Міністерство освіти і науки України
Національний педагогічний університет імені
М. П. Драгоманова
Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Свинчук Ольга Василівна

УДК 517.51

Дисертація

Сингулярні немонотонні функції канторівського типу та їх фрактальні властивості

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук. Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ____________ О. В. Свинчук

Науковий керівник: **Самойленко Анатолій Михайлович**,
доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України

Київ — 2018

АНОТАЦІЯ

Свинчук О. В. Сингулярні немонотонні функції канторівського типу та їх фрактальні властивості. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Робота виконана на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова.

Дисертаційна робота присвячена неперервним на відрізку немонотонним сингулярним функціям канторівського типу, означеним в термінах наперед заданого Q_s^*-зображення чисел $x \in [0,1]$, яке є кодуванням числа засобами скінченного алфавіту $A = \{0, 1, \dots, s-1\}$ і узагальненням s-кового та Q_s-зображення дійсних чисел ($1 < s \in N$); дослідженню їх локальних та глобальних властивостей: структурних, варіаційних, диференціальних, інтегральних, автомодельних та фрактальних. Основна увага приділяється питанню рівнів функції та тополого-метричних властивостей образів множин канторівського типу.

Основним об'єктом дослідження є неперервна функція f, означена рівністю

$$f\left(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \Delta^{G}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots},$$

залежна від нескінченної кількості параметрів, а саме:

$Q_s^* = \|q_{ik}\|$, $G_s^* = \|g_{ik}\|$, $i = \overline{0, s-1}, k = 1, 2, \dots$ — задані матриці, які мають властивості:

1) $q_{ik} > 0$, $q_{0k} + q_{1k} + \ldots + q_{[s-1]k} = 1$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}, \dots, q_{[s-1]k}\} = 0$,

2) $\mid g_{ij} \mid < 1$, $g_{0k}+g_{1k}+\ldots+g_{[s-1]k}=1$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\max\{g_{0k},g_{1k},\ldots,g_{[s-1]k}\}=0$;

$$x=\beta_{\alpha_1 1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{\alpha_j j}\right)=\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}$$

— Q_s^*-зображення числа $x\in[0,1]$, $\beta_{0j}=0$, $\beta_{ij}=\sum\limits_{k=0}^{i-1}q_{kj}$, $i\in\overline{1,s-1}$, $j\in N$,

$$y=f(x)=\gamma_{\alpha_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\gamma_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}g_{\alpha_j(x)j}\right)=\Delta^{G_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots},$$

— G_s^*-зображення функції y, $\gamma_{0j}=0$, $0<\gamma_{ij}=\sum\limits_{k=0}^{i-1}g_{kj}<1$, $i\in\overline{1,s-1}$, $j\in N$.

У дисертації виведено формулу для обчислення варіації функції і знайдено необхідні та достатні умови, при яких вона має необмежену варіацію. Вичерпно вивчено поведінку функції у плані монотонності, зокрема доведено, що функція f є ніде не монотонною тоді і тільки тоді, коли в матриці $||g_{ik}||$ немає нулів і в нескінченній кількості стовпців існують від'ємні елементи. Доведено критерій канторовості (необхідні та достатні умови, при яких множина несталості є ніде не щільною), а також критерій сингулярності канторівського типу (необхідні та достатні умови, при яких множина несталості є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега).

При $s=5$ вивчено симетрії графіка функції f, його автомодельні властивості та властивості множин рівнів функції. Зокрема доведено, що множина рівня функції не може містити більше двох відрізків. Детально описано локальні та глобальні тополого-метричні і фрактальні властивості множин несталості функції. Доведено, що образом множини $C_1\equiv C[Q_5^*;V]=\{x: x=\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n\in V=\{0,1\}\}$ при відображенні f є відрізок $\left[0,\frac{3}{4}\right]$, зліченна множина точок якого має рівно два G-зображення, а решта точок — єдине G-зображення. При відображенні f образом множини $C_2\equiv C[Q_5^*;V]=\{x: x=\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n\in V=\{1,3\}\}$ є множина канторівського типу $C_3 \equiv C[4;V] = \{x : x = \Delta^4_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V = \{1,2\}\}$, причому відображення множини C_2 у множину C_3 є бієктивним, а образом множини $C_4 \equiv C[Q_5^*; V] = \{x : x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V = \{1,2,3\}\}$ є множина $E = C_3 \bigcup M$, де $M = \{y : y = \Delta^4_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}2(0)}, \alpha_i \in \{1,2\}, m \in N\}$ — дискретна підмножина множини четвірково-раціональних чисел.

При відображенні f образом множини канторівського типу $C[5; V_n] = \{x : x = \Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V_n = \{0,1,3,4\}\}$, де

$$V_n = \begin{cases} \{0,4\}, \text{якщо } n = 1(mod\ 3), \\ \{1,3\}, \text{якщо } n \neq 1(mod\ 3), \end{cases}$$

є множина канторівського типу нульової міри Лебега, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\alpha_0 = \dfrac{3}{6 - \log_2 3}$.

У роботі досліджується розподіл випадкової величини $Y = f(X)$, де f — немонотонна сингулярна функція канторівського типу, а X — випадкова величина, розподіл якої індукується розподілами цифр її Q_5^*-зображення, що є незалежними випадковими величинами. Розподіл випадкової величини Y може мати як чистий лебегівський тип (дискретний, абсолютно неперервний, сингулярний), так і бути сумішшю дискретного та неперервного. Взагалі кажучи, він має нетривіальну дискретну компоненту, тобто атоми. В цій ситуації природним чином виникають суміші дискретних та неперервних розподілів, а їх неперервні складові часто є сумішами дискретного та сингулярного, дискретного та абсолютно неперервного розподілів (це виникає в більшості випадків тоді, коли функція є немонотонною, а точніше, коли вона не має проміжків монотонності, крім проміжків сталості).

Ключові слова: s-кова система числення, Q_s^*-зображення дійсного числа, сингулярна функція, функція канторівського типу, немонотонна сингулярна функція канторівського типу, рівень функції, автомодельність графіка функції, варіація функції, множина несталості функції, множина канторівського типу, лебегівський тип розподілу, суміш розподілів, точковий спектр розподілу.

Svynchuk O. V. Singular non-monotonic functions of Cantor type and their fractal properties. — Manuscript.

Candidate's thesis on Physics and Mathematics, speciality 01.01.01 — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The work is prepared at the Department of Higher Mathematics of National Pedagogical Mykhailo Drahomanov University.

We consider the so-called Q_s^*-representation of numbers $x \in [0,1]$. It is an encoding of a number by means of finite alphabet $A = \{0,\dots,s-1\}$ and generalizes s-adic and Q_s-representation of real numbers $(1 < s \in N)$. The thesis is devoted to continuous on closed interval non-monotonic singular functions of Cantor type defined in terms of a given Q_s^*-representation of numbers $x \in [0,1]$. We study their local and global properties: structural, variational, differential, integral, self-similar, and fractal. Level sets of function as well as topological and metric properties of images of Cantor type sets are examined in detail.

The main object of study is continuous function f defined by equality

$$f\left(x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}\right) = \Delta^{G}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}.$$

This function depends on infinite number of parameters, namely:

$Q_s^* = \|q_{ik}\|$, $G_s^* = \|g_{ik}\|$, $i = \overline{0, s-1}, k = 1, 2, \dots$ are given matrices with properties::

1) $q_{ik} > 0$, $q_{0k} + q_{1k} + \dots + q_{[s-1]k} = 1$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{q_{0k}, q_{1k}, \dots, q_{[s-1]k}\} = 0$,

2) $\mid g_{ij} \mid < 1$, $g_{0k} + g_{1k} + \dots + g_{[s-1]k} = 1$, $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{g_{0k}, g_{1k}, \dots, g_{[s-1]k}\} = 0$;

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j}\right) = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\dots\alpha_n\dots}$$

— Q_s^*-representation of numbers $x \in [0,1]$, $\beta_{0j} = 0$, $\beta_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} q_{kj}$, $i \in \overline{1, s-1}$, $j \in N$,

$$y = f(x) = \gamma_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\gamma_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right) = \Delta^{G_s^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots},$$

— G_s^*-representation of function y, $\gamma_{0j} = 0$, $0 < \gamma_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} g_{kj} < 1$, $i \in \overline{1, s-1}$, $j \in N$.

In the thesis, a formula for calculation of variation of the function is obtained and necessary and sufficient conditions for function to be of unbounded variation are found. Behaviour of the function in sense of monotonicity is studied exhaustively. In particular, we prove that function f is a nowhere monotonic if and only if there are no zeroes in matrix $||g_{ik}||$ and there are negative elements in infinite number of columns. We prove the criterion for the function to be of Cantor type (necessary and sufficient conditions for the set of non-constancy to be a nowhere dense set) as well as criterion of singularity of Cantor type (necessary and sufficient conditions for the set of non-constancy to be a nowhere dense set of zero Lebesgue measure).

For $s = 5$, symmetries of the graph of function f, its self-similar properties and properties of level sets of the function are studied. In particular, we prove that the level set of the function cannot contain more than two closed intervals. Local and global topological, metric and fractal properties of sets of non-constancy of the function are described in detail. We prove that the image of the set $C_1 \equiv C[Q_5^*; V] = \{x : x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V = \{0, 1\}\}$ under the mapping f is a closed interval $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ such that countable set of its points have exactly two G-representations and the rest points have a unique G-representation. Under the mapping f, the image of the set $C_2 \equiv C[Q_5^*; V] = \{x : x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V = \{1, 3\}\}$ is the set of Cantor type $C_3 \equiv C[4; V] = \{x : x = \Delta^{4}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V = \{1, 2\}\}$. Moreover, mapping of the set C_2 into the set C_3 is bijective, and the image of the set $C_4 \equiv C[Q_5^*; V] = \{x : x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n \in V = \{1, 2, 3\}\}$ is the set $E = C_3 \bigcup M$, де $M = \{y : y = \Delta^4_{\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}2(0)}, \alpha_i \in \{1, 2\}, m \in N\}$, where M is a discrete subset of the set of quaternary rational points.

Under the mapping f, the image of the set of Cantor type $C[5;V_n]=\{x: x=\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}, \alpha_n\in V_n=\{0,1,3,4\}\}$, where

$$V_n=\begin{cases}\{0,4\}, \text{якщо } n=1(mod\ 3),\\ \{1,3\}, \text{якщо } n\neq 1(mod\ 3),\end{cases}$$

is the set of Cantor type of zero Lebesgue measure such that its fractal Hausdorff-Besicovitch dimension is equal to $\alpha_0=\dfrac{3}{6-\log_2 3}$.

In this work, we study the distribution of random variable $Y=f(X)$, where f is a non-monotonic singular function of Cantor type and X is a random variable such that its distribution induced by distributions of digits of its Q^*_5-representation that are independent random variables. The distribution of random variable Y may be either of pure Lebesgue type of distribution (discrete, absolutely continuous or singular) or a mixture of discrete and continuous distributions. Generally speaking, it has a nontrivial discrete component, i. e., it has atoms. Mixtures of discrete and continuous distributions appear naturally in this situation as well as their continuous components are often mixtures of discrete and singular distributions, discrete and absolutely continuous distributions (this appears in most cases if function is non-monotonic, i. e., it does not have monotonicity intervals except for intervals where it is constant).

Key words: s-th counting system, Q^*_s-representation of a real number, singular function, function of Cantor type, non-monotonic singular function of Cantor type, level set of a function, variation of function, self-similarity of graph of function, set of non-constancy, set of Cantor type, Lebesgue type of distribution, mixture of probability distributions, point spectrum of distribution.

Список опублікованих праць здобувача:

1. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q^*_s-зображення аргумента. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013. № 15. С. 144-155.

2. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014. № 16 (2). С. 81-93.
3. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Про одну сім'ю неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2015. № 17 (2). С. 17-28.
4. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розподіл значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу. *Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики:* зб. праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Вид-во Ін-т математики НАН України, 2017. Т.14, № 2. С. 110-121.
5. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Структура і спектральні властивості розподілу значень немонотонної функції канторівського типу. *Фрактальний аналіз та суміжні питання:* зб. праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Вид-во Ін-т математики НАН України, 2017. Т. 14, № 4. С. 111-124.
6. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу. *Нелінійні коливання.* 2018. Т. 21, № 1. С. 116-130.
7. Працьовитий М. В., Жабровець О. В., Свинчук О. В. Про сингулярні функції в курсі математичного аналізу. *Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін: матеріали Міжнар. наук. конф., 18-19 січня 2013 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. С. 113-115.
8. Працьовитий М. В., Жабровець О. В., Свинчук О. В. Інтегрування неперервних функцій, графіки яких є самоафінними або квазіса-

моафінними. *Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі: матеріали Всеукр. наук.-метод. конф., 26-27 червня 2013 р.* Київ: НУХТ, 2013. С. 17-18.

9. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента. *Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механік, до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України Г. М. Положого: матеріали Міжнар. матем. конф., 23-24 квітня 2014 р.* Київ: КНУ імені Тараса Шевченка, 2014. С. 119.
10. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Неперервні ніде не монотонні функції (способи задання та методи дослідження). *Матеріали XV Міжнар. наук. конф. імені академіка Михайла Кравчука: Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз, 15-17 травня 2014 р.* Київ: НТУУ "КПІ", 2014. Т.2. С. 167-168.
11. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Один клас ніде не монотонних функцій. *Тези доповідей IV Всеукр. наук. конф. молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р.* Київ: НТУУ "КПІ", 2015. С. 51.
12. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Інтегральні властивості ніде не монотонних функцій однієї скінченно-параметричної сім'ї. *Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі: матеріали Міжнар. наук.-метод. конф., 25-26 червня 2015 р.* Київ: НУХТ, 2015. С. 30-31.
13. Свинчук О. В., Працьовитий М. В. Самоафінні, сингулярні, немонотонні функції канторівського типу. *Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання: V Всеукр. наук. конф. молодих вчених з математики та фізики, 25-26 квітня 2016 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. С. 21.
14. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Сингулярні функції канторів-

ського типу, які не мають проміжків монотонності за винятком проміжків сталості. *Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі, присвячена пам'яті професора С. С. Левіщенка: матеріали Всеукр. наук.-метод. конф., 7-8 жовтня 2016 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. С. 69.

15. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Немонотонні сингулярні функції канторівського типу. *Відкриті еволюціонуючі системи: зб. праць IV Міжнар. наук.-практ. конф., 20-21 травня 2016 р.* Ніжин: ВНЗ ВП НУБіП України НАІ, 2017. Ч. 2. С. 52-57.
16. Свинчук О. В., Працьовитий М. В. Одна сім'я неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями. *VI Всеукр. конф. молодих вчених з математики та фізики, 21-22 квітня 2017 р.* Київ: НаУКМА, 2017. С. 32.
17. Свинчук О. В., Працьовитий М. В. Автомодельні та інтегральні властивості однієї сім'ї немонотонних сингулярних функцій канторівського типу. *Тези доповідей Міжнар. конф. молодих математиків, присвяченої 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, 7-10 червня 2017 р.* Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. С. 46.
18. Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розподіл значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу. *Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь, присвяченої 85-річчю доктора фізико-математичних наук, професора, академіка НАПН України М. І. Шкіля: тези доповідей Міжнар. наук. конф., 13-14 грудня 2017 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 71-72.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ І УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел;
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел;
$C_{[0,1]}$	простір неперервних на відрізку $[0,1]$ функкій;
$A_s = \{0, 1, ..., s-1\}$	алфавіт s-кової системи числення ($s \geqslant 2$);
$L_s = A_s \times A_s \times \ldots$	простір послідовностей елементів алфавіту;
(a)	період у певному зображенні числа;
$\alpha_k(x)$	k-та цифра певного зображення числа x;
$\Delta^s_{c_1c_2...c_n}$	s-ковий циліндр (відрізок) рангу n з основою $c_1c_2...c_n$;
$\nabla^s_{c_1c_2...c_n}$	s-ковий інтервал (внутрішність циліндра) рангу n з основою $c_1c_2...c_n$;
$\|\Delta^s_{c_1c_2...c_n}\|$	довжина циліндра $\Delta^s_{c_1c_2...c_n}$, що відповідає s-ковому зображенню;
$\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_n}$	циліндр рангу n з основою $c_1c_2...c_n$, що відповідає Q_s^*-зображенню дійсних чисел;
$\nabla^{Q_s^*}_{c_1c_2...c_n}$	інтервал рангу n з основою $c_1c_2...c_n$, що відповідає Q_s^*-зображенню дійсних чисел;
$\lambda\left(E\right)$	міра Лебега множини E;
$\alpha_0\left(E\right)$	розмірність Гаусдорфа-Безиковича множини E;
$\mu_f\left(\Delta_{c_1c_2...c_m}\right)$	приріст функції f на циліндрі рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$;
$f^{-1}(y_0)$	множина рівня y_0 функції f;
$\equiv$	ліва і права сторна рівні за означенням.

ВСТУП

Робота присвячена немонотонним сингулярним функціям канторівського типу, визначеним на відрізку $[0, 1]$; дослідженню їх локальних та глобальних властивостей: структурних, варіаційних, диференціальних, інтегральних, автомодельних та фрактальних, а також розподілу їх значень при заданому розподілі аргументу.

Актуальність теми. В останній час з'явилася потреба і можливості ґрунтовно вивчати функції, які мають нетривіальні (неоднорідні) локальні властивості і складну "варіаційну" поведінку. Вони все частіше з'являються у моделях реальних процесів та явищ, а геометрична теорія дійсних чисел, фрактальна геометрія та фрактальний аналіз дозволяють проводити їх ґрунтовне вивчення. Мова йде про функції сингулярні (неперервна функція, відмінна від константи, називається сингулярною, якщо її похідна майже скрізь рівна нулю в розумінні міри Лебега), ніде не диференційовні, ніде не монотонні (неперервна функція називається ніде не монотонною, якщо вона не має жодного як завгодно малого інтервалу монотонності), або функції, які не мають проміжків монотонності, крім проміжків сталості. За більш ніж столітню історію розвитку теорії таких функцій доведено не так багато теоретичних фактів загального плану. Більшість з відомого стосується окремих прикладів таких функцій або їх класів. Індивідуальна теорія кожного з представників продовжує розвиватись. Ще у 1931 році незалежно один від одного С. Банах [86] та С. Мазуркевич [117] довели, що множина ніде не диференційовних у просторі $C_{[0,1]}$, неперервних на відрізку $[0, 1]$, функцій є множиною другої категорії Бера. У 1932 році С. Сакс зробив уточнення до теореми Банаха-Мазуркевича [38], довівши, що множина неперервних на $[0, 1]$ функцій, у яких або існує скінченна права похідна, або ця похідна рівна $+\infty$ на множині континуум є множиною другої категорії Бера у просторі $C_{[0,1]}$. У 1983 році аналогічний результат для звивистих функцій, які на кожному як завгодно малому відрізку досягають свого глобального максимуму та мінімуму, отримав С. Б. Козирєв [22]. Відомості про недиференційовні функції частково систематизовані в роботі [135]. Зовсім недавно [87, 88, 89, 100] були встановлені нові факти стосовно фрактальних властивостей (розмірність графіка) відомого з 1872 року прикладу ніде не диференційовної функції Вейерштрасса [138]: $w(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$, де $0 < a < 1$, b – непарне ціле число.

Неперервна ніде не диференційовна Трибін-функція [47], [70] :

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\alpha_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\beta_n,$$

де $\alpha_n \in \{0, 1, 2\}$, $\beta_n \in \{0, 1\}$, причому

$$\beta_1 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha_1 = 0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha_1 \neq 0\}, \end{cases} \quad \beta_n = \begin{cases} \beta_{n-1}, \text{ якщо } \alpha_n = \alpha_{n-1}, \\ 1 - \beta_{n-1}, \text{ якщо } \alpha_n \neq \alpha_{n-1}. \end{cases}$$

Історія вивчення сингулярних функцій як самостійного об'єкту дослідження розпочалася більш ніж 100 років тому. У 1981 році Т. Замфіреску довів [140], що "більшість" неперервних монотонних функцій є сингулярними, оскільки сингулярні функції у метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера. За своїми властивостями, пов'язаними з монотонністю, сингулярні функції бувають принципово різними. Простішими для дослідження є монотонні функції. Найпростішим класичним прикладом неспадної сингулярної функції є функція Кантора [91, 30] (її графіком є «канторівські сходи»), строго зростаючої – функція Салема [124] та Мінковського [118], строго спадної – інверсор цифр Q_2- і Q_3-зображення чисел [66], [58]. Сингулярні функції фігурували у роботах різних авторів, зокрема, Л. Шварца [127], Н. Вінера та А. Вінтнера [139], В. Джессена та А. Вінтнера [107], Я. Ф. Виннишина [10, 11], М. В. Працьовитого [49, 50, 51, 52], М. В. Працьовитого, Г. М. Торбіна та Я. В. Гончаренко [12], А. А. Довгошея [134], О. М. Барановського, [2, 3] М. В. Працьовитого та А. В. Калашнікова

[16, 17, 61, 62], М. В. Працьовитого та О. В. Косопльоткіної [63] та ін.

Слід зауважити, що лише строго зростаючій сингулярній функції Мінковського лише за останні 10 років присвячено більше десяти статей (O. Beaver – T. Garrity [90], M. Kessebohmer – B. Stratmann [109], M. Lamberger [112], H. Okamoto – M. Wunsch [119], G. Panti [121], G. Alkauskas [80]-[85], А. А. Душистова – Н. Г. Мощевитин [14, 97, 96] і побудовано її нові узагальнення (М. В. Працьовитий – А. В. Калашніков [17], [60], [19], [60], М. В. Працьовитий – Т. М. Ісаєва [15], [123]).

Зовсім недавно дослідники зацікавились немонотонними сингулярними функціями. Локальна поведінка таких функцій в деякій мірі є складнішою за поведінку сингулярних монотонних функцій. Досі відомо дуже мало загальних фактів щодо їх диференціальних властивостей. Але виявляється, що існують сингулярні ніде не монотонні функції. У XX ст. вперше був побудований приклад такої функції індійським математиком O. K. Shukla [128]. Пізніше вони фігурували в роботах іншого індійського математика K. M. Garg [101, 102]. Проте тривалий час не було нових публікацій, що стосувались ніде не монотонних функцій. І лише недавно дослідження їх продовжились [52, 1].

Сингулярні функції викликають не лише теоретичний інтерес (з ними пов'язані складні теоретико-ймовірнісні проблеми [73]), вони адекватно описують перехідні фрактальні випромінювання [6, 7], фігурують у задачах управління розподіленими системами [1], аналізу і синтезу антен [27] та ін. [31, 45, 28, 29, 37, 39].

Неперервна функція f називається *функцією канторівського типу*, якщо її множина несталості є ніде не щільною множиною. Неперервна функція f називається *сингулярною функцією канторівського типу*, якщо її множина несталості є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега. Нами не виявлено робіт, присвячених немонотонним сингулярним функціям канторівського типу. Саме на них ми акцентуємо увагу в даному дисертаційному дослідженні.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках досліджень математичних об'єктів зі складною локальною будовою, що проводяться на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова та у відділі фрактального аналізу Інституту математики НАН України. Дослідження проводилось у рамках наступних науково-дослідних тем:

— Двійкове кодування дійсних чисел і фрактали (номер державної реєстрації 0110U001279);

— Фрактальний аналіз математичних об'єктів зі складною локальною будовою (номер державної реєстрації 0107U00583);

— Фрактальна геометрія числових рядів і фрактальний аналіз стохастичних об'єктів, з ними пов'язаних (номер державної реєстрації 0118U002059).

Об'єктом дослідження даної дисертаційної роботи є неперервні функції, визначені на відрізку $[0, 1]$, множини несталості яких є ніде не щільними, мають нульову або додатну міру Лебега (функції канторівського типу).

Предметом дослідження є структурні, варіаційні, диференціально-інтегральні, автомодельні та фрактальні властивості функцій, їх множини рівнів, спектральні та структурні властивості розподілів їх значень.

Мета: ввести у розгляд континуальний клас неперервних функцій канторівського типу, залежних від нескінченної кількості параметрів, вивчення їх глобальних властивостей та локальної поведінки, тополого-метричних і фрактальних властивостей суттєвих для функцій множин.

Завданнями дисертаційного дослідження є:

— використовуючи Q_s^*-зображення дійсних чисел, що є узагальненням s-ого зображення та Q_s-зображення, коректно означити континуальний клас неперервних функцій канторівського типу, суттєво збагачений підкласом сингулярних функцій;

— описати структурні, варіаційні, інтегрально-диференціальні, автомодельні та фрактальні властивості класу функції;

— вивчити локальні та глобальні тополого-метричні і фрактальні властивості множин несталості немонотонних функцій канторівського типу;

— вивчити лебегівську структуру (вміст сингулярної, абсолютно неперервної та дискретної компонент) і спектральні властивості випадкової величини $Y = f(X)$, де f — функція з досліджуваного класу, X — випадкова величина із заданим розподілом.

Методи дослідження. У роботі використовувалися методи математичного аналізу та теорії функцій дійсної змінної, метричної теорії чисел, теорії ймовірностей, фрактального аналізу та фрактальної геометрії.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, наступні.

— Введено у розгляд континуальний клас неперервних функцій, залежних від скінченного набору параметрів, зі складною локальною поведінкою: сингулярних монотонних, сингулярних немонотонних, ніде не монотонних функцій, доведено ознаки належності до кожного з вказаних типів. Вивчено їх структурні властивості, множини особливостей (максимумів-мінімумів), масивність множин рівнів.

— За допомогою Q_s^*-зображення дійсних чисел, що є узагальненням класичного s-кового зображення, сконструйовано нескінченнопараметричну сім'ю неперервних функцій з неоднорідними локальними властивостями, які у залежності від набору параметрів є строго монотонними, але у переважній більшості сингулярними, немонотонними сингулярними функціями канторівського типу та ніде не монотонними. Вивчено їх варіаційні та функціональні, диференціальні й інтегральні, автомодельні і фрактальні властивості, а також властивості множин рівнів функції.

— Для немонотонної сингулярної функції канторівського типу f, означеної у термінах Q_5^*-зображення чисел і нескінченної послідовності параметрів, та випадкової величини X, цифри Q_5^*-зображення якої є незалежними випадковими величинами, вивчено лебегівську структуру (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) розподілу випадкової величини $Y = f(X)$, топологометричні і фрактальні властивості його спектра.

— Сфокусовано увагу на немонотонних сингулярних функціях канторівського типу, окремі дослідження яким раніше не присвячувались. Запропоновано методологію їх вивчення.

Одержані результати є новими, строго і повно обґрунтованими.

Практичне значення отриманих результатів. Робота має в основному теоретичний характер. Отримані результати є певним внеском у теорію функцій дійсної змінної, фрактальний аналіз та фрактальну геометрію, теорію розподілів випадкових величин. Запропоновані у дисертації прийоми та методи можуть бути використані при дослідженні різних математичних об'єктів зі складною локальною будовою і фрактальними властивостями.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, які виносяться на захист, належать автору та отримані самостійно. У спільних з М. В. Працьовитим публікаціях співавтору належать постановка окремих задач, перевірка отриманих результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися на конференціях різних рівнів та наукових семінарах, а саме:

— Міжнародній науковій конференції "Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін", присвяченій 80-річчю І. Т. Горбачука, Київ, 18 січня 2013 р.;

— Всеукраїнській науково-методичній конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", Київ, 26-27 червня 2013 р.;

— Міжнародній математичній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" до 100-річчя від дня народження Г. М. Положого, Київ, 23-24 квітня 2014 р.;

— П'ятнадцятій міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 15-17 травня 2014 р.;

— Четвертій всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики, Київ, 23-25 квітня 2015 р.;

— Міжнародній науково-методичній конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", Київ, 25-26 червня 2015 р.;

— П'ятій всеукраїнській науковій конференція молодих вчених з математики та фізики "Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання", Київ, 25-26 квітня 2016 р.;

— Четвертій міжнародній науково-практичній конференції "Відкриті еволюціонуючі системи", Ніжин, 20-21 травня 2016 р.;

— Всеукраїнській науково-методичній конференції "Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі", присвяченій пам'яті професора С. С. Левіщенка, Київ, 7-8 жовтня 2016 р.;

— Шостій всеукраїнській конференції молодих вчених з математики та фізики, Київ, 21-22 квітня 2017 р.;

— Міжнародній конференції молодих математиків, присвяченій 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського, Київ, 7-10 червня 2017 р.;

— Міжнародній науковій конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь", присвяченій 85-річчю професора М. І. Шкіля, Київ, 13-14 грудня 2017 р.

