НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Возняк Аліна Олександрівна

УДК 531.38

ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНОМІРНИХ, МАЯТНИКОВИХ І ПРЕЦЕСІЙНИХ РУХІВ ГІРОСТАТА ЗІ ЗМІННИМ ГІРОСТАТИЧНИМ МОМЕНТОМ

01.02.01 – теоретична механіка

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки НАН України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор **Щетініна Олена Костянтинівна**, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Київського торговельно-економічного університету.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **Міхлін Юрій Володимирович,** Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (м. Харків), професор кафедри прикладної математики;

доктор фізико-математичних наук, професор **Лещенко Дмитро Давидович,** Одеська державна академія будівництва та архітектури, завідувач кафедри теоретичної механіки.

Захист відбудеться «25» вересня 2018р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м.Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «31» липня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Г.П. Пелюх

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Моделювання руху сучасних технічних конструкцій, деформації яких нехтовно малі (роботи, маніпулятори, супутники та інші об'єкти), засноване на моделях систем зв'язаних твердих тіл. До них, перш за все, належить абсолютно тверде тіло, гіростат з постійним і змінним гіростатичним моментом. За допомогою методів динаміки систем зв'язаних твердих тіл пояснено багато технічних властивостей у русі тіл (стійкість за Маієвським, рух кельтського каменя, ефект космонавта Джанібекова та інші).

Значний внесок у динаміку твердого тіла на початковому етапі її розвитку внесли Л. Ейлер, Ж. Даламбер, Л. Пуансо, С. Пуассон, Г. Кірхгоф та інші. Класична задача про рух важкого твердого тіла з нерухомою точкою розвивалась у декількох напрямках. Перший напрямок належав до моделювання руху твердого тіла у полях складної структури (Г. Кірхгоф, А. Клебш, В. А. Стєклов, С. О. Чаплигін, О. М. Ляпунов, В. В. Румянцев, П. В. Харламов). Другий напрямок був присвячений дослідженню геометричних та аналітичних властивостей руху гіростата з постійним гіростатичним моментом (У. Томсон, А. Грей, М. Є. Жуковський, П. В. Харламов). Найбільш загальне визначення гіростата як системи зв'язаних твердих тіл запропонував П. В. Харламов. Огляди результатів, здобутих у зазначених напрямках, указані Г. В. Горром, І. М. Гашененком, О. М. Ковальовим [1], Г. В. Горром, О. М. Ковальовим [2]. Третій напрямок у динаміці систем зв'язаних твердих тіл розвивається інтенсивно в останній час, хоча поняття гіростата зі змінним гіростатичним моментом було введено достатньо давно (М. Є. Жуковський, В. В. Румянцев, П. В. Харламов). Цьому напрямку присвячені роботи Г. В. Горра, О. В. Мазнєва, О. К. Щетініної, І. М. Гашененка, Г. О. Котова, О. В. Волкової і автора даної дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження в рамках дисертаційної роботи проводилися у відповідності з планами науково-дослідної роботи кафедри вищої та прикладної математики ДонНУЕТ ім. М. Туган-Барановського за наступними держбюджетними темами: «Якісне дослідження лінійних інваріантних співвідношень диференціальних рівнянь динаміки твердого тіла, що має нерухому точку» (№ 0108U001661, Д-2002-3, 2002–2004 рр.); «Дослідження умов існування прецесійних і ізоконічних рухів гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил» (№ 0108U001662, Д-2005-9, 01.01.2005 – 31.12.2007). Тематику дисертації пов'язано з держбюджетною темою відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України «Методи

[1] Гашененко І.М., Горр Г.В., Ковальов О.М. Класичні задачі динаміки твердого тіла. – Київ: Наукова думка, 2012. – 401 с.

[2] Горр Г.В., Ковальов О.М. Рух гіростата. – Київ: Наукова думка, 2013. – 407 с.

дослідження нелінійної динаміки складних механічних систем і математичне моделювання систем взаємодіючих твердих тіл» (№ 0111U000484, III-6-11 – 01.01.2011 – 31.12.2014).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження прецесійних рухів гіростата ,що несе один та два ротори, під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Об'єктом дослідження служать диференціальні рівняння класу Кірхгофа–Пуассона, що описують рухи твердого тіла у суперпозиції трьох полів: центрального ньютонівського поля, електричного і магнітного полів.

Предметом дослідження є вивчення умов існування прецесійних рухів гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Методи дослідження. У дисертації використовується метод інваріантних співвідношень побудови розв'язків рівняння динаміки гіростата, напівзворотний метод знаходження розв'язків диференціальних рівнянь, методика завдання регулярних, напіврегулярних прецесій гіростата.

Визначена мета зумовлює виконання таких задач:

- редукцію рівнянь Кірхгофа – Пуассона для наступних рухів: регулярних прецесій, напіврегулярних прецесій, прецесійно-ізоконічних рухів;
- дослідження умов існування рівномірних обертань гіростата, що несе один ротор;
- дослідження умов існування рівномірних обертань гіростата, що несе два ротори;
- аналіз існування розв'язків рівнянь Кірхгофа – Пуассона для напіврегулярних прецесійних рухів гіростата з одним ротором;
- розробку метода дослідження напіврегулярних прецесій гіростата, який несе два ротори;
- аналіз умов існування напіврегулярних прецесій гіростата для редукованих рівнянь;
- вивчення умов на розподіл мас гіростата для різних класів прецесійних рухів.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

- для задачі про рух гіростата під дією потенціальних та гіроскопічних сил отримано нові розв'язки рівнянь Кірхгофа – Пуассона, що описують рівномірне обертання гіростата у двох задачах: задачі про рух гіростата з одним ротором; задачі про рух гіростата з двома роторами;
- для задачі про рух гіростата під дією потенціальних та гіроскопічних сил запропоновано новий метод знаходження умов існування маятникових рухів, напіврегулярних прецесій гіростата, що несе один ротор;
- для напіврегулярних прецесій побудовано п'ять нових розв'язків рівнянь Кірхгофа–Пуассона, що характеризуються наступними властивостями: кут власного обертання є або елементарною функцією часу, або еліптичною функцією часу;

- досліджено вироджені класи напіврегулярних прецесій гіростата, які характеризуються маятниковими рухами або рухами, що існують при додаткових обмеженнях на параметри задачі;
- для рівнянь Кірхгофа – Пуассона розроблено загальний метод дослідження напіврегулярних прецесій гіростата, що несе два ротори;
- побудовано нові класи прецесійних рухів у задачі п. 5 для різних способів завдання швидкостей власного обертання. Розглянуто випадок осесиметричного гіростата;
- одержано залежності гіростатичного моменту від часу, які можуть знайти застосування в задачах керування механічними системами класу гіростат.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані при розробці нових законів керування рухами, які характеризуються прецесійними рухами, в Інституті механіки НАН України, Інституті математики НАН України та інших установах. Теоретичні висновки можуть бути використані при читанні спеціальних курсів з теоретичної механіки і теорії керування у ВНЗ України.

Особистий внесок здобувача у спільних роботах. За темою дисертації опубліковано 6 робіт. З них 3 роботи написані самостійно, а 3 – у співавторстві. У роботі [1] авторові дисертації належить одержання нових розв'язків, а О. В. Мироновій – аналіз умов існування. У роботі [4] авторові дисертації належить розробка нового методу прецесійних рухів, а Г. О. Котову належить аналіз окремих випадків маятникових рухів. У роботі [6] авторові дисертації належить розробка методу визначення умов існування і розгляд випадку, коли розв'язок виражається в еліптичних функціях, а О. К. Щетініній належить результат з дослідження прецесійних рухів у випадку лінійної залежності швидкості власного обертання.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на наступних конференціях: Міжнародній конференції «Класичні задачі динаміки твердого тіла» (Донецьк: ІПММ НАН України, 2007); Міжнародній конференції «Dynamical system modeling and stability investigation» (Київ, 2009); XI Міжнародній конференції «Stability, control and rigid bodies dynamics» (Донецьк: ІПММ НАН України, 2011); Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти» (Донецьк, 2012); ІІ Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти» (Донецьк, 2013); Міжнародній науково-практичній конференції «Інноваційний розвиток науки нового тисячоліття» (Ужгород, 2017).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася на семінарі відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України за участю кафедри математики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» (2018 р.) і семінарі відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України (2018 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано в статтях

[1 – 5] у наукових періодичних фахових виданнях, [6] – у журналі, що індексується у наукометричній базі РІНЦ і тезах доповідей [7–12] на міжнародних наукових конференціях.

Структура та об'єм роботи. Дисертація складається зі вступу, основної частини з п'яти розділів, висновків та списку використаної літератури. Список використаної літератури складається з 191. Загальний обсяг роботи становить 143 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У першому розділі дисертаційної роботи проведено аналіз літератури за темою дисертації.

У другому розділі викладено методи дослідження задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом.

