НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукопису

Зембик Василь Васильович

УДК 512.552

ЗОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ НОДАЛЬНИХ АЛГЕБР

01.01.06 — алгебра та теорія чисел

Дисертація на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

доктор фіз.-мат. наук, професор,

член-кореспондент НАН України

Дрозд Юрій Анатолійович

Київ 2015

ЗМІСТ

ВСТУП

Роботу присвячено дослідженню будови нодальних алгебр та їх зображень.

Актуальність тематики.

Теорія зображень бере свій початок від робіт Фробеніуса і Бернсайда про зображення скінченних груп та їх застосування. Надалі, завдяки роботам Е. Нетер, Брауера, Шура та інших математиків, вона перетворилася на теорію зображень алгебр, хоча спеціальний розгляд групових алгебр продовжував відігравати істотну роль. Спочатку розглядалися переважно напівпрості алгебри, прикладами яких є групові алгебри скінченних груп над полем комплексних або дійсних чисел. Але поступово центральний інтерес перемістився на ненапівпрості алгебри, зокрема на модулярні зображення груп. У становленні теорії зображень ненапівпростих алгебр вирішальну роль відіграли роботи Брауера, Накаями, Райнера, Джанса, а пізніше М. Ауслендера, Тачікави, Габріеля, Рінгеля та інших. Важливий внесок у розвиток цієї теорії зробили й українські математики, такі як Берман, Гудівок, Ройтер, Кругляк, Дрозд, Овсієнко.

Досить скоро стало зрозумілим, що при вивченні зображень ненапівпростих алгебр виникають зовсім нові проблеми, які часто ведуть до дуже складних задач. Перш за все, на відміну від напівпростого випадку, тут може бути нескінченно багато нерозкладних зображень. У зв'язку з цим Брауер і Тролл висунули дві гіпотези, які пізніше були доведені у роботах Ройтера [19], Батісти [22], Бонгартца [24]:

(1) якщо алгебра має нескінченно багато нерозкладних зображень, то їх розмірності необмежені;

(2) якщо поле нескінченне і алгебра має нескінченно багато нерозкладних зображень, то існує безліч розмірностей, у кожній з яких є нескінченно багато нерозкладних зображень.

Алгебри, які мають скінченну кількість нерозкладних зображень, називаються *зображувально скінченними*, а ті, які мають нескінченну кількість нерозкладних зображень — *зображувально нескінченними*.

Надалі виявилось, що зображувально нескінченні алгебри теж діляться на два типи:

(1) *ручні алгебри*, для яких нерозкладні зображення фіксованої розмірності утворюють скінченну кількість однопараметричних сімей;

(2) *дикі алгебри*, класифікація зображень яких містить у собі класифікацію довільних наборів матриць з точністю до спряження.

Очевидно, у другому випадку годі сподіватися на повну класифікацію — тут необхідні істотно інші підходи до вивчення зображень. Донован і Фрайсліх [27] висунули гіпотезу, що кожна алгебра є або ручною, або дикою. Цю гіпотезу довів Ю. Дрозд у роботі [5].

На теперішній час не існує загального критерію, який би давав змогу виявити для кожної алгебри, до якого з трьох типів (зображувально скінченний, ручний чи дикий) вона відноситься. Тому значна кількість робіт присвячена конкретним класам алгебр. Серед них найбільш вивченими є наступні.

(1) Алгебри шляхів сагайдаків (орієнтованих графів). Для них задача про зображувальний тип вирішена в роботах [16, 28, 32].
(2) Алгебри, у яких квадрат радикалу нульовий [15, 32].
(3) Лагідні та скручено-лагідні алгебри (вони завжди є або зображувально скінченними, або ручними) [23].

Отже, знаходження нових класів алгебр, для яких можна визначити зображувальний тип, є актуальною задачею сучасної теорії зображень. До цього напрямку належить і дана дисертація. Клас алгебр, який у ній розглядається, виник за аналогією з деякими роботами з теорії зображень над кільцями дискретної оцінки. Саме, в роботі [6] був розглянутий один клас кілець, для яких задача опису всіх скінченнопороджених модулів є ручною. Надалі, за аналогією з комутативними кільцями геометричного походження, ці кільця були названі *нодальними алгебрами*. Виявилось також, що ці алгебри мають й інші важливі властивості. Наприклад, вони є не просто ручними, а *похідно ручними*, тобто мають ручну похідну категорію. Зауважимо, що алгебри, визначені в [6], за означенням є нескінченновимірними. Природно виникло питання про їх скінченновимірні аналоги, означення яких можна дати дослівно так само. Вже прості приклади показали, що нодальні скінченновимірні алгебри можуть бути як ручними, так і дикими. Тому задача про зображувальний тип скінченновимірних нодальних алгебр є природною й цікавою з точки зору теорії зображень.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалася в Інституті математики НАН України у відділі алгебри згідно із загальним планом досліджень в рамках науково-дослідної теми “Теорія зображень та її застосування в алгебрі, геометрії та топології" (номер державної реєстрації 0111U002096).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є вивчення будови нодальних алгебр та опис їх зображувальних типів.

Об'єктом дослідження є нодальні алгебри.

Предмет дослідження — будова нодальних алгебр, опис зображень таких алгебр над алгебраїчно замкненим полем.

Завдання дослідження:

- дослідити будову нодальних алгебр над довільним полем та перенести ці результати на випадок алгебраїчно замкненого поля;
- встановити зв'язок нодальних алгебр з іншими класами алгебр, зокрема із лагідними та скручено-лагідними;
- описати зображувальні типи нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Визначено новий клас скінченновимірних алгебр — *нодальні алгебри*. Встановлено, що властивість нодальності є інваріантною відносно Моріта-еквівалентності.
2. Описано будову нодальних алгебр. Встановлено, що базова нодальна алгебра отримується зі спадкової операціями *склеювання компонентів*, *роздуття компоненти*, *обмеження компоненти* та *розширення компоненти*, які визначені в розділі 2. У випадку алгебр над алгебраїчно замкненим

полем застосовуються лише операції склеювання та роздуття компонентів.

3. Встановлено, що кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є нодальною й визначено, які нодальні алгебри є лагідними або скручено-лагідними.
4. Виділено спеціальний клас склеювання компонентів — *неістотні склеювання* — і встановлено, що неістотні склеювання не впливають на зображувальний тип алгебри.
5. Встановлено зображувальні типи нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем, які отримуються операціями склеювання та роздуття компонентів зі спадкових алгебр Динкінського типу $\mathrm{A}-\mathrm{D}-\mathrm{E}$ або Евклідового типу $\widetilde{\mathrm{A}}-\widetilde{\mathrm{D}}-\widetilde{\mathrm{E}}$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути використані при подальших дослідженнях зі структарної теорії та теорії зображень скінченновимірних алгебр, а також у суміжних галузях сучасної алгебри.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи лінійної алгебри та теорії зображень.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові результати, які виносяться на захист, отримані автором особисто. Постановка задач, вибір методів дослідження, аналіз результатів та загальна координація роботи належать науковому керівнику. У спільних з науковим керівником публікаціях за темою дисертації внески співавторів є рівними.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження С. М. Чернікова (Київ, 20–26 серпня 2012 р.);
- 9-ій Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні (Львів, 8–13 липня 2013 р.);
- Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Л. А. Калужніна (Київ, 7–12 липня 2014 р.);
- Міжнародній конференції молодих математиків (Київ, 3–6 червня 2015 р.);
- X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (Одеса, 20–27 серпня 2015 р.);
- засіданнях Алгебраїчного семінару Інституту математики НАН України.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 5-х статтях [8], [10], [11], [12], [31] у фахових виданнях та тезах доповідей 5-х міжнародних наукових конференцій [13], [38], [39], [40], [41].

Структура й об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, 5-и розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 41 найменування. Повний обсяг роботи складає 121 сторінку друкованого тексту.

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику Юрію Анатолійовичу Дрозду за постановку задач та постійну увагу і підтримку в роботі.

Короткий зміст дисертації

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та завдання дослідження, коротко викладено зміст основної частини роботи та наукову новизну одержаних результатів.

В *першому* розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за її темою, сформульовано основні поняття і твердження, які використовуються в дисертації.

У *другому* розділі дисертації вивчається будова нодальних алгебр над довільним полем і, як наслідок, над алгебраїчно замкненим. Описується конструкція, якою нодальні алгебри отримуються зі спадкових.

В підрозділі 2.1 наводиться означення нодальної алгебри і доводиться, що властивість нодальності є інваріантною відносно Моріта-еквівалентності.

Ми фіксуємо деяке поле $\mathbf{k}$ і розглядаємо скінченновимірні $\mathbf{k}$-алгебри.

Алгебра A називається *нодальною*, якщо існує спадкова алгебра H з $\operatorname{rad} H = J$, $H \supset A \supset J$ і така, що

1) $\operatorname{rad} A = J$;

2) $\operatorname{length}_A(H \otimes_A U) \leqslant 2$ для кожного простого лівого A-модуля U.

Будемо казати, що нодальна алгебра A *пов'язана зі спадковою алгеброю* H.

Умову 2) означення нодальної алгебри можна замінити на еквівалентну симетричну:

$$\operatorname{length}_A(V \otimes_A H) \leqslant 2 \text{ для кожного простого правого } A\text{-модуля } V.$$

Твердження 2.1. *Якщо алгебра A' Моріта-еквівалентна нодальній алгебрі A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, то A' є нодальною алгеброю, пов'язаною зі спадковою алгеброю H', яка Моріта-еквівалентна H.*

Дане твердження дозволяє розглядати лише базові нодальні алгебри A, тобто такі, що $A/\operatorname{rad} A$ є прямим добутком тіл.

В підрозділі 2.2 вивчається будова нодальних алгебр над довільним полем.

Тут ми розглядаємо лише алгебри сепарабального типу. Це означає, що фактор-алгебра за радикалом є сепарабельною. Відомо, що спадкова алгебра H над досконалим полем задається парою $(\bar{H}, V)$, де $\bar{H}$ — напівпроста алгебра, а V — $\bar{H}$-бімодуль. Якщо алгебра $\bar{H}$ є базовою, то $\bar{H} = \bar{H}_1 \times \ldots \times \bar{H}_s$, де $\bar{H}_i$ — тіла. $V = \bigoplus V_{ij}$, де V_{ij} — це $\bar{H}_i$-$\bar{H}_j$-бімодуль.

Вкажемо конструкцію, яка дає всі базові нодальні алгебри сепарабельного типу. Назвемо *нодальними даними* набір, який складається з:

(1) пари $(\bar{H}, V)$, де $\bar{H}$ — базова напівпроста алгебра ($\bar{H} = \prod\limits_{i \in I} \bar{H}_i$, $\bar{H}_i$ — тіла), V — деякий $\bar{H}$-бімодуль;

(2) бінарного симетричного відношення $\sim$ на компонентах $\bar{H}$ (або на їх номерах) такого, що для кожного $i \in I$ існує не більше одного $j \in I$ такого, що $i \sim j$, причому якщо $i \sim j$, то $\bar{H}_i = \bar{H}_j$;

(3) підмножини $J \subset I$ такої, що якщо $i \in J$, то $i \nsim j$ для всіх j, і для кожного $i \in J$ задано

  a) або підтіло $\bar{A}_i \subset \bar{H}_i$ так, що $(\bar{H}_i : \bar{A}_i) = 2$,

  b) або розширення $\bar{A}_i \supset \bar{H}_i$ так, що $(\bar{A}_i : \bar{H}_i) = 2$.

У випадку a) будемо писати $i \in J_-$, а у випадку b) — $i \in J_+$. Очевидно, що $J = J_- \cup J_+$.

У випадку b) ми розглядатимемо $\bar{A}_i$ як векторний простір над $\bar{H}_i$. Тоді відображення $x \mapsto xa$, де $a, x \in \bar{A}_i$, ототожнює елемент $a \in \bar{A}_i$ з лінійним оператором у $\bar{H}_i$-векторному просторі $\bar{A}_i$, тобто з матрицею із $\mathrm{Mat}(2, \bar{H}_i)$. Отже, в цьому випадку ми можемо ототожнити $\bar{A}_i$ з підалгеброю в $\mathrm{Mat}(2, \bar{H}_i)$.

За даними пунктів (1)-(3) будується базова нодальна алгебра $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ в такий спосіб:

- Розглядаємо спадкову алгебру H типу $(\bar{H}, V)$ з кратностями

$$m_i = \begin{cases} 2, & \text{якщо } i \sim i, \text{ або } i \in J_+, \\ 1 & \text{— в іншому випадку.} \end{cases}$$

- У фактор-алгебрі $H/\operatorname{rad} H = \prod_{j=1}^{s} \mathrm{Mat}(m_j, \bar{H}_j)$ розглядаємо підалгебру $\bar{A}$, яка складається з таких наборів $(a_1, \ldots, a_s)$, що:
  1) $a_j = a_k$, якщо $j \sim k$ і $k \neq j$; в цьому випадку будемо говорити, що A *отримується з H склеюванням компонентів $\bar{H}_j$* і $\bar{H}_k$;
  2) a_j є діагональною матрицею, якщо $j \sim j$; в цьому випадку будемо говорити, що A *отримується з H роздуттям компоненти $\bar{H}_j$*;
  3) $a_i \in \bar{A}_i$, якщо $i \in J_-$; в цьому випадку будемо казати, що A *отримується з H обмеженням компоненти $\bar{H}_i$*;
  4) $a_i \in \bar{A}_i$, якщо $i \in J_+$ (ми застосовуємо ототожнення $\bar{A}_i$ з підалгеброю в $\mathrm{Mat}(2, \bar{H}_i)$); тут ми будемо казати, що A *отримується з H розширенням компоненти $\bar{H}_i$*.

- Розглядаємо підалгебру $A = A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_i, \bar{A}_i) \subset H$, яка є прообразом підалгебри $\bar{A} \subset \bar{H}$. За побудовою ця алгебра є базовою.

Теорема 2.1. *Алгебра $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ є нодальною, і кожна базова нодальна алгебра сепарабельного типу ізоморфна $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ для деяких нодальних даних.*

В підрозділі 2.3 розглядається випадок будови нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем.

При побудові нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем застосовуються лише операції склеювання і роздуття простих компонентів.

Нехай B — базова алгебра, $\bar{B} = B/\operatorname{rad} B = \bigoplus_i \bar{B}_i$, де $\bar{B}_i \simeq \mathbf{k}$ — прості B-модулі. Виберемо попарно різні індекси $i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}$ та $j_1, j_2, \ldots, j_r$ з $\{1, 2, \ldots, m\}$. Побудуємо рекурсивно алгебри $A_0, A_1, \ldots, A_{r+s}$:

$A_0 = B$;

для $1 \leq k \leq r$ алгебра A_k одержується з A_{k-1} шляхом склеювання компонентів $\bar{B}_{i_k}$ and $\bar{B}_{j_k}$;

для $r < k \leq r + s$ алгебра A_k одержується з A_{k-1} шляхом роздуття компоненти $\bar{B}_{i_k}$.

В цьому випадку ми кажемо, що алгебра $A = A_{r+s}$ одержується з B за допомогою *допустимої послідовності склеювань і роздуттів*, що визначається послідовністю індексів $(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}, j_1, j_2, \ldots, j_r)$. Зауважимо, що порядок цих склеювань і роздуттів не впливає на результуючу алгебру A.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2.2. *Базова алгебра A є нодальною тоді і тільки тоді, коли вона ізоморфна алгебрі, яка одержується з базової спадкової алгебри H за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів простих компонентів.*

Оскільки кожна базова спадкова алгебра над алгебраїчно замкненим полем ізоморфна алгебрі шляхів деякого сагайдака Q без орієнтованих циклів, то з теореми 2.2 випливає, що базова нодальна алгебра A ізоморфна алгебрі, яка отримується із базової спадкової алгебри H з сагайдаком Q за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів вершин цього сагайдака.

Отже, щоб визначити базову нодальну алгебру, ми повинні визначити сагайдак Q і послідовність його вершин $(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}, j_1, j_2, \ldots, j_r)$. Насправді, можна легко описати отриману алгебру A за допомогою її сагайдака і співвідношень. А саме, ми повинні діяти наступним чином:

1. Для кожного $1 \leq k \leq r$
   (a) ми склеюємо вершини i_k та j_k, при цьому зберігаючи всі стрілки, які починаються або закінчуються в цих вершинах;
   (b) якщо стрілка α починається у вершині i_k (або j_k), а стрілка β закінчується у вершині j_k (відповідно i_k), то ми накладаємо співвідношення $\alpha\beta = 0$.
2. Для кожного $r < k \leq r + s$
   (a) ми замінюємо кожну вершину i_k двома вершинами i'_k та i''_k;
   (b) ми замінюємо кожну стрілку $\alpha : j \to i_k$ двома стрілками $\alpha' : j \to i'_k$ та $\alpha'' : j \to i''_k$;

(c) ми замінюємо кожну стрілку $\beta : i_k \to j$ двома стрілками $\beta' : i'_k \to j$ та $\beta'' : i''_k \to j$;

(d) якщо стрілка β починається у вершині i_k, а стрілка α закінчується в цій вершині, ми накладаємо співвідношення $\beta'\alpha' = \beta''\alpha''$.

Будемо казати, що A є *нодальна алгебра типу* Q.

Щоб визначити нодальну алгебру, яка не обов'язково є базовою, ми також повинні прописати кратності l_i для кожної вершини i так, що $l_{i_k} = l_{j_k}$ для $1 \leq k \leq r$.

В підрозділі 2.4 встановлено зв'язок між нодальними та скручено-лагідними алгебрами.

Нагадаємо, що алгебра A називається *лагідною*, якщо вона Моріта-еквівалентна фактор-алгебрі $\mathbf{k}Q/\langle R\rangle$, де пара (Q, R) є лагідною (через $\langle R\rangle$ ми позначаємо ідеал алгебри $\mathbf{k}Q$, породжений всіма елементами $\lambda_i \in R$).

Пара (Q, R) називається *лагідною*, якщо виконуються наступні умови:

1) для кожної вершини $i \in Q$, існує не більше двох стрілок, які починаються в i та не більше двох стрілок, які закінчуються в i;
2) усі співвідношення в R мають вигляд $\alpha\beta$ для деяких стрілок α, β;
3) якщо існують дві стрілки α_1, α_2, які починаються в i, то для кожної стрілки β, яка закінчується в i, або $\alpha_1\beta \in R$, або $\alpha_2\beta \in R$, але не одночасно;
4) якщо існують дві стрілки β_1, β_2, які закінчуються в i, то для кожної стрілки α, яка починається в i, або $\alpha\beta_1 \in R$, або $\alpha\beta_2 \in R$, але не одночасно.

Базова алгебра A називається *скручено-лагідною*, якщо вона отримується з лагідної алгебри B шляхом роздуття деяких вершин її сагайдака, в які не більше однієї стрілки α входить і не більше однієї стрілки β виходить, причому якщо обидві стрілки присутні, то $\beta\alpha \notin R$.

Наступні дві теореми встановлюють зв'язок між нодальними та скручено-лагідними алгебрами.

Теорема 2.3. *Нодальна алгебра A є скручено-лагідною тоді і тільки тоді, коли вона одержується з прямого добутку спадкових алгебр типу* A *або* $\widetilde{\mathrm{A}}$ *за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів, що визначається послідовністю вершин таких, що для кожної з них існує не більше однієї стрілки, яка починається, і не більше однієї стрілки, яка закінчується в цій вершині. Причому, алгебра A є лагідною тоді і тільки тоді, коли вона одержується з використанням лише склеювань.*

Теорема 2.4. *Кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є нодальною, причому сагайдак відповідної спадкової алгебри є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу* A *та* $\tilde{\mathrm{A}}$ (*тобто лінійок та циклів*).

В *третьому* розділі дисертаційної роботи розглядаються нодальні алгебри типу A та описуються їх зображувальні типи.

У підрозділі 3.1 розглянуто спеціальний клас склеювань — *неістотні склеювання* — й встановлено, що вони зберігають зображувальний тип алгебри.

Означення 3.1. Нехай базова алгебра B задається сагайдаком Q зі співвідношеннями і алгебра A отримується з B склеюванням вершин i та j сагайдака Q таких, що не існує стрілок, які входять у вершину i та стрілок, які виходять з вершини j. Будемо казати, що таке склеювання є *неістотним.*

Тоерема 3.1. *За умов означення 3.1, існує еквівалентність між категоріями B-mod$/\langle \bar{B}_i, \bar{B}_j\rangle$ і A-mod$/\langle \bar{A}_{ij}\rangle$, де $\mathcal{C}/\langle \mathfrak{M}\rangle$ позначає фактор-категорію від $\mathcal{C}$ за модулем ідеалу морфізмів, які пропускаються через пряму суму об'єктів з множини $\mathfrak{M}$. (Тут $\bar{B}_i, \bar{B}_j$ — прості B-модулі, які відповідають вершинам сагайдака i та j відповідно, $\bar{A}_{ij}$ — простий A-модуль, який відповідає вершині, що утворилася після склеювання i та j).*

У підрозділі 3.2 наведені основні означення та теореми, які стосуються виключних та супер-виключних алгебр. Такі алгебри належать до нодальних типу A.

Означення 3.2. Нодальна алгебра A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, де $H \simeq \mathbf{k}Q$ і Q — сагайдак Динкіна типу A або сагайдак Евкліда типу $\widetilde{\mathrm{A}}$, називається *нодальною алгеброю типу* A.

Тобто, нодальні алгебри типу A отримуються за допомогою операцій склеювання і роздуття із сагайдаків типу A або $\widetilde{\mathrm{A}}$. Нагадаємо, що до сагайдаків типу A або $\tilde{\mathrm{A}}$ належать наступні графи з довільною орієнтацією ребер:

$$\mathrm{A}_n: \qquad 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } \cdots \text{ --- } n \qquad (n \geq 1),$$

$$\widetilde{\mathrm{A}}_n: \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] \arrow[rrrr, dash, bend left] & 2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & n \arrow[r, dash] & (n+1) \end{tikzcd} \qquad (n \geq 0).$$

Із теореми 2.3 випливає, що лагідні і скручено-лагідні алгебри належать до нодальних алгебр типу A. Добре відомо, що вони є ручними. Існує ще два класи алгебр, які є нодальними типу A і зображувальний тип яких може бути скінченним, ручним або диким. Це є *виключні* і *супер-виключні* алгебри.

Означення 3.3. Нехай H — базова спадкова алгебра з сагайдаком Q типу A.

1. Назвемо пару вершин (i, j) сагайдака Q *виключною*, якщо вони містяться в повному підсагайдаку вигляду

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\beta"] & \underset{\bullet}{i} & \bullet \arrow[l, "\alpha_1"'] \arrow[r, no head, "\alpha_2"] & \cdots \arrow[r, no head, "\alpha_{n-1}"] & \bullet & \underset{\bullet}{j} \arrow[l, "\alpha_n"'] & \bullet \arrow[l, "\gamma"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

   або

$$\begin{tikzcd} \bullet & \underset{\bullet}{i} \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\alpha_1"] & \bullet \arrow[r, no head, "\alpha_2"] & \cdots \arrow[r, no head, "\alpha_{n-1}"] & \bullet \arrow[r, "\alpha_n"] & \underset{\bullet}{j} \arrow[r, "\gamma"] & \bullet \end{tikzcd} \tag{2}$$

   де орієнтація стрілок $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ є довільною. Якщо $n = 1$, то $\alpha_1 = \alpha_n : j \to i$ у випадку (1) і $\alpha_1 = \alpha_n : i \to j$ у випадку (2).

2. Будемо називати склеювання виключної пари вершин *виключною склейкою.*

3. Нодальна алгебра називається *виключною*, якщо вона отримується зі спадкової алгебри типу A за допомогою деякої послідосності склеювань, що складаються з однієї виключної склейки і, можливо, кількох неістотних склеювань.

Зауважимо, що в результаті такої склейки вершин i та j алгебрі A буде відповідати сагайдак зі співвідношеннями

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[rr, dotted, no head] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & \bullet & & \\ \bullet \arrow[r, no head, "\beta_m"] & \cdots \arrow[r, no head, "\beta_1"] & \bullet \arrow[r, "\beta"] & \underset{\bullet}{(ij)} \arrow[ur, "\alpha_n"'] & \bullet \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[r, no head, "\gamma_1"] & \cdots \arrow[r, no head, "\gamma_l"] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \alpha_n\alpha_1 = \alpha_n\beta = 0 \tag{3}$$

у випадку (1) або

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[rr, dotted, no head] & & \bullet \arrow[dl, "\alpha_n"] & & \\ \bullet \arrow[r, no head, "\beta_m"] & \cdots \arrow[r, no head, "\beta_1"] & \bullet & \underset{\bullet}{(ij)} \arrow[ul, "\alpha_1"'] \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\gamma"] & \bullet \arrow[r, no head, "\gamma_1"] & \cdots \arrow[r, no head, "\gamma_l"] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \alpha_1\alpha_n = \beta\alpha_n = 0 \tag{4}$$

у випадку (2). Пунктирна лінія містить стрілки $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$; якщо $n = 1$, то маємо петлю α у вершині (ij) зі співвідношеннями $\alpha^2 = 0$ і, відповідно, $\alpha\beta = 0$ або $\beta\alpha = 0$. Будемо казати, що A — (n, m, l)-*виключна алгебра.*

В наступній теоремі ми визначаємо зображувальні типи таких алгебр.

