НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Зембик Василь Васильович

УДК 512.552

ЗОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ НОДАЛЬНИХ АЛГЕБР

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
Дрозд Юрій Анатолійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу алгебри.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук
Петричкович Василь Михайлович,
Інститут прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,
старший науковий співробітник,
завідувач відділу алгебри;

кандидат фізико-математичних наук
Головащук Наталія Сергіївна,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
старший науковий співробітник
кафедри алгебри та математичної логіки.

Захист відбудеться “01” грудня 2015 р. о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий “28” жовтня 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради,
доктор фіз.-мат. наук **Максименко С. І.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія зображень бере свій початок від робіт Фробеніуса і Бернсайда про зображення скінченних груп та їх застосування. Надалі, завдяки роботам Е. Нетер, Р. Брауера, І. Шура та інших математиків, вона перетворилася на теорію зображень алгебр, хоча спеціальний розгляд групових алгебр продовжував відігравати істотну роль. Спочатку розглядалися переважно напівпрості алгебри, прикладами яких є групові алгебри скінченних груп над полем комплексних або дійсних чисел. Але поступово центральний інтерес перемістився на ненапівпрості алгебри, зокрема на модулярні зображення груп. У становленні теорії зображень ненапівпростих алгебр вирішальну роль відіграли роботи Р. Брауера, Т. Накаями, І. Райнера, Джанса, а пізніше М. Ауслендера, Тачікави, П. Габріеля, К. Рінгеля та інших. Важливий внесок у розвиток цієї теорії зробили й українські математики, такі як С. Д. Берман, П. М. Гудівок, А. В. Ройтер, С. А. Кругляк, Ю. А. Дрозд, С. А. Овсієнко.

Досить скоро стало зрозумілим, що при вивченні зображень ненапівпростих алгебр виникають зовсім нові проблеми, які часто ведуть до дуже складних задач. Перш за все, на відміну від напівпростого випадку, тут може бути нескінченно багато нерозкладних зображень. У зв'язку з цим Брауер і Тролл висунули дві гіпотези, які пізніше були доведені у роботах Ройтера[1], Батісти[2], Бонгартца[3] :

(1) якщо алгебра має нескінченно багато нерозкладних зображень, то їх розмірності необмежені;

(2) якщо поле нескінченне і алгебра має нескінченно багато нерозкладних зображень, то існує безліч розмірностей, у кожній з яких є нескінченно багато нерозкладних зображень.

Алгебри, які мають скінченну кількість нерозкладних зображень, називаються *зображувально скінченними*, а ті, які мають нескінченну кількість нерозкладних зображень — *зображувально нескінченними*.

[1]Ройтер А. В. *Неограниченность размерностей неразложимых представлений алгебры, имеющей бесконечно много неразложимых представлений* / А. В. Ройтер // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 6. – С. 1275–1282.

[2]Bautista R. *On algebras of strongly unbounded representation type* / R. Bautista // Comment. Math. Helv. – 1985. – **60**. – P. 392–399.

[3]Bongartz K. *Indecomposable modules are standard* / K. Bongartz // Comment. Math. Helv. – 1985. – **60**. – P. 400–410.

Надалі виявилось, що зображувально нескінченні алгебри теж діляться на два типи:

(1) *ручні алгебри*, для яких нерозкладні зображення фіксованої розмірності утворюють скінченну кількість однопараметричних сімей;

(2) *дикі алгебри*, класифікація зображень яких містить у собі класифікацію довільних наборів матриць з точністю до спряження.

Очевидно, у другому випадку годі сподіватися на повну класифікацію — тут необхідні істотно інші підходи до вивчення зображень. Донован і Фрайсліх[4] висунули гіпотезу, що кожна алгебра є або ручною, або дикою. Пізніше цю гіпотезу довів Ю. А. Дрозд[5].

На теперішній час не існує загального критерію, який би давав змогу виявити для кожної алгебри, до якого з трьох типів (зображувально скінченний, ручний чи дикий) вона відноситься. Тому значна кількість робіт присвячена конкретним класам алгебр. Серед них найбільш вивченими є наступні.

(1) Алгебри шляхів сагайдаків (орієнтованих графів). Для них задача про зображувальний тип вирішена в роботах Габріеля[6], Назарової[7], Донована і Фрайсліх[8].

(2) Алгебри, у яких квадрат радикалу нульовий (роботи Габріеля та Кругляка[9]).

(3) Лагідні та скручено-лагідні алгебри (вони завжди є або зображувально скінченними, або ручними[10]).

[4] Donovan P. *Some evidence for an extension of the Brauer–Thrall conjecture* / P. Donovan, M. R. Freislich // Sonderforschungsbereich Teor. Math. (Bonn). – 1972. – **40**. – P. 24–26.

[5] Дрозд Ю. А. *Ручные и дикие матричные задачи* / Ю. А. Дрозд // Представления и квадратичные формы. Труды Мат. ин-та АН УССР. – 1979. – С. 39–74.