— семінарі відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України та НПУ імені М. П. Драгоманова (керівник — доктор фізико-математичних наук, професор М. В. Працьовитий);

— семінарі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники: академік НАН України А. М. Самойленко, академік НАН України М. О. Перестюк).

Публікації. Основні результати роботи викладено у 6 статтях [1[a]] — [6[a]] опублікованих у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України, з них 1 стаття [6[a]] у науковому виданні, що входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus, та дотатково відображено у матеріалах конференцій [7[a]] — [18[a]].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, розбитих на підрозділи, висновків до кожного розділу та загальних висновків, списку використаних джерел (140 найменувань) та списку публікацій автора (18 найменувань), списку умовних позначень. Загальний обсяг роботи — 125 сторінок.

Основний зміст роботи. У **вступі** обґрунтовано актуальність дисертаційного дослідження, вивчено його об'єкт, предмет, мету і завдання, висвітлено наукову новизну, практичне значення, анонсовано основні наукові результати.

Розділ 1 «Концептуальні основи дослідження та огляд літератури» носить вступний характер. У ньому описано Q_s^*-зображення дійсних чисел [72], що є узагальненням s-кового зображення та Q_s-зображення дійсних чисел; описано його властивості, необхідні для подальшого конструювання та дослідження функцій.

Нехай $1 < s$ — фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення, $Q_s^* = \|q_{ij}\|$ — нескінченна стохастична матриця з додатними елементами, $i \in A_s$, $j \in N$ така, що:

1. $q_{0j} + q_{1j} + \ldots + q_{[s-1]j} = 1$;
2. $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \max\{q_{0j}, q_{1j}, \ldots, q_{[s-1]j}\} = 0$.

Відомо [50], що для будь-якого $x \in [0,1]$ існує послідовність (α_k), $\alpha_k = \alpha_k(x) \in A_s$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right].$$

Подання числа x у вигляді ряду називається його Q_s^**-представленням*, а його символічний запис $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$ – Q_s^**-зображенням.* При цьому $\alpha_j(x)$ називається j-тим Q_s^**-символом (цифрою)* зображення числа x. Існують числа, що мають два Q_s^*-зображення. Це числа виду $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s-1)}$. Їх називають Q_s^**-раціональними.* Числа, що не містять період (0) або $(s-1)$, мають єдине Q_s^*-зображення і називаються Q_s^**-ірраціональними.*

Якщо для всіх $i \in A_s$, $j \in N$ виконується $q_{ij} = q_i$, тобто всі стовпці матриці $\|q_{ij}\|$ однакові, то Q_s^*-зображення називається Q_s*-зображенням*, якщо ж при цьому $q_i = \frac{1}{s}$,то Q_s-зображення є звичайним s*-ковим зображенням.*

Розглядаються приклади функцій зі складною локальною будовою: монотонних сингулярних функцій, ніде не монотонних сингулярних функцій, монотонних та немонотонних сингулярних функцій канторівського типу, недиференційовних функцій.

У другому розділі **«Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента»** введено в розгляд континуальний клас неперервних функцій, залежних від скінченного набору параметрів, що є сингулярними монотонними, ніде не монотонними або сингулярними функціями канторівського типу.

Для заданого набору дійсних чисел $(a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ таких, що $a_0 + a_1 + \ldots + a_{s-1} = 1$, $|a_i| < 1$, $\gamma_0 \equiv 0, 0 < \gamma_i \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1} < 1$ для всіх $i \in \overline{1, s-1}$, розглядається функція f, означена рівністю

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\gamma_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j(x)} \right], \tag{2.1}$$

де $\alpha_k(x)$ – k-ий символ Q_s^*-зображення числа x.

У підрозділі 2.2 доведено, що функція f є неперервною на відрізку $[0, 1]$ і набуває всіх значень з цього відрізка. Підрозділ 2.3 присвячений доведенню фактів, що стосуються умов монотонності, строгої монотонності та ніде не монотонності функції, а підрозділ 2.4 — сингулярності канторівського типу.

Теорема 2.3.1. *Неперервна на* $[0, 1]$ *функція* f*, визначена рівністю*

(2.1), *є ніде не монотонною, якщо* $\prod_{i=0}^{s-1} a_i \neq 0$ *і серед чисел* $a_0, \ldots, a_{s-1}$ *знайдеться* $a_i < 0$.

Означення 2.1. *Спектром (множиною нестабільності)* функції f називається множина S_f всіх x таких, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ в ε-околі $O_\varepsilon(x)$ точки x знайдуться x_1 і x_2 такі, що $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Означення 2.2. Неперервна функція називається *сингулярною функцією канторівського типу*, якщо її множина несталості (нестабільності) є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Теорема 2.4.1. *Для того, щоб функція* f*, визначена рівністю* (2.1), *була сингулярною функцією канторівського типу, необхідно і достатньо, щоб множина* $C = C[Q_s^*, V] = \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}, \alpha_n \in V \subset A_s\}$, $V = \{v : a_v \neq 0\}$*, мала нульову міру Лебега, тобто* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k = \infty$*, де* $W_k = \sum\limits_{i: a_i = 0} q_{ik}$.

У підрозділі 2.5 вивчено екстремуми функції f (теорема 2.5.1.) і встановлено, що f на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ набуває найбільшого і найменшого значення на його кінцях (теорема 2.5.2). У підрозділі 2.6 досліджується масивність множини рівнів функції f.

Теорема 2.6.1. *Якщо серед членів послідовності* (a_n) *є від'ємні і* Q_s^**-зображення числа* $x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ *має властивість* $a_{\alpha_i(x)} a_{\alpha_{i+1}(x)} < 0$ *для нескінченної множини значень* $i \in N$*, то множина* $f^{-1}(y_0)$ *рівня* $y_0 = f(x_0)$ *є зліченною множиною.*

Розділ 3 «Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями» присвячений узагальненню об'єктів і результатів попереднього розділу переходом від s-ого зображення функції до G_s^*-зображення. Цей перехід збільшує кількість параметрів е сім'ї, значно розширює коло об'єктів, збагачує родину представниками з новими властивостями.

Задана матриця $G_s^* = \|g_{ij}\|$, $i \in A_s$, $j \in N$, що має властивості:

1. $\mid g_{ij} \mid < 1$;   2. $g_{0j} + \ldots + g_{[s-1]j} = 1$;

3. $\gamma_{0j} = 0$, $0 < \gamma_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} g_{kj} < 1$, $i \in \overline{1, s-1}$;

4. $\forall (i_j j), i_j \in A_s$ має місце $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{k-1} \{|g_{i_j j}|\} < \infty$.

Розглядається функція $f(x)$, означена рівністю

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\gamma_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right). \qquad (3.1)$$

У підрозділі 3.2 доведено, що функція є неперервною в кожній точці відрізка $[0, 1]$ і набуває всіх значень з цього відрізка. У підрозділі 3.3 доводиться монотонність та ніде не монотонність функції, а у 3.4 — сингулярність канторівського типу.

Теорема 3.3.1. *Функція f на $[0, 1]$, визначена рівністю (3.1):*

1) має скінченну кількість інтервалів сталості, якщо матриця $\|g_{ij}\|$ містить скінченну кількість нулів;

2) має нескінченну кількість інтервалів сталості, якщо матриця $\|g_{ij}\|$ містить нескінченну кількість нулів;

3) є кусково-монотонною, якщо у матриці $\|g_{ij}\|$ немає нулів і у скінченній кількості стовпців існують від'ємні числа;

4) є ніде не монотонною, якщо у матриці $\|g_{ij}\|$ немає нулів і у нескінченній кількості стовпців існують від'ємні числа.

Лема 3.4.1. *Неперервна функція f буде функцією канторівського типу тоді і тільки тоді, коли серед елементів матриці $\|g_{ij}\|$ існує нескінченна кількість нулів.*

Теорема 3.4.1. *Для того, щоб функція f, визначена рівністю (3.1), була сингулярною функцією канторівського типу, необхідно і достатньо, щоб множина $C[Q_s^*, V_n] = \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}, \alpha_n \in V_n \subset A_s\}$, де $V_n = \{v : g_{vn} \neq 0\}$, мала нульову міру Лебега, тобто $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k = \infty$, де $W_k = \sum\limits_{i: g_{ij}=0} q_{ik}$, $k \in Z$. Якщо ж $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k < \infty$, то f буде функцією квазіканторівського типу.*

У підрозділі 3.5 доведено, що сингулярні функції канторівського типу, які не мають проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості, є функціями як обмеженої, так і необмеженої варіації.

У підрозділах 3.7 і 3.8 самоафінні властивості досліджуються для періодичних матриць Q_s^* і G_s^*, а саме:

— $Q_s^* = \|q_{ij}\|$ — нескінченна періодична матриця, $i \in A_s$, $j \in N$ така, що має властивості: $q_{i,2k-1} = q_{i1} > 0$, $q_{i,2k} = q_{i2} > 0$, $i = \overline{0, s-1}$, $k \in N$ і $q_{0j} + q_{1j} + \ldots + q_{[s-1]j} = 1$, $j \in \{1, 2\}$;

— $G_s^* = \|g_{ij}\|$ — нескінченна періодична матриця, $i \in A_s$, $j \in N$ така, що має властивості: $|g_{i,2k-1}| = |g_{i1}| < 1$, $|g_{i,2k}| = |g_{i2}| < 1$, $i = \overline{0, s-1}$, $k \in N$ і $g_{0j} + g_{1j} + \ldots + g_{[s-1]j} = 1$, $j \in \{1, 2\}$.

Теорема 3.7.1. *Графік функції* $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in [0, 1]\}$ *є самоафінною множиною, причому*

$$\Gamma = \bigcup_{(i,j) \in A_s \times A_s} \varphi_{ij}(\Gamma), \text{ де } \varphi_{kj}(\Gamma) \neq \varphi_{pj}(\Gamma) \text{ при } k \neq p,$$

$$\varphi_{ij} : \begin{cases} x' = \beta_{i1} + q_{i1}\beta_{j2} + q_{01}q_{02}x, \\ y' = \gamma_{i1} + g_{i1}\gamma_{j2} + g_{i1}g_{j2}y. \end{cases}$$

Теорема 3.8.1. *Для інтеграла Рімана функції* f *має місце рівність*

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{q_{01}q_{02}\left(s \cdot \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_{i1} + \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_{i2}\right)}{1 - q_{01}q_{02}}.$$

Розділ 4 «Сім'я немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями» присвячений сім'ї неперервних немонотонних функцій канторівського типу, які залежать від послідовності параметрів і належать до класу функцій, які вивчалися у попередньому розділі. Основна увага приділяється лебегівській структурі розподілу випадкової величини $Y = f(X)$, тополого-метричним і фрактальним властивостям спектра.

Використовуючи Q_5^*-зображення чисел $[0;1] \ni x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}$, яке визначається п'ятірковим алфавітом $A_5 \equiv \{0,1,2,3,4\}$ і нескінченною стохастичною матрицею $\|q_{ik}\|$, $i \in A_5$, $k \in N$, з додатними елементами $(q_{0k} + q_{1k} + q_{2k} + q_{3k} + q_{4k} = 1)$ такою, що $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i \{q_{ik}\} = 0$, $\beta_{0k} = 0$, $\beta_{i+1,k} = \beta_{ik} + q_{ik}$, $i = \overline{0,4}$, неперервна функція канторівського типу означується рівністю

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \tag{4.1}$$

де $(\overline{g_n}) = (g_{0n}, g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, g_{4n})$ — послідовність векторів, таких, що: $g_{0n} = g_{4n} = \frac{2+\varepsilon_n}{4}$, $g_{1n} = g_{3n} = \frac{-\varepsilon_n}{4}$, $g_{2n} = 0$; $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = \frac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n} = \frac{2}{4} = \delta_{3n}$, $\delta_{4n} = \frac{2-\varepsilon_n}{4}$, тобто $\delta_{i+1,n} = \delta_{in} + g_{in}$, $n \in N$, при цьому (ε_n) — наперед задана послідовність дійсних чисел така, що $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1$.

Лема 4.1.1. *Для того, щоб функція f, визначена рівністю* (4.1)*, не мала проміжків монотонності, крім проміжків сталості, необхідно і достатньо, щоб $\varepsilon_n \neq 0$ виконувалась для нескінченної множини значень n.*

У підрозділі 4.2 доводиться критерій належності функції f до класу функцій з обмеженою варіацією. У підрозділі 4.3 вивчено симетрії графіка та обчислено інтеграл Рімана.

Теорема 4.3.1. *Якщо $q_{ij} = q_i = \frac{1}{5}$, то графік функції f, яка визначена рівністю* (4.1)*, симетричний відносно точки $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ і має місце рівність* $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

У підрозділі 4.4 описані автомодельні властивості функції.

Теорема 4.4.1. *Якщо $q_{ij} = q_i = \frac{1}{5}$, $i,j \in N$, $\varepsilon_n = const \neq 0$, то* $G_i \equiv \{M(x,y) : \alpha_1(x) = i, y = f(x)\}$,

$$\varphi_i : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{i}{5}, \\ y' = g_{i1}y + \delta_{i1}, \end{cases}$$

і при $i \neq 2$ маємо $\varphi_i(\Gamma_f) = G_i$.

У підрозділі 4.5 досліджуються множини рівнів функції при $\varepsilon_n = 1$. Доведено, що множина рівня функції f, яка містить відрізки сталості, є зліченною множиною, причому множина рівня функції більше двох відрізків містити не може.

Підрозділ 4.6 присвячений образам множин канторівського типу при відображенні f. Доведено, що образом п'ятіркового циліндра при відображенні f є G-циліндр або точка, причому точкою є тоді і тільки тоді, коли в основі циліндра є принаймні одна цифра 2 і виконується рівність $f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2...c_m2}) = \Delta^{G}_{c_1c_2...c_m2(0)} = y_0$.

Теорема 4.6.1. *Образом множини $C_1 \equiv C[Q_5^*;\{0,1\}]$ при відображенні f є відрізок $\left[0,\frac{3}{4}\right]$, зліченна множина точок якого має рівно два G_2-зображення, а саме: $\Delta^{G_2}_{c_1c_2...c_m01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1c_2...c_m11(0)}$, а решта точок мають єдине G_2-зображення.*

Наслідок 4.6.1. *Образом множини $C_2 \equiv C[Q_5^*;\{3,4\}]$ при відображенні f є відрізок $\left[\frac{1}{4},1\right]$, зліченна множина точок якого має рівно два G_2-зображення, а решта точок — єдине G_2-зображення.*

Теорема 4.6.2. *При відображенні f образом множини канторівського типу:*

— $C_3 \equiv C[Q_5^*;\{1,3\}]$ є множина канторівського типу $C_4 \equiv C[4;\{1,2\}]$, причому відображення множини C_3 в множину C_4 є біективним;

— $C_5 \equiv C[Q_5^*;\{1,2,3\}]$ є множина $E = C_4 \bigcup M$, де M — дискретна підмножина множини четвірково-раціональних чисел, а саме:

$$M = \{y : y = \Delta^{4}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}2(0)},\ \alpha_i \in \{1;2\},\ m \in N\}.$$

Теорема 4.6.3 *При відображенні f образом множини канторівського типу $C[5;V_n]$, де*

$$V_n = \begin{cases} \{0,4\}, \text{якщо } n = 1(mod\ 3), \\ \{1,3\}, \text{якщо } n \neq 1(mod\ 3), \end{cases}$$

є множина канторівського типу нульової міри Лебега, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $\alpha_0 = \dfrac{3}{6-\log_2 3}$.

Підрозділ 4.7 присвячено випадковій величині $X = \Delta^{Q_5^*}_{\tau_1\tau_2\tau_3...}$, де (τ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значення

$0, 1, 2, 3, 4$ з ймовірностями $P\{\tau_n = i\} = p_{in},\ i = \overline{0,4}$. Лебегівську структуру розподілу випадкової величини $Y = f(X)$ висвітлюють наступні теореми.

Теорема 4.7.3. *Нехай* $X = \Delta^5_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ *— неперервна випадкова величина, цифри* (τ_n) *п'ятіркового зображення якої є незалежними і мають розподіли* $P\{\tau_n = i\} = p_{in},\ i = \overline{0,4}$, *причому* $p_{3n} = 0,\ p_{4n} = 0$ *для будь-якого* $n \in N$. *Тоді розподіл випадкової величини* $Y = f(X)$ *є чисто дискретним, якщо* $B \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[p_{2n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1 - p_{2k})\right] = 1$, *і є нетривіальною сумішшю дискретного та неперервного розподілів, коли* $0 < B < 1$, *причому:*

1) сумішшю дискретного і сингулярного, якщо

$$W = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1 - \frac{4}{3}p'_{0n}\right)^2 + (1 - 4p'_{1n})^2\right] = \infty,$$

де $p'_{0n} = \dfrac{p_{0n}}{p_{0n} + p_{1n}}$ *і* $p'_{1n} = \dfrac{p_{1n}}{p_{0n} + p_{1n}}$;

2) сумішшю дискретного і абсолютно неперервного, якщо $W < \infty$.

Наслідок 4.7.1. *Якщо* $p_{0n} = p_{1n} = 0$ *для будь-якого* $n \in N$, *то розподіл випадкової величини* $Y = f(X)$ *має чисто дискретний розподіл, якщо* $B = 1$, *і є сумішшю дискретного та неперервного розподілів, якщо* $0 < B < 1$.

Теорема 4.7.4. *Нехай* $X = \Delta^{Q_5^*}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ *— випадкова величина, цифри* (τ_n) Q_5^**-зображення якої є незалежними і мають розподіли* $P\{\tau_n = i\} = p_{in},\ i = \overline{0,4}$, *причому* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\max\limits_{i}\{p_{ik}\} = 0$. *Розподіл випадкової величини* $Y = f(X)$ *є:*

1) чисто дискретним, якщо $S \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[p_{2n}\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1 - p_{2k})\right] = 1$;

2) нетривіальною сумішшю дискретного і неперервного розподілів, якщо $0 < S < 1$, *причому* $F_Y(x) = cF_d(x) + (1-c)F_c(x)$,

де $F_d(x) = \sum\limits_{\substack{\Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)} = x_i < x \\ c_j \in \{0,1,3,4\}}} p_{x_i},\ p_{x_i} = P\{Y = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}\}$;

3. сингулярним розподілом канторівського типу, якщо для будь-якого натурального n *мають місце рівності* $p_{0n} = p_{2n} = p_{4n} = 0$.

Теорема 4.7.5. *Нехай* $X = \Delta^{Q_5^*}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ *— випадкова величина, цифри* (τ_n) Q_5^**-зображення якої є незалежними і мають розподіли* $P\{\tau_n = i\} =$

p_{in}, $i = \overline{0,4}$. Якщо $p_{2n} = p_{3n} = p_{4n} = 0$ для будь-якого $n \in N$, то розподіл випадкової величини $Y = f(X) = \Delta^{G_2^*}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}$, яка закодована засобами двосимвольного алфавіту $A_2 = \{0,1\}$ у системі з нульовою надлишковістю, цифри $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ зображення якої є незалежними, має чистий лебегівський тип, причому абсолютно неперервний — тоді і тільки тоді, коли $W = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{4}{3}p_{0n}\right)^2 + (1-4p_{1n})^2\right] < \infty$ і сингулярний, коли $W = \infty$.

Теорема 4.7.6. *Якщо розподіл випадкової величини $X = \Delta^5_{\tau_1\ldots\tau_n\ldots}$ є неперервним і для будь-якого натурального n мають місце рівності*

$$\begin{cases} p_{1n} = p_{2n} = p_{3n} = 0, \text{якщо } n = 1(mod\ 3), \\ p_{0n} = p_{4n} = 0, \text{якщо } n \neq 1(mod\ 3), \end{cases}$$

то $Y = f(X)$ має сингулярний розподіл канторівського типу.

Подяка. Автор висловлює вдячність науковому керівнику доктору фізико-математичних наук,професору А. М. Самойленку та науковому консультанту доктору фізико-математичних наук, професору М. В. Працьовитому за постановку задач, постійну увагу до даної роботи, підтримку та допомогу.

РОЗДІЛ 1
КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Даний розділ має вступний характер. У ньому ми систематизуємо відомості, що стосуються "геометрії" Q_s^*-зображення дійсних чисел. Вказане зображення ми використовуємо для конструювання та дослідження функцій та нових зображень. Наведено факти, необхідні для подальшого дослідження об'єктів зі складною локальною будовою.

1.1. Q_s^*-зображення дробової частини дійсного числа

Нехай $1 < s$ — фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт s-кової системи числення, $Q_s^* = \|q_{ij}\|$ — нескінченна стохастична матриця з додатними елементами, $j \in N$, $i \in A_s$ така, що має властивості:

1. $q_{0j} + q_{1j} + \ldots + q_{[s-1]j} = 1$;
2. $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \max\{q_{0j}, q_{1j}, \dots, q_{[s-1]j}\} = 0$.

Теорема 1.1.1. *[50] Для будь-якого $x \in [0,1]$ існує послідовність (α_k), $\alpha_k = \alpha_k(x) \in A_s$ така, що*

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right], \qquad (1.1.1)$$

де $\beta_{0j} = 0$, $\beta_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} q_{kj}$, $i \in \overline{1, s-1}$, $j \in N$.

Подання числа x у вигляді (1.1.1) називається його *Q_s^*-представленням*, а його символічний запис

$$x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots} \qquad (1.1.2)$$

– *Q_s^*-зображенням.*

При цьому $\alpha_j(x)$ називається j-тою Q_s^*-*цифрою* зображення числа x. Якщо Q_s^*-зображення є періодичним, то його період записуватимемо в круглих дужках.

Поняття j-ї Q_s^*-цифри числа x не є коректно означеним, оскільки деякі числа мають два Q_s^*-зображення. Це числа виду

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s-1)}.$$

Їх називають Q_s^*-*раціональними*. Числа, що не містять період (0) або $(s-1)$, мають єдине Q_s^*-зображення і називаються Q_s^*-*ірраціональними*.

В геометрії зображень чисел важливим є поняття циліндра. Нагадаємо його.

Означення 1.1. *Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — фіксований набір символів, $c_i \in A_s$. Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, яка складається з усіх точок $x \in [0,1]$, які мають Q_s^*-зображення таке, що $\alpha_j(x) = c_j, j = \overline{1,m}$.*

Властивості циліндрів:

1) Циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями
$a = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(0)} = \beta_{c_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{m}\left[\beta_{c_k k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{c_j j}\right],\ \ b = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(s-1)} = a + \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i i};$

2)$\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1}\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i};$

3) $|\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i i};$

4) $\max\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i} = \min\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}, i = \overline{0, s-2};$

5) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m} = x = \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots} \in [0,1]$ для довільної послідовності $(c_i), c_i \in A_S$.

Якщо для всіх $i \in A_s$, $j \in N$ виконується $q_{ij} = q_i$, тобто всі стовпці матриці $\|q_{ij}\|$ однакові, то Q_s^*-зображення називається Q_s-*зображенням*, якщо ж при цьому $q_i = \frac{1}{s}$,то Q_s-зображення є звичайним s-*ковим зображенням*.

1.2. Множини канторівського типу, пов'язані з Q_s^*-зображенням

Під *множиною канторівського типу* прийнято називати континуальну досконалу (замкнену, без ізольованих точок) ніде не щільну множину простору R^1.

Теорема 1.2.1. *[50] Множина $C[Q_s^*, V_n]$, означена рівністю*

$$C = C[Q_s^*, V_n] \equiv \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots}, \text{де } \alpha_n \in V_n \subset A_s\},$$

є множиною канторівського типу тоді і тільки тоді, коли $V_n \neq A_s$ для нескінченної множини значень n.

Якщо ж $V_n = A_s$ для всіх n, більше деякого n_0, то множина $C[Q_s^*, V_n]$ є об'єднанням відрізків.

Теорема 1.2.2. *[50] Міра Лебега множини $C[Q_s^*, V_n]$ обчислюється за формулою*

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - W_k), \quad \text{де } \ W_k = \sum_{i \in A_s \setminus V_n} q_{ik}.$$

Наслідок 1.2.1. *Множина C має нульову міру Лебега, якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k = \infty$.*

Наслідок 1.2.2. *Якщо Q_s^*-зображення є Q_s-зображенням, зокрема s-ковим зображенням, то множина канторівського типу має нульову міру Лебега.*

1.3. Неперервні функції зі складною локальною будовою

Під функціями зі складною локальною будовою ми розуміємо функції, локальна поведінка яких є край неоднорідною. До таких ми відносимо неперервні функції, які є сингулярними, ніде не монотонними та ніде не диференційовними.

Означення 1.2. *Відмінна від сталої неперервна функція $f(x)$, похідна якої майже всюди в розумінні міри Лебега дорівнює нулю називається* *сингулярною функцією, тобто*

$$\lambda\{x : F'(x) \neq 0\} = 0.$$

Означення 1.3. *Неперервна функція називається ніде не монотонною, якщо вона не має жодного як завгодно малого інтервалу монотонності.*

Означення 1.4. *Неперервна функція називається недиференційовною, якщо вона не має скінченної похідної в жодній точці області визначення.*

Розглянемо приклади таких функцій.

1.3.1. Функція Серпінського. У 1914 році польський математик В. Серпінський навів приклад неперервної недиференційовної функції. В роботі [126] він обґрунтував коректність означення функції і довів її неперервність та ніде не диференційовність. Для зручності дослідження властивостей функції Серпінського Н. А. Василенко знайдено її модифікацію [8] в термінах трійкового та п'ятіркового зображення дробової частини дійсного числа. Наведемо її.

Нехай $\gamma(\alpha)$ — дискретна функція, визначена A_5, тобто

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{якщо } \alpha = 0, \\ 1, \text{якщо } \alpha \in \{1, 2, 3\}, \\ 2, \text{якщо } \alpha = 4. \end{cases}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_n) \in L \equiv A_5^{\infty} = A_5 \times A_5 \times \ldots$ визначена послідовність (c_n), де

$$c_1 = 0, \;\; c_n = \begin{cases} c_{n-1}, \text{якщо } \alpha_{n-1} \neq 2, \\ 1 - c_{n-1}, \text{якщо } \alpha_{n-1} = 2. \end{cases}$$

Функція f на відрізку $[0, 1]$ означується наступним чином: її аргумент подається п'ятірковим дробом, а функція — трійковим дробом, тобто

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{5^n} \equiv \Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},\ \alpha_n \in A_5,$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{3^n},\ \beta_n \in A_3,$$

де

$$\beta_n = \begin{cases} \gamma(\alpha_n), \text{якщо } c_n = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_n), \text{якщо } c_n \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 1.3.1. *[8] Функція $f(x)$:*

1) *неперервна в кожній точці інтервала $(0,1)$, в точці 0 — справа, а в точці 1 — зліва;*
2) *ніде не диференційовна;*
3) *має графік $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$, що є самоафінною множиною, причому $\Gamma_f = \bigcup\limits_{i=1}^{5} \varphi_i(\Gamma_f)$, де*

$$\varphi_i : \begin{cases} x' = \frac{1}{5}x + \frac{i-1}{5}, \\ y' = \frac{(-1)^{\left[\frac{i-3}{3}\right]+\left[\frac{i-4}{3}\right]}}{3} y + \frac{i - 2\left[\frac{i}{4}\right] - 1}{3}, \end{cases}$$

   клітковинна розмірність якого дорівнює $\alpha^K(\Gamma_f) = 2 - \log_5 3$;
4) *задовольняє наступне функціональне рівняння $f(1-x) = 1 - f(x)$;*
5) *для інтеграла Лебега має місце рівність $\int_0^1 f(x) = \frac{1}{2}$.*

Властивості множини рівнів функції $f(x)$:

1) якщо $y_0 = \Delta^3_{d_1d_2\ldots d_m(1)} (m \in Z_0)$, то $f^{-1}(y_0) = C[5,V] \equiv \{x : x = \Delta^5_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots}, \alpha(x) \in V = \{1,2,3\}, i \in N\}$, тобто множина рівня y_0 є континуальною ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює $log_5 3$;
2) якщо у зображенні точки $y_0 = \Delta^3_{i_1i_2\ldots i_k\ldots}$ всі цифри $i_k \in \{0,2\}, k \in N$, то множина $f^{-1}(y_0)$ містить єдину точку;

3) якщо $y_0 = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}$, де

$$\begin{cases} \beta_{k_n} = 1, n \in N, \\ \beta_j \neq 1, \text{при } j \notin \{k_n\}, \end{cases}$$

то множина $f^{-1}(y_0)$ є континуальною, причому у ній не існує пари точок x_1 і x_2 таких, що

$$\begin{cases} \alpha_{k_n}(x_1) = \alpha'_{k_n}(x_2), \\ \alpha_j(x_1) \neq \alpha'_j(x_2) \text{ при } j \notin \{k_n\}; \end{cases}$$

4) якщо зображення точки $y_0 = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}$ містить рівно n цифр "1", то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з 3^n точок.