Теорема 3.2. *(n,m,l)-виключна алгебра є*

(1) скінченно-зображувальною у випадках:

(a) $m = l = 0$,

(b) $l = 0$, $m = 1$, $n \leq 3$,

(c) $l = 0, 2 \leq m \leq 3$, $n = 1$,

(d) $m = 0$, $l = 1$, $n \leq 2$;

(2) ручною у випадках:

(a) $l = 0$, $m = 1$, $n = 4$,

(b) $l = 0$, $m = 2$, $n = 2$,

(c) $l = 0$, $m = 4$, $n = 1$,

(d) $m = 0$, $l = 1$, $n = 3$;

(3) дикою в усіх інших випадках.

Означення 3.4. Нодальна алгебра називається *супер-виключною*, якщо вона отримується з алгебри вигляду (3) або (4) при $n = 3$ за допомогою склеювання кінців стрілки α_2 у випадку, коли таке склеювання не є неістотним, і, можливо, кількох неістотних склеювань.

Відповідь на питання про зображувальні типи супер-виключних алгебр дає наступне твердження.

Твердження 3.1. *Супер-виключна алгебра є*
(1) скінченно-зображувальною, якщо $m = l = 0$*,*

(2) ручною, якщо $m + l = 1$*,*

(3) дикою, якщо $m + l > 1$*.*

У підрозділі 3.3 дано повний опис зображувальних типів нодальних алгебр типу A.

Означення 3.5. 1) Будемо називати алгебру A *квазі-лагідною*, якщо вона отримується з лагідної або скручено-лагідної алгебри за допомогою допустимої послідовності неістотних склеювань.

2) Будемо називати алгебру A *хорошою виключною* (*хорошою супер-виключною*), якщо вона є виключною (відповідно, супер-виключною) і не дикою.

Теорема 3.3. *Неспадкова нодальна алгебра типу* A *є скінченно-зображувальною або ручною тоді і тільки тоді, коли вона або квазі-лагідна, або хороша виключна, або хороша супер-виключна. В інших випадках вона є дикою.*

В *четвертому* розділі розглядаються нодальні алгебри типу D та визначаються їх зображувальні типи.

В підрозділі 4.1 приводяться основні означення та теореми, які стосуються нодальних алгебр типу D. Очевидно, що такі алгебри отримуються допустимою послідовністю склеювань та роздуттів зі спадкової алгебри з сагайдаком типу D або $\widetilde{\mathrm{D}}$:

$$\mathrm{D}_{n+3}: \quad \begin{array}{lllllll} 1 & & & & & & \\ & \diagdown & & & & & \\ & & 3 & — & 4 & — \cdots — & (n+3) \\ & \diagup & & & & & \\ 2 & & & & & & \end{array}$$

$$\widetilde{\mathrm{D}}_{n+3}: \quad \begin{array}{lllllllll} 1 & & & & & & & & 1' \\ & \diagdown & & & & & & \diagup & \\ & & 3 & — & 4 & — \cdots — & (n+2) & & \\ & \diagup & & & & & & \diagdown & \\ 2 & & & & & & & & 2' \end{array}$$

з довільною орієнтацією ребер.

Означення 4.1. Назвемо нодальну алгебру A *нодальною алгеброю типу* D, якщо у відповідних нодальних даних сагайдак Q має тип D або $\widetilde{\mathrm{D}}$, причому або одна з вершин $1, 2$ бере участь у склеюванні, або застосовується роздуття вершини 3. У випадку сагайдака типу $\widetilde{\mathrm{D}}$ ми, крім того, вважаємо, що або одна з вершин $1', 2'$ бере участь у склеюванні, або застосовується роздуття вершини $(n+2)$.

Якщо ці умови не виконуються, то нодальна алгебра може бути одержана із сагайдака типу A.

В теоремах 4.1–4.3 дається класифікація нодальних алгебр типу D за їх зображувальними типами.

Підрозділ 4.2 присвячений доведенню теорем 4.1 – 4.3.

У *п'ятому* розділі розглядаються нодальні алгебри типу E та визначаються їх зображувальні типи.

У підрозділі 5.1 приводяться основні означення та формулюються теореми, які стосуються нодальних алгебр типу E.

Означення 5.1. Нодальна алгебра A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, де $H \simeq \mathbf{k}Q$ і Q — сагайдак Динкіна типу E або сагайдак Евкліда типу $\tilde{\mathrm{E}}$, зветься *нодальною алгеброю типу* E.

Нагадаємо, що до сагайдаків типу E або $\tilde{\mathrm{E}}$ належать наступні графи з довільною орієнтацією ребер:

$$\mathrm{E}_6 : \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 4 & & & & \\ & & & & | & & & & \\ 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 5 & \text{---} & 6 \end{array}$$

$$\mathrm{E}_7 : \qquad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & 4 & & & & & & \\ & & & & | & & & & & & \\ 1 & \text{---} & 2 & \text{---} & 3 & \text{---} & 5 & \text{---} & 6 & \text{---} & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccc}
 & & & 4 & & & & \\
 & & & | & & & & \\
\mathrm{E}_8: & 1 \;—\; & 2 \;—\; & 3 & \;—\; 5 & \;—\; 6 & \;—\; 7 & \;—\; 8
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccc}
 & & & 6' & & \\
 & & & | & & \\
 & & & 4 & & \\
 & & & | & & \\
\widetilde{\mathrm{E}}_6: & 1 \;—\; & 2 \;—\; & 3 & \;—\; 5 & \;—\; 6
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
 & & & & 4 & & & \\
 & & & & | & & & \\
\widetilde{\mathrm{E}}_7: & 7' \;—\; & 1 \;—\; & 2 \;—\; & 3 & \;—\; 5 & \;—\; 6 & \;—\; 7
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
 & & & 4 & & & & & \\
 & & & | & & & & & \\
\widetilde{\mathrm{E}}_8: & 1 \;—\; & 2 \;—\; & 3 & \;—\; 5 & \;—\; 6 & \;—\; 7 & \;—\; 8 & \;—\; 8'
\end{array}$$

В теоремах 5.1 – 5.3 дається класифікація нодальних алгебр типу E за їх зображувальними типами.

Підрозділ 5.2 присвячений доведенню теорем 5.1 – 5.3.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Сагайдаки. Зображення сагайдаків

Поняття сагайдака вперше було введено П.Габріелем [32] в 1972 році у зв'язку з проблемами теорії зображень скінченновимірних алгебр. І з цього часу в теорії, пов'язаній із зображенням сагайдаків, відбувся величезний розвиток.

Сагайдак $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ — це скінченний орієнтований граф, який складається зі скінченних множин Q_0, Q_1 і двох відображень $s, e : Q_1 \to Q_0$. Елементи множини Q_0 називаються *вершинами*, а елементи множини Q_1 — *стрілками*. Будемо казати, що кожна стрілка σ починається у вершині $s(\sigma)$ і закінчується у вершині $e(\sigma)$. Вершина $s(\sigma)$ називається *початковою вершиною* стрілки σ, а вершина $e(\sigma)$ — її *кінцевою вершиною*.

Нагадаємо, що *шляхом* p в сагайдаку Q зветься така послідовність стрілок $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$, що $e(\sigma_i) = s(\sigma_{i+1})$ для довільного i, $1 \leq i < r$. Число стрілок $r = L(p)$ називається *довжиною* цього шляху. Такий шлях часто записують як «добуток» стрілок: $p = \sigma_r \ldots \sigma_2 \sigma_1$, і кажуть, що це — шлях з вершини $a = s(\sigma_1)$ (яку звуть *початком* цього шляху) до вершини $b = e(\sigma_r)$ (яку звуть *кінцем* цього шляху). Пишуть також $p : a \to b$. В множину всіх шляхів ми також включаємо так звані «порожні» шляхи. Тобто, для кожної вершини i ми введемо *порожній шлях* ϵ_i: $i \to i$ довжини 0, в якому немає жодної стрілки. Будемо вважати, що $\epsilon_i p = p$ і $q\epsilon_i = q$ для кожного шляху p з кінцем i та кожного шляху q з початком i. Шлях довжини $r \geq 1$, початок і кінець якого збігаються, називається *орієнтованим циклом.*

Композицією (або *добутком*) шляхів $p = \sigma_r \ldots \sigma_2\sigma_1$ і $q = \tau_k \ldots \tau_2\tau_1$ називається шлях $qp = \tau_k \ldots \tau_2\tau_1\sigma_r \ldots \sigma_2\sigma_1$, якщо кінець p співпадає з початком q. В іншому випадку добуток цих шляхів дорівнює нулю.

Кожному сагайдаку $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ відповідає алгебра над полем $\mathbf{k}$, яку називають його *алгеброю шляхів* і позначають $\mathbf{k}Q$. Це алгебра, базисом якої є всеможливі шляхи в Q. Очевидно, що вона є асоціативною алгеброю із одиницею $1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_n$. До того ж, вона є скінченновимірною тоді і тільки тоді, коли Q не має орієнтованих циклів.

Зображенням $V = (V_x, V_\sigma)$ сагайдака Q над полем $\mathbf{k}$ називається сімейство векторних просторів $V_x (x \in Q_0)$ разом із сімейством лінійних відображень $V_\sigma : V_{s(\sigma)} \to V_{e(\sigma)} (\sigma \in Q_1)$. Ми завжди будемо розглядати скінченновимірні зображення сагайдака Q, тобто для кожного такого зображення V ми припускаємо, що V_i — скінченновимірний векторний простір над полем $\mathbf{k}$ для довільного i.

Вектор $\bar{d} = \bar{d}(V) = (d_x)$, $(x \in Q_0)$, де $(d_x) = \dim_{\mathbf{k}} V_x$, називають *вектор-розмірністю* зображення V, а суму всіх d_x — його *розмірністю.*

Морфізм $f = (f_x) : V \to W$ між зображеннями сагайдака Q — це набір лінійних відображень $f_x : V_x \to W_x$ таких, що для кожної стрілки $\sigma \in Q_1$ діаграма

$$\begin{array}{ccc} V_{s(\sigma)} & \xrightarrow{f_{s(\sigma)}} & W_{s(\sigma)} \\ {\scriptstyle V_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W_\sigma} \\ V_{e(\sigma)} & \xrightarrow{f_{e(\sigma)}} & W_{e(\sigma)} \end{array}$$

комутативна, тобто $f_{s(\sigma)}W_\sigma = V_\sigma f_{e(\sigma)}$. Якщо f_x обертовне для кожного $x \in Q_0$, то f називається *ізоморфізмом.* Позначимо лінійний простір морфізмів з V з W через $\mathrm{Hom}_Q(V, W)$. Для двох морфізмів $f : V \to W$ і $g : W \to U$ можна визначити композицію морфізмів $gf : V \to U$ поклавши $(gf)_i = g_i f_i$. Очевидно, що усі скінченновимірні зображення сагайдака Q над полем $\mathbf{k}$ утворюють категорію, яку позначатимемо $\mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(Q)$, об'єкти якої — скінченновимірні зображення V, а морфізми — ті, які визначені вище.

Зауважимо, що кожен сагайдак має зображення T, в якому $T_i = 0$ і $T_\sigma = 0$ для всіх $i \in Q_0$ та всіх $\sigma \in Q_1$. Це зображення називається *нульовим зображенням.*

Якщо V та W — зображення сагайдака Q, то пряма сума $V \oplus W$ цих зображень визначається в такий спосіб: $(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i$ для всіх $i \in Q_0$ та $(V \oplus W)_\sigma = V_\sigma \oplus W_\sigma$, або іншими словами, $(V \oplus W)_\sigma : V_{s(\sigma)} \oplus W_{s(\sigma)} \to V_{e(\sigma)} \oplus W_{e(\sigma)}$ може бути подана у вигляді матриці:

$$\left(\begin{array}{c|c} V_\sigma & 0 \\ \hline 0 & W_\sigma \end{array}\right)$$

Якщо зображення U ізоморфне прямій сумі $V \oplus W$, де V та W — ненульові зображення, то U зветься *розкладним.* Інакше воно зветься *нерозкладним.* Відомо, що кожне скінченновимірне зображення V сагайдака Q ізоморфне прямій сумі нерозкладних зображень. Цей розклад єдиний з точністю до ізоморфізму і перестановки доданків.

Кажуть, що сагайдак Q є сагайдаком *скінченного типу*, якщо з точністю до ізоморфізму він має лише скінченну кількість нерозкладних зображень. Якщо сагайдак Q має нескінченну кількість зображень, але в кожній розмірності вони утворюють щонайбільше однопараметричні сімейства, то такий сагайдак відносять до *ручного типу*. Сагайдак зветься *диким*, якщо для кожної скінченнопородженої $\mathbf{k}$-алгебри A існує точний функтор $F : A\text{-mod} \to \mathrm{Rep}_{\mathbf{k}}(Q)$ такий, що з $F(M) \simeq F(N)$ випливає, що $M \simeq N$, а якщо M нерозкладний модуль, то й $F(M)$ — нерозкладне зображення (тут A-mod позначає категорію скінченновимірних A-модулів).

Найважливішими первинними задачами в теорії зображень сагайдаків є опис випадків, коли задача про класифікацію зображень має скінченний чи ручний тип. Ці питання на сьогодні повністю розв'язані.

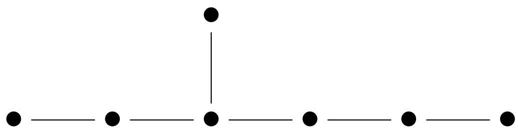
Критерій скінченності для зображень сагайдаків вперше з'явився у роботах П. Габріеля [32] та С. А. Кругляка [15] (хоча в останній не міститься означення сагайдака).

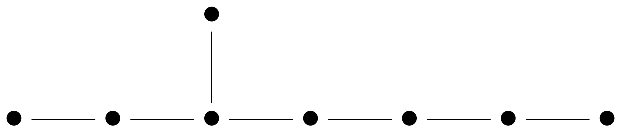
Теорема 1.1. *Сагайдак має скінченний тип над полем* $\mathbf{k}$ *тоді і лише тоді, коли відповідний йому неорієнтований граф є незв'язним об'єднанням діаграм Динкіна*

$$\mathrm{A}_n : \quad \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \cdots - \bullet \qquad (n \geq 1)$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] & \bullet \arrow[d] & & & & \\ \mathrm{D}_n : \quad \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd} \qquad (n \geq 4)$$

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] & & \bullet \arrow[d] & & \\ \mathrm{E}_6 : \quad \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

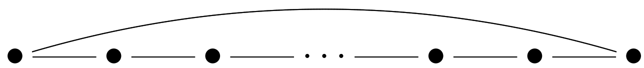
E_7 : 

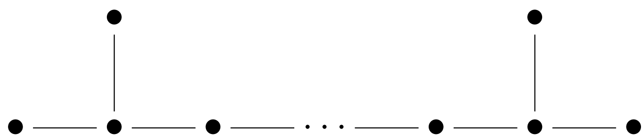
E_8 : 

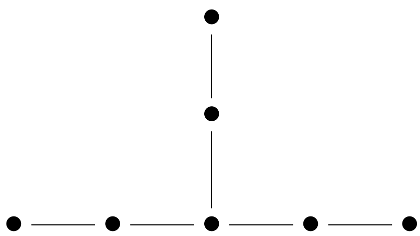
(графи A_n *та* D_n *мають* n *вершин).*

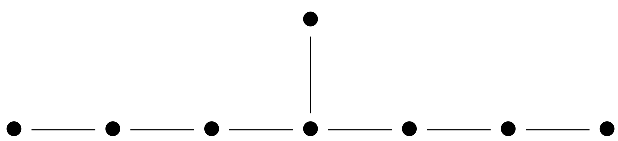
Критерій ручності для зображень сагайдаків вперше був сформульований майже одночасно Назаровою [16], Донованом і Фрайсліх [28].

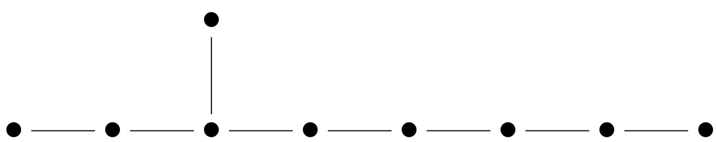
Теорема 1.2. *Сагайдак є ручним над полем* $\mathbf{k}$ *тоді і лише тоді, коли відповідний йому неорієнтований граф є незв'язним об'єднанням звичайних та розширених діаграм Динкіна*

$\widetilde{A}_n$:  $(n \geq 0)$

$\widetilde{D}_n$:  $(n \geq 4)$

$\widetilde{E}_6$: 

$\widetilde{E}_7$: 

$\widetilde{E}_8$: 

(графи $\widetilde{A}_n$ *та* $\widetilde{D}_n$ *мають* $n+1$ *вершину).*

У роботах [16] та [28] також було доведено, що кожен сагайдак, який не є ані скінченного, ані ручного типу, є диким. Ю. А. Дрозд у своїй роботі [5] довів аналогічний результат для матричних задач (зокрема, для бімодульних категорій, про які мова буде йти в наступному параграфі) і скінченновимірних алгебр.

Бернштейн, Гельфанд та Пономарьов [1] побудували функтори віддзеркалень для вершин сагайдаків. За допомогою цих функторів вони привели інше доведення теореми Габріеля і доповнили її твердженням про те, що кожне нерозкладне зображення можна одержати із тривіального шляхом послідовного застосування функторів віддзеркалень. Нагадаємо, що *тривіальним* називається зображення $V = (V_x, V_\sigma)$, для якого один із просторів V_x одновимірний, а всі інші — нульові.

1.2 Бімодульні категорії

Нехай $\mathscr{A}$ — деяка категорія. Ми завжди вважатимемо, що вона є $\mathbf{k}$-лінійною і цілком адитивною. Нагадаємо відповідні означення.

Категорія $\mathscr{A}$ називається *адитивною*, якщо вона містить всі можливі скінченні прямі суми.

Кажуть, що ідемпотентний морфізм $e : A \to A$, $e^2 = e$ адитивної категорії $\mathscr{A}$ *розщеплюється*, якщо існують морфізми $\iota : A' \to A$ (канонічне занурення) і $\pi : A \to A'$ (канонічна проекція) такі, що $e = \iota\pi$. Категорія зветься *цілком адитивною*, якщо вона є адитивною, і кожен ідемпотентний морфізм в ній розщеплюється.

Категорія $\mathscr{A}$ називається $\mathbf{k}$-*лінійною*, якщо множини морфізмів $\mathscr{A}(A, A')$ є векторними просторами над $\mathbf{k}$, а множення морфізмів є $\mathbf{k}$-*білінійним*.

Нехай $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$ — $\mathbf{k}$-лінійні і цілком адитивні категорії. *Модулем* над категорією $\mathscr{A}$ називається функтор $\mathscr{M} : \mathscr{A} \to \mathbf{Ab}$, де $\mathbf{Ab}$ — категорія абелевих груп. Якщо $\mathscr{M}$ — деякий $\mathscr{A}$-модуль, $x \in \mathscr{M}(A)$ і $a \in \mathscr{A}(A, B)$, де $A, B \in \mathrm{Ob}\mathscr{A}$, то елемент $\mathscr{M}(a)x \in \mathscr{M}(B)$ будемо записувати як ax. *$\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-бімодулем* називається біадитивний функтор $\mathscr{W} : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{B} \to \mathbf{Ab}$, де $\mathscr{A}^{op}$ позначає дуальну категорію до $\mathscr{A}$. Знову ж таки, якщо $v \in \mathscr{W}(A, B)$, $a \in \mathscr{A}(A', A)$, $b \in \mathscr{A}(B, B')$, то замість $\mathscr{W}(a, b)v$ будемо писати bva. Якщо $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, то ми будемо казати, що $\mathscr{W}$ є $\mathscr{A}$-бімодулем.

Нехай $\mathscr{V}$ — деякий $\mathscr{A}$-бімодуль. *Бімодульна категорія* $\mathbf{El} = \mathbf{El}(\mathscr{A}, \mathscr{V})$ визначається наступним чином:

- $\mathrm{Ob}\ \mathbf{El} = \bigcup_{A \in Ob\mathscr{A}} \mathscr{V}(A, A)$.
- Множина морфізмів $\beta \to \beta'$, де $\beta \in \mathscr{V}(A, A)$, $\beta' \in \mathscr{V}(B, B)$ визначається як $\{a \in \mathscr{A}(A, B) \mid a\beta = \beta' a\}$. (Зауважимо, що обидва ці елементи належать $\mathscr{V}(A, B)$).
- Добуток таких морфізмів збігається з їх добутком в $\mathscr{A}$.

Зауважимо, що категорія $\mathbf{El}(\mathscr{A}, \mathscr{V})$ є цілком адитивною. Прямою сумою її об'єктів $\beta \in \mathscr{V}(A, A)$ і $\beta' \in \mathscr{V}(B, B)$ є елемент $\beta \oplus \beta' \in \mathscr{V}(A \oplus B, A \oplus B)$, що задається матрицею $\left(\begin{smallmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta' \end{smallmatrix}\right)$.

Нехай категорія $\mathscr{A}$ є $\mathbf{k}$-лінійною й цілком адитивною. Будемо вважати, що всі простори $\mathscr{A}(A, B)$ є скінченновимірними. Звідси випливає, що кожен об'єкт $A \in \mathscr{A}$ розкладається в пряму суму нерозкладних, а саме, $A = \bigoplus_{k=1}^{n} A_k$, де об'єкти $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — нерозкладні, тобто їхні алгебри ендоморфізмів $\mathscr{A}(A_k, A_k)$ не містять ідемпотентів, а тому є локальними. Такий розклад єдиний (з точністю до ізоморфізму та перестановки доданків). Позначимо через $\mathrm{ind}\mathscr{A}$ та $\mathrm{ind}\mathscr{B}$ деякі (фіксовані) множини представників класів ізоморфізму нерозкладних об'єктів з категорій $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$ відповідно.

Зазначимо, що досить часто бімодуль визначається лише над деякою частиною $\mathscr{A}_0$ категорії $\mathscr{A}$ такою, що кожен нерозкладний об'єкт є прямим доданком деякої прямої суми об'єктів з $\mathscr{A}_0$. Наприклад, якщо задано бімодуль $\mathscr{V}$ над деякою алгеброю A, то він природно розповсюджується на категорію скінченнопороджених проективних A-модулів, якщо покласти $\mathscr{V}(P,Q) = P^\vee \otimes_A \mathscr{V} \otimes_A Q$, де $P^\vee = \mathrm{Hom}_A(P, A)$.

Довільний $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}$-бімодуль $\mathscr{W}$ повністю визначається (з точністю до ізоморфізму) своїм обмеженням на $\mathrm{ind}\mathscr{A}$ та $\mathrm{ind}\mathscr{B}$. Справді, нехай $A \simeq \bigoplus_{j=1}^t n_j A_j$, де $A_j \in \mathrm{ind}\mathscr{A}$, $A_j \neq A_k$, якщо $j \neq k$, $B \simeq \bigoplus_{i=1}^s m_i B_i$ — аналогічний розклад B. Тоді $\mathscr{W}(A,B)$ можна ототожнити з множиною блочних матриць $\{W_{ij}\}$, де W_{ij} — матриця розміру $m_i \times n_j$ з елементами із $\mathscr{W}(A_j, B_i)$. Аналогічно описуються морфізми між об'єктами з $\mathscr{A}$ і $\mathscr{B}$. При цьому дія морфізмів на елементи з $\mathscr{W}$ ототожнюється зі звичайним множенням матриць. Саме тому бімодульну категорію ще називають *категорією матриць над бімодулем.*

1.3 Зображення частково впорядкованих множин

Нагадаємо, що *частково впорядкована множина* — це пара $(S, \preceq)$, де S — множина, а $\preceq$ — відношення на S, яке

- рефлексивне: $a \preceq a$ для всіх $a \in S$;
- антисиметричне: якщо $a \preceq b$ і $b \preceq a$, то $a = b$;
- транзитивне: якщо $a \preceq b$ і $b \preceq c$, то $a \preceq c$.

Відношення $\preceq$ називають *частковим впорядкуванням* (або *порядком*). Якщо деякі елементи a і b множини S перебувають у відношенні часткового впорядкування, тобто $a \preceq b$ або $b \preceq a$, то говорять, що вони порівняні між собою. *Шириною множини* S називають максимальну кількість попарно непорівняних між собою елементів цієї множини. Позначатимемо її $\omega(S)$.

Нагадаємо означення зображень частково впорядкованих множин за Габріелем [33]. *Зображенням* V частково впорядкованої множини $(S, \preceq)$ називається набір векторних просторів $V = (V_0, V_i : i \in S)$ такий, що $V_i \subset V_0$ для всіх $i \in S$ та $V_i \subset V_j$, якщо $i \preceq j$ в S.

Якщо $V = (V_0, V_i : i \in S)$ і $W = (W_0, W_i : i \in S)$ — два зображення частково впорядкованої множини $(S, \preceq)$, то *морфізм* $f : V \to W$ — це лінійне відображення $V_0 \to W_0$ таке, що $f(V_i) \subset W_i$ для всіх $i \in S$.

Пряма сума зображень V та W — це зображення $V \oplus W$ таке, що $(V \oplus W)_0 = V_0 \oplus W_0$ і $(V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i$ для всіх $i \in S$. Ненульове зображення зветься *нерозкладним*, якщо воно не може бути записане у вигляді прямої суми двох ненульових зображень.

Як і у випадку з сагайдаками, усі скінченновимірні зображення частково впорядкованої множини $(S, \preceq)$ над фіксованим полем $\mathbf{k}$ утворюють адитивну категорію, яку позначають $\mathrm{Rep}(S, \mathbf{k})$. Оскільки всі простори морфізмів у категорії $\mathrm{Rep}(S, \mathbf{k})$ є скінченновимірними, всяке зображення розкладається в пряму суму нерозкладних зображень однозначно, з точністю до ізоморфізму та порядку доданків. Частково впорядкована множина має *скінченний* *зображувальний тип*, якщо вона має лише скінченну кількість неізоморфних нерозкладних зображень.