[6] Gabriel P. *Unzerlegbare Darstellungen* / P. Gabriel // Manuscripta Math. – 1972. – **6**, № 1. – P. 71–103.

[7] Назарова Л. А. *Представления колчанов бесконечного типа* / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 4. – С. 752–791.

[8] Donovan P. *The representation theory of finite graphs and associated algebras* / P. Donovan, M. R. Freislich // Carleton Math. Lecture Notes. – 1973. – № 5. – P. 3–86.

[9] Кругляк С. А. *Представления алгебр, квадрат радикала которых равен нулю* / С. А. Кругляк // Записки науч. семин. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 60–68.

[10] Bekkert V. *Indecomposables in derived categories of skewed-gentle algebras* / V. Bekkert, E. N. Marcos and H. Merklen. // Comm. Algebra. – 2003. – **31**. – P. 2615–2654.

Отже, знаходження нових класів алгебр, для яких можна визначити зображувальний тип, є актуальною задачею сучасної теорії зображень. До цього напрямку належить і дана дисертація. Клас алгебр, який у ній розглядається, виник за аналогією з деякими роботами з теорії зображень над кільцями дискретної оцінки. Саме Ю. А. Дрозд[11] розглянув один клас кілець, для яких задача опису всіх скінченнопороджених модулів є ручною. Надалі, за аналогією з комутативними кільцями геометричного походження, ці кільця були названі *нодальними алгебрами*. Виявилось також, що ці алгебри мають й інші важливі властивості. Наприклад, вони є не просто ручними, а *похідно ручними*, тобто мають ручну похідну категорію. Зауважимо, що алгебри, визначені в цій роботі, за означенням є нескінченновимірними. Природно виникло питання про їх скінченновимірні аналоги, означення яких можна дати дослівно так само. Вже прості приклади показали, що нодальні скінченновимірні алгебри можуть бути як ручними, так і дикими. Тому задача про зображувальний тип скінченновимірних нодальних алгебр є природною й цікавою з точки зору теорії зображень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі алгебри згідно із загальним планом досліджень в рамках науково-дослідної теми "Теорія зображень та її застосування в алгебрі, геометрії та топології" (номер державної реєстрації 0111U002096).

Метою дослідження є вивчення будови нодальних алгебр та опис їх зображувальних типів.

Об'єктом дослідження є нодальні алгебри.

Предмет дослідження — будова нодальних алгебр, опис зображень таких алгебр над алгебраїчно замкненим полем.

Завдання дослідження:

- дослідити будову нодальних алгебр над довільним полем та перенести ці результати на випадок алгебраїчно замкненого поля;
- встановити зв'язок нодальних алгебр з іншими класами алгебр, зокрема із лагідними та скручено-лагідними;
- описати зображувальні типи нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем.

[11] Дрозд Ю. А. *Конечные модули над чисто нетеровыми алгебрами* / Ю. А. Дрозд // Труды Мат. ин-та АН УССР. – 1990. – **183**. – С. 56–68.

Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

- визначено новий клас скінченновимірних алгебр — *нодальні алгебри*; встановлено, що властивість нодальності є інваріантною відносно Моріта-еквівалентності;

- описано будову нодальних алгебр; встановлено, що базова нодальна алгебра отримується зі спадкової операціями *склеювання компонентів*, *роздуття компоненти*, *обмеження компоненти* та *розширення компоненти*, які визначені в розділі 2; у випадку алгебр над алгебраїчно замкненим полем застосовуються лише операції склеювання та роздуття компонентів;

- встановлено, що кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є нодальною й визначено, які нодальні алгебри є лагідними або скручено-лагідними;

- виділено спеціальний клас склеювання компонентів — *неістотні склеювання* — і встановлено, що неістотні склеювання не впливають на зображувальний тип алгебри;

- встановлено зображувальні типи нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем, які отримуються операціями склеювання та роздуття компонентів зі спадкових алгебр Динкінського типу $\mathrm{A}-\mathrm{D}-\mathrm{E}$ або Евклідового типу $\widetilde{\mathrm{A}}-\widetilde{\mathrm{D}}-\widetilde{\mathrm{E}}$.

Практичне значення одержаних результатів.

Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути використані при подальших дослідженнях зі структурної теорії та теорії зображень скінченновимірних алгебр, а також у суміжних галузях сучасної алгебри.

Методи дослідження.

У роботі використовуються методи лінійної алгебри та теорії зображень.

Особистий внесок здобувача.

Всі наукові результати, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Постановка задач, вибір методів дослідження, аналіз результатів та загальна координація роботи належать науковому керівнику. У спільних з науковим керівником публікаціях за темою дисертації внески співавторів є рівними.

Апробація результатів дисертації.

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження С. М. Чернікова (Київ, 20–26 серпня 2012 р.);
- 9-ій Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Львів, 8–13 липня 2013 р.);
- Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (Київ, 7–12 липня 2014 р.);
- Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 3–6 червня 2015 р.);
- X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (Одеса, 20–27 серпня 2015 р.);
- засіданнях Алгебраїчного семінару Інституту математики НАН України.