1.3.2. Трибін-функція. У статті М. В. Працьовитого [47] представлена ніде не диференційовна Трибін-функція.

Нехай $\overline{q} = (q_0, q_1, q_2)$ і $\overline{g} = (g_0, g_1)$ — додатні стохастичні вектори ($q_i > 0$, $q_0 + q_1 + q_2 = 1$, $0 < g_0 < 1$, $g_1 = 1 - g_0$);

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right) = \Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots},$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_{\alpha_k} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_k-1} q_i, k \in N, (\alpha_k) \in L_3$,

$$y = f(x) = \delta_{a_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\delta_{a_k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{a_j}\right) = \Delta^{G_2}_{a_1(y)\ldots a_n(y)\ldots},$$

де $\delta_0 = 0, \delta_{a_k} = \sum\limits_{i=0}^{a_k-1} g_i, k \in N, (a_k) \in L_2$.

Функція f означена рівністю

$$y = f(\Delta^{Q_3}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}) = \Delta^{G_2}_{a_1(y)a_2(y)\ldots a_n(y)\ldots}, \tag{1.3.3}$$

де

$$a_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1(x) = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1(x) \neq 0, \end{cases} \tag{1.3.4}$$

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1}, & \text{якщо} \quad \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x), \\ 1 - a_{k-1}, & \text{якщо} \quad \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x), \quad k > 1. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

Пізніше Трибін-функція досліджувалась у роботах М. В. Працьовитого [50], В. В. Коваля [21], О. Б. Панасенка [40, 41, 42, 43, 44], О. В. Котової [24].

Теорема 1.3.2. *Функція $y = f(x)$:*

1) *неперервна на* $[0, 1]$*;*
2) *ніде не диференційовна;*
3) *для кожного* $x \in [0, 1]$ *виконується рівність*

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} f(x); \tag{1.3.6}$$

Функція f має графік Γ_f, що є N-самоафінною множиною, для якого виконуються наступні властистивості симетрії:

1) $f(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_2\alpha_2\ldots}) = f(\Delta^{Q_3}_{1[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\ldots}) \Leftrightarrow a_n[f(\Delta^{Q_3}_{1\alpha_2\alpha_3\ldots})] = a_n f(\Delta^{Q_3}_{2[2-\alpha_2\ldots]})$;
2) $a_n[f(\Delta^{Q_3}_{2\alpha_2\alpha_3\ldots})] = 1 - a_n[f(\Delta^{Q_3}_{0[2-\alpha_2][2-\alpha_3]\ldots})]$.

Фрактальна клітинкова розмірність Γ_f дорівнює

$$2 - \log_3 2 \approx 1,36907.$$

Розмірність Гаусдорфа-Безиковича Γ_f дорівнює

$$\alpha_0(\Gamma_f) = \log_2\left(1 + 2^{\log_3 2}\right) \approx 1,34968.$$

Для інтеграла Лебега має місце рівність $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{4}{7}$.

Теорема 1.3.3. *Якщо y_0 — двійково-раціональне число відрізка* $[0, 1]$*, то множина $f^{-1}(y_0)$ є скінченною і її фрактальна розмірність рівна 0. Фрактальна розмірність множини прообразів двійково-ірраціонального значення y_0 обчислюється за формулою*

$$\alpha_0\left(f^{-1}(y_0)\right) = B \log_3 2,$$

де $B = \varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{d_k}{k}$, d_k — кількість пар послідовних двійкових цифр y_0 (до k-го місця включно), в яких компоненти різні.

1.3.3. Функція Мінковського. Одним з перших прикладів строго зростаючої сингулярної функції є функція Мінковського [118]. У 1932 році A. Denjoy [95] довів, що вона є сингулярною. У 1943 році R. Salem [124] також довів її сингулярність і показав, що функція $?(x)$ в ірраціональних точках відрізка $[0,1]$ аналітично виражається рядом

$$?(x) = ?([0; a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 2^{1-a_1} - 2^{1-(a_1+a_2)} + \ldots + (-1)^{n-1}\, 2^{1-(a_1+\ldots+a_n)} + \ldots =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2^{1-(a_1+\ldots+a_k)}, \tag{1.3.7}$$

де $x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} \equiv [0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ — елементарний ланцюговий дріб $(a_k \in N)$, а в раціональних точках $[0,1]$ — скінченний ряд.

Частково властивості функції Мінковського систематизовані в роботі [50]. Вона:

— є сингулярною;

— є функцією розподілу випадкової величини, елементи елементарного ланцюгового зображення якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, що набувають значень $1, 2, ..., k, ...$ з ймовірностями $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^k}, ...$ відповідно;

— взаємно однозначно переводить раціональні числа в двійково-раціональні числа на відрізку $[0,1]$;

— взаємно однозначно переводить квадратичні ірраціональності в раціональні числа на відрізку $[0,1]$.

Інтерес до функції Мінковського не згасає протягом століття. У 1960 році J. Kinney [110] показав, існує множина X розмірності Гаусдорфа-Безиковича $\alpha > 0$, для якої міра Лебега $?(X)$ дорівнює 1, разом з тим для будь-якої множини A, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої менша за α, міра множини $?(X)$ дорівнює нулю. R. Tichy і J.Uitz [133] розглядали сім'ю сингулярних, неперервних і строго зростаючих на відрізку $[0,1]$ функцій та досліджували розмірність Гаусдорфа-Безиковича множин точок, де сингулярні функції мають не нульові похідні. У 1998 році P. Viader,

J. Paradis і L. Bibiloni [136] подали функцію Мінковського у формі асимптотичної функції розподілу нумерації раціональних чисел та довели сингулярність функції Мінковського двома способами. У 2001 році [137] вони розглядали її як порівняння двох систем числення (елементарних ланцюгових дробів і знакозмінної двійкової системи) і встановили, що похідна, якщо вона існує, може набувати лише двох значень — нуль або нескінченність. У 2004 році O. Beaver і T. Garrity [90] побудували функцію, яка подібна до функції Мінковського і є неперервною, має похідну рівну нулю майже скрізь. у 2006 році M. Lamberger [112] розглядав певну точкову міру функції розподілу, що виникає в статті [103] та інших. У 2007 році H. Okamoto і M. Wunsch [119] побудували узагальнення функції Мінковського. M. Kessebohmer та B. Stratmann [109] вивчали різні фрактально-геометричні аспекти функції Мінковського. Дослідженням похідної займалися А. Душистова і Н. Мощевитін [14]. У 2010 році М. В. Працьовитим, А. В. Калашніковим та В. К. Безбородовим [60] побудовано однопараметричне узагальнення класичної функції Мінковського, яка є неперервним розв'язком системи функціональних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_\mu\left(\dfrac{x}{1+x}\right) = (1-\mu)\varphi_\mu(x), \\ \varphi_\mu(1-x) = 1 - \varphi_{1-\mu}(x), \end{cases}$$

де $\varphi(x,\mu) \equiv \varphi_\mu(x)$ — функція двох змінних x та μ $(x \in [0,1], \mu \in (0,1))$ або функція однієї змінної x, залежна від параметра $\mu \in (0,1)$. У 2011-2012 роках G. Alkauskas досліджував моменти та різні інтегральні перетворення функції Мінковського [84], [85]. У 2015-2016 роках М. В. Працьовитим та Т. М. Ісаєвою описано ще одне узагальнення класичної функції Мінковського [57] і досліджено ним породжене Δ^q-зображення чисел [15].

1.4. Монотонні сингулярні функції канторівського типу

Означення 1.5. *Точка x_0 називається точкою несталості функції f, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують $x_1, x_2 \in O_\varepsilon(x_0) \equiv (x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ такі,* *що* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

У випадку, коли функція є монотонною, множиною несталості функції є множина точок її зростання (спадання). Для функції розподілу ймовірностей множину її точок росту називаються спектром розподілу (або його мінімальним замкненим носієм) [50]. Це є мотивацією до наступного означення.

Означення 1.6. *Спектром (множиною несталості) функції* f *називається множина* S_f *всіх точок* x *таких, що для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *в* ε*-околі* $O_\varepsilon(x)$ *точки* x *знайдуться* x_1, x_2 *такі, що* $f(x_1) \neq f(x_2)$*, тобто*

$$S_f = \{x : \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; x_1, x_2 \text{ такі, що } |x - x_1| < \varepsilon, |x - x_2| < \varepsilon \text{ і } f(x_1) \neq f(x_2)\}.$$

Означення 1.7. *Неперервна функція називається функцією канторівського типу, якщо її множина несталості (нестабільності) є ніде не щільною множиною.*

Означення 1.8. *Неперервна функція називається сингулярною функцією канторівського типу, якщо її множина несталості є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

Означення 1.9. *Якщо функція канторівського типу є сингулярною, але її множина несталості є множиною додатної міри Лебега, то вона називається сингулярною функцією квазіканторівського типу.*

Найпростішим прикладом монотонної (неспадної) сингулярної функції канторівського типу є класична функція Кантора [91, 30, 93, 99, 50, 134]:

$$F(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} \right), \tag{1.4.8}$$

де $\alpha_k(x)$ — k-та трійкова цифра x, $q_0 = \frac{1}{2} = q_2$, $q_1 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$, яка є єдиним розв'язком системи функціональних рівнянь:

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} f(x), \; f\left(\frac{1+x}{3}\right) = \frac{1}{2}, \; f\left(\frac{2+x}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(x).$$

Вона є функцією розподілу випадкової величини

$$\xi = \frac{\tau_1}{3} + \frac{\tau_2}{3^2} + \ldots + \frac{\tau_n}{3^n} + \ldots = \Delta^3_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \ldots},$$

розподіл якої визначають розподілами незалежних однаково розподілених випадкових величин τ_n: $P\{\tau_n = 0\} = \frac{1}{2} = P\{\tau_n = 2\}, P\{\tau_n = 1\} = 0$, $n \in N$.

Прикладом функції канторівського типу, яка не є сингулярною, є функція [50]

$$F(x) = \frac{1}{1-2a}\lambda([0;x]\bigcap C),$$

де С — множина канторівського типу додатної міри Лебега λ, яка будується наступним чином. В середині відрізка $[0,1]$ виділимо інтервал довжиною $a < \frac{1}{2}$ і вилучимо його. З двох отриманих відрізків на 1-му кроці вилучаємо інтервали довжиною $\frac{1}{2}a$. На 2-му кроці з кожного отриманого відрізка вилучаємо інтервали довжиною $\frac{1}{2}a^2$ і продовжуємо процес до нескінченності. В результаті отримана множина С є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега. Справді, сумарна довжина вилучених інтервалів

$$a + 2\cdot\frac{a}{4} + 2^2\cdot\frac{a}{4^2} + \ldots = 2a.$$

Тоді $0 < \lambda(C) = 1 - 2a < 1$.

1.5. Немонотонні сингулярні функції канторівського типу

У роботі М. В. Працьовитого і А. В. Калашнікова [62] запропонована конструкція неперервної функції зі складною локальною поведінкою, яка містить багатий (континуальний) підклас сингулярних функцій канторівського типу. Наведемо її.

Нехай $Q_s = \{q_0, q_1, \ldots, q_{s-1}\}$, $q_i > 0$, $q_0 + q_1 + \ldots + q_{s-1} = 1$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} q_j > 0$, $k = \overline{1,s}$. Відомо [50], що для будь-якого $x \in [0,1]$ існує послідовність $\alpha_n(x), \alpha_n \in A_s$ така, що

$$x = \gamma_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\gamma_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}. \qquad (1.5.9)$$

Нехай $\overline{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_{s-1})$ — заданий набір дійсних чисел, причому

$p_* = \max_i \mid p_i \mid < 1$; $p_0 + p_1 + \dots p_{s-1} = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_k = \sum_{j=1}^{k-1} p_j > 0$, $k = \overline{1, s}$, $\beta_s = 1$. Тоді функція f, означена рівністю

$$f(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)} \right) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}. \qquad (1.5.10)$$

є неперервною, причому сингулярною функцією канторівського типу тоді і тільки тоді, коли $P \equiv \prod_{i=0}^{s-1} p_i = 0$; ніде не монотонною, якщо $P \neq 0$ й існує $p_i < 0$; якщо ж $P = 0$ та існує $p_i < 0$, то функція є сингулярною функцією канторівського типу, яка не має проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості.

1.6. Строго монотонні сингулярні функції.

1.6.1. Функція Салема. У 1943 році Салем [124] побудував інший приклад строго зростаючої сингулярної функції. Вона також досліджувалась в роботах [92, 116, 131, 70, 50, 69, 108, 94]. Її аргумент подається у вигляді двійкового дробу

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + ... + \frac{\alpha_m}{2^m} + \dots \equiv \Delta^2_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots},$$

де $\alpha_i = \alpha_i(x)$ – двійкові цифри x, тобто $\alpha_i \in \{0, 1\}$, а функція обчислюється за формулою

$$F(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} \right) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots},$$

де $0 < q_0 < 1$, $q_1 = 1 - q_0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$.

Теорема 1.6.1. *[50] Функція $f(x)$:*

1. *неперервна на $[0, 1]$;*
2. *строго зростаюча;*
3. *сингулярна, якщо $q_0 \neq q_1$.*

Функція Салема задовольняє систему функціональних рівнянь

$$\begin{cases} F\left(\dfrac{x}{2}\right) = p_0 F(x), \\ F\left(\dfrac{1+x}{2}\right) = p_0 + p_1 F(x), \end{cases} \tag{1.6.11}$$

де $0 < p_0 < 1$, $p_1 = 1 - p_0$.

Графік функції Салема Γ є самоафінною множиною простору R^2, причому

$$\Gamma = f_1(\Gamma) \cup f_2(\Gamma),$$

де f_1 і f_2 — афінні перетворення

$$f_1 : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x, \\ F'(x) = p_0 F(x). \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}, \\ F'(x) = p_1 F(x) + p_0. \end{cases}$$

Самоафінна розмірність графіка функції Салема є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{p_0}{2}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{p_1}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 1. \tag{1.6.12}$$

Частковим випадком функції Салема є функція Такача, яка досліджувалась в роботі [50], і пізніше була названа функцією Салема-Такача. Її аргумент заданий рівністю

$$x = \frac{1}{2^{a_0}} + \frac{1}{2^{a_1}} + ... + \frac{1}{2^{a_k}} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-a_k},$$

де $a_k = a_k(x)$ — номер $(k+1)$-ої відмінної від нуля двійкової цифри $x \in (0; 1]$, тобто $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_k < ...$ — натуральні числа, а функція обчислюється за формулою

$$T(x) = \frac{1}{(1+\rho)^{\alpha_0}} + \frac{\rho}{(1+\rho)^{\alpha_1}} + \frac{\rho^2}{(1+\rho)^{\alpha_2}} + ... + \frac{\rho^k}{(1+\rho)^{\alpha_k}} + ... = \tag{1.6.13}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k (1+\rho)^{-a_k(x)},$$

де ρ — задане дійсне додатне число, $T(0) = 0$.

1.6.2. Інверсор цифр Q_2-зображення числа. У роботі М. В. Працьовитого і С. В. Скрипник [66] наведений приклад строго спадної сингулярної функції.

Означення 1.10. *Функцію* $y = I(x) = \Delta^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$ *називається інверсором символів Q_2-зображення дійсного числа* $x \in [0,1]$*, де* $x = \Delta^{Q_2}_{[\alpha_1][\alpha_2]\ldots[\alpha_n]\ldots}$.

Теорема 1.6.2. *[66] Функція $I(x)$:*

1. *неперервна на* $[0,1]$*;*
2. *монотонно спадна;*
3. *сингулярна;*
4. *не має похідної в жодній з Q_2-раціональних точок з* $[0,1]$.

Для довільного $x \in [0,1]$ *має місце рівність*

$$I(\Delta^{Q_2}_{[\alpha_1][\alpha_2]\ldots[\alpha_n]1(0)}) = I(\Delta^{Q_2}_{[\alpha_1][\alpha_2]\ldots[\alpha_n]0(1)}).$$

1.7. Ніде не монотонні сингулярні функції

У роботі М. В. Працьовитиго [52] наведений приклад ніде не монотонної сингулярної функції.

Нехай (a_k) — задана нескінченно мала послідовність додатних дійсних чисел, така, що $-\frac{1}{2} < a_k \leqslant 0$; $A_3 = \{0,1,2\}$, $g_{0k} = g_{2k} = \frac{1}{2} + a_k$, $g_{1k} = -2a_k$; $\gamma_{0k} = 0$, $\gamma_{1k} = g_{0k}$, $\gamma_{2k} = g_{0k} + g_{1k} = \frac{1}{2} - a_k$.

Розглядається функція

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\gamma_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right), \tag{1.7.14}$$

де $\alpha_k(x)$ — це k-та трійкова цифра числа $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$.

Якщо $a_k = const = a$, причому $-\frac{1}{2} < a \leqslant 0$, то $f(x)$ є сингулярною функцією розподілу, зокрема, при $a = 0$ — класичною функцією Кантора, а при $-\frac{1}{2} < a < 0$ — функцією Салема.

Функція $f(x)$ має властивості:

1. $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, причому $f(0)=0$, $f(1)=1$;
2. є неперервною;
3. є ніде не монотонною;
4. у трійково-раціональній точці x_0 похідна функції f не існує; якщо в трійково-ірраціональній точці $x_0 = \Delta^3_{c_1 \ldots c_n \ldots}$ існує похідна $f'(x_0)$, то вона виражається
$$f'(x_0) = \prod_{j=1}^{\infty} (3g_{c_i i});$$
5. якщо частота $\nu_1(x)$ цифри 1 у трійковому зображенні числа x є додатною, то $\prod\limits_{i=1}^{\infty} (3g_{c_i i}) = 0$.

Лема 1.7.1. *Якщо* $q_{0k} = q_{2k} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6^k}$, $q_{1k} = \dfrac{-2}{6^k}$ *і* $\nu_1(x) > 0$, *то*
$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(3q_{\alpha_i(x) i}\right) = 0.$$

Теорема 1.7.1. *Якщо* $q_{0k} = q_{2k} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6^k}$, $q_{1k} = \dfrac{-2}{6^k}$, *то функція* $f(x)$ *є ніде не монотонною сингулярною функцією.*

1.8. Недиференційовні функції

У 1903 році Такагі [132] побудував приклад неперервної ніде не диференційовної функції:
$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi\left(2^n x\right)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varphi_0\left(2^n x\right),$$
де $\varphi_0(x)$ — відстань від точки x до найближчої цілочисельної точки, тобто є періодичною функцією з періодом 1, яка на відрізку $[0,1]$ визначається рівністю
$$\varphi_0(x) = \begin{cases} x \text{ якщо } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 1 - x, \text{ якщо } \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$
При цьому $\varphi_n(x) = \varphi_0\left(2^n x\right)$ для будь-якого дійсного x.

У 1987 році N. Koˆno [111] означив функцію Такагі у вигляді

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x r_k(t)dt,$$

де $r_k(t) = (-1)^{[2kt]}$ — функція Радемахера, $[2kt]$ — ціла частина числа t.

Функції Такагі присвячено чимало робіт [104, 106, 111, 114, 115, 125, 130], в яких вивчаються її властивості, проводяться різноманітні узагальнення та модифікації.

В роботі М. В. Працьовитого та Н. А. Василенко [54] наводиться еквівалентне означення до функції Такагі в термінах двійкового кодування дійсних чисел та будується її наступне однопараметричне узагальнення

$$T^*(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi_0^*(L^n(x)) \prod_{k=1}^{n} q_{\alpha_k} \right),$$

де

$$\varphi_0^*(L^n(x)) = \begin{cases} L^n(x), \text{ якщо } \alpha_{n+1}(x) = 0, \\ \dfrac{q_0}{q_1}\left(1 - L^n(x)\right), \text{ якщо } \alpha_{n+1}(x) = 1\}, \end{cases}$$

$L^n(x)$ — n-кратний оператор зсуву символів зображення числа x такий, що $L^n(x) = L^n(\Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\ldots\alpha\alpha_{n+k}\ldots}) = \Delta^{Q_2}_{\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}\ldots\alpha\alpha_{n+k}\ldots}$.

Теорема 1.8.1. *Функція T^* є ніде не диференційовною в кожній точці відрізка* $[0, 1]$.

Теорема 1.8.2. *Для довільного числа $x \in [0, 1]$ функція T^* задовольняє систему двох функціональних рівнянь*

$$T^*(\beta_j + q_j x) = q_0(j + (-1)^j x) + q_j T^*(x), \ j \in A_2.$$

Теорема 1.8.3. *Для інтеграла Лебега від функції T^* має місце рівність*

$$\int_0^1 T^*(x)dx = \frac{1}{4(1 - q_0)}.$$

1.9. Розподіл випадкової величини, цифри Q_s^*-зображення якої є незалежними випадковими величинами

Нехай $X = \Delta^s_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}$ — випадкова величина з незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, які набувають значення $0, 1, 2, \ldots, s-1$ з ймовірностями $p_{0n}, p_{1n}, p_{2n}, \ldots, p_{s-1,n}$, $n \in N$ відповідно, причому

$$p_{0n} + p_{1n} + p_{2n} + \ldots + p_{s-1,n} = 1, n \in N.$$

Вираз її функції розподілу має вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x < 0, \\ \beta_{\alpha_1(x)1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k(x)k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)j} \right), \text{якщо } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, \text{якщо } x > 1. \end{cases} \qquad (1.9.15)$$

де $\beta_{\alpha_k(x)} = \sum\limits_{i=0}^{\alpha_k(x)-1} p_{ik}, \; k \in N.$

Розподіл випадкової величини X добре вивчений [50]. Його лебегівську структуру висвітлює наступне твердження.

Теорема 1.9.1. *Випадкова величина X має розподіл чистого лебегівського типу, причому:*

1) чисто дискретний тоді і тільки тоді, коли

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0;$$

2) чисто абсолютно неперервний тоді, коли

$$L \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{s-1} \left(1 - \frac{p_{ik}}{q_{ik}}\right)^2 < \infty;$$

3) чисто сингулярно неперервний тоді і тільки, коли $M = 0$ і $L = \infty$.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

Цей розділ має вступний характер. У ньому наведені означення відомих ключових понять:

— Q_s^*-зображення дробової частини дійсного числа;

— множини канторівського типу, пов'язаної з Q_s^*-зображенням;

— неперервних функцій зі складною локальною будовою (монотонних сингулярних, немонотонних сингулярних канторівського типу, ніде не монотонних, недиференційовних);

— лебегівської структури розподілу випадкової величини X, цифри Q_s^*-зображення якої є незалежними випадковими величинами.

Сформульовані необхідні факти, які будуть використовуватись у наступних розділах. Проведено огляд літератури з тематики дослідження.

Оскільки функції зі складною локальною будовою є базовим поняттям даного дослідження, то наведений у розділі 1 фактичний матеріал стосується в першу чергу фрактального аналізу таких функцій.

Цей розділ не містить результатів, які виносяться на захист.

РОЗДІЛ 2
СИНГУЛЯРНІ НЕМОНОТОННІ ФУНКЦІЇ, ВИЗНАЧЕНІ У ТЕРМІНАХ Q_S^*-ЗОБРАЖЕННЯ АРГУМЕНТА

У даному розділі за допомогою Q_s^*-зображення дійсних чисел вводиться у розгляд континуальний клас неперервних функцій, залежних від скінченного набору параметрів, зі складною локальною поведінкою: сингулярних монотонних, сингулярних немонотонних, ніде не монотонних тощо, доводяться ознаки належності до кожного з вказаних типів. Вивчаються їх структурні властивості, множини особливостей (максимумів — мінімумів), множини рівнів.

2.1. Означення основного об'єкту

Нехай $(a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — заданий набір дійсних чисел таких, що:

1. $a_0 + a_1 + \ldots + a_{s-1} = 1$,
2. $|a_i| < 1$,
3. $\gamma_0 \equiv 0, 0 < \gamma_i \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_{i-1} < 1$ для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$.

Приклади наборів, що задовольняють умови 1-3:

1) $s = 3$, $a_0 = \frac{2}{5}$, $a_1 = \frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{2}{5}$,
$$\gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = \frac{2}{5},\ \gamma_2 = \frac{3}{5},\ \gamma_3 = 1.$$
2) $s = 4$, $a_0 = \frac{5}{7}$, $a_1 = \frac{-4}{7}$, $a_2 = \frac{5}{7}$, $a_3 = \frac{1}{7}$,
$$\gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = \frac{5}{7},\ \gamma_2 = \frac{1}{7},\ \gamma_3 = \frac{6}{7},\ \gamma_4 = 1.$$
3) $s = 5$, $a_0 = \frac{4}{5}$, $a_1 = \frac{-3}{5}$, $a_2 = \frac{2}{5}$, $a_3 = 0$, $a_4 = \frac{2}{5}$,
$$\gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = \frac{4}{5},\ \gamma_2 = \frac{1}{5},\ \gamma_3 = \frac{3}{5},\ \gamma_4 = \frac{3}{5},\ \gamma_5 = 1.$$

Розглядається функція f, означена рівністю

$$f(x) = \gamma_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\gamma_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j(x)} \right], \tag{2.1.1}$$

де $\alpha_k(x)$ – k-та цифра Q_s^*-зображення числа x.

Доведемо, що функція визначена коректно.

Коректність визначення функції $f(x)$ рівністю (4.1.1) могла б порушитись у Q_s^*-раціональних точках. Покажемо, що це не так. З цією метою для числа

$$x \equiv \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](s-1)}, \alpha_k \neq 0$$

розглянемо різницю значень функції від двох різних зображень

$$\delta = f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}) - f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](s-1)}) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j}\right) \left(\gamma_{\alpha_k} - \gamma_{\alpha_k-1} - \gamma_{s-1} a_{\alpha_k-1} \left(1 + a_{s-1} + a_{s-1}^2 + \ldots + a_{s-1}^k \ldots\right)\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j}\right) (\gamma_{\alpha_k} - (\gamma_{\alpha_k-1} + a_{\alpha_k-1})) = 0.$$

Отже, відповідні значення співпадають і функція означена коректно.

Очевидно, що

$$f(0) = f(\Delta^{Q_s^*}_{(0)}) = 0 + \sum_{k=2}^{\infty} 0 \cdot a_0^{k-1} = 0,$$

$$f(1) = (\Delta^{Q_s^*}_{(s-1)}) = \beta_{s-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{s-1} a_{s-1}^{k-1} = \beta_{s-1} \cdot \frac{1}{1 - a_{s-1}} = 1,$$

$$f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(0)}) = \gamma_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\gamma_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} a_{c_i}\right).$$

2.2. Неперервність та множина значень функції

Лема 2.2.1. *Значення функції f належить* $[0, 1]$.

Доведення. Відомо, що $f(0) = f(\Delta^{Q_s^*}_{(0)}) = 0$, $f(1) = (\Delta^{Q_s^*}_{(s-1)}) = 1$.

Представимо значення функції $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = S_m(x) + \left(\prod_{j=1}^{m} a_{\alpha_j(x)}\right)\left(S_{\alpha_{m+1}(x)} + \sum_{k=m+2}^{\infty}\left(\gamma_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j(x)}\right)\right),$$

де

$$S_m(x) = \gamma_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=1}^{m}\left(\gamma_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_j(x)}\right)$$

— частинна сума ряду (4.1.1). Доведемо, що $0 \leqslant S_m < 1$ для довільного $m \in N$ і набору цифр $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Скористаємось методом математичної індукції. Для $m = 1$ очевидно, що $S_1 = \gamma_{\alpha_1} \in [0, 1]$ згідно з початковою умовою 3.

Розглянемо $S_2 = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2} a_{\alpha_1}$.

Якщо $\alpha_1 = 0$, то $S_2 = \gamma_0 + \gamma_{\alpha_2} a_0 = \gamma_{\alpha_2} a_0$ і

$$0 < S_2 = \gamma_{\alpha_2} a_0 < \gamma_{\alpha_2} < 1.$$

Нехай $\alpha_1 > 0$. Якщо $a_{\alpha_1} > 0$, то

$$0 \leqslant \gamma_{\alpha_1} < S_2 = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2} a_{\alpha_1} < \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} = \gamma_{\alpha_1+1} < 1.$$

Якщо $a_{\alpha_1} < 0$, то

$$0 \leqslant \gamma_{\alpha_1+1} = \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} < S_2 = \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2} a_{\alpha_1} < \gamma_{\alpha_1} < 1.$$

Отже,

$$0 \leqslant S_2 < 1.$$

Припустимо, що $0 \leqslant S_k < 1$ для довільної (α_n) і розглянемо S_{k+1}.