Назарова і Ройтер у своїй роботі [18] вперше розглянули питання щодо зображення частково впорядкованих множин. Свої дослідження вони провели в термінах мови матриць. Нагадаємо відповідні означення.

Позначимо через M_k множину всіх (скінченновимірних) матриць над полем $\mathbf{k}$. Поповнимо цю множину деякими «ідеальними» елементами. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ введемо матриці $I_{0,n}$ («порожня» матриця з нульовою кількістю рядків і n стовпців) та $I_{n,0}$ («порожня» матриця з нульовою кількістю стовпців і n рядків). Операція прямого сумування доозначується згідно [18]. Поповнення таким чином множини M_k будемо позначати через $\bar{M}_k$. Для довільної $A \in \bar{M}_k$ через $\alpha(A)$ ($\beta(A)$) позначимо кількість рядків (стовпців) матриці A. Тоді, якщо $(S, \preceq)$, де $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ — скінченна частково впорядкована множина з n елементів, то *зображенням* множини S над полем $\mathbf{k}$ називається відображення $\varphi : S \to \bar{M}_k$ таке, що

$$\alpha(\varphi(a_1)) = \alpha(\varphi(a_2)) = \ldots = \alpha(\varphi(a_n)).$$

Тобто, дане зображення — це набір n матриць A_i ($1 \le i \le n$), з однаковою кількістю рядків, причому деякі з цих матриць можуть бути порожніми. Стовпчики A_i — це базисні вектори підпростору V_i за модулем $\sum\limits_{j \preceq i} V_j$ (все у фіксованій базі).

Два зображення $\{A_i\}$ і $\{B_i\}$ називаються *ізоморфними*, якщо відповідні набори матриць можуть бути одержані один з другого елементарними перетвореннями вигляду:

1. Довільні елементарні перетворення рядків одразу всіх матриць даного набору;
2. Довільні елементарні перетворення стовпців всередині будь-якої матриці A_i;
3. Додавання стовпця із A_i до стовпця із A_j при умові, що $a_i \preceq a_j$ в S.

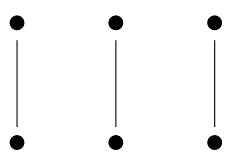
Кожне зображення у розумінні Габріеля можна переписати в термінах Назарової-Ройтера. А саме, потрібно вибрати базу $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в усьому просторі V, а також базу $u_{i1}, \ldots, u_{im_i}$ в кожному підпросторі V_i за модулем підпростору $\sum_{j \preceq i} V_j$. Тоді за матрицю A_i треба прийняти матрицю, стовпчики якої — це координатні стовпчики векторів $u_{i1}, \ldots, u_{im_i}$ у базі $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Габріель показав, що ця відповідність зберігає класи ізоморфізму.

Критерій скінченності для зображень частково впорядкованих множин був отриманий Клейнером у роботі [14].

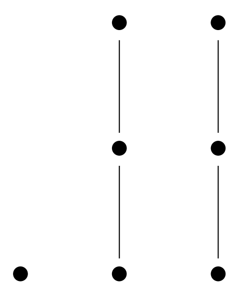
Теорема 1.3. *Частково впорядкована множина* $(S, \preceq)$ *має скінченний зображувальний тип тоді і тільки тоді, коли вона не містить жодної з п'яти підмножин вигляду:*

$(1,1,1,1)$:

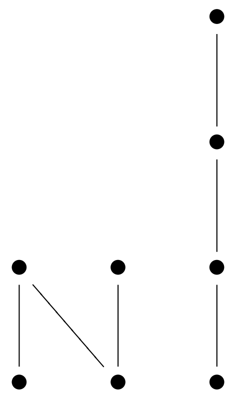
$(2,2,2)$:



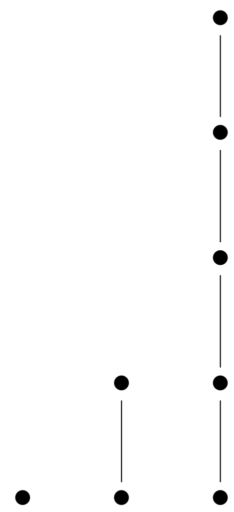
$(1,3,3)$:



$(N, 4)$:



$(1, 2, 5)$:



Ці підмножини називаються *критичними.*

Як і у випадку з сагайдаками, для частково впорядкованих множин можна також ввести поняття ручного і дикого зображувальних типів. Ці питання вперше були розглянуті і викладені Назаровою у роботі [17]. Там же була доведена основна теорема, яка дає характеристику ручним і диким частково впорядкованим множинам.

Теорема 1.4. *Частково впорядкована множина являється множиною дикого зображувального типу, якщо вона містить одну з таких підмножин:*

1. $(1, 1, 1, 1, 1)$*;*

2. $(1, 1, 1, 2)$*;*

3. $(2, 2, 3)$*;*

4. $(1, 3, 4)$*;*

5. $(1, 2, 6)$*;*

6. $(N, 5)$*, де* $N = \{a_1, a_2, b_1, b_2 \mid a_1 \preceq a_2, b_1 \preceq b_2, a_1 \preceq b_2\}$*,*

і являється множиною ручного типу в протилежному випадку.

В роботі [14] Клейнер також розглянув питання про зображення пари частково впорядкованих множин. Нагадаємо відповідні означення.

Нехай $(S, \preceq)$ і $(T, \preceq)$, де $S = \{a_1, \dots, a_n\}$, $T = \{b_1, \dots, b_p\}$ — дві частково впорядковані множини. *Зображенням пари* частково впорядкованих множин (S, T) над полем $\mathbf{k}$ називається відображення $\varphi : S \times T \to \bar{M}_k$ таке, що

$$\alpha(\varphi(a_1, b_i)) = \ldots = \alpha(\varphi(a_n, b_i)), i = 1, \ldots, p;$$

$$\beta(\varphi(a_j, b_1)) = \ldots = \beta(\varphi(a_j, b_p)), j = 1, \ldots, n,$$

де $\alpha(A)$ і $\beta(A)$ — відповідно кількість рядків і стовпців матриці A. Тобто, таке зображення являє собою набір np матриць A_{ij} $(1 \leq i \leq p\ ; 1 \leq j \leq n)$.

Два зображення $\{A_{ij}\}$ і $\{B_{ij}\}$ називаються *ізоморфними*, якщо відповідні набори матриць можуть бути одержані один з другого елементарними перетвореннями вигляду:

1. Довільні елементарні перетворення рядків (стовпців) одразу всіх матриць $A_{1i}, \ldots, A_{ni}$ $(A_{j1}, \ldots, A_{jp})$ при фіксованому $i(j)$;
2. Одночасне додавання рядків (стовпців) з однаковими номерами всіх матриць $A_{1i}, \ldots, A_{ni}$ $(A_{j1}, \ldots, A_{jp})$ до рядків (стовпців) матриць $A_{1k}, \ldots, A_{nk}$ $(A_{l1}, \ldots, A_{lp})$ з однаковими номерами, якщо $a_i \preceq a_k$ $(b_j \preceq b_l)$ в S (T).

Аналогічно зображенням частково впорядкованих множин вводяться поняття прямої суми зображень і нерозкладного зображення пари частково впорядкованих множин. Клейнером в цій статті був доведений наступний результат.

Теорема 1.5. *Пара частково впорядкованих множин* $(S, \preceq)$ *і* $(T, \preceq)$*, де* $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$*,* $T = \{b_1, \ldots, b_p\}$ *має скінченний зображувальний тип тоді і тільки тоді, коли* T *— лінійно впорядкована множина і виконуються умови:*

1. *при* $p = 1$ *множина* S *не містить підмножин вигляду* $(1,1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,3,3)$, $(1,2,5)$, $(N,4)$;
2. *при* $p = 2$ *множина* S *не містить підмножин вигляду* $(1,1,1)$, $(3,3)$, $(2,5)$;
3. *при* $p = 3$ *множина* S *не містить підмножин вигляду* $(1,1,1)$, $(2,2)$, $(1,5)$;
4. *при* $p = 4$ *множина* S *не містить підмножин вигляду* $(1,1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$;
5. *при* $p = 5$ *множина* S *не містить підмножин вигляду* $(1,1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, N;
6. *при* $p \geq 6$ *множина* S *не містить підмножин вигляду* $(1,1,1)$ *і* $(1,2)$.

Трохи пізніше Клейнером у статті [36] була доведена теорема, яка описує ручні пари частково впорядкованих множин.

Теорема 1.6. *Якщо* $\omega(S) \leq \omega(T)$, *то пара частково впорядкованих множин* (S,T) *є ручною тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1. $S = (1)$, *а множина* T *не містить підмножини вигляду* $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,2,6)$, $(N,5)$;
2. $S = (2)$, *а множина* T *не містить підмножини вигляду* $(1,1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(3,4)$, $(2,6)$;
3. $S = (3)$, *а множина* T *не містить підмножини вигляду* $(1,1,1)$, $(2,3)$, $(1,6)$;
4. $S = (4)$, *а множина* T *не містить підмножини вигляду* $(1,1,1)$, $(2,2)$, $(1,4)$;
5. $S = (5)$, *а множина* T *не містить підмножини вигляду* $(1,1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$;

6. *$S = (6)$, а множина T не містить підмножини вигляду $(1,1,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, N;*
7. *$S = (m)$, при $m \geq 7$, а множина T не містить підмножини вигляду $(1,1,1)$, $(1,2)$;*
8. *S містить підмножину вигляду $(1,1)$, але ні S, ні T не містять підмножини вигляду $(1,1,1)$, $(1,2)$.*

Зображення частково впорядкованих множин і їх пар можна розглядати як бімодульні задачі. Саме так бімодульні категорії (категорії матриць над бімодулем) вперше визначив Ю. А. Дрозд у своїй роботі [4]. Для прикладу, нехай $\mathfrak{M} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — скінченна частково впорядкована множина. Розглянемо підалгебру $\mathbf{k}[\mathfrak{M}] \subseteq \mathrm{Mat}(n, \mathbf{k})$ з $\mathbf{k}$-базою $\{e_{ij} \mid x_i \preceq x_j\}$, де e_{ij} — матричні одиниці. Нехай $A = \mathbf{k} \times \mathbf{k}[\mathfrak{M}]$. Розглянемо векторний простір $V = \mathbf{k}^n$ n-вимірних рядків як A-бімодуль, поклавши $(\lambda, S)x = \lambda x$ і $x(\lambda, S) = xS$, де $\lambda \in \mathbf{k}$, $S \in \mathbf{k}[\mathfrak{M}]$. Тоді $\mathbf{El} = \mathbf{El}(\mathbf{k} \times \mathbf{k}[\mathfrak{M}], \mathbf{k}^n)$ є матричною задачею, що вперше з'явилася в роботі [7] для "01-кілець". Тут нерозкладними проективними A-модулями є $A_0 = \mathbf{k}$ і $A_i = Ae_{ii}$ $(1 \leq i \leq n)$. Якщо $P = \bigoplus_{i=0}^n m_i A_i$, то $V(P,P) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Mat}(m_0 \times m_i, \mathbf{k})$. Якщо $P' = \bigoplus_{i=0}^n m'_i A_i$, то $\mathrm{Hom}_A(P,P') \simeq \mathrm{Mat}(m'_0 \times m_0, \mathbf{k}) \oplus (\bigoplus_{i,j=1}^n \mathrm{Mat}(m'_i \times m_j, I_{ij})$, де $I_{ij} = \mathbf{k}$, якщо $x_i \preceq x_j$ і $I_{ij} = 0$ в іншому випадку. Отже, об'єкт з $\mathbf{El}$ задається послідовністю матриць $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$ з коефіцієнтами із $\mathbf{k}$ та спільною кількістю m_0 рядків. Морфізм $M \to M'$, де M_i розміру $m_0 \times m_i$ і M'_i розміру $m'_0 \times m'_i$, задається множиною матриць $\{S_0, S_{ij} \mid i, j \in \mathfrak{M}\}$, де $S_0 \in \mathrm{Mat}(m'_0 \times m_0, \mathbf{k})$, $S_{ij} \in \mathrm{Mat}(m'_i \times m_j, \mathbf{k})$, $S_{ij} = 0$, якщо $x_i \npreceq x_j$ і $S_0 M_j = \sum_{i \in \mathfrak{M}} M'_i S_{ij}$ для всіх $j \in \mathfrak{M}$. Зокрема, M і M' визначають ізоморфні об'єкти з $\mathbf{El}$ тоді й лише тоді, коли вони мають однаковий розмір і M може бути перетворена в M' послідовністю наступних допустимих перетворень:

(a) заміна всіх матриць M_i на S_0M_i, де $S_0 \in \mathrm{GL}(m_0, \mathbf{k})$ (елементарні перетворення рядків, спільні для всіх матриць M_i);

(b) заміна матриці M_i на M_iS_i, де $S_i \in \mathrm{GL}(m_i, \mathbf{k})$ (елементарні перетворення стовпців матриць над полем);

(c) заміна матриці M_j на $M_j + M_iS_{ij}$, якщо $i \preceq j$, де $S_{ij} \in \mathrm{Mat}(m_i \times m_j, \mathbf{k})$ (додаткові перетворення стовпців, що залежать від порядку в $\mathfrak{M}$).

Очевидно, це фактично збігається з означенням Назарової-Ройтера.

1.4 Лагідні та скручено-лагідні алгебри

Нехай $Q = (Q_0, Q_1, s, e)$ — сагайдак і $\mathbf{k}$ — поле. *Співвідношенням для сагайдака* Q називають довільну $\mathbf{k}$-лінійну комбінацію шляхів довжини не менше 2, зі спільною початковою і кінцевою вершинами. *Сагайдаком зі співвідношеннями* називають всяку пару $\bar{Q} = (Q, R)$, де R — деяка множина співвідношень для Q. Нехай $R = \{\lambda_i \mid i \in T\}$, T — множина індексів. Якщо через I позначити ідеал в $\mathbf{k}Q$, породжений всіма елементами $\lambda_i \in R$, то кажуть, що $\mathbf{k}Q/I$ є $\mathbf{k}$-алгеброю, яка визначена сагайдаком Q та співвідношеннями $\lambda_i = 0$, де i пробігає T. Навпаки, якщо розглянути деякий ідеал J алгебри $\mathbf{k}Q$ і зафіксувати в ньому систему стандартних твірних λ_i (тобто таких елементів, які є лінійною комбінацією шляхів зі спільною початковою і кінцевою вершинами), то одержимо сагайдак із співвідношеннями. Точніше кажучи, справедливий наступний результат [9, гл. 3].

Теорема 1.7. *Кожна скінченновимірна алгебра над алгебраїчно замкненим полем Моріта-еквівалентна фактор-алгебрі* $\mathbf{k}Q/I$*, де* Q *— деякий скінченний сагайдак, а* I *— ідеал в алгебрі* $\mathbf{k}Q$ *такий, що* $J^2 \supseteq I \supseteq J^m$ *для деякого* $m \geq 2$*, де* J *позначає ідеал, породжений всіма стрілками сагайдака.*

Множина співвідношень R для такої алгебри — це множина твірних ідеалу I. Зауважимо також, що сагайдак Q визначається тут однозначно, але не ідеал I й тим більше не множина співвідношень.

Нагадаємо, що дві алгебри звуться *Моріта-еквівалентними*, якщо вони мають еквівалентні категорії модулів. Іншими словами, ці алгебри мають однакові теорії зображень. Критерій такої еквівалентності, встановлений вперше Морітою, можна сформулювати так [9]:

Теорема 1.8. *Категорії модулів над алгебрами* A *і* B *еквівалентні тоді й лише тоді, коли існує проективний генератор категорії правих* A*-модулів* P *такий, що* $B \simeq (\operatorname{End}_A P)^{op}$*. При цьому еквівалентність категорій встановлюється функтором* $P \otimes_A \_$ *.*

Тут *проективний генератор* — це скінченнопороджений A-модуль P такий, що $mP = A \oplus M$ для деякого m.

Приведемо тепер означення лагідної та скручено-лагідної алгебр. Вперше вони були введені у роботах [20, 35] у зв'язку з теорією зображень. Насамперед зауважимо, що для скручено-лагідної алгебри існує кілька різних означень. Але неважко бачити, що всі вони між собою еквівалентні. Ми приведемо означення цих алгебр, посилаючись на роботу [23].

Пара (Q, R) називається *лагідною* (*gentle*), якщо виконуються наступні умови:

1) для кожної вершини $i \in Q$, існує не більше двох стрілок, які починаються в i та не більше двох стрілок, які закінчуються в i;
2) усі співвідношення в R мають вигляд $\alpha\beta$ для деяких стрілок α, β;
3) якщо існують дві стрілки α_1, α_2, які починаються в i, то для кожної стрілки β, яка закінчується в i, або $\alpha_1\beta \in R$, або $\alpha_2\beta \in R$, але не одночасно;
4) якщо існують дві стрілки β_1, β_2, які закінчуються в i, то для кожної стрілки α, яка починається в i, або $\alpha\beta_1 \in R$, або $\alpha\beta_2 \in R$, але не одночасно.

Алгебра A називається *лагідною*, якщо вона Моріта-еквівалентна фактор-алгебрі $\mathbf{k}Q/\langle R\rangle$, де пара (Q, R) є лагідною (через $\langle R\rangle$ ми позначаємо ідеал алгебри $\mathbf{k}Q$, породжений всіма елементами $\lambda_i \in R$).

Зафіксуємо тепер у сагайдаку Q деяку множину вершин, яку позначатимемо через Sp. Елементи множини Sp будемо називати *спеціальними вершинами*, а всі інші вершини сагайдака — *звичайними*.

Для трійки (Q, Sp, R) розглянемо пару (Q^{sp}, R^{sp}), де $Q_0^{sp} := Q_0$, $Q_1^{sp} := Q_1 \cup \{\sigma_i \mid i \in Sp\}$, $s(\sigma_i) := e(\sigma_i) := i$ та $R^{sp} := R \cup \{\sigma_i^2 \mid i \in Sp\}$.

Трійка (Q, Sp, R) називається *скручено-лагідною* (*skewed-gentle*), якщо відповідна їй пара (Q^{sp}, R^{sp}) є лагідною.

Нехай (Q, Sp, R) — скручено-лагідна трійка. Зіставимо кожній вершині $i \in Q_0$ множину, яку будемо позначати $Q_0(i)$, в такий спосіб: якщо i — звичайна вершина, то $Q_0(i) = \{i\}$, якщо i — спеціальна вершина, то $Q_0(i) = \{(i, -), (i, +)\}$.

Через (Q^{sg}, R^{sg}) будемо позначати пару, яка визначається в такий спосіб:

$$Q_0^{sg} := \cup_{i \in Q_0} Q_0(i),$$

$$Q_1^{sg}[a,b] := \{(a,\alpha,b) \mid \alpha \in Q_1, a \in Q_0(s(\alpha)), b \in Q_0(e(\alpha))\},$$

$$R^{sg} := \{ \sum_{b \in Q_0(s(\beta))} \lambda_b(a,\alpha,b)(b,\beta,c) \mid \alpha\beta \in R, a \in Q_0(s(\alpha)), c \in Q_0(e(\beta))\},$$

де $\lambda_b = -1$, якщо $b = (i, -)$ для деякого $i \in Q_0$, і $\lambda_b = 1$ в іншому випадку.

Алгебра A називається *скручено-лагідною*, якщо вона Моріта-еквівалентна фактор-алгебрі $\mathbf{k}Q^{sg}/\langle R^{sg}\rangle$, де трійка (Q, Sp, R) є скручено-лагідною.

Добре відомо [23, 37], що лагідні і скручено-лагідні алгебри є ручними, і навіть похідно ручними (тобто, їх похідні категорії скінченновимірних модулів також ручні).

1.5 Нодальні порядки

У роботах [3, 6, 30] розглядалися нодальні порядки над дискретно нормованим кільцем $\mathcal{O}$. Такий порядок — це $\mathcal{O}$-алгебра A, яка задовольняє наступні умови:

(1) A — скінченнопороджений $\mathcal{O}$-модуль без скруту;

(2) $\operatorname{End} J = H$ — спадковий порядок, де $J = \operatorname{rad} A$;

(3) $\operatorname{rad} H = J$;

(4) $\operatorname{length}_A(H \otimes_A U) \leqslant 2$ для кожного простого лівого A-модуля U.

У роботі [6] було встановлено, що нодальні порядки й лише вони є ручними відносно опису скінченнопороджених модулів. У роботах [3, 30] було описано будову нодальних порядків. А саме, встановлено, що вони отримуються із спадкових операціями *склеювання*, *роздуття*, *обмеження* і *розширення* (визначення цих операцій див. у розділі 2).

Висновки до розділу 1

В цьому розділі зроблено стислий огляд літератури за темою дисертації. Сформульовано допоміжні поняття і твердження, які використовуються при подальших дослідженнях в наступних 4-х розділах.

РОЗДІЛ 2
БУДОВА НОДАЛЬНИХ АЛГЕБР

В даному розділі ми розглядаємо будову нодальних алгебр. Спочатку ми це робимо над довільним полем, а потім, як наслідок, приводимо конструкцію таких алгебр над алгебраїчно замкненим полем, з якою будуть пов'язані наші дослідження в наступних розділах.

Основні результати розділу опубліковані в роботах [10, 12, 31].

2.1 Моріта-еквівалентність

Тут ми фіксуємо деяке поле $\mathbf{k}$ і розглядаємо скінченновимірні $\mathbf{k}$-алгебри.

Означення 2.1. *Алгебра A називається нодальною, якщо існує спадкова алгебра H з $\operatorname{rad} H = J$, $H \supset A \supset J$ і така, що*

1) $\operatorname{rad} A = J$*;*

2) $\operatorname{length}_A(H \otimes_A U) \leqslant 2$ *для кожного простого лівого A-модуля U.*

Будемо казати, що нодальна алгебра A *пов'язана зі спадковою алгеброю H.*

Зауваження 2.1. *Далі ми побачимо, що умову 2) означення нодальної алгебри можна замінити на еквівалентну симетричну:* $\operatorname{length}_A(V \otimes_A H) \leqslant 2$ *для кожного простого правого A-модуля V.*

Твердження 2.1. *Якщо алгебра A' Моріта-еквівалентна нодальній алгебрі A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, то A' є нодальною алгеброю, пов'язаною зі спадковою алгеброю H', яка Моріта-еквівалентна H.*

Доведення. Позначимо $J = \operatorname{rad} H = \operatorname{rad} A$. Нехай P — проективний генератор категорії mod-A правих A-модулів такий, що $A' \simeq \operatorname{End}_A P$. Тоді й $A \simeq \operatorname{End}_{A'} P \simeq P^\vee \otimes_{A'} P$, де $P^\vee = \operatorname{Hom}_{A'}(P, A') \simeq \operatorname{Hom}_A(P, A)$. Нехай $P' = P \otimes_A H$. Тоді P' — проективний генератор категорії mod-H. Покладемо $H' = \operatorname{End}_H P'$. Зауважимо, що $\operatorname{Hom}_H(P', M) \simeq \operatorname{Hom}_A(P, M)$ для кожного правого H-модуля M. Зокрема, $\operatorname{End}_H P' \simeq \operatorname{Hom}_A(P, P')$. Отже, природне відображення $A' \to H'$ є мономорфізмом. Більш того, оскільки $P'J = PJ$, то

$$\begin{aligned} \operatorname{rad}\operatorname{End}_H P' = \operatorname{Hom}_H(P', PJ') \simeq \operatorname{Hom}_A(P, P'J) = \\ = \operatorname{Hom}_A(P, PJ) = \operatorname{rad}\operatorname{End}_A P \end{aligned}$$

(див. [9, гл. 3, вправа 6]). Таким чином, $\operatorname{rad} A' = \operatorname{rad} H' \subset A' \subseteq H'$. Довільний простий A-модуль ізоморфний $U' = P \otimes_A U$ для деякого простого A-модуля U. Тому

$$\begin{aligned} H' \otimes_{A'} U' = H' \otimes_{A'} (P \otimes_A U) \simeq (H' \otimes_{A'} P) \otimes_A U \simeq (P \otimes_A H) \otimes_A U \simeq \\ \simeq P \otimes_A (H \otimes_A U), \end{aligned}$$

оскільки

$$\begin{aligned} H' \otimes_{A'} P \simeq Hom_A(P, P \otimes_A H) \otimes_{A'} P \simeq ((P \otimes_A H) \otimes_A P^\vee) \otimes_{A'} P \simeq \\ \simeq (P \otimes_A H) \otimes_A (P^\vee \otimes_{A'} P) \simeq P \otimes_A (H \otimes_A A) \simeq P \otimes_A H. \end{aligned}$$

Отже, $\operatorname{length}_{A'}(H' \otimes_{A'} U') = \operatorname{length}_A(H \otimes_A U) \leqslant 2$, тому A' є нодальною.

Дане твердження дозволяє розглядати лише базові нодальні алгебри A, тобто такі, що $A/\operatorname{rad} A$ є прямим добутком тіл.

2.2 Нодальні алгебри над довільним полем

Тут ми розглядаємо лише алгебри сепарабального типу. Це означає, що фактор-алгебра за радикалом є сепарабельною. Нагадаємо [9, гл. 8], що спадкова алгебра H над досконалим полем задається парою $(\bar{H}, V)$, де $\bar{H}$ — напівпроста алгебра, а V — $\bar{H}$-бімодуль. Якщо алгебра $\bar{H}$ є базовою, то $\bar{H} = \bar{H}_1 \times \ldots \times \bar{H}_s$, де $\bar{H}_i$ — тіла. $V = \bigoplus V_{ij}$, де V_{ij} — це $\bar{H}_i$-$\bar{H}_j$-бімодуль.

