, визначена рівністю (2.1), є ніде не монотонною, якщо $\prod_{i=0}^{s-1} a_i \neq 0$ і серед чисел $a_0, \ldots, a_{s-1}$ знайдеться $a_i < 0$.*

Означення 2.1. *Спектром (множиною нестабільності)* функції f

називається множина S_f всіх x таких, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ в ε-околі $O_\varepsilon(x)$ точки x знайдуться x_1 і x_2 такі, що $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Означення 2.2. Неперервна функція називається *сингулярною функцією канторівського типу*, якщо її множина несталості (нестабільності) є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Теорема 2.4.1. *Для того, щоб функція f, визначена рівністю* (2.1), *була сингулярною функцією канторівського типу, необхідно і достатньо, щоб множина $C = C[Q_s^*, V] = \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}, \alpha_n \in V \subset A_s\}$, $V = \{v : a_v \neq 0\}$, мала нульову міру Лебега, тобто $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k = \infty$, де $W_k = \sum\limits_{i: a_i = 0} q_{ik}$.*

У підрозділі 2.5 вивчено екстремуми функції f (теорема 2.5.1.) і встановлено, що f на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ набуває найбільшого і найменшого значення на його кінцях (теорема 2.5.2). У підрозділі 2.6 досліджується масивність множини рівнів функції f.

Теорема 2.6.1. *Якщо серед членів послідовності (a_n) є від'ємні і Q_s^*-зображення числа $x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ має властивість $a_{\alpha_i(x)} a_{\alpha_{i+1}(x)} < 0$ для нескінченної множини значень $i \in N$, то множина $f^{-1}(y_0)$ рівня $y_0 = f(x_0)$ є зліченною множиною.*

Розділ 3 «Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями» присвячений узагальненню об'єктів і результатів попереднього розділу переходом від s-ого зображення функції до G_s^*-зображення. Цей перехід збільшує кількість параметрів у сім'ї, значно розширює коло об'єктів, збагачує родину представниками з новими властивостями.

Задана матриця $G_s^* = \|g_{ij}\|$, $i \in A_s$, $j \in N$, що має властивості:

1. $| g_{ij} | < 1$; 2. $g_{0j} + \ldots + g_{[s-1]j} = 1$;

3. $\gamma_{0j} = 0$, $0 < \gamma_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} g_{kj} < 1$, $i \in \overline{1, s-1}$;

4. $\forall (i_j j), i_j \in A_s$ має місце $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{k-1} \{|g_{i_j j}|\} < \infty$.

Розглядається функція $f(x)$, означена рівністю

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\gamma_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right). \qquad (3.1)$$

У підрозділі 3.2 доведено, що функція є неперервною в кожній точці відрізка $[0,1]$ і набуває всіх значень з цього відрізка. У підрозділі 3.3 доводиться монотонність та ніде не монотонність функції, а у 3.4 — сингулярність канторівського типу.

Теорема 3.3.1. *Функція f на $[0,1]$, визначена рівністю (3.1):*

1) має скінченну кількість інтервалів сталості, якщо матриця $\|g_{ij}\|$ містить скінченну кількість нулів;

2) має нескінченну кількість інтервалів сталості, якщо матриця $\|g_{ij}\|$ містить нескінченну кількість нулів;

3) є кусково-монотонною, якщо у матриці $\|g_{ij}\|$ немає нулів і у скінченній кількості стовпців існують від'ємні числа;

4) є ніде не монотонною, якщо у матриці $\|g_{ij}\|$ немає нулів і у нескінченній кількості стовпців існують від'ємні числа.

Лема 3.4.1. *Неперервна функція f буде функцією канторівського типу тоді і тільки тоді, коли серед елементів матриці $\|g_{ij}\|$ існує нескінченна кількість нулів.*

Теорема 3.4.1. *Для того, щоб функція f, визначена рівністю* (3.1), *була сингулярною функцією канторівського типу, необхідно і достатньо, щоб множина $C[Q_s^*, V_n] = \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V_n \subset A_s\}$, де $V_n = \{v : g_{vn} \neq 0\}$, мала нульову міру Лебега, тобто $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k = \infty$, де $W_k = \sum\limits_{i:g_{ij}=0} q_{ik}$, $k \in Z$. Якщо ж $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k < \infty$, то f буде функцією квазіканторівського типу.*

У підрозділі 3.5 доведено, що сингулярні функції канторівського типу, які не мають проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості, є функціями як обмеженої, так і необмеженої варіації.