Публікації.

Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 5-х статтях [1–5] у фахових виданнях та тезах доповідей 5-х міжнародних наукових конференцій [6–10].

Структура й об'єм дисертації.

Дисертаційна робота складається зі вступу, 5-и розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 41 найменування. Повний обсяг роботи складає 121 сторінку друкованого тексту.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику Юрію Анатолійовичу Дрозду за постановку задач та постійну увагу і підтримку в роботі.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи та наукову новизну одержаних результатів.

В *першому* розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за її темою, сформульовано основні поняття і твердження, які використовуються в дисертації.

У *другому* розділі дисертації вивчається будова нодальних алгебр над довільним полем і, як наслідок, над алгебраїчно замкненим. Описується конструкція, якою нодальні алгебри отримуються зі спадкових.

В підрозділі 2.1 наводиться означення нодальної алгебри і доводиться, що властивість нодальності є інваріантною відносно Моріта-еквівалентності.

Ми фіксуємо деяке поле $\mathbf{k}$ і розглядаємо скінченновимірні $\mathbf{k}$-алгебри.

Алгебра A називається *нодальною*, якщо існує спадкова алгебра H з $\operatorname{rad} H = J$, $H \supset A \supset J$ і така, що

1) $\operatorname{rad} A = J$;

2) $\operatorname{length}_A(H \otimes_A U) \leqslant 2$ для кожного простого лівого A-модуля U.

Будемо казати, що нодальна алгебра A *пов'язана зі спадковою алгеброю* H.

Умову 2) означення нодальної алгебри можна замінити на еквівалентну симетричну:

$$\operatorname{length}_A(V \otimes_A H) \leqslant 2 \text{ для кожного простого правого } A\text{-модуля } V.$$

Твердження 2.1. *Якщо алгебра A' Моріта-еквівалентна нодальній алгебрі A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, то A' є нодальною алгеброю, пов'язаною зі спадковою алгеброю H', яка Моріта-еквівалентна H.*

Дане твердження дозволяє розглядати лише базові нодальні алгебри A, тобто такі, що $A/\operatorname{rad} A$ є прямим добутком тіл.

В підрозділі 2.2 вивчається будова нодальних алгебр над довільним полем.

Тут ми розглядаємо лише алгебри сепарабального типу. Це означає, що фактор-алгебра за радикалом є сепарабельною. Відомо, що спадкова алгебра H над досконалим полем задається парою $(\bar{H}, V)$, де $\bar{H}$ — напівпроста алгебра, а V — $\bar{H}$-бімодуль. Якщо алгебра $\bar{H}$ є базовою, то $\bar{H} = \bar{H}_1 \times \ldots \times \bar{H}_s$, де $\bar{H}_i$ — тіла. $V = \bigoplus V_{ij}$, де V_{ij} — це $\bar{H}_i$-$\bar{H}_j$-бімодуль.

Вкажемо конструкцію, яка дає всі базові нодальні алгебри сепарабельного типу. Назвемо *нодальними даними* набір, який складається з:

(1) пари $(\bar{H}, V)$, де $\bar{H}$ — базова напівпроста алгебра ($\bar{H} = \prod_{i \in I} \bar{H}_i$, $\bar{H}_i$ — тіла), V — деякий $\bar{H}$-бімодуль;

(2) бінарного симетричного відношення $\sim$ на компонентах $\bar{H}$ (або на їх номерах) такого, що для кожного $i \in I$ існує не більше одного $j \in I$ такого, що $i \sim j$, причому якщо $i \sim j$, то $\bar{H}_i = \bar{H}_j$;

(3) підмножини $J \subset I$ такої, що якщо $i \in J$, то $i \nsim j$ для всіх j, і для кожного $i \in J$ задано

   a) або підтіло $\bar{A}_i \subset \bar{H}_i$ так, що $(\bar{H}_i : \bar{A}_i) = 2$,

   b) або розширення $\bar{A}_i \supset \bar{H}_i$ так, що $(\bar{A}_i : \bar{H}_i) = 2$.

   У випадку *a*) будемо писати $i \in J_-$, а у випадку *b*) — $i \in J_+$. Очевидно, що $J = J_- \cup J_+$.

   У випадку *b*) ми розглядатимемо $\bar{A}_i$ як векторний простір над $\bar{H}_i$. Тоді відображення $x \mapsto xa$, де $a, x \in \bar{A}_i$, ототожнює елемент $a \in \bar{A}_i$ з лінійним оператором у $\bar{H}_i$-векторному просторі $\bar{A}_i$, тобто з матрицею із $\mathrm{Mat}(2, \bar{H}_i)$. Отже, в цьому випадку ми можемо ототожнити $\bar{A}_i$ з підалгеброю в $\mathrm{Mat}(2, \bar{H}_i)$.