Вкажемо конструкцію, яка дає всі базові нодальні алгебри сепарабельного типу. Назвемо *нодальними даними* набір, який складається з:

(1) пари $(\bar{H}, V)$, де $\bar{H}$ — базова напівпроста алгебра ($\bar{H} = \prod\limits_{i \in I} \bar{H}_i$, $\bar{H}_i$ — тіла), V — деякий $\bar{H}$-бімодуль.

(2) бінарного симетричного відношення $\sim$ на компонентах $\bar{H}$ (або на їх номерах) такого, що для кожного $i \in I$ існує не більше одного $j \in I$ такого, що $i \sim j$, причому якщо $i \sim j$, то $\bar{H}_i = \bar{H}_j$.

(3) підмножини $J \subset I$ такої, що якщо $i \in J$, то $i \nsim j$ для всіх j, і для кожного $i \in J$ задано

   a) або підтіло $\bar{A}_i \subset \bar{H}_i$ так, що $(\bar{H}_i : \bar{A}_i) = 2$,

   b) або розширення $\bar{A}_i \supset \bar{H}_i$ так, що $(\bar{A}_i : \bar{H}_i) = 2$.

   У випадку *a*) будемо писати $i \in J_-$, а у випадку *b*) — $i \in J_+$. Очевидно, що $J = J_- \cup J_+$.

   У випадку *b*) ми розглядатимемо $\bar{A}_i$ як векторний простір над $\bar{H}_i$. Тоді відображення $x \mapsto xa$, де $a, x \in \bar{A}_i$, ототожнює елемент $a \in \bar{A}_i$ з лінійним оператором у $\bar{H}_i$-векторному просторі $\bar{A}_i$, тобто з матрицею із $\mathrm{Mat}(2, \bar{H}_i)$. Отже, в цьому випадку ми можемо ототожнити $\bar{A}_i$ з підалгеброю в $\mathrm{Mat}(2, \bar{H}_i)$.

За даними пунктів (1)-(3) будується базова нодальна алгебра $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ в такий спосіб:

- Розглядаємо спадкову алгебру H типу $(\bar{H}, V)$ з кратностями

$$m_i = \begin{cases} 2, & \text{якщо } i \sim i, \text{ або } i \in J_+, \\ 1 & \text{— в іншому випадку.} \end{cases}$$

- У фактор-алгебрі $H/\operatorname{rad} H = \prod_{j=1}^{s} \operatorname{Mat}(m_j, \bar{H}_j)$ розглядаємо підалгебру $\bar{A}$, яка складається з таких наборів $(a_1, \ldots, a_s)$, що:
  1) $a_j = a_k$, якщо $j \sim k$ і $k \neq j$; в цьому випадку будемо говорити, що A *отримується з H склеюванням компонентів* $\bar{H}_j$ і $\bar{H}_k$;
  2) a_j є діагональною матрицею, якщо $j \sim j$; в цьому випадку будемо говорити, що A *отримується з H роздуттям компоненти* $\bar{H}_j$;
  3) $a_i \in \bar{A}_i$, якщо $i \in J_-$; в цьому випадку будемо казати, що A *отримується з H обмеженням компоненти* $\bar{H}_i$;
  4) $a_i \in \bar{A}_i$, якщо $i \in J_+$ (ми застосовуємо ототожнення $\bar{A}_i$ з підалгеброю в $\operatorname{Mat}(2, \bar{H}_i)$); тут ми будемо казати, що A *отримується з H розширенням компоненти* $\bar{H}_i$.
- Розглядаємо підалгебру $A = A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_i, \bar{A}_i) \subset H$, яка є прообразом підалгебри $\bar{A} \subset \bar{H}$. За побудовою ця алгебра є базовою.

Теорема 2.1. *Алгебра $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ є нодальною, і кожна базова нодальна алгебра сепарабельного типу ізоморфна $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ для деяких нодальних даних.*

Зауваження 2.2. *Якщо нодальна алгебра не є базовою, то потрібно ще задати:*

1) *кратності* n_j*, задані для таких* j*, що* $j \nsim j$*, причому так, що* $n_j = n_k$ *при* $j \sim k$*;*

2) *кратності* n'_j, n''_j*, задані для таких* j*, що* $j \sim j$*.*

Лема 2.1. *Нехай* A, B *— кільця,* $A \subseteq B$*, і* $\operatorname{rad} A$ *є ідеалом* B*. Покладемо* $\bar{A} = A/\operatorname{rad} A$ *і* $\bar{B} = B/\operatorname{rad}$*. Для кожного простого лівого* A*-модуля (*$\bar{A}$*-модуля)* U *виконується рівність*

$$\operatorname{length}_A(B \otimes_A U) = \operatorname{length}_{\bar{A}}(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U).$$

Доведення. Кожний простий лівий A-модуль є простим лівим $\bar{A}$-модулем і навпаки. Доведемо, що для кожного простого лівого A-модуля U має місце ізоморфізм лівих B-модулів

$$B \otimes_A U \simeq \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U.$$

Білінійне відображення $B \times U \to \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U : (b, x) \mapsto \bar{b} \otimes x$ є A-збалансованим, тому існує гомоморфізм абелевих груп $f : B \otimes_A U \to \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U$ такий, що $f(b \otimes x) = \bar{b} \otimes x$ для всіх $b \in B, x \in U$. Легко перевірити, що f також буде гомоморфізмом B-модулів. Якщо $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$, де $b_1, b_2 \in B$, то $b_1 - b_2 \in \operatorname{rad} A$, і для довільного $x \in U$ виконується $(b_1 - b_2)x \in (\operatorname{rad} A)U = 0, b_1 \otimes x - b_2 \otimes x = 1 \otimes (b_1 - b_2)x = 0$ в $B \otimes_A U$. Тому можна коректно визначити білінійне $\bar{A}$-збалансоване відображення $\bar{B} \times U \to B \otimes_A U : (\bar{b}, x) \mapsto b \otimes x$. Значить існує гомоморфізм абелевих груп $g : \bar{B} \otimes_{\bar{A}} U \to B \otimes_A U$ такий, що $g(\bar{b} \otimes x) = b \otimes x$ для всіх $b \in B, x \in U$. Легко бачити, що g буде гомоморфізмом B-модулів. Ендоморфізми B-модулів fg, gf збігаються з $id_{\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U}, id_{B \otimes_A U}$ на твірних модулів $\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U, B \otimes_A U$ відповідно, отже, $fg = id_{\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U}$ і $gf = id_{B \otimes_A U}$.

З ізоморфізму B-модулів $B \otimes_A U$ і $\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U$ випливає їх ізоморфізм як A-модулів та

$$\operatorname{length}_A(B \otimes_A U) = \operatorname{length}_A(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U).$$

Композиційний ряд кожного $\bar{A}$-модуля буде його композиційним рядом як A-модуля, тому

$$\operatorname{length}_A(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U) = \operatorname{length}_{\bar{A}}(\bar{B} \otimes_{\bar{A}} U),$$

що і дає потрібну рівність. Лему доведено.

Лема 2.2. *Нехай* $\tilde{S} = \prod_{i=1}^m \tilde{S}_i$ *— напівпроста алгебра, де* $\tilde{S}_i \simeq \operatorname{Mat}(d_i, F_i)$ *— її прості компоненти,* $S = \prod_{k=1}^r S_k$ *— її підалгебра, така, що всі* S_k *є тілами і* $\operatorname{length}_S(\tilde{S} \otimes_S S_k) \leqslant 2$ *для всіх* $1 \leqslant k \leqslant r$. *Тоді, для кожного* $1 \leqslant k \leqslant r$*:*

0) або $S_k = \tilde{S}_i$ *для деякого* i*,*

1) або $S_k \subset \tilde{S}_i \times \tilde{S}_j$ *для деякого* $i \neq j$ *так, що* $\tilde{S}_i \simeq \tilde{S}_j \simeq F$ *і* $S_k \simeq F$ *вкладається в* $\tilde{S}_i \times \tilde{S}_j \simeq F \times F$ *діагонально,*

2) або існує інший індекс $q \neq k$ *такий, що* $S_k \simeq S_q$, $S_k \times S_q \subset \tilde{S}_i$ *для деякого* i, $\tilde{S}_i \simeq \operatorname{Mat}(2, F_i)$ *і цей ізоморфізм можна вибрати так, що* $S_k \times S_q$ *вкладається в* $\tilde{S}_i$ *як підалгебра діагональних матриць,*

3) або $S_k \subset \tilde{S}_i$ *як підтіло тіла* $\tilde{S}_i$ *для деякого* i*, так, що* $(\tilde{S}_i : S_k) = 2$*,*

4) або $S_k \supset F_i$ *як розширення тіла* F_i *для деякого* i *таке, що* $(S_k : F_i) = 2$*,* $\tilde{S}_i \simeq \operatorname{Mat}(2, F_i)$ *і* S_k *вкладається в* $\operatorname{Mat}(2, F_i)$ *так, що елементу* $a \in S_k$ *відповідає матриця оператора* $x \mapsto xa$*.*

Доведення. Позначимо $L_{ik} = \tilde{S}_i \otimes_S S_k$. Звичайно, що $L_{ik} \neq 0$ тоді і лише тоді, коли проекція S_k на $\tilde{S}_i$ є ненульовою. Оскільки $L_k = \tilde{S} \otimes_S S_k = \bigoplus_{i=1}^m L_{ik}$, існують щонайбільше два індекси i такі, що $L_{ik} \neq 0$. Тому, або $S_k \subseteq \tilde{S}_i$ для деякого i, або $S_k \subset \tilde{S}_i \times \tilde{S}_j$ для деяких $i \neq j$ і обидва L_{ik} і L_{jk} не нульові. Зауважимо, що $\dim_{F_i} L_{ik} \geqslant d_i$, а $\dim_{S_k} L_k \leqslant 2$. Тому в останньому випадку $d_i = d_j = 1$ і $\tilde{S}_i \simeq$

$\tilde{S}_j \simeq S_k$. Якщо це спільне значення позначити через F, то $S_k \simeq F$ вкладається в $\tilde{S}_i \times \tilde{S}_j \simeq F \times F$ діагонально. Це — випадок 1).

Припустимо, що $S_k \subseteq \tilde{S}_i$, але $S_k \neq \tilde{S}_i$. Тоді $d_i \leqslant 2$.

Якщо $d_i = 1$, то $\tilde{S}_i$ — тіло, S_k — його підтіло, причому $(\tilde{S}_i : S_k) = 2$. Це — випадок 3).

Нехай тепер $d_i = 2$, причому k — єдиний індекс, для якого $L_{ik} \neq 0$. Тоді $\bar{S}_i = \tilde{S}_i \otimes_S S = \tilde{S}_i \otimes_S S_k = L_{ik}$. Але $\tilde{S}_i = 2U_i$, де U_i — простий $\tilde{S}_i$-модуль. Тому $U_i \simeq S_k$ як S_k-модуль. Отже, $S_k \supset F_i = \operatorname{End} U_i$, причому $(S_k : F_i) = 2$. Це — випадок 4).

Нарешті, якщо $d_i = 2$ і є ще один індекс q, для якого $L_{iq} \neq 0$, то $\tilde{S}_i = \mathrm{Mat}(2, F_i) \supset S_k \times S_q$. Тоді $\bar{S}_i = \tilde{S}_i \otimes_S S = \tilde{S}_i \otimes_S (S_k \oplus S_q) = L_{ik} \oplus L_{iq}$. Отже, L_{ik} та L_{iq} — прості $\tilde{S}_i$-модулі і S_k та S_q містять $\operatorname{End} U_i = F_i$. Оскільки $L_{ik} \neq \tilde{S}_i$ і $L_{iq} \neq \tilde{S}_i$, то $S_k \simeq S_q \simeq F_i$. Тоді $S_k \times S_q$ вкладається в $\tilde{S}_i$ як підалгебра діагональних матриць. Це — випадок 2).

Доведення теореми. Нехай A — нодальна $\mathbf{k}$-алгебра, H — відповідна спадкова $\mathbf{k}$-алгебра. Покладемо $\bar{A} = A/\operatorname{rad} A$ і $\bar{H} = H/\operatorname{rad} H$. Оскільки $\operatorname{rad} A = \operatorname{rad} H$, то $\bar{A} \subseteq \bar{H}$. $\bar{A}$ і $\bar{H}$ — напівпрості $\mathbf{k}$-алгебри. Оскільки алгебру A ми вважаємо базовою, то $\bar{A}$ розкладається в прямий добуток тіл над полем $\mathbf{k}$: $\bar{A} = \bar{A}_1 \times \ldots \times \bar{A}_r$. Ці тіла скінченновимірні над $\mathbf{k}$, оскільки $\bar{A}$ є скінченновимірною. Алгебра $\bar{H}$ розкладається в прямий добуток матричних алгебр над тілами: $\bar{H} = M_1 \times \ldots \times M_s$, де $M_i = \mathrm{Mat}(m_i, \bar{H}_i)$.

З леми 2.1 випливає, що умову 2) в означенні нодальної алгебри можна замінити на еквівалентну:

$$\mathrm{length}_{\bar{A}}(\bar{H} \otimes_{\bar{A}} U) \leqslant 2 \text{ для кожного простого лівого } \bar{A}\text{-модуля } U.$$

Отже, можна застосувати лему 2.2 для алгебри $\tilde{S} = \bar{H}$ і її підалгебри $S = \bar{A}$. Тоді, всі компоненти $\bar{H}$ є або F або $\mathrm{Mat}(2, F)$ і, відповідно до цієї леми, можливі наступні 5 випадків:

0) $\bar{H}_k = F$ для деякого k збігається з простою компонентою $\bar{A}$. Покладемо тут $k \nsim i$ для всіх $i \in I \setminus J$.

1) $\bar{H}_k \times \bar{H}_l \simeq F \times F$ для деяких $k \neq l$ містить просту компоненту $\bar{A}$ (ізоморфну F), вкладену діагонально. В цьому випадку покладемо $k \sim l$.

2) $\bar{H}_k = \mathrm{Mat}(2, F)$ для деякого k містить $\bar{A}_i \times \bar{A}_j$, $(i \neq j)$, причому $\bar{A}_i \times \bar{A}_j$ вкладається в $\bar{H}_k$ як підалгебра діагональних матриць. Тут ми покладемо $k \sim k$.

3) $\bar{H}_k = F$ містить підтіло $\bar{A}_i$ таке, що $(\bar{H}_k : \bar{A}_i) = 2$. В цьому випадку покладемо $k \in J_-$.

4) $\bar{H}_k = \mathrm{Mat}(2, F)$, де $F \subset \bar{A}_i$ так, що $(\bar{A}_i : F) = 2$. Тут ми покладемо $k \in J_+$.

Це й означає, що кожна базова нодальна алгебра A ізоморфна алгебрі $A(\bar{H}, V, \sim, J_+, J_-, \bar{A}_i)$ для деяких нодальних даних. Теорему доведено.

Очевидно, вказана конструкція нодальних алгебр є ліво-право симетричною. Точніше, якщо нодальна алгебра A будується зі спадкової алгебри H деякою послідовністю склеювань, роздувань, обмежень та розширень компонентів, то антиізоморфна алгебра A^{op} одержується з антиізоморфної спадкової алгебри H^{op} такою ж послідовністю тих самих операцій.

Наслідок 2.1. *Якщо алгебра A є нодальною, то й антиізоморфна алгебра A^{op} також є нодальною.*

З цього наслідку безпосередньо випливає такий наслідок.

Наслідок 2.2. *Алгебра A є нодальною тоді й лише тоді, коли існує спадкова алгебра $H \supset A$ така, що*

1) $\operatorname{rad} A = \operatorname{rad} H$*;*

2) $\operatorname{length}_A(V \otimes_A H) \leqslant 2$ *для кожного простого правого A-модуля V.*

2.3 Нодальні алгебри над алгебраїчно замкненим полем

Варто спеціально розглянути випадок будови нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем [8, 31].

Як відомо [9, гл. 3], кожна базова спадкова алгебра ізоморфна алгебрі шляхів деякого сагайдака Q без орієнтованих циклів. Отже, в цьому випадку *нодальними даними* назвемо набір, який складається з:

(1) сагайдака Q;

(2) бінарного симетричного відношенням $\sim$ на множині Q_0 (вершин сагайдака Q) такого, що для кожної вершини $i \in Q_0$ є не більше ніж одна вершина $j \in Q_0$ така, що $i \sim j$.

За цими даними будується базова нодальна алгебра $A(Q, \sim)$ у такий спосіб:

- Розглядаємо спадкову алгебру H з сагайдаком Q і кратностями вершин

$$m_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j \nsim j, \\ 2, & \text{якщо } j \sim j. \end{cases}$$

- У фактор-алгебрі $\bar{H} = H / \operatorname{rad} H = \prod_{j=1}^{s} \operatorname{Mat}(m_j, \mathbf{k})$ розглядаємо підалгебру $\bar{A}$, яка складається з таких наборів $(a_1, \ldots, a_s)$, що

$a_j = a_k$, якщо $j \sim k$ і $k \neq j$; у цьому випадку ми будемо казати, що A отримується з H *склеюванням вершин* j та k сагайдака Q;

a_j є діагональною матрицею, якщо $j \sim j$; у цьому випадку ми будемо казати, що A отримується з H *роздуттям вершини* j сагайдака Q.

- Розглядаємо підалгебру $A = A(Q, \sim) \subset H$, яка є прообразом підалгебри $\bar{A} \subset \bar{H}$. За побудовою, ця алгебра є базовою.

У випадку алгебраїчно замкненого поля спробуємо детальніше поговорити про операції склеювання і роздуття як на простих компонентах алгебри, так і на вершинах відповідного сагайдака.

Означення 2.2. *Нехай B — базова алгебра, $\bar{B} = B/\operatorname{rad} B = \bigoplus_i \bar{B}_i$, де $\bar{B}_i \simeq \mathbf{k}$ — прості B-модулі.*

(1) Зафіксуємо 2 індекси i, j. Нехай $\bar{A}$ — підалгебра алгебри $\bar{B}$, яка складається з елементів $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ таких, що $\lambda_i = \lambda_j$, A — прообраз $\bar{A}$ в B. Ми кажемо, що A отримується з B шляхом склеювання компонентів $\bar{B}_i$ та $\bar{B}_j$ (або відповідних вершин сагайдака алгебри B).

(2) Зафіксуємо індекс i. Нехай $P = 2B_i \oplus \bigoplus_{k \neq i} B_k$, $B' = \operatorname{End}_B P$, $\bar{B}' = \bar{B}/\operatorname{rad} \bar{B} = \prod_{k=1}^{m} \bar{B}'_i$, де $\bar{B}'_i \simeq \operatorname{Mat}(2, \mathbf{k})$ і $\bar{B}'_k \simeq \mathbf{k}$ для $k \neq i$. Нехай $\bar{A}'$ — підалгебра алгебри $\bar{B}'$, яка складається з елементів $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ таких, що b_i — діагональна матриця, A — прообраз $\bar{A}$ в B'. Ми кажемо, що $\bar{A}$ отримується з B шляхом роздуття компоненти $\bar{B}_i$ (або відповідної вершини сагайдака алгебри B).

З цього означення одразу випливають наступні властивості.

Твердження 2.2. *Враховуючи означення 2.2*

(1) Якщо алгебра A отримується з B шляхом склеювання компонентів $\bar{B}_i$ і $\bar{B}_j$, то вона є базовою і $A/\operatorname{rad} A = \bar{A}_{ij} \times \prod_{k \notin \{i,j\}} \bar{B}_k$, *де* $\bar{A}_{ij} = \{(\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbf{k}\} \subset \bar{B}_i \times \bar{B}_j$. *Крім того,* $\operatorname{rad} A = \operatorname{rad} B$ *і* $B \otimes_A \bar{A}_{ij} \simeq \bar{B}_i \times \bar{B}_j$.

(2) Якщо алгебра A отримується з B шляхом роздуття компоненти $\bar{B}_i$, то вона є базовою і $A/\operatorname{rad} A = \bar{A}_{i1} \times \bar{A}_{i2} \times \prod_{k \neq i} \bar{B}_k$, *де* $\bar{A}_{is} = \{\lambda e_{ss} \mid \lambda \in \mathbf{k}\}$ *і* $e_{ss} (s \in \{1, 2\})$ *позначають діагональні матричні одиниці в* $\bar{B}'_i \simeq \operatorname{Mat}(2, \mathbf{k})$. *Крім того,* $\operatorname{rad} A = \operatorname{rad} B'$ *і* $B' \otimes_A \bar{A}_{is} \simeq V$, *де V — простий $\bar{B}'_i$-модуль.*

Будемо називати компоненту $\bar{A}_{ij}$ в першому випадку і компоненти $\bar{A}_{is}$ в другому випадку *новими компонентами* алгебри A. Всі інші прості компоненти алгебри $\bar{A}$ такі ж, як і в $\bar{B}$.

Твердження 2.3. *Враховуючи означення 2.2 припустимо, що алгебра B задається сагайдаком Q з множиною співвідношень R.*

(1) Нехай алгебра A отримується з B шляхом склеювання компонентів, що відповідають вершинам i та j. Тоді сагайдак алгебри A отримується з Q шляхом ототожнення вершин i та j, тоді як множиною співвідношень для A є $R \cup R'$, де R' — множина всіх добутків $\alpha\beta$, де α починається в i (або в j), а β закінчується в j (відповідно, в i).

(2) Нехай алгебра A отримується з B шляхом роздуття компоненти, що відповідає вершині i та не існує петель в цій вершині. Позначимо через $\operatorname{Ar}(i)$ *множину стрілок, які починаються або закінчуються у вершині i. Тоді сагайдак алгебри A і множина співвідношень для нього отримуються наступним чином:*

- *ми замінюємо вершину i двома вершинами i' та i'';*
- *кожну стрілку α, яка закінчується в i, ми замінюємо двома стрілками α' та α'', які закінчуються відповідно в i' та i'';*
- *кожну стрілку β, яка починається в i, ми замінюємо двома стрілками β' та β'', які починаються відповідно в i' та i'';*
- *замінюємо кожне співвідношення r, що містить стрілки з $\mathrm{Ar}(i)$ двома співвідношеннями r' і r'', де r' (r'') отримується з r шляхом заміни кожної стрілки $\alpha \in \mathrm{Ar}(i)$ на α' (відповідно, на α'');*
- *зберігаємо усі інші співвідношення;*
- *для кожної пари стрілок α, β, де β починається в i, а α закінчується в i, ми додаємо співвідношення $\beta'\alpha' = \beta''\alpha''$.*

Означення 2.3. *Враховуючи означення 2.2, виберемо попарно різні індекси $i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}$ та $j_1, j_2, \ldots, j_r$ з $\{1, 2, \ldots, m\}$. Побудуємо рекурсивно алгебри $A_0, A_1, \ldots, A_{r+s}$:*

$A_0 = B$;

для $1 \leq k \leq r$ алгебра A_k одержується з A_{k-1} шляхом склеювання компонентів $\bar{B}_{i_k}$ and $\bar{B}_{j_k}$;

для $r < k \leq r+s$ алгебра A_k одержується з A_{k-1} шляхом роздуття компоненти $\bar{B}_{i_k}$.

В цьому випадку ми кажемо, що алгебра $A = A_{r+s}$ одержується з B за допомогою *допустимої послідовності склеювань і роздуттів*, що визначається послідовністю індексів $(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}, j_1, j_2, \ldots, j_r)$. Зауважимо, що порядок цих склеювань і роздуттів не впливає на результуючу алгебру A.

Як правило, така послідовність склеювань і роздуттів задається симетричним відношенням $\sim$ (не еквівалентність!) на вершинах сагайдака алгебри B або, що те саме, на множині простих B-модулів $\bar{B}_i$: покладемо $i_k \sim j_k$ для $1 \leq k \leq r$ та $i_k \sim i_k$ для $r < k \leq r + s$. Зауважимо, що $\#\{j \mid i \sim j\} \leq 1$ для кожної вершини i.

Теорема 2.2. *Базова алгебра A є нодальною тоді і тільки тоді, коли вона ізоморфна алгебрі, яка одержується з базової спадкової алгебри H за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів простих компонентів.*

Іншими словами, базова нодальна алгебра може бути задана сагайдаком і симетричним відношенням $\sim$ на множині його вершин таким, що $\#\{j \mid i \sim j\} \leq 1$ для кожної вершини i.

Доведення. Із твердження 2.2 випливає, що якщо алгебра A одержується з базової спадкової алгебри H за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів, то вона є нодальною. Для доведення у зворотньому напрямку, ми використаємо наступну лему про напівпрості алгебри.

Лема 2.3. *Нехай $\tilde{S} = \prod_{i=1}^{m} \tilde{S}_i$ — напівпроста алгебра, де $\tilde{S}_i \simeq \mathrm{Mat}(d_i, \mathbf{k})$ — її прості компоненти, $S = \prod_{k=1}^{r} S_k$ — її підалгебра, така, що $S_k \simeq \mathbf{k}$ і $\mathrm{length}_S(\tilde{S} \otimes_S S_k) \leqslant 2$ для всіх $1 \leqslant k \leqslant r$. Тоді, для кожного $1 \leqslant k \leqslant r$:*

0) або $S_k = \tilde{S}_i$ для деякого i,

1) або $S_k \subset \tilde{S}_i \times \tilde{S}_j$ для деякого $i \neq j$ так, що $\tilde{S}_i \simeq \tilde{S}_j \simeq \mathbf{k}$ і $S_k \simeq \mathbf{k}$ вкладається в $\tilde{S}_i \times \tilde{S}_j \simeq \mathbf{k} \times \mathbf{k}$ діагонально,

2) або існує інший індекс $q \neq k$ такий, що $S_k \simeq S_q$, $S_k \times S_q \subset \tilde{S}_i$ для деякого i, $\tilde{S}_i \simeq \mathrm{Mat}(2, \mathbf{k})$ і цей ізоморфізм можна вибрати так, що $S_k \times S_q$ вкладається в $\tilde{S}_i$ як підалгебра діагональних матриць.

