ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Возняк Аліна Олександрівна

УДК 531.38

ДИСЕРТАЦІЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНОМІРНИХ, МАЯТНИКОВИХ І ПРЕЦЕСІЙНИХ РУХІВ ГІРОСТАТА ЗІ ЗМІННИМ ГІРОСТАТИЧНИМ МОМЕНТОМ

01.02.01 – теоретична механіка

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

А.О. Возняк

Науковий керівник: **Щетініна Олена Костянтинівна**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ – 2018

АНОТАЦІЯ

Возняк А. О. Дослідження рівномірних, маятникових і прецесійних рухів гіростата зі змінним гіростатичним моментом. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 «Теоретична механіка». – Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ. Захист відбудеться в Інституті математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню умов існування рівномірних, маятникових і прецесійних рухів гіростата зі змінним гіростатичним моментом, що несе один та два ротори, під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Отримано нові розв'язки рівнянь Кірхгофа – Пуассона задачі про рух гіростата під дією потенціальних та гіроскопічних сил, що описують рівномірне обертання гіростата у двох задачах: задачі про рух гіростата з одним ротором та задачі про рух гіростата з двома роторами. Для задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом $\bar{\lambda}(t)$, що несе один ротор ($\bar{\lambda}(t) = \lambda(t)\bar{\alpha}$, де $\bar{\alpha}$ – одиничний вектор, незмінно пов'язаний з тілом–носієм), отримано три розв'язки узагальнених рівнянь Кірхгофа – Пуассона. Перший розв'язок характеризується ортогональністю осі рівномірного обертання (що направлена за вектором $\bar{a} = (0,0,1)$) і осі гіростатичного моменту (що направлена за вектором $\bar{\alpha}$). Другий розв'язок визначається колінеарністю вказаних осей. Третій розв'язок отримано за умови, яка виключає умови перших двох розв'язків. Встановлено, що компоненти вектора гіростатичного моменту є тригонометричними функціями часу. Показано зв'язок знайдених результатів з результатами для варіанту дії на гіростат тільки сили тяжіння.

Отримано умови існування рівномірних обертань гіростата, що несе два ротори ($\bar{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\bar{\alpha} + \lambda_2(t)\bar{\beta}$, де $|\bar{\alpha}| = |\bar{\beta}| = 1, \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = 0$). Дослідження цих умов зведено до вивчення наступних трьох варіантів. Перший варіант відповідає випадку, коли гіростатичний момент знаходиться в площині, ортогональній осі

рівномірного обертання. У другому варіанті вектори $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ компланарні. Третій варіант характеризується загальним розташуванням векторів $\bar{\alpha}$ і $\bar{\beta}$. Встановлено, що компоненти гіростатичного моменту $\bar{\lambda}(t)$ є періодичними функціями часу з періодом $\dfrac{\pi}{\omega_0}$. Загальна властивість знайдених розв’язків полягає в тому, що при виконанні умови $B_{11}+B_{22}=0$ рівномірне обертання гіростата може відбуватися з довільною кутовою швидкістю.

Розглянуто напіврегулярні прецесії гіростата зі змінним гіростатичним моментом, що несе один ротор. Отримано умови існування цих рухів в окремих випадках: 1) $\bar{\alpha}=(0,0,1)$, $a_0=0$; 2) $\bar{\alpha}=(0,0,1)$, $a_0\neq 0$; 3) $\bar{\alpha}=(1,0,0)$, $\dot{\varphi}=\sqrt{a+b\sin\varphi}$; 4) $\bar{\alpha}=(1,0,0)$, $\dot{\varphi}=a+b\sin\varphi+c\cos\varphi$. Проведено в загальному випадку редукцію початкових рівнянь до системи двох диференціальних рівнянь другого порядку на змінну, яка характеризує кут власного обертання гіростата. Для цих рівнянь побудовано розв’язки в наступних варіантах: 1) $\alpha_1\neq 0$, $\alpha_3A_{13}-\alpha_1A_{33}=0$;2) $\alpha_1=0$, $a_0\neq 0$, $\dot{\varphi}=\varepsilon_1\sin\varphi+\varepsilon_0$; 3) $\alpha_3A_{13}-\alpha_1A_{33}=0$, $\dot{\varphi}$ – раціональна функція; 4) $m=0$ (маятникові рухи), $\bar{\alpha}=(0,0,1)$; 5) $m=0$, $\bar{\alpha}=(\alpha_1,0,\alpha_3)$; 6) $m\neq 0$, $\bar{\alpha}=(0,0,1)$. Ці розв’язки характеризуються тим, що кут власного обертання є або елементарною функцією часу, або еліптичною функцією часу.

Розглянуто напіврегулярні прецесії гіростата у випадку, коли швидкість прецесії тіла–носія постійна, гіростат несе два ротори. Отримано три диференціальні рівняння на функції $\lambda_1(t),\lambda_2(t)$ (компоненти гіростатичного моменту) і $\varphi(t)$ (кут власного обертання тіла–носія).

Розглянуто маятникові рухи $(\bar{\omega}=\dot{\varphi}\bar{a})$. Вказано загальний метод дослідження і знайдено нові розв’язки рівнянь руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. При цьому знайдено два варіанти залежності $\varphi(t)$: в першому варіанті $\varphi(t)$ – еліптична функція часу, в другому варіанті $\varphi(t)$ – елементарна функція часу.

Розглянуто прецесії гіростата першого типу в загальному вигляді. Вказано випадок, коли $\dot{\varphi}(t)$ є лінійною функцією від $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$. Для нього отримано загальні умови існування, які записано у вигляді системи п'ятнадцяти рівнянь відносно п'ятнадцяти параметрів. Окремо вивчено випадки сферичного і осесиметричного розподілу мас тіла–носія. Для них побудовано нові розв’язки рівнянь руху гіростата, що описують напіврегулярні прецесії гіростата відносно вертикалі.

Ключові слова: гіростат, гіростатичний момент, потенціальні і гіроскопічні сили, інваріантні співвідношення, перший інтеграл, рівномірні рухи, маятникові рухи, прецесійні рухи.

ABSTRACT

Voznyak A. O. Investigation of uniform, pendulum and precessional gyrostat movements with variable gyrostatic moment. –Qualifying scientific work on the right of manuscript.

Thesis submitted for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.02.01 «Theoretical mechanics». – Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Slovyansk. The defense will be held at the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of the conditions for the existence of uniform, pendulum and precessional gyrostat movements with a variable gyrostatic moment carrying one and two rotors, under the action of potential and gyroscopic forces.

New solutions of the Kirchhoff-Poisson equations for the gyrostat motion under the action of potential and gyroscopic forces describing the uniform rotation of the gyrostat in two problems are obtained: the problem of the gyrostat motion with one rotor and the problem of the gyrostat motion with two rotors. For the problem of the gyrostat motion with a variable gyrostatic moment $\bar{\lambda}(t)$ carrying one rotor ($\bar{\lambda}(t) = \lambda(t)\bar{\alpha}$, where $\bar{\alpha}$ is a unit vector of the carrier body), three solutions of the generalized Kirchhoff-Poisson equations are obtained. The first solution is characterized by the orthogonality of the axis of uniform rotation (directed by the vector $\bar{a} = (0,0,1)$) and the axis of the gyrostatic moment (directed by the vector $\bar{\alpha}$). The second solution is determined by the collinearity of the indicated axes. The third solution is obtained under the condition that excludes the conditions of the first two solutions. It is established that components of the vector of the gyrostatic moment are trigonometric functions of time. The relationship of the achieved results with the results for the gyrostat motion only under the action of gravity is shown.

Conditions of existence of uniform rotations of a gyrostat carrying two rotors ($\bar{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\bar{\alpha} + \lambda_2(t)\bar{\beta}$, where $|\bar{\alpha}| = |\bar{\beta}| = 1, \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = 0$) are obtained. The study of these

conditions is reduced to the study of the following three variants. The first variant corresponds to the case when the gyrostatic moment lies in a plane orthogonal axis of uniform rotation. In the second variant, the vectors $\bar{a}$, $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ are coplanar. The third variant is characterized by the general arrangement of vectors $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$. It was established that components of the gyrostatic moment are periodic functions of time with period $\frac{\pi}{\omega_0}$. The general property of the achieved solutions is found (if $B_{11} + B_{22} = 0$ than the uniform rotation of the gyrostat can occur at arbitrary angular velocity).