У розділі 3 досліджено умови існування рівномірних обертань гіростата для рівнянь

$$A\dot{\bar{\omega}} = -\dot{\bar{\lambda}}(t) + \bar{\omega} \times \left(B\bar{\nu} - \bar{\lambda}(t) - A\bar{\omega}\right) + \bar{\nu} \times \left(C\bar{\nu} - \bar{s}\right), \qquad \dot{\bar{\nu}} = \bar{\nu} \times \bar{\omega}, \tag{1}$$

які мають перші інтеграли

$$\bar{\nu} \cdot \bar{\nu} = 1, \qquad (A\bar{\omega} + \lambda(t)) \cdot \bar{\nu} - \frac{1}{2}(B\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) = k. \tag{2}$$

В (1), (2) позначено: $\bar{\omega}$ – вектор кутової швидкості тіла-носія; $\bar{\nu}$ – одиничний вектор, що вказує напрямок магнітного поля; $A = \left(A_{ij}\right)$ – тензор інерції гіростата, компоненти якого формуються залежно від способу обертання несених тіл; $\bar{\alpha}$ – одиничний вектор, незмінно пов'язаний з тілом-носієм; $\bar{s}$ – вектор, співнаправлений з вектором узагальненого центру мас гіростата; $B = \left(B_{ij}\right)$, $C = \left(C_{ij}\right)$ – сталі матриці третього порядку. Вектор гіростатичного моменту $\bar{\lambda}(t)$ розглянуто у двох варіантах:

$$1.\ \bar{\lambda}(t) = \lambda(t)\bar{\alpha}, \qquad |\,\bar{\alpha}\,| = 1, \tag{3}$$

$$2.\ \bar{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\bar{\alpha} + \lambda_2(t)\bar{\beta}, \qquad |\,\bar{\alpha}\,| = |\,\bar{\beta}\,| = 1, \qquad \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = 0. \tag{4}$$

У випадку (3) гіростат несе один ротор, у випадку (4) гіростат несе два ротори.

У припущенні, що гіростат рівномірно обертається навколо осі l, нерухомій у просторі; $\bar{\gamma} \in l$ $(|\,\bar{\gamma}\,| = 1)$; в силу $\frac{d\bar{\gamma}}{dt} = \dot{\bar{\gamma}}$, вектор $\bar{\gamma}$ є нерухомим також і в тілі-носії; позначивши через $\bar{a}$ вектор тіла-носія, з яким співпадає вектор $\bar{\gamma}$, отримано

$$\bar{\omega} = \omega_0 \bar{a}, \tag{5}$$

де ω_0 – довільна стала. Підстановка $\bar{\omega}$ із (5) у друге рівняння із (1) дає

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \qquad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \qquad \nu_3 = a_0, \tag{6}$$

де $a_0 = \cos\theta_0$, $a_0' = \sin\theta_0$, $\theta_0 = \angle(\bar{a}, \bar{\nu})$. Внесенням (5) у перше рівняння системи (1) у випадку (3) отримано рівняння

$$\dot{\lambda}(t)\bar{\alpha} = \omega_0 \bar{a} \times \left(B\bar{\nu} - A\bar{\omega} - \lambda(t)\alpha\right) + \bar{\nu} \times \left(C\bar{\nu} - \bar{s}\right), \tag{7}$$

у випадку (4) отримано рівняння

$$\dot{\lambda}_1(t)\overline{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\overline{\beta} = \omega_0\left[\lambda_1(t)(\overline{\alpha}\times\overline{a}) + \lambda_2(t)(\overline{\beta}\times\overline{a})\right] + \\ + \omega_0^2(A\overline{a}\times\overline{a}) + \omega_0(\overline{a}\times B\overline{\nu}) + \overline{s}\times\overline{\nu} + \overline{\nu}\times C\overline{\nu}. \qquad (8)$$

У дисертації при розгляді рівняння (7) досліджено окремі випадки.

У *випадку* $\alpha_3 = 0$ умови існування рівномірних обертань гіростата приймають вигляд

$$C_{ij} = 0 \quad (i \neq j),\ \ C_{22} = C_{11},\ \ s_2 = s_1 = 0,$$

$$a_0 B_{23} - \omega_0 A_{23} = 0, \qquad s_3 = a_0(C_{33} - C_{11}) - \frac{\omega_0}{2}(B_{11} + B_{22}) = 0, \qquad (9)$$

при виконанні яких отримано залежність

$$\lambda(t) = a_0' B_{12}\cos\omega_0 t + \frac{a_0'}{2}(B_{11} - B_{22})\sin\omega_0 t + a_0 B_{13} - \omega_0 A_{13}.$$

В*ипадок* $\alpha_3 \neq 0$ розпадається на два варіанта. У першому варіанті при виконанні умов

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad C_{23} = C_{13} = 0,$$
$$\omega_0(B_{22} - B_{11}) + a_0(C_{22} - C_{11}) = 0,\ \ \omega_0 B_{12} + a_0 C_{12} = 0,$$
$$\omega_0^2 A_{23} - a_0\omega_0 B_{23} + a_0 s_2 = 0,\ \ \omega_0^2 A_{13} - a_0\omega_0 B_{13} + a_0 s_1 = 0, \qquad (10)$$
$$s_3 = \frac{1}{2}\left[a_0(2C_{33} - C_{11} - C_{22}) - \omega_0(B_{11} + B_{22})\right],$$

функція $\lambda(t)$ є тригонометричним многочленом другого порядку відносно $\sin\omega_0 t$, $\cos\omega_0 t$:

$$\lambda(t) = \\ = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{a_0'^2}{4}(C_{11} - C_{22})\cos 2\omega_0 t - \frac{a_0'^2}{2}C_{12}\sin 2\omega_0 t + a_0' s_2\cos\omega_0 t + a_0' s_1\sin\omega_0 t + \lambda_*\right). (11)$$

У другому варіанті за виконання умов на параметри

$$C_{ij} = 0 \quad (i \neq j),\ C_{22} = C_{11},\ \alpha_1 s_1 - \frac{\omega_0}{2}\alpha_3(B_{11} - B_{22}) = 0,\ a_0 s_2 + \omega_0(\omega_0 A_{23} - a_0 B_{23}) = 0,$$

$$s_3 = a_0(C_{33} - C_{11}) - \frac{1}{2}\omega_0(B_{11} + B_{22}),\ \alpha_1 s_2 - \omega_0\alpha_3 B_{12} = 0, \qquad (12)$$

отримано залежність

$$\lambda(t) = \frac{1}{\alpha_3\omega_0}\left(a_0' s_2\cos\omega_0 t - a_0' s_1\sin\omega_0 t + \lambda_*\right),$$

де $\lambda_* = \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}\left(\omega_0(a_0 B_{13} - \omega_0 A_{13}) - a_0 s_1\right)$.

Розглянуто рівномірні обертання (5) для рівняння (8). У скалярній формі одержано систему рівнянь

$$\dot{\lambda}_1(t) = \omega_0\gamma_3\lambda_2(t) + A_0 + A_1\sin\omega_0 t + A_2\cos\omega_0 t + A_3\sin 2\omega_0 t + A_4\cos 2\omega_0 t, \qquad (13)$$
$$\dot{\lambda}_2(t) = -\omega_0\gamma_3\lambda_1(t) + B_0 + B_1\sin\omega_0 t + B_2\cos\omega_0 t + B_3\sin 2\omega_0 t + B_4\cos 2\omega_0 t, \qquad (14)$$
$$\omega_0(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) + C_0 + C_1\sin\omega_0 t + C_2\cos\omega_0 t + C_3\sin 2\omega_0 t + C_4\cos 2\omega_0 t = 0. (15)$$

У (13) – (15) A_i, B_i, C_i $(i=\overline{0,4})$ – сталі.

У дисертації наведено три окремі розв'язки системи (13 – 15). Умови існування цих розв'язків такі:

1. $\alpha_3=0$, $\beta_3=0$,

$$\begin{gathered} C_{12}=0,\quad C_{22}=C_{11},\quad s_1=a_0C_{13},\quad s_2=a_0C_{23}, \\ 2s_3+\omega_0\left(B_{11}+B_{22}\right)+2a_0\left(C_{11}-C_{33}\right)=0; \end{gathered} \tag{16}$$

2. $\gamma_3=0$, $\alpha_3^2+\beta_3^2\neq 0$,

$$C_{13}=0,\ C_{23}=0,\qquad 2s_3+\omega_0\left(B_{11}+B_{22}\right)+a_0\left(C_{11}+C_{22}-2C_{33}\right)=0; \tag{17}$$

3. $\gamma_3\neq 0$, $\alpha_3^2+\beta_3^2\neq 0$,

$$\begin{gathered} 2s_3+\omega_0\left(B_{11}+B_{22}\right)+a_0\left(C_{11}+C_{22}-2C_{33}\right)=0, \\ \gamma_3C_{12}-\gamma_2C_{13}-\gamma_1C_{23}=0,\quad \gamma_3\left(C_{22}-C_{11}\right)-2\gamma_2C_{23}+2\gamma_1C_{13}=0. \end{gathered} \tag{18}$$

У всіх варіантах (16) – (18) компоненти гіростатичного моменту мають вигляд

$$\lambda_i\left(t\right)=\sigma_2^{(i)}\cos 2\omega_0 t+\kappa_2^{(i)}\sin 2\omega_0 t+\sigma_1^{(i)}\cos\omega_0 t+\kappa_1^{(i)}\sin\omega_0 t+\sigma_0, \tag{19}$$

де $\sigma_2^{(i)},\kappa_2^{(i)},\sigma_1^{(i)},\kappa_1^{(i)},\sigma_0$ – параметри.

У розділі 4 досліджено напіврегулярні прецесії першого типу гіростата, що несе один ротор. Указано методику досліджень умов існування, розглянуто різні варіанти залежності швидкості власного обертання від кута власного обертання. Знайдено нові випадки зазначених рухів.