Оскільки

$$S_{k+1} = \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1}\left(\gamma_{\alpha_2} + \sum_{i=3}^{k+1}\left(\gamma_{\alpha_i}\prod_{j=1}^{i-1} a_{\alpha_j}\right)\right) = \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} S'_k,$$

де S'_k — частинна сума ряду (4.1.1) для послідовності $(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_i, \ldots)$, то за припущенням $0 \leqslant S'_k < 1$. Тому при $a_{\alpha_1} > 0$

$$0 \leqslant \gamma_{\alpha_1} < S_{k+1} < \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} = \gamma_{\alpha_1+1} < 1,$$

а при $a_{\alpha_1} < 0$

$$0 \leqslant \gamma_{\alpha_1+1} = \gamma_{\alpha_1} + a_{\alpha_1} < S_{k+1} < \gamma_{\alpha_1} < 1.$$

Отже, $0 \leqslant S_{k+1} < 1$ для довільної послідовності (α_n).

Таким чином, для довільного $x \in [0,1]$ і натурального m виконується $0 \leqslant S_m < 1$, а тому $0 \leqslant f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} S_m \leqslant 1$. □

Теорема 2.2.1. *Функція f є неперервною у кожній точці відрізка $[0,1]$.*

Доведення. Нехай x_0 – довільна точка відрізка [0,1]. Для доведення неперервності f у точці x_0 досить показати, що

$$\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

1. Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 — Q_s^*-ірраціональна точка. Для довільного $x \in [0,1]$, $x \neq x_0$, існує $m = m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), \quad i = \overline{1, m-1} \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0) \end{cases}$$

$$f(x) - f(x_0) = \gamma_{\alpha_m(x)} \prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x)} \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} \right) a_{\alpha_m(x)} +$$

$$+ \ldots + \gamma_{\alpha_{m+k}(x)} \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} \right) \prod_{i=1}^{k-1} a_{\alpha_{j+i}(x)} + \ldots -$$

$$- \left(\gamma_{\alpha_m(x_0)} \prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x_0)} \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} \right) a_{\alpha_m(x_0)} \ldots \right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)} \right) (\gamma_{\alpha_m(x)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x)} a_{\alpha_m(x)} + \ldots -$$

$$-(\gamma_{\alpha_m(x_0)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x_0)} a_{\alpha_m(x_0)} + \ldots)) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{m-1} a_{\alpha_j(x_0)}\right)(C_1 - C_2) \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

$C_1 = \gamma_{\alpha_m(x)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x)} a_{\alpha_m(x)} + \ldots < 1,\ \ C_2 = \gamma_{\alpha_m(x_0)} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x_0)} a_{\alpha_m(x_0)} + \ldots < 1.$

Отже,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

і функція $f(x)$ є неперервною у точці x_0 за означенням.

2. У випадку, коли x_0 — Q_s^*-раціональна точка, тобто

$$x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots[\alpha_k(x)-1](s-1)},$$

можна скористатись міркуваннями з пункту 1, але при розгляді ситуації, коли x прямує до x_0 зліва, досить скористатися другим зображенням числа x_0, тобто з періодом $(s-1)$, а коли x прямує до x_0 справа — першим, тобто з періодом (0). □

Наслідок 2.2.1. *Множиною значень функції є відрізок* $[0, 1]$.

2.3. Умови монотонності, немонотонності та ніде не монотонності

Лема 2.3.1. *Приріст* $\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right)$ *функції* f *на циліндрі* $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$*, тобто*

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) \equiv f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right),$$

обчислюється за формулою

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} a_{c_i}.$$

Доведення. Використовуючи вираз (3) значення функції $f(x)$, маємо:

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{m} a_{c_i}\right)\left(\gamma_{s-1} - \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{s-1} a_{s-1}^k\right) = \prod_{i=1}^{m} a_{c_i}.$$

□

Наслідок 2.3.1. *Функція $f(x)$ є сталою на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ тоді і тільки тоді, коли існує $a_{c_k} = 0$ при деякому $k \leqslant m$.*

Наслідок 2.3.2. *Якщо всі $a_i \geqslant 0$, $i = \overline{0, s-1}$, то функція $f(x)$ є неспадною.*

Теорема 2.3.1. *Неперервна функція $f(x)$ на [0,1] є ніде не монотонною, якщо $\prod\limits_{i=0}^{s-1} a_i \neq 0$ і серед чисел $a_0, a_1, \ldots a_{s-1}$ знайдеться $a_i < 0$.*

Доведення. Згідно наслідку 3.3.2 функція f не має проміжків сталості.

Припустимо, що при виконанні умов теореми знайдеться інтервал $(a, b) \subset [0, 1]$ монотонності функції f. Але очевидно, що існує циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, який повністю належить (a, b), а отже, є проміжком монотонності f.

Оскільки $a_0 a_1 \ldots a_{s-1} \neq 0$, то згідно з попередньою лемою

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} a_{c_i} \neq 0$$

і $\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m 0}\right) \cdot \mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}\right) = \left(\prod\limits_{i=1}^{m} a_{c_i}\right)^2 \cdot a_0 \cdot a_i < 0$, тобто на одному з циліндрів $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m 0}$ або $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ функція має додатний, а на іншому — від'ємний приріст. А це суперечить її монотонності на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, що і доводить теорему. □

2.4. Сингулярність канторівського типу

Нагадаємо, що неперервна функція називається *сингулярною функцією канторівського типу*, якщо її множина несталості (нестабільності) є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Лема 2.4.1. *[72] Міра Лебега множини*

$$C = C[Q_s^*, V] \equiv \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \in [0, 1], \alpha_n \in V \subset N\}$$

обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - W_k), \quad \text{де} \;\; W_k = \sum_{i:a_i=0} q_{ik}.$$

Лема 2.4.2. *Спектром S_f функції f є множина*

$$C = C[Q_s^*, V], \;\; \text{де}\; V = \{v : a_v \neq 0\}.$$

Доведення. 1. Спочатку покажемо, що $S_f \subset C$. Нехай $x \in S_f$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують $x_1 \in O_\varepsilon(x) \ni x_2$ такі, що

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Припустимо, що x не належить C. Тоді x належить одному із суміжних з C інтервалів, а тому існує циліндричний інтервал $\nabla^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_m(x)}$, який містить x такий, що

$$\nabla^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_m(x)} \bigcap C = \varnothing,$$

тобто повністю належить суміжному з C інтервалу, якому належить x.

Але згідно з означенням множини C і наслідком 3.3.2 з леми 3.3.1 цей інтервал є інтервалом стабільності f, а отже, для будь-яких x_1 і x_2 з цього інтервалу $f(x_1) = f(x_2)$. Тому існує ε-окіл x, який повністю належить цьому інтервалу, який є проміжком стабільності. Отримане протиріччя доводить, що $S_f \subset C$.

2. Покажемо, що $C \subset S_f$. Нехай $x \in C$, тоді циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_m(x)}$ не є проміжком стабільності функції f при кожному $m \in N$.

Розглянемо будь-який ε-окіл точки x такий, що $O_\varepsilon(x) \subset (0, 1)$. Легко вказати циліндр

$$\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_m(x)} \subset O_\varepsilon(x).$$

З вище зробленого зауваження випливає, що існують x_1 і x_2, які належать $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_m(x)}$ такі, що $f(x_1) \neq f(x_2)$. А отже $x \in S_f$. Тому $C \subset S_f$. □

Теорема 2.4.1. *Для того, щоб функція f була сингулярною функцією канторівського типу, необхідно і достатньо, щоб множина*

$C[Q_s^*, V] = \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \in [0,1], \alpha_n \in V \subset N\}$, $V = \{v : a_v \neq 0\}$, мала нульову міру Лебега, тобто $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k = \infty$, де $W_k = \sum\limits_{i:a_i=0} q_{ik}$.

Доведення. Дане твердження випливає з означення сингулярної функції канторівського типу і двох попередніх лем 2.4.1, 2.4.2.

Справді, якщо f – сингулярна функція канторівського типу, то $\lambda(S_f) = 0$, тоді згідно з лемою 2.4.2 $\lambda(C) = 0$. Якщо $\lambda(C) = 0$, то $\lambda(S_f) = 0$. Тоді функція f є сингулярною функцією канторівського типу. □

2.5. Екстремуми функції

Теорема 2.5.1. *1. Якщо $a_i a_{i+1} < 0$ для деякого i, то кожна точка виду $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i(0)}$ є точкою екстремуму функції f, причому:*

— точкою максимуму, якщо $D_m a_i > 0$,

— точкою мінімуму, якщо $D_m a_i < 0$,

де $D_m = \prod\limits_{j=1}^{m} a_{c_j} \neq 0$ — приріст функції на циліндрі.

2. Якщо $a_i a_{i+1} \geqslant 0$, то жодна з точок виду $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i(0)}$ не є точкою екстремуму функції f.

Доведення. 1. Нехай $D_m = \prod\limits_{j=1}^{m} a_{c_j} \neq 0$ — приріст функції на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$. Розглянемо можливі випадки.

1.1. Нехай $D_m > 0$.

Якщо $a_{i+1} > 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має додатний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$, який лежить лівіше — від'ємний. Тому спільний кінець цих циліндрів — точка $x_i \equiv \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i(0)}$ є точкою максимуму.

Якщо $a_{i+1} < 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має від'ємний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — додатний. Отже, точка x_i є точкою мінімуму.

1.2. Нехай $D_m < 0$.

Якщо $a_{i+1} > 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має від'ємний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — додатний. Отже, точка x_i є точкою мінімуму.

Якщо $a_{i+1} < 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має додатний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — від'ємний. Отже, точка x_i є точкою максимуму.

2. Якщо $a_i a_{i+1} = 0$, то згідно наслідку 3.3.2 принаймні на одному з циліндрів $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ або $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m [i+1]}$ функція є постійною, а отже, точка x_i не є точкою екстремуму.

Якщо $a_i a_{i+1} > 0$, то на обох циліндрах функція f має приріст однакового знаку, а отже, точка x_i не є точкою екстремуму, оскільки для одного циліндра вона є точкою максимуму, а для другого — точкою мінімуму. $\square$

Теорема 2.5.2. *Функція f на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ набуває найбільшого і найменшого значення на його кінцях. Причому, якщо*

$$D_m \equiv \prod_{i=1}^{m} a_{c_i} \neq 0, \quad y_m = \gamma_{c_1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\gamma_{c_k}\prod_{i=1}^{k-1} a_{c_i}\right),$$

то при $D_m > 0$

$$\max f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) = y_m + D_m,$$

$$\min f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right) = y_m,$$

а при $D_m < 0$

$$\max f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right) = y_m,$$

$$\min f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) = y_m + D_m.$$

Доведення. Нагадаємо, що циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(0)}$ і $b = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(s-1)}$.

Значення функції f в точці $x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}$ виражається

$$f(x) = y_m + D_m \cdot M,$$

де $y_m = \gamma_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{m}\left(\gamma_{c_k}\prod\limits_{i=1}^{k-1} a_{c_i}\right)$, $D_m = \prod\limits_{i=1}^{m} a_{c_i}$,

$$M = \gamma_{\alpha_{m+1}(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\gamma_{\alpha_{m+k}(x)}\prod_{j=1}^{k-1} a_{\alpha_{m+j}(x)}\right) = f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+n}\ldots}).$$

Якщо $\alpha_{m+j} = 0$ для всіх $j \in N$, то $M = 0$, а якщо $\alpha_{m+j} = s - 1$ для всіх $j \in N$, то $M = 1$.

Тоді, якщо $D_m > 0$, то

$$\max_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m(s-1)}) = y_m + D_m,$$

$$\min_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m(0)}) = y_m.$$

Якщо ж $D_m < 0$, то

$$\max_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m(0)}) = y_m,$$

$$\min_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1 \ldots c_m(s-1)}) = y_m + D_m.$$

□

2.6. Рівні функції

Означення 2.1. *Множиною рівня y_0 функції f називається множина*

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

Якщо $a_n > 0$ для всіх $n \in N$, то f є неперервною строго зростаючою функцією. Тому кожен її рівень складається з однієї точки.

Якщо $a_n \geqslant 0$ для всіх $n \in N$, але існує $a_p = 0$, то рівень

$$y = \gamma_{c_1} + \sum_{k=2}^{m} \left(\gamma_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} a_{c_i} \right) + \gamma_p \prod_{i=1}^{m} a_{c_i}$$

містить циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$. У цьому випадку множина рівня складається або з точки, або з відрізка (за рахунок неперервності функції).

Теорема 2.6.1. *Якщо серед членів послідовності (a_n) є від'ємні і Q_s^*-зображення числа $x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ має властивість*

$$a_{\alpha_i(x)} a_{\alpha_{i+1}(x)} < 0 \tag{2.6.2}$$

для нескінченної множини значень $i \in N$, то рівень $f^{-1}(y_0)$, де $y_0 = f(x)$, є зліченною множиною.

Доведення. З теореми 3.6.1 випливає, що прирости функції f на циліндрах $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)}$ рангу i та $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}$ рангу $i+1$ мають протилежні знаки. При цьому множиною значень функції f на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)}$ за теоремою 3.6.2 є відрізок, кінці якого є значеннями функції від кінців циліндра. Тому, враховуючи неперервність функції, пряма $y = y_0$ перетинає графік f принаймні в двох точках, які належать циліндру $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)}$ і не належать циліндру $\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_i(x)\alpha_{i+1}(x)}$.

Картина повториться для наступного значення i, для якого виконується умова (2.6.2). І так буде нескінченну кількість разів. Отже, множина рівня $f^{-1}(y_0)$ є нескінченною множиною. Континуальною вона бути не може, оскільки множина локальних максимумів і мінімумів зліченна. Отже, $f^{-1}(y_0)$ — зліченна множина. $\square$

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

У даному розділі ми, використовуючи Q_s^*-зображення чисел дійсних чисел $x \in [0,1]$, яке є кодуванням числа засобами скінченного алфавіту $A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ і узагальненням s-кового та Q_s-зображення дійсних чисел, побудували новий клас неперервних функцій з неоднорідною локальною поведінкою, узагальнили і доповнили результати робіт [61], [62]. Переважна більшість функцій означеного класу є ніде не монотонними або сингулярними канторівського типу.

Основними результатами цього розділу є доведення наступних фактів, що стосуються:

— неперевності функції та умов монотонності функції;

— сингулярності канторівського типу;

— наявності екстремумів функції;

— масивності множини рівнів функції.

Результати цього розділу опубліковані в роботі [1ᵃ] і доповідались на конференціях [7ᵃ, 8ᵃ, 9ᵃ].

РОЗДІЛ 3
ОДИН КЛАС НЕПЕРЕРВНИХ НІДЕ НЕ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ З АВТОМОДЕЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

У даному розділі за допомогою Q_s^*-зображення дійсних чисел, що є узагальненням класичного s-кового зображення, конструюється нескінченно-параметрична сім'я неперервних функцій з неоднорідними локальними властивостями, які у залежності від набору параметрів є строго монотонними, але в переважній більшості сингулярними, немонотонними сингулярними функціями канторівського типу та ніде не монотонними. Вивчаються їх структурні, локальні та глобальні властивості.

3.1. Означення основного об'єкта

Нехай задана матриця $G_s^* = \|g_{ij}\|$, $i \in A_s$, $j \in N$ така, що має властивості:

1. $\mid g_{ij} \mid < 1$;
2. $g_{0j} + g_{1j} + \ldots + g_{[s-1]j} = 1$;
3. $\gamma_{0j} = 0, 0 < \gamma_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} g_{kj} < 1$, $i \in \overline{1, s-1}$;
4. $\forall (i_j j), i_j \in A_s$ має місце $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{k-1} \{|g_{i_j j}|\} < \infty$.

Умови 1-4 називатимемо початковими.

Зауваження. З умови 4 випливає рівність

$$\prod_{j=1}^{\infty} \max_i \{g_{ij}\} = 0. \qquad (3.1.1)$$

Розглядається функція $f(x)$, означена рівністю

$$f(x)=\gamma_{\alpha_1(x)1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\gamma_{\alpha_k(x)k}\prod_{j=1}^{k-1}g_{\alpha_j(x)j}\right). \qquad (3.1.2)$$

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка $[0,1]$:

$$f(0)=f(\Delta^{Q_s^*}_{(0)})=0+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\gamma_{0k}\prod_{j=1}^{k-1}g_{0j}\right)=0,$$

$$f(1)=(\Delta^{Q_s^*}_{(s-1)})=\gamma_{[s-1]1}+\gamma_{[s-1]2}g_{[s-1]1}+\gamma_{[s-1]3}g_{[s-1]1}g_{[s-1]2}+\ldots=$$

$$=1-g_{[s-1]1}+(1-g_{[s-1]2})g_{[s-1]1}+(1-g_{[s-1]3})g_{[s-1]1}g_{[s-1]2}+\ldots=$$

$$=1-\prod_{j=1}^{\infty}g_{[s-1]j}=1,$$

оскільки $\prod\limits_{j=1}^{\infty}g_{[s-1]j}=0$, що випливає з (3.1.1).

Доведемо *коректність* означення функції. Для цього покажемо, що:

1) ряд (4.1.1) є збіжним для довільної послідовності (α_k), $\alpha_k\in A_s$;

2) $f(x)$ визначена у Q_s^*-раціональних точках, тобто для різних зображень одного і того ж Q_s^*-раціонального значенння аргумента:

$$x\equiv\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)}=\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s-1)}\equiv x',$$

значення $f(x)$ і $f(x')$ співпадають.

1. Дослідимо ряд (4.1.1) на абсолютну збіжність. Враховуючи початкові умови 3 і 4, отримуємо

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\gamma_{\alpha_k k}\prod_{j=1}^{k-1}q_{\alpha_j j}\right|=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\gamma_{\alpha_k k}\prod_{j=1}^{k-1}|q_{\alpha_j j}|\right)<\sum_{k=2}^{\infty}\prod_{j=1}^{k-1}|q_{\alpha_j j}|<\infty,$$

звідки слідує абсолютна збіжність ряду (4.1.1).

2. Розглянемо різницю значень функції від двох різних зображень:

$$\delta\equiv f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)})-f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](s-1)})=$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j}\right) \left(\gamma_{\alpha_k k} - \gamma_{[\alpha_k-1]k} - g_{[\alpha_k-1]k}\left(\gamma_{[s-1][k+1]} + \gamma_{[s-1][k+2]} g_{[s-1][k+1]} + \ldots\right)\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j}\right) \left(\gamma_{\alpha_k k} - \gamma_{[\alpha_k-1]k} - g_{[\alpha_k-1]k}\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j}\right) \left(\gamma_{\alpha_k k} - \left(\gamma_{[\alpha_k-1]k} + g_{[\alpha_k-1]k}\right)\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j}\right) \left(\gamma_{\alpha_k k} - \gamma_{\alpha_k k}\right) = 0.$$

Отже, відповідні значення співпадають і функція означена коректно у Q_s^*-раціональних точках, а отже, і на $[0,1]$.

Лема 3.1.1. *Значення функції f належить* $[0,1]$.

Доведення. Відомо, що $f(0) = f(\Delta^{Q_s^*}_{(0)}) = 0$, $f(1) = (\Delta^{Q_s^*}_{(s-1)}) = 1$.

Представимо значення функції $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = S_m(x) + \left(\prod_{j=1}^{m} g_{\alpha_j(x) j}\right) \left(\gamma_{\alpha_{m+1}(x)[m+1]} + \sum_{k=m+2}^{\infty} \left(\gamma_{\alpha_k(x) k} \prod_{j=m+1}^{k-1} g_{\alpha_j(x) j}\right)\right),$$

де

$$S_m(x) = \gamma_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=1}^{m} \left(\gamma_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right)$$

— частинна сума ряду (4.1.1). Доведемо, що $0 \leqslant S_m < 1$ для довільного $m \in N$ і набору цифр $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$. Скористаємось методом математичної індукції.

Для $m = 1$ очевидно, що $S_1 = \gamma_{\alpha_1 1} \in [0,1)$ згідно з означенням функції, причому $S_1 = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = 0$.

Розглянемо $S_2 = \gamma_{\alpha_1 1} + \gamma_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1}$. Якщо $\alpha_1 = 0$, то $S_2 = \gamma_{01} + \gamma_{\alpha_2 2} g_{01} = \gamma_{\alpha_2 2} g_{01}$ і

$$0 < S_2 = \gamma_{\alpha_2 2} g_{01} < \gamma_{\alpha_2 2} < 1.$$

Нехай $\alpha_1 > 0$. Якщо $g_{\alpha_1 1} > 0$, то

$$0 \leqslant \gamma_{\alpha_1 1} < S_2 = \gamma_{\alpha_1 1} + \gamma_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1} < \gamma_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} = \gamma_{[\alpha_1+1]1} < 1.$$

Якщо $g_{\alpha_1 1} < 0$, то

$$0 \leqslant \gamma_{[\alpha_1+1]1} = \gamma_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} < S_2 = \gamma_{\alpha_1 1} + \gamma_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1} < \gamma_{\alpha_1 1} < 1.$$

Отже,

$$0 \leqslant S_2 < 1.$$

Припустимо, що $0 \leqslant S_k < 1$ для довільного набору $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ і розглянемо S_{k+1}.

Оскільки

$$S_{k+1} = \gamma_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} \left(S'_{k-1} + \gamma_{\alpha_{k+1}[k+1]} \prod_{j=2}^{k} g_{\alpha_j j} \right) = \gamma_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} S''_k,$$

де S'_k, S''_k — частинні суми ряду (4.1.1). Оскільки за припущенням

$$0 \leqslant S''_k < 1,$$

то при $g_{\alpha_1} > 0$ маємо

$$0 \leqslant \gamma_{\alpha_1 1} < S_{k+1} < \gamma_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} = \gamma_{[\alpha_1+1]1} < 1,$$

а при $g_{\alpha_1} < 0$ отримуємо

$$0 \leqslant \gamma_{[\alpha_1+1]1} = \gamma_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} < S_{k+1} < \gamma_{\alpha_1 1} < 1.$$

Отже, $0 \leqslant S_{k+1} < 1$ для довільної послідовності (α_n).

Таким чином, для довільного $x \in [0, 1]$ і натурального m виконується $0 \leqslant S_m < 1$, а тому $0 \leqslant f(x) = \lim\limits_{m\to\infty} S_m \leqslant 1$.

□

3.2. Неперервність функції

Теорема 3.2.1. *Функція f є неперервною в кожній точці відрізка* $[0,1]$ *і набуває всіх значень з цього відрізка.*

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка відрізка [0,1]. Для доведення неперервності f у точці x_0 досить показати, що

$$\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

1. Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 — Q_s^*-ірраціональна точка. Для довільного $x \in [0,1]$, $x \neq x_0$, існує $m = m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), \quad i = \overline{1, m-1}, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0). \end{cases}$$

Тоді

$$f(x) - f(x_0) = \left(\prod_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x_0)j}\right)\left(\gamma_{\alpha_m(x)m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \gamma_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=m}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right) -$$

$$- \left(\prod_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x_0)j}\right)\left(\gamma_{\alpha_m(x_0)m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \gamma_{\alpha_k(x_0)k} \prod_{j=m}^{k-1} g_{\alpha_j(x_0)j}\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{m-1} g_{\alpha_j(x_0)j}\right)(C_1 - C_2) \to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

де $0 \leqslant C_1 = \gamma_{\alpha_m(x)m} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x)[m+1]} g_{\alpha_m(x)m} + \ldots < 1$,

$0 \leqslant C_2 = \gamma_{\alpha_m(x_0)m} + \gamma_{\alpha_{m+1}(x_0)[m+1]} g_{\alpha_m(x_0)m} + \ldots < 1$ за лемою 3.1.1.

Отже,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

і функція $f(x)$ є неперервною у точці x_0 за означенням.

2. У випадку, коли x_0 — Q_s^*-раціональна точка, тобто

$$x_0 = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)(0)} = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots[\alpha_k(x)-1](s-1)},$$

можна скористатись міркуваннями з пункту 1, але при розгляді ситуації, коли x прямує до x_0 зліва, досить скористатися зображенням числа x_0 з періодом $(s-1)$, а коли x прямує до x_0 справа — з періодом (0). $\square$

3.3. Умови монотонності та ніде не монотонності

Лема 3.3.1. *Приріст* $\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right)$ *функції* f *на циліндрі* $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$*, тобто*

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) \equiv f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right),$$

обчислюється за формулою

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}. \tag{3.3.3}$$

Доведення. Обчислимо значення функції на кінцях циліндра:

$$f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(0)}) = \gamma_{c_1 1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\gamma_{c_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{c_i i}\right), \tag{3.3.4}$$

$$f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(s-1)}) = \gamma_{c_1 1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\gamma_{c_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{c_i i}\right) +$$

$$+\prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}\left(\gamma_{[s-1][m+1]} + \gamma_{[s-1][m+2]} g_{[s-1][m+1]} + \ldots\right) =$$

$$= \gamma_{c_1 1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\gamma_{c_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{c_i i}\right) + \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}. \tag{3.3.5}$$

Використовуючи формули (3.3.4) і (3.3.5), обчислимо приріст функції:

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) - f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right) = \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i}.$$

□

Наслідок 3.3.1. *Якщо всі елементи матриці* $\parallel g_{ij} \parallel$ *є невід'ємними, то функція* $f(x)$ *є неспадною.*

Наслідок 3.3.2. *Функція* $f(x)$ *є сталою на циліндрі* $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *тоді і тільки тоді, коли існує* $g_{c_k k} = 0$ *при деякому* $k \leqslant m$.

Теорема 3.3.1. *Функція $f(x)$ на $[0,1]$:*

1) має скінченну кількість інтервалів сталості, якщо матриця $\|g_{ij}\|$ містить скінченну кількість нулів;

2) має нескінченну кількість інтервалів сталості, якщо матриця $\|g_{ij}\|$ містить нескінченну кількість нулів;

3) є кусково-монотонною, якщо у матриці $\|g_{ij}\|$ немає нулів і у скінченній кількості стовпців існують від'ємні числа;

4) є ніде не монотонною, якщо у матриці $\|g_{ij}\|$ немає нулів і у нескінченній кількості стовпців існують від'ємні числа.

Доведення. 1) Нехай $\prod\limits_{i=0}^{s-1} g_{im} = 0$ і $\prod\limits_{i=0}^{s-1} g_{ij} \neq 0$ для всіх $j > m$.

Згідно з наслідком 3.3.2 функція $f(x)$ на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є сталою тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_ii} = 0$. Зрозуміло, що таких циліндрів існує не більше, ніж $(s-1)^m$.

Якщо $\prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_ii} \neq 0$, то функція на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ не є сталою і $\prod\limits_{i=1}^{m+k} g_{c_ii} \neq 0$ для будь-якого $k \in N$. Тому функція $f(x)$ не має проміжків сталості, які належать циліндру $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$.

2) Якщо матриця $\|g_{ij}\|$ містить нескінченну кількість нулів, то у неї існує рядок, який містить нескінченну кількість нулів. Нехай (g_{c,j_k}) — послідовність нульових елементів c-ого рядка. З умови 3 означення функції випливає, що $g_{0,j_k} \cdot g_{s-1,j_k} \neq 0$. Тоді циліндри $\Delta^{Q_s^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{j_k-1}c}$, $k = 1, 2, \ldots$ не мають спільних кінців і є проміжками сталості функції f.

3) У випадку, коли серед елементів матриці $\|g_{ij}\|$ немає нулів, то згідно з наслідком 3.3.2 функція f не має проміжків сталості. Нехай існує $q_{cm} < 0$, але $g_{ij} > 0$ для всіх $i \in A_s$ і $j > m$.

Покажемо, що коли для циліндра рангу m знайдеться циліндр рангу $(m+1)$ такий, що прирости $\mu_f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m})$ і $\mu_f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_mp})$ набувають різних знаків, то функція не є монотонною, якщо ж однакових знаків — монотонною.

Згідно з попередньою лемою приріст функції має вираз

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i} \neq 0.$$

Тоді

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m c_{m+1}\ldots c_{m+k}}\right) > 0, \forall k \in N,$$

коли $\prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_i i} > 0$, що є свідченням зростання функції на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ і

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m c_{m+1}\ldots c_{m+k}}\right) < 0, \forall k \in N,$$

коли $\prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_i i} < 0$, що є свідченням спадання функції на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$.

Враховуючи те, що існує s^m циліндрів m-го рангу, робимо висновок, що у цьому випадку функція є кусково-монотонною.