The semi-regular precession of a gyrostat with a variable gyrostatic moment carrying one rotor is considered. Conditions for the existence of these motions are obtained in some cases: 1) $\bar{\alpha} = (0,0,1)$, $a_0 = 0$; 2) $\bar{\alpha} = (0,0,1)$, $a_0 \neq 0$; 3) $\bar{\alpha} = (1,0,0)$, $\dot{\varphi} = \sqrt{a + b\sin\varphi}$; 4) $\bar{\alpha} = (1,0,0)$, $\dot{\varphi} = a + b\sin\varphi + c\cos\varphi$. In the general case, the reduction of the initial equations to the system of two differential equations of the second order on the variable which characterizes the angle of its own rotation of the gyrostat is carried out. For these equations, solutions are constructed in the following variants: 1) $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33} = 0$; 2) $\alpha_1 = 0$, $a_0 \neq 0$, $\dot{\varphi} = \varepsilon_1 \sin\varphi + \varepsilon_0$; 3) $\alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33} = 0$, $\dot{\varphi}$ – rational function; 4) $m = 0$ (pendulum movements), $\bar{\alpha} = (0,0,1)$; 5) $m = 0$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$; 6) $m \neq 0$, $\bar{\alpha} = (0,0,1)$. These solutions are characterized by the fact that the angle of their own rotation is either an elementary function of time or an elliptic function of time.

The semi-regular precessions of the gyrostat are considered in the case when the precision velocity of the carrier body is constant, the gyrostat carries two rotors. Three differential equations on the functions $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ (components of the gyrostatic moment) and $\varphi(t)$ (the angle of the own rotation of the carrier body) are obtained.

The pendulum motion is considered $(\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{a})$. The general method of research is indicated and new solutions of the gyrostat movement equations under the action of potential and gyroscopic forces are found. In these cases, the function $\varphi(t)$ is either an elementary function of time or an elliptic function of time.

The precession of a gyrostat of the first type in general form is considered. The case when $\dot{\varphi}(t)$ is a linear function of $\sin\varphi$ and $\cos\varphi$ is indicated and general conditions of existence are obtained. In the cases of spherical and axisymmetric mass distribution new solutions of the gyrostat movement equations, which describe the semi-regular precession of the gyrostat, are found.

Keywords: gyrostat, gyrostatic moment, potential and gyroscopic forces, invariant relations, first integral, uniform motion, pendulum movements, precessional movements.

Список публікацій здобувача:

1. Возняк А. А. О равномерных вращениях относительно наклонной оси гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк, Е. В. Миронова // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2010. – № 2. – С. 15–18.
2. Возняк А. А. Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – 24. – С. 45–57.
3. Возняк А. А. Маятниковые движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента / А. А. Возняк // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 69–78.
4. Возняк А. А. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. А. Возняк, Г. А. Котов // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2013. – № 2. – С. 27–36.
5. Возняк А. А. О равномерных движениях гиростата, несущего два вращающихся ротора, под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – 27. – С. 89–97.
6. Щетинина Е. К. Моделирование полурегулярных прецессий гиростата в случае переменного гиростатического момента / Е. К. Щетинина, А. А. Возняк // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. –Т. 6, № 4. – С. 559–568.
7. Возняк А. А. Об изоконических движениях гиростата в случае одного линейного инвариантного соотношения уравнений Кирхгофа–Пуассона / А. А. Возняк, Е. К. Щетинина // Материалы международной конференции «Классические задачи динамики твердого тела». – Донецк, 2007. – С. 16–17.

8. Возняк А. А. Об изоконических движениях гиростата в случае линейного инвариантного соотношения уравнений Кирхгофа – Пуассона / А. А. Возняк // Thesis of conference reports of International conference «Dynamical system modeling and stability investigation». – Kyiv, 2009. – P. 55.
9. Возняк А. А. Условия существования равномерных вращений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк // Abstracts of 11-th International conference «Stability, control and rigid bodies dynamics». – Donetsk, 2011. – P. 26–27.
10. Возняк А. А. Исследование условий существования полурегулярных прецессий первого типа с переменным гиростатическим моментом / А. А. Возняк, А. В. Липлянская, А. В. Чепак // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти». – Донецьк, 2012. – С. 29-30.
11. Возняк А. А. Частные случаи интегрируемости уравнений класса Кирхгофа-Пуассона для случая переменного гиростатического момента / А. А. Возняк // Матеріали II міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти». – Донецьк, 2013. – С. 35-37.
12. Возняк А. А. Об условиях существования маятниковых движений гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. А. Возняк // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Інноваційний розвиток науки нового тисячоліття». – Ужгород, 2017. – С. 69–70.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Моделювання руху сучасних технічних конструкцій, деформації яких нехтовно малі (роботи, маніпулятори, супутники та інші об'єкти), засноване на моделях систем зв'язаних твердих тіл. До них, перш за все, належать абсолютно тверде тіло, гіростат з постійним і змінним гіростатичним моментом. За допомогою методів динаміки систем зв'язаних твердих тіл пояснено багато технічних властивостей у русі тіл (стійкість за Маієвським, рух кельтського каменя, ефект космонавта Джанібекова та інші).

Значний внесок у динаміку твердого тіла на початковому етапі її розвитку внесли Л. Ейлер, Ж. Даламбер, Л. Пуансо, С. Пуассон, Г. Кірхгоф та інші. Класична задача про рух важкого твердого тіла з нерухомою точкою розвивалась у декількох напрямках. Перший напрямок належав до моделювання руху твердого тіла в полях складної структури (Г. Кірхгоф, А. Клебш, В. А. Стєклов, С. О. Чаплигін, О. М. Ляпунов, В. В. Румянцев, П.В. Харламов). Другий напрямок був присвячений дослідженню геометричних та аналітичних властивостей руху гіростата з постійним гіростатичним моментом (У. Томсон, А. Грей, М.Є. Жуковський, П. В. Харламов). Найбільш загальне визначення гіростата, як системи зв'язаних твердих тіл, запропонував П. В. Харламов. Третій напрямок у динаміці систем зв'язаних твердих тіл розвивається інтенсивно в останній час, хоча поняття гіростата зі змінним гіростатичним моментом було введено достатньо давно (М. Є. Жуковський, В. В. Румянцев, П. В. Харламов). Цьому напрямку присвячені роботи Г.В. Горра, О.В. Мазнєва, О.К. Щетініної, І. М. Гашененка, Г. О. Котова, О. В. Волкової і автора даної дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження в рамках дисертаційної роботи проводилися у відповідності з планами науково-дослідної роботи кафедри вищої та прикладної математики ДонНУЕТ ім. М. Туган-

Барановського за наступними держбюджетними темами: «Якісне дослідження лінійних інваріантних співвідношень диференціальних рівнянь динаміки твердого тіла, що має нерухому точку» (№ 0108U001661, Д-2002-3, 2002–2004 рр.); «Дослідження умов існування прецесійних і ізоконічних рухів гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил» (№ 0108U001662, Д-2005-9, 01.01.2005 – 31.12.2007). Тематику дисертації пов'язано з держбюджетною темою відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України «Методи дослідження нелінійної динаміки складних механічних систем і математичне моделювання систем взаємодіючих твердих тіл» (№ 0111U000484, III-6-11 – 01.01.2011 – 31.12.2014).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження прецесійних рухів гіростата, що несе один та два ротори, під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Об'єктом дослідження служать диференціальні рівняння класу Кірхгофа–Пуассона, що описують рухи твердого тіла у суперпозиції трьох полів: центрального ньютонівського поля, електричного і магнітного полів.

Предметом дослідження є вивчення умов існування прецесійних рухів гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Методи дослідження. У дисертації використовується метод інваріантних співвідношень побудови розв'язків рівняння динаміки гіростата, напівзворотний метод знаходження розв'язків диференціальних рівнянь, методика завдання регулярних, напіврегулярних прецесій гіростата.