Ця лема є наслідком леми 2.2, якщо розглядати не довільне, а алгебраїчно замкнене поле.

Нехай A — нодальна алгебра, яка пов'язана зі спадковою алгеброю $\widetilde{H}$, $\widetilde{S} = \widetilde{H}/\operatorname{rad}\widetilde{H}$ і $\bar{A} = A/\operatorname{rad}A$. Позначимо через H базову алгебру алгебри $\widetilde{H}$ [9, гл.3] і для кожної простої компоненти $\widetilde{S}_i$ алгебри $\widetilde{S}$ позначимо через $\bar{H}_i$ відповідну просту компоненту алгебри $\bar{H} = H/\operatorname{rad}H$. Застосуємо лему 2.3 до алгебри $\widetilde{S}$ і її підалгебри $\bar{A}$. Нехай $(i_1, j_1), \ldots, (i_r, j_r)$ — всі індекси такі, що добутки $\widetilde{S}_{i_k} \times \widetilde{S}_{j_k}$ зустрічаються у випадку (1) леми, в той час як $i_{r+1}, \ldots, i_{r+s}$ — всі індекси такі, що $\widetilde{S}_{i_k}$ зустрічаються у випадку (2). Тоді, очевидно, що A одержується із H за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів, що визначається послідовністю індексів $(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}, j_1, j_2, \ldots, j_r)$. Теорему доведено.

Оскільки конструкція склеювання і роздуття є ліво-право симетричною, ми одержуємо наступний наслідок.

Наслідок 2.3. *Якщо алгебра A є нодальною, то такою буде й антиізоморфна до неї алгебра. Зокрема, в означенні 2.1 можна замінити умову* (2) *на умову із зауваження 2.1.*

Отже, щоб визначити базову нодальну алгебру, ми повинні визначити сагайдак Q і послідовність його вершин $(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}, j_1, j_2, \ldots, j_r)$. Насправді, можна легко описати отриману алгебру A за допомогою її сагайдака і співвідношень. А саме, ми повинні діяти наступним чином:

1. Для кожного $1 \leq k \leq r$
   (a) ми склеюємо вершини i_k та j_k, при цьому зберігаючи всі стрілки, які починаються або закінчуються в цих вершинах;

(b) якщо стрілка α починається у вершині i_k (або j_k), а стрілка β закінчується у вершині j_k (відповідно i_k), то ми накладаємо співвідношення $\alpha\beta = 0$.

2. Для кожного $r < k \leq r + s$

   (a) ми замінюємо кожну вершину i_k двома вершинами i'_k та i''_k;

   (b) ми замінюємо кожну стрілку $\alpha : j \to i_k$ двома стрілками $\alpha' : j \to i'_k$ та $\alpha'' : j \to i''_k$;

   (c) ми замінюємо кожну стрілку $\beta : i_k \to j$ двома стрілками $\beta' : i'_k \to j$ та $\beta'' : i''_k \to j$;

   (d) якщо стрілка β починається у вершині i_k, а стрілка α закінчується в цій вершині, ми накладаємо співвідношення $\beta'\alpha' = \beta''\alpha''$.

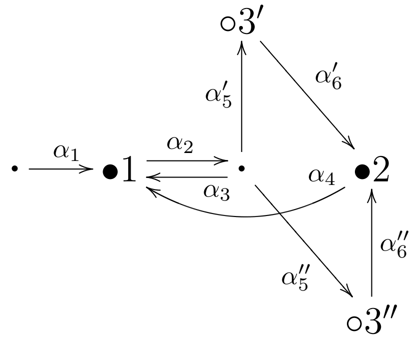
Будемо казати, що A є *нодальна алгебра типу* Q.

Щоб визначити нодальну алгебру, яка не обов'язково є базовою, ми також повинні прописати кратності l_i для кожної вершини i так, що $l_{i_k} = l_{j_k}$ для $1 \leq k \leq r$.

Надалі базову нодальну алгебру ми часто будемо зображати сагайдаком Q, відмічаючи вершини $(i_1, i_2, \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots, j_r)$ чорними кружечками, з індексами $1, 2, \ldots, r$, а вершини $i_{r+1}, \ldots, i_{r+s}$ — колами. Наприклад:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\alpha_1"] & \bullet 1 \arrow[r, "\alpha_2"] & \cdot \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "\alpha_5"] & \bullet 1 & \bullet 2 \arrow[l, "\alpha_4"'] \\
& & \circ 3 \arrow[d, "\alpha_6"] & & \\
& & \bullet 2 & &
\end{tikzcd}$$

У цьому прикладі результуюча нодальна алгебра A задається сагайдаком із співвідношеннями



$$\alpha_2\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4 = 0$$
$$\alpha_4\alpha_6' = \alpha_4\alpha_6'' = 0$$
$$\alpha_6'\alpha_5' = \alpha_6''\alpha_5''.$$

2.4 Зв'язок нодальних алгебр із скручено-лагідними

Як зазначалося вище, кожна базова спадкова алгебра над алгебраїчно замкненим полем ізоморфна алгебрі шляхів деякого сагайдака Q без орієнтованих циклів. Згідно теореми 2.2, кожна базова нодальна алгебра A ізоморфна алгебрі, яка отримується із базової спадкової алгебри H з сагайдаком Q за допомогою деякої послідовності операцій склеювання і роздуття вершин цього сагайдака, причому кожна вершина бере участь щонайбільше в одній такій операції. Зауважимо також, що після виконання цих операцій можуть з'явитися орієнтовані цикли і навіть петлі, але надалі до вершин, у яких утворилися петлі, ці операції вже не застосовуються. Варто зазначити, що спадкова алгебра H і сагайдак Q визначені неоднозначно.

Неважко переконатися, що означення скручено-лагідної алгебри розглянуте у підрозділі 1.4, можна переформулювати в термінах роздуттів, визначених вище, наступним чином.

Означення 2.4. *Базова алгебра A називається скручено-лагідною, якщо вона отримується з лагідної алгебри B шляхом роздуття* *деяких вершин її сагайдака, в які не більше однієї стрілки α входить і не більше однієї стрілки β виходить, причому, якщо обидві стрілки присутні, то $\beta\alpha \notin R$.*

Теорема 2.3. *Нодальна алгебра A є скручено-лагідною тоді і тільки тоді, коли вона одержується з прямого добутку спадкових алгебр типу* A *або* $\widetilde{\mathrm{A}}$ *за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів, що визначається послідовністю вершин таких, що для кожної з них існує не більше однієї стрілки, яка починається, і не більше однієї стрілки, яка закінчується в цій вершині. Причому, алгебра A є лагідною тоді і тільки тоді, коли вона одержується з використанням лише склеювань.*

Доведення. Якщо A пов'язана зі спадковою алгеброю H такою, що її сагайдак не є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу A або $\widetilde{\mathrm{A}}$, то існує вершина i в сагайдаку алгебри H така, що $\mathrm{Ar}(i)$ містить принаймні 3 стрілки. Те ж саме є вірним і для сагайдака алгебри A. Більш того, не існує співвідношень, які містили б більше, ніж одну з цих стрілок, що неможливо в лагідній або скручено-лагідній алгебрі.

Таким чином, можна припустити, що сагайдак алгебри H є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу A або $\widetilde{\mathrm{A}}$. Нехай A одержується з H за допомогою допустимої послідовності склеювань і роздуттів, що визначається послідовністю вершин $(i_1, i_2, \ldots, i_{r+s}, j_1, j_2, \ldots, j_r)$. Припустимо, що існує індекс $1 \leq k \leq r + s$ такий, що є дві стрілки α_1, α_2, які закінчуються в i_k (аналогічним є випадок з двома стрілками, які починаються в i_k). Якщо $k \leq r$ та існує стрілка, яка закінчується в j_k, то є 3 стрілки, що закінчуються у вершині (ij) сагайдака алгебри A, і ніякі дві з них не зустрічаються в одному й тому ж самому співвідношенні, що неможливо в лагідному або скручено-лагідному випадку. Якщо існує стрілка β, яка починається в j_k, вона входить у два нульові співвідношення $\beta\alpha_1 = \beta\alpha_2 = 0$, що також неможливо.

Нарешті, якщо ми застосуємо роздуття, то отримаємо три стрілки, інцидентних з вершиною без нульових співвідношень між ними, що неможливо в лагідній алгебрі. Таким чином, умови теореми є необхідними.

Навпаки, нехай H — спадкова алгебра і її сагайдак є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу A або $\widetilde{\mathrm{A}}$, $i_1 \neq i_2$ — вершини цього сагайдака такі, що існує єдина стрілка α_k, яка починається в i_k, а також єдина стрілка β_k, яка закінчується в i_k $(k = 1, 2)$. Тоді склеювання вершин i_1, i_2 дасть вершину $i = (i_1 i_2)$ в сагайдаку одержаної алгебри, дві стрілки α_k, які починаються в i та дві стрілки β_k, які закінчуються в i $(k = 1, 2)$, що задовольняють співвідношенням $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 = 0$. Таким чином, склеювання таких вершин дасть лагідну алгебру. Далі, роздуття вершин j таких, що існує одна стрілка α, яка починається в j і одна стрілка β, яка закінчується в ній, дають скручено-лагідну алгебру, оскільки $\alpha\beta \neq 0$ в H. Теорему доведено.

Теорема 2.4. *Кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є нодальною, причому сагайдак відповідної спадкової алгебри є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу* A *та* $\tilde{\mathrm{A}}$ (*тобто лінійок та циклів*).

Зауважимо, що ця теорема є оберненою до теореми 2.3. З цих двох теорем також випливає, що така алгебра є лагідною тоді й лише тоді, коли при її побудові не використовувались роздуття, а лише склейки.

Доведення. Оскільки скручено-лагідна алгебра отримується із лагідної роздуттями вершин відповідного сагайдака, причому ці вершини не беруть участі у співвідношеннях, то нам достатньо показати, що будь-яка лагідна алгебра є нодальною.

За означенням, лагідна алгебра A задається сагайдаком Q зі співвідношеннями R. В цьому сагайдаку нас цікавитимуть лише ті вершини, в яких є співвідношення. Вони поділяються на 3 типи:

(1) у вершину i дві стрілки входять і дві стрілки із неї виходять

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[dr, "\alpha"] & & {} \\ & i \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\ {} \arrow[ur, "\gamma"'] & & {} \end{tikzcd}$$

та є два співвідношення, наприклад $\beta\alpha = 0$ і $\delta\gamma = 0$;

(2) у вершину i одна стрілка входить і дві стрілки із неї виходять (або у вершину i дві стрілки входять і одна стрілка із неї виходить)

$$\begin{tikzcd} & & {} \\ {} \arrow[r, "\alpha"] & i \arrow[ur, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \\ & & {} \end{tikzcd} \quad \text{або} \quad \begin{tikzcd} {} \arrow[dr, "\beta"] & & \\ & i \arrow[r, "\alpha"] & {} \\ {} \arrow[ur, "\gamma"'] & & \end{tikzcd}$$

причому $\beta\alpha = 0$ або $\gamma\alpha = 0$ (відповідно, $\alpha\beta = 0$ або $\alpha\gamma = 0$), але не одночасно;

(3) у вершину i одна стрілка входить і одна стрілка із неї виходить

$$\xrightarrow{\alpha} i \xrightarrow{\beta}$$

та є співвідношення $\beta\alpha = 0$.

Доведення проведемо індукцією по кількості співвідношень. Якщо співвідношень взагалі немає, то лагідна алгебра є спадковою, а її сагайдак є незв'язним об'єднанням сагайдаків типу A або $\tilde{A}$. Нехай i — вершина, яка входить у деяке співвідношення. Припустимо, що вона належить до типу (1). Розглянемо сагайдак Q_1, який отримується із сагайдака Q заміною вершини i двома вершинами i' та i'':

$$\xrightarrow{\alpha} i' \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\gamma} i'' \xrightarrow{\beta}$$

Всі інші вершини в сагайдаку Q_1 залишаються незмінними. Співвідношення R_1 сагайдака Q_1 — це «старі» співвідношення R без тих двох, які були присутні у вершині i. По суті, ми отримали нову алгебру A_1, яка задається сагайдаком Q_1 зі співвідношеннями R_1. Очевидно, що алгебра A одержується із A_1 склеюванням компонент i' та i''.

Якщо вершина i належить до типу (2), то ми її замінюємо двома вершинами i' та i'' вигляду

$$\xrightarrow{\alpha} i' \xrightarrow{\beta}$$

$$i'' \xrightarrow{\gamma}$$

(або із зворотними напрямками стрілок), а якщо вершина i належить до типу (3), то будемо виконувати заміну вигляду

$$\xrightarrow{\alpha} i'$$

$$i'' \xrightarrow{\beta}$$

В результаті такого перетворення одержуємо нову алгебру A_1, з якої алгебра A одержується склеюванням вершин i' та i'', в яких немає співвідношень. Очевидно, ця алгебра також є лагідною, але співвідношень в ній менше, ніж в A. Цим завершується індукція.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі визначено нодальні алгебри, які є основним об'єктом дослідження в дисертації. Описано конструкцію, якою нодальні алгебри отримуються зі спадкових. Встановлено, що кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є нодальною й знайдено умови, за яких нодальна алгебра є лагідною або скручено-лагідною. Ці результати також складають підґрунтя для наступних розділів.

РОЗДІЛ 3
НОДАЛЬНІ АЛГЕБРИ ТИПУ A

В даному розділі ми розглядаємо нодальні алгебри типу A та визначаємо їх зображувальні типи. Зазначимо також, що надалі розглядаються нодальні алгебри над алгебраїчно замкненим полем.

Основні результати розділу опубліковані в роботі [31].

3.1 Неістотні склеювання

Насамперед ми вкажемо на один тип склейок, які не впливають на зображувальний тип алгебри.

Означення 3.1. *Нехай базова алгебра B задається сагайдаком Q зі співвідношеннями і алгебра A отримується з B склеюванням вершин i та j сагайдака Q таких, що не існує стрілок, які входять у вершину i та стрілок, які виходять з вершини j. Будемо казати, що таке склеювання є неістотним.*

Виявляється, що категорії A-mod і B-mod «майже ті самі».

Теорема 3.1. *За умов означення 3.1, існує еквівалентність між категоріями $B\text{-mod}/\langle \bar{B}_i, \bar{B}_j\rangle$ і $A\text{-mod}/\langle \bar{A}_{ij}\rangle$, де $\mathcal{C}/\langle\mathfrak{M}\rangle$ позначає фактор-категорію від $\mathcal{C}$ за модулем ідеалу морфізмів, які пропускаються через пряму суму об'єктів з множини $\mathfrak{M}$. (Тут $\bar{B}_i, \bar{B}_j$ — прості B-модулі, які відповідають вершинам сагайдака i та j відповідно, $\bar{A}_{ij}$ — простий A-модуль, який відповідає вершині, що утворилася після склеювання i та j).*

Зокрема, існує взаємно однозначна відповідність між нерозкладними зображеннями алгебри A, за винятком $\bar{A}_{ij}$, та нерозкладними зображеннями алгебри B, за винятком $\bar{B}_i$ та $\bar{B}_j$. Тому зображувальні типи алгебр A і B збігаються.

Доведення. Ми ототожнюємо B-модулі та A-модулі із зображеннями відповідних сагайдаків зі співвідношеннями. Нагадаємо, що сагайдак алгебри A одержується із сагайдака алгебри B за допомогою склеювання вершин i та j в одну вершину (ij). Для B-модуля M позначимо через $\mathbf{F}M$ такий A-модуль, що

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}M(k) &= M(k) \text{ для будь-якої вершини } k \neq (ij),\\
\mathbf{F}M(ij) &= M(i) \oplus M(j),\\
\mathbf{F}M(\gamma) &= M(\gamma), \text{ якщо } \gamma \notin \mathrm{Ar}(ij),\\
\mathbf{F}M(\alpha) &= \begin{pmatrix} M(\alpha) & 0 \end{pmatrix}, \text{ якщо } \alpha \in \mathrm{Ar}(i) \setminus \mathrm{Ar}(j),\\
\mathbf{F}M(\beta) &= \begin{pmatrix} 0 \\ M(\beta) \end{pmatrix}, \text{ якщо } \beta \in \mathrm{Ar}(j) \setminus \mathrm{Ar}(i)\\
\mathbf{F}M(\alpha) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M(\alpha) & 0 \end{pmatrix}, \text{ якщо } \alpha : i \to j.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Якщо $f : M \to M'$ — гомоморфізм B-модулів, визначимо гомоморфізм $\mathbf{F}f : \mathbf{F}M \to \mathbf{F}M'$, поклавши

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}f(k) &= f(k)\,, \text{ якщо } k \neq (ij),\\
\mathbf{F}f(ij) &= \begin{pmatrix} f(i) & 0 \\ 0 & f(j) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отже, ми отримаємо функтор $\mathbf{F} : \mathbf{B}\text{-mod} \to \mathbf{A}\text{-mod}$. Очевидно, що $\mathbf{F}\bar{B}_i = \mathbf{F}\bar{B}_j = \bar{A}_{ij}$, тому $\mathbf{F}$ індукує функтор $\mathbf{f} : \mathbf{B}\text{-mod}/\langle \bar{B}_i, \bar{B}_j \rangle \to \mathbf{A}\text{-mod}/\langle \bar{A}_{ij} \rangle$.

Нехай тепер N — A-модуль. Визначимо B-модуль $\mathbf{G}N$ наступним чином:

$$\mathbf{G}N(k) = N(k), \text{ якщо } k \notin \{i,j\},$$
$$\mathbf{G}N(i) = N(ij)/N_0(ij), \text{ де } N_0(ij) = \bigcap_{\alpha^-=(ij)} \operatorname{Ker} N(\alpha),$$
$$\mathbf{G}N(j) = \sum_{\beta^+=(ij)} \operatorname{Im} N(\beta),$$

$\mathbf{G}N(\beta) = N(\beta), \text{ якщо } \beta \notin \operatorname{Ar}(i),$

$\mathbf{G}N(\alpha)$ є індуковане відображення $\mathbf{G}N(i) \to \mathbf{G}N(k), \text{ якщо } \alpha : i \to k.$

Зазначимо, що якщо $\beta^+ = j$, то $\operatorname{Im} N(\beta) \subseteq \mathbf{G}N(j)$. Якщо $g : N \to N'$ — гомоморфізм A-модулів, то $g(ij)(\mathbf{G}N(j)) \subseteq \mathbf{G}N'(j)$ і $g(ij)(N_0(ij)) \subseteq N_0'(ij)$. Тому визначимо гомоморфізм $\mathbf{G}g : \mathbf{G}N \to \mathbf{G}N'$, поклавши

$$\mathbf{G}g(k) = g(k)\,, \text{ якщо } k \neq i,$$

$\mathbf{G}g(i)$ є відображення $\mathbf{G}N(i) \to \mathbf{G}N'(i)$, індуковане $g(ij)$,

$\mathbf{G}g(j)$ є обмеження $g(ij)$ на $\mathbf{G}N(j)$.

Отже, ми отримаємо функтор $\mathbf{G} : \mathbf{A}\text{-mod} \to \mathbf{B}\text{-mod}$. Оскільки $\mathbf{G}\bar{A}_{ij} = 0$, він індукує функтор $\mathbf{g} : \mathbf{A}\text{-mod}/\langle \bar{A}_{ij} \rangle \to \mathbf{B}\text{-mod}/\langle \bar{B}_i, \bar{B}_j \rangle$. Припустимо, що $\mathbf{G}g = 0$. Це означає, що $g(k) = 0$ для $k \neq (ij)$, $\operatorname{Im} g(ij) \subseteq \bigcap_{\alpha^-=(ij)} \operatorname{Ker} N'(\alpha)$ і $\operatorname{Ker} g(ij) \supseteq \sum_{\beta^+=(ij)} \operatorname{Im} N(\beta)$. Тому $g(ij)$ індукує відображення

$$\bar{g} : N(j)/\sum_{\beta^+=j} \operatorname{Im} N(\beta) \to N'(ij)$$

з $\operatorname{Im}\bar{g} \subseteq \bigcap_{\alpha^-=(ij)} \operatorname{Ker} N'(\alpha)$. Тому $g = g''g'$, де

$$\begin{aligned}
g' :& N \to \overline{N} \text{ i } g'' : \overline{N} \to N',\\
\overline{N}(k) &= 0, \text{ якщо } k \neq (ij),\\
\overline{N}(ij) &= N(j) / \sum_{\beta^+=j} \operatorname{Im} N(\beta),\\
g'(k) &= g''(k) = 0, \text{ якщо } k \neq (ij),\\
g'(ij) &\text{ — природна сюр'єкція } N(ij) \to \overline{N}(ij),\\
g''(ij) &= \bar{g}.
\end{aligned}$$

Очевидно, що $\overline{N} \simeq m\bar{A}_{ij}$ для деякого m, тому $\operatorname{Ker}\mathbf{G}$ — це просто ідеал $\langle \bar{A}_{ij} \rangle$.

За побудовою,

$$\begin{aligned}
\mathbf{GF}M(i) &= M(i) / \bigcap_{\alpha^-=i} \operatorname{Ker}\alpha,\\
\mathbf{GF}M(j) &= \sum_{\beta^+=j} \operatorname{Im}\beta,\\
\mathbf{FG}N(ij) &= N(ij) / \bigcap_{\alpha^-=i} \operatorname{Ker}\alpha \oplus \sum_{\beta^+=(ij)} \operatorname{Im} N(\beta).
\end{aligned}$$

Таким чином, ми фіксуємо

для кожного $\mathbf{B}$-модуля M ретракцію $\rho_M : M(j) \to \sum_{\beta^+=j} \operatorname{Im}\beta$,

для кожного $\mathbf{A}$-модуля N ретракцію $\rho_N : N(ij) \to \sum_{\beta^+=(ij)} \operatorname{Im}\beta$

і визначаємо морфізми функторів

$$\begin{aligned}
\phi : \operatorname{Id}_{\mathbf{B}\text{-mod}} &\to \mathbf{GF} \text{ такий, що}\\
\phi_M(k) &= \operatorname{Id}_{M(k)} \text{ якщо } k \notin \{i, j\},\\
\phi_M(j) &= \rho_M,\\
\phi_M(i) &\text{ — природна сюр'єкція } M(i) \to \mathbf{GF}M(i),
\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} &\psi : \mathrm{Id}_{\mathbf{A}\text{-mod}} \to \mathbf{FG} \text{ такий, що} \\ &\quad \psi_N(k) = \mathrm{Id}_{N(k)} \text{ якщо } k \neq (ij), \\ &\quad \psi_N(ij) = \rho_N. \end{aligned}$$

Очевидно, що якщо M не має прямих доданків $\bar{B}_i$ і $\bar{B}_j$, то ϕ_M — ізоморфізм. Також, якщо N не має прямих доданків $\bar{A}_{ij}$, то ψ_N — ізоморфізм. Отже, $\mathbf{g}$ і $\mathbf{f}$ — взаємно квазі-обернені, що визначає еквівалентність категорій B-mod$/\langle \bar{B}_i, \bar{B}_j \rangle$ і A-mod$/\langle \bar{A}_{ij} \rangle$. Теорема доведена.

3.2 Виключні та супер-виключні алгебри

Насамперед ми дамо означення нодальної алгебри типу A.

Означення 3.2. *Нодальна алгебра A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, де $H \simeq \mathbf{k}Q$ і Q — сагайдак Динкіна типу* A *або сагайдак Евкліда типу* $\widetilde{\mathrm{A}}$*, називається нодальною алгеброю типу* A.

Тобто, нодальні алгебри типу A отримуються за допомогою операцій склеювання і роздуття із сагайдаків типу A або $\widetilde{\mathrm{A}}$. Нагадаємо, що до сагайдаків типу A або $\tilde{\mathrm{A}}$ належать наступні графи з довільною орієнтацією ребер:

$$\mathrm{A}_n : \qquad 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3 \text{ --- } 4 \text{ --- } \cdots \text{ --- } n \qquad (n \geq 1),$$

$$\widetilde{\mathrm{A}}_n : \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] \arrow[rrrr, dash, bend left] & 2 \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & n \arrow[r, dash] & (n+1) \end{tikzcd} \qquad (n \geq 0).$$

Із теореми 2.3 попереднього розділу випливає, що лагідні і скручено-лагідні алгебри належать до нодальних алгебр типу A. Добре відомо, що вони є ручними. Існує ще два класи алгебр, які є нодальними типу A і зображувальний тип яких може бути скінченним, ручним або диким. Це є *виключні* і *супер-виключні* алгебри.

Означення 3.3. *Нехай H — базова спадкова алгебра з сагайдаком Q типу* A.

1. *Назвемо пару вершин (i,j) сагайдака Q виключною, якщо вони містяться в повному підсагайдаку вигляду*

$$\bullet \xrightarrow{\beta} \overset{i}{\bullet} \xleftarrow{\alpha_1} \bullet \frac{\alpha_2}{\quad} \cdots \frac{\alpha_{n-1}}{\quad} \bullet \xleftarrow{\alpha_n} \overset{j}{\bullet} \xleftarrow{\gamma} \bullet \tag{3.2}$$

   або

$$\bullet \xleftarrow{\beta} \overset{i}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_1} \bullet \frac{\alpha_2}{\quad} \cdots \frac{\alpha_{n-1}}{\quad} \bullet \xrightarrow{\alpha_n} \overset{j}{\bullet} \xrightarrow{\gamma} \bullet \tag{3.3}$$

   де орієнтація стрілок $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ є довільною. Якщо $n = 1$, то $\alpha_1 = \alpha_n : j \to i$ у випадку (3.2) *і $\alpha_1 = \alpha_n : i \to j$ у випадку* (3.3).