У підрозділах 3.7 і 3.8 самоафінні властивості досліджуються для періодичних матриць Q_s^* і G_s^*, а саме:

- — $Q_s^* = \|q_{ij}\|$ — нескінченна періодична матриця, $i \in A_s$, $j \in N$ така, що має властивості: $q_{i,2k-1} = q_{i1} > 0$, $q_{i,2k} = q_{i2} > 0$, $i = \overline{0, s-1}$, $k \in N$ і $q_{0j} + q_{1j} + \ldots + q_{[s-1]j} = 1$, $j \in \{1, 2\}$;
- — $G_s^* = \|g_{ij}\|$ — нескінченна періодична матриця, $i \in A_s$, $j \in N$ така, що має властивості: $|g_{i,2k-1}| = |g_{i1}| < 1$, $|g_{i,2k}| = |g_{i2}| < 1$, $i = \overline{0, s-1}$, $k \in N$ і $g_{0j} + g_{1j} + \ldots + g_{[s-1]j} = 1$, $j \in \{1, 2\}$.

Теорема 3.7.1. *Графік функції $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in [0,1]\}$ є самоа-*

фінною множиною, причому

$$\Gamma = \bigcup_{(i,j)\in A_s\times A_s} \varphi_{ij}\left(\Gamma\right), \text{ де } \varphi_{kj}\left(\Gamma\right) \neq \varphi_{pj}\left(\Gamma\right) \text{ при } k\neq p,$$

$$\varphi_{ij}: \begin{cases} x' = \beta_{i1} + q_{i1}\beta_{j2} + q_{01}q_{02}x, \\ y' = \gamma_{i1} + g_{i1}\gamma_{j2} + g_{i1}g_{j2}y. \end{cases}$$

Теорема 3.8.1. *Для інтеграла Рімана функції f має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{q_{01}q_{02}\left(s\cdot\sum\limits_{i=0}^{s-1}\gamma_{i1} + \sum\limits_{i=0}^{s-1}\gamma_{i2}\right)}{1-q_{01}q_{02}}.$$

Розділ 4 «Сім'я немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями» присвячений сім'ї неперервних немонотонних функцій канторівського типу, які залежать від послідовності параметрів і належать до класу функцій, які вивчалися у попередньому розділі. Основна увага приділяється лебегівській структурі розподілу випадкової величини $Y = f(X)$, топологометричним і фрактальним властивостям спектра.

Використовуючи Q_5^*-зображення чисел $[0;1] \ni x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$, яке визначається п'ятірковим алфавітом $A_5 \equiv \{0,1,2,3,4\}$ і нескінченною стохастичною матрицею $\|q_{ik}\|$, $i\in A_5$, $k\in N$, з додатними елементами $(q_{0k}+q_{1k}+q_{2k}+q_{3k}+q_{4k}=1)$ такою, що $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\max\limits_i\{q_{ik}\} = 0$, $\beta_{0k}=0$, $\beta_{i+1,k} = \beta_{ik}+q_{ik}$, $i=\overline{0,4}$, неперервна функція канторівського типу означується рівністю

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \tag{4.1}$$

де $(\overline{g_n}) = (g_{0n},g_{1n},g_{2n},g_{3n},g_{4n})$ — послідовність векторів, таких, що: $g_{0n} = g_{4n} = \frac{2+\varepsilon_n}{4}$, $g_{1n} = g_{3n} = \frac{-\varepsilon_n}{4}$, $g_{2n} = 0$; $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = \frac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n} = \frac{2}{4} = \delta_{3n}$, $\delta_{4n} = \frac{2-\varepsilon_n}{4}$, тобто $\delta_{i+1,n} = \delta_{in}+g_{in}$, $n\in N$, при цьому (ε_n) — наперед задана послідовність дійсних чисел така, що $0\leqslant\varepsilon_n\leqslant 1$.

Лема 4.1.1. *Для того, щоб функція f, визначена рівністю* (4.1), *не мала проміжків монотонності, крім проміжків сталості, необхідно і достатньо, щоб $\varepsilon_n \neq 0$ виконувалась для нескінченної множини значень n.*

У підрозділі 4.2 доводиться критерій належності функції f до класу функцій з обмеженою варіацією. У підрозділі 4.3 вивчено симетрії графіка та обчислено інтеграл Рімана.