Визначена мета зумовлює виконання таких задач:

- редукцію рівнянь Кірхгофа–Пуассона для наступних рухів: регулярних прецесій, напіврегулярних прецесій, прецесійно-ізоконічних рухів;
- дослідження умов існування рівномірних обертань гіростата, що несе один ротор;

- дослідження умов існування рівномірних обертань гіростата, що несе два ротори;
- аналіз існування розв’язків рівнянь Кірхгофа–Пуассона для напіврегулярних прецесійних рухів гіростата з одним ротором;
- розробку метода дослідження напіврегулярних прецесій гіростата, який несе два ротори;
- аналіз умов існування напіврегулярних прецесій гіростата для редукованих рівнянь;
- вивчення умов на розподіл мас гіростата для різних класів прецесійних рухів.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

- для задачі про рух гіростата під дією потенціальних та гіроскопічних сил отримано нові розв’язки рівнянь Кірхгофа – Пуассона, що описують рівномірне обертання гіростата в двох задачах: задачі про рух гіростата з одним ротором; задачі про рух гіростата з двома роторами;
- для задачі про рух гіростата під дією потенціальних та гіроскопічних сил запропоновано новий метод знаходження умов існування маятникових рухів, напіврегулярних прецесій гіростата, що несе один ротор;
- для напіврегулярних прецесій побудовано п’ять нових розв’язків рівнянь Кірхгофа – Пуассона, що характеризуються наступними властивостями: кут власного обертання є або елементарною функцією часу, або еліптичною функцією часу;
- досліджено вироджені класи напіврегулярних прецесій гіростата, які характеризуються маятниковими рухами або рухами, що існують при додаткових обмеженнях на параметри задачі;
- для рівнянь Кірхгофа–Пуассона розроблено загальний метод дослідження напіврегулярних прецесій гіростата, що несе два ротори;
- побудовано нові класи прецесійних рухів у задачі п. 5 для різних способів

завдання швидкостей власного обертання. Розглянуто випадок осесиметричного гіростата;

- одержано залежності гіростатичного моменту від часу, які можуть знайти застосування в задачах керування механічними системами класу гіростат.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи можуть бути використані при розробці нових законів керування рухами, які характеризуються прецесійними рухами, в Інституті механіки НАН України, Інституті математики НАН України та інших установах. Теоретичні висновки можуть бути використані при читанні спеціальних курсів з теоретичної механіки і теорії керування у ВНЗ України.

Особистий внесок здобувача у спільних роботах. За темою дисертації опубліковано 6 робіт. З них 3 роботи написані самостійно, а 3 – у співавторстві. У роботі [15] авторові дисертації належить одержання нових розв’язків, а О. В. Мироновій – аналіз умов існування. В роботі [18] авторові дисертації належить розробка нового методу прецесійних рухів, а Г. О. Котову належить аналіз окремих випадків маятникових рухів. У роботі [20] авторові дисертації належить розробка методу визначення умов існування і розгляд випадку, коли розв’язок виражається в еліптичних функціях, а О. К. Щетініній належить результат з дослідження прецесійних рухів у випадку лінійної залежності швидкості власного обертання.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на наступних конференціях: Міжнародній конференції «Класичні задачі динаміки твердого тіла» (Донецьк: ІПММ НАН України, 2007); Міжнародній конференції «Dynamical system modeling and stability investigation» (Київ, 2009); XI Міжнародній конференції «Stability, control and rigid bodies dynamics» (Донецьк: ІПММ НАН України, 2011); Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти» (Донецьк, 2012); II Міжнародній науково-практичній конференції «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти» (Донецьк, 2013); Міжнародній науково-практичній конференції «Інноваційний розвиток науки нового тисячоліття» (Ужгород, 2017).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася на семінарі відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України за участю кафедри математики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет» (2018 р.) і семінарі відділу математичних проблем механіки та теорії керування Інституту математики НАН України (2018 р.).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано в статтях [15–19] у наукових періодичних фахових виданнях, [20] – у журналі, що індексується у наукометричній базі РІНЦ і тезах доповідей [21–26] на міжнародних наукових конференціях.

Дисертація складається зі вступу, основної частини з п’яти розділів, висновків та списку використаної літератури. Список використаної літератури складається з 191 джерела і розташований на 21 сторінці. Загальний обсяг роботи становить 143 сторінки.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Динаміка твердого тіла і гіростата є складовою частиною аналітичної механіки, базовими областями математичного моделювання складних механічних систем (роботів, гіроскопічних приладів і інших технічних об'єктів), які не піддаються великим деформаціям. Ці моделі використовуються і в задачах дослідження небесних тіл. Так, наприклад, Ж. Д'Аламбер [167], розглядаючи проблему прецесії і нутації осі Землі, отримав рівняння руху вільного твердого тіла. Відомо, що умова Маєвського стійкості руху ракет, що встановлена шляхом моделювання, використовується на практиці проектування таких систем.

Класичну динаміку твердого тіла створив Л. Ейлер [170, 171]. Він не лише ввів основні кінематичні і динамічні характеристики руху, але й отримав рівняння руху абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою під дією довільного класу сил і моментів.

Ж. Лагранж [90] запропонував форму рівнянь руху тіла, яка ґрунтується на узагальнених координатах. Ним отриманий перший інтеграл рівнянь Эйлера–Пуассона для динаміки симетричного твердого тіла.

Динаміку твердого тіла і гіростата умовно можна розбити на три частини: динаміка одного твердого тіла, динаміка гіростата з постійним гіростатичним моментом, динаміка гіростата зі змінним гіростатичним моментом.

Зупинимося на початку на динаміці одного твердого тіла з нерухомою точкою. Великий внесок у її розвиток внесли Л. Ейлер, Ж. Лагранж, С. Пуассон, К. Якобі, Г. Дарбу, В. Гесс, С. О. Чаплигін, С. В. Ковалевська, М. Є. Жуковський, В. А. Стєклов, О. М. Ляпунов, Д. Н. Горячев, Г. Г. Аппельрот, Д. Гріолі, П. В. Харламов і багато інших учених (див. оглядові монографії [2, 3, 67, 68, 72, 73, 85, 86, 93, 128, 129, 138, 140 – 143, 160, 161, 167 – 173, 176, 177, 185]).

Рівняння Эйлера – Пуассона, які описують рух абсолютно твердого тіла під дією сили тяжіння, мають шостий порядок і допускають три перші інтеграли. Згідно теорії К. Якобі [176, 177] для їх інтегрування досить знайти один додатковий інтеграл. Такий додатковий інтеграл існує в трьох випадках: у випадку Л. Ейлера, у випадку Ж. Лагранжа, у випадку С. В. Ковалевської.

С. В. Ковалевська розглядала розв’язки рівнянь Эйлера–Пуассона в припущенні, що основні змінні задачі є однозначними функціями комплексного часу, які не мають інших особливостей, окрім полюсів. Вона показала, що в загальному випадку рівняння Эйлера – Пуассона не мають таких розв’язків з п'ятьма довільними постійними за винятком випадків Ейлера, Лагранжа і випадку, який тепер називають випадком Ковалевської. Результати С. В. Ковалевської доповнені Г. Г. Аппельротом [3, 4].

Підхід С. В. Ковалевської має тісний зв'язок із задачею про знаходження додаткового алгебраїчного інтеграла.

О. М. Ляпунов [93] досліджував варіант, коли однозначні розв’язки мають особливі точки класу істотно особливих точок. Доповнення О. М. Ляпунова [93] не призвело до відкриття нових випадків алгебраїчних інтегралів.

Умови існування перших інтегралів рівнянь Эйлера–Пуассона вивчали Е. Гюссон [174, 175], Р. Ліувілль [181], А. Пуанкаре [112], В.В. Козлов [119] та інші.

Наприклад, Е. Гюссон [174, 175] довів два твердження: раціональний перший інтеграл рівнянь Эйлера–Пуассона існує тільки для твердих тіл, що мають динамічну симетрію; поліноміальний перший інтеграл існує тільки у випадках Ейлера, Лагранжа і Ковалевської. Р. Ліувілль [181] вважав, що існує перший алгебраїчний інтеграл за наявності тільки рівності моментів інерції. Він довів, що тоді цей перший інтеграл має вигляд однорідного многочлена.

Випадок, коли перший інтеграл є аналітичним по деякому малому параметру, вивчали А. Пуанкаре [112] і В. В. Козлов [119]. Нових перших інтегралів рівнянь Эйлера – Пуассона вони не виявили.