За даними пунктів (1)-(3) будується базова нодальна алгебра $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ в такий спосіб:

- Розглядаємо спадкову алгебру H типу $(\bar{H}, V)$ з кратностями

$$m_i = \begin{cases} 2, & \text{якщо } i \sim i, \text{ або } i \in J_+, \\ 1 & \text{— в іншому випадку.} \end{cases}$$

- У фактор-алгебрі $H/\operatorname{rad} H = \prod_{j=1}^{s} \mathrm{Mat}(m_j, \bar{H}_j)$ розглядаємо підалгебру $\bar{A}$, яка складається з таких наборів $(a_1, \ldots, a_s)$, що:

   1) $a_j = a_k$, якщо $j \sim k$ і $k \neq j$; в цьому випадку будемо говорити, що A *отримується з H склеюванням компонентів $\bar{H}_j$ і $\bar{H}_k$*;

   2) a_j є діагональною матрицею, якщо $j \sim j$; в цьому випадку будемо говорити, що A *отримується з H роздуттям компоненти $\bar{H}_j$*;

   3) $a_i \in \bar{A}_i$, якщо $i \in J_-$; в цьому випадку будемо казати, що A *отримується з H обмеженням компоненти $\bar{H}_i$*;

   4) $a_i \in \bar{A}_i$, якщо $i \in J_+$ (ми застосовуємо ототожнення $\bar{A}_i$ з підалгеброю в $\mathrm{Mat}(2, \bar{H}_i)$); тут ми будемо казати, що A *отримується з H розширенням компоненти $\bar{H}_i$*.

- Розглядаємо підалгебру $A = A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_i, \bar{A}_i) \subset H$, яка є прообразом підалгебри $\bar{A} \subset \bar{H}$. За побудовою ця алгебра є базовою.

Теорема 2.1. *Алгебра $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ є нодальною, і кожна базова нодальна алгебра сепарабельного типу ізоморфна $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ для деяких нодальних даних.*

В підрозділі 2.3 розглядається випадок будови нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем.

При побудові нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем застосовуються лише операції склеювання і роздуття простих компонентів алгебри.

Нехай B — базова алгебра, $\bar{B} = B/\operatorname{rad} B = \bigoplus_i \bar{B}_i$, де $\bar{B}_i \simeq \mathbf{k}$ — прості B-модулі. Виберемо попарно різні індекси $i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}$ та $j_1, j_2, \ldots, j_r$ з $\{1, 2, \ldots, m\}$. Побудуємо рекурсивно алгебри $A_0, A_1, \ldots, A_{r+s}$:

$A_0 = B$;

для $1 \leq k \leq r$ алгебра A_k одержується з A_{k-1} шляхом склеювання компонентів $\bar{B}_{i_k}$ and $\bar{B}_{j_k}$;

для $r < k \leq r+s$ алгебра A_k одержується з A_{k-1} шляхом роздуття компоненти $\bar{B}_{i_k}$.

В цьому випадку ми кажемо, що алгебра $A = A_{r+s}$ одержується з B за допомогою *допустимої послідовності склеювань і роздуттів*, що визначається послідовністю індексів $(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}, j_1, j_2, \ldots, j_r)$. Зауважимо, що порядок цих склеювань і роздуттів не впливає на результуючу алгебру A.

Справедлива наступна теорема:

Теорема 2.2. *Базова алгебра A є нодальною тоді і тільки тоді, коли вона ізоморфна алгебрі, яка одержується з базової спадкової алгебри H за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів простих компонентів.*

Оскільки кожна базова спадкова алгебра над алгебраїчно замкненим полем ізоморфна алгебрі шляхів деякого сагайдака Q без орієнтованих циклів, то з теореми 2.2 випливає, що базова нодальна алгебра A ізоморфна алгебрі, яка отримується із базової спадкової алгебри H з сагайдаком Q за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів вершин цього сагайдака.

Отже, визначивши сагайдак Q і послідовність його вершин $(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}, j_1, j_2, \ldots, j_r)$, можна визначити базову нодальну алгебру.

Насправді, можна легко описати отриману алгебру A за допомогою її сагайдака і співвідношень. А саме, ми повинні діяти наступним чином:

1. Для кожного $1 \leq k \leq r$
   (a) ми склеюємо вершини i_k та j_k, при цьому зберігаючи всі стрілки, які починаються або закінчуються в цих вершинах;
   (b) якщо стрілка α починається у вершині i_k (або j_k), а стрілка β закінчується у вершині j_k (відповідно i_k), то ми накладаємо співвідношення $\alpha\beta = 0$.
2. Для кожного $r < k \leq r + s$
   (a) ми замінюємо кожну вершину i_k двома вершинами i'_k та i''_k;
   (b) ми замінюємо кожну стрілку $\alpha : j \to i_k$ двома стрілками $\alpha' : j \to i'_k$ та $\alpha'' : j \to i''_k$;
   (c) ми замінюємо кожну стрілку $\beta : i_k \to j$ двома стрілками $\beta' : i'_k \to j$ та $\beta'' : i''_k \to j$;
   (d) якщо стрілка β починається у вершині i_k, а стрілка α закінчується в цій вершині, ми накладаємо співвідношення $\beta'\alpha' = \beta''\alpha''$.