Систему рівнянь (1) у випадку $\overline{\lambda}\left(t\right)=\lambda\left(t\right)\overline{\alpha}$ при виконанні умов

$$\overline{\omega}=\dot{\varphi}\overline{a}+m_0\overline{\nu},\qquad \overline{\nu}=(a_0'\sin\varphi, a_0'\cos\varphi, a_0),\qquad \overline{a}=(0,0,1), \tag{20}$$

де $a_0'=\sin\theta_0$, $\dot{\varphi}$ – швидкість власного обертання гіростата, $m_0=\mathrm{const}$, після низки перетворень зведено до системи диференціальних рівнянь щодо функцій $\varphi(t)$ і $\lambda(t)$

$$\begin{gathered} \alpha_3\dot{\lambda}(t)+A_{33}\ddot{\varphi}-a_0'm_0(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi)\lambda(t)+\frac{1}{2}a_0'^2(C_{22}^*-C_{11}^*)\sin 2\varphi- \\ -a_0'^2C_{12}^*\cos 2\varphi+a_0'(a_0C_{23}^*+s_2)\sin\varphi-a_0'(a_0C_{13}^*+s_1)\cos\varphi=0, \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} (a_0'\alpha_2\cos\varphi+a_0'\alpha_1\sin\varphi+a_0\alpha_3)\dot{\lambda}(t)+a_0'(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi)\lambda(t)\dot{\varphi}+ \\ +(a_0'A_{23}\cos\varphi+a_0'A_{13}\sin\varphi+a_0A_{33})\ddot{\varphi}+a_0'(A_{13}\cos\varphi-A_{23}\sin\varphi)\dot{\varphi}^2+ \\ +a_0'\left(a_0'\left(\frac{1}{2}(B_{22}^*-B_{11}^*)\sin 2\varphi-B_{12}^*\cos 2\varphi\right)+a_0(B_{23}^*\sin\varphi-B_{13}^*\cos\varphi)\right)\dot{\varphi}=0, \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} (\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi)\dot{\lambda}(t)-[(\alpha_1\sin\varphi+\alpha_2\cos\varphi)(a_0m_0+\dot{\varphi})-a_0'\alpha_3m_0]\lambda(t)+ \\ +(A_{13}\cos\varphi-A_{23}\sin\varphi)\ddot{\varphi}-(A_{23}\cos\varphi+A_{13}\sin\varphi)\dot{\varphi}^2+[a_0'(B_{12}^*\sin 2\varphi+ \\ +\frac{1}{2}(B_{22}^*-B_{11}^*)\cos 2\varphi)+a_0(B_{13}^*\sin\varphi+B_{23}^*\cos\varphi)+\frac{1}{2}(a_0'(B_{11}^*+B_{22}^*+ \\ +2m_0(A_{11}+A_{22}+A_{33}))]\dot{\varphi}-a_0a_0'(C_{12}^*\sin 2\varphi+\frac{1}{2}(C_{22}^*-C_{11}^*)\cos 2\varphi)- \\ -(a_0s_1+C_{13}^*(a_0{}^2-a_0'^2))\sin\varphi-(a_0s_2+C_{23}^*(a_0{}^2-a_0'^2))\cos\varphi+ \end{gathered} \tag{23}$$

$$+\frac{1}{2}a_0'(2s_3+a_0(2C_{33}^*-C_{11}^*-C_{22}^*))=0,$$

яка припускає інтеграл

$$(a_0'(\alpha_2\cos\varphi+\alpha_1\sin\varphi)+a_0\alpha_3)\lambda(t)+(a_0'(A_{23}\cos\varphi+A_{13}\sin\varphi)+a_0A_{33})\dot\varphi-$$
$$-\frac{1}{2}a_0'[a_0'(B_{12}^*\sin2\varphi+\frac{1}{2}(B_{22}^*-B_{11}^*)\cos2\varphi)+2a_0(B_{13}^*\sin\varphi+B_{23}^*\cos\varphi)+ \tag{24}$$
$$+\frac{1}{2}a_0'(B_{22}^*+B_{11}^*)+\frac{1}{2}a_0{}^2B_{33}^*]=k.$$

У рівняннях (21) – (24) через A_{ij} позначено компоненти тензора A; через B_{ij}^* і C_{ij}^* – зведені параметри, що введено замість A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}.

Наведено приклади існування розв’язків рівнянь (21) – (24).

Випадок $\overline{\alpha}=(0,0,1)$, $a_0=0$.

1) Нехай виконано умови

$$A_{13}=0,\quad B_{11}=m_0(A_{11}-A_{22}),\quad B_{22}=-B_{11},\quad B_{12}=2m_0A_{12},\quad k=\frac{m_0}{2}(A_{11}+A_{22}). \tag{25}$$

Тоді розв’язок рівнянь (21) – (24) такий:

$$\dot\varphi=\frac{m_0\left(C_{12}^*\cos2\varphi-\frac{1}{2}C\sin2\varphi+s_1\cos\varphi-s_2\sin\varphi\right)}{C_{13}^*\cos\varphi-C_{23}^*\sin\varphi},$$

$$\lambda(t)=-\frac{1}{m_0}(m_0A_{33}\dot\varphi+C_{13}^*\sin\varphi+C_{23}^*\cos\varphi+s_3), \tag{26}$$

де $C, C_{12}^*, C_{13}^*, C_{23}^*$ – сталі параметри.

2) За наявністю умов

$$B_{11}\neq m_0(A_{11}-A_{22}),\quad B_{22}-B_{11}=2m_0(A_{22}-A_{11}),\quad B_{12}=2m_0A_{12},$$
$$k=-\frac{1}{2}(B_{11}-2m_0A_{11}),\quad mB_{12}+C_{12}=0,\quad mB_{13}+C_{13}=0$$

розв’язок системи рівнянь набуде вигляду

$$\lambda(t)=-\frac{1}{m_0}(P\dot\varphi+s_3),\ \dot\varphi=\sqrt{\kappa_2'\ \sin2\varphi-\kappa_2'\cos2\varphi+2\kappa_1'\ \sin\varphi-2\kappa_1\cos\varphi+\kappa_0}, \tag{27}$$

де

$$P=B_{11}+m_0(A_{22}+A_{33}-A_{11}),\ \kappa_2=\frac{\mu_0}{2}\left[\mathrm{m}_0^2(A_{22}-A_{11})-m_0(B_{22}-B_{11})-(C_{22}-C_{11})\right].$$

3) При виконанні умов на параметри

$$k=m_0A_{22}-B_{22},\ s_1=0,\ s_2=0,\ C_{12}=\kappa_3^{(1)}m_0^3+\kappa_2^{(1)}m_0^2+\kappa_1^{(1)}m_0+\kappa_0^{(1)},$$
$$C_{22}=\kappa_3^{(2)}m_0^3+\kappa_2^{(2)}m_0^2+\kappa_1^{(2)}m_0+\kappa_0^{(2)},\quad (2m_0A_{12}-B_{12})(m_0^2A_{13}-m_0B_{13}-C_{13})=$$
$$=\frac{1}{2}[B_{22}-B_{11}+2(A_{11}-A_{22})m_0](m_0^2A_{23}-m_0B_{23}-C_{23}),$$

рівняння (21) – (24) мають розв’язок

$$\dot{\varphi} = \frac{(B_{12} - 2m_0 A_{12})\cos\varphi - \frac{1}{2}((B_{22} - B_{11}) + 2(A_{11} - A_{22})m_0)\sin\varphi}{A_{13}},$$

$$\lambda(t) = \rho_1^{(1)}\cos\varphi + \rho_1'^{(1)}\sin\varphi + \rho_0^{(1)}, \tag{28}$$

де

$$\rho_1^{(1)} = -\frac{1}{A_{13}m_0}\Big[(-2A_{33}A_{12} + A_{23}A_{13})m_0^2 + (A_{33}B_{12} - B_{23}A_{13} -$$

$$-(B_{22} + B_{11})A_{12})m_0 + \frac{1}{2}(B_{22} + B_{11})B_{12} - C_{23}A_{13}\Big],$$

$$\rho_1'^{(1)} = -\frac{1}{A_{13}m_0}\Big[(A_{13}^2 - A_{33}(A_{11} - A_{22}))m_0^2 - (A_{13}B_{13} + \frac{1}{2}(B_{22} + B_{11}) +$$

$$+\frac{1}{2}A_{33}(B_{22} - B_{11}))m_0 - \frac{1}{4}(B_{22}^2 - B_{11}^2) - C_{13}A_{13}\Big], \quad \rho_0^{(1)} = \frac{s_3}{m_0}.$$

Таким чином, у випадках (26), (28) функція $\varphi(t)$ – елементарна функція часу, у випадку (27) – еліптична функція часу. Розв'язність зазначених умов випливає із того факту, що параметри C_{ij} в силу постановки задачі не стиснені обмеженнями, а величини $\kappa_2^{(j)}$ від них не залежать.

Випадок $\overline{\alpha} = (0,0,1)$, $a_0 \neq 0$. В окремому випадку розглянуто розв'язок системи (21) – (24). За наявністю умов

$$A_{23} = 0,\ A_{13} = 0,\ B_{12} = 2m_0 A_{12},\ B_{13} = 0,\ B_{23} = 0,$$
$$C_{22} - C_{11} = m_0^2(A_{11} - A_{22}),\ C_{12} = -m_0^2 A_{12},\ s_2 = a_0 C_{23},\ s_1 = a_0 C_{13} \tag{29}$$

напіврегулярна прецесія гіростата описується формулами

$$\dot{\varphi} = \rho_1^{(2)}\cos\varphi + \rho_1'^{(2)}\sin\varphi + \rho_0^{(2)},$$

$$\lambda(t) = -A_{33}\dot{\varphi} + \frac{m_0}{a_0}(a_0'^2 A_{22} + a_0^2 A_{33}) + \frac{1}{2a_0}(a_0'^2 B_{22} + a_0^2 B_{33}) + \frac{k}{a_0}, \tag{30}$$

де $\rho_1^{(2)}, \rho_1'^{(2)}, \rho_0^{(2)}$ – параметри.