У зв'язку з тим, що рівняння Эйлера – Пуассона в загальному випадку не інтегруються в квадратурі (С. Л. Зіглін [74, 75]), то актуальною задачею вивчення цих рівнянь стала задача пошуку окремих розв’язків цих рівнянь. Усі вони описані в монографії [50]. Згідно з відміченої в ній інформації, перерахуємо окремі розв’язки рівнянь Эйлера – Пуассона: стаціонарні розв’язки О. Штауде [186], розв’язок В. Гесса [173] (залежить від чотирьох довільних постійних), розв’язок Д. Н. Горячева – С. О. Чаплигіна [68, 162] (залежить від чотирьох довільних постійних), розв’язок Б. К. Млодзеєвського [110], розв’язок Д.К. Бобильова – В. А. Стєклова [5, 128], розв’язок В. А. Стєклова [129], Н. Ковалевського [179], розв’язок Д. Н. Горячева [67], розв’язок С. О. Чаплигіна [160], розв’язки Д. Гріолі [172], два розв’язки А. І. Докшевича [70], розв’язки Б. І. Коносевича – Є. В. Поздняковича [88, 89].

Розроблена К. Якобі [176, 177] теорія еліптичних функцій дозволила у більшості перерахованих розв’язків отримати залежності основних змінних від часу.

При отриманні цих розв’язків, як правило, були використані або спеціальні форми рівнянь руху, або напівзворотний метод побудови розв’язків звичайних диференціальних рівнянь.

Перейдемо до розгляду задачі про рух гіростата з постійним гіростатичним моментом. Така модель була запропонована в статтях [72, 119, 143, 144]. Найбільш загальна модель гіростата дана П. В. Харламовим [144], оскільки в ній несене тіло обертається відносно осі закріплення, що містить його центр тяжіння, і є головною віссю, а моменти інерції відносно інших осей рівні. Отже в моделі П. В. Харламова не потрібно повної геометричної симетрії несеного тіла.

Рівняння руху гіростата під дією сили тяжіння, як і рівняння руху абсолютно твердого тіла, допускають три перші інтеграли і тому для них можна застосувати теорію Якобі [175, 176].

У задачі про рух гіростата побудовані наступні розв’язки: М. Є. Жуковського [72] (узагальнення розв’язків Л. Ейлера), Х. М. Яхьі [190] (узагальнення розв’язків С. В. Ковалевської), Л. Н. Сретенського [124, 125] (узагальнення розв’язків В. Гесса і Д. Н. Горячева – С. О. Чаплигіна), п'ять розв’язків П. В. Харламова [157], (перший розв’язок є узагальненням розв’язку О. Штауде, другий – розв’язок Д. К. Бобильова – В. А. Стєклова, третій – розв’язок В. А. Стєклова, четвертий – розв’язок Н. Ковалевського, п'ятий – розв’язок, отриманий за умов

С. В. Ковалевської), три розв’язки Є. І. Харламової [148, 150, 153], розв’язок А. І. Докшевича [70], розв’язок П. В. Харламова – Л. М. Ковальової [147], розв’язок Є. І. Харламової і П. В. Харламова [157], три розв’язки Є. І. Харламової і Г. В. Мозалевської [157].

Успіх в отриманні цих розв’язків пов'язаний з двома обставинами. Перше з них обумовлено отриманням нових форм рівнянь руху (А. Д. Бельмович [4], П. В. Харламов [138, 143], А. І. Докшевич [95], Є. І. Харламова [151, 152]). Як показав П. В. Харламов, у введеній ним спеціальній системі (система, одна з осей якої містить центр тяжіння) рівняння руху гіростата під дією сили тяжіння можна привести до двох рівнянь другого порядку. Є. І. Харламова [152] отримала тільки одно рівняння динаміки гіростата (воно носить інтегро–диференціальну форму). Друга обставина, яка успішно позначилася на знаходженні нових розв’язків рівнянь руху гіростата, пов'язана з методом інваріантних співвідношень (ІС). Існує три підходи у визначенні ІС (А. Пуанкаре [112], Т. Леві–Чивіта [91, 180], П. В. Харламов [145, 146]). З точки зору практичного застосування найбільш вживаним став метод ІС, запропонований П.В. Харламовим.

У книзі [50] метод ІС розроблений для випадку системи рівнянь, праві частини яких залежать від часу. Він особливо ефективний для задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом.

Розглянемо третю частину динаміки гіростата : задачу про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом. Цій задачі присвячені роботи [1, 72, 119, 144, 182, 183]. Як відмічено в монографії Г. В. Горра і О.М. Ковальова [50], уперше поняття «гіростат» зустрічається в роботах В. Томсона [187, 188], а в роботі Ж. Ліувілля [182] уперше виписані рівняння руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом. М. Є. Жуковський, розглядаючи рух тіла з рідиною, яка є ідеальною і цілком заповнює порожнини тіла, також вивів рівняння руху гіростата. Відмінність від рівнянь Ж. Ліувілля полягає тільки в механічній інтерпретації параметрів, що входять в праві частини рівнянь.

У дисертації розглядаються моделі гіростата, запропоновані П. В. Харламовим [144]. Передбачається, що несені тіла можуть здійснювати два режими обертання.

Характерною відмінністю рівнянь руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом від рівнянь руху являється властивість, яка полягає в тому, що ці рівняння не допускають інтеграла енергії. Це означає, що для них теорія останнього множника Якобі непридатна. Тому для побудови розв'язків рівнянь руху неавтономного гіростата необхідно застосовувати метод ІС [50].

Для задачі про рух неавтономного гіростата під дією сили тяжіння вивчені рівномірні обертання (Е. І. Дружинін [71], О. С. Волкова [29], Л. М. Ковальова, Є. В. Позднякович [84]), маятникові і процесійні рухи (І. М. Гашененко, О. С. Волкова [32]), інваріантні співвідношення різних видів (О. С. Волкова [27, 33, 34], Г. В. Горр, [58, 60], А. В. Мазнєв [95 – 101]). Найцікавіші результати отримані в узагальнених задачах динаміки гіростата зі змінним гіростатичним моментом: у задачі про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил і в задачі про рух гіростата в магнітному полі з урахуванням ефекту Барнетта – Лондона.

Розглянемо геометричні методи в динаміці гіростата. Вони можуть бути застосовані в усіх трьох частинах динаміки гіростата, обговорених вище. Початок геометричним методам поклав Л. Пуансо [184]. Запропоноване ним наочне уявлення про рух тіла в рішенні Л. Ейлера полягало в тому, що рух представлений коченням еліпсоїда інерції по нерухомій в просторі площині. Л. Пуансо сформулював загальну теорему: рух твердого тіла з нерухомою точкою можна представити коченням без ковзання рухливого годографа вектору кутової швидкості по нерухомому годографу.

М. Є. Жуковський для геометричного аналізу руху тіла використав годографи кінетичного моменту [72]. Оскільки для побудови повного розв'язку (розв'язок, який містить в собі не лише отримання аналітичного розв'язку, але і аналіз властивостей руху гіростата) потрібні були рівняння, які б мали компактну форму і залежали від основних змінних задачі, то П. В. Харламов вивів рівняння нерухомого годографа, що відповідають вказаним властивостям [140]. Ці рівняння дозволили провести значні дослідження властивостей руху гіростата в загальних і окремих випадках інтегрованості рівнянь руху. Так наприклад О. М. Ковальов [76

– 80] вивчив рухи тіла в рішенні Гесса і рух гіростата в рішенні Сретенського. Він не лише використав методологію, вживану П.В. Харламовым в аналізі розв'язків Бобильова – Стєклова, С. О. Чаплигіна, Д. Н. Горячева, але і теорію граничних циклів автономних диференціальних рівнянь. Геометричному тлумаченню рухів гіростата присвячені роботи Г. В. Горра і О. О. Ілюхіна [51, 52], М. П. Харламова [133 – 137], А. П. Харламова [131] і інших. І. М. Гашененко [35 – 38, 40] у своїх роботах використав не лише метод годографів, але і метод топологічного аналізу інтегральних різноманіть рівнянь руху. Вивчення рухів в конкретних розв'язках провели Є. І. Харламова, Г. В. Мозалевська [149, 156, 157], Б. І. Коносевич і Є. В. Позднякович [89] і багато інших авторів (результати їх викладені в монографіях [39, 54]).