2. *Будемо називати склеювання виключної пари вершин виключною склейкою.*

3. *Нодальна алгебра називається виключною, якщо вона отримується зі спадкової алгебри типу* A *за допомогою деякої послідосності склеювань, що складаються з однієї виключної склейки і, можливо, кількох неістотних склеювань.*

Нагадаємо, що неістотнє склеювання не впливає на зображувальний тип алгебри. Тому, ми не повинні приймати їх до уваги, розглядаючи лише виключні алгебри, що отримуються за допомогою виключної склейки. Зауважимо, що в результаті такої склейки вершин i та j алгебрі A буде відповідати сагайдак зі співвідношеннями

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[rr, dotted, dash] \arrow[dr, "\alpha_1"] & & \bullet & & \\ \bullet \arrow[r, dash, "\beta_m"] & \cdots \arrow[r, dash, "\beta_1"] & \bullet \arrow[r, "\beta"] & (ij) \arrow[ur, "\alpha_n"] & \bullet \arrow[l, "\gamma"'] \arrow[r, dash, "\gamma_1"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_l"] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \alpha_n\alpha_1 = \alpha_n\beta = 0 \tag{3.4}$$

у випадку (3.2) або

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[rr, dotted, dash] & & \bullet \arrow[dl, "\alpha_n"] & & \\ \bullet \arrow[r, dash, "\beta_m"] & \cdots \arrow[r, dash, "\beta_1"] & \bullet & (ij) \arrow[l, "\beta"'] \arrow[ul, "\alpha_1"] \arrow[r, "\gamma"] & \bullet \arrow[r, dash, "\gamma_1"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_l"] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \alpha_1\alpha_n = \beta\alpha_n = 0 \tag{3.5}$$

у випадку (3.3). Пунктирна лінія містить стрілки $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$; якщо $n = 1$, то маємо петлю α у вершині (ij) зі співвідношеннями $\alpha^2 = 0$ і, відповідно, $\alpha\beta = 0$ або $\beta\alpha = 0$. Будемо казати, що A — (n, m, l)-*виключна алгебра.*

В наступній теоремі ми визначаємо зображувальні типи таких алгебр.

Теорема 3.2. *(n,m,l)-виключна алгебра є*

(1) скінченно-зображувальною у випадках:

(a) $m = l = 0$,

(b) $l = 0$, $m = 1$, $n \leq 3$,

(c) $l = 0, 2 \leq m \leq 3$, $n = 1$,

(d) $m = 0$, $l = 1$, $n \leq 2$;

(2) ручною у випадках:

(a) $l = 0$, $m = 1$, $n = 4$,

(b) $l = 0$, $m = 2$, $n = 2$,

(c) $l = 0$, $m = 4$, $n = 1$,

(d) $m = 0$, $l = 1$, $n = 3$;

(3) *дикою в усіх інших випадках.*

Доведення. Розглянемо алгебру A, що задається сагайдаком зі співвідношеннями (3.5). Позначимо через C алгебру, яка задається сагайдаком зі співвідношеннями

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[rr, dotted, no head] & & \cdot \arrow[dl, "\alpha_n"] \\ & \bullet \arrow[ul, "\alpha_1"] & \end{tikzcd} \qquad \alpha_1\alpha_n = 0$$

(чорний кружечок вказує на вершину (ij)). Вона отримується з алгебри шляхів сагайдака

$$\Gamma_n = \overset{0}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_1} \overset{1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \overset{n-1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha_n} \overset{n}{\bullet}$$

склеюванням вершин 0 і n. Ця склейка є неістотною, так що ми можемо використати теорему 3.1. Нас цікавитимуть нерозкладні зображення алгебри C, які є ненульовими у вершині $\bullet$. Позначимо через $\mathfrak{L}$ множину таких зображень. Вони виникають із зображень сагайдака Γ_n, які є ненульовими у вершині 0 або n. Це зображення $\tilde{L}_i$ і $\tilde{L}'_i$ $(0 \le i \le n)$, де

$$\tilde{L}_i(k) = \begin{cases} \mathbf{k}, & \text{якщо } k \le i, \\ 0, & \text{якщо } k > i; \end{cases}$$

$$\tilde{L}'_i(k) = \begin{cases} \mathbf{k}, & \text{якщо } k \ge i, \\ 0, & \text{якщо } k < i. \end{cases}$$

Позначимо через L_i і L'_i відповідно зображення $\mathbf{F}\tilde{L}_i$ і $\mathbf{F}\tilde{L}'_i$ (див. формули (3.1)). Очевидно, що $L_n = L'_0$, $L_0 = L'_n = \overline{C}_\bullet$ і $\dim_{\mathbf{k}} L_i(\bullet) = 1$ для $i \ne n$, а також $\dim_{\mathbf{k}} L'_i(\bullet) = 1$ для $i \ne 0$, тоді як $\dim_{\mathbf{k}} L_n(\bullet) = 2$. Позначимо через e_i $(0 \le i < n)$ і e'_j $(0 < j < n)$ базисні вектори відповідно L_i та L'_j, а через e_n, e'_n — базисні вектори $L_n = L'_0$ такі, що $e'_n \in \operatorname{Im} L_n(\alpha_n)$; тоді $L_n(\alpha_1)(e'_n) = 0$, коли $L_n(\alpha_1)(e_n) \neq 0$. Розглянемо множину $\mathbf{E} = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ і відношення $\prec$ на $\mathbf{E}$, де $u \prec v$ означає, що існує гомоморфізм f такий, що $f(u) = v$. Із добре відомого (та елементарного) опису зображень сагайдака Γ і теореми 3.1 випливає, що $\prec$ є лінійний порядок і $e_i \prec e_0 \prec e'_j$ для всіх i, j. Нехай $u_0, u_1, \dots, u_{2n}$ — така нумерація елементів множини $\mathbf{E}$, що $u_i \prec u_j$ тоді й лише тоді, коли $i \leq j$ (тоді $u_n = e_0$), і $e_n = u_k, e'_n = u_l$ $(k < n < l)$. Зазначимо також, що якщо $f \in \operatorname{End} L_n$, матриця $f(\bullet)$ в базисі e_n, e'_n має вигляд $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$.

Нехай M — A-модуль, $\bar{M}$ — його обмеження на C. Тоді $\bar{M} \simeq \bigoplus_i m_i L_i \oplus \bigoplus_j m'_j L'_j$. Відповідно $M(\bullet) = \bigoplus_{i=1}^{2n+1} U_i$, де U_i породжуються образами векторів u_i. Зауважимо, що для $i > n$, $u_i = e'_j$ для деякого j, тому $M(\beta) U_i = 0$. Отже, $M(\beta)$ і $M(\gamma)$ слід розглядати як блочні матриці

$$\begin{aligned} M(\beta) &= \begin{pmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ M(\gamma) &= \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \dots & C_n & C_{n+1} & \dots & C_{2n} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

де матриці B_i, C_i відповідають доданкам U_i. Якщо $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, то $f(\bullet)$ — блочна нижня трикутна матриця (f_{ij}), де $f_{ij} : U_j \to U_i$ і $f_{ij} = 0$, якщо $i < j$. Більш того, ненульові блоки можуть бути довільними з тією лише умовою, що $f_{kk} = f_{ll}$. Тому, якщо дано довільну матрицю $f(\bullet)$ з цією умовою і оборотні діагональні блоки f_{ii}, то ми можемо побудувати модуль N, який ізоморфний до M, поклавши $N(\beta) = M(\beta) f(\bullet)$, $N(\gamma) = M(\gamma) f(\bullet)$. Тоді можна легко перетворити матрицю $M(\gamma)$ так, що існує не більше ніж один ненульовий елемент (рівний 1) в кожному рядку і в кожному стовпці, якщо $i \notin \{k, l\}$, ненульові рядки матриці C_i мають вигляд $\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}$, а ненульові стовпчики матриці $(C_k \,|\, C_l)$ мають такий вигляд

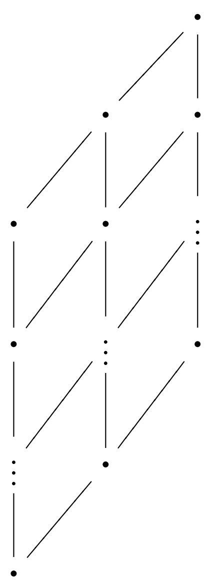
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Стовпчики матриць B_i розіб'ємо відповідно до таких розбиттів C_i. Це дасть $2(n+2)$ нових блоків $\widetilde{B}_s$ $(1 \leq s \leq 2(n+2))$. А саме, блоки $\widetilde{B}_s$ при s непарне відповідно до ненульових блоків матриць C_i і при s парне відповідно до нульових стовпчиків C_i. Два додаткових блоки отримуються з підрозбиття C_k на 4 вертикальні смуги. Також поділимо блоки f_{ij} матриці $f(\bullet)$ в аналогічний спосіб. Відтепер ми будемо розглядати лише такі зображення, що матриця $M(\gamma)$ має вигляд, зведений таким способом. Можна легко перевірити, що це накладає обмеження на матрицю $f(\bullet)$ так, що нові блоки $\tilde{f}_{st}$, які отримуються з f_{ij} при $0 \leq i, j \leq n$, можуть бути тільки ненульовими (і в такому разі довільними) тоді й лише тоді, коли $s > t$ і, крім того, або t є непарне, або s є парне. Це означає, що ці нові блоки можна розглядати як зображення частково впорядкованої множини $\mathfrak{S}_{n+2}$:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & 1 \arrow[dl] \arrow[d] \\
2 \arrow[d] & 3 \arrow[dl] \arrow[d] \\
4 \arrow[d] & \vdots \arrow[dl] \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & 2n+3 \arrow[dl] \\
2(n+2) &
\end{tikzcd}$$

(в сенсі [18]). Добре відомо [18], що $\mathfrak{S}_{n+2}$ має скінченну кількість нерозкладних зображень. Це означає, що A має скінченний зображувальний тип, якщо $m = l = 0$.

Якщо $l = 1$, нехай $\gamma : j \to j_1, \gamma_1 : j_2 \to j_1$ (випадок $\gamma_1 : j_1 \to j_2$ є аналогічним). Ми можемо припустити, що матриця $M(\gamma_1)$ має вигляд $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді рядки всіх матриць C_i слід розбити відповідно до цього поділу $M(\gamma_1)$: $C_i = \begin{pmatrix} C_{i1} \\ C_{i0} \end{pmatrix}$. Більш того, якщо f — гомоморфізм таких зображень, то $f(j_1) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$. Цілком аналогічно до попередніх міркувань можна бачити, що зводячи $M(\gamma)$ до канонічної форми, стовпчики B_i розіб'ються так, що отримана задача приводиться до зображення частково впорядкованої множини $\mathfrak{C}'_{n+3}$:



($n+3$ точки в кожному стовпчику). Із результатів [14, 17] випливає, що ця задача є скінченною при $n \leq 2$, ручною при $n = 3$ і дикою при $n > 3$. Тому, такою є й алгебра A при $m = 0$ і $l = 1$.

Якщо $l > 1$, то після зведення матриць $M(\gamma_2), M(\gamma_1)$ і $M(\gamma)$ отримаємо для $M(\beta)$ задачу про зображення частково впорядкованої множини $\mathfrak{S}''_{n+4}$, аналогічну до $\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{S}'$, але з 4 стовпчиками і $n+4$ точки в кожному стовпці. Ця задача є дикою [17], отже, алгебра A також дика. Якщо обидва $l > 0$ і $m > 0$, аналогічний розгляд показує, що якщо ми зведемо матрицю $M(\beta_1)$ до вигляду $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, рядки матриці $M(\beta)$ також розділяться, так що ми отримаємо задачу про зображення пари частково впорядкованих множин [14], одна з яких $\mathfrak{S}'_{n+3}$, а інша є лінійно впорядкованою з 2 елементів. Як відомо з [36], ця задача є дикою, тому алгебра A також дика.

Нехай тепер $l = 0$ і зафіксуємо розбиття стовпців $M(\beta)$, описане за допомогою частково впорядкованої множини $\mathfrak{S}_{n+2}$ як зазначено вище. Якщо ми зведемо матриці $M(\beta_i)$, які утворюють зображення сагайдака типу A_m, рядки $M(\beta)$ поділяться таким чином, що в результаті ми отримаємо зображення пари частково впорядкованих множин, одна з яких $\mathfrak{S}_{n+2}$, а інша — лінійно впорядкована з $m+1$ елементів. З робіт [14, 36] випливає, що ця задача має скінченний тип, якщо або $m = 1$, $n \leq 3$, або $2 \leq m \leq 3$, $n = 1$, ручною, якщо або $m = 1$, $n = 4$, або $m = 2$, $n = 2$, або $m = 4$, $n = 1$. В усіх інших випадках вона є дикою. Тому, те ж саме вірно і для алгебри A, що завершує доведення.

Означення 3.4. *Нодальна алгебра називається супер-виключною, якщо вона отримується з алгебри вигляду* (3.4) *або* (3.5) *при* $n = 3$ *за допомогою склеювання кінців стрілки* α_2 *у випадку, коли таке склеювання не є неістотним, і, можливо, кількох неістотних склеювань.*

Очевидно, що ми можемо розглянути лише супер-виключні алгебри, які отримані без неістотніх склеювань. Використовуючи [36, Теорема 2.3], легко отримати наступний результат.

Твердження 3.1. *Супер-виключна алгебра є*

(1) скінченно-зображувальною, якщо $m = l = 0$,

(2) ручною, якщо $m + l = 1$,

(3) дикою, якщо $m + l > 1$.

3.3 Основний результат

Зараз можна повністю описати зображувальні типи нодальних алгебр типу A.

Означення 3.5. *1) Будемо називати алгебру A квазі-лагідною, якщо вона отримується з лагідної або скручено-лагідної алгебри за допомогою допустимої послідовності неістотних склеювань.*

2) Будемо називати алгебру A хорошою виключною (хорошою супер-виключною), якщо вона є виключною (відповідно, супер-виключною) і не дикою.

Теорема 3.2 і твердження 3.1 дають опис хороших виключних і супер-виключних алгебр.

Теорема 3.3. *Неспадкова нодальна алгебра типу* A *є скінченно-зображувальною або ручною тоді і тільки тоді, коли вона або квазі-лагідна, або хороша виключна, або хороша супер-виключна. В інших випадках вона є дикою.*

Перш ніж доводити цю теорему, ми покажемо, що склеювання або роздуття не може "покращити" зображувальний тип.

Твердження 3.2. *Нехай алгебра A отримується з B шляхом склеювання або роздуття. Тоді, існує точний функтор $\mathbf{F} : B\text{-mod} \to A\text{-mod}$ такий, що $\mathbf{F}M \simeq \mathbf{F}M'$ тоді і тільки тоді, коли $M \simeq M'$ або, у випадку склеювання вершин i та j, M і M' відрізняються лише тривіальними прямими доданками у цих вершинах.*

Доведення. Нехай A отримується з B шляхом роздуття вершини i. Припустимо, що не існує петель в цій вершині. Випадок, коли є такі петлі розглядається аналогічно, але формули стають більш громіздкими. Зауважимо, що в подальшому розглядати цей випадок нам не потрібно. Для B-модуля M набір $\mathbf{F}M(k) = M(k)$, якщо $k \neq i$, $\mathbf{F}M(i') = \mathbf{F}M(i'') = M(i)$, $\mathbf{F}M(\alpha) = M(\alpha)$, якщо $\alpha \notin \mathrm{Ar}(i)$ і $\mathbf{F}M(\alpha') = \mathbf{F}M(\alpha'') = M(\alpha)$, якщо $\alpha \in \mathrm{Ar}(i)$. Якщо $f : M \to M'$, набір $\mathbf{F}f(k) = f(k)$, якщо $k \neq i$ та $\mathbf{F}f(i') = \mathbf{F}f(i'') = f(i)$. Таким чином, отримаємо точний функтор $\mathbf{F} : B\text{-mod} \to A\text{-mod}$. Навпаки, якщо N — A-модуль, набір $\mathbf{G}N(k) = N(k)$, якщо $k \neq i$ та $\mathbf{G}N(i) = N(i')$. Отримаємо функтор $\mathbf{G} : A\text{-mod} \to B\text{-mod}$. Очевидно, що $\mathbf{GF}M \simeq M$, тому з умови $\mathbf{F}M \simeq \mathbf{F}M'$ випливає, що $M \simeq M'$.

Нехай тепер A отримується з B шляхом склеювання вершин i та j. Як і вище припустимо, що не існує петель в цих вершинах. Для B-модуля M набір $\mathbf{F}M(k) = M(k)$, якщо $k \neq (ij)$, $\mathbf{F}M(ij) = M(i) \oplus M(j)$, $\mathbf{F}M(\alpha) = M(\alpha))$, якщо $\alpha \notin \mathrm{Ar}(i) \cup \mathrm{Ar}(j)$, $\mathbf{F}M(\alpha) = \begin{pmatrix} M(\alpha) & 0 \end{pmatrix}$ $\Big($або $\begin{pmatrix} 0 & M(\alpha) \end{pmatrix}\Big)$, якщо $\alpha^- = i$ (відповідно $\alpha^- = j$) і $\mathbf{F}M(\beta) = \begin{pmatrix} M(\beta) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left($або $M(\beta) = \begin{pmatrix} 0 \\ M(\beta) \end{pmatrix}\right)$, якщо $\beta^+ = i$ (відповідно $\beta^+ = j$). Якщо $f : M \to M'$, набір $\mathbf{F}f(k) = f(k)$, якщо $k \neq (ij)$ і $f(ij) = f(i) \oplus f(j)$. Це дає точний функтор $\mathbf{F} : B\text{-mod} \to A\text{-mod}$. Припустимо, що $\phi : \mathbf{F}M \xrightarrow{\sim} \mathbf{F}M'$,

$$\phi(ij) = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix},$$

$$\phi^{-1}(ij) = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді,

$$\phi_{11}M(\beta) = M'(\beta)\phi(k) \text{ і } \phi_{21}M(\beta) = 0, \text{ якщо } \beta : k \to i,$$
$$\phi_{22}M(\beta) = M'(\beta)\phi(k) \text{ і } \phi_{12}M(\beta) = 0, \text{ якщо } \beta : k \to j,$$
$$M'(\alpha)\phi_{11} = \phi(k)M(\alpha) \text{ і } M'(\alpha)\phi_{12} = 0, \text{ якщо } \alpha : i \to k,$$
$$M'(\alpha)\phi_{22} = \phi(k)M(\alpha) \text{ і } M'(\alpha)\phi_{21} = 0, \text{ якщо } \alpha : j \to k.$$

і аналогічні співвідношення справедливі для компонентів $\phi^{-1}(ij)$ з перестановкою M та M'. Припустимо, що M не має прямих доданків $\bar{B}_i$ і $\bar{B}_j$. Звідси слідує, що $\bigcap_{\alpha^-=i} \operatorname{Ker} M(\alpha) \subseteq \sum_{\beta^+=i} \operatorname{Im} M(\beta)$ і $\bigcap_{\alpha^-=j} \operatorname{Ker} M(\alpha) \subseteq \sum_{\beta^+=j} \operatorname{Im} M(\beta)$. Якщо M' також не містить прямих доданків $\bar{B}_i$ і $\bar{B}_j$, то воно задовольняє ті ж самі умови. Отже,

$$\operatorname{Im} \psi_{21} \subseteq \bigcap_{\alpha^-=j} \operatorname{Ker} M(\alpha) \subseteq \sum_{\beta^+=j} \operatorname{Im} M(\beta),$$

звідки $\phi_{12}\psi_{21} = 0$ і $\phi_{11}\psi_{11} = 1$. Цілком аналогічно, $\phi_{22}\psi_{22} = 1$ і те ж саме виконується, якщо переставити ϕ і ψ. Тому ми отримаємо ізоморфізм $\tilde{\phi} : M \xrightarrow{\sim} M'$, поклавши $\tilde{\phi}(i) = \phi_{11}$, $\tilde{\phi}(j) = \phi_{22}$ і $\tilde{\phi}(k) = \phi(k)$, якщо $k \notin \{i, j\}$, що й доводить дане твердження.

Наслідок 3.1. *Якщо алгебра A отримується з B за допомогою склеювання або роздуття і B є нескінченно-зображувальною або дикою, то такою є й алгебра A.*

Доведення теореми 3.3. Ми вже довели частину теореми. Таким чином, ми лише повинні показати, що усі інші нодальні алгебри типу A є дикими. Крім того, можна припустити, що неістотних склеювань не було при побудові нодальної алгебри A. Якщо A не є ні лагідною, ані квазі-лагідною, то має бути принаймні одна виключна склейка. Отже, A отримується з алгебри B вигляду (3.4) або (3.5) за допомогою деяких додаткових склеювань (не неістотних) або роздуттів. Неважко бачити, що будь-яке роздуття в B дає дику алгебру. Насправді важливим є випадок, коли $n = 1$, $m = l = 0$ і ми роздуваємо кінець стрілки β. Тоді, після зведення α_1 і γ, як і в доведенні теореми 3.2, отримаємо для ненульових частин двох стрілок, отриманих з β, задачу про пару частково впорядкованих множин $(1,1)$ і $\mathfrak{S}_1$ (див. сторінку 73), яка є дикою згідно [36, теорема 2.3]. Інші випадки ще простіші.

Отже, роздуття ми розглянули. Припустимо, що ми склеїли кінці β (або деякої β_k) і γ (або деякої γ_k). Тоді, навіть при $n = 1$, $m = l = 0$, отримаємо алгебру

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\gamma"'] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \alpha^2 = \beta\alpha = 0$$

(або її дуальну). Звівши α, отримаємо 2 матриці вигляду

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} \text{ і } \gamma = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & G_3 \end{pmatrix}.$$

Якщо дано іншу пару (β', γ') такого ж вигляду, то вони визначають ізоморфні зображення тоді і тільки тоді, коли існують оборотні матриці X та Y такі, що $X\beta = \beta' Y$ і $X\gamma = \gamma' Y$, і Y має вигляд

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_3 & Y_4 \\ 0 & Y_2 & Y_5 \\ 0 & 0 & Y_1 \end{pmatrix},$$

де підрозбиття Y відповідає такому, як і в β, γ. Форма Тітса цієї матричної задачі (див. [29]) $Q = x^2 + 2y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 - 3xy_1 - 2xy_2$. Оскільки $Q(2,1,1) = -1$, ця матрична задача є дикою. Отже, алгебра A також дика. Аналогічно, можна бачити, що якщо склеїти кінці деяких β_i або γ_i, то отримаємо дику алгебру (як тільки таке склеювання не є неістотним). Склеювання кінця деякої α_i з кінцем β або γ (знову ж таки, якщо воно не є неістотним) дає підалгебру, яка є алгеброю дикого сагайдака. Точно так же і у випадку, коли ми склеюємо кінці деяких α_i так, що це склеювання не є неісттотним і $n > 3$. Це завершує доведення теореми.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі визначено зображувальні типи нодальних алгебр типу A, тобто таких, які отримуються склеюваннями й роздуттями з сагайдаків типу A або $\widetilde{\mathrm{A}}$. Тут також розглянуто спеціальний клас склеювань — *неістотні склеювання* — й встановлено, що вони зберігають зображувальний тип алгебри. Останній результат буде часто використовуватися нами у наступних розділах.

РОЗДІЛ 4
НОДАЛЬНІ АЛГЕБРИ ТИПУ D

У цьому розділі ми розглядаємо нодальні алгебри типу D. Так ми звемо ті нодальні алгебри, які одержуються з сагайдаків типу D або $\widetilde{\mathrm{D}}$, але не можуть бути одержані з сагайдаків типу A.

Основні результати розділу опубліковані в роботі [8].

4.1 Означення, основні теореми

Як і в попередньому розділі, ми розглядаємо скінченновимірні алгебри над алгебраїчно замкненим полем.

Будемо казати, що нодальна алгебра має тип D, якщо вона отримується допустимою послідовністю склеювань та роздуттів зі спадкової алгебри з сагайдаком типу D або $\widetilde{\mathrm{D}}$:

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{D}_{n+3}: & \begin{array}{l} 1 \overset{\alpha}{\diagdown} \\ \qquad 3 \overset{\gamma_1}{\text{——}} 4 \overset{\gamma_2}{\text{——}} \cdots \overset{\gamma_n}{\text{——}} (n+3) \\ 2 \underset{\beta}{\diagup} \end{array} \\[2ex]
\widetilde{\mathrm{D}}_{n+3}: & \begin{array}{l} 1 \overset{\alpha}{\diagdown} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \overset{\alpha'}{\diagup} 1' \\ \qquad 3 \overset{\gamma_1}{\text{——}} 4 \overset{\gamma_2}{\text{——}} \cdots \overset{\gamma_{n-1}}{\text{——}} (n+2) \\ 2 \underset{\beta}{\diagup} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underset{\beta'}{\diagdown} 2' \end{array}
\end{array}
\tag{4.1}
$$

з довільною орієнтацією ребер. Далі ми використовуватимемо позначення вершин і стрілок з (4.1).

Позначимо через Q' сагайдак, який одержується з Q вилученням вершини 2 і ребра β. Якщо сагайдак Q є типу D, то сагайдак Q' має тип A; якщо ж Q є типу $\widetilde{\mathrm{D}}$, то Q' матиме тип D.