Теорема 4.3.1. *Якщо $q_{ij} = q_i = \frac{1}{5}$, то графік функції f, яка визначена рівністю* (4.1), *симетричний відносно точки $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ і має місце рівність $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.*

У підрозділі 4.4 описані автомодельні властивості функції.

Теорема 4.4.1. *Якщо $q_{ij} = q_i = \frac{1}{5}$, $i, j \in N$, $\varepsilon_n = const \neq 0$, то $G_i \equiv \{M(x, y) : \alpha_1(x) = i, y = f(x)\}$ і при $i \neq 2$ $\varphi_i(\Gamma_f) = G_i$, де*

$$\varphi_i : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{i}{5}, \\ y' = g_{i1}y + \delta_{i1}. \end{cases}$$

У підрозділі 4.5 досліджуються множини рівнів функції при $\varepsilon_n = 1$. Доведено, що множина рівня функції f, яка містить відрізки сталості, є зліченною множиною, причому множина рівня функції більше двох відрізків містити не може.

Підрозділ 4.6 присвячений образам множин канторівського типу при відображенні f. Доведено, що образом п'ятіркового циліндра при відображенні f є G-циліндр або точка, причому точкою є тоді і тільки тоді, коли в основі циліндра є принаймні одна цифра 2 і виконується рівність $f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m2}) = \Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m2(0)} = y_0$.

Теорема 4.6.1. *Образом множини $C_1 \equiv C[Q_5^*; \{0, 1\}]$ при відображенні f є відрізок $\left[0, \frac{3}{4}\right]$, зліченна множина точок якого має рівно два G_2-зображення, а саме: $\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m11(0)}$,а решта точок мають єдине G_2-зображення.*

Наслідок 4.6.1. *Образом множини $C_2 \equiv C[Q_5^*; \{3, 4\}]$ при відображенні f є відрізок $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, зліченна множина точок якого має рівно два G_2-зображення, а решта точок — єдине G_2-зображення.*

Теорема 4.6.2. *При відображенні f образом множини канторівського типу:*
— $C_3 \equiv C[Q_5^*; \{1, 3\}]$ є множина канторівського типу $C_4 \equiv C[4; \{1, 2\}]$,

причому відображення множини C_3 *у множину* C_4 *є бієктивним*;
— $C_5 \equiv C[Q_5^*; \{1,2,3\}]$ *є множина* $E = C_4 \bigcup M$, *де* M — *дискретна підмножина множини четвірково-раціональних чисел, а саме:*

$$M = \{y : y = \Delta^4_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}2(0)},\ \alpha_i \in \{1;2\},\ m \in N\}.$$

Теорема 4.6.3 *При відображенні* f *образом множини канторівського типу* $C[5; V_n]$, *де*

$$V_n = \begin{cases} \{0,4\}, \text{якщо } n = 1(mod\ 3), \\ \{1,3\}, \text{якщо } n \neq 1(mod\ 3), \end{cases}$$

є множина канторівського типу нульової міри Лебега, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\alpha_0 = \dfrac{3}{6 - \log_2 3}$.

Підрозділ 4.7 присвячено випадковій величині $X = \Delta^{Q_5^*}_{\tau_1\tau_2\tau_3\ldots}$, де (τ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значення $0, 1, 2, 3, 4$ з ймовірностями $P\{\tau_n = i\} = p_{in}$, $i = \overline{0,4}$. Лебегівську структуру розподілу випадкової величини $Y = f(X)$ висвітлюють наступні теореми.

Теорема 4.7.3. *Нехай* $X = \Delta^5_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ — *неперервна випадкова величина, цифри* (τ_n) *п'ятіркового зображення якої є незалежними і мають розподіли* $P\{\tau_n = i\} = p_{in}$, $i = \overline{0,4}$, *причому* $p_{3n} = 0$, $p_{4n} = 0$ *для будь-якого* $n \in N$. *Тоді розподіл випадкової величини* $Y = f(X)$ *є чисто дискретним, якщо* $B \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[p_{2n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-p_{2k})\right] = 1$, *і є нетривіальною сумішшю дискретного та неперервного розподілів, коли* $0 < B < 1$, *причому:*
1) сумішшю дискретного і сингулярного, якщо

$$W = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 - \frac{4}{3}p'_{0n}\right)^2 + (1 - 4p'_{1n})^2\right] = \infty,$$

де $p'_{0n} = \dfrac{p_{0n}}{p_{0n} + p_{1n}}$ *і* $p'_{1n} = \dfrac{p_{1n}}{p_{0n} + p_{1n}}$;
2) сумішшю дискретного і абсолютно неперервного, якщо $W < \infty$.