Будемо казати, що A є *нодальна алгебра типу* Q.

Щоб визначити нодальну алгебру, яка не обов'язково є базовою, ми також повинні прописати кратності l_i для кожної вершини i так, що $l_{i_k} = l_{j_k}$ для $1 \leq k \leq r$.

В підрозділі 2.4 встановлено зв'язок між нодальними та скручено-лагідними алгебрами.

Нагадаємо, що алгебра A називається *лагідною*, якщо вона Моріта-еквівалентна фактор-алгебрі $\mathbf{k}Q/\langle R\rangle$, де пара (Q, R) є лагідною (через $\langle R\rangle$ ми позначаємо ідеал алгебри $\mathbf{k}Q$, породжений всіма елементами $\lambda_i \in R$).

Пара (Q, R) називається *лагідною*, якщо виконуються наступні умови:

1) для кожної вершини $i \in Q$, існує не більше двох стрілок, які починаються в i та не більше двох стрілок, які закінчуються в i;

2) усі співвідношення в R мають вигляд $\alpha\beta$ для деяких стрілок α, β;

3) якщо існують дві стрілки α_1, α_2, які починаються в i, то для кожної стрілки β, яка закінчується в i, або $\alpha_1\beta \in R$, або $\alpha_2\beta \in R$, але не одночасно;

4) якщо існують дві стрілки β_1, β_2, які закінчуються в i, то для кожної стрілки α, яка починається в i, або $\alpha\beta_1 \in R$, або $\alpha\beta_2 \in R$, але не одночасно.

Базова алгебра A називається *скручено-лагідною*, якщо вона отримується з лагідної алгебри B шляхом роздуття деяких вершин її сагайдака, в які не більше однієї стрілки α входить і не більше однієї стрілки β виходить, причому, якщо обидві стрілки присутні, то $\beta\alpha \notin R$.

Наступні дві теореми встановлюють зв'язок між нодальними та скручено-лагідними алгебрами.

Теорема 2.3. *Нодальна алгебра A є скручено-лагідною тоді і тільки тоді, коли вона одержується з прямого добутку спадкових алгебр типу* A *або* $\widetilde{\mathrm{A}}$ *за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів, що визначається послідовністю вершин таких, що для кожної з них існує не більше однієї стрілки, яка починається, і не більше однієї стрілки, яка закінчується в цій вершині. Причому, алгебра A є лагідною тоді і тільки тоді, коли вона одержується з використанням лише склеювань.*

Теорема 2.4. *Кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є нодальною, причому сагайдак відповідної спадкової алгебри є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу* A *та* $\tilde{\mathrm{A}}$ *(тобто лінійок та циклів).*

В *третьому* розділі дисертаційної роботи розглядаються нодальні алгебри типу A та описуються їх зображувальні типи.

У підрозділі 3.1 розглянуто спеціальний клас склеювань — *неістотні склеювання* — й встановлено, що вони зберігають зображувальний тип алгебри.

Означення 3.1. Нехай базова алгебра B задається сагайдаком Q зі співвідношеннями і алгебра A отримується з B склеюванням вершин i та j сагайдака Q таких, що не існує стрілок, які входять у вершину i та стрілок, які виходять з вершини j. Будемо казати, що таке склеювання є *неістотним.*

Тоерема 3.1. *За умов означення 3.1, існує еквівалентність між категоріями B-mod$/\langle \bar{B}_i, \bar{B}_j\rangle$ і A-mod$/\langle \bar{A}_{ij}\rangle$, де $\mathcal{C}/\langle\mathfrak{M}\rangle$ позначає фактор-категорію від $\mathcal{C}$ за модулем ідеалу морфізмів, які пропускаються через* *пряму суму об'єктів з множини $\mathfrak{M}$. (Тут $\bar{B}_i, \bar{B}_j$ — прості B-модулі, які відповідають вершинам сагайдака i та j відповідно, $\bar{A}_{ij}$ — простий A-модуль, який відповідає вершині, що утворилася після склеювання i та j).*

У підрозділі 3.2 наведені основні означення та теореми, які стосуються виключних алгебр. Такі алгебри належать до нодальних типу A.

Означення 3.2. Нодальна алгебра A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, де $H \simeq \mathbf{k}Q$ і Q — сагайдак Динкіна типу A або сагайдак Евкліда типу $\widetilde{\mathrm{A}}$, називається *нодальною алгеброю типу* A.

Тобто, нодальні алгебри типу A отримуються за допомогою операцій склеювання і роздуття із сагайдаків типу A або $\widetilde{\mathrm{A}}$. Нагадаємо, що до сагайдаків типу A або $\tilde{\mathrm{A}}$ належать наступні графи з довільною орієнтацією ребер:

$$\mathrm{A}_n: \qquad 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } \cdots \text{ --- } n \qquad (n \geq 1),$$

$$\widetilde{\mathrm{A}}_n: \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, no head] \arrow[rrrr, no head, bend left] & 2 \arrow[r, no head] & \cdots \arrow[r, no head] & n \arrow[r, no head] & (n+1) \end{tikzcd} \qquad (n \geq 0).$$

Із теореми 2.3 випливає, що лагідні і скручено-лагідні алгебри належать до нодальних алгебр типу A. Добре відомо, що вони є ручними. Існує ще два класи алгебр, які є нодальними типу A і зображувальний тип яких може бути скінченним, ручним або диким. Це є *виключні* і *супер-виключні* алгебри.