4) Доведемо, що функція є ніде не монотонною. Припустимо, що при виконанні умов 4 твердження теореми знайдеться інтервал $(a, b) \subset [0, 1]$ монотонності функції f. Але очевидно, що існує циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, який повністю належить (a, b), а отже, є проміжком монотонності f.

Оскільки $\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) \neq 0$, то циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ не є проміжком сталості функції.

Нехай $m + k$ — найменший номер стовпця, який містить від'ємні елементи, причому $g_{i,m+k} < 0$. Тоді

$$\mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m\underbrace{0\ldots 0}_{k-1}0}\right) \cdot \mu_f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m\underbrace{0\ldots 0}_{k-1}i}\right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{m} g_{c_j j}\right)^2 \cdot \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{0j}\right)^2 g_{0,m+k} \cdot g_{i,m+k}.$$

Оскільки $g_{0,m+k} > 0$, то $g_{0,m+k} \cdot g_{i,m+k} < 0$, і на одному з циліндрів $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m\underbrace{0\ldots 0}_{k-1}0}$ або $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m\underbrace{0\ldots 0}_{k-1}i}$ функція має додатний, а на іншому — від'ємний приріст. А це суперечить її монотонності на всьому циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, що і доводить ніде не монотонність функції f. $\square$

3.4. Сингулярність канторівського типу

Лема 3.4.1. *Неперервна функція $f(x)$ буде функцією канторівського типу тоді і тільки тоді, коли серед елементів матриці $\|g_{ij}\|$ існує нескінченна кількість нулів.*

Доведення. Спектром функції f є замикання множини

$$\{x : g_{\alpha_j(x)j} \neq 0 \quad \forall j \in N\},$$

тобто множина канторівського типу

$$C[Q_s^*, V_n] \equiv \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots}, \alpha_n \in V_n \subset A_s \subset N\}, \quad \text{де} \quad V_n = \{v : g_{vn} \neq 0\}.$$

Добре відомо, що множина $C[Q_s^*, V_n]$ є ніде не щільною тоді і тільки тоді, коли нерівність $V_n \neq A_s$ виконується нескінченну кількість разів. □

Теорема 3.4.1. *Для того, щоб функція f була сингулярною функцією канторівського типу, необхідно і достатньо, щоб множина $C[Q_s^*, V_n] = \{x : x = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots} \in [0,1], \alpha_n \in V \subset N\}$, де $V_n = \{v : g_{vn} \neq 0\}$, мала нульову міру Лебега, тобто $\sum\limits_{k=1}^{\infty} W_k = \infty$, де $W_k = \sum\limits_{i: g_{ij}=0} q_{ik}$, $k \in Z$.*

Доведення. Дане твердження є наслідком леми 3.4.1 і відомого факту [72], що міра Лебега множини $C[Q_s^*, V_n]$ обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - W_k), \quad \text{де} \quad W_k = \sum_{i: g_{ij}=0} q_{ik}.$$

Отже, якщо f — сингулярна функція канторівського типу, то $\lambda(S_f) = 0$ і тому $\lambda(C) = 0$. Якщо ж $\lambda(C) = 0$, то $\lambda(S_f) = 0$ і функція f є сингулярною функцією канторівського типу. □

3.5. Варіаційні властивості

Теорема 3.5.1. *Сингулярні функції канторівського типу, які не мають проміжків монотонності за виключенням проміжків сталості, є функціями як обмеженої, так і необмеженої варіації.*

Доведення. Нагадаємо означення варіації функції.

Означення 3.1. *Число*

$$V_a^b(f)=\sup_T V_a^b(T;f),$$

де $V_a^b(T;f)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|$, $n\in N$ *і верхня грань береться за всеможливим* T*-розбиттям відрізка* $[a;b]$, *називається* варіацією *функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$.

Оскільки

$$V_1=\sum_{i=0}^{s-1}\left|f\left(\Delta^{Q_s^*}_{i+1,(0)}\right)-f\left(\Delta^{Q_s^*}_{i(0)}\right)\right|=\sum_{i=0}^{s-1}|g_{i1}|,$$

$$V_2=\sum_{j=0}^{s-1}|g_{j1}|\cdot\sum_{i=1}^{s-1}\left|f\left(\Delta^{Q_s^*}_{j+1,i+1,(0)}\right)-f\left(\Delta^{Q_s^*}_{j,i(0)}\right)\right|=$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{s-1}|g_{j1}|\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{s-1}|g_{i2}|\right),$$

....

$$V_n=\left(\sum_{j=0}^{s-1}|g_{j1}|\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{s-1}|g_{k2}|\right)\dots\left(\sum_{i=0}^{s-1}|g_{in}|\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{s-1}|g_{in}|\right),$$

то

$$V_0^1(f)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}V_n.$$

Більше того, легко довести, що

$$V_0^1(f)=\lim_{n\to\infty}V_n.$$

Нехай $L=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(1-\sum\limits_{i=0}^{s-1}|g_{in}|\right)\right)$.

1. Для того, щоб $L=\infty$, необхідно і достатньо, щоб $\sum\limits_{i=0}^{s-1}\left(1-\sum\limits_{i=0}^{s-1}|g_{in}|\right)=\infty$. Тому при $u_n=\sum\limits_{i=0}^{s-1}|g_{in}|\nrightarrow 1$ $(n\to\infty)$

$$V_0^1(f)=\infty.$$

2. Функція $f(x)$ є функцією обмежеженої варіації тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\sum_{i=0}^{s-1}|g_{in}|\right)<\infty.$$

□

Наслідок 3.5.1. *Якщо всі стовпці матриці G_s^* однакові, причому серед її елементів є від'ємні, то кожна функція цього класу є функцією необмеженої варіації.*

3.6. Екстремуми функції

Теорема 3.6.1. *1. Якщо $g_{i,m+1}g_{i+1,m+1} < 0$ для деякого i, то точка виду $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i(0)}$ є точкою екстремуму функції f, причому:*

— точкою максимуму, якщо $D_m g_{i,m+1} > 0$,

— точкою мінімуму, якщо $D_m g_{i,m+1} < 0$,

де $D_m = \prod\limits_{k=1}^{m} g_{c_k k} \neq 0$ - приріст функції на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$.

2. Якщо $g_{i,m+1}g_{i+1,m+1} \geqslant 0$, то жодна з точок виду $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i(0)}$ не є точкою екстремуму функції f.

Доведення. 1. Нехай $D_m = \prod\limits_{k=1}^{m} g_{c_k k} \neq 0$. Розглянемо можливі випадки.

1.1. Нехай $D_m > 0$.

Якщо $g_{i+1,m+1} > 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має додатний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$, який лежить лівіше — від'ємний. Тому спільний кінець цих циліндрів — точка $x_i \equiv \Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i(0)}$ є точкою максимуму.

Якщо $g_{i+1,m+1} < 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має від'ємний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — додатний. Отже, точка x_i є точкою мінімуму.

1.2. Нехай $D_m < 0$.

Якщо $g_{i+1,m+1} > 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має від'ємний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — додатний. Отже, точка x_i є точкою мінімуму.

Якщо $g_{i+1,m+1} < 0$, то на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція має додатний приріст, а на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ — від'ємний. Отже, точка x_i є точкою максимуму.

2. Якщо $g_{i,m+1}g_{i+1,m+1}=0$, то згідно наслідку 3.3.2 принаймні на одному з циліндрів $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}$ або $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$ функція є сталою, а отже, точка x_i не є точкою екстремуму.

Якщо $g_{i,m+1}g_{i+1,m+1}>0$, то на обох циліндрах функція f має приріст однакового знаку, а отже, точка x_i не є точкою екстремуму, оскільки для одного циліндра вона є точкою максимуму, а для другого — точкою мінімуму. □

Теорема 3.6.2. *Функція f на циліндрі $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ набуває найбільшого і найменшого значення на його кінцях. Причому, якщо*

$$D_m \equiv \prod_{i=1}^{m} g_{c_i i} \neq 0, \quad y_m = \gamma_{c_1 1} + \sum_{k=2}^{m}\left(\gamma_{c_k k}\prod_{i=1}^{k-1} g_{c_i i}\right),$$

то при $D_m>0$

$$\max f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) = y_m + D_m,$$
$$\min f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right) = y_m,$$

а при $D_m<0$

$$\max f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}\right) = y_m,$$
$$\min f(x) = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m(s-1)}\right) = y_m + D_m.$$

Доведення. Нагадаємо, що циліндр $\Delta^{Q_s^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ — це відрізо з кінцями $a = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(0)}$ і $b = \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(s-1)}$.

Запишемо значення функції f в точці $x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}$ у вигляді

$$f(x) = y_m + D_m \cdot M,$$

де $y_m = \gamma_{c_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{m}\left(\gamma_{c_k k}\prod\limits_{i=1}^{k-1} g_{c_i i}\right)$, $D_m = \prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_i i}$,

$$M = \gamma_{\alpha_{m+1}(x)[m+1]} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\gamma_{\alpha_{m+k}(x)[m+k]}\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_{m+j}(x)[m+j]}\right) = f(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+n}\ldots}).$$

Якщо $\alpha_{m+j} = 0$ для всіх $j \in N$, то $M = 0$, а якщо $\alpha_{m+j} = s-1$ для всіх $j \in N$, то $M = 1$.

Якщо $D_m > 0$, то

$$\max_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(s-1)}) = y_m + D_m,$$

$$\min_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(0)}) = y_m.$$

Якщо $D_m < 0$, то

$$\max_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(0)}) = y_m,$$

$$\min_{x \in \Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m}} f(x) = f(\Delta^{Q_s^*}_{c_1\ldots c_m(s-1)}) = y_m + D_m.$$

□

3.7. Самоафінні властивості функції

Нехай $Q_s^* = \|q_{ij}\|$ — нескінченна періодична матриця, $i \in A_s$, $j \in N$ така, що має властивості:

1. $q_{i,2k-1} = q_{i1} > 0$, $q_{i,2k} = q_{i2} > 0$ $i = \overline{0, s-1}$, $k \in N$;
2. $q_{0j} + q_{1j} + \ldots + q_{[s-1]j} = 1$, $j \in \{1, 2\}$;
3. $\beta_{i,2k-1} = \beta_{i,1}$, $\beta_{i,2k} = \beta_{i,2}$, $i \in A_s$, $k \in N$;

$G_s^* = \|g_{ij}\|$ — нескінченна періодична матриця, $i \in A_s$, $j \in N$ така, що має властивості:

1. $|g_{i,2k-1}| = |g_{i1}| < 1$, $|g_{i,2k}| = |g_{i2}| < 1$ $i = \overline{0, s-1}$, $k \in N$;
2. $g_{0j} + g_{1j} + \ldots + g_{[s-1]j} = 1$, $j \in \{1, 2\}$;
3. $\gamma_{i,2k-1} = \gamma_{i,1}$, $\gamma_{i,2k} = \gamma_{i,2}$, $i \in A_s$, $k \in N$.

Теорема 3.7.1. *Графік функції $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in [0,1]\}$ є самоафінною множиною, причому*

$$\Gamma = \bigcup_{(i,j) \in A_s \times A_s} \varphi_{ij}(\Gamma), \text{ де } \varphi_{kj}(\Gamma) \neq \varphi_{pj}(\Gamma) \text{ при } k \neq p, \tag{3.7.6}$$

де

$$\varphi_{ij} : \begin{cases} x' = \beta_{i1} + q_{i1}\beta_{j2} + q_{01}q_{02}x, \\ y' = \gamma_{i1} + g_{i1}\gamma_{j2} + g_{i1}g_{j2}y. \end{cases}$$

Доведення. Для доведення рівності (3.7.6) покажемо, що

$$\varphi_{00}(\Gamma) \cup \ldots \cup \varphi_{0[s-1]}(\Gamma) \cup \ldots \cup \varphi_{[s-1]0}(\Gamma) \cup \ldots \cup \varphi_{[s-1][s-1]}(\Gamma) \equiv G \subset \Gamma.$$

Нехай $M \in G$, а отже існують $i \in A_s$ та $j \in A_s$ такі, що $M \in \varphi_{ij}(\Gamma)$, тобто $x_M = x' = \beta_{i1} + q_{i1}\beta_{j2} + q_{01}q_{02}x$, $y_M = y' = \gamma_{i1} + g_{i1}\gamma_{j2} + g_{i1}g_{j2}y$. Тоді $f(x') = f\left(\Delta^{Q_s^*}_{ij\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}\right) = \gamma_{i1} + g_{i1}\gamma_{j2} + g_{i1}g_{j2}f\left(\Delta^{Q_s^*}_{\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}\right) = y'$, тобто $M \in \Gamma$.

Тепер покажемо, що $\Gamma \subset G$. Нехай $M(x; f(x)) \in \Gamma$. Розглянемо число $x_2 = \Delta^{Q_s^*}_{\alpha_3(x)\alpha_4(x)\ldots}$. Оскільки $\alpha_1(x) \in A_s$, $\alpha_2(x) \in A_s$ то $f(x) = g_{i1}g_{j2}f(x_2) + g_{i1}\gamma_{j2} + \gamma_{i1}$ і з того, що $\overline{M}(x_2; f(x_2)) \in \Gamma$ випливає, що $\varphi_{ij}(\overline{M}) = M(x; f(x)) \in G$. Рівність (3.7.6) доведено. □

3.8. Інтегральні властивості функції

Теорема 3.8.1. *Для інтеграла Рімана від функції f має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{q_{01}q_{02}\left(s\sum\limits_{i=0}^{s-1}\gamma_{i1} + \sum\limits_{i=0}^{s-1}\gamma_{i2}\right)}{1 - q_{01}q_{02}}. \qquad (3.8.7)$$

Доведення. З адитивної властивості інтеграла Рімана та самоафінних властивостей графіка функції f маємо

$$I = \int\limits_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{s-1} \int\limits_{\beta_{01}+q_{01}\beta_{i2}}^{\beta_{01}+q_{01}\beta_{[i+1]2}} f(x)dx +$$

$$+\sum_{i=0}^{s-1} \int\limits_{\beta_{11}+q_{11}\beta_{i2}}^{\beta_{11}+q_{11}\beta_{[i+1]2}} f(x)dx + \ldots + \sum_{i=0}^{s-1} \int\limits_{\beta_{[s-1]1}+q_{[s-1]1}\beta_{i2}}^{\beta_{[s-1]1}+q_{[s-1]1}\beta_{[i+1]2}} f(x)dx.$$

Обчислимо значення інтегралів на кожному з циліндрів 2-го рангу.

$$I_{0k} = \sum_{i=0}^{s-1} \int\limits_{\beta_{01}+q_{01}\beta_{i2}}^{\beta_{01}+q_{01}\beta_{[i+1]2}} f(x)dx =$$

$$=\sum_{i=0}^{s-1}\int\limits_{\beta_{01}+q_{01}\beta_{i2}}^{\beta_{01}+q_{01}\beta_{[i+1]2}}\left[\gamma_{01}+\gamma_{k2}g_{01}+g_{01}g_{k2}f\left(\beta_{01}+q_{01}\beta_{k2}+q_{01}q_{02}x\right)\right]dx=$$

$$=\sum_{i=0}^{s-1}\int\limits_{\beta_{01}+q_{01}\beta_{i2}}^{\beta_{01}+q_{01}\beta_{[i+1]2}}\left[\gamma_{k2}g_{01}+g_{01}g_{k2}f\left(q_{01}q_{02}x+q_{01}\beta_{k2}\right)\right]d(q_{01}q_{02}x+q_{01}\beta_{k2})=$$

$$=\sum_{i=0}^{s-1}\gamma_{k2}g_{01}q_{01}q_{[s-1]1}+\sum_{i=0}^{s-1}g_{k2}g_{01}q_{01}q_{[s-1]1}I.$$

$$I_{1k}=\sum_{i=0}^{s-1}\int\limits_{\beta_{11}+q_{11}\beta_{i2}}^{\beta_{11}+q_{11}\beta_{[i+1]2}}f(x)dx=$$

$$=\sum_{i=0}^{s-1}\int\limits_{\beta_{11}+q_{11}\beta_{i2}}^{\beta_{11}+q_{11}\beta_{[i+1]2}}\left[\gamma_{11}+\gamma_{k2}g_{11}+g_{11}g_{k2}f\left(\beta_{11}+q_{11}\beta_{k2}+q_{01}q_{02}x\right)\right]dx=$$

$$=\sum_{i=0}^{s-1}\int\limits_{\beta_{11}+q_{11}\beta_{i2}}^{\beta_{11}+q_{11}\beta_{[i+1]2}}[\gamma_{11}+\gamma_{k2}g_{11}+$$

$$+g_{11}g_{k2}f\left(\beta_{11}+q_{11}\beta_{k2}+q_{01}q_{02}x\right)]d(\beta_{11}+q_{11}\beta_{k2}+q_{01}q_{02}x)=$$

$$=s\gamma_{11}q_{01}q_{02}+g_{11}q_{01}q_{02}\sum_{i=0}^{s-1}\gamma_{k2}+g_{11}q_{01}q_{02}\sum_{i=0}^{s-1}g_{k2}I.$$

. . . .

$$I_{[s-1]k}=\sum_{i=0}^{s-1}\int\limits_{\beta_{[s-1]1}+q_{[s-1]1}\beta_{i2}}^{\beta_{[s-1]1}+q_{[s-1]1}\beta_{[i+1]2}}f(x)dx=$$

$$=s\gamma_{[s-1]1}q_{01}q_{02}+g_{[s-1]1}q_{01}q_{02}\sum_{i=0}^{s-1}\gamma_{k2}+g_{[s-1]1}q_{01}q_{02}\sum_{i=0}^{s-1}g_{k2}I.$$

Додаємо значення інтегралів на всіх циліндрах і після спрощення отримаємо:

$$I = sq_{01}q_{02}(\gamma_{11} + \gamma_{21} + \ldots + \gamma_{[s-1]1}) + q_{01}q_{02}\sum_{i=0}^{s-1}\gamma_{i2}(g_{01} + g_{11} + \ldots + g_{[s-1]1}) +$$

$$+ Iq_{01}q_{02}(g_{01} + g_{11} + \ldots + g_{[s-1]}) =$$

$$= sq_{01}q_{02}\sum_{i=0}^{s}\gamma_{i1} + q_{01}q_{02}\sum_{i=0}^{s-1}\gamma_{i2} + Iq_{01}q_{02}.$$

$$q_{01}q_{02}\left(s\sum_{i=0}^{s-1}\gamma_{i1} + \sum_{i=0}^{s-1}\gamma_{i2}\right) = I(1 - q_{01}q_{02}),$$

$$I = \frac{q_{01}q_{02}\left(s\sum\limits_{i=0}^{s-1}\gamma_{i1} + \sum\limits_{i=0}^{s-1}\gamma_{i2}\right)}{1 - q_{01}q_{02}}.$$

$\square$

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

У даному розділі ми побудували новий клас неперервних функцій з неоднорідною локальною поведінкою і автомодельними властивостями, використовуючи Q_s^*-зображення чисел дійсних чисел $x \in [0,1]$, узагальнили і доповнили результати робіт [62], [1ᵃ].

Основними результатами цього розділу є доведення наступних фактів, що стосуються:

— неперервності та умов монотонності функції;

— сингулярності канторівського типу;

— наявності екстремумів функції;

— самоафінності графіка функції;

— інтегральних властивостей, зокрема, обчислено інтеграл $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

Результати цього розділу опубліковані у роботі [2ᵃ] і доповідались на конференціях [10ᵃ, 11ᵃ, 12ᵃ].

РОЗДІЛ 4
СІМ'Я НЕМОНОТОННИХ СИНГУЛЯРНИХ ФУНКЦІЙ КАНТОРІВСЬКОГО ТИПУ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

У даному розділі розглядається одна сім'я неперервних функцій, яка залежить від послідовності параметрів. Вивчаються їх варіаційні і функціональні, диференціальні й інтегральні, автомодельні і фрактальні властивості, а також властивості рівнів функції. Досліджується розподіл випадкової величини $Y = f(X)$, а саме: його лебегівська структура, тополого-метричні і фрактальні властивості спектра.

4.1. Основний об'єкт дослідження

Нехай $A_5 \equiv \{0, 1, 2, 3, 4\}$ — алфавіт п'ятіркової системи числення, $L \equiv A_5 \times A_5 \times \ldots \times A_5 \times \ldots$;

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right] \equiv \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$$

— Q_5^*-зображення числа $x \in [0, 1]$, $(\alpha_k) \in L$.

Якщо для всіх $i \in A_5$, $j \in N$ виконується $q_{ij} = q_i$, тобто всі стовпці матриці $\|q_{ij}\|$ однакові, то Q_5^*-зображення називається Q_5-*зображенням*, якщо ж при цьому $q_i = \frac{1}{5}$,то Q_5-зображення є звичайним *п'ятірковим зображенням.*

Нехай (ε_n) — послідовність додатних дійсних чисел, причому $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1$; $(\overline{g_n}) = (g_{0n}, g_{1n}, g_{2n}, g_{3n}, g_{4n})$ — послідовність векторів таких, що: $g_{0n} = g_{4n} = \dfrac{2 + \varepsilon_n}{4}$, $g_{1n} = g_{3n} = \dfrac{-\varepsilon_n}{4}$, $g_{2n} = 0$.

Розглядається функція

$$f(x) = \delta_{\alpha_1(x)1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k(x)k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j} \right) \equiv \Delta^G_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \tag{4.1.1}$$

де $\delta_{0n} = 0$, $\delta_{1n} = \dfrac{2+\varepsilon_n}{4}$, $\delta_{2n} = \dfrac{2}{4} = \delta_{3n}$, $\delta_{4n} = \dfrac{2-\varepsilon_n}{4}$, тобто

$$\delta_{[i+1]n} = \delta_{in} + g_{in} = \sum_{j=0}^{i} g_{jn}, n \in N.$$

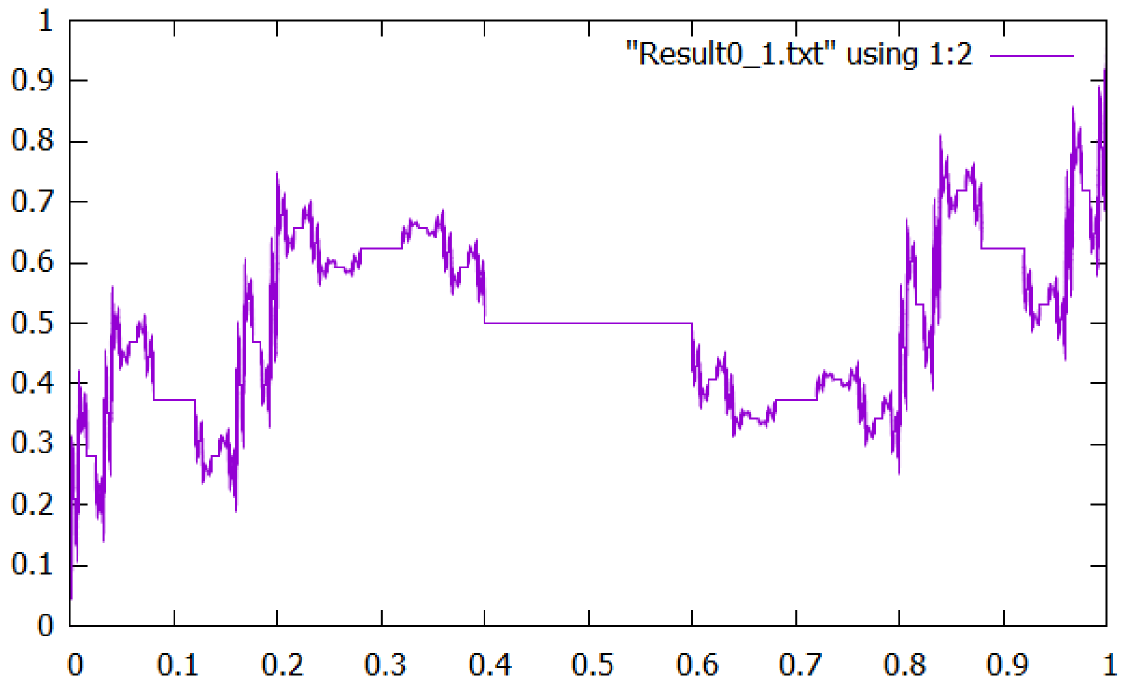

Рис. 4.1. Графік функції f(x) при $\varepsilon_n = 1$.

Коректність означення функції у точках, які мають два Q_5^*-зображення, обґрунтовується наступною рівністю

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}) - f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](4)}) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j} \right) \left(\delta_{\alpha_k k} - \delta_{[\alpha_k-1]k} - g_{[\alpha_k-1]k}(\delta_{4[k+1]} + \delta_{4[k+2]} g_{4[k+1]} + \ldots) \right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j} \right) \left(\delta_{\alpha_k k} - \left(\delta_{[\alpha_k-1]k} + g_{[\alpha_k-1]k} \right) \right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j j}\right)(\delta_{\alpha_k k} - \delta_{\alpha_k k}) = 0.$$

Оскільки f належить до класу функцій, які вивчалися у розділі 3, то нагадаємо їх.

Функція $f(x)$ є неперевною на відрізку $[0;1]$, причому:

1) сталою на кожному циліндрі виду $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_m 2}$ і крім цього на циліндрах $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{n-1}1}$ і $\Delta^5_{c_1c_2\ldots c_{n-1}3}$, якщо $\varepsilon_n = 0$; більше того, вона є сталою на (a,b) тоді і тільки тоді, коли існує циліндр із вказаних видів, який повністю містить даний інтервал;
2) монотонною (а точніше: неспадною) — тоді і тільки тоді, коли $\varepsilon_n = 0$ для будь-якого $n \in N$.

Лема 4.1.1. *Для того щоб функція $f(x)$ не мала проміжків монотонності, крім проміжків сталості, необхідно і достатньо, щоб нерівність $\varepsilon_n \neq 0$ виконувалась для нескінченної множини значень n.*

Доведення. Необхідність. Скористаємося методом від супротивного. Для цього припустимо, що f не має проміжків монотонності, крім проміжків сталості, і при цьому $\varepsilon_m \neq 0$, але $\varepsilon_n = 0$ для всіх $n > m$.

Розглянемо циліндричний інтервал $\nabla^{Q_5^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}}$. Очевидно, що він не є проміжком сталості, оскільки

$$0 = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{(0)}\right) < f\left(\Delta^{Q_5^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}1(0)}\right) = g_{0[m+1]}\prod_{j=1}^{m} g_{0j} < \prod_{j=1}^{m} g_{0j} = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{m-1}1(0)}\right).$$

Разом з цим функція f є монотонною на даному циліндрі, оскільки для будь-якого $x \in \Delta^{Q_5^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}}$

$$f(x) = \delta_{01} + \sum_{k=2}^{m}\left(\delta_{0k}\prod_{j=1}^{k-1} g_{0j}\right) + \left(\prod_{j=1}^{m} g_{0j}\right)\varphi_m(x),$$

де функція $\varphi_m(x) = \delta_{\alpha_{m+1}(x)[m+1]} + \sum\limits_{k=m+2}^{\infty}\left(\delta_{\alpha_k(x)k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)j}\right)$ є монотонною згідно з наведеним вище зауваженням 2. Отримане протиріччя доводить першу частину твердження.

Достатність. Нехай $\varepsilon_{n_k} \neq 0$, $n \in N$. Припустимо, що (a,b) — проміжок монотонності, що не належить жодному з циліндрів сталості. Тоді принаймні один з кінців a або b є внутрішньою точкою циліндра 1-го рангу, який не є проміжком сталості. Нехай таким є число a і при цьому $a \in \nabla_i^{Q_5^*} = (a_i, b_i)$. Тоді існує циліндр $\Delta^{Q_5^*}_{i\underbrace{4\ldots4}_{n_k-1}}$ який належить (a,b), причому

$$f\left(\Delta^{Q_5^*}_{i\underbrace{4\ldots4}_{n_k-1}(0)}\right) < f\left(\Delta^{Q_5^*}_{i\underbrace{4\ldots4}_{n_k-1}1(0)}\right) > f\left(\Delta^{Q_5^*}_{i\underbrace{4\ldots4}_{n_k-1}2(0)}\right),$$

що суперечить монотонності функції на (a,b). Аналогічним чином отримується протиріччя у випадку, коли таким числом є число b. Достатність доведено. $\square$

4.2. Варіаційні властивості

Теорема 4.2.1. *Варіація функції f обчислюється за формулою*

$$V_0^1(f) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i).$$

Функція f має обмежену варіацію тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i < \infty. \tag{4.2.2}$$

Доведення. Оскільки

$V_1 = \sum\limits_{i=0}^{4}\left|f\left(\Delta^{Q_5^*}_{i+1,(0)}\right) - f\left(\Delta^{Q_5^*}_{i(0)}\right)\right| = 1+\varepsilon_1,$

$V_2 = (1+\varepsilon_1)\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}\left|f\left(\Delta^{Q_5^*}_{j+1,i+1,(0)}\right) - f\left(\Delta^{Q_5^*}_{j,i(0)}\right)\right| = (1+\varepsilon_1)\cdot(1+\varepsilon_2),$

....