Наслідок 4.7.1. *Якщо* $p_{0n} = p_{1n} = 0$ *для будь-якого* $n \in N$, *то розподіл випадкової величини* $Y = f(X)$ *має чисто дискретний розподіл, якщо* $B = 1$, *і є сумішшю дискретного та неперервного розподілів, якщо* $0 < B < 1$.

Теорема 4.7.4. *Нехай* $X = \Delta^{Q_5^*}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ *— випадкова величина, цифри* (τ_n) Q_5^**-зображення якої є незалежними і мають розподіли* $P\{\tau_n = i\} = p_{in}$, $i = \overline{0,4}$, *причому* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i}\{p_{ik}\} = 0$. *Розподіл випадкової величини* $Y = f(X)$ *є:*

1) чисто дискретним, якщо $S \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[p_{2n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-p_{2k})\right] = 1$;

2) нетривіальною сумішшю дискретного і неперервного розподілів, якщо $0 < S < 1$, *причому* $F_Y(x) = cF_d(x) + (1-c)F_c(x)$, *де* $F_d(x) = \sum\limits_{\substack{\Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)} = x_i < x \\ c_j \in \{0,1,3,4\}}} p_{x_i}$, $p_{x_i} = P\{Y = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}\}$;

3. сингулярним розподілом канторівського типу, якщо для будь-якого натурального n мають місце рівності $p_{0n} = p_{2n} = p_{4n} = 0$.

Теорема 4.7.5. *Нехай* $X = \Delta^{Q_5^*}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ *— випадкова величина, цифри* (τ_n) Q_5^**-зображення якої є незалежними і мають розподіли* $P\{\tau_n = i\} = p_{in}$, $i = \overline{0,4}$. *Якщо* $p_{2n} = p_{3n} = p_{4n} = 0$ *для будь-якого* $n \in N$, *то розподіл випадкової величини* $Y = f(X) = \Delta^{G_2^*}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}$, *яка закодована засобами двосимвольного алфавіту* $A_2 = \{0,1\}$ *у системі з нульовою надлишковістю, цифри* $\eta_1, \eta_2, \ldots$ *зображення якої є незалежними, має чистий лебегівський тип, причому абсолютно неперервний — тоді і тільки тоді, коли* $W = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{4}{3}p_{0n}\right)^2 + (1-4p_{1n})^2\right] < \infty$ *і сингулярний, коли* $W = \infty$.

Теорема 4.7.6. *Якщо розподіл випадкової величини* $X = \Delta^5_{\tau_1\tau_2\ldots}$ *є неперервним і для будь-якого натурального n мають місце рівності*

$$\begin{cases} p_{1n} = p_{2n} = p_{3n} = 0, \text{якщо } n = 1(mod\ 3), \\ p_{0n} = p_{4n} = 0, \text{якщо } n \neq 1(mod\ 3), \end{cases}$$