Вивчення властивостей руху гіростата в конкретних розв'язках дає можливість встановити локальні властивості інтегрального різноманіття рівнянь руху гіростата. Для набуття загальних властивостей руху в динаміці твердого тіла застосовується теорія обурень. Г. В. Горр і його учні [12, 55, 62] для вивчення інтегрального різноманіття рівнянь руху використали перший метод О. М. Ляпунова. За його допомогою досліджені асимптотично–рівномірні [53, 106], асимптотично–маятникові [7 – 13], асимптотично–процесійні [48] і інші рухи. Результати по вивченню околів окремих розв'язків рівнянь динаміки обговорені в монографіях [39, 55].

Значний інтерес в динаміці твердого тіла і гіростата представляють задачі, які є узагальненням класичної задачі про рух важкого твердого тіла. Тут розглянемо деякі такі задачі. Для їх опису важливі математичні узагальнення і механічні інтерпретації. Одною з перших задач, яка є узагальненням класичного задачі, є задача про рух твердого тіла в центральному ньютонівському полі. Рівняння руху для цієї задачі у разі нерухомого центру мас отримані Л. Ейлером. Особливе місце в узагальнених задачах займає задача про рух твердого тіла в ідеальній нестискуваній рідині. Це пояснюється тим, що диференціальні рівняння руху тіла в рідині невиродженим лінійним перетворенням можуть бути приведені до рівнянь руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Потенціальні сили обумовлені ньютонівською, магнітною і кулонівською дією на заряджений і намагнічений гіростат, гіроскопічні сили характеризуються лоренцевыми силами, які виникають при русі електронів в магнітному полі. Вказані вище аналогії показали В. А. Стєклов [126], П. В. Харламов [139], Х. М. Яхья [190, 191].

Г. Кірхгоф [178] за допомогою певних припущень рух тіла в рідині описав за допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь.

А. Клебш [165, 166] запропонував нову форму рівнянь руху тіла в рідині.

Надалі рівняння руху тіла в рідині в загальніших випадках вказували В.А. Стєклов [126], С. О. Чаплигін [158, 159], П. В. Харламов [139]. Зараз ці рівняння в науковій літературі називаються рівняннями класу Г. Кірхгофа.

Для рівнянь Г. Кірхгофа відомі шість випадків існування додаткового першого інтеграла : випадок Г. Кірхгофа [178], граничний випадок А. Клебша, випадок А. Клебша [165, 166], випадок В. А. Стєклова [127], випадок О. М. Ляпунова [92], випадок В. В. Соколова [123]. Усі ці розв'язки відносяться до варіанту, коли два характерні параметри рівнянь Кірхгофа дорівнюють нулю (позначимо їх $\overline{\lambda}$ і $\overline{s}$).

С. О. Чаплигін вивчав задачі про рух тіла в рідині в припущенні $\overline{\lambda}=\overline{0},\ \overline{s}\neq\overline{0}$ [158, 159]. Він отримав перший інтеграл рівнянь Кірхгофа – Пуассона на інваріантній множині, досліджував умови існування одного, двох і трьох інваріантних співвідношень. С. О. Чаплигін запропонував тлумачення руху тіла в рідині для розв'язку А. Клебша (рух тіла він представив коченням без ковзання гіперболоїда по деякій гвинтовій поверхні).

П. В. Харламов [139] розглянув варіант $\overline{\lambda}\neq\overline{0},\ \overline{s}\neq\overline{0}$, він узагальнив розв'язки Г. Кірхгофа, В. А. Стєклова, О. М. Ляпунова і деякі результати С. О. Чаплигіна.

В. Н. Рубановський [113, 115, 116] розвинув дослідження перших інтегралів рівнянь Кірхгофа – Пуассона.

У роботах [111, 116] розглянуті умови існування квадратичних перших інтегралів рівнянь руху тіла в рідині. Нових випадків перших інтегралів отримано не було.

У даній дисертації рівняння класу Кірхгофа – Пуассона розглядаються за допомогою підходу, який прийнятий в роботі [50]. Це дозволяє встановлювати зв'язок результатів, отриманих в класичній задачі і в задачі про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Наприклад, результати інтегрування рівнянь класу Кірхгофа – Пуассона у разі одного інваріантного співвідношення (Г. В. Горр, О. К. Узбек [64], О. К. Узбек, К. А. Данилейко [130]), двох лінійних інваріантних співвідношень (С.В. Скрипник [122]), трьох лінійних інваріантних співвідношень (Г. В. Горр, О. К. Узбек [63]) істотно відрізняються від результатів по вивченню ІС для рівнянь Ейлера – Пуассона.

Зупинимося на аналізі робіт, присвячених вивченню інших узагальнених задач динаміки твердого тіла і гіростата. Оскільки гіростат є простою моделлю системи зв'язаних твердих тіл, то актуальними є задачі про рух системи зв'язаних твердих тел. Загальні рівняння руху системи зв'язаних твердих тіл класу «дерева» вивели П. В. Харламов [144] і Й. Віттенбург [14].

На основі цих рівнянь А. Я. Савченко і його учні І. А. Болграбська, Г. А. Кононихін [121] досліджували умови існування і стійкості деяких важливих типів систем зв’язаних твердих тел. Їх результати знайшли застосування в додатках при моделюванні рухів об'єктів сучасної техніки [6]. Особливість рівнянь руху системи зв’язаних твердих тіл полягає в тому, що навіть в простому випадку дії сили тяжіння, знаходження додаткового першого інтеграла не дозволяє звести інтегрування рівнянь руху до квадратури. Тому у більшості наукових статей розглядається тільки стійкість рівномірних рухів системи зв’язаних твердих тел. В динаміці гіростата і динаміці систем зв’язаних твердих тіл проблеми стійкості вивчали В. В. Рум'янцев [117, 118], В.Н. Рубановський [114], А. П. Маркеєв [107 – 109], А. Я. Савченко [120], О. М. Ковальов [83] і багато інших авторів (див. оглядову монографію [121]).

Зупинимося на результатах, отриманих в дослідженні прецесійних рухів гіростата. Як показано в оглядових монографіях [50, 54], ці рухи є найбільш поширеними в техніці. Регулярна прецесія гіроскопа Лагранжа (геометрично і фізично симетричного тіла) служить наочним прикладом прецесійного руху тіла.

У динаміці одного важкого твердого тіла найбільш суттєві результати отримали Д. Гріолі [172] і Г. В. Горр [41 – 47]. Д. Гріолі відкрив новий розв’язок рівнянь Ейлера – Пуассона, який характеризується регулярною прецесією гіроскопа відносно похилої осі. Він показав також нестійкість цій прецесії по Ляпунову [94]. Окрім цього Д. Гріолі ввів поняття узагальненої прецесії і вивчив їх існування в полях складної структури.

Г. В. Горр і його учні [61, 65, 163, 164] отримали численні класи прецесій в узагальнених задачах динаміки (задачах про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил, задачах про рух гіростата в магнітному полі з урахуванням ефекту Барнетта – Лондона і задачах про рух системи зв’язаних твердих тіл). Ним введений важливий клас рухів – прецесійно–ізоконічні рухи, які окрім умови прецесійності характеризуються і властивістю ізоконічності (рухливий і нерухомий годографи кутової швидкості симетричні один одному відносно дотичної до них площини, яка містить нерухому точку).

Оскільки прецесійні рухи відносяться до кінематики гіростата, то їх аналіз актуальний як в задачі про рух гіростата з постійним гіростатичним моментом, так і в задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом. Другій задачі присвячені дослідження автора цієї дисертації. Вони відображені в роботах [15 – 27]. Їх новизна полягає в тому, що отримані результати не мають відповідних аналогів в класичній задачі про рух гіростата з постійним гіростатичним моментом.