У *випадку* $\overline{\alpha} = (1,0,0)$, $\dot{\varphi} = \sqrt{a + b\sin\varphi}$ знайдено умови на параметри задачі

$$A_{23} = 0,\ A_{13} = 0,\ a_0 = 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = 0,$$

$$k = m_0(A_{22} + A_{33}) + \frac{1}{2}B_{11},\ B_{22} = -2m_0 A_{33} - B_{11},\ B_{12} = 2m_0 A_{12},$$

$$C_{12} = -m_0^2 A_{12}, C_{13} = -m_0 B_{13}, C_{23} = -m_0 B_{23}, C_{22} - C_{11} = m_0^2 A_{33} + m_0 B_{11}, b = \frac{2s_1}{A_{33}},$$

при виконанні яких функція $\lambda(t)$ набуває вигляду

$$\lambda(t) = [B_{11} - m_0(A_{11} - A_{22} - A_{33})]\sin\varphi.$$

Випадок $\overline{\alpha} = (1,0,0)$, $\dot{\varphi} = a + b\sin\varphi$. У припущенні, що $A_{23} \neq 0$, отримано умови на параметри

$$a = \frac{a_0(B_{23} - 2m_0 A_{23})}{A_{23}},\ b = \frac{a_0'(B_{12} - 2m_0 A_{12})}{A_{12}},$$

$$C_{23} = m_0^2 A_{23} - m_0 B_{23}, \quad C_{12} = m_0^2 A_{12} - m_0 B_{12},$$

$$k = \frac{a_0^2 A_{33}}{A_{23}}(B_{23} - 2m_0 A_{23}) - \frac{1}{2}a_0'^2(B_{22} - 2m_0 A_{22}) - \frac{1}{2}a_0^2(B_{33} - 2m_0 A_{33}),$$

$$s_1 = -\frac{a_0}{2A_{23}^2}\left[A_{23}(2m_0 A_{13} B_{23} + (B_{11} + B_{22})(B_{12} - 2m_0 A_{12})) - 2m_0 A_{23}^2 B_{13}\right], \qquad s_2 = 0,$$

$$s_3 = -\frac{a_0}{2A_{23}^2}\Big[A_{23}{}^2(-2m_0{}^2(A_{33} + A_{22}) - m_0(B_{11} + B_{22} 2B_{33}) - 2(C_{33} - C_{11})) - \mathrm{A}_{23}(4A_{13}A_{12}m_0^2 -$$
$$- 2(A_{33}B_{23} + A_{13}B_{12})m_0 - B_{23}(B_{22} + B_{11})) - 8A_{12}A_{33}m_0(B_{12} - m_0 A_{12}^2) + 2A_{33}B_{12}^2\Big],$$

$$C_{13} = m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13} + \frac{1}{2\mathrm{A}_{23}}(B_{12} - 2m_0 A_{12})(2m_0 A_{33} + B_{11} + B_{22}),$$

при виконанні яких функція $\lambda(t)$ приймає вигляд

$$\lambda(t) = \mathrm{g}_1 \sin\varphi + g_0,$$

де g_0, g_1 – параметри.

У загальному випадку здобуто зведену систему

$$\begin{gathered} M_1(\varphi)(A_{33}M_1(\varphi) - \alpha_3 N_1(\varphi))\ddot{\varphi} + \alpha_3 Q_1(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \\ + \big(\alpha_3 M_3(\varphi) + a_0' m\alpha_1 N_1(\varphi) M_1(\varphi)\cos\varphi\big)\dot{\varphi} + \\ + M_1(\varphi)\big(L_2(\varphi)M_1(\varphi) - a_0' m\alpha_1 M_2(\varphi)\cos\varphi\big) = 0, \end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered} M_1(\varphi)\big(S_1'(\varphi)M_1(\varphi) - a_0'\alpha_1 \cos\varphi\, N_1(\varphi)\big)\ddot{\varphi} + (a_0'\alpha_1 Q_1(\varphi)\cos\varphi + a_0'\alpha_1 M_1(\varphi)N_1(\varphi)\sin\varphi - \\ - R_1(\varphi)M_1^2(\varphi))\dot{\varphi}^2 + \big(a_0'\alpha_1 M_3(\varphi)\cos\varphi - a_0'\alpha_1 M_1(\varphi)M_2(\varphi)\sin\varphi + M_1^2(\varphi)N_2(\varphi) + \\ + a_0' m P_1(\varphi)M_1(\varphi)N_1(\varphi)\big)\dot{\varphi}^2 + M_1(\varphi)\big(Q_2(\varphi)M_1(\varphi) - a_0' m P_1(\varphi)M_2(\varphi)\big) = 0, \end{gathered} \tag{33}$$

де

$M_1(\varphi) = a_0'\alpha_1 \sin\varphi + a_0\alpha_3$, $N_1(\varphi) = \beta_1 \cos\varphi + \beta_1' \sin\varphi + \beta_0$,

$S_1(\varphi) = \beta_1' \cos\varphi - \beta_1 \sin\varphi$, $Q_1(\varphi) = (a_0'\alpha_1\beta_0 - a_0\alpha_3\beta_1')\cos\varphi + a_0\alpha_3\beta_1 \sin\varphi + a_0'\alpha_1\beta_1$,

$R_1(\varphi) = \beta_1 \cos\varphi - \beta_1' \sin\varphi$, $\quad P_1(\varphi) = a_0\alpha_1 \sin\varphi - a_0\alpha_3$,

$$M_2(\varphi) = \frac{1}{2}B_2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_2' \sin 2\varphi + a_0\gamma_1 \cos\varphi + a_0\gamma_1' \sin\varphi + k_0,$$

$N_2(\varphi) = B_2 \cos 2\varphi + B_2' \sin 2\varphi + a_0\gamma_1 \cos\varphi + a_0\gamma_1' \sin\varphi - B_0$,

$L_2(\varphi) = C_2' \cos 2\varphi - C_2 \sin 2\varphi - k_1' \cos\varphi + k_1 \sin\varphi$, $Q_2(\varphi) = a_0 C_2 \cos 2\varphi +$
$+ a_0 C_2' \sin 2\varphi + \delta_1 \cos\varphi + \delta_1' \sin\varphi + G_0$,

$$M_3(\varphi) = \frac{1}{4}a_0'\alpha_1 B_2 \cos 3\varphi + \frac{1}{4}a_0'\alpha_1 B_2' \sin 3\varphi + a_0\alpha_3 B_2' \cos 2\varphi - a_0\alpha_3 B_2 \sin 2\varphi +$$
$$+ \left(a_3^2\alpha_3\gamma_1' - \frac{3}{4}a_0'\alpha_1 B_2 - a_0'\alpha_1 k_0\right)\cos\varphi - \left(a_0^2\alpha_3\gamma_1 + \frac{3}{4}a_0'\alpha_1 B_2'\right)\sin\varphi - a_0 a_0'\alpha_1\gamma_1.$$

Наведено приклади розв’язання рівнянь (32), (33).

Випадок $\alpha_1 = 0$. При $\overline{\alpha} = (0,0,1),\quad a_0 \neq 0$ рівняння (32), (33) мають розв’язок

$$\dot{\varphi} = \varepsilon_1 \sin\varphi + \varepsilon_0, \qquad \lambda(t) = \lambda_1 \sin\varphi + \lambda_0, \tag{34}$$

де

$$\varepsilon_1 = \frac{a_0'}{A_{13}}\left[2m(A_{22} - A_{11}) - B_{22} + B_{11}\right], \quad \varepsilon_0 = \frac{2a_0\left[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{11} - A_{22})\right]}{B_{22} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{a_0' B_2}\left(a_0'^2 A_{13} B_{13} B_2 + A_{33} B_2^2 - 2a_0'^2 A_{13}^2 C_2\right), \quad \lambda_0 = \frac{1}{2a_0}\left(B_2 + 2k_0 - 2a_0 \varepsilon_0 A_{33}\right),$$

$$B_2 = \frac{a_0'^2}{2}\left[B_{22} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})\right], \quad C_2 = \frac{a_0'^2}{2}\left[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{22} - A_{11})\right],$$

тобто $\varphi(t)$ є елементарною функцією часу, а умови на параметри такі:

$$A_{23} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad C_{23} = 0, \quad s_2 = 0, \quad B_{12} = -2mA_{12} = 0, \quad C_{12} + m^2 A_{12} = 0,$$
$$8mA_{13}^2\left[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{22} - A_{11})\right] + \left[B_{12} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})\right]\times$$
$$\times\left[B_{22}^2 - B_{11}^2 + 4A_{13}(C_{13} + m^2 A_{13}) - 2m(A_{22} - A_{11})(B_{11} + B_{22})\right] = 0,$$
$$4a_0 A_{13}\left[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{22} - A_{11})\right]^2 -$$
$$-2a_0(B_{13} - 2mA_{13})\left[B_{22} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})\right]\left[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{22} - A_{11})\right] +$$
$$+\left[s_1 - a_0(C_{13} + mB_{13} - m^2 A_{13})\right]\left[B_{22} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})\right]^2 = 0,$$
$$k_0 = \frac{1}{a_0'^2 m}\left(\varepsilon_0 q_1' - a_0 \beta' \varepsilon_0 \varepsilon_1 - n_3 - a_0^2 C_2 - \frac{1}{4} a_0'^2 m B_2 - a_0 G_0\right).$$

Випадок $\alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33} = 0$. У дисертації знайдено розв’язок рівнянь (32)–(33)

$$\dot{\varphi} = \frac{N_1(\varphi) R_2(\varphi)}{L_3(\varphi)}, \quad \lambda(t) = \frac{1}{N_1(\varphi)}\left(M_2(\varphi) - M_1(\varphi)\dot{\varphi}\right), \tag{35}$$

де $N_1(\varphi)$, $M_1(\varphi)$ – многочлени першого порядку відносно $\sin\varphi$, $\cos\varphi$; M_2, R_2 – многочлени другого порядку відносно $\sin\varphi$, $\cos\varphi$; $L_3(\varphi)$ – многочлен третього порядку відносно $\sin\varphi$, $\cos\varphi$. Зазначено, що вигляд функцій $\dot{\varphi}$, $\lambda(t)$ із (35) суттєво відрізняється від вигляду цих функцій із (30), (31), (34).