Зауваження 4.1. *Припустимо, що жодна з вершин* $1, 2$ *не бере участь у склеюваннях. Якщо обидві стрілки* α, β *починаються (або* *обидві закінчуються) у вершині* 3, *то алгебру* A *можна одержати із сагайдака* Q', *зробивши ті самі склеювання й роздуття та додавши ще роздуття вершини* 1. *Нехай тепер одна з цих стрілок починається у вершині* 3, *а друга там закінчується. Якщо* α *(або* β*) не входить до співвідношень алгебри* A, *то до вершини* 1 *(відповідно,* 2*) можна застосувати віддзеркалення з роботи [1], одержавши зображення алгебри, яка відрізняється від* A *лише орієнтацією стрілки* α *(відповідно,* β*). Але неважко переконатися, що за будь-яких склеювань, у яких вершини* 1 *та* 2 *не беруть участі, та роздуттів вершин, відмінних від* 3, *принаймні одна зі стрілок* α *чи* β *не увійде до співвідношень. Отже, цей випадок зводиться до попереднього. Звичайно, те саме стосується вершин* $1'$ *і* $2'$ *у випадку сагайдака типу* $\widetilde{\mathrm{D}}$.

З огляду на це зауваження введемо таке означення.

Означення 4.1. *Назвемо нодальну алгебру* A *нодальною алгеброю типу* D, *якщо у відповідних нодальних даних сагайдак* Q *має тип* D *або* $\widetilde{\mathrm{D}}$, *причому або одна з вершин* $1, 2$ *бере участь у склеюванні, або застосовується роздуття вершини* 3. *У випадку сагайдака типу* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *ми, крім того, вважаємо, що або одна з вершин* $1', 2'$ *бере участь у склеюванні, або застосовується роздуття вершини* $(n+2)$.

Наступні теореми описують зображувальні типи нодальних алгебр типу D. При цьому напрям стрілок, не вказаний явно на діаграмах, є довільним і не впливає на зображувальний тип.

Теорема 4.1. *Нехай нодальна алгебра* A *є ізоморфною або антиізоморфною до алгебри, яка одержана з сагайдака типу* D *деякими неістотними склеюваннями та однією з наступних операцій:*

(1) склеюванням вершин 1 *і* 3 *у сагайдаку*

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & & \\
& 3 \arrow[r, "\gamma_1"] & 4 \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \\
2 \arrow[ur, "\beta"'] & & & & &
\end{tikzcd}
\tag{4.2}
$$

при $n \leq 2$;

(2) склеюванням вершин 1 *і* 3 *у сагайдаку*

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & & \\
& 3 \arrow[dl, "\beta"] & 4 \arrow[l, "\gamma_1"'] \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \\
2 & & & & &
\end{tikzcd}
\tag{4.3}
$$

при $n \leq 4$;

(3) склеюванням вершин 1 *і* $(n+2)$ *у сагайдаку*

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & & \\
& 3 \arrow[r, dash, "\gamma_1"] & \cdots \arrow[r, "\gamma_{n-1}"] & (n+2) \arrow[r, "\gamma_n"] & (n+3) \\
2 \arrow[ur, dash, "\beta"'] & & & & &
\end{tikzcd}
\tag{4.4}
$$

при $2 \leq n \leq 4$.

Тоді A *має скінченний зображувальний тип.*

Теорема 4.2. *Нехай нодальна алгебра* A *є ізоморфною або антиізоморфною до алгебри, яка одержана з сагайдака типу* D *або* $\widetilde{\mathrm{D}}$ *неістотними склеюваннями та однією з наступних операцій:*

(1) склеюванням вершин 1 *і* 3 *у сагайдаку* (4.3) *при* $n = 5$;

(2) склеюванням вершин 1 *і* 3 *у сагайдаку*

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
& 3 \arrow[dl, "\beta"] \arrow[r, "\gamma_1"] & 4 \\
2 & &
\end{tikzcd}
$$

(3) склеюванням вершин 1 *і* 4 *у сагайдаку*

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & \\
& 3 \arrow[r, "\gamma_1"] & 4 \arrow[r, "\gamma_2"] & 5 \arrow[r, dash, "\gamma_3"] & 6 \\
2 \arrow[ur, dash, "\beta"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

(4) склеюванням вершин 1 *і* $(n+2)$ *у сагайдаку* (4.4) *при* $n=5$;

(5) роздуттям вершини 3 *у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \\ & 3 \arrow[dl, "\beta"] & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \\ 2 & & \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

(6) роздуттям вершини 3 *у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & 4 \arrow[dl, "\gamma"'] \\ & 3 \arrow[dl, "\beta"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\ 2 & & 5 \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Тоді A *є ручною, нескінченного зображувального типу.*

Теорема 4.3. *Якщо нодальна алгебра* A *типу* D*, не є ані ізоморфною, ані антиізоморфною до алгебри, яка підпадає під випадки, описані в теоремах 4.1 і 4.2, то вона є дикою.*

4.2 Доведення теорем

Будемо доводити теореми 4.1–4.3 одночасно. При цьому розглянемо окремі випадки склеювання й роздуття. З точністю до ізоморфізму або антиізоморфізму можна вважати (і ми це робитимемо), що стрілка α направлена від вершини 1 до вершини 3, причому або вершина 1 бере участь у склеюванні, або відбувається роздуття вершини 3.

Випадок 4.2.1. *Склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку* (4.2)*.*

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

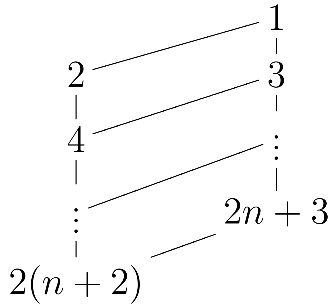
$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\beta"'] & 3 \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma_1"] & 4 \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\alpha^2=0$, $\alpha\beta=0$.

Після зведення $\alpha \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ рядки β розділяться на три частини, причому, внаслідок умови $\alpha\beta = 0$, останній рядок буде нульовим. Зведемо β:

$$\beta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & \mathrm{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{I} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тоді γ_1 розіб'ється на шість стовпчиків, причому стовпчики 1 і 2, а також стовпчики 5 і 6 *пов'язані*, тобто в них відбуваються однакові перетворення. Після зведення стрілок $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$, рядки матриці γ_1 поділяться на n частин, причому вони будуть лінійно впорядковані. Після зведення перших двох стовпчиків цієї матриці стовпчики 5 і 6 поділяться кожен на $n+1$ частину. Усього зі стовпчиків 3 – 6 отримаємо $2n+4$ ненульові стовпчики. Додавання цих стовпчиків задається частково впорядкованою множиною S вигляду:



З [14] випливає, що наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка є лінійно впорядкованою і має $n-1$ елемент. З робіт

[14, 17] випливає, що ця задача є скінченною при $n \le 2$ і дикою при $n > 2$. Отже, такою є й алгебра A. Це дає перше твердження теореми 4.1.

Будь-яке додаткове істотне склеювання або роздуття дає додатковий поділ матриці β або γ_1, що робить задачу дикою. Розглянемо, наприклад, випадок, коли склеюються ще вершини 4 і 5 за умови, що стрілка γ_2 направлена до вершини 5 (інакше це склеювання є неістотним). Результуючий сагайдак зі співвідношеннями містить підсагайдак

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\beta"'] & 3 \arrow[loop above, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma_1"] & 4 \arrow[loop above, "\gamma_2"] \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\alpha^2 = 0,\ \alpha\beta = 0,\ \gamma_2^2 = 0.$

Після зведення α і γ_2 до вигляду $\begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ матриці β і γ_1 розіб'ються в такий спосіб:

$$\beta = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg\uparrow \qquad \gamma_1 = \overrightarrow{\begin{pmatrix} G_{11}^* & G_{12} & G_{13}^* \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31}^* & G_{32} & G_{33}^* \end{pmatrix}}\Bigg\uparrow .$$

Стрілки показують напрямок перетворень, причому перетворення рядків у матриці β і стовпчиків у матриці γ_1 є *контрагредієнтними*,[1] а у матриць, позначених зірочками, перетворення рядків і стовпчиків є спільними. Розглянемо ті зображення, в яких $B_1 = 0$, $B_2 = I$, у матриці γ_1 відсутня друга горизонтальна смуга

[1] Це означає, що коли матриця β домножується зліва на невироджену матрицю C, то матриця γ_1 домножується справа на C^{-1}.

(тобто $\gamma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$), $G_{33} = I$, а матриці G_{31}, G_{32} та G_{13} є нульовими. Легко переконатися, що таке зображення ізоморфне зображенню аналогічного вигляду з матрицями G'_{11} і G'_{12} на відповідних місцях тоді й тільки тоді, коли існують невироджені матриці C_1 і C_2 такі, що $G'_{11} = C_1 G_{11} C_1^{-1}$, а $G'_{12} = C_1 G_{12} C_2$. Інакше кажучи, матриці G_{11} і G_{12} задають зображення дикого сагайдака

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left] \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Отже, алгебра A є дикою. При інших додаткових склеюваннях або роздуттях доведення дикості є аналогічним (навіть, як правило, легшим). Звідси випливає твердження теореми 4.3 у випадку, коли наявне склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку (4.2).

Випадок 4.2.2. *Склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку* (4.3).

В результаті отримаємо сагайдак

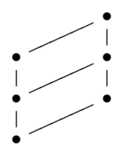
$$\begin{tikzcd} 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[loop above, "\alpha"] & 4 \arrow[l, "\gamma_1"'] \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\alpha^2 = 0$, $\alpha\gamma_1 = 0$.

Після зведення $\alpha \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ стовпчики β і, відповідно, рядки γ_1 розділяться на 3 частини, причому, внаслідок умови $\alpha\gamma_1 = 0$, остання частина в γ_1 буде нульовою. Перетворенням, які не змінюють вигляд матриці α, матрицю β можна звести до вигляду

$$\beta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cc|cccc}
0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Відповідно, матриця γ_1 поділиться на 10 горизонтальних частин, з яких лише 6 перших будуть ненульовими. Після зведення матриць $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$, матриця γ_1 поділиться ще на n вертикальних частин, тобто в γ_1 буде 6 ненульових рядків і n стовпчиків. Легко бачити, що тепер додавання рядків задається частково впорядкованою множиною S вигляду:



а додавання стовпчиків — лінійно впорядкованою множиною, яка складається з n елементів. Отже, згідно з [14], наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка є лінійно впорядкованою і має $n-1$ елемент. Згідно з [14, 17], при $n \leq 4$ ця задача має скінченний тип, при $n = 5$ є ручною (нескінченного типу), а при $n > 5$ — дикою. Отже, такою є й алгебра A. Це дає друге твердження теореми 4.1 і перше твердження теореми 4.2. Знов-таки, будь-яке додаткове істотне склеювання або роздуття дає дику матричну задачу. Це доводить теорему 4.3 у випадку, коли відбувається склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку (4.3).

Випадок 4.2.3. *Склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & & \\ & 3 \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[dl, "\beta"] & 4 \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \\ 2 & & & & \end{tikzcd} \tag{4.7}$$

В результаті одержимо сагайдак

$$\begin{tikzcd} 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\gamma_1"'] \arrow[loop above, "\alpha"] & 4 \arrow[r, dash, "\gamma_2"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \end{tikzcd}$$

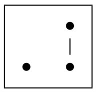
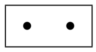
із співвідношенням $\alpha^2 = 0$. Зведемо матрицю α так само, як у попередніх випадках. Стовпчики матриць β і γ_1 розділяться на три частини, які можна додавати зліва направо, причому перетворення першої й третьої частин мають бути однаковими. Після зведення матриць $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ рядки матриці γ_1 розділяться на n частин, перетворення яких задаються лінійно впорядкованою множиною. Якщо $n = 1$, то одержимо задачу про зображення в'язки ланцюгів $\mathfrak{E} = \{\, e \,\}$, $\mathfrak{F} = \{\, f_1 < f_2 < f_3 \,\}$ з відношенням $\sim$ таким, що $e \sim e$, $f_1 \sim f_3$.[2] Ця задача є ручною (нескінченного типу), тому такою ж є й алгебра A. Якщо ж $n > 1$, розглянемо такі зображення, в яких $\gamma_3 = \cdots = \gamma_n = 0$, друга вертикальна частина матриць β і γ_1 відсутня (тобто $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$), а перша й третя вертикальні частини зведені до вигляду

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & G_1 & G_2 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \hline\hline 0 & 0 & G_3 & G_4 \\ \hline 0 & 0 & G_5 & G_6 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{array}\right)$$

---

[2] Ми користуємося означенням в'язок ланцюгів з роботи [25]. В оригінальній роботі [2] для таких самих задач використовувалися термін *в'язка напівланцюгів* й інше кодування.

Тут подвійна горизонтальна лінія показує розділ між матрицями β і γ_1, а одинична — між частинами матриці γ_1, які утворилися після зведення матриці γ_2. Неважко переконатися, що тоді матриці G_i утворюють зображення пари частково впорядкованих множин

$S =$  і $T =$ 

З роботи [36] випливає, що ця задача, а тому й алгебра A, є дикою. Це дає друге твердження теореми 4.2 і теорему 4.3 у випадку, коли має місце склеювання вершин 1 і 3 у сагайдаку (4.7).

Випадок 4.2.4. *Склеювання вершин* 1 *і* $(m+3)$ $(1 \le m < n)$ *у сагайдаку*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "\alpha"] & & & & & & & \\ & 3 \arrow[r, dash, "\gamma_1"] & \cdots \arrow[r, "\gamma_m"] & (m+3) \arrow[r, "\gamma_{m+1}"] & (m+4) \arrow[r, dash] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \\ 2 \arrow[ur, dash, "\beta"'] & & & & & & \end{tikzcd} \tag{4.8}$$

Зауважимо, що якщо стрілка γ_m направлена від вершини $(m+3)$, то навіть при $m = n$ ми одержимо в алгебрі A дикий підсагайдак без співвідношень

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, dash, "\beta"] & 3 & \cdots \arrow[l, "\gamma_1"] & (m+3) \arrow[l, "\gamma_m"] \arrow[lll, bend right, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Якщо ж стрілок, направлених від вершини $(m+3)$, немає, то склеювання 1 і $(m+3)$ є неістотним. Отже, можна вважати, що $n > m$, стрілка γ_m направлена до вершини $(m+3)$, а стрілка γ_{m+1} — від цієї вершини. Напрямок стрілки β не впливає на зображувальний тип, оскільки ця стрілка напевно не входить у співвідношення, а тому можна зробити віддзеркалення за [1] в точці 2 і змінити її напрямок. У наступних обчисленнях ми вважаємо, що $\beta : 2 \to 3$.

В результаті отримаємо сагайдак

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, dash, "\gamma_1"'] & \cdots \arrow[r, "\gamma_m"'] & (m+3) \arrow[ll, bend right, "\alpha"'] \arrow[r, "\gamma_{m+1}"] & (m+4) \arrow[r, dash, "\gamma_{m+2}"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3) \end{tikzcd}$$

зі співвідношенням $\alpha\gamma_m = 0$. Після зведення матриць β та γ_i, які утворюють сагайдак типу A_{n+2}, матриця α розіб'ється на $2(n+1)$ горизонтальну смугу й кілька вертикальних смуг. Зі співвідношення $\alpha\gamma_2 = 0$ випливає, що ненульовими в матриці α є лише ті вертикальні смуги, які відповідають зображенням підсагайдака

$$\begin{tikzcd} (m+3) \arrow[r, "\gamma_3"] & (m+4) \arrow[r, dash, "\gamma_4"] & \cdots \arrow[r, dash, "\gamma_n"] & (n+3), \end{tikzcd}$$

ненульовим у вершині $(m+3)$. Таких смуг буде $n-m+1$, причому їх додавання керується лінійно впорядкованою множиною. Додавання ж горизонтальних смуг керується частково впорядкованою множиною S:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\ 2 \arrow[d, dash] & 3 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\ 4 \arrow[d, dash] & \vdots \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\ \vdots \arrow[d, dash] & 2n+1 \arrow[dl, dash] \\ 2n+2 & \end{tikzcd}$$

Згідно з [14], одержана задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та лінійно впорядкованої множини з $n-m$ елементів. З робіт [14, 17] випливає, що ця задача, а тому й алгебра A, має скінченний тип при $m \leq 3$, $n = m+1$, є ручною при $m = 1$, $n = 3$ або $m = 4$, $n = 5$ і дикою в усіх інших випадках. Це дає третє твердження теореми 4.1, третє і четверте твердження теореми 4.2. Знов-таки, додаткові склеювання чи роздуття дають дикі алгебри, що доводить теорему 4.3 у випадку, коли наявне склеювання вершин 1 і $(m+3)$ $(m > 0)$ у сагайдаку (4.8).

Випадок 4.2.5. *Роздуття вершини* 3 *у сагайдаку* (4.6).

В результаті одержимо сагайдак

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\alpha''" near start] & 4 \arrow[dl, "\gamma'"' near start] \arrow[d, "\gamma''"] \\
3' \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[dr, "\delta'" near end] & 3'' \arrow[dl, "\beta''"' near end] \arrow[d, "\delta''"] \\
2 & 5
\end{tikzcd}$$

зі співідношеннями $\beta'\alpha' = \beta''\alpha''$, $\delta'\gamma' = \delta''\gamma''$, $\beta'\gamma' = \beta''\gamma''$, $\delta'\alpha' = \delta''\alpha''$. У роботі [34] доведено, що ця алгебра є ручною. Це дає шосте твердження теореми 4.2, а також п'яте твердження цієї ж теореми, оскільки сагайдак (4.5) є підсагайдаком у сагайдаку (4.6).

З іншого боку, роздуття вершини 3 у сагайдаку D_5 дає сагайдак

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, "\alpha'"'] \arrow[dr, "\alpha''" near start] & 4 \arrow[dl, "\gamma'"' near start] \arrow[d, "\gamma''"] \arrow[r, dash, "\theta"] & 5 \\
3' \arrow[d, "\beta'"'] & 3'' \arrow[dl, "\beta''"] & \\
2 & &
\end{tikzcd}$$

в якому стрілка θ (з довільною орієнтацією) не бере участі у співвідношеннях. Якщо вилучити вершину 2, то залишиться дикий сагайдак (без співвідношень). Отже, таке роздуття у сагайдаку D_m і, тим більше, $\widetilde{\mathrm{D}}_m$ при $m > 4$ дає дику алгебру.

Отже, ми повністю довели теореми 4.1 і 4.2. Для доведення теореми 4.3 залишилося довести, що наступні операції дають дику алгебру:

(1) склеювання крайніх вершин за умови, що воно є істотним, тобто з однієї з цих вершин стрілка виходить, а в другу входить;

(2) роздуття вершини 3 у сагайдаку типу D_{n+3} або $\widetilde{\mathrm{D}}_{n+3}$, якщо або $n > 1$, або принаймні три стрілки входять до цієї вершини або з неї виходять;

(3) істотні склеювання, в яких бере участь принаймні одна з вершин $1, 2$ і принаймні одна з вершин $1', 2'$ у сагайдаку типу $\tilde{\mathrm{D}}$.

Операції (1) і (2), як одразу видно, завжди дають дикий підсагайдак без співвідношень. Операція (3) поділяється на випадки, аналогічні випадкам 4.2.1–4.2.4, розглянутим вище. Неважко переконатися, що в усіх цих випадках відбувається додатковий поділ матриць, який перетворює відповідні задачі на дикі. Це завершує доведення теореми 4.3.

Висновки до розділу 4

У цьому розділі визначено зображувальні типи нодальних алгебр типу D, тобто таких, які отримуються склеюваннями й роздуттями з сагайдаків типу D або $\widetilde{\mathrm{D}}$, але не є нодальними алгебрами типу A.

РОЗДІЛ 5

НОДАЛЬНІ АЛГЕБРИ ТИПУ E

У цьому розділі ми розглядаємо нодальні алгебри типу E. Так ми звемо ті нодальні алгебри, які одержуються з сагайдаків типу E або $\widetilde{\mathrm{E}}$.

Основні результати розділу опубліковані в роботі [11].

5.1 Означення, основні теореми

Знову ж таки ми фіксуємо алгебраїчно замкнене поле $\mathbf{k}$ і розглядаємо скінченновимірні $\mathbf{k}$-алгебри.

Означення 5.1. *Нодальна алгебра A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, де $H \simeq \mathbf{k}Q$ і Q — сагайдак Динкіна типу* E *або сагайдак Евкліда типу* $\tilde{\mathrm{E}}$, *зветься нодальною алгеброю типу E.*

Нагадаємо, що до сагайдаків типу E або $\tilde{\mathrm{E}}$ належать наступні графи з довільною орієнтацією ребер:

$$\mathrm{E}_6: \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 4 & & & & \\ & & & & \big|{\scriptstyle\gamma} & & & & \\ 1 & \overset{\alpha}{\text{———}} & 2 & \overset{\beta}{\text{———}} & 3 & \overset{\delta}{\text{———}} & 5 & \overset{\epsilon}{\text{———}} & 6 \end{array}$$

$$\mathrm{E}_7: \quad \begin{array}{ccccccccccc} & & & & 4 & & & & & & \\ & & & & \big|{\scriptstyle\gamma} & & & & & & \\ 1 & \overset{\alpha}{\text{———}} & 2 & \overset{\beta}{\text{———}} & 3 & \overset{\delta}{\text{———}} & 5 & \overset{\epsilon}{\text{———}} & 6 & \overset{\pi}{\text{———}} & 7 \end{array}$$

$$\mathrm{E}_8: \quad \begin{array}{ccccccccccccc} & & & & 4 & & & & & & & & \\ & & & & \big|{\scriptstyle\gamma} & & & & & & & & \\ 1 & \overset{\alpha}{\text{———}} & 2 & \overset{\beta}{\text{———}} & 3 & \overset{\delta}{\text{———}} & 5 & \overset{\epsilon}{\text{———}} & 6 & \overset{\pi}{\text{———}} & 7 & \overset{\eta}{\text{———}} & 8 \end{array}$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_6: \quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 6' & & & & \\ & & & & \big|{\scriptstyle\theta} & & & & \\ & & & & 4 & & & & \\ & & & & \big|{\scriptstyle\gamma} & & & & \\ 1 & \overset{\alpha}{\text{———}} & 2 & \overset{\beta}{\text{———}} & 3 & \overset{\delta}{\text{———}} & 5 & \overset{\epsilon}{\text{———}} & 6 \end{array}$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_7: \quad \begin{tikzcd} & & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & & \\ 7' \arrow[r, dash, "\sigma"] & 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, dash, "\beta"] & 3 \arrow[r, dash, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_8: \quad \begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, dash, "\beta"] & 3 \arrow[r, dash, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, dash, "\eta"] & 8 \arrow[r, dash, "\mu"] & 8' \end{tikzcd}$$

В подальшому ми весь час користуватимемося позначеннями вершин і стрілок, які присутні на цих діаграмах.

Наступні теореми описують зображувальні типи нодальних алгебр типу E. При цьому напрям стрілок, не вказаний явно на малюнках, є довільним і не впливає на зображувальний тип.

Теорема 5.1. *Нехай нодальна алгебра A є ізоморфною або антиізоморфною до алгебри, яка одержана з сагайдака типу* E *деякими неістотними склеюваннями та однією з наступних операцій:*

1) склеюванням вершин 1 *і* 3 *у сагайдаку E_6 вигляду*

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

2) склеюванням вершин 1 *і* 5 *у сагайдаку E_6 вигляду*

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, dash, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

3) склеюванням вершин 2 *і* 7 *у сагайдаку* E_7 *вигляду*

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, dash, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

4) склеюванням вершин 3 *і* 7 *у сагайдаку* E_7 *при умові, що якщо у вершину 7 стрілка* π *входить, то з вершини 3 обов'язково якісь дві стілки виходять;*

5) склеюванням вершин 3 *і* 8 *у сагайдаку* E_8 *вигляду*

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, "\eta"] & 8 \end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, "\eta"] & 8 \end{tikzcd}$$

Тоді A *має скінченний зображувальний тип.*

Теорема 5.2. *Нехай нодальна алгебра* A *є ізоморфною або антиізоморфною до алгебри, яка одержана з сагайдака типу* E *деякими неістотними склеюваннями та однією з наступних операцій:*

1) склеюванням вершин 1 *і* 3 *у сагайдаку* E_7 *вигляду*

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

2) склеюванням вершин 1 *і* 5 *у сагайдаку* E_7 *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, dash, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7
\end{tikzcd}$$

3) склеюванням вершин 2 *і* 4 *у сагайдаку* E_6

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, dash, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6
\end{tikzcd}$$

4) склеюванням вершин 2 *і* 5 *у сагайдаку* E_6

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6
\end{tikzcd}$$

5) склеюванням вершин 2 *і* 8 *у сагайдаку* E_8 *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, dash, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, "\eta"] & 8
\end{tikzcd}$$

6) склеюванням вершин 3 *і* 7 *у сагайдаку* $\tilde{E}_7$ *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & & 4 & & & \\
7' \arrow[r, dash, "\sigma"] & 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7
\end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd}
 & & & 4 & & & \\
7' \arrow[r, dash, "\sigma"] & 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7
\end{tikzcd}$$

7) склеюванням вершин 3 *і* 8 *у сагайдаку* E_8 *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & & \\
1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, "\eta"] & 8
\end{tikzcd}$$

8) склеюванням вершин 3 *і* $8'$ *у сагайдаку* $\tilde{E}_8$ *вигляду*

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, dash, "\eta"] & 8 \arrow[r, "\mu"] & 8' \end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, dash, "\eta"] & 8 \arrow[r, "\mu"] & 8' \end{tikzcd}$$

Тоді A *є ручною, нескінченного зображувального типу.*

Теорема 5.3. *Якщо нодальна алгебра* A *типу* E*, не є ані ізоморфною, ані антиізоморфною до алгебри, яка підпадає під випадки, описані в теоремах 5.1 і 5.2, то вона є дикою.*

5.2 Доведення теорем

Будемо доводити теореми 5.1–5.3 одночасно. Легко бачити, що будь-яке роздуття вершин в довільному сагайдаку типу E або Ẽ дасть дику задачу. Тому в доведенні ми будемо мати справу лише із операцією склеювання вершин сагайдака.