РОЗДІЛ 2
МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО РУХ ГІРОСТАТА ЗІ ЗМІННИМ ГІРОСТАТИЧНИМ МОМЕНТОМ

2.1. Рівняння Эйлера–Пуассона. Розглянемо задачу про рух важкого твердого тіла S_0 з нерухомою точкою O. Зв'яжемо з тілом S_0 рухливу систему координат O_{xyz} з одиничними векторами $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$, у нерухомому просторі введемо систему $O_{\xi\eta\zeta}$ і одиничні вектори осей позначимо через $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$. Припустимо, що на тіло S_0 діє сила тяжіння $\overline{P} = mg\bar{v}$ $(\bar{v} = \bar{i}_3)$, де m – маса тіла, g – прискорення вільного падіння. Якщо через C_0 позначити центр тяжіння, то вектор $\bar{r}_c = \overline{OC}_0$, а одиничний вектор осі, що містить центр тяжіння має вигляд: $\bar{e} = \dfrac{\bar{r}_c}{\left|\overline{OC}_0\right|}$. Для опису руху S_0 приймемо такі позначення: M – довільна точка S_0, $\bar{r} = \overline{OM}$, $\bar{v}$ – швидкість точки M, $\bar{\omega}$ – кутова швидкість тіла S_0. Тоді очевидні співвідношення

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \ \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{2.1}$$

Нехай $\bar{x}$ момент кількості руху тіла відносно точки O, ρ – щільність тіла S_0. За визначенням маємо [144]

$$\bar{x} = \int_{S_0} (\bar{r} \times \bar{v}) dm = A\bar{\omega}, \tag{2.2}$$

де A – тензор інерції.

Формулу (2.2) запишемо в рухливій системі координат. Оскільки

$$\bar{r} = x\bar{\varepsilon}_1 + y\bar{\varepsilon}_2 + z\bar{\varepsilon}_3, \ \bar{\omega} = \omega_1\bar{\varepsilon}_1 + \omega_2\bar{\varepsilon}_2 + \omega_3\bar{\varepsilon}_3, \ \bar{x} = x_1\bar{\varepsilon}_1 + x_2\bar{\varepsilon}_2 + x_3\bar{\varepsilon}_3, \tag{2.3}$$

тоді з (2.2) слідує

$$x_1 = A_{11}\omega_1 + A_{12}\omega_2 + A_{13}\omega_3, \ x_2 = A_{12}\omega_1 + A_{22}\omega_2 + A_{23}\omega_3, \ x_3 = A_{13}\omega_1 + A_{23}\omega_2 + A_{33}\omega_3 \tag{2.4}$$

Тут

$$A_{11}=\int\limits_V \rho(y^2+z^2)dV, A_{22}=\int\limits_V \rho(z^2+x^2)dV, A_{33}=\int\limits_V \rho(x^2+y^2)dV,$$
$$A_{12}=-\int\limits_V \rho xydV, A_{13}=-\int\limits_V \rho xzdV, A_{23}=-\int\limits_V \rho yzdV. \tag{2.5}$$

Координати A_{ij} тензора інерції з (2.4), (2.5) задовольняють умовам

$$A_{ii}>0(i=\overline{1,3}),\ A_{11}+A_{22}>A_{33},\ A_{22}+A_{33}>A_{11},\ A_{33}+A_{11}>A_{22},$$
$$|A_{12}|\le\frac{1}{2}A_{33},\ |A_{13}|\le\frac{1}{2}A_{22},|\ A_{23}|\le\frac{1}{2}A_{11}. \tag{2.6}$$

При математичному моделюванні рухів твердого тіла у формулах (2.2), (2.4) необхідно враховувати нерівності (2.6). Співвідношення (2.2) показує зв'язок векторів кутової швидкості $\overline{\omega}$ і моменту кількості руху $\overline{x}$, записаних у базисі $\overline{\varepsilon}_1,\overline{\varepsilon}_2,\overline{\varepsilon}_3$ див. (2.3). Оскільки $|A|\neq 0$,то з (2.2) можна визначити

$$\overline{\omega}=a\overline{x}, \tag{2.7}$$

де a –гіраційний тензор $(a=A^{-1})$.

В силу теореми про зміну моменту кількості руху маємо:

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=\overline{M}_0, \dot{\overline{x}}=\overline{x}\times\overline{\omega}+\overline{M}_0, \tag{2.8}$$

де $\overline{M}_0$ – момент зовнішніх сил відносно точки O, що діють на тіло S_0. У (2.8) через $\dot{\overline{x}}$ позначена відносна похідна за часом

$$\dot{\overline{x}}=\frac{dx_1}{dt}\overline{\varepsilon}_1+\frac{dx_2}{dt}\overline{\varepsilon}_2+\frac{dx_3}{dt}\overline{\varepsilon}_3. \tag{2.9}$$

Якщо врахувати в другому рівнянні системи (2.8) рівності (2.2), то отримаємо (приймемо $\overline{M}_0=s(\overline{e}\times\overline{v}), s=mg|\overline{r}_c|$)

$$A\dot{\overline{\omega}}=A\cdot\overline{\omega}\times\overline{\omega}+s(\overline{e}\times\overline{v}). \tag{2.10}$$

Для запису повної системи рівнянь Эйлера–Пуассона скористаємося тим, що повна похідна вектору $\overline{v}$ за часом дорівнює нулю $\left(\dfrac{d\overline{v}}{dt}=\overline{0}\right)$ і представленням абсолютної похідної через відносну $\dot{\overline{v}}$: $\dfrac{d\overline{v}}{dt}=\dot{\overline{v}}+\overline{\omega}\times\overline{v}$.

Тоді

$$\dot{\bar{\nu}} = \bar{\nu} \times \bar{\omega}. \tag{2.11}$$

Система рівнянь (2.10), (2.11) називається системою рівнянь Эйлера–Пуассона. Вони мають перші інтеграли:

$$\bar{\nu} \cdot \bar{\nu} = 1, A\bar{\omega} \cdot \bar{\nu} = k, \; A\bar{\omega} \cdot \bar{\omega} - 2s(\bar{e} \cdot \bar{\nu}) = 2E, \tag{2.12}$$

де k і E – довільні постійні.

Відмітимо вид кінетичної енергії T тіла S_0 під дією сили тяжіння

$$T = \frac{1}{2}(A\bar{\omega} \cdot \bar{\omega}). \tag{2.13}$$

Тензору інерції з (2.2), (2.13) зіставляється еліпсоїд інерції Пуансо [184]

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 = \chi_0^2, \tag{2.14}$$

де χ_0^2 – фіксована постійна. У (2.14) через A_i позначені головні моменти інерції тіла S_0.

Якщо в якості основних змінних задачі прийняти вектор моменту кількості руху $\bar{x}$ і вектор вертикалі $\bar{\nu}$, то в силу (2.7) з (2.10), (2.11) отримаємо

$$\dot{\bar{x}} = \bar{x} \times a\bar{x} + s(\bar{e} \cdot \bar{\nu}), \; \dot{\bar{\nu}} = \bar{\nu} \times ax. \tag{2.15}$$

Перші інтеграли рівнянь (2.15) можна знайти за допомогою співвідношень (2.12)

$$\bar{\nu} \cdot \bar{\nu} = 1, \; \bar{x} \cdot \bar{\nu} = k, \; \bar{x} \cdot a\bar{x} - 2s(\bar{e} \cdot \bar{\nu}) = 2E. \tag{2.16}$$

Кінетична енергія тіла S_0 з (2.13) в нових змінних така

$$T = \frac{1}{2}(\bar{x} \cdot a\bar{x}). \tag{2.17}$$

Гіраційному тензору a з (2.15) – (2.17) зіставляється гіраційний еліпсоїд Маккулаха

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 z^2 = \sigma_0^2, \tag{2.18}$$

де σ_0 – постійна, $a_i = \dfrac{1}{A_i}$.

2.2. Рівняння руху гіростата. Аналіз різних понять «гіростат» проаналізовано в монографії Г.В. Горра і О.М. Ковальова [50]. Слідуючи [144] під гіростатом розумітимемо систему $S_0, S_1, ..., S_n$ твердих тіл, яка має наступні властивості: тіло

S_0 – тіло–носій, має нерухому точку і має довільний розподіл мас; несені тіла $S_1,...,S_n$ обертаються навколо осей l_i, закріплених в S_0 і їх центри мас лежать на осях l_i; осі l_i є головними центральними осями тіл S_i; моменти інерції відносно двох інших головних центральних осей рівні. У цьому визначенні, взагалі кажучи, не потрібно повну геометричну і фізичну симетрію.