Визначено систему одинадцяти алгебраїчних рівнянь на параметри задачі, яка є умовою існування напіврегулярних прецесій першого типу. Розв’язок цієї системи знайдено в окремих випадках.

У дисертації розглянуто випадки маятникових рухів.

1) $m = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 1$. Для демонстрації наявного випадку наведено числові приклади.

Перший приклад. Якщо

$$B_{11} = b_0, \quad B_{12} = 2b_0, \quad B_{13} = 4b_0, \quad B_{23} = -b_0,$$
$$C_{11} = c_0, \qquad C_{22} = 3c_0, \quad C_{12} = -3c_0, \quad C_{33} = 6c_0,$$
$$a_0 = \frac{\sqrt{110}}{22}, \quad a_0' = \frac{\sqrt{374}}{22}, \quad s_1 = \frac{27\sqrt{110}}{110} c_0, \quad s_2 = -\frac{\sqrt{110}}{10} c_0, \quad s_3 = \frac{2\sqrt{110}}{11} c_0, \tag{36}$$

де b_0 і c_0 – числові незалежні параметри, у дисертації одержано наступний розв'язок рівнянь (21)–(23):

$$\dot{\varphi} = \frac{c_0\left(5610\cos 2\varphi + 1870\sin 2\varphi + 27\sqrt{41140}\cos\varphi + 11\sqrt{41140}\sin\varphi\right)}{b_0\left(748\sqrt{110}\cos 2\varphi + 374\sqrt{110}\sin 2\varphi + 110\sqrt{374}\cos\varphi + 440\sqrt{374}\sin\varphi\right)}, \quad (37)$$

$$\lambda(t) = \frac{\sqrt{110}}{5}\left(\frac{17b_0}{44}(2\sin 2\varphi - \cos 2\varphi) + \frac{\sqrt{85}b_0}{22}(4\sin\varphi - \cos\varphi) + k_0 - \frac{\sqrt{110}A_{33}}{22}\dot{\varphi}\right).$$

Другий приклад відповідає наступним умовам існування маятникових рухів:

$$C_{11} = c_0, \quad C_{22} = 2c_0, \quad C_{33} = -5c_0, \quad C_{12} = c_0, \quad C_{13} = -c_0, \quad C_{23} = -2c_0,$$

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_0' = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad B_{11} = B_{22} = 2b_0, \quad B_{23} = \frac{8b_0}{5}, \quad B_{13} = \frac{6b_0}{5}, \quad (38)$$

$$s_1 = \frac{c_0}{5}(6 - 11\sqrt{2}), \quad s_2 = \frac{c_0}{10}(16 - 31\sqrt{2}), \quad s_3 = -2c_0, \quad c_0 > 0.$$

При виконанні умов (38) отримано

$$\dot{\varphi} = \frac{c_0\left(5\sqrt{2}(\sin 2\varphi - 2\cos 2\varphi) + 2(12 - 17\sqrt{2})\cos\varphi + 2(21\sqrt{2} - 16)\sin\varphi\right)}{8b_0\left(3\cos\varphi - 4\sin\varphi\right)},$$

$$\lambda(t) = \sqrt{2}\left(\frac{4}{5}b_0\cos\varphi + \frac{3}{5}b_0\sin\varphi + k_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}A_{33}\dot{\varphi}\right). \quad (39)$$

Знаменною властивістю розв'язку (39) є дробово-лінійний характер функції $\dot{\varphi}$.

2) $m = 0, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0.$ У припущенні

$$A_{33} = \xi_0,\ A_{13} = 2\xi,\ B_{11} = 2b_0,\ B_{22} = 3b_0,\ B_{33} = 5b_0,\ B_{12} = -b_0,\ B_{13} = 7b_0,$$

$$C_{11} = 5c_0, C_{33} = 4c_0, C_{13} = 4c_0, a_0 = \frac{2}{3}, a_0' = \frac{\sqrt{5}}{3}, C_{23} = -8c_0, C_{22} = 3c_0,$$

$$s_1 = 2c_0, s_2 = \frac{-20}{3}c_0, s_3 = -6c_0, k = -\frac{1}{9}b_0,$$

де ξ, b_0 і c_0 – числові незалежні параметри, доведено існування розв'язку

$$\dot{\varphi} = \frac{U_4(\varphi)}{V_3(\varphi)},\ \lambda(t) = \frac{b_0(5\cos 2\varphi - 10\sin 2\varphi + 56\sqrt{5}\sin\varphi + 61)}{24\alpha_3(\sqrt{5}\sin\varphi + 1)} - \frac{\xi\dot{\varphi}}{\alpha_3}, \quad (40)$$

де

$$U_4(\varphi) = 4c_0(-25\sin 4\varphi + 10\sqrt{5}(2\sin 3\varphi - 3\cos 3\varphi) + 10(11\sin 2\varphi + 8\cos 2\varphi) +$$
$$+ 38\sqrt{5}(2\sin\varphi - \cos\varphi) - 80),$$

$$V_3(\varphi) = 15b_0\left[\sqrt{5}(2\sin 3\varphi - \cos 3\varphi) + 4(\sin 2\varphi + 2\cos 2\varphi) - \sqrt{5}(6\sin\varphi - 5\cos\varphi)\right].$$

Різниця розв'язків (39), (40) очевидна.

П'ятий розділ присвячений напіврегулярним прецесіям гіростата, що несе два ротори. Вказано загальний метод знаходження умов існування прецесійних рухів, побудовано нові класи таких прецесій.

Розглянуто механічну систему, що складається з абсолютно твердого тіла-носія й двох маховиків. Рівняння руху гіростата випливають із (1) за умов (4):

$$A\dot{\bar{\omega}} = \left(\lambda_1(t)\bar{\alpha} + \lambda_2(t)\bar{\beta}\right)\times\bar{\omega} - \dot{\lambda}_1(t)\bar{\alpha} - \dot{\lambda}_2(t)\bar{\beta} + A\bar{\omega}\times\bar{\omega} + \bar{\omega}\times B\bar{\nu} + \bar{s}\times\bar{\nu} + \bar{\nu}\times C\bar{\nu}, \tag{41}$$

$$\dot{\bar{\nu}} = \bar{\nu}\times\bar{\omega},$$

де $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t)$ – компоненти гіростатичного моменту в базисі $\bar{\alpha}$ і $\bar{\beta}$. Рівняння руху (41) допускають два перших інтеграли

$$\bar{\nu}\cdot\bar{\nu} = 1, \qquad (A\bar{\omega} + \lambda_1(t)\bar{\alpha} + \lambda_2(t)\bar{\beta})\cdot\bar{\nu} - \frac{1}{2}(B\bar{\nu}\cdot\bar{\nu}) = k. \tag{42}$$

Дослідження напіврегулярних прецесій в силу (20) звелося до дослідження розв'язків рівняння

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_1(t)\bar{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\bar{\beta} = \lambda_1(t)\left[\dot{\varphi}(\bar{\alpha}\times\bar{a}) + m(\bar{\alpha}\times\bar{\nu})\right] + \lambda_2(t)\left[\dot{\varphi}(\bar{\beta}\times\bar{a}) + m(\bar{\beta}\times\bar{\nu})\right] - \\ - \ddot{\varphi}A\bar{a} + \dot{\varphi}^2(A\bar{a}\times\bar{a}) - \dot{\varphi}(B^*\bar{\nu}\times\bar{a}) + \bar{\nu}\times C^*\bar{\nu} = 0,\end{gathered} \tag{43}$$

де

$$B^* = B + mSp(A)\delta - 2mA, \qquad C^* = C + mB - m^2 A, \tag{44}$$

яке має інтеграл

$$(\dot{\varphi}A\bar{a} + mA\bar{\nu} + \lambda_1(t)\bar{\alpha} + \lambda_2(t)\bar{\beta})\cdot\bar{\nu} - \frac{1}{2}(B\bar{\nu}\cdot\bar{\nu}) = k. \tag{45}$$

Після низки множень рівняння (43) на вектори $\bar{\alpha},\ \bar{\beta},\ \bar{\gamma} = \bar{\alpha}\times\bar{\beta}$ дослідження прецесій першого типу задачі про рух гіростата з двома роторами зведено до дослідження умов існування розв'язків системи