Означення 3.3. Нехай H — базова спадкова алгебра з сагайдаком Q типу A.

1. Назвемо пару вершин (i, j) сагайдака Q *виключною*, якщо вони містяться в повному підсагайдаку вигляду

$$\bullet \xrightarrow{\beta} \underset{\bullet}{i} \xleftarrow{\alpha_1} \bullet \overset{\alpha_2}{\text{———}} \cdots \overset{\alpha_{n-1}}{\text{———}} \bullet \xleftarrow{\alpha_n} \underset{\bullet}{j} \xleftarrow{\gamma} \bullet \qquad (1)$$

   або

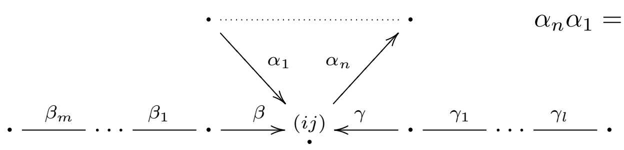
$$\bullet \xleftarrow{\beta} \underset{\bullet}{i} \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \overset{\alpha_2}{\text{———}} \cdots \overset{\alpha_{n-1}}{\text{———}} \bullet \xrightarrow{\alpha_n} \underset{\bullet}{j} \xrightarrow{\gamma} \bullet\,, \qquad (2)$$

   де орієнтація стрілок $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ є довільною. Якщо $n = 1$, то $\alpha_1 = \alpha_n : j \to i$ у випадку (1) і $\alpha_1 = \alpha_n : i \to j$ у випадку (2).

2. Будемо називати склеювання виключної пари вершин *виключною склейкою.*

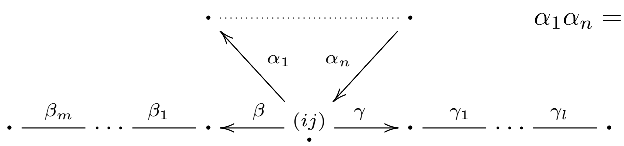
3. Нодальна алгебра називається *виключною*, якщо вона отримується зі спадкової алгебри типу A за допомогою деякої послідосності склеювань, що складаються з однієї виключної склейки і, можливо, кількох неістотних склеювань.

Зауважимо, що в результаті такої склейки вершин i та j алгебрі A буде відповідати сагайдак зі співвідношеннями



$$\alpha_n\alpha_1 = \alpha_n\beta = 0 \qquad (3)$$

у випадку (1) або



$$\alpha_1\alpha_n = \beta\alpha_n = 0 \qquad (4)$$

у випадку (2). Пунктирна лінія містить стрілки $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$; якщо $n = 1$, то маємо петлю α у вершині (ij) зі співвідношеннями $\alpha^2 = 0$ і, відповідно, $\alpha\beta = 0$ або $\beta\alpha = 0$. Будемо казати, що A — (n, m, l)-*виключна алгебра.*

В наступній теоремі ми визначаємо зображувальні типи таких алгебр.

Теорема 3.2. *(n,m,l)-виключна алгебра є*

(1) скінченно-зображувальною у випадках:

- *(a)* $m = l = 0$,
- *(b)* $l = 0$, $m = 1$, $n \leq 3$,
- *(c)* $l = 0, 2 \leq m \leq 3$, $n = 1$,
- *(d)* $m = 0$, $l = 1$, $n \leq 2$;

(2) ручною у випадках:

(a) $l = 0$, $m = 1$, $n = 4$,

(b) $l = 0$, $m = 2$, $n = 2$,

(c) $l = 0$, $m = 4$, $n = 1$,

(d) $m = 0$, $l = 1$, $n = 3$;

(3) дикою в усіх інших випадках.

Означення 3.4. Нодальна алгебра називається *супер-виключною*, якщо вона отримується з алгебри вигляду (3) або (4) при $n = 3$ за допомогою склеювання кінців стрілки α_2 у випадку, коли таке склеювання не є неістотним, і, можливо, кількох неістотних склеювань.

Наступне твердження дає відповідь на питання про зображувальні типи супер-виключних алгебр.

Твердження 3.1. *Супер-виключна алгебра є*

(1) скінченно-зображувальною, якщо $m = l = 0$,

(2) ручною, якщо $m + l = 1$,

(3) дикою, якщо $m + l > 1$.

У підрозділі 3.3 дано повний опис зображувальних типів нодальних алгебр типу A.