$V_n = \prod\limits_{i=1}^{n}(1+\varepsilon_i)$, то

$$V_n \leqslant V_0^1(f).$$

Більше того, можна довести, що

$$V_0^1(f) = \lim_{n\to\infty} V_n.$$

Тоді

$$V_0^1(f) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n}(1+\varepsilon_i) = \prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i).$$

Враховуючи зв'язок між збіжністю нескінченних добутків та рядів, а саме:

$$0 < \prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i) < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \infty,$$

можемо констатувати, що функція $f(x)$ є функцією обмеженої варіації тоді і тільки тоді, коли виконується (4.2.2). Теорему доведено. □

Наслідок 4.2.1. *Якщо послідовність* (ε_n) *є відокремленою від нуля, тобто* $0 < \varepsilon_0 \leqslant \varepsilon_n$, *зокрема,* $\varepsilon_n = const > 0$, *то функція* f *є функцією необмеженої варіації.*

Наслідок 4.2.2. *Якщо* $\varepsilon_n = b^n$, $0 < b < 1$, *то функція є функцією обмеженої варіації.*

4.3. Інтегральні властивості

Лема 4.3.1. *Якщо* $q_{ij} = q_i = \frac{1}{5}$, *то графік функції* f, *тобто*

$$f(\Delta^5_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \delta_{\alpha_1 1} + \delta_{\alpha_2 2} g_{\alpha_1 1} + \delta_{[\alpha_{k+1}][k+1]} g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} \ldots g_{\alpha_k k} + \ldots,$$

симетричнй відносно точки $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Доведення. Центральна симетрія площини з центром C аналітично задається формулами:

$$\varphi : \begin{cases} x' = 1 - x, \\ y' = 1 - y. \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Тому для доведення твердження досить показати, що

$$f(x) + f(x') = 1.$$

Оскільки

$$x' = 1 - x = \Delta^5_{[4-\alpha_1][4-\alpha_2]\ldots[4-\alpha_k]\ldots},$$

а

$$f(x') = \delta_{[4-\alpha_1]1} + \delta_{[4-\alpha_2]2} g_{[4-\alpha_1]1} + \delta_{[4-\alpha_3]3} g_{[4-\alpha_1]1} g_{[4-\alpha_2]2} + \ldots$$

і

$$g_{\alpha_k k} = g_{[4-\alpha_k]k} \quad \forall k \in N,$$

то

$$f(x) + f(x') = \left(\delta_{\alpha_1 1} + \delta_{[4-\alpha_1]1}\right) + \left(\delta_{\alpha_2 2} + \delta_{[4-\alpha_2]2}\right) g_{\alpha_1 1} + \ldots +$$

$$+ \left(\delta_{\alpha_k+1} + \delta_{[4-\alpha_{k+1}][k+1]}\right) g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} \ldots g_{\alpha_k k} + \ldots .$$

Враховуючи, що $\delta_{0k} + \delta_{5k} = \delta_{1k} + \delta_{4k} = \delta_{2k} + \delta_{3k} = 1$ і $g_{jk} = g_{[4-j]k}$, отримуємо

$$\delta_{\alpha_k k} + \delta_{[4-\alpha_k]k} = 1 - g_{[4-\alpha_k]} = 1 - g_{\alpha_k k}.$$

Тому

$$f(x) + f(x') = [1 - g_{\alpha_1 1}] + [1 - g_{\alpha_2 2}] g_{\alpha_1 1} + [1 - g_{\alpha_3 3}] g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} + \ldots =$$

$$= 1 - g_{\alpha_1 1} + g_{\alpha_1 1} - g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} + g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} - g_{\alpha_1 1} g_{\alpha_2 2} g_{\alpha_3 3} + \ldots = 1.$$

$\square$

Наслідок 4.3.1. *Для інтеграла Рімана має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

4.4. Автомодельні властивості

Теорема 4.4.1. *Якщо* $q_{ij} = q_i = \frac{1}{5}$*,* $i, j \in N$*,* $\varepsilon_n = const \neq 0$*, то* $G_i \equiv \{M(x,y) : \alpha_1(x) = i, y = f(x)\}$*,*

$$\varphi_i : \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{i}{5}, \\ y' = g_{i1} y + \delta_{i1}, \end{cases} \tag{4.4.4}$$

і при $i \neq 2$ *маємо*

$$\varphi_i(\Gamma_f) = G_i. \tag{4.4.5}$$

Доведення. Для доведення рівності (4.4.5) покажемо два включення: 1) $\varphi_i(\Gamma_f) \subset G_i$ і 2) $G_i \subset \varphi_i(\Gamma_f)$.

Оскільки $\varepsilon_n = const$, то покладемо, що $g_{ik} = g_i, \delta_{ik} = \delta_i$.

1) Нехай $M(x, y) \in \Gamma_f$, тобто $x \in [0, 1]$,

$$y = f(x) = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} \right).$$

Тоді

$$\varphi_i(M) = M' \left(\frac{1}{5}x + \frac{i}{5}; g_i y + \delta_i \right).$$

Але $x' = \frac{1}{5}x + \frac{i}{5} = \Delta^5_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots}$. Обчислимо

$$f(\Delta^5_{i\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots}) = \delta_i + g_i \left[\delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} \right) \right] = \delta_i + g_i y = y'.$$

Отже, $M' \in G_i$. Тому $\varphi_i(\Gamma_f) \subset G_i$.

2) Нехай $K'(u', v') \in G_i$, тобто $u' = \Delta^5_{i\alpha_2(u')\alpha_3(u')\ldots}$,

$$v' = f(u') = \delta_i + g_i \left[\delta_{\alpha_2(u')} + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k(u')} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(u')} \right) \right] = \delta_i + g_i f(u),$$

де $u = \Delta^5_{\alpha_2(u')\alpha_3(u')\ldots}$.

Тоді $K' = \varphi_i(K)$, де $K(u, v) : u = \Delta^5_{\alpha_2(u')\alpha_3(u')\ldots}, v = f(u)$, тобто $K \in \Gamma_i$.

Отже, з 1) і 2) отримуємо рівність (4.4.5). □

Зауваження. Дана теорема дозволяє спростити обчислення інтеграла $\int\limits_0^1 f(x)dx$ безпосередньо з використанням його адитивної властивості без знання симетрії графіка.

Наслідок 4.4.1. *Якщо* $\varepsilon_n = \varepsilon = const \neq 0$, *то частина* W *графіка* Γ_f *функції* f, *визначена рівністю*

$$W = \{M(x, y) : \alpha_k \neq 2 \quad \forall k \in N, y = f(x)\},$$

є самоафінною множиною простору R^2 з розмірністю, що є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{2+\varepsilon}{20}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{\varepsilon}{20}\right)^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}.$$

4.5. Множини рівнів

Множиною рівня y_0 функції f називається множина

$$f^{-1}(y_0) = \{x : f(x) = y_0\}.$$

Теорема 4.5.1. *Якщо $\varepsilon_n = 1$, то множина всіх рівнів функції f, які містять відрізки сталості, є зліченною множиною, причому:*

1) рівень $y_0 = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{(2)}\right) = \frac{1}{2}$ містить лише один відрізок сталості;

2) кожен з рівнів виду

$$y_0 = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 0(2)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 3(2)}\right) \text{ і } y_0 = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 1(2)}\right) = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 4(2)}\right)$$

містить два відрізка сталості;

3) рівень функції більше двох відрізків містити не може.

Доведення. Очевидно, що проміжки сталості функції вичерпуються циліндрами: $\Delta^{Q_5^*}_{2}$, $\Delta^{Q_5^*}_{02}$, $\Delta^{Q_5^*}_{12}$, $\Delta^{Q_5^*}_{32}$, $\Delta^{Q_5^*}_{42}$ і т.д., загальний вигляд яких $\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m(2)}$, де $c_i \neq 2$, $i = \overline{1,m}$, $m \in N$, тобто рівні, які містять проміжки, мають вигляд $f^{-1}\left(f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right)\right)$. Оскільки $f(\Delta^{Q_5^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{m}(2)}) \neq f(\Delta^{Q_5^*}_{\underbrace{0\ldots0}_{k}(2)})$ при $m \neq k$, то таких рівнів зліченна кількість.

1. Доведемо, що рівень $y_0 = \frac{1}{2} = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{(2)}\right)$ містить лише один відрізок сталості. Припустимо, що знайдеться такий циліндр, для якого виконується рівність $f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m(2)}\right) = \frac{1}{2}$. Тоді

Значення функції у внутрішніх точках циліндра $\Delta^{Q_5^*}_{1}$ більші за $\frac{1}{2}$, а на $\Delta^{Q_5^*}_{3}$ — менші за $\frac{1}{2}$. Тому далі досить провести аналіз лише на циліндрах $\Delta^{Q_5^*}_{0}$ і $\Delta^{Q_5^*}_{4}$. Оскільки графік функції f симетричний відносно точки $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, то зосередимось на дослідженні циліндра $\Delta^{Q_5^*}_{0}$. Отже,

$$\frac{3}{4}\left(\delta_{c_2}+\delta_{c_3}g_{c_2}+\ldots+\delta_{c_m}\prod_{j=2}^{m-2}g_{c_j}+\frac{1}{2}\prod_{j=2}^{m-1}g_{c_j}\right)=\frac{1}{2},$$

$$3\left(\delta_{c_2}+\delta_{c_3}g_{c_2}+\ldots+\delta_{c_m}\prod_{j=2}^{m-2}g_{c_j}+\frac{1}{2}\prod_{j=2}^{m-1}g_{c_j}\right)=2.$$

Оскільки добуток $\prod\limits_{j=2}^{m-1}g_{c_j}$ є правильним звичайним дробом зі знаменником 4^{m-2}, а δ_{c_i} — зі знаменником 4, то домноживши останню рівність на 4^m, отримаємо

$$3\cdot\left(4^m\delta_{c_2}+4^m\delta_{c_3}g_{c_2}+\ldots+4^m\delta_{c_m}\prod_{j=2}^{m-2}g_{c_j}+4^m\frac{1}{2}\prod_{j=2}^{m-1}g_{c_j}\right)=2\cdot 4^m.$$

Звідси бачимо, що ліва частина рівності ділиться на 3, а права — ні. Отримане протиріччя доводить, що рівень $\frac{1}{2}$ містить лише один відрізок сталості.

2. Доведемо, що всі інші рівні містять два відрізки сталості. Нехай $A\equiv\delta_{c_1}+\sum\limits_{k=2}^{m}\left(\delta_{c_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1}g_{c_j}\right)$. Розглянемо різницю значень функції:

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m0(2)})-f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m3(2)})=$$
$$=A+g_0\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}\frac{1}{2}-A-\delta_3\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}\frac{1}{2}-g_3\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{3}{8}\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}-\frac{1}{2}\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}+\frac{1}{8}\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}=0,$$

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m1(2)})-f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m4(2)})=$$
$$=A+\delta_1\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}+g_1\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}\frac{1}{2}-A-\delta_4\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}-g_4\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{3}{4}\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}-\frac{1}{8}\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}-\frac{1}{4}\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}-\frac{3}{8}\prod_{j=1}^{m}g_{c_j}=0.$$

Відповідні значення збігаються. Отже, дані рівні містять два відрізки.

3. Тепер доведемо, що такі рівні містять не більше двох відрізків. Розглянемо випадки.

1) Припустимо, що знайдеться такий циліндр, для якого виконується рівність

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m0(2)}) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots c_{m+k}(2)})$$

або

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}\ldots c_m0(2)}) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}),\ k \in N,\ k < m.$$

1.1.

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m0(2)}) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_mc_{m+1}\ldots c_{m+k}(2)}).$$

$$\frac{3}{8}\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j}\left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}}\prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}\right),$$

$$\frac{3}{8} = \delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}}\prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j},$$

$$3 = 8\left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}}\prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2}\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}\right).$$

Оскільки добуток $\prod\limits_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}$ є правильним звичайним дробом із знаменником 4^{k-1}, а δ_{c_i} — зі знаменником 4, то домноживши останню рівність на 4^k, отримаємо

$$3 \cdot 4^k = 8\left(4^k\delta_{c_{m+1}} + \ldots + 4^k\delta_{c_{m+k}}\prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + 4^k\frac{1}{2}\prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j}\right).$$

Звідси бачимо, що ліва частина рівності ділиться на 3, а права — ні. Прийшли до суперечності.

1.2.

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}c_{m-k+1}\ldots c_m0(2)}) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}).$$

$$\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j} \left(\delta_{c_{m-k+1}} + \ldots + \delta_0 \prod_{j=m-k+1}^{m} g_{c_j} + \frac{3}{8} \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} \right) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j},$$

$$\delta_{c_{m-k+1}} + \delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + \frac{3}{8} \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = \frac{1}{2},$$

$$2\delta_{c_{m-k+1}} + 2\delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + 3 \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 1.$$

Оскільки добуток $\prod\limits_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j}$ є звичайним правильним дробом із знаменником 4^k, а δ_{c_i} — зі знаменником 4, то домноживши останню рівність на 4^k, отримаємо

$$2 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+1}} + 2 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + 3 \cdot 4^k \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 4^k.$$

Звідси бачимо, що права частина рівності ділиться на 2, а ліва — ні, оскільки останній доданок виразу не ділиться на 2. Прийшли до суперечності.

2) Припустимо, що знайдеться такий циліндр, для якого виконується рівність

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots c_{m+k}(2)})$$

або

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}).$$

2.1.

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m4(2)}) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_mc_{m+1}\ldots c_{m+k}(2)}).$$

$$\frac{5}{8} \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} = \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \left(\delta_{c_{m+1}} + \ldots + \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right).$$

Проводимо аналогічні міркування і отримуємо

$$5 \cdot 4^k = 8 \left(4^k \delta_{c_{m+1}} + \ldots + 4^k \delta_{c_{m+k}} \prod_{j=m+1}^{m+k-1} g_{c_j} + 4^k \frac{1}{2} \prod_{j=m+1}^{m+k} g_{c_j} \right).$$

Ліва частина рівності ділиться на 5, а права — ні. Прийшли до суперечності.

2.2.

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}c_{m-k+1}\ldots c_m 4(2)}) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_{m-k}(2)}).$$

$$\prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j} \left(\delta_{c_{m-k+1}} + \ldots + \delta_0 \prod_{j=m-k+1}^{m} g_{c_j} + \frac{5}{8} \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} \right) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{m-k} g_{c_j},$$

Проводимо аналогічні міркування і отримуємо

$$2 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+1}} + 2 \cdot 4^k \delta_{c_{m-k+2}} g_{c_{m-k+1}} \ldots + 5 \cdot 4^k \prod_{j=m-k+1}^{m+1} g_{c_j} = 4^k.$$

Права частина рівності ділиться на 2, а ліва — ні, оскільки останній доданок виразу не ділиться на 2. Прийшли до суперечності.

Отже, рівень функції f більше двох відрізків містити не може. □

4.6. Образи множин канторівського типу

Лема 4.6.1. *Образом п'ятіркового циліндра при відображенні f є G-циліндр або точка, причому точкою є тоді тільки тоді, коли в основі циліндра є принаймні одна 2.*

Доведення. Якщо в основі циліндра $\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m}$ є принаймні одна двійка, тобто $c_i = 2$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, то очевидно, що $f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m}) = \Delta^G_{c_1c_2\ldots c_{i-1}2(0)}$, де $\Delta^G_{c_1c_2\ldots c_{i-1}2(0)}$ є точкою.

Тепер доведемо, що образом циліндра $\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, $c_i \neq 2$, $1 \leqslant i \leqslant m$ є циліндр.

Нехай $x \in \Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$, тобто $x = \Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m \alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+k}\ldots}$, і

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m(0)}) = \Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m(0)} = a,$$

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m(4)}) = \Delta^{G}_{c_1c_2\ldots c_m(4)} = b.$$

Тоді за властивістю циліндрів, а саме, що функція на $\Delta^G_{c_1c_2\ldots c_m}$ набуває найбільшого і найменшого значення на його кінцях, випливає, що

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m}) \subset [A, B],$$

де $A = \min\{a, b\}$, $B = \max\{a, b\}$.

Оскільки $f(x)$ — неперервна на відрізку $\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ функція, то вона набуває всіх проміжних значень між A і B, тобто

$$f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m}) = [A, B].$$

□

Лема 4.6.2. *Має місце рівність* $f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m 2}) = \Delta^{G}_{c_1c_2\ldots c_m 2(0)} = y_0$.

Справді, якщо $x \in \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2}$, тобто $x = \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2\alpha_{m+2}\ldots}$, то

$$f(x) = \delta_{c_1} + \ldots + \delta_{c_m}\prod_{i=1}^{m-1} g_{c_i} + \delta_2 \prod_{i=1}^{m} g_{c_i} + 0 = \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m 2(0)} = y_0,$$

причому значення функції не залежить від цифр $\alpha_{m+2}, \alpha_{m+3}\ldots$.

Якщо G-зображення числа $y \in E(f)$ використовує лише дві цифри, то його називатимемо G_2-зображенням.

Теорема 4.6.1. *Образом множини* $C_1 \equiv C[Q_5^*; \{0, 1\}]$ *при відображенні* f *є відрізок* $\left[0, \frac{3}{4}\right]$, *зліченна множина точок якого має рівно два* G_2*-зображення, а саме:*

$$\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m 01(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m 11(0)}, \tag{4.6.6}$$

а решта точок мають єдине G_2*-зображення.*

Доведення. Спочатку доведемо рівність (4.6.6).

Нехай $\varphi_m \equiv \delta_{c_1} + \sum\limits_{k=2}^{m}\left(\delta_{c_k}\prod\limits_{j=1}^{k-1} g_{c_j}\right)$. Розглянемо різницю:

$$\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m 01(0)} - \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m 11(0)} =$$

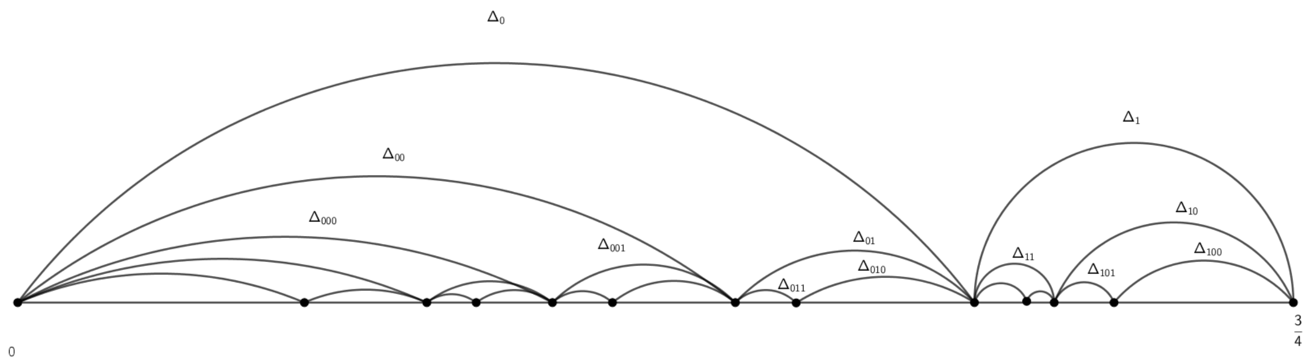

Рис. 4.2. Циліндри 5-го рангу

$$= \varphi_m + \delta_1 g_0 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \varphi_m - \delta_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} - \delta_1 g_1 \prod_{j=1}^{m} g_{c_j} =$$

$$= [\delta_1 g_0 - \delta_1 - \delta_1 g_1] \left(\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \right) = \delta_1 [g_0 - 1 - g_1] \left(\prod_{j=1}^{m} g_{c_j} \right) = 0.$$

Отже, має місце рівність (4.6.6).

Нехай $E = f(C[Q_5^*; \{0,1\}])$. Доведемо, що $E = \left[0, \frac{3}{4}\right]$. Якщо $x \in C_1$, тобто $x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$, де $\alpha_n \in \{0,1\}$, то

$$0 < f(x) = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)} \right) \leqslant g_0 = \frac{3}{4}.$$

Отже, $E \subset \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

Означимо циліндричний відрізок рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ рівністю

$$\Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \left[\inf \Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}; \sup \Delta^{G_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}\right], \text{ де } c_i \in \{0,1\}.$$

Якщо $\prod\limits_{i=1}^{m} g_{c_i} \equiv D$, то легко бачити, що

$$\inf \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \begin{cases} \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m (0)}, \text{якщо } D > 0, \\ \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m 1(0)}, \text{якщо } D < 0, \end{cases}$$

$$\sup \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \begin{cases} \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m 1(0)}, \text{якщо } D > 0, \\ \Delta^*_{c_1 c_2 \ldots c_m (0)}, \text{якщо } D < 0. \end{cases}$$

Доведемо, що для будь-якого $m \in N$

$$\left[0, \frac{3}{4}\right] = \Delta^*_0 \cup \Delta^*_1 = (\Delta^*_{00} \cup \Delta^*_{01}) \cup (\Delta^*_{11} \cup \Delta^*_{10}) = \ldots =$$

$$= \bigcup_{c_1=0}^{1} \bigcup_{c_2=0}^{1} \cdots \bigcup_{c_m=0}^{1} \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m},$$

причому ці формально різні циліндричні відрізки, які входять до об'єднання, не перекриваються (в цьому легко пересвідчитись, наприклад, $\Delta^*_0 = [0; g_0^2]$, $\Delta^*_1 = [g_0^2; g_0]$, $\Delta^*_{00} = [0; g_0^3]$, $\Delta^*_{01} = [g_0^3; g_0^2]$, $\Delta^*_{10} = [g_0(1+g_0g_1); g_0]$, $\Delta^*_{11} = [g_0^2; g_0(1+g_0g_1)], \ldots$). Проведемо загальні міркування для циліндра $\Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m}$, де

$$\Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0} \cup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1}.$$

Справді, нехай $D > 0$. Тоді

$$\inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m(0)} = \inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0(0)},$$

$$\sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m01(0)} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m11(0)} = \inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1},$$

$$\sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1(0)} = \sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m}.$$

Тоді при $D < 0$ маємо

$$\inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1(0)} = \inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1},$$

$$\sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m1} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m11(0)} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m01(0)} = \inf \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0},$$

$$\sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0} = \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m0(0)} = \sup \Delta^*_{c_1c_2\ldots c_m}.$$

Таким чином, згідно з аксіомою Кантора для будь-якої послідовності $(\alpha_n) \in L_2 = A_2 \times A_2 \times \ldots \times A_2 \times \ldots$

$$\varnothing \neq \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = x \in \left[0; \frac{3}{4}\right].$$

І навпаки, для будь-якого $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ існує $(\alpha_n) \in L_2$ така, що

$$x \in \Delta^*_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} \;\forall\, m \in N.$$

Тому $E = \left[0, \frac{3}{4}\right]$.

Враховуючи те, що циліндричні відрізки не перекриваються, робимо висновок, що точки, які не є кінцями циліндричних відрізків, мають єдине

G_2-зображення, а кінці циліндрів, крім точки 0, мають два G_2-зображення. Теорему доведено. $\square$

Наслідок 4.6.1. *Образом множини $C_2 = C[Q_5^*; \{3,4\}]$ при відображенні f є відрізок $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, зліченна множина точок якого має рівно два G_2-зображення, тобто $\Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m 43(0)} = \Delta^{G_2}_{c_1c_2\ldots c_m 33(0)}$, а решта точок мають єдине G_2-зображення.*

Теорема 4.6.2. *При відображенні f образом множини канторівського типу:*

1) *$C_3 \equiv C[Q_5^*; \{1,3\}]$ є множина канторівського типу $C_4 \equiv C[4; \{1,2\}]$, причому відображення множини C_3 в множину C_4 є бієктивним;*

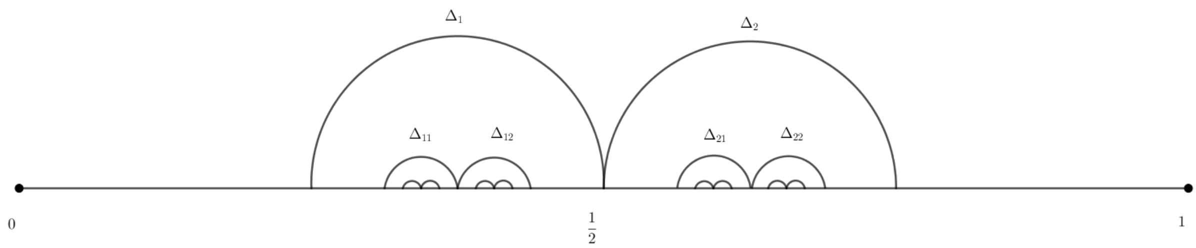

Рис. 4.3. Циліндри 3-го рангу множини C_4

2) *$C_5 \equiv C[Q_5^*; \{1,2,3\}]$ є множина $E = C_4 \bigcup M$, де M — дискретна підмножина множини четвірково-раціональних чисел, а саме:*

$$M = \{y : y = \Delta^4_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}2(0)},\ \alpha_i \in \{1; 2\},\ m \in N\}.$$

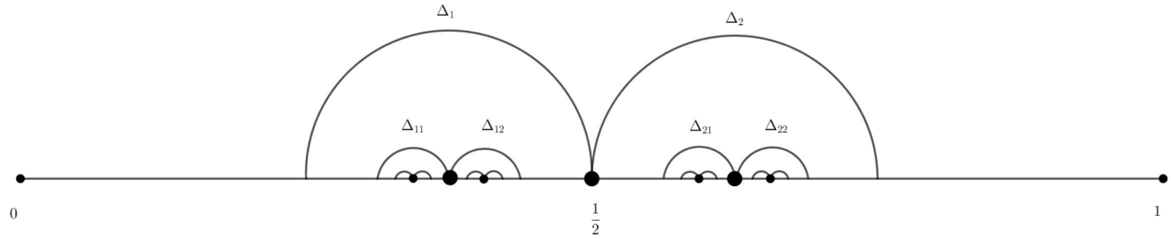

Рис. 4.4. Циліндри 3-го рангу множини E_4

Доведення. 1. Нехай $x \in C_3$, тобто $x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де $\alpha_n \in \{1, 3\}$. Оскільки $g_1 = -\dfrac{1}{4} = g_3$, $\delta_1 = \dfrac{3}{4}$, $\delta_3 = \dfrac{2}{4} = \delta_2$, то $\delta_{\alpha_n} = \dfrac{a_n}{4}$, де

$$a_n = \begin{cases} 4 - \alpha_n, \text{ якщо } \alpha_n = 1, \\ 5 - \alpha_n, \text{ якщо } \alpha_n = 3, \end{cases} \text{де } a_n \in \{3; 2\}, \ \forall n \in N. \tag{4.6.7}$$

Тоді

$$\delta_{\alpha_n} \prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j} = \frac{(-1)^{n-1} a_n}{4^n} \quad \text{і}$$

$$f(x) = \frac{a_1}{4} - \frac{a_2}{4^2} + \frac{a_3}{4^3} - \frac{a_4}{4^4} + \ldots + \frac{a_{2k-1}}{4^{2k-1}} - \frac{a_{2k}}{4^{2k}} + \ldots =$$

$$= \frac{a_1}{4} - \frac{4 - (4 - a_2)}{4^2} + \frac{a_3}{4^3} - \frac{4 - (4 - a_4)}{4^4} + \ldots =$$

$$= \frac{a_1 - 1}{4} + \frac{4 - a_2}{4^2} + \frac{a_3 - 1}{4^3} + \frac{4 - a_4}{4^4} + \ldots =$$

$$= \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{4^2} + \frac{c_3}{4^3} + \frac{c_4}{4^4} + \ldots = \Delta^4_{c_1c_2\ldots c_n\ldots},$$

де

$$c_n = \begin{cases} a_n - 1, \text{ якщо } n \text{ – непарне}, \\ 4 - a_n, \text{ якщо } n \text{ – парне}, \ \forall n \in N. \end{cases} \tag{4.6.8}$$

Оскільки $c_n \in \{1; 2\}$, то $f(x) \in C_4$.