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_2(t)\left[m(a_0'\gamma_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot{\varphi}\right] - \mu_0\ddot{\varphi} + \mu_1\dot{\varphi}^2 + \\ + \dot{\varphi}(\mu_2\sin\varphi + \mu_3\cos\varphi + \mu_4) + \mu_5\sin 2\varphi + \mu_6\cos 2\varphi + \mu_7\sin\varphi + \mu_8\cos\varphi + \mu_9,\end{gathered} \tag{46}$$

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_2(t) = \lambda_1(t)\left[m(a_0'\gamma_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot{\varphi}\right] - \varepsilon_0\ddot{\varphi} + \varepsilon_1\dot{\varphi}^2 + \\ + \dot{\varphi}(\varepsilon_2\sin\varphi + \varepsilon_3\cos\varphi + \varepsilon_4) + \varepsilon_5\sin 2\varphi + \varepsilon_6\cos 2\varphi + \varepsilon_7\sin\varphi + \varepsilon_8\cos\varphi + \varepsilon_9,\end{gathered} \tag{47}$$

$$\begin{gathered}\lambda_1(t)[m(a_0'\beta_1\sin\varphi + a_0'\beta_2\cos\varphi + a_0\beta_3) + \dot{\varphi}\beta_3] - \lambda_2(t)[m(a_0'\alpha_1\sin\varphi + \\ + a_0'\alpha_2\cos\varphi + a_0\alpha_3) + \alpha_3\dot{\varphi}] - \sigma_0\ddot{\varphi} + \sigma_1\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(\sigma_2\sin\varphi + \sigma_3\cos\varphi + \sigma_4) + \\ + \sigma_5\sin 2\varphi + \sigma_6\cos 2\varphi + \sigma_7\sin\varphi + \sigma_8\cos\varphi + \sigma_9 = 0,\end{gathered} \tag{48}$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – компоненти вектора $\bar{\gamma}$; $\mu_k, \varepsilon_k, \sigma_k \quad (k = \overline{0,9})$ – сталі параметри.

Випадок маятникових рухів гіростата. Поклавши в $(46)-(48)$ $m = 0$, отримано систему двох лінійних щодо $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t)$ диференціальних рівнянь

$$\dot{\lambda}_1(t) = \gamma_3\dot{\varphi}\lambda_2(t) + F_1(t), \qquad \dot{\lambda}_2(t) = -\gamma_3\dot{\varphi}\lambda_1(t) + F_2(t) \tag{49}$$

та інваріантне співвідношення

$$\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t) + F_3(t) = 0\ , \tag{50}$$

де

$$\begin{gathered}F_1(t) = -\mu_0\ddot{\varphi}(t) + \mu_1\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\varphi}(t)(\mu_2\sin\varphi(t) + \mu_3\cos\varphi(t) + \mu_4) + \\ + \mu_5\sin 2\varphi(t) + \mu_6\cos 2\varphi(t) + \mu_7\sin\varphi(t) + \mu_8\cos\varphi(t) + \mu_9,\end{gathered}$$

$$F_2(t) = -\varepsilon_0\ddot{\varphi}(t) + \varepsilon_1\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\varphi}(t)(\varepsilon_2\sin\varphi(t) + \varepsilon_3\cos\varphi(t) + \varepsilon_4) +$$
$$+\varepsilon_5\sin 2\varphi(t) + \varepsilon_6\cos 2\varphi(t) + \varepsilon_7\sin\varphi(t) + \varepsilon_8\cos\varphi(t) + \varepsilon_9,$$
$$F_3(t) = \frac{1}{\dot{\varphi}(t)}[-\sigma_0\ddot{\varphi}(t) + \sigma_1\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\varphi}(t)(\sigma_2\sin\varphi(t) + \sigma_3\cos\varphi(t) + \sigma_4) +$$
$$+\sigma_5\sin 2\varphi(t) + \sigma_6\cos 2\varphi(t) + \sigma_7\sin\varphi(t) + \sigma_8\cos\varphi(t) + \sigma_9].$$

У *загальному методі дослідження* рівнянь (49), (50) розглянуто випадок $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$, $(i, j = \overline{1,3})$. Обчисливши першу та другу похідні від інваріантного співвідношення (50), в силу рівнянь (49), одержано систему рівнянь

$$\gamma_3(\alpha_3\lambda_1(t) + \beta_3\lambda_2(t)) + \frac{1}{\dot{\varphi}}(\beta_3F_1(t) - \alpha_3F_2(t) + \dot{F}_3(t)) = 0\ , \qquad (51)$$

$$\gamma_3^{\,2}(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) -$$
$$-\frac{1}{\dot{\varphi}}\left\{\gamma_3\big(\alpha_3F_1(t) + \beta_3F_2(t)\big) + \left[\frac{1}{\dot{\varphi}}(\beta_3F_1(t) - \alpha_3F_2(t) + \dot{F}_3(t))\right]^{\bullet}\right\} = 0. \qquad (52)$$

У дисертації вивчено три випадки: 1) $\alpha_3 = \beta_3 = 0$; 2) $\gamma_3 = 0$, $\alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$; 3) $\gamma_3 \neq 0$, $\alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$.

У першому випадку на основі (50) необхідно вимагати, щоб $F_3(t) = 0$ для будь-яких значень t. У другому випадку, використовуючи (51), одержано рівняння $\beta_3F_1(t) - \alpha_3F_2(t) + \dot{F}_3(t) = 0$. Вимога того, щоб це рівняння виконувалося для будь-яких t, призводить до умов існування руху. У третьому випадку до рівняння (52) необхідно внести вираз $\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)$, знайдений із рівняння (50), щоб отримати рівняння виду $\Phi(t) = 0$. Для визначення умов існування маятникових рухів при заданій залежності $\varphi(t)$, слід вимагати, щоб $\Phi(t) = 0$ для будь-яких значень t. Якщо $\varphi(t)$ не задано, то матимемо диференціальне рівняння на цю функцію.

У дисертації розглянуто окремі розв'язки рівнянь (49), (50).

Розв'язок 1. Поклавши $\overline{\alpha} = (1{,}0{,}0)$, $\overline{\beta} = (0{,}1{,}0)$, $\overline{\gamma} = (0{,}0{,}1)$, із рівняння (50) отримано

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{C^* - a_0'(s_1\sin\varphi + s_2\cos\varphi)}} = \sqrt{\frac{2}{A_{33}}}(t - t_0)\,, \qquad (53)$$

тобто $\varphi(t)$ – еліптична функція часу.

Із рівнянь (46), (48), поклавши $A_{13} = A_{23} = 0$, $a_0 = 0$, $s_3 = 0$, визначено рівняння

$$\dot{\lambda}_1(t) = \dot{\varphi}(t)\lambda_2(t)\,, \quad \dot{\lambda}_2(t) = -\dot{\varphi}(t)\lambda_1(t)\,, \qquad (54)$$

із яких випливає перший інтеграл $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = c^2$ (c – довільна стала). Нехай $\lambda_1 = c\sin u$, $\lambda_2 = c\cos u$ (u – нова змінна), із (54) встановлено залежності

$$\lambda_1 = c\sin(\varphi + \varphi_0)\,, \quad \lambda_2 = c\cos(\varphi + \varphi_0)\,.$$

Розв'язок 2. У випадку $\dot{\varphi} = \sqrt{\rho_0 + \rho_1 \cos\varphi}$, де ρ_0, ρ_1 – параметри ($\rho_0 > \rho_1 > 0$), виписано наступні співвідношення:

$$\varphi = 2\mathrm{am}\chi_0 t, \quad \sin\varphi = 2\mathrm{sn}\chi_0 t\mathrm{cn}\chi_0 t, \quad \cos\varphi = 1 - 2\mathrm{cn}^2\chi_0 t, \quad \dot{\varphi} = 2\chi_0 \mathrm{dn}\chi_0 t,$$

де $\mathrm{am}\chi_0 t$, $\mathrm{sn}\chi_0 t$, $\mathrm{cn}\chi_0 t$, $\mathrm{dn}\chi_0 t$ – еліптичні функції часу, $\chi_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0 + \rho_1}$, $k_*^2 = \frac{2\rho_1}{\rho_0 + \rho_1}$.

Зробивши заміну $\lambda_1(t) = \rho(t)\sin\gamma_3\varphi(t)$, $\lambda_2(t) = \rho(t)\cos\gamma_3\varphi(t)$ і вилучивши з редукованих рівнянь $\dot{\rho}(t)$, у припущенні $\gamma_3 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$; $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$, отримано умови на параметри

$$C_{12} = 0,\ C_{22} = C_{11},\ C_{13} = 0,\ \rho_1 = \frac{2a_0'}{A_{33}}(s_2 - a_0 C_{23}),\ B_{12} = 0,\quad B_{11} = 0,\ B_{22} = 0,$$

$$a_0 B_{13} = 0,\ a_0 B_{23} = 0,\ A_{23} = 0,\ A_{13} = 0,\ s_1 = 0,\ a_0 s_2 + (a_0'^2 - a_0^2)C_{23} = 0,$$
$$s_3 - a_0(C_{33} - C_{11}) = 0,$$

з урахуванням яких у дисертації знайдено функції $\rho(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$:

$$\rho(t) = \frac{2a_0'^2 C_{23}}{\chi_0 k_*^2}\mathrm{dn}\chi_0 t + C_0,\quad \lambda_1(t) = 2\rho(t)\mathrm{sn}\chi_0 t\ \mathrm{cn}\chi_0 t,\quad \lambda_2(t) = \rho(t)(1 - 2\mathrm{cn}^2\chi_0 t),$$

де C_0 – довільна стала.