Означення 3.5. 1) Будемо називати алгебру A *квазі-лагідною*, якщо вона отримується з лагідної або скручено-лагідної алгебри за допомогою допустимої послідовності неістотних склеювань.

2) Будемо називати алгебру A *хорошою виключною* (*хорошою супер-виключною*), якщо вона є виключною (відповідно, супер-виключною) і не дикою.

Теорема 3.3. *Неспадкова нодальна алгебра типу* A *є скінченно-зображувальною або ручною тоді і тільки тоді, коли вона або квазі-лагідна, або хороша виключна, або хороша супер-виключна. В інших випадках вона є дикою.*

В *четвертому* розділі розглядаються нодальні алгебри типу D та визначаються їх зображувальні типи.

У підрозділі 4.1 приводяться основні означення та теореми, які стосуються нодальних алгебр типу D. Очевидно, що такі алгебри отримуються допустимою послідовністю склеювань та роздуттів зі спадкової алгебри з сагайдаком типу D або $\widetilde{\mathrm{D}}$:

$$\mathrm{D}_{n+3}: \quad \begin{tikzcd}[arrows=-] 1 \arrow[dr] & & & & \\ & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (n+3) \\ 2 \arrow[ur] & & & & \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{\mathrm{D}}_{n+3}: \quad \begin{tikzcd}[arrows=-] 1 \arrow[dr] & & & & & 1' \\ & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (n+2) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & & & & 2' \end{tikzcd}$$

з довільною орієнтацією ребер.

Означення 4.1. Назвемо нодальну алгебру A *нодальною алгеброю типу* D, якщо у відповідних нодальних даних сагайдак Q має тип D або $\widetilde{\mathrm{D}}$, причому або одна з вершин $1, 2$ бере участь у склеюванні, або застосовується роздуття вершини 3. У випадку сагайдака типу $\widetilde{\mathrm{D}}$ ми, крім того, вважаємо, що або одна з вершин $1', 2'$ бере участь у склеюванні, або застосовується роздуття вершини $(n+2)$.

Якщо ці умови не виконуються, то нодальна алгебра може бути одержана із сагайдака типу A.

В теоремах 4.1 – 4.3 дається класифікація нодальних алгебр типу D за їх зображувальними типами.

Підрозділ 4.2 присвячений доведенню теорем 4.1 – 4.3.

У *п'ятому* розділі розглядаються нодальні алгебри типу E та визначаються їх зображувальні типи.

У підрозділі 5.1 приводяться основні означення та формулюються теореми, які стосуються нодальних алгебр типу E.

Означення 5.1. Нодальна алгебра A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, де $H \simeq \mathbf{k}Q$ і Q — сагайдак Динкіна типу E або сагайдак Евкліда типу $\tilde{\mathrm{E}}$, зветься *нодальною алгеброю типу* E.

Нагадаємо, що до сагайдаків типу E або $\tilde{\mathrm{E}}$ належать наступні графи з довільною орієнтацією ребер:

$$\mathrm{E}_6: \quad \begin{tikzcd}[arrows=-] & & 4 & & \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{E}_7: \quad \begin{tikzcd}[arrows=-] & & 4 \arrow[d] & & & \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{E}_8: \quad \begin{tikzcd}[arrows=-] & & 4 \arrow[d] & & & & \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & 8 \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_6: \quad \begin{tikzcd}[arrows=-] & & 6' \arrow[d] & & \\ & & 4 \arrow[d] & & \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_7: \quad \begin{tikzcd}[arrows=-] & & & 4 \arrow[d] & & & \\ 7' \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_8: \quad \begin{tikzcd}[arrows=-] & & 4 \arrow[d] & & & & & \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 6 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 8' \end{tikzcd}$$

В теоремах 5.1 – 5.3 дається класифікація нодальних алгебр типу E за їх зображувальними типами.

Підрозділ 5.2 присвячений доведенню теорем 5.1 – 5.3.

ВИСНОВКИ

Дисертацію присвячено дослідженню будови нодальних алгебр та їх зображень.

Основні результати дисертаційної роботи можна підсумувати таким чином:

- визначено новий клас скінченновимірних алгебр — *нодальні алгебри*; встановлено, що властивість нодальності є інваріантною відносно Моріта-еквівалентності;
- описано будову нодальних алгебр; встановлено, що базова нодальна алгебра отримується зі спадкової операціями *склеювання компонентів*, *роздуття компоненти*, *обмеження компоненти* та *розширення компоненти*, які визначені в розділі 2; у випадку алгебр над алгебраїчно замкненим полем застосовуються лише операції склеювання та роздуття компонентів;
- встановлено, що кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є нодальною й визначено, які нодальні алгебри є лагідними або скручено-лагідними;
- виділено спеціальний клас склеювання компонентів — *неістотні склеювання* — і встановлено, що неістотні склеювання не впливають на зображувальний тип алгебри;
- встановлено зображувальні типи нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Drozd Y. A. *Representations of nodal algebras of type* A / Y. A. Drozd, V. V. Zembyk // Algebra Discrete Math. – 2013. – **15**, № 2. – P. 179–200.
2. Зембик В. В. *Будова скінченновимірних нодальних алгебр*/ В. В. Зембик // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 415–419.
3. Дрозд Ю. А. *Зображувальний тип нодальних алгебр типу* D / Ю. А. Дрозд, В. В. Зембик // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 7. – С. 930–938.