Позначимо через C_i – центри мас тіл S_i (очевидно $C_i \in l_i$). Зв'яжемо з тілом S_0, як і раніше, систему O_{xyz} , а з тілами S_i системи $C_i x_i y_i z_i$. Причому, одиничні вектори $\bar{\varepsilon}_1^{(i)}$ направимо по осях $C_i x_i$, які містять осі l_i, а одиничні вектори $\bar{\varepsilon}_2^{(i)}, \bar{\varepsilon}_3^{(i)}$ по осях $C_i y_i$, $C_i z_i$ відповідно. Нехай D_i – момент інерції S_i відносно l_i, B_i – момент інерції відносно осей $C_i y_i$ і $C_i z_i$. Запишемо момент кількості руху тіла S_i відносно центру мас C_i

$$\bar{x}_i^{(2)} = A^{(i)}\bar{\omega}_i = B_i \varepsilon_1^{(i)} \times (\bar{\omega} \times \varepsilon_1^{(i)}) + D_i \rho_i \varepsilon_1^{(i)}, \tag{2.19}$$

де $\rho_i = \bar{\omega} \cdot \bar{\varepsilon}_1^{(i)} + \dot{\chi}_i$ ($\bar{\omega}_i$ – кутова швидкість тіла S_i , ω_i – кутова швидкість тіла S_0, χ_i – кут обертання тіла S_i відносно S_0).

Покладемо $\bar{h}_i = \overline{OC}_i$, m_i– маси тіл S_i. Відомо, що момент кількості руху тіла S_i відносно нерухомої точки дорівнює сумі моментів кількості руху : $\bar{x}_i = x_i^{(1)} + x_i^{(2)}$, де $x_i^{(1)}$ – момент кількості центру мас C_i за умови, що в ньому зосереджена вся маса тіла S_i, а $x_i^{(2)}$ виражається за формулою (2.19).

Слідуючи П.В. Харламову [144], запишемо загальний момент кількості руху системи $S_0, S_1,...,S_n$

$$\bar{x} = A \cdot \bar{\omega} + \sum_{i=1}^{n} D_i \rho_i \varepsilon_1^{(i)} . \tag{2.20}$$

Приймаючи для тензора інерції тіла S_0 з (2.2) нове позначення $A^{(0)}$, запишемо (2.20) так

$$A \cdot \bar{\omega} = A^{(0)} \cdot \bar{\omega} + \sum_{i=1}^{n} \left[m_i \bar{h}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{h}_i) + B_i \varepsilon_1^{(i)} \times (\bar{\omega} \times \bar{\varepsilon}_1^{(i)}) \right], \tag{2.21}$$

У базисі $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$ в силу $\bar{h}_i = h_{i1}\bar{\varepsilon}_1 + h_{i2}\bar{\varepsilon}_2 + h_{i3}\bar{\varepsilon}_3$, $\bar{\varepsilon}_1^{(i)} = l_1^{(i)}\bar{\varepsilon}_1 + l_2^{(i)}\bar{\varepsilon}_2 + l_3^{(i)}\bar{\varepsilon}_3$ з (2.21) витікає, що компоненти тензора A мають вигляд

$$A_{11} = A_{11}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n}\left[B_i({l_2^{(i)}}^2 + {l_3^{(i)}}^2) + m_i(h_{i2}^2 + h_{i3}^2)\right], \quad (123) \qquad (2.22)$$
$$A_{23} = A_{23}^{(0)} - \sum_{i=1}^{n}(B_i l_2 l_3 - m_i h_{i2} h_{i3}).$$

У формулах (2.22) виписана тільки частина значень компонентів тензора інерції, інші значення можна отримати з (2.22) циклічною перестановкою індексів 1, 2, 3, на що вказує символ (123).

Слідуючи [144], розглянемо два класи обертання тіл S_i.

Перший клас характеризується тим, що носії тіла підпорядковані зв'язкам, залежним від часу, які забезпечують необхідну залежність $\chi(t)$. Вектор $\bar{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i \dot{\chi}(t)\bar{\varepsilon}_1^{(i)}$ визначений в системі координат, що зв'язана з тілом S_0. Тоді в силу $\rho_i = \bar{\omega}\cdot\bar{\varepsilon}_1^{(i)} + \dot{\chi}(t)$ з рівності (2.20) отримаємо

$$\bar{x} = A_*\bar{\omega} + \bar{\lambda}_*(t), \;\; A_*\bar{\omega} = A\bar{\omega} + \sum_{i=1}^{n} D_i(\bar{\omega}\cdot\bar{\varepsilon}_1^{(i)})\bar{\varepsilon}_1^{(i)}, \qquad (2.23)$$

$$\bar{\lambda}_*(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i \dot{\chi}(t)\bar{\varepsilon}_1^{(i)}, \qquad (2.24)$$

де тензор A_* має компоненти

$$A_{km}^{*} = A_{km} + \sum_{i=1}^{n} D_i l_k^{(i)} l_m^{(i)} \;\; (k, m = \overline{1,3}). \qquad (2.25)$$

У (2.25) A_{km} – компонент тензора A (див. формули (2.22)).

Випишемо для цього випадку рівняння руху гіростата під дією сили тяжіння. У силу (2.10), (2.11), (2.23) у векторному виді ці рівняння такі

$$A_*\dot{\bar{\omega}} = -\dot{\bar{\lambda}}_*(t) + \left(A_*\bar{\omega} + \bar{\lambda}_*(t)\right)\times\bar{\omega} + s(\bar{e}\times\bar{\nu}), \qquad (2.26)$$

$$\dot{\bar{\nu}} = \bar{\nu}\times\bar{\omega}. \qquad (2.27)$$

Рівняння (2.26), (2.27) мають два інтеграли:

$$\bar{\nu}\cdot\bar{\nu} = 1, \;\; \left(A_*\bar{\omega} + \bar{\lambda}_*(t)\right)\cdot\bar{\nu} = k \qquad (2.28)$$

Вектор $\overline{\lambda}_*(t)$, що входить в рівняння (2.26), (2.28), називають вектором гіростатичного моменту. У дисертації, розглядатиметься два випадки. Перший випадок характеризується рівністю

$$\overline{\lambda}_*(t) = \lambda(t)\overline{\alpha}\,, \tag{2.29}$$

де $\overline{\alpha}$ – одиничний вектор, фіксований в S_0. У другому випадку вектор гіростатичного моменту знаходиться в площині ортогональних векторів $\overline{\alpha}$ і $\overline{\beta}$ тобто

$$\overline{\lambda}_*(t) = \lambda_1(t)\overline{\alpha} + \lambda_2(t)\overline{\beta}\,,\ \overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} = 0\,,\ |\overline{\alpha}| = |\overline{\beta}| = 1 \tag{2.30}$$

У другому випадку компоненти ρ_i визначаються з відомих співвідношень $D_i\dot{\rho} = L_i(t)$. Тоді з (2.20) отримаємо

$$\overline{x} = A\overline{\omega} + \overline{\lambda}(t)\,,\ \overline{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i\rho_i(t)\varepsilon_1^{(i)} \tag{2.31}$$

Рівняння руху гіростата в полі сили тяжіння в цьому випадку на основі (2.31) запишемо так [144]

$$A\dot{\overline{\omega}} = -\sum_{i=1}^{n} L_i\overline{\varepsilon}_1^{(i)} + \left(A\overline{\omega} + \sum_{i=1}^{n} D_i\rho_i(t)\overline{\varepsilon}_1^{(i)}\right)\times\overline{\omega} + \overline{s}(\overline{e}\times\overline{\nu})\,, \tag{2.32}$$

$$\dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu}\times\overline{\omega}\,,\ \dot{\rho}_i = \frac{1}{D_i}L_i(t)\ (i = \overline{1,4})\,. \tag{2.33}$$

Рівняння (2.32) допускає два перші інтеграли

$$\overline{\nu}\cdot\overline{\nu} = 1,\ \left(A\overline{\omega} + \sum_{i=1}^{n} D_i\rho_i(t)\overline{\varepsilon}_1^{(i)}\right)\cdot\overline{\nu} = k\,. \tag{2.34}$$

Відмітимо відмінність рівнянь (2.26), (2.27) і (2.32) (2.33). Оскільки залежність $\lambda_*(t)$ у (2.26) задана, то рівняння (2.26), (2.27) є неавтономною системою диференціальних рівнянь. Система (2.32), (2.33) відрізняється від (2.26), (2.27) тим, що її порядок в скалярній формі рівний $n+6$. Вона є замкнутою системою диференціальних рівнянь, якщо відомі залежності $L_i(t)$.