Функції $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ є періодичними функціями часу з періодом $\frac{2K}{\chi_0}$, де K – повний еліптичний інтеграл: $K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 u}}$.

Розв'язок 3. Нехай

$$\dot{\varphi} = \rho_0 + \rho_1 \sin\varphi \tag{55}$$

де ρ_0, ρ_1 – параметри.

В силу (55) із рівнянь (49) – (50) отримано

$$\begin{gathered}
\lambda_1'(\varphi) = \gamma_3\lambda_2(\varphi) + \Phi_1(\varphi),\ \lambda_2'(\varphi) = -\gamma_3\lambda_1(\varphi) + \Phi_2(\varphi),\\
(\rho_0 + \rho_1\sin\varphi)\big(\beta_3\lambda_1(\varphi) - \alpha_3\lambda_2(\varphi)\big) - \sigma_0\rho_1\cos\varphi(\rho_0 + \rho_1\sin\varphi) + \\
+\sigma_1(\rho_0 + \rho_1\sin\varphi)^2 + (\rho_0 + \rho_1\sin\varphi)(\sigma_2\sin\varphi + \sigma_3\cos\varphi + \sigma_4) + \\
+\sigma_5\sin2\varphi + \sigma_6\cos2\varphi + \sigma_7\sin\varphi + \sigma_8\cos\varphi + \sigma_9 = 0,
\end{gathered}\tag{56}$$

де

$$\Phi_1(\varphi) = g_0 + g_1\sin\varphi + g_1'\cos\varphi,\quad \Phi_2(\varphi) = h_0 + h_1\sin\varphi + h_1'\cos\varphi,$$
$$g_0 = q_0 + \mu_1\rho_0 + \mu_4.$$

Величини ρ_0, ρ_1, σ_i $(i = \overline{1,9})$, g_0, g_1, g_1' , h_0, h_1, h_1' , q_0, μ_0 – сталі параметри.

Нехай $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$, $C_{12} = 0$, $\rho_1 = \rho_0$, $s_2 = 0$, $C_{23} = 0$, $a_0 = 0$, $s_1 = C_{22} - C_{11}$, $s_3 = -C_{13}$, $\rho_0^2 = \frac{C_{22} - C_{11}}{A_{33}}$.

За наявністю цих умов розв'язки $\varphi(t)$, $\lambda_1(\varphi)$ такі:

$$\varphi = -2\mathrm{arctg}\left(1+\frac{2}{\chi_0 t}\right), \quad \chi_0 = \sqrt{\frac{C_{22}-C_{11}}{A_{33}}}. \tag{57}$$

$$\lambda_1(\varphi) = C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + n_0 + \varphi\left(\frac{n_1'}{2}\sin\varphi - \frac{n_1}{2}\cos\varphi\right).$$

Функція $\lambda_2(\varphi)$ набуватиме аналогічного вигляду.

Загальний лінійний випадок прецесій гіростата першого типу. У припущенні

$$\dot\varphi = \rho_0 + \rho_1\sin\varphi + \rho_2\cos\varphi,$$

$$\lambda_1(\varphi) = g_0 + g_1\sin\varphi + g_2\cos\varphi, \qquad \lambda_2(\varphi) = h_0 + h_1\sin\varphi + h_2\cos\varphi \tag{58}$$

у дисертації отримано алгебраїчну систему 15 рівнянь відносно 15 параметрів: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\rho_0,\rho_1,\rho_2,h_0,h_1,h_2,g_0,g_1,g_2$. Наведено приклади розв'язків цієї системи.

1) Випадок сферичного гіростата з нерухомим центром мас. Нехай відомо умови на параметри

$$s_1 = s_2 = s_3,\ A_{11} = A_{22} = A_{33} = A,\ B_{11}^* = mA,\ B_{22}^* = mA, B_{33}^* = mA,$$

$$B_{12}^* = 0,\ B_{13}^* = 0,\ B_{23}^* = 0,\ C_{11}^* = -m^2A,\ C_{22}^* = -m^2A,\ C_{33}^* = -m^2A,$$

$$\mu_0 = \alpha_3 A,\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = a_0'\alpha_2 mA,\ \mu_3 = -a_0'\alpha_1 mA,\ \mu_4 = 0,\ \mu_5 = 0,\ \mu_6 = 0,$$

$$\mu_7 = 0,\ \mu_8 = 0,\ \mu_9 = 0,\ \varepsilon_0 = \beta_3 A,\ \varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = a_0'\beta_2 mA,\ \varepsilon_3 = -a_0'\beta_1 mA,$$

$$\varepsilon_4 = 0,\ \varepsilon_5 = 0,\ \varepsilon_6 = 0,\ \varepsilon_7 = 0,\ \varepsilon_8 = 0,\ \varepsilon_9 = 0,\ \sigma_0 = \gamma_3 A, \sigma_1 = 0,\ \sigma_2 = a_0'\gamma_2 mA,$$

$$\sigma_3 = -a_0'\gamma_1 mA,\ \sigma_4 = 0,\ \sigma_5 = 0,\ \sigma_6 = 0,\ \sigma_7 = 0,\ \sigma_8 = 0,\ \sigma_9 = 0.$$

Тоді рівняння (46) – (48) мають розв'язок

$$\dot\varphi = -\frac{m}{\gamma_3}(a_0'\gamma_1\sin\varphi(t) + a_0'\gamma_2\cos\varphi(t) + a_0\gamma_3), \tag{59}$$

$$\lambda_1(t) = -\frac{a_0' mA}{\gamma_3}\left(\beta_2\sin\varphi(t) + \beta_1\cos\varphi(t)\right),\ \lambda_2(t) = -\frac{a_0' mA}{\gamma_3}\left(\alpha_2\sin\varphi(t) + \alpha_1\cos\varphi(t)\right),$$

де a_0, m – сталі параметри.

2) Випадок осесиметричного гіроскопа. У дисертації показано, що при виконанні умов

$$A_{22} = A_{11}, \quad s_2 = s_1 = 0, \quad s_3 = a_0(A_{11} - A_{33})m^2$$

рівняння (46) – (48) мають розв'язок

$$\dot\varphi(t) = -\frac{m}{\gamma_3}(a_0'\gamma_1\sin\varphi(t) + a_0'\gamma_2\cos\varphi(t) + a_0\gamma_3),$$

$$\lambda_1(t) = -\frac{a_0' mA_{33}}{\gamma_3}\left(\beta_2\sin\varphi(t) - \beta_1\cos\varphi(t)\right), \tag{60}$$

$$\lambda_2(t) = -\frac{a_0' mA_{33}}{\gamma_3}\left(\alpha_2\sin\varphi(t) - \alpha_1\cos\varphi(t)\right),$$

де $\gamma_3 \neq 0$.

Розв'язок напіврегулярної прецесії у випадку дії на гіростат потенціальних і гіроскопічних сил. Нехай в (46) – (48)

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -A_{33}\left[m(a_0'\alpha_1 \sin\varphi + a_0'\alpha_2 \cos\varphi + a_0\alpha_3) + \alpha_3\dot{\varphi}\right],\\ \lambda_2 &= -A_{33}\left[m(a_0'\beta_1 \sin\varphi + a_0'\beta_2 \cos\varphi + a_0\beta_3) + \beta_3\dot{\varphi}\right].\end{aligned} \qquad (61)$$

Тоді умови на параметри задачі набувають вигляду

$$A_{ij} = 0,\ B_{ij} = 0,\ C_{ij} = 0 (i \neq j),\ C_{22} - C_{11} = m^2(A_{11} - A_{22}),$$
$$s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ \ s_3 = a_0\left[C_{33} - C_{11} - m^2(A_{33} - A_1)\right],$$
$$C_* = a_0\gamma_3, B_{11} = m(A_{11} - A_{22}), B_{22} = m(A_{22} - A_{11}),$$

рівняння (46) – (48) мають розв'язок класу (60).