Зауважимо, що тут ми розглянемо лише деякі випадки склеювання. Інші випадки доводяться аналогічним чином, в деякому сенсі навіть простіше.

Випадок 5.2.1. *Склеювання вершин* 1 *і* 3.

В залежності від напряму стрілок, які починаються (закінчуються) у вершинах 1 і 3, тут можливі наступні підвипадки:

1)

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd}
& 4 & & \\
2 \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6
\end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\alpha\beta = 0, \alpha\delta = 0$.

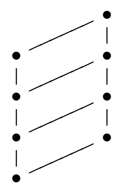
Зведемо $\alpha \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тоді рядки і стовпчики матриці β поділяться на 2 частини, причому через умову $\alpha\beta = 0$ останній рядок буде нульовим. Зауважимо також, що при зведенні β нульовий рядок ділиться так же само, як і перший стовпчик. Зведемо β:

$$\beta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Відповідно, матриця γ поділиться на 5 вертикальних частин, з яких 1-ша і 5-та — пов'язані. Зведемо γ:

$$\gamma \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cc|cc|cc|cccc}
0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Отже, матриця δ поділиться на 14 горизонтальних частин, причому через умову $\alpha\delta = 0$ лише перші 8 з них будуть ненульовими. Легко бачити, що додавання ненульових рядків в δ задається частково впорядкованою множиною S вигляду



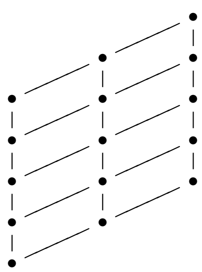
Також δ матиме 2 стовпчики. Згідно з [14], наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка складається з одного елемента. З робіт [14, 17] випливає, що ця задача має скінченний тип.

Оскільки в цій задачі останньою ми зводили матрицю δ, то неважко зробити висновок, що таке склеювання в сагайдаку E_7 дасть задачу ручного типу, а уже в сагайдаку E_8 — дику.

Важче зробити такий висновок про сагайдак $\tilde{E}_6$. Тут додатково поділяться рядки γ, тобто матриця γ поділиться на 5 вертикальних частин і 2 горизонтальні, і, знову ж таки, вертикальні смуги під номерами 1 і 5 пов'язані. Звівши

$$
\gamma \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc|ccc|ccc|ccccccccc}
0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&I\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right),
$$

ми бачимо, що матриця δ поділиться на 27 горизонтальних частин, причому через умову $\alpha\delta = 0$ лише перші 15 з них будуть ненульовими. Додавання ненульових рядків в δ задається частково впорядкованою множиною S вигляду



Тут, як і вище, δ також матиме 2 стовпчики. З робіт [14, 17] випливає, що це дика задача.

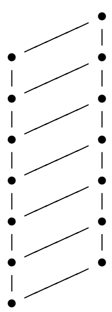
2) (змінили напрям стрілки δ).

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 4 & & \\ 2 \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$ зі співвідношенням $\alpha\beta = 0$.

Матриці α, β і γ зводяться так же само, як у випадку 1). Матриця δ поділиться на 14 вертикальних частин, додавання яких задається частково впорядкованою множиною S вигляду



Також δ матиме 2 рядки. Отже, згідно [14], наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка складається з одного елемента. З робіт [14, 17] випливає, що ця задача є дикою.

3) (змінили напрям стрілок γ і δ).

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[d, "\gamma"] \\ 2 \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\alpha\beta = 0, \alpha\gamma = 0$.

Ця задача чимось подібна до тієї, яку ми розглядали у випадку 1) (тут також присутні два співвідношення, в які входить α і одне з яких співпадає). Виявляється, що таке склеювання дає аналогічний результат: в E_6 це буде задача скінченного типу, в E_7 — ручного, а в E_8, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ і $\tilde{E}_8$ — вона буде дикою.

4) (змінили напрям стрілки α).

$$\begin{tikzcd} & & 4 \\ 1 & 2 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 4 \\ 2 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\gamma\alpha = 0, \delta\alpha = 0$.

α, β — “пучок” (Кронекер). Для нього відомо такі нерозкладні зображення:

(1) $\alpha = I$, $\beta = J_\lambda$;

(2) $\alpha = J_0$, $\beta = I$;

(3) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

$$(4)\ \ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо лише ті зображення, в яких $\alpha = J_0$, $\beta = I$ (довільних розмірів). Якщо матриця $\alpha = J_0$ має розмір $n \times n$, то матриця γ поділиться на n вертикальних частин. Позначимо $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$, тоді із рівності $\gamma\alpha = 0$ випливає, що $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$, $\gamma_n \neq 0$. Теж саме можна сказати і про δ (зауваживши при цьому, що через ϵ матриця δ ділиться ще за рядками). Виходить, що γ і δ діляться на вертикальні полоси і їх може бути скільки завгодно. При цьому, як відомо, стовпчики, які відповідають клітинам меншого розміру, можна додавати до стовпчиків, які відповідають клітинам більшого розміру. Крім того, після зведення матриці ϵ матриця δ поділиться на дві горизонтальні полоси, одну з яких можна додавати до другої. Отже, ми одержимо задачу про пару частково впорядкованих множин, одна з яких — це $(1, 2)$, а друга — лінійка довільної довжини. Як випливає з [36], це дика задача.

Випадок 5.2.2. *Склеювання вершин* 2 *і* 5.

Зауважимо, що напрям стрілки γ ролі не грає, а напрями стрілок α і β можна вибрати довільними. В залежності від напряму стрілок δ і ϵ, тут можливі наступні підвипадки:

1) (δ входить у вершину 5, а ϵ із неї виходить).

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 6 & 4 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[u, "\epsilon"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[l, bend left, "\delta"] \end{tikzcd}$$ зі співвідношеннями $\epsilon\alpha = 0, \beta\delta = 0$.

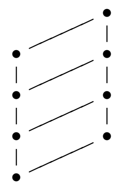
Зведемо $\alpha \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тоді стовпчики матриці ϵ поділяться на 2 частини, причому через умову $\epsilon\alpha = 0$ перший стовпчик буде нульовим. Після зведення $\epsilon \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, рядки матриці δ поділяться на 3 частини. Зведемо δ:

$$\delta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Відповідно, матриця γ поділиться на 4 вертикальні частини. Зведемо γ:

$$\gamma \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, матриця β поділиться на 8 горизонтальних частин. Легко бачити, що додавання рядків в δ задається частково впорядкованою множиною S вигляду



Також β матиме 9 стовпчиків, причому, враховуючи умову $\beta\delta = 0$, лише 3 із них будуть ненульовими. Додавання цих стовчиків задається лінійно впорядкованою множиною. Згідно з [14], наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка є лінійно впорядкованою і має 2 елементи. З робіт [14, 17] випливає, що ця задача ручна (нескінченного типу).

Неважко зробити висновок, що вже у сагайдаку E_7 таке склеювання дасть дику задачу (при появі нової стрілки, яка не входить у співвідношення, додатково поділяться рядки і стовпчики в δ і, відповідно, більше рядків і ненульових стовпчиків стане в β, яку ми зводили останньою).

Розглянемо ще випадок склеювання вершин 2 і 5 в сагайдаку $\tilde{E}_6$:

$$\begin{tikzcd}
 & & 6' & & \\
 & & 4 \arrow[u, "\theta"] & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6
\end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd}
 & 6 & & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 5 \arrow[u, "\epsilon"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\delta"'] \arrow[r, "\gamma"] & 4 \arrow[r, "\theta"] & 6'
\end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\beta\delta = 0, \epsilon\alpha = 0$.

Ця задача також дика (див. склеювання вершин 2 і 4 у сагайдаку $\tilde{E}_6$ — якщо перепозначити деякі стрілки, то наша задача ідентична вищевказаній).

2) (δ і ϵ входять у вершину 5).

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 & 6 \arrow[l, "\epsilon"'] \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 6 \arrow[d, "\epsilon"'] & 4 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, bend left, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[l, bend left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\beta\epsilon = 0, \beta\delta = 0$.

Зведемо $\alpha \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тоді рядки матриці ϵ поділяться на 2 частини. Зведемо ϵ:

$$\epsilon \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

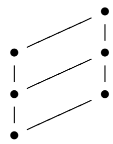
Відповідно, стовпчики матриці ϵ поділяться на 4 частини, причому через умову $\beta\epsilon = 0$ перший і третій стовпчики будуть нульовими. Зведемо β:

$$\beta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc|c|cc} 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

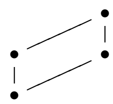
А значить, матриця γ поділиться на 3 вертикальні частини. Зведемо γ:

$$\gamma \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, матриця δ поділиться на 6 вертикальних частин. Неважко бачити, що додавання стовпчиків в δ задається частково впорядкованою множиною S_1 вигляду



Також δ матиме 8 рядків, причому, враховуючи умову $\beta\delta = 0$, лише 4 із них будуть ненульовими. Додавання цих рядків задається частково впорядкованою множиною S_2 вигляду



Отже, наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S_1 та S_2. Як відомо, ця задача — дика.

3) (δ і ϵ виходять з вершини 5).

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 6 & 4 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[u, "\epsilon"'] \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\epsilon\alpha = 0, \delta\alpha = 0$.

А це є дикий сагайдак (тут немає співвідношень на стрілки β, δ і ϵ між собою). А отже, наша задача — дика.

4) (δ виходить з вершини 5, а ϵ входить в неї).

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] & 6 \arrow[l, "\epsilon"'] \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 6 \arrow[d, "\epsilon"'] & 4 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$ зі співвідношеннями $\delta\alpha = 0, \beta\epsilon = 0$.

А це є дикий сагайдак (тут немає співвідношень на стрілки β, δ і γ між собою). А отже, наша задача — дика.

Випадок 5.2.3. *Склеювання вершин* 3 *і* 6 *у сагайдаку* E_7.

Очевидно, що якщо стрілки δ і ϵ одночасно входять у вершину 5 (або виходять із неї), то ми автоматично отримаємо дикий сагайдак. Тому ми можемо зафіксувати напрям цих стрілок, вважаючи, наприклад, що δ входить у вершину 5, а ϵ із неї виходить. В залежності від напряму інших стрілок, які починаються(закінчуються) у вершинах 3 і 6 (β, γ і π), тут можливі наступні підвипадки:

1)

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 & 7 \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\
1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 6 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, bend left, "\delta"] & 5 \arrow[l, bend left, "\epsilon"] \\
 & & 7 \arrow[u, "\pi"] &
\end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\delta\epsilon = 0, \delta\pi = 0, \beta\pi = 0, \beta\epsilon = 0$.

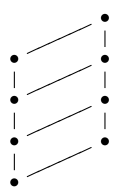
Зведемо $\epsilon \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тоді рядки і стовпчики матриці δ поділяться на 2 частини, причому через умову $\delta\epsilon = 0$ перший стовпчик буде нульовим. Зауважимо також, що при зведенні δ нульовий стовчик поділиться так же само, як і другий рядок. Зведемо δ:

$$\delta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Відповідно, матриця γ поділиться на 5 горизонтальних частин, причому 1-ша і 5-та частини пов'язані. Зведемо γ:

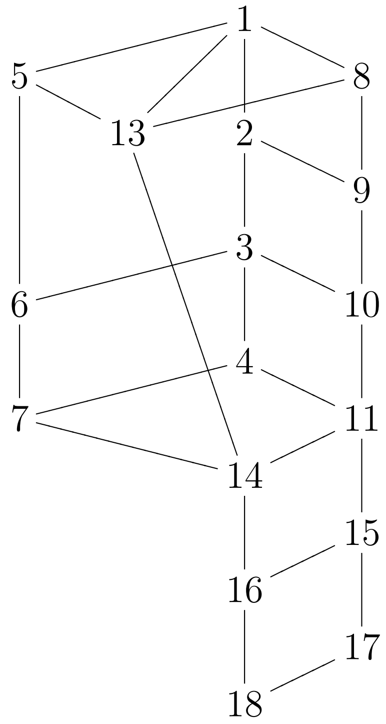
$$
\gamma \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccccc}
0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

Тоді матриця π також поділиться на 14 горизонтальних частин, причому внаслідок умови $\delta\pi = 0$ останні 6 рядків будуть нульовими. Зауважимо також, що в цій матриці 4 перші і 4 останні рядки пов'язані. Додавання ненульових рядків тут задається частково впорядкованою множиною вигляду:



При зведенні матриці π, вона поділиться на 44 горизонтальні частини. Отже, в кінцевому рахунку матриця β буде мати 2 горизонтальні частини і 44 вертикальних. Враховуючи умови $\beta\pi = 0$ і $\beta\epsilon = 0$, лише 18 стовпчиків у β будуть ненульовими.

Пронумерувавши їх справа наліво від 1 до 18, неважко зробити висновок, що додавання цих стовпчиків задається частково впорядкованою множиною S вигляду:



З [14] випливає, що наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка складається з одного елемента. З робіт [14, 17] випливає, що ця задача дика.

2)

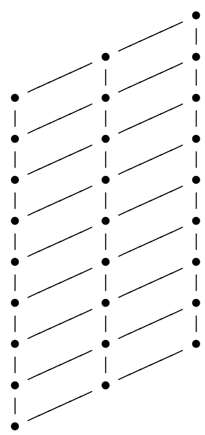
$$\begin{tikzcd} & & 4 & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 & 7 \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

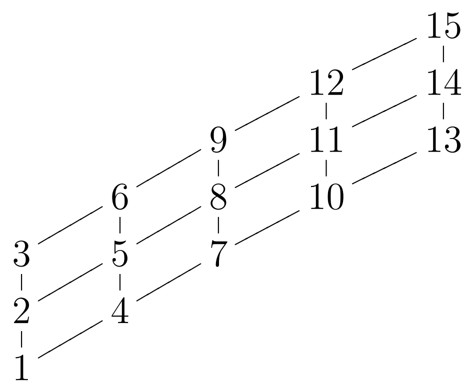
$$\begin{tikzcd} & & 4 & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 6 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, bend left, "\delta"] & 5 \arrow[l, bend left, "\epsilon"] \\ & & 7 \arrow[u, "\pi"] & \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\delta\epsilon = 0, \delta\pi = 0, \gamma\pi = 0, \gamma\epsilon = 0$.

Аналогічно до попереднього випадку, спочатку зведемо матриці ϵ і δ. Після цього матриця β поділиться на 5 горизонтальних частин (1-ша і 5-та з них пов'язані) та 2 вертикальні. Після зведення кожен з рядків в β поділиться на 3, причому пов'язані (1-й і 5-й рядки) ще додатково поділяться, тобто в кінцевому рахунку β матиме 27 рядків, додавання яких задається частково впорядкованою множиною вигляду:



Тоді матриця γ розіб'ється на 27 стовпчиків із такими ж додаваннями. Враховуючи умову $\gamma\epsilon = 0$, перші 12 стовпчиків в γ будуть нульовими. Тобто, залишається 15 ненульових стовпчиків. Пронумеруємо їх зліва направо від 1 до 15. Зазначимо, що додавання цих стовпчиків керується частково впорядкованою множиною вигляду:



Розглянемо зображення, в яких γ має наступний вигляд (де ненульові смуги — лише $6, 9, 11$ і 13):

$$\gamma = \left(\begin{array}{c|c|cc|cc} I & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & I \end{array}\right).$$

Тоді, з умови $\gamma\pi = 0$ випливає, що π має вигляд

$$\pi = \left(\begin{array}{c} -A_1 \\ \hline -A_1 - A_2 \\ \hline A_2 \\ B \\ \hline A_1 \\ -B \end{array}\right),$$

де матриці (A_1, A_2) утворюють пучок і ніяких додавань між A_1, A_2 та B немає. А це є відома дика задача — зображення сагайдака:

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left] \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd}$$

3)

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 6 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, bend left, "\delta"] \arrow[d, "\pi"] & 5 \arrow[l, bend left, "\epsilon"] \\ & & 7 & \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\delta\epsilon = 0, \beta\epsilon = 0, \pi\gamma = 0$.

4)

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 & \\
1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 6 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, bend left, "\delta"] \arrow[d, "\pi"] & 5 \arrow[l, bend left, "\epsilon"] \\
 & & 7 &
\end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\delta\epsilon = 0, \gamma\epsilon = 0, \pi\beta = 0$.

Ми не будемо приводити доведення для останніх двох підвипадків, лише зазначимо, що воно подібне доведенню для підвипадків 1 і 2. Враховуючи, що тут на одне співвідношення менше, задача не може бути «кращою» за дві вищерозглянуті, а тому вона також дика.

Цим завершується доведення теорем 5.1–5.3.

Висновки до розділу 5

У цьому розділі встановлено зображувальні типи нодальних алгебр типу E, які отримуються склеюваннями і роздуттями з сагайдаків типу E або $\widetilde{\mathrm{E}}$.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі одержано такі результати:

(1) Визначено новий клас скінченновимірних алгебр — *нодальні алгебри.* Встановлено, що властивість нодальності є інваріантною відносно Моріта-еквівалентності.

(2) Описано будову нодальних алгебр. Встановлено, що базова нодальна алгебра отримується зі спадкової операціями *склеювання компонентів*, *роздуття компоненти*, *обмеження компоненти* та *розширення компоненти*, які визначені в розділі 2. У випадку алгебр над алгебраїчно замкненим полем застосовуються лише операції склеювання та роздуття компонентів.

(3) Встановлено, що кожна лагідна або скручено-лагідна алгебра є нодальною й визначено, які нодальні алгебри є лагідними або скручено-лагідними.

(4) Виділено спеціальний клас склеювання компонентів — *неістотні склеювання* — і встановлено, що неістотні склеювання не впливають на зображувальний тип алгебри.

(5) Встановлено зображувальні типи нодальних алгебр над алгебраїчно замкненим полем, які отримуються операціями склеювання та роздуття компонентів зі спадкових алгебр Динкінського типу $\mathrm{A} - \mathrm{D} - \mathrm{E}$ або Евклідового типу $\widetilde{\mathrm{A}} - \widetilde{\mathrm{D}} - \widetilde{\mathrm{E}}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бернштейн И. Н. *Функторы Кокстера и теорема Габриеля* / И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев // Успехи мат. наук. – 1973. – 28, № 2. – С. 19–33.
2. Бондаренко В. М. *Связки полуцепных множеств и их представления* / В. М. Бондаренко. – Киев, 1988. – 32 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 88.60).
3. Волошин Д. Є. *Будова нодальних алгебр* / Д. Є. Волошин // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, №7. – С. 880–888.
4. Дрозд Ю. А. *Матричные задачи и категории матриц* / Ю. А. Дрозд // Записки науч. семин. ЛОМИ. – 1972. – 28. – С. 144–153.
5. Дрозд Ю. А. *Ручные и дикие матричные задачи* / Ю. А. Дрозд // Представления и квадратичные формы. Труды Мат. ин-та АН УССР. – 1979. – С. 39–74.
6. Дрозд Ю. А. *Конечные модули над чисто нетеровыми алгебрами* / Ю. А. Дрозд // Труды Мат. ин-та АН УССР. – 1990. – 183. – С. 56–68.
7. Дрозд Ю. А. *Матричные задачи и целочисленные представления* / Ю. А. Дрозд, А. Г. Завадский, В. В. Кириченко // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – 38, № 2. – С. 291–293.
8. Дрозд Ю. А. *Зображувальний тип нодальних алгебр типу* D / Ю. А. Дрозд, В. В. Зембик // Укр. мат. журн. – 2014. – 66, № 7. – С. 930–938.
9. Дрозд Ю. А. *Конечномерные алгебры* / Ю. А. Дрозд, В. В. Кириченко. – Киев: Вища шк., 1980.

10. Зембик В. В. *Будова скінченновимірних нодальних алгебр* / В. В. Зембик // Укр. мат. журн. – 2014. – 66, № 3. – С. 415–419.
11. Зембик В. В. *Зображувальний тип нодальних алгебр типу* E / В. В. Зембик // Спектральна теорія операторів та наборів операторів: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – 12, № 1. – С. 119–140.
12. Зембик В. В. *Скручено-лагідні алгебри є нодальними* / В. В. Зембик // Укр. мат. журн. – 2015. – 67, № 4. – С. 574–576.
13. Зембик В. В. *Зображення нодальних алгебр типів* D *і* E / В. В. Зембик // Міжнародна конференція молодих математиків. Тези доповідей. – Київ, 2015. – С. 32.
14. Клейнер М. М. *Частично упорядоченные множества конечного типа* / М. М. Клейнер // Записки науч. семин. ЛОМИ. – 1972. – 28. – С. 32–41.
15. Кругляк С. А. *Представления алгебр, квадрат радикала которых равен нулю* / С. А. Кругляк // Записки науч. семин. ЛОМИ. – 1972. – 28. – С. 60–68.
16. Назарова Л. А. *Представления колчанов бесконечного типа* / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – 37, № 4. – С. 752–791.
17. Назарова Л. А. *Частично упорядоченные множества бесконечного типа* / Л. А. Назарова // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – 39, № 5. – С. 963–991.
18. Назарова Л. А. *Представления частично упорядоченных множеств* / Л. А. Назарова, А. В. Ройтер // Записки науч. семин. ЛОМИ. – 1972. – 28. – С. 5–31.

19. Ройтер А. В. *Неограниченность размерностей неразложимых представлений алгебры, имеющей бесконечно много неразложимых представлений* / А. В. Ройтер // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – 32, № 6. – С. 1275–1282.

20. Assem I. *Iterated tilted algebras of type A_n* / I. Assem, A. Skowroński // Math. Z. – 1987. – **195**. – P. 269–290.

21. Auslander M. *Representation theory of Artin algebras* / M. Auslander, I. Reiten and Smalø // Cambridge University Press, 1995.

22. Bautista R. *On algebras of strongly unbounded representation type* / R. Bautista // Comment. Math. Helv. – 1985. – 60. – P. 392–399.

23. Bekkert V. *Indecomposables in derived categories of skewed-gentle algebras* / V. Bekkert, E. N. Marcos and H. Merklen. // Comm. Algebra. – 2003. – **31**. – P. 2615–2654.

24. Bongartz K. *Indecomposable modules are standard* / K. Bongartz // Comment. Math. Helv. – 1985. – 60. – P. 400–410.

25. Burban I. *Derived categories of nodal algebras* / I. Burban, Y. Drozd // J. Algebra. – 2004. – 272. – P. 46–94.

26. Burban I. *Derived categories for nodal rings and projective configurations* / I. Burban, Y. Drozd // Noncommutative Algebra and Geometry. – 2005. – 243. – P. 23–46.

27. Donovan P. *Some evidence for an extension of the Brauer–Thrall conjecture* / P. Donovan, M. R. Freislich // Sonderforschungsbereich Teor. Math. (Bonn). – 1972. – 40. – P. 24–26.

28. Donovan P. *The representation theory of finite graphs and associated algebras* / P. Donovan, M. R. Freislich // Carleton Math. Lecture Notes. – 1973. – № 5. – P. 3–86.

29. Drozd Y. *Reduction algorithm and representations of boxes and algebras* / Y. Drozd // Comtes Rendue Math. Acad. Sci. Canada. – 2001. – 23. – P. 97–125.

30. Drozd Y. A. *Vector bundles over noncommutative nodal curves* / Y. A. Drozd, D. E. Voloshyn // Ukrainian Math. J. – 2012. – 64, № 2. – P. 185-199.

31. Drozd Y. A. *Representations of nodal algebras of type* A / Y. A. Drozd, V. V. Zembyk // Algebra Discrete Math. – 2013. – 15, № 2. – P. 179–200.

32. Gabriel P. *Unzerlegbare Darstellungen* / P. Gabriel // Manuscripta Math. – 1972. – 6, № 1. – P. 71–103.

33. Gabriel P. *Représentations indecomposables des ensembles ordonnés* / P. Gabriel // Semin. P. Dubreil. – 1973. – Algebre, Expose 13.

34. Geiss C. *An interesting family of algebras* / C. Geiss, J. A. de la Peña // Arch. Math. (Basel) – 1993. – 60. – P. 25–35.

35. Geiß C. *Auslander–Reiten components for clans* / G. Geiß, J. A. de la Peña // Bol. Soc. Mat. Mexicana (3). – 1999. – **5**, № 2 – P. 307–326.

36. Kleiner M. M. *Pairs of partially ordered sets of tame representation type* / M. M. Kleiner // Linear Algebra Appl. – 1988. – 104. – P. 103–115.

37. Skowrońsky A. *Representation-finite biserial algebras* / A. Skowrońsky and J. Waschbusch // J. Reine Angew. Math. – 1983. – 345. – P. 172–181.

38. Zembyk V. *Representations of nodal algebras of type* A / V. Zembyk // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S. M. Chernikov. Book of abstracts. – Kyiv, 2012. – P. 181.

39. Zembyk V. *Representations of nodal finite dimensional algebras of type* A / V. Zembyk // 9^{th} International Algebraic Conference in Ukraine. Book of abstracts. – L'viv, 2013. – P. 230.

40. Zembyk V. *Representations of nodal algebras of type* D / V. Zembyk // International Algebraic Conference dedicated to 100^{th} anniversary of L. A. Kaluzhnin. Book of abstracts. – Kyiv, 2014. – P. 101.

41. Zembyk V. *Representations of nodal algebras of types* D *and* E / V. Zembyk // *X* International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd. Book of abstracts. – Odessa, 2015. – P. 124.