то $Y = f(X)$ *має сингулярний розподіл канторівського типу.*

ВИСНОВКИ

Серед функцій зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями окремий інтерес викликають неперервні немонотонні функції канторівського типу. Їх теоретичне дослідження ведеться у різних напрямах (здійснюється тополого-метричний і фрактальний аналіз множин рівнів функцій, множин різних особливостей, зокрема, множин несталості, структурний аналіз графіків, наявність властивостей автомодельності, ведеться вивчення диференціальних та інтегральних властивостей функцій тощо). Разом з цим вони все частіше з'являються у різноманітних математичних моделях (цифрова обробка сигналів, конструювання фрактальних антен), у суміжних з фрактальним аналізом розділах математики (у теорії ймовірностей при вивченні розподілів випадкових величин, теорії динамічних систем). Вони адекватно описують перехідні фрактальні випромінювання, фігурують у задачах управління розподіленими системами тощо. Тому зручність аналітичного задання таких функцій та їх дослідження є актуальною проблемою сьогодення. В останній час для її вирішення все ширше почали використовувати різні системи кодування дійсних чисел, серед яких найпростішою є s-кова система зображення чисел. Її узагальненням є Q_s^*-зображення, цифри якого перестають виконувати функцію чисел, а виступають лише у ролі індексів. Саме це зображення чисел ми використовували для моделювання та дослідження функцій з нетривіальною локальною будовою. Серед них мотонотонні сингулярні, немонотонні сингулярні, ніде не монотонні та немонотонні сингулярні функції канторівського типу. Крім вказаних задач для одного з випадків проведено аналіз властивостей функцій, пов'язаних з "масопереносом" при рівномірному та нерівномірному розподілі аргумента.

У дисертації запропоновані підходи, прийоми та методи, які можуть бути ефективно використані при дослідженні нових класів неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу, а також для систематизації відомостей про неперервні функції зі складною локальною будовою та фрактальними властивостями.

У даній роботі отримано наступні результати.

- Побудовано континуальний клас неперервних функцій, залежних від скінченного набору параметрів, зі складною локальною поведінкою: сингулярних монотонних, сингулярних немонотонних, ніде не монотонних функцій тощо, знайдено ознаки належності розподілу до кожного з вказаних лебегівських типів; вивчено їх структурні властивості, описано множини особливостей (зокрема, максимумів – мінімумів), масивність множин рівнів та інші.
- За допомогою Q_s^*-зображення дійсних чисел сконструйовано нескінченно-параметричну сім'ю неперервних функцій з неоднорідними локальними властивостями, які у залежності від набору

параметрів є строго монотонними, але у переважній більшості сингулярними, немонотонними сингулярними функціями канторівського типу або ніде не монотонними; вивчено їх варіаційні і функціональні, диференціальні та інтегральні, автомодельні і фрактальні властивості, а також властивості рівнів функцій з цієї сім'ї.

— Досліджено лебегівську структуру (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) розподілу випадкової величини $Y = f(X)$ для немонотонної сингулярної функції канторівського типу f, означеної у термінах Q_5^*-зображення чисел і нескінченної послідовності параметрів, та випадкової величини X, цифри якої є незалежними випадковими величинами.

— Вивчено тополого-метричні і фрактальні властивості спектра для розподілу випадкової величини $Y = f(X)$.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013. № 15. С. 144-155.

[2] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014. № 16(2). С. 81-93.

[3] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Про одну сім'ю неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2015. № 17 (2). С. 17-28.

[4] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розподіл значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу. *Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики:* зб. праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Вид-во Ін-т математики НАН України, 2017. Т.14, № 2. С. 110-121.

[5] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Структура і спектральні властивості розподілу значень немонотонної функції канторівського типу. *Фрактальний аналіз та суміжні питання:* зб. праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Вид-во Ін-т математики НАН України, 2017. Т. 14, № 4. С. 111-124.

[6] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу. *Нелінійні коливання.* 2018. Т. 21, № 1. С. 116-130.

[7] Працьовитий М. В., Жабровець О. В., Свинчук О. В. Про сингулярні функції в курсі математичного аналізу. *Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін: матеріали Міжнар. наук. конф., 18-19 січня 2013 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. С. 113-115.

[8] Працьовитий М. В., Жабровець О. В., Свинчук О. В. Інтегрування неперервних функцій, графіки яких є самоафінними або квазісамоафінними. *Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі: матеріали Всеукр. наук.-метод. конф., 26–27 червня 2013 р.* Київ: НУХТ, 2013. С. 17-18.

[9] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента. *Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механік, до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Г. М. Положого: матеріали Міжнар. матем. конф., 23-24 квітня 2014 р.* Київ, 2014. С. 119.

[10] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Неперервні ніде не монотонні функції (способи задання та методи дослідження). *Матеріали XV Міжнар. наук. конф. імені академіка Михайла Кравчука. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. 15-17 травня 2014 р.* Київ: НТУУ "КПІ", 2014. Т.2. С. 167-168.

[11] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Один клас ніде не монотонних функцій. *Тези доповідей IV Всеукр. наук. конф. молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р.* Київ: НТУУ "КПІ", 2015. С. 51.