Загальний метод вивчення напіврегулярних прецесій. Представивши інтеграл моментів із (42) у вигляді

$$\lambda_1(t)(\bar{\alpha}\cdot\bar{\nu}) + \lambda_2(\bar{\beta}\cdot\bar{\nu}) = g_1(t), \qquad g_1(t) = \frac{1}{2}(B^*\bar{\nu}\cdot\bar{\nu}) - \dot{\varphi}(A\bar{a}\cdot\bar{\nu}) + k_*, \qquad (62)$$

де k_* – довільна стала, і переписавши рівняння (48) у вигляді:

$$\begin{aligned}&\lambda_1(t)\left[m(\bar{\beta}\cdot\bar{\nu}) + (\bar{\beta}\cdot\bar{a})\dot{\phi}\right] + \lambda_2(t)\left[m(\bar{\alpha}\cdot\bar{\nu}) + (\bar{\alpha}\cdot\bar{a})\dot{\phi}\right] = g_2(t),\\ &g_2(t) = \sigma_0\ddot{\phi} - \sigma_1\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}(\sigma_2\sin\phi + \sigma_3\cos\phi + \sigma_4) - \sigma_5\sin 2\phi - \sigma_6\cos 2\phi -\\ &-\sigma_7\sin\phi - \sigma_8\cos\phi - \sigma_9,\end{aligned} \qquad (63)$$

із рівнянь (62), (63) визначено

$$\lambda_1(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)}, \quad \lambda_2(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}, \qquad (64)$$

де

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= m\left[(\bar{\alpha}\cdot\bar{\nu})^2 - (\bar{\beta}\cdot\bar{\nu})^2\right] + \dot{\varphi}\left[(\bar{\alpha}\cdot\bar{\nu})(\bar{\alpha}\cdot\bar{a}) - (\bar{\beta}\cdot\bar{\nu})(\bar{\beta}\cdot\bar{a})\right],\\ \Delta_1(t) &= g_1(t)\left[m(\bar{\alpha}\cdot\bar{\nu}) + \dot{\varphi}(\bar{\alpha}\cdot\bar{a})\right] - g_2(t)(\bar{\beta}\cdot\bar{\nu}),\\ \Delta_2(t) &= g_2(t)(\bar{\alpha}\cdot\bar{\nu}) - g_1(t)\left[m(\bar{\beta}\cdot\bar{\nu}) + \dot{\varphi}(\bar{\beta}\cdot\bar{a})\right].\end{aligned}$$

Замінивши одне із рівнянь (46), (47) першим інтегралом (62) і підставивши в нього вираз (64), отримаємо рівняння $G(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi}) = 0$, яке містить тільки функцію $\varphi(t)$ та її похідні. Якщо цю функцію буде знайдено, то умови її існування і будуть умовами існування прецесій (20).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджуються умови існування рівномірних, маятникових і прецесійних рухів гіростата зі змінним гіростатичним моментом, що несе один та два ротори, під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Основні результати проведених досліджень полягають у наступному:

- одержано нові розв'язки рівнянь Кірхгофа–Пуассона задачі про рух гіростата під дією потенціальних та гіроскопічних сил, що описують рівномірне обертання гіростата у задачі про рух гіростата з одним та двома роторами;
- одержано умови існування напіврегулярних прецесій гіростата, що несе

один ротор, в окремих випадках, знайдено нові випадки залежності швидкості власного обертання від кута власного обертання;

- для напіврегулярних прецесій гіростата, що несе два ротори, зазначено загальний підхід знаходження умов існування прецесійних рухів, побудовано нові класи прецесій;
- для маятникових рухів знайдено нові розв'язки рівнянь руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. При цьому знайдено два варіанти залежності кута власного обертання тіла-носія ($\varphi(t)$): в першому варіанті $\varphi(t)$ є еліптичною функцією часу, у другому варіанті $\varphi(t)$ – елементарна функція часу;
- вивчено випадки сферичного та осесиметричного розподілу мас тіла-носія. Для них побудовано нові розв'язки рівнянь руху гіростата, що описують напіврегулярні прецесії гіростата щодо вертикалі.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Возняк А. А. О равномерных вращениях относительно наклонной оси гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк, Е. В. Миронова // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2010. – № 2. – С. 15–18.
2. Возняк А. А. Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – 24. – С. 45–57.
3. Возняк А. А. Маятниковые движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента / А. А. Возняк // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 69–78.
4. Возняк А. А. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. А. Возняк, Г. А. Котов // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2013. – № 2. – С. 27–36.
5. Возняк А. А. О равномерных движениях гиростата, несущего два вращающихся ротора, под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – 27. – С. 89–97.
6. Щетинина Е. К. Моделирование полурегулярных прецессий гиростата в случае переменного гиростатического момента / Е. К. Щетинина, А. А. Возняк // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. – Т. 6, № 4. – С. 559–568.
7. Возняк А. А. Об изоконических движениях гиростата в случае одного линейного инвариантного соотношения уравнений Кирхгофа–Пуассона / А. А. Возняк, Е. К. Щетинина // Материалы международной конференции

«Классические задачи динамики твердого тела». – Донецк, 2007. – С. 16–17.

8. Возняк А. А. Об изоконических движениях гиростата в случае линейного инвариантного соотношения уравнений Кирхгофа – Пуассона / А. А. Возняк // Thesis of conference reports of International conference «Dynamical system modeling and stability investigation». – Kyiv, 2009. – P. 55.
9. Возняк А. А. Условия существования равномерных вращений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк // Abstracts of 11-th International conference «Stability, control and rigid bodies dynamics». – Donetsk, 2011. – P. 26–27.
10. Возняк А. А. Исследование условий существования полурегулярных прецессий первого типа с переменным гиростатическим моментом / А. А. Возняк, А. В. Липлянская, А. В. Чепак // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти». – Донецьк, 2012. – С. 29-30.
11. Возняк А. А. Частные случаи интегрируемости уравнений класса Кирхгофа-Пуассона для случая переменного гиростатического момента / А. А. Возняк // Матеріали II міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти». – Донецьк, 2013. – С. 35-37.
12. Возняк А. А. Об условиях существования маятниковых движений гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. А. Возняк // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Інноваційний розвиток науки нового тисячоліття». – Ужгород, 2017. – С. 69–70.

АНОТАЦІЇ

Возняк А. О. Дослідження рівномірних, маятникових і прецесійних рухів гіростата зі змінним гіростатичним моментом. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню умов існування рівномірних, маятникових і прецесійних рухів гіростата зі змінним гіростатичним моментом, що несе один та два ротори, під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Отримано нові розв’язки рівнянь Кірхгофа – Пуассона задачі про рух гіростата під дією потенціальних та гіроскопічних сил, що описують рівномірне обертання гіростата у двох задачах: задачі про рух гіростата з одним ротором та задачі про рух гіростата з двома роторами.

Запропоновано новий підхід знаходження умов існування маятникових рухів, напіврегулярних прецесій гіростата, що несе один ротор, під дією

потенціальних і гіроскопічних сил і побудовано п'ять нових розв'язків рівнянь Кірхгофа – Пуассона у квадратурах для напіврегулярних прецесій. Ці розв'язки характеризуються тим, що кут власного обертання є або елементарною функцією часу, або еліптичною функцією часу.

Для рівнянь Кірхгофа – Пуассона розроблено загальний підхід дослідження напіврегулярних прецесій гіростата, що несе два ротори, побудовано нові класи прецесійних рухів для різних способів завдання швидкостей власного обертання.

Для випадків сферичного та осесиметричного розподілу мас тіла-носія побудовано нові розв'язки рівнянь руху гіростата, що описують напіврегулярні прецесії гіростата щодо вертикалі.

Ключові слова: гіростат, гіростатичний момент, потенціальні і гіроскопічні сили, інваріантні співвідношення, перший інтеграл, рівномірні рухи, маятникові рухи, прецесійні рухи.

Возняк А. А. Исследование равномерных, маятниковых и прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом. – Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена исследованию условий существования равномерных, маятниковых и прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом, несущего один и два ротора, под действием потенциальных и гироскопических сил.

Получены новые решения уравнений Кирхгофа – Пуассона задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, описывающие равномерное вращение гиростата в двух задачах: задачи о движении гиростата с одним ротором и задачи о движении гиростата с двумя роторами.

Предложен новый подход нахождения условий существования маятниковых движений, полурегулярных прецесий гиростата, несущего один ротор, под действием потенциальных и гироскопических сил и построено пять новых решений уравнений Кирхгофа – Пуассона в квадратурах для полурегулярных прецесий. Эти решения характеризуются тем, что угол собственного вращения является или элементарной функцией времени, или эллиптической функцией времени.

Для уравнений Кирхгофа – Пуассона разработан общий подход исследования полурегулярных прецесий гиростата, несущего два ротора, построены новые классы прецессионных движений для различных способов задания скоростей собственного вращения.

Для случаев сферического и осесимметричного распределения масс тела-носителя построены новые решения уравнений движения гиростата, описывающие полурегулярные прецессии гиростата относительно вертикали.

Ключевые слова: гиростат, гиростатический момент, потенциальные и гироскопические силы, инвариантные соотношения, первый интеграл, равномерные движения, маятниковые движения, прецессионные движения.

Vozniak A. O. Investigation of uniform, pendulum and precessional gyrostat movements with variable gyrostatic moment. – Manuscript.

Thesis submitted for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.02.01 – Theoretical mechanics. – Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of the conditions for the existence of uniform, pendulum and precessional gyrostat movements with a variable gyrostatic moment carrying one and two rotors, under the action of potential and gyroscopic forces.

New solutions of the Kirchhoff-Poisson equations for the motion of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces describing the uniform rotation of the gyrostat in two problems (the problem of the gyrostat motion with one rotor and the problem of gyrostat motion with two rotors) are obtained.

Conditions for existence both of pendulum movements and the semi-regular precessions of a gyrostat carrying one rotor and two rotors, under the action of potential and gyroscopic forces, are found. These solutions are characterized by the fact that the angle of their own rotation is either an elementary function of time or an elliptic function of time.

For the cases of spherical and axisymmetric mass distribution new solutions of the gyrostat movement equations, which describe the semi-regular precession of the gyrostat, are found.
Keywords: gyrostat, gyrostatic moment, potential and gyroscopic forces, invariant relations, first integral, uniform motion, pendulum movements, precessional movements.

Підп. до друку 30 липня 2018. Формат 60×84/16. Папір друк. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,3. Ум. друк. арк. 1,2.
Тираж 100 прим.

Друк: ФОП Маринченко С. В.
вул. Героїв АТО, 81-А, оф. 109, м. Кривий Ріг
Дніпропетровська обл., 50086
Свідоцтво про державну реєстрацію
№030567 від 19.01.2007 р.
Тел. (067) 539-66-81