Якщо ж $y \in C_4$, тобто

$$f(x) = y = \Delta^4_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}, \text{де } c_n \in C_4,$$

то

$$f^{-1}(y) = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

де

$$\alpha_n = \begin{cases} 4 - a_n, \text{якщо } a_n = 3, \\ 5 - a_n, \text{якщо } a_n = 2, \end{cases} \text{де } \alpha_n \in \{1; 3\}, \tag{4.6.9}$$

$$a_n = \begin{cases} c_n - 1, \text{якщо } n \text{ – непарне}, \\ 4 - c_n, \text{якщо } n \text{ – непарне}, \forall n \in N. \end{cases} \tag{4.6.10}$$

Оскільки $\alpha_n \in \{1, 3\}$, то $x \in C_3$. Отже, $f(C_3) = C_4$.

Бієктивність відображення $f : C_3 \to C_4$ є наслідком єдиності Q_5^*-представлення чисел множини C_3 і четвіркового представлення чисел множини C_4 та наведених вище міркувань.

2. Очевидно, що $C_4 \bigcap M = \varnothing$. Оскільки $C[Q_5^*; \{1, 3\}] \equiv C_3 \subset C_5$, то для $f(C_5) \subset E$ досить показати, що для $x \in C_5 \setminus C_3$ маємо $f(x) \in M$.

Нехай $\alpha_m(x) = 2$ і $\alpha_j(x) \neq 2$ при $j < m$. Тоді

$$f(x) = \Delta^4_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 2(0)} = \Delta^4_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 1(3)} = y \in M,$$

де c_i обчислюється за формулами (4.6.7) і (4.6.8).

Враховуючи попередні міркування, досить довести, що з $y \in M$ маємо $f^{-1}(y) \in C_5$.

Нехай $y = \Delta^4_{c_1 c_2 \ldots c_{m-1} 2(0)}$, де $c_i \in \{1, 2\}$. Тоді $f(x) = f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_{m-1} 2 \alpha_{m+1} \ldots})$, де α_j $(j < m)$ можна обчислити за формулами (4.6.9) і (4.6.10), а α_{m+j} — довільні цифри з $\{1; 2; 3\}$, належить множині C_5. Таким чином, кожна точка множини E є прообразом принаймні однієї точки множини C_5.

Отже, $f(C_5) = E$, що й вимагалось довести. $\square$

Теорема 4.6.3. *При відображенні f образом множини канторівського типу $C[5; V_n]$, де*

$$V_n = \begin{cases} \{0, 4\}, \textit{якщо } n = 1(mod\ 3), \\ \{1, 3\}, \textit{якщо } n \neq 1(mod\ 3), \end{cases}$$

є множина канторівського типу нульової міри Лебега, фрактальна розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої дорівнює

$$\alpha_0 = \frac{3}{6 - \log_2 3}.$$

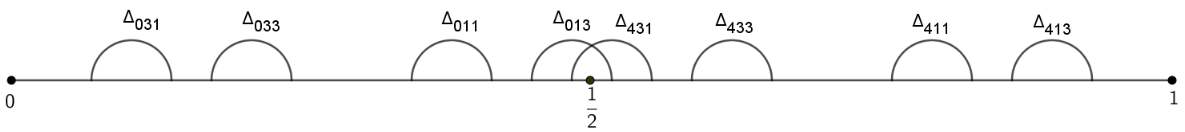

Рис. 4.5. Циліндри 3-го рангу

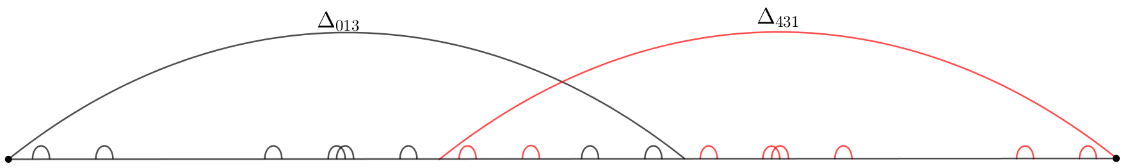

Рис. 4.6. Циліндри 6-го рангу

Доведення. Здійснимо перекодування чисел множини $C[5; V_n]$ засобами вісімкового алфавіту $A_8 = \{0, 1, \ldots, 7\}$ заміною трійок послідовних цифр $\alpha_{3k-2}\alpha_{3k-1}\alpha_{3k}$: $031 \to 0$, $033 \to 1$, $011 \to 2$, $013 \to 3$, $431 \to 4$, $433 \to 5$, $411 \to 6$, $413 \to 7$. Це перекодування рівносильне наступному перетворенню виразу (4.1.1) функції f:

$$y = \rho_{a_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\rho_{a_k}(g_0 g_1^2)^{k-1}\right) = \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots},$$

де $\rho_i = \delta_{\alpha_{3k-2}} + \delta_{\alpha_{3k-1}} g_{\alpha_{3k-2}} + \delta_{\alpha_{3k}} g_{\alpha_{3k-2}} g_{\alpha_{3k-1}}$, $\alpha_{3k-2}\alpha_{3k-1}\alpha_{3k} \to i$, $i \in A_8$, а саме:

$\rho_0 = g_0^3 + g_0 g_1, \quad \rho_4 = g_0 + 2g_1 + g_0^3 + g_0 g_1,$

$\rho_1 = g_0^3 + g_0^2 g_1, \quad \rho_5 = g_0 + 2g_1 + g_0^3 + g_0^2 g_1,$

$\rho_2 = g_0^3, \quad \rho_6 = g_0 + 2g_1 + g_0^3,$

$\rho_3 = g_0^3 + g_0 g_1^2, \quad \rho_7 = g_0 + 2g_1 + g_0^3 + g_0 g_1^2.$

Очевидно, що $\rho_i < \rho_{i+1}$, $i = \overline{0, 7}$.

Якщо $f(C[5; V_n]) = E$, то легко довести, що

$$\min E = \Delta^G_{(031)} = \Delta_{(0)} = \frac{\rho_0}{1 - g_0 g_1^2},$$

$$\max E = \Delta^G_{(413)} = \Delta_{(7)} = \frac{\rho_7}{1-g_0g_1^2}.$$

Тоді діаметр

$$d(E) = \max E - \min E = \frac{\rho_7-\rho_0}{1-g_0g_1^2} = \frac{g_0+g_1+g_0^3}{1-g_0g_1^2} = D.$$

Якщо $x \in C[5; V_n]$, то

$$y = f(x) = \rho_{a_1(x)} + y_1(x) = \rho_{a_1(x)} + g_0g_1^2 \cdot D,$$

де

$$\frac{g_0g_1^2\cdot\rho_0}{1-g_0g_1^2} \leqslant y_1 \leqslant \frac{g_0g_1^2\cdot\rho_7}{1-g_0g_1^2}.$$

Якщо

$$\Delta_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x : x = \Delta_{c_1c_2\ldots c_m a_{m+1}a_{m+2}}\ldots\}$$

— циліндр рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$, що відповідає перекодованому зображенню, то

$$\Delta_i = \left[\rho_i + g_0g_1^2\cdot\frac{\rho_0}{1-g_0g_1^2}; \rho_i + g_0g_1^2\cdot\frac{\rho_7}{1-g_0g_1^2}\right],\ i=\overline{0,7};$$

$$\Delta_{c_1\ldots c_m} = \left[A_m + (g_0g_1^2)^m\cdot\frac{\rho_0}{1-g_0g_1^2}; A_m + (g_0g_1^2)^m\cdot\frac{\rho_7}{1-g_0g_1^2}\right],$$

де $A_m = \rho_{c_1} + \rho_{c_2}g_0g_1^2 + \ldots + \rho_{c_m}(g_0g_1^2)^{m-1}$.

При цьому

$$d(\Delta_{c_1\ldots c_m}) = (g_0g_1^2)^m\cdot D.$$

Циліндри 1-го рангу мають однаковий діаметр $g_0g_1^2D$ і є подібними множині E з коефіцієнтом $k_1 = (g_0g_1^2)^{-1}$, причому циліндричні відрізки Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_5, Δ_6, Δ_7 не перетинаються. Циліндричні відрізки Δ_3 і Δ_4 перекриваються, але циліндричні відрізки 2-го рангу, що належать спільній частині, не перекриваються, причому: $\sup\Delta_{41} < \inf\Delta_{36}$, $\inf\Delta_{36} > \inf\Delta_4$, $\sup\Delta_{35} < \inf\Delta_4$, $\sup\Delta_{41} < \sup\Delta_3$, $\inf\Delta_{42} > \sup\Delta_3$. Тоді

$E = Q_0\cup Q_1\cup Q_2\cup Q_5\cup Q_6\cup Q_7\cup[Q_3\cup Q_4] =$

$= Q_0\cup Q_1\cup Q_2\cup Q_5\cup Q_6\cup Q_7\cup$

$\cup(Q_{30}\cup Q_{31}\cup Q_{32}\cup Q_{35}\cup Q_{36}\cup Q_{37}\cup[Q_{33}\cup Q_{34}])\cup$

$$\cup (Q_{40} \cup Q_{41} \cup Q_{42} \cup Q_{45} \cup Q_{46} \cup Q_{47} \cup [Q_{43} \cup Q_{44}]) = \ldots,$$

звідки маємо наступну структуру N-самоподібної множини E:

1. $E = \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} \left[\bigcup\limits_{3 \neq i \neq 4} \bigcup\limits_{a_m=3}^{4} \ldots \bigcup\limits_{a_2=3}^{4} \bigcup\limits_{a_1=3}^{4} \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_m i} \right]$,
2. $E \overset{k_i}{\sim} \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_m i}$, $k_i = (g_0 g_1^2)^{m+1}$,

причому відстань між циліндрами, що беруть участь в об'єднанні, є додатною.

Отже, рівняння для визначення СП-розмірності має вигляд:

$$6 \cdot k_1^x + 2 \cdot 6 \cdot k_2^x + 2^2 \cdot 6 \cdot k_3^x + \ldots + 2^{n-1} \cdot 6 \cdot k_n^x + \ldots = 1,$$

$$6 \cdot \left(\frac{3}{4^3}\right)^x + 6 \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{4^3}\right)^{2x} + 6 \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{3}{4^3}\right)^{3x} + \ldots = 1.$$

Розв'язок рівняння — це число $x = \alpha_0(E) = \frac{3}{6 - \log_2 3} \approx \frac{2}{3}$, що є не лише N-самоподібною розмірністю множини E, а й розмірністю Гаусдорфа-Безиковича.

Оскільки $0 < \alpha_0 < 1$, то міра Лебега даної множини $C[5; V_n]$ дорівнює нулю. $\square$

4.7. Розподіл значень функції f при заданому розподілі аргументу

Нехай (τ_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значення $0, 1, 2, 3, 4$ з ймовірностями $p_{0n}, p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}, p_{4n}$, $n \in N$ відповідно, тобто

$$P\{\tau_n = i\} = p_{in}, \; i = \overline{0, 4},$$

$$p_{0n} + p_{1n} + p_{2n} + p_{3n} + p_{4n} = 1, \; \forall n \in N.$$

$X = \Delta^{Q_5^*}_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \ldots}$ — неперервна випадкова величина з незалежними п'ятірковими цифрами.

Розподіл випадкової величини X добре відомий [50]. Його лебегівську структуру висвітлює наступне твердження.

Теорема 4.7.1. *Випадкова величина X має розподіл чистого лебегівського типу, причому:*

1) чисто дискретний тоді і тільки тоді, коли

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0;$$

2) чисто абсолютно неперервний тоді і тільки тоді, коли

$$L \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{4} \left(1 - \frac{p_{ik}}{q_{ik}}\right)^2 < \infty;$$

3) чисто сингулярно неперервний тоді і тільки, коли $M = 0$ і $L = \infty$.

Теорема 4.7.2. *Якщо $X = \Delta^5_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ — неперервна випадкова величина, цифри (τ_n) п'ятіркового зображення якої є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами $(p_{in} = p_i)$, то випадкова величина $Y = f(X)$ має:*

1) чисто дискретний розподіл, якщо $p_2 \neq 0$;

2) сингулярний розподіл канторівського типу, якщо $p_2 = 0$.

Доведення. 1. Очевидно, що для $c_i \neq 2$ $(i = \overline{1,m})$

$$P\{Y = f\left(\Delta^5_{c_1\ldots c_{m-1}2(0)}\right)\} \geqslant P\{X \in \Delta^5_{c_1\ldots c_{m-1}2}\} = p_2 \prod_{j=1}^{m-1} p_{c_j}.$$

Але

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{(c_1,\ldots,c_{m-1}) \\ 2\neq c_i \in A_5}} \left(p_2 \prod_{j=1}^{m-1} p_{c_j}\right) = p_2 + p_2(p_0 + p_1 + p_3 + p_4) + \ldots +$$

$$+p_2(p_0 + p_1 + p_3 + p_4)^n + \ldots = \frac{p_2}{1 - (p_0 + p_1 + p_3 + p_4)} = 1.$$

Тому для зліченної множини

$$A = \{y : y = f(\Delta^5_{c_1\ldots c_{m-1}2(0)})\},\ c_i \in A_5 \setminus \{2\},\ m \in N$$

маємо $P\{Y \in A\} = 1$, тобто Y має чисто дискретний розподіл.

2. Якщо $p_2 = 0$, то $P\{X \in \Delta^5_{c_1 \ldots c_{m-1}2}\} = 0$. Разом з цим $P\{X = x\} = 0$ для будь- якого $x \in [0,1]$ у силу неперервності розподілу випадкової величини X.

Враховуючи, що функція $y = f(x)$ континуальних рівнів не має (крім тих, що містять відрізки), робимо висновок про неперервність розподілу випадкової величини Y. Разом з цим він зосереджений на множині нульової міри Лебега $C = C[5, \{0, 1, 3, 4\}]$. Тому розподіл випадкової величини Y є сингулярним розподілом канторівського типу. $\square$

Теорема 4.7.3. *Нехай* $X = \Delta^5_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n \ldots}$ *— неперервна випадкова величина, цифри* (τ_n) *п'ятіркового зображення якої є незалежними і мають розподіли* $P\{\tau_n = i\} = p_{in}$, $i = \overline{0,4}$, *причому* $p_{3n} = 0 = p_{4n}$ *для будь-якого* $n \in N$. *Тоді розподіл випадкової величини* $Y = f(X)$ *є чисто дискретним, якщо*

$$B \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_{2k}) \right] = 1,$$

і є нетривіальною сумішшю дискретного та неперервного розподілів, коли $0 < B < 1$, *причому:*

1. *сумішшю дискретного і сингулярного, якщо*

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{4}{3} p'_{0n}\right)^2 + (1 - 4p'_{1n})^2 \right] = \infty,$$

де

$$p'_{0n} = \frac{p_{0n}}{p_{0n} + p_{1n}} \quad і \quad p'_{1n} = \frac{p_{1n}}{p_{0n} + p_{1n}},$$

2. *сумішшю дискретного і абсолютно неперервного, якщо* $W < \infty$.

Доведення. Як відомо з теореми 4.5.1, множина рівнів функції f, які містять відрізки, є зліченною. Більше того, рівень не може містити більше двох відрізків. Тому подія

$$P\{Y = f(\Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2}) = \Delta^G_{c_1 \ldots c_m 2(0)}\}$$

рівносильна події

$$X \in \Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2},$$

якщо рівень $y_0 = \Delta^G_{c_1 \ldots c_m 2(0)}$ містить один відрізок, або ж

$$X \in \Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2} \bigcup \Delta^5_{c'_1 \ldots c'_m 2},$$

де $f(\Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2(0)}) = f(\Delta^5_{c'_1 \ldots c'_m 2(0)})$, якщо рівень містить два відрізки.

У першому випадку, у силу незалежності цифр випадкової величини X, маємо

$$P\{Y = f(\Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2(0)})\} = P\{X \in \Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2}\} \equiv \left(\prod_{i=1}^{m} p_{c_i i} \right) p_{2,m+1}.$$

У другому випадку вважатимемо, що число $y = f(\Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2(0)})$ має дві "складові" y і y^*, які є формально різними числами.

Тому $y = f(\Delta^5_{c_1 \ldots c_m 2(0)})$ є атомом розподілу тоді і тільки тоді, коли

$$p_{c_i i} \neq 0 \ \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \ \text{ і } \ p_{2,m+1} \neq 0.$$

Оскільки розподіл випадкової величини X є неперервним, то $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i \{p_{ik}\} = 0$ і жодна з точок y, G-зображення яких використовує лише цифри 0 та 1, не є атомом розподілу, а тому сумарна маса атомів розподілу Y обчислюється за формулою

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (p_{0k} + p_{1k}) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_{2k}) \right].$$

Остання сума є скінченним числом, причому вона містить скінченну кількість доданків, якщо існує $p_{2k} = 1$ або $p_{2n} = 0$, і нескінченну — в протилежному випадку.

Якщо $p_{0n} = p_{1n} = p_{2n}$ для всіх $n \in N$, то $B = 1$ і розподіл є чисто атомарним (дискретним). Якщо $0 < B < 1$, то, враховуючи теорему Лебега про структуру ймовірнісної міри, робимо висновок, що розподіл Y, маючи атоми, має і нетривіальну неперервну компоненту, а саме:

$$P_Y(\cdot) = B\mu_d(\cdot) + (1 - B)\mu_c(\cdot),$$

де μ_d — чисто дискретна, μ_c — неперервна ймовірнісні міри. Більше того, μ_c — це розподіл випадкової величини $\nu = \Delta^*_{\nu_1 \ldots \nu_n \ldots}$, де (ν_n) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями

$$p'_{0n} = \frac{p_{0n}}{p_{0n}+p_{1n}} \text{ і } p'_{0n} = \frac{p_{1n}}{p_{0n}+p_{1n}}$$

відповідно. Тому згідно з теоремою Джессена-Вінтнера [50] розподіл ν є або чисто сингулярним, або чисто абсолютно неперервним, причому абсолютно неперервним, якщо $W<\infty$ і сингулярним, якщо $W=\infty$.

Обгрунтування останнього висновку можна провести аналогічно до того, як це зроблено у роботі [50] для Q_2-зображення, оскільки G_2-зображення є аналітичним самоподібним як і Q_2-зображення (бієкція між цими зображеннями, яка зберігає міру Лебега і Гаусдорфа-Безиковича, легко встановлюється). □

Наслідок 4.7.1. *Якщо $p_{0n}=p_{1n}=0$ для будь-якого $n\in N$, то розподіл випадкової величини $Y=f(X)$ має чисто дискретний розподіл, якщо $B=1$, і є сумішшю дискретного та неперервного розподілів, якщо $0<B<1$.*

Теорема 4.7.4. *Нехай $X=\Delta^{Q_5^*}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ — випадкова величина, цифри (τ_n) Q_5^*-зображення якої є незалежними і мають розподіли $P\{\tau_n=i\}=p_{in}$, $i=\overline{0,4}$, причому*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\max_i\{p_{ik}\}=0. \tag{4.7.11}$$

Розподіл випадкової величини $Y=f(X)$ є:

1. чисто дискретним, якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[p_{2n}\prod_{k=1}^{n-1}(1-p_{2k})\right]=1;$$

2. нетривіальною сумішшю дискретного і неперервного розподілів, якщо

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\left[p_{2n}\prod_{k=1}^{n-1}(1-p_{2k})\right]<1,$$

причому

$$F_Y(x) = cF_d(x) + (1-c)F_c(x),$$

де $F_d(x) = \sum\limits_{\substack{\Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)} = x_i < x \\ c_j \in \{0,1,3,4\}}} p_{x_i}$, $p_{x_i} = P\{Y = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}\}$*;*

3. сингулярним розподілом канторівського типу, якщо для будь-якого натурального n *мають місце рівності* $p_{0n} = p_{2n} = p_{4n} = 0$.

Доведення. Множина рівнів функції f, які містять відрізки, є зліченною і рівень не може містити більше двох відрізків (теорема 4.5.1). Отже, подія

$$P\{Y = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2}) = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}\}$$

рівносильна події

$$X \in \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2},$$

якщо рівень $y_0 = \Delta^G_{c_1\ldots c_m 2(0)}$ містить один відрізок, або ж

$$X \in \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2} \bigcup \Delta^{Q_5^*}_{c'_1\ldots c'_m 2},$$

де $f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2(0)}) = f(\Delta^{Q_5^*}_{c'_1\ldots c'_m 2(0)})$, якщо рівень містить два відрізки.

У силу незалежності цифр випадкової величини X у першому випадку маємо

$$P\{Y = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2(0)})\} = P\{X \in \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2}\} \equiv \left(\prod_{i=1}^{m} p_{c_i i}\right) p_{2,m+1}.$$

У другому випадку вважатимемо, що число $y = f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2(0)})$ має дві "складові" y і y^*, які є формально різними числами.

$y = f\left(\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m 2(0)}\right)$ є атомом розподілу функції f, коли

$$p_{c_i i} \neq 0 \ \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\} \ \text{ і } \ p_{2,m+1} \neq 0.$$

Сумарна маса атомів розподілу Y обчислюється за формулою

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (p_{0k} + p_{1k} + p_{3k} + p_{4k}) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[p_{2n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_{2k}) \right].$$

Очевидно, що остання сума є скінченним числом, причому вона містить скінченну кількість доданків, якщо існує $p_{2k} = 1$, і нескінченну — в протилежному випадку.

Якщо $p_{0n} = p_{1n} = p_{2n} = p_{3n} = p_{4n}$ для всіх $n \in N$, то $S = 1$ і розподіл є чисто атомарний (дискретний). Якщо ж всі p_{in} різні і $S < 1$, то враховуючи теорему Лебега про структуру ймовірнісної міри, робимо висновок, що розподіл Y, маючи атоми, має і нетривіальну неперервну компоненту.

Зауважимо, що $S \neq 0$, що є наслідком неперервного розподілу X.

Якщо $p_{0n} = p_{2n} = p_{4n} = 0$, то для будь-якого $n \in N$ спектром розподілу випадкової величини Y є множина канторівського типу $C_4 = C[4; \{1, 2\}]$, якщо $p^2_{1n} + p^2_{3n} \neq 1$ для всіх $n \in N$, або її підмножина, якщо для деякого m виконується рівність $p^2_{1m} + p^2_{3m} = 1$. Тому згідно з теоремо 4.6.2 міра Лебега спектра розподілу Y рівна нулю.

Розподіл випадкової величини X є неперервним, тобто

$$\prod_{n=1}^{\infty} \max_k \{p_{kn}\} = M = 0 = \prod_{n=1}^{\infty} \max\{p_{1n}, p_{3n}\}.$$

Тоді в силу бієктивності відображення $f : C_3 \to C_4$ розподіл Y атомів не має. Отже, він є сингулярним розподілом канторівського типу. □

Теорема 4.7.5. *Нехай* $X = \Delta^{Q^*_5}_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots}$ *— випадкова величина, цифри* (τ_n) Q^*_5*-зображення якої є незалежними і мають розподіли* $P\{\tau_n = i\} = p_{in}$, $i = \overline{0, 4}$. *Якщо* $p_{2n} = p_{3n} = p_{4n} = 0$ *для будь-якого* $n \in N$, *то розподіл випадкової величини* $Y = f(X) = \Delta^{G^*_2}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_n\ldots}$, *яка закодована засобами двосимвольного алфавіту* $A_2 = \{0, 1\}$ *у системі з нульовою надлишковістю, цифри* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ *зображення якої є незалежними, має чистий лебегівський тип, причому абсолютно неперервний — тоді і тільки тоді, коли*

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{4}{3} p_{0n}\right)^2 + (1 - 4p_{1n})^2 \right] < \infty$$

і сингулярний, коли $W = \infty$.

Доведення. Згідно з лемою 4.6.1 випадкова величина Y набуває всіх значень з відрізка $[0; \frac{3}{4}]$, майже всі точки якого (за виключенням зліченної множини) мають єдине G_2^*-зображення, причому:

$$f(\Delta_0^{Q_5^*}) = \Delta_0^{G_2^*} = \left[0; \tfrac{9}{16}\right], \quad f(\Delta_1^{Q_5^*}) = \Delta_1^{G_2^*} = \left[\tfrac{9}{16}; \tfrac{3}{4}\right],$$

$$P_Y(\Delta_0^{G_2^*}) = P_X(\Delta_0^{Q_5^*}) = p_{01}, \quad P_Y(\Delta_1^{G_2^*}) = P_X(\Delta_1^{Q_5^*}) = p_{11}.$$

Більше того,

$$P_Y(f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m i})) = P_X(\Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m i}) = p_{i[m+1]}.$$

$$F'_Y(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{P_Y(f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}))}{|f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n})|} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n+1} \left(\frac{p_{\alpha_i i}}{|g_{\alpha_i}|}\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n+1} \left(\frac{p_{\alpha_i i}}{\frac{2-(-1)^{1-\alpha_i}}{4}}\right) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4p_{\alpha_i i}}{2-(-1)^{1-\alpha_i}}\right).$$

Для збіжності останнього нескінченного добутку, необхідно і достатньо, щоб збігався ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{4p_{\alpha_i i}}{2-(-1)^{1-\alpha_i}}\right)$.

Оскільки кожна точка $y \in [0; \frac{3}{4}]$ є образом єдиної точки $x \in C[Q_5^*, \{0,1\}]$, де $y = f(x)$, і більше того, цифри зображень x та y перебувають у співвідношенні

$$\alpha_i(f(x)) = \begin{cases} 0, \text{якщо } \alpha_i(x) = 0, \\ 1, \text{якщо } \alpha_i(x) = 1, \end{cases}$$

то цифри G_2^*-зображення випадкової величини Y є незалежними, як і цифри X, причому

$$P_Y\{\eta_n = 0\} = P_X\{\tau_n = 0\} = p_{0n}, \quad P_Y\{\eta_n = 1\} = P_X\{\tau_1 = 1\} = p_{1n}.$$

G_2^*-зображення є самоподібним зображенням як і Q_2-зображення чисел. Між вказаними зображеннями легко встановлюється зв'язок (бієкція, яка переводить одне в інше, зберігає міру Лебега і фрактальну розмірність

Гаусдорфа-Безиковича). Це є основою для висновку: методи обґрунтування чистоти розподілу випадкової величини Y, її критерій абсолютної неперервності (а отже, і сингулярності) переносяться на дану ситуацію. А отже, з відомих результатів [50] для Q_2-зображення отримується заключна частина теореми. □

Теорема 4.7.6. *Якщо розподіл випадкової величини X є неперервним і для будь-якого натурального n мають місце рівності*

$$\begin{cases} p_{1n} = p_{2n} = p_{3n} = 0, \text{\textit{якщо}}\ n = 1(mod\ 3), \\ p_{0n} = p_{4n} = 0, \text{\textit{якщо}}\ n \neq 1(mod\ 3), \end{cases}$$

то випадкова величина $Y = f(X)$ має сингулярний розподіл канторівського типу.

Доведення. Згідно з теоремою 4.6.3 спектром випадкової величини Y, тобто множиною точок росту її функції розподілу, є множина канторівського типу $E = f(C[5; V_n])$ з нульовою мірою Лебега. Оскільки розподіл випадкової величини X неперервний, то $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i}\{p_{ik}\} = 0$ і жодна з точок y не є атомом розподілу, тому випадкова величина Y має сингулярний розподіл канторівського типу. □

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

У даному розділі ми розглянули одну сім'ю неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу, яка залежить від послідовності параметрів, використовуючи Q_5^*-зображення чисел $x \in [0, 1]$, яке є кодуванням числа засобами скінченного алфавіту $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ і узагальненням п'ятіркового та Q_5-зображення дійсних чисел.

Основними результатами цього розділу є доведення наступних фактів, що стосуються:

— варіації функції;

— симетричності та автомодельності графіка функції;

— інтегральних властивостей, зокрема, обчислено інтеграл Рімана $\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$;

— масивності множини рівнів функції;

— образів множин канторівського типу;

— лебегівської структури розподілу функції $f(X)$ при заданому розподілі випадкового аргументу.

Результати цього розділу опубліковані у роботах [3[a], 4[a], 5[a], 6[a]] і доповідались на конференціях [13[a], 14[a], 15[a], 16[a], 17[a], 18[a]].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Чимало фізичних, економічних, біологічних, психологічних, соціальних та інших процесів протікають край неоднорідно в часі. І ця неоднорідність має різні функціональні прояви, які знаходять відображення в нелінійності, нестабільності, іррегулярності локальних диференціальних властивостей тощо. Складовими математичної моделі таких процесів є канторівські функції — неперервні функції з автомодельними властивостями і множиною несталості, що має нульову або додатну міру Лебега. Це є одним з аргументів підвищеного інтересу математиків до таких функцій. Їх загальна теорія мало розвинена, розвивається за рахунок теорій окремих функцій та сімей функцій, залежних від скінченної кількості параметрів.