4. Зембик В. В. *Зображувальний тип нодальних алгебр типу* E / В. В. Зембик // Спектральна теорія операторів та наборів операторів: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, №1. – С. 119–140.

5. Зембик В. В. *Скручено-лагідні алгебри є нодальними* / В. В. Зембик // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, №4. – С. 574–576.

Тези конференцій:

6. Zembyk V. *Representations of nodal algebras of type* A / V. Zembyk // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov. Book of abstracts. – Kyiv, 2012. – P. 181.

7. Zembyk V. *Representations of nodal finite dimensional algebras of type* A / V. Zembyk // 9^{th} International Algebraic Conference in Ukraine. Book of abstracts. – L'viv, 2013. – P. 230.

8. Zembyk V. *Representations of nodal algebras of type* D / V. Zembyk // International Algebraic Conference dedicated to 100^{th} anniversary of L. A. Kaluzhnin. Book of abstracts. – Kyiv, 2014. – P. 101.

9. Зембик В. В. *Зображення нодальних алгебр типів* D *і* E / В. В. Зембик // Міжнародна конференція молодих математиків. Тези доповідей. – Київ, 2015. – С. 32.

10. Zembyk V. *Representations of nodal algebras of types* D *and* E / V. Zembyk // *X* International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd. Book of abstracts. – Odessa, 2015. – P. 124.

АНОТАЦІЇ

Зембик В. В. *Зображення скінченновимірних нодальних алгебр.* — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук зі спеціальності 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Інститут математики НАН України, Київ, 2015.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню будови нодальних алгебр та їх зображень.

В роботі описано будову нодальних алгебр над довільним полем, а також виділено спеціалізацію цих результатів на випадок алгебраїчно замкненого поля. Показано, що нодальні алгебри отримуються зі спадкових за допомогою деяких операцій над їх простими компонентами. Було встановлено зв'язок між нодальними та скручено-лагідними алгебрами. Основним результатом є встановлення зображувальних типів нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем, які отримуються зі спадкових алгебр Динкінського типу $\mathrm{A}-\mathrm{D}-\mathrm{E}$ або Евклідового типу $\widetilde{\mathrm{A}}-\widetilde{\mathrm{D}}-\widetilde{\mathrm{E}}$.

Ключові слова: нодальна алгебра, спадкова алгебра, зображення, сагайдак, лагідна алгебра, скручено-лагідна алгебра, зображувальний тип, ручні алгебри, дикі алгебри.

Зембык В. В. *Представление конечномерных нодальных алгебр.* — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2015.

Диссертационная работа посвящена исследованию строения нодальных алгебр и их представлений.

В работе описано строение нодальных алгебр над произвольным полем, а также выделено специализацию этих результатов на случай алгебраически замкнутого поля. Показано, что нодальные алгебры получаются из наследственных с помощью некоторых операций над их простыми компонентами. Была установлена связь между нодальными и скрученно-мягкими алгебрами. Главным результатом является нахождение представленческих типов нодальных алгебр над алгебраически замкнутым полем, которые получаются из наследственных алгебр Дынкинского типа $\mathrm{A}-\mathrm{D}-\mathrm{E}$ или Евклидова типа $\widetilde{\mathrm{A}}-\widetilde{\mathrm{D}}-\widetilde{\mathrm{E}}$.

Ключевые слова: нодальная алгебра, наследственная алгебра, представление, колчан, мягкая алгебра, скрученно-мягкая алгебра, представленческий тип, ручные алгебры, дикие алгебры.

Zembyk V. V. *Representations of nodal finite dimensional algebras.* — Manuscript.

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.06 – Algebra and Number Theory. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2015.

The thesis is devoted to the study of the structure of nodal algebras and their representations.

The structure of nodal algebras over an arbitrary field is described. Furthermore, a specialisation of these results over an algebraically closed field is investigated. It is shown that nodal algebras are obtained from hereditary algebras using some operations on these simple components. It is proved that all gentle and skewed-gentle algebras are nodal and conditions are given for a nodal algebra to be gentle or skewed-gentle. Then the nodal algebras related to the hereditary algebras of Dynkin types $\mathrm{A}-\mathrm{D}-\mathrm{E}$ and of Euclidean types $\tilde{\mathrm{A}}-\tilde{\mathrm{D}}-\tilde{\mathrm{E}}$ are investigated and their representation types (finite, or tame, or wild) are established.

Keywords: nodal algebra, hereditary algebra, representation, quiver, gentle algebra, skewed-gentle algebra, representation type, tame algebras, wild algebras.

Підписано до друку 2015. Формат 60x84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. . Умов. друк. арк. .
Тираж 120 пр. Зам. .

Інститут математики НАН України,
01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.