[12] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Інтегральні властивості ніде не монотонних функцій однієї скінченно-параметричної сім'ї. *Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі: Міжнар. наук.-метод. конф., 25-26 червня 2015 р.* Київ: НУХТ, 2015. С. 30-31.

[13] Свинчук О. В., Працьовитий М. В. Самоафінні, сингулярні, немонотонні функції канторівського типу. *Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання: V Всеукр. наук. конф. молодих вчених з математики та фізики, 25-26 квітня 2016 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. С. 21.

[14] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Сингулярні функції канторівського типу, які не мають проміжків монотонності за винятком проміжків сталості. *Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі, присвячена пам'яті професора С. С. Левіщенка: матеріали Всеукр. наук.-метод. конф., 7–8 жовтня 2016 р.* Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016. С. 69.

[15] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Немонотонні сингулярні функції канторівського типу. *Відкриті еволюціонуючі системи: зб. праць IV Міжнар. наук.-практ. конф., 20 – 21 травня 2016 р.* Ніжин: ВНЗ ВП НУБіП України НАІ, 2017. Ч.2. С. 52-57.

[16] Свинчук О. В., Працьовитий М. В. Одна сім'я неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями. *VI Всеукр. конф. молодих вчених з математики та фізики, 21-22 квітня 2017 р.* Київ: НаУКМА, 2017. С. 32.

[17] Свинчук О. В., Працьовитий М. В. Автомодельні та інтегральні властивості однієї сім'ї немонотонних сингулярних функцій канторівського типу. *Тези доповідей Міжнар. конф. молодих математиків до 100-річчя з дня народження Ю. О. Митропольського, 7-10 червня 2017 р.* Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. С. 46.

[18] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розподіл значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу. *Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь, присвячена 85-річчю доктора фізико-математичних наук, професора, академіка НАПН України М. І. Шкіля: тези доповідей Міжнар. наук. конф., 13-14 грудня 2017 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 71-72.

АНОТАЦІЇ

Свинчук О. В. Сингулярні немонотонні функції канторівського типу та їх фрактальні властивості. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — Математичний аналіз (111

— Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена неперервним на відрізку немонотонним сингулярним функціям канторівського типу, означеним у термінах Q_s^*-зображення чисел $x \in [0,1]$, яке є кодуванням числа засобами скінченного алфавіту $A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ і узагальненням s-кового та Q_s-зображення дійсних чисел; дослідженню їх локальних та глобальних властивостей: структурних, варіаційних, диференціальних, інтегральних, автомодельних та фрактальних. Окрема увага приділяється питанню множин рівнів функцій та тополого-метричних властивостей образів множин канторівського типу. У роботі також досліджується розподіл випадкової величини $Y = f(X)$, де f — немонотонна сингулярна функція канторівського типу, а X — випадкова величина, розподіл якої індукується розподілами цифр її Q_5^*-зображення, які є незалежними випадковими величинами. Розв'язуються задачі про лебегівську структуру розподілу (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) випадкової величини Y. Розподіл останньої, взагалі кажучи, є нетривіальною сумішшю дискретної та неперервної компонент (дискретної та сингулярної, дискретної та абсолютно неперервної), хоча може мати і чистий лебегівський тип. В роботі знайдено критерій чистої дискретності (а також неперервності). Для окремих випадків задача про лебегівську структуру розподілу вичерпно розв'язана.

Ключові слова: Q_s^*-зображення дійсного числа, немонотонна сингулярна функція канторівського типу, множина рівня функції, автомодельність графіка функції, варіація функції, множина несталості функції, множина канторівського типу, лебегівський тип розподілу, точковий спектр розподілу.

Свинчук О. В. Сингулярные немонотонные функции канторовского типа и их фрактальные свойства. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — Математический анализ (111 — Математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена непрерывным на отрезке немонотонным сингулярным функциям канторовского типа, которые определены в терминах Q_s^*-изображения чисел $x \in [0,1]$, которое является кодированием числа посредством конечного алфавита $A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ и обобщением s-адического и Q_s-изображения действительных чисел; исследованию