Для зручності аналітичного задання таких функцій та їх дослідження останнім часом все частіше використовують різні системи кодування (зображення) дійсних чисел зі скінченним та нескінченним алфавітами. Це класичне s-кове зображення чисел і його узагальнення — Q_s- та Q_s^*-зображення. Саме останні ми використовували для конструювання, моделювання та дослідження неперервних функцій, які мають складну локальну структуру, нескінченні множини різних особливостей та фрактальні властивості.

В дисертаційній роботі отримані такі результати:

— побудовано континуальний клас неперервних функцій, залежних від скінченного набору параметрів, зі складною локальною поведінкою: сингулярних монотонних, сингулярних немонотонних, ніде не монотонних;

— для даного класу функцій вивчено структурні властивості, описано множини особливостей (максимумів-мінімумів), масивність множин рівнів тощо;

— за допомогою Q_s^*-зображення дійсних чисел сконструйовано нескінченно-параметричну сім'ю неперервних функцій з неоднорідними локальними властивостями, які в залежності від набору параметрів є строго монотонними, але в переважній більшості сингулярними, немонотонними сингулярними функціями канторівського типу або ніде не монотонними;

— вивчено варіаційні і функціональні, диференціальні й інтегральні, автомодельні і фрактальні властивості, а також властивості множин рівнів даної сім'ї функцій;

— описано властивості множин, що є образами множин канторівського типу при відображенні f;

— досліджено лебегівську структуру (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) розподілу випадкової величини $Y = f(X)$ для немонотонної сингулярної функції канторівського типу f, означеної в термінах Q_5^*-зображення чисел і нескінченної послідовності параметрів, та випадкової величини X, цифри Q_5^*-зображення якої є незалежними випадковими величинами.

Вказані підходи, прийоми та методи можуть бути ефективно використані при дослідженні нових класів неперервних сингулярних функцій канторівського типу та узагальненні відомостей про функції зі складною локальною будовою, а також при розв'язанні інших задач теорії неперервних функцій дійсної змінної та теорії розподілів випадкових величин.

Залишилось нез'ясованим питання: чи існують неперервні функції з автомодельними графіками, для яких розподіл випадкової величини $Y = f(X)$ є нетривіальною сумішшю дискретного, абсолютно неперервного та сингулярного розподілів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Агаджанов А. Н. Сингулярные функции, не имеющие интервалов монотонности, в задачах финитного управления распределенными системами. *Доклады Академии Наук.* 2014. Т. 454, вып. 5. С. 503-506.

[2] Барановський О. М. Задання ніде не диференційовних функцій за допомогою представлення чисел рядами Остроградського. *Фрактальний аналіз та суміжні питання.* 1998. № 2. С. 215-221.

[3] Барановський О. М. Використання рядів Остроградського 1-го виду для аналітичного задання множин, функцій, випадкових величин. *Наукові записки: зб. наукових статей НПУ ім. М. П. Драгоманова.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2001. № 40. С. 37-40.

[4] Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Ряди Остроградського-Серпінського-Пірса та їх застосування. Київ: Наукова думка, 2013. 268 с.

[5] Безикович А. С. Исследование непрерывных функций в связи с вопросом об их дифференцируемости. *Математический сборник.* 1924. Т. 31, №. 4. С. 529-556.

[6] Болотов В. Н. Переходное фрактальное излучение. *Журнал технической физики.* 2000. Т. 70, вып. 12. С. 98-101.

[7] Болотов В. Н. Обобщение функции Кантора и переходное фрактальное рассеяние. *Журнал технической физики.* 2002. Т. 72, № 2. С. 8-15.

[8] Василенко Н. А. Функція Серпінського. Самоафінні властивості. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2009. № 10. С. 113-125.

[9] Василенко Н. А. *Фрактальні властивості неперервних ніде не монотонних та недиференційовних функцій*: автореф. дис. на здобуття

наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ, 2014. 20 с.

[10] Виннишин Я. Ф. О свертках сингулярных функций распределения. *Стохастический анализ и его приложения.* 1989. С. 14-17.

[11] Виннишин Я. Ф. Згортки сингулярних функцій розподілу. *Укр. мат. журнл.* 2004. Т. 56, № 1. С. 33-44.

[12] Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Фрактальні властивості множин точок недиференційованості абсолютно неперервної та сингулярної функцій розподілу. *Теорія ймовір. та матем. статист.* 2001. № 65. С. 25-32.

[13] Грубер П. М., Леккеркеркер К. Г. Геометрия чисел. Москва: Наука, 2008. 727 с.

[14] Душистова А. А., Мощевитин Н. Г. О производной функции Минковского $?(x)$. *Фундамент. и прикл. математика.* 2010. Т. 16, № 6. С. 33-44.

[15] Ісаєва Т. М., Працьовитий М. В. Геометрія та основи метричної теорії зліченно-символьного зображення дійсних чисел одиничного півінтервала. *Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки.* 2015. № 165. С. 11-18.

[16] Калашніков А. В. Деякі функціональні співвідношення, які задовольняє сингулярна функція Салема. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008. № 9. С. 192-199.

[17] Калашніков А. В. Еквівалентне означення та властивості сингулярної функції Мінковського. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2009. № 10. С. 50-56.

[18] Працьовитий М. В., Калашніков А. В., Безбородов В. К. Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1.*

Фізико-математичні науки. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2010. № 11. С. 207-213.

[19] Калашніков А. В., Працьовитий М. В. Сингулярність функцій однопараметричного класу, який містить функцію Мінковського. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. № 12. С. 59-65.

[20] Калашніков А. В. *Сингулярні та ніде не монотонні функції як розв'язки систем функціональних рівнянь*: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ, 2014. 20 с.

[21] Коваль В. В. Самоафінні графіки функцій. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2004. № 5. С. 292-299.

[22] Козырев С. Б. О топологической густоте извивающихся функций. *Мат. заметки.* 1983. Т. 33, № 1. С. 71-76.

[23] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1989. 496 с.

[24] Котова О. В. Інваріантні точки одного неперервного, недеференційованого відображення. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008. № 9. С. 151-160.

[25] Кошманенко В. Д., Самойленко І. В. Модель динамічної системи конфліктної тріади. *Нелінійні коливання,* 2011. Т. 14, № 1. С. 55-75.

[26] Королюк В. С., Самойленко І. В. Проблема великих відхилень для процесів випадкової еволюції. *Теорія ймовірностей та математична статистика.* 2015. Вип. 93. С. 87-94.

[27] Кравченко В. Ф., Масюк В. М. Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. Кн.3. *Современные методы аппроксимации в теории антенн. В 3-х книгах.* М.: ИПРЖР.

2002. 72 с.

[28] Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Москва: Техносфера, 2006. 488 с.

[29] Крупенин С. В. Моделирование фрактальных антенн. *Нелинейный мир.* 2006. № 6, Т. 4. С. 297-302.

[30] Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций. Москва: Гостехтеоретиздат, 1934. 324 с.

[31] Лисовик Л. П., Шкаравская О. Ю. О вещественных функциях задаваемых преобразователями. *Кибернетика и системный анализ.* 1998. С. 82-93.

[32] Марсалья Д. Случайные величины с независимыми двоичными цифрами. *Кибернет. сб.* 1983. № 20. С. 216-224.

[33] Маслюченко В. К., Мельник В. С. Про рівномірне відхилення від простору неперервних функцій. *Теорія наближення функцій і суміжні питання:* зб. праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Вид-во Ін-т математики НАН України, 2014. Т. 11, № 3. С. 158-166.

[34] Маслюченко В. К., Петей С. П. Поточкові границі неперервних монотонних функцій та функцій обмеженої варіації. *Бук. мат. журн.* 2015. Т. 3, № 2. С. 64-71.

[35] Маслюченко В. К., Маслюченко О. В., Мельник В. С. Існування проміжних кусково лінійних і нескінченно диференційовних функцій. *Бук. мат. журн.* 2016. № 3-4. С. 93-100.

[36] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Москва: Наука, 1974. 480 с.

[37] Новейшие методы обработки изображений / А. А. Потапов, Ю. В. Гуляев, С. А. Никитов, А. А. Похомов, В. А. Герман. М.: Физматлит, 2008. 496 с.

[38] Окстоби Д. Мера и категория. Москва: Мир, 1974. 156 с.

[39] Онищенко В. В. Фрактальність в телекомунікаційних мережах. *Зв'язок.* 2014. № 5. С. 16-19.

[40] Панасенко О. Б. Фрактальні властивості одного класу однопараметричних неперервних недиференційовних функцій. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2006. № 7. С. 160-167.

[41] Панасенко О. Б. Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008. № 9. С. 124-132.

[42] Панасенко О. Б. Однопараметричний клас неперервних функцій, близьких до канторівських проекторів. *Математичні студії.* 2009. Т. 32, № 1. С. 3-11.

[43] Панасенко О. Б. Розмірність Хаусдорфа-Безиковича однієї неперервної ніде не диференційовної функції. *Укр. Мат. Журн.* 2009. Т. 61, № 9. С. 1225-1239.

[44] Панасенко О. Б. *Фрактальні властивості графіків деяких класів неперервних ніде не диференційовних функцій*: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського. Вінниця, 2009. 18 с.

[45] Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радилокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перероб. и доп. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.

[46] Працевитый Н. В. Случайные величины с независимыми Q_2-символами. *Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей.* Киев: Институт математики АН УССР, 1987. С. 92-102.

[47] Працевитый Н. В. Непрерывные канторовские проекторы. *Методы исследования алгебраических и топологических структур.* 1989. С. 95-105.

[48] Працьовитий М. В. Розподіли сум випадкових степеневих рядів. *Доп. НАН України.* 1996. Т. 5. С. 32-37.

[49] Працьовитий М. В. Згортки сингулярних розподілів. *Доп. НАН України.* 1997. № 9. С. 36-42.

[50] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. 296 с.

[51] Працьовитий М. В. Фрактальні властивості однієї неперервної ніде не диференційовної функції. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2002. № 3. С. 351-362.

[52] Працьовитий М. В. Ніде не монотонні сингулярні функції. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. № 12. С. 24-36.

[53] Працьовитий М. В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. 68 с.

[54] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних функцій з всюди щільною множиною особливостей. *Науковий часопис НПУ імені М. П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. № 12. С. 152-165.

[55] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Розподіл ймовірностей на графіках одного класу ніде не диференційовних функцій. *Труды ИПММ НАН Украины.* 2013. № 26. С. 159-171.

[56] Працьовитий М. В., Василенко Н. А. Одна сім'я неперервних ніде не монотонних функцій з фрактальними властивостями. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013. № 14. С. 174-186.

[57] Працьовитий М. В., Ісаєва Т. М. Одна система кодування дійсних чисел, залежна від одного параметра, та її застосування. *Відкриті еволюціонуючі системи: IV Міжнар. наук.-практ. конф., 20–21 травня 2016, Ніжин.* 2017. Ч. 2. С. 57-63.

[58] Працьовитий М. В., Замрій І. В. Сингулярність інверсора цифр Q_3-зображення дробової частини дійсного числа, його фрактальні та інтегральні властивості. *Нелінійні коливання.* Т. 18, № 1. 2013. С. 55-70.

[59] Працьовитий М. В., Жабровець О. В. Сім'я неперервних функцій зі складною локальною будовою, які є або сингулярними, або ніде не монотонними. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014. № 16(1). С. 228-242.

[60] Працьовитий М. В., Калашніков А. В., Безбородов В. К. Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2010. № 11. С. 207-213.

[61] Працьовитий М. В., Калашніков А. В. Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою, більшість з яких сингулярні або недиференційовні. *Труды ИПММ НАН Украины.* 2011. Т. 23. С. 180-191.

[62] Працьовитий М. В., Калашніков А. В. Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q-зображенням чисел. *Укр. Мат. Журн.* 2013. Т.65, №3. С. 381-393.

[63] Працьовитий М. В., Косопльоткіна О. В. Фрактальні властивості, суперпозиції сингулярних функцій розподілу. *Теор. ймов. і мат. стат.* 2002. № 67. С. 61-69.

[64] Працьовитий М. В., Панасенко О. Б. Диференціальні і фрактальні властивості одного класу самоафінних функцій. *Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична.* 2009. № 70. С. 128-139.

[65] Працьовитий М. В., Рятушняк С. П. Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргумента. *Науковий часопис НПУ імені М. П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014. № 16(2). С. 150-160.

[66] Працьовитий М. В., Скрипник С. В. Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013. № 15. С. 134-145.

[67] Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Гаусдорфа-Безиковича. *Динамічні системи: Укр. Мат. Конг.* Київ: Ін-т матем. НАН України, 2003. С. 77-93.

[68] Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Аналітичне (символьне) представлення неперервних перетворень, що зберігають розмірність Гаусдорфа-Безиковича. *Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. № 4. С. 207-215.

[69] Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Про класифікацію одновимірних сингулярно неперервних ймовірнісних мір за їх спектральними властивостями. *Науковий часопис НПУ імені М. П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2006. № 7. С. 95-104.

[70] Працевитый Н. В., Турбин А. Ф. Фрактальные множества, функции распределения. Киев: Наукова думка, 1992. 208 с.

[71] Працьовитий М. В., Фещенко О. Ю. Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і Q-представлення чисел. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. № 4. С. 260-269.

[72] Торбин Г. М., Працевитый Н. В. Случайные величины с независимыми Q^*-знаками. *Случайные эволюции: теорет. и прикл. задачи.* Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. С. 95-104.

[73] Працьовитий М. В., Торбін Г. М., Гончаренко Я. В. Сучасні задачі та проблеми сингулярних розподілів ймовірностей. *Наукові записки: зб.*

наукових статей НПУ імені М.П.Драгоманова. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2001. № 42. С. 18-20.

[74] Титчмарш Е. Теория функций. 2-е изд. изд. Москва: Наука, 1980. 464 с.

[75] Федер Е. Фракталы. Москва: Мир, 1991. 260 с.

[76] Федерер Г. Геометрическая теория меры. Москва: Наука, Гл. ред физ.-мат. лит., 1987. 760 с.

[77] Шкаравская О. Ю. Афинные отображения, задаваемые конечными преобразователями. *Кибернетика и системный анализ.* 1998. № 5. С. 178-181.

[78] Янко В. Г. Про два класи неперервних ніде не диференційовних функцій. *Фрактальний аналіз та суміжні питання.* Київ: Вид-во Ін-т математики НАН України, 1998. № 2. С. 226-229.

[79] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems.* 2004. Vol. 24. Pp. 1-16.

[80] Alkauskas G. An asymptotic formula for the moments of the Minkowski question mark function in the interval $[0; 1]$. *Lithuanian Mathematical Journal.* 2008. Vol. 48, no. 4. Pp. 357-367.

[81] Alkauskas G. Generating and zeta functions, structure, spectral and analytic properties of the moments of Minkowski question mark function. *Invole.* 2009. Vol. 2, no. 2. Pp. 121-159.

[82] Alkauskas G. The Minkowski question mark function: explicit series for the dyadic period function and moments. *Mathematics of Computation.* 2010. Vol. 79, no. 269. Pp. 383-418.

[83] Alkauskas G. The moments of Minkowski question mark function: the dyadic period function. *Glasd. Math. J.* 2010. Vol. 52, no. 1. Pp. 41-64.

[84] Alkauskas G. Semi–regular continued fractions and an exact formula for the moments of the Minkowski question mark function. *Ramanujan J.* 2011. Vol. 25, no. 3. Pp. 359-367.

[85] Alkauskas G. The Minkowski $?(x)$ function and Salem's problem. *C. R. Acad. Sci. Paris.* 2012. Vol. 350, no. 3-4. Pp. 137-140.

[86] Banach S. Uber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionnenmengen. *Stud. Math.* 1931. No. 3. Pp. 174-179.

[87] Baranski K. On the dimension of graphs of Weierstrass-type functions with rapidly growing frequencies. *Nonlinearity.* 2012. Vol. 25, no. 1. Pp. 193-209.

[88] Baranski K. On the complexication of the Weierstrass non-diferentiable function. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 2012. Vol. 27, no. 2. Pp. 325-339.

[89] Baranski K., Baaraany B., Romanowska J. On the dimension of the graph of the classical Weierstrass function. *Adv. Math.* 2014. Vol. 265. Pp. 32-59.

[90] Beaver O., Garrity T. A two-dimensional Minkowski $?(x)$ function. *Number Theory.* 2004. No. 107. Pp. 105-134.

[91] Cantor G. De la puissance des ensembles parfaits de points. *Acta Math.* 1884. Vol. 4. Pp. 381-392.

[92] Chatterji S. D. Certain induced measures on the unit interval. *Journal London Math. Soc.* 1963. Vol. 38. Pp. 325-331.

[93] Chailice D. R. A characterization of the Cantor function. *Amer. Math. Monthly.* 1991. Vol. 98, no. 3. Pp. 255-258.

[94] Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits / S. Albeverio, Y. Gontcharenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. *Random Oper. Stochastic Equations.* 2007. Vol. 15, no. 1. Pp. 89-97.

[95] Denjoy A. Sur une fonction de Minkowski. *C. R. Acad. Sci.* 1932. Vol. 194. Pp. 44-46.

[96] Dushistova A. A., Kan I.D., Moshchevitin N.G. Differentiability of the Minkowski question mark function. *J. Math. Anal. Appl.* 2013. Vol. 401, no. 2. Pp. 774-794.

[97] Dushistova A. A., Moshchevitin N.G. On the derivative of the Minkowski question mark function $?(x)$. *Math. Sci. (N.Y.).* 2012. Vol. 182, no. 4. Pp. 463-471.

[98] Falconer K. J. Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications. Chichester : Wiley, 2003. 337 pp.

[99] Fleron J. F. A note on the history of the Cantor set and Cantor function. *Math. Mag.* 1994. Vol. 67. Pp. 136-140.

[100] Fu S. On the Hausdorff dimension of the graph of the Weierstrass function. *Far East J. Dyn. Syst.* 2011. Vol. 17, no. 1. Pp. 85-137.

[101] Garg K. M. On singular functions. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*. 1969. Vol.14. Pp. 1441-1454.

[102] Garg K. M. Construction of absolutely continuous and singular functions that are nowhere of monotonic type. *Contemp. Math. 42, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.* 1985. Pp. 61-67.

[103] Grabner P. J., Kirschenhofer P., Tichy R. F. Combinatorial and arithmetical properties of linear numeration systems. *Combinatorica.* 2002. No. 22. Pp. 245-267.

[104] Guu C. J. The McFunction [The Takagi function]. Selected topics in descrete mathematics. *Discrete math.* Warsaw, 1996. Vol. 213, no. 14. Pp. 163-167.

[105] Hardy G. H. Weierstrass nondifferentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1916. No. 17. Pp. 301-325.

[106] Hata M., Yamaguti M. The Takagi function and its generalization. *Japan J. Appl. Math.* 1984. Vol. 1. Pp. 183-199.

[107] Jessen B., Wintner A. Distribution functions and rieman zeta-function. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1935. Vol. 38, no. 1. Pp. 48-88.

[108] Jessen-Wintner type random variables and fractal properties of their distributions / S. Albeverio, Y. Gontcharenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. *Mathematische Nachrichten.* 2006. Vol. 279, no. 15. Pp. 1619-1633.

[109] Kessebohmer M., Stratmann B. Fractal analysis for sets of nondifferentiability of Minkowski's question mark function. *Number Theory.* 2008. Vol. 128, no. 9. Pp. 2663-2686.

[110] Kinney J. R. Note on a singular function of Minkowski. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1960. Vol. 11, no. 5. Pp. 788-794.

[111] Koño N. On generalized Takagi function. *Acta Math. Hungar.* 1987. Vol. 49. Pp. 315-324.

[112] Lamberger M. On a family of singular measures related to Minkowski's $?(x)$ function. *Indag. Math.* 2006. Vol. 17, no. 1. Pp. 45-63.

[113] Liu Wen An approach to construct the singular monotone functions by using marcov chains. *Taiwanese Journal of Mathematics.* 1998. Vol. 2, no. 3. Pp. 361-368.

[114] Maddoc Z. Properties of the Takagi Function. *Dept. of Mathematics University of Michigan Ann Arbor.* MI 48109 September 3. 2006. Pp. 1-29.

[115] Maddoc Z. Level sets of the Takagi Function: Hausdorff dimension. *Monatsh Math.* 2010. Vol. 160, no. 2. Pp. 167-186.

[116] Marsalia G. Random variables with independent binary digits. *Ann. Math. Statist.* 1971. Vol. 42, no. 2. Pp. 1922-1929.

[117] Mazurkiewicz S. Sur les functions non derivables. *Stud. Math.* 1931. No. 3. Pp. 92-94.

[118] Minkowski H. Gesammeine Abhandlungen. 1911. Vol. 2. Pp. 50-51.

[119] Okamoto H., Wunsch M. A geometric construction of continuous, strictly increasing singular functions. *Proc. Japan Acad.* Ser. A. 2007. Vol. 83. Pp. 114-118.

[120] On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures / S. Albeverio, V. Koval, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. *Random Operators and Stochastic Equations.* 2008. Vol. 16, no. 2. Pp. 181-211.

[121] Panti G. Multidimensional continued fractions and a Minkowski function. *Monatsh. Math.* 2008. Vol. 154, no. 3. Pp. 247-264.

[122] Pratsiovytyi M., Vasylenko N. Fractal properties of functions defined in terms of Q-representation. *Int. Journal of Math. Analysis.* 2013. Vol. 7, no. 64. Pp. 3155-3167.

[123] Pratsiovytyi M., Isaieva T. Transformations of $(0;1]$ preserving tails of Δ^{μ}-representation of numbers. *Algebra and Discrete Mathematics.* 2016. Vol. 22, no. 1. Pp. 102-115.

[124] Salem R. On some singular monotonic functions which are stricly increasing. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1943. Vol. 53, no. 3. Pp. 427-439.

[125] Sekiguchi T., Shiota Y. A generalization of Hata-Yamaguti's resulton the Takagi function. *Japan J. Ind. Appl. Math.* 1991. Vol. 8, no. 2. Pp. 203-219.

[126] Sierpiński W. Arytmetyczny przykład funkcji ciągłej nieróżniczkowalnej. *Wektor.* 1914. No. 8. Pp. 337-343.

[127] Schwartz L. Sur le module de la fonction caracteristique du calcul des probabilites. *C. R. Acad. Sci.* 1941. No. 212. Pp. 418-421.

[128] Shukla U. K. On points of non-symmetrical differentiability of continuous function III. *Ganita 8.* 1957. Pp. 81-104.

[129] Spectral properties of image measures under the infinite conflict interactions S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin. *Positivity.* 2006. Vol. 10, no. 1. Pp. 39-49.

[130] Tabor J. Takagi functions and approximate midconvexity. *J. Math. Anal. Appl.* 2009. Vol. 356, no. 2. Pp. 729-737.

[131] Takacs L. An increasing continuous singular function. *The American Math. Monthly.* 1978. No. 85. Pp. 35-37.

[132] Takagi T. A simple example of the continuous function without derivate. *Proc. Phys. Math. Soc. Japan.* 1903. Vol. 1. Pp. 176-177.

[133] Tichy R. F., Uitz J. An extension of Minkowski's singular function. *Appl. Math. Lett.* 1995. Vol. 8, no. 5. Pp. 39-46.

[134] The Cantor function / O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, M. Vuorinen. *Expo. Math.* 2006. No. 24. Pp. 1-37.

[135] Thim Y. Continuous nowhere differentiable functions. *Master thesis of science programme. Department of Mathematics.* Sweden: Lulea Uni-

versity of Technology. 2003. 94 pp. http://epubl.luth.se/1402-1617/2003/320/LTU-EX-03320-SE.pdf.

[136] Viader P., Paradis J., Bibiloni L. A new light on Minkowski's ?(x) function. *Number Theory.* 1998. Vol. 73, no. 2. Pp. 212-227.

[137] Viader P., Paradis J., Bibiloni L. The derivative of Minkowski's ?(x) function. *Math. Anal. Appl.* 2001. Vol. 253, no. 1. Pp. 107-125.

[138] Weierstrass K. Uber continuirliche funktionen eines reelen arguments die fur keine werth des letztern einen bestimmten differentialquotienten besitzen. *Math. Werke.* 1895. No. 2. Pp. 71-74.

[139] Wiener N., Wintner A. A Fourier-Stieltjes transforms and singular infinite convolutions. *Amer. J. Math.* 1938. Vol. 60, no. 3. Pp. 512-522.

[140] Zamfirescu T. Most monotone functions are singular. *Amer. Math. Mon.* 1981. Vol. 88. Pp. 47-49.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ АВТОРА

[1а] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013. № 15. С. 144-155.

[2а] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Один клас неперервних ніде не монотонних функцій з автомодельними властивостями. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014. № 16(2). С. 81-93.

[3а] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Про одну сім'ю неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2015. № 17 (2). С. 17-28.

[4а] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розподіл значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу. *Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики:* зб. праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Вид-во Ін-т математики НАН України, 2017. Т.14, № 2. С. 110-121.

[5а] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Структура і спектральні властивості розподілу значень немонотонної функції канторівського типу. *Фрактальний аналіз та суміжні питання:* зб. праць Ін-ту математики НАН України. Київ: Вид-во Ін-т математики НАН України, 2017. Т. 14, № 4. С. 111-124.

[6а] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу. *Не-*

лінійні коливання. 2018. Т. 21, № 1. С. 116-130.

[7[a]] Працьовитий М. В., Жабровець О. В., Свинчук О. В. Про сингулярні функції в курсі математичного аналізу. *Актуальні проблеми методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін: матеріали Міжнар. наук. конф., 18-19 січня 2013 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2013. С. 113-115.

[8[a]] Працьовитий М. В., Жабровець О. В., Свинчук О. В. Інтегрування неперервних функцій, графіки яких є самоафінними або квазісамоафінними. *Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі: матеріали Всеукр. наук.-метод. конф., 26–27 червня 2013 р.* Київ: НУХТ, 2013. С. 17-18.

[9[a]] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Сингулярні немонотонні функції, визначені в термінах Q_s^*-зображення аргумента. *Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механік, до 100-річчя від дня народження членакореспондента НАН України Г. М. Положого: матеріали Міжнар. матем. конф., 23-24 квітня 2014 р.* Київ, 2014. С. 119.

[10[a]] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Неперервні ніде не монотонні функції (способи задання та методи дослідження). *Матеріали XV Міжнар. наук. конф. імені академіка Михайла Кравчука. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз. 15-17 травня 2014 р.* Київ: НТУУ "КПІ", 2014. Т.2. С. 167-168.

[11[a]] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Один клас ніде не монотонних функцій. *Тези доповідей IV Всеукр. наук. конф. молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р.* Київ: НТУУ "КПІ", 2015. С. 51.

[12[a]] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Інтегральні властивості ніде не монотонних функцій однієї скінченно-параметричної сім'ї. *Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі: Міжнар. наук.-метод. конф., 25-26 червня 2015 р.* Київ: НУХТ, 2015. С. 30-31.

[13[a]] Свинчук О. В., Працьовитий М. В. Самоафінні, сингулярні, немонотонні функції канторівського типу. *Актуальні проблеми сучасної математики і фізики та методика їх навчання: V Всеукр. наук. конф. молодих вчених з математики та фізики, 25-26 квітня 2016 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2016. С. 21.

[14[a]] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Сингулярні функції канторівського типу, які не мають проміжків монотонності за винятком проміжків сталості. *Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі, присвячена пам'яті професора С. С. Левіщенка: матеріали Всеукр. наук.-метод. конф., 7–8 жовтня 2016 р.* Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2016. С. 69.

[15[a]] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Немонотонні сингулярні функції канторівського типу. *Відкриті еволюціонуючі системи: зб. праць IV Міжнар. наук.-практ. конф., 20 – 21 травня 2016 р.* Ніжин: ВНЗ ВП НУБіП України НАІ, 2017. Ч.2. С. 52-57.

[16[a]] Свинчук О. В., Працьовитий М. В. Одна сім'я неперервних немонотонних сингулярних функцій канторівського типу з фрактальними властивостями. *VI Всеукр. конф. молодих вчених з математики та фізики, 21-22 квітня 2017 р.* Київ: НаУКМА, 2017. С. 32.

[17[a]] Свинчук О. В., Працьовитий М. В. Автомодельні та інтегральні властивості однієї сім'ї немонотонних сингулярних функцій канторівського типу. *Тези доповідей Міжнар. конф. молодих математиків до 100-річчя з дня народження Ю.О. Митропольського, 7-10 червня 2017 р.* Київ: Ін-т математики НАН України, 2017. С. 46.

[18[a]] Працьовитий М. В., Свинчук О. В. Розподіл значень однієї сингулярної немонотонної функції канторівського типу. *Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь, присвячена 85-річчю доктора фізико-математичних наук, професора, академіка НАПН України М. І. Шкіля: тези доповідей Міжнар. наук. конф., 13-14 грудня 2017 р.* Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2017. С. 71-72.