их локальных и глобальных свойств: структурных, вариационных, дифференциальных, интегральных, автомодельных и фрактальных. Особое внимание уделяется вопросу множества уровней функции и тополого-метрическим свойствам образов множеств канторовского типа. В работе также исследуется распределение случайной величины $Y = f(X)$, где f — немонотонная сингулярная функция канторовского типа, а X — случайная величина, распределение которой индуцировано распределением цифр ее Q_5^*-изображения, которые являются независимыми случайными величинами. Решаются задачи о лебеговской структуре распределения (содержание дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной компонент) случайной величины Y. Распределение последней, вообще говоря, является нетривиальной смесью дискретной и непрерывной компонент (дискретной и сингулярной, дискретной и абсолютно непрерывной), хотя может иметь и чистый лебеговский тип. В работе найдено критерий чистой дискретности (а также непрерывности). Для отдельных случаев задача о лебеговской структуре распределения исчерпывающе решена.

Ключевые слова: Q_s^*-изображение действительного числа, немонотонная сингулярная функция канторовского типа, множество уровня функции, автомодельность графика функции, вариация функции, множество непостоянства, множество канторовского типа, лебеговский тип распределения, точечный спектр распределения.

Svynchuk O.V. Singular non-monotonic functions of Cantor type and their fractal properties. — The Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

We consider the so-called Q_s^*-representation of numbers $x \in [0, 1]$. It is an encoding of a number by means of finite alphabet $A = \{0, \dots, s-1\}$ and generalizes s-adic and Q_s-representation of real numbers. The thesis is devoted to continuous on closed interval non-monotonic singular functions of Cantor type defined in terms of a given Q_s^*-representation of numbers. We study their local and global properties: structural, variational, differential, integral, self-similar, and fractal. Level sets of function as well as topological and metric properties of images of Cantor type sets are examined in detail.

The main object of study is continuous function f defined by equality

$$f\left(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}\right) = \Delta^{G}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}.$$

This function depends on infinite number of parameters — $Q^*_s = \|q_{ik}\|$, $G^*_s = \|g_{ik}\|$, $i = \overline{0, s-1}, k = 1, 2, \dots$ are given matrices with properties:

1) $q_{ik} > 0$, $q_{0k} + q_{1k} + \ldots + q_{[s-1]k} = 1$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, \ldots, q_{[s-1]k}\} = 0$,

2) $\mid g_{ik} \mid < 1$, $g_{0k} + g_{1k} + \ldots + g_{[s-1]k} = 1$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{g_{0k}, \ldots, g_{[s-1]k}\} = 0$.

In the thesis, a formula for calculation of variation of the function is obtained and necessary and sufficient conditions for function to be of unbounded variation are found. Behaviour of the function in sense of monotonicity is studied exhaustively. In particular, we prove that function f is a nowhere monotonic if and only if there are no zeroes in matrix $||g_{ik}||$ and there are negative elements in infinite number of columns. We prove the criterion for the function to be of Cantor type (necessary and sufficient conditions for the set of non-constancy to be a nowhere dense set) as well as criterion of singularity of Cantor type (necessary and sufficient conditions for the set of non-constancy to be a nowhere dense set of zero Lebesgue measure). For $s = 5$, symmetries of the graph of function f, its self-similar properties and properties of level sets of the function are studied. In particular, we prove that the level set of the function cannot contain more than two closed intervals. Local and global topological, metric and fractal properties of sets of non-constancy of the function are described in detail.

In this work, we study the distribution of random variable $Y = f(X)$, where f is a non-monotonic singular function of Cantor type and X is a random variable such that its distribution induced by distributions of digits of its Q^*_5-representation that are independent random variables. Problems about Lebesgue structure of distribution (content of discrete, absolutely continuous and singular components) for random variable Y are considered. Generally speaking, distribution of random variable Y is a nontrivial mixture of discrete and continuous components (discrete and singular or discrete and absolutely continuous distributions). A criterion of pure discreteness as well as of pure continuity for this random variable is found. For some cases, the problem about Lebesgue structure of distribution is solved exhaustively.

Key words: Q^*_s-representation of a real number, non-monotonic singular function of Cantor type, level set of a function, variation of function, self-similarity of graph of function, set of non-constancy, set of Cantor type, Lebesgue type of distribution, point spectrum of distribution.

Підп. до друку 01.08.2018. Наклад 100 пр. Зам. № 16-18

НУХТ. 01601 Київ-33, вул. Володимирська, 68.
Свідоцтво про реєстрацію серія ДК № 1786 від 18.05.04 р.