2.3. Рівняння руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Змістовна постановка задачі. Розглянемо рух зарядженого і намагніченого гіростата в електричному, магнітному і ньютонівському полі сил. Зробимо наступні припущення:

1. Несені тіла не заряджені і не намагнічені;

2. Центри ньютонівського і кулонівського тяжіння лежать на осі, яка містить нерухому точку і є паралельною вектору $\bar{\nu}$;

3. Розміри тіла–носія і несених тіл малі в порівнянні з відстанню від нерухомої точки O до центрів ньютонівського і кулонівського тяжінь;

4. Дію ньютонівських сил можна охарактеризувати законом Ньютона, а кулонівських – Кулона і Лоренца.

5. Моделювання проводиться на основі загальних законів механіки.

Математична постановка задач. Припустимо, що загальний момент кількості руху гіростата визначається або формулою з (2.23), або формулою з (2.31). Для зручності дослідження вважаємо, що момент кількості руху можна представити у виді

$$\bar{x} = A\bar{\omega} + \bar{\lambda}(t) \tag{2.35}$$

Рівняння руху гіростата запишемо у формі [55, 61, 155, 190, 191]

$$\begin{aligned} &A\dot{\bar{\omega}} = -\dot{\bar{\lambda}}(t) + \left(A\bar{\omega} + \bar{\lambda}(t)\right)\times\bar{\omega} + \bar{\omega}\times B\bar{\nu} + \bar{s}\times\bar{\nu} + \bar{\nu}\times C\bar{\nu}, \\ &\dot{\bar{\nu}} = \bar{\nu}\times\bar{\omega}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Пояснимо механічний сенс величин, що входять в праву частину першого рівняння з (2.36). Очевидно, що доданок $\bar{s}\times\bar{\nu}$ характеризує лінійну частину ньютонівської дії на гіростат. Величина $\bar{\omega}\times B\bar{\nu}$, де B – постійна симетрична матриця третього порядку, характеризує гіроскопічні сили, які виникають при русі наелектризованого гіростата в магнітному полі. Доданок $\bar{\nu}\times C\bar{\nu}$ обумовлено ньютонівською дією, магнітними силами на намагнічений гіростат. Інші доданки в правій частині мають очевидний сенс. Припускаємо, що матриця C постійна, симетрична і має третій порядок.

Рівняння (2.36) мають перші інтеграли

$$\bar{v}\cdot\bar{v}=1,\ \left(A\bar{\omega}+\bar{\lambda}(t)\right)\cdot\bar{v}-\frac{1}{2}(B\bar{v}\cdot\bar{v})=k\,. \qquad (2.37)$$

Зауваження 1. Розглянемо випадок постійного гіростатичного моменту $\bar{\lambda}(t)=const$. Тоді з (2.36), слідує

$$\begin{aligned} &A\dot{\bar{\omega}}=\left(A\bar{\omega}+\bar{\lambda}\right)\times\bar{\omega}+\bar{\omega}\times B\bar{v}+\bar{s}\times\bar{v}+\bar{v}\times C\bar{v},\\ &\dot{\bar{v}}=\bar{v}\times\bar{\omega}. \end{aligned} \qquad (2.38)$$

Рівняння (2.38) мають три перші інтеграли:

$$\bar{v}\cdot\bar{v}=1,\ \left(A\bar{\omega}+\bar{\lambda}\right)\cdot\bar{v}-\frac{1}{2}(B\bar{v}\cdot\bar{v})=k\,, \qquad (2.39)$$

$$A\bar{\omega}\cdot\bar{\omega}-2s(\bar{e}\cdot\bar{v})+(C\bar{v}\cdot\bar{v})=2E\,, \qquad (2.40)$$

де k і E – постійні. Інтерес рівнянь (2.38) з інтегралами (2.39), (2.40) полягає в тому, що вони математично ізоморфні рівнянням руху тіла в ідеальній нестискуваній рідині.

Нехай T – кінетична енергія системи «Тіло+рідина» [139]:

$$2T=(a^{*}\bar{P}\cdot\bar{P})+(b\bar{R}\cdot\bar{R})+2(\bar{P}\cdot c\bar{R})\,. \qquad (2.41)$$

У (2.41) a^{*},b – позитивно–визначені асиметричні матриці третього порядку, c – матриця третього порядку, яка в загальному випадку не є симетричною; $\bar{R}$ – імпульсивна сила; $\bar{P}$ – імпульсивна пара. Нехай $\bar{\omega}^{*}$ – кутова швидкість тіла, $\bar{u}$ – швидкість початкової точки. Тоді

$$\bar{\omega}^{*}=\overline{grad}_{p}T=a^{*}\bar{P}+c\bar{R}\,,\ \bar{u}=\overline{grad}_{R}T=b\bar{R}+c^{T}\bar{P}\,. \qquad (2.42)$$

Рівняння руху тіла в рідині запишемо у виді [139]

$$\dot{\bar{P}}=\left(\bar{P}+\bar{\lambda}^{*}\right)\times\bar{\omega}+\bar{\mu}\times\bar{R}-\bar{u}\times\bar{R},\ \dot{\bar{R}}=\bar{R}\times\bar{\omega}^{*}, \qquad (2.43)$$

де вектори $\bar{\omega}^{*}$ і $\bar{u}$ мають значення (2.42); $\bar{\lambda}^{*},\bar{\mu}$ – векторні постійні величини. Рівняння (2.43) допускають перші інтеграли

$$\bar{R}\cdot\bar{R}=R_0^2,\ T-2(\bar{\mu}\cdot\bar{R})=2E\,,\ (\bar{P}+\bar{\lambda}^{*})\cdot\bar{R}=k\,. \qquad (2.44)$$

Якщо в рівняннях (2.43) виконати наступну заміну змінних і параметрів

$$\bar{P}=A\bar{\omega}-R_0Ac\bar{v}\,,\ a^{*}=A^{-1},\ \bar{\lambda}^{*}=\bar{\lambda}\,,\ \bar{\mu}=\frac{\bar{s}}{R_0}\ , \qquad (2.45)$$

тоді рівняння (2.43) наберуть вигляду (2.38). При заміні (2.45) перші інтеграли (2.44) перетворяться до рівності (2.39), (2.40), якщо виконані умови

$$B = R_0(c^T A + Ac - Sp(Ac)\delta, \; C = R_0^2(b - c^T Ac), \tag{2.46}$$

де δ – одинична матриця, $Sp(Ac)$ – слід матриці Ac. Загальний варіант вказаної аналогії вказав Х.М. Яхья [190, 191], окремі її варіанти отримав В.А. Стєклов [127] і П.В. Харламов [139].

Зауваження 2. Рівняння (2.38) на відміну від рівнянь (2.36), (2.37) допускають інтеграл енергії. Тому до рівнянь (2.38) застосована теорія інтегрування рівнянь динаміки, яка запропонована К. Якобі. Відомі наступні випадки існування квадратичного додаткового першого інтеграла :

1. Інтеграл Г. Кірхгофа – П.В. Хараламова :

$$A_1\omega_1 + B_1\nu_1 = c, \tag{2.47}$$

де A_1 – головний момент інерції ($A = diag(A_1, A_2, A_2)$), B_1 – головне значення матриці $B = diag(B_1, B_2, B_2)$. При цьому $C = diag(C_1, C_2, C_2)$, $\bar{s} = (s_1, 0, 0)$, $\bar{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0)$.

2. Граничний випадок А. Клебша : $A = diag(A_1, A_1, A_1)$, $B = diag(B_1, B_1, B_1)$, $\bar{\lambda} = \bar{0}$, $\bar{s} = \bar{0}$, перший інтеграл такий (n – параметр, β – параметр)

$$\begin{gathered} A_1 = \left[C_1(\omega_1 + n\nu_1)^2 + C_2(\omega_2 + n\nu_2)^2 + C_3(\omega_3 + n\nu_3)^2\right] \\ -(C_2C_3\nu_1^2 + C_3C_1\nu_2^2 + C_1C_2\nu_3^2) = c \end{gathered} \tag{2.48}$$

3. Випадок А. Клебша : $\bar{s} = \bar{0}$, $\bar{\lambda} = \bar{0}$, $B = n\left(Sp(A)\delta - 2A\right)$, $C = (\beta - n^2)A$, перший інтеграл має вигляд [55]

$$(A\bar{\omega} + nA\bar{\nu})^2 + \beta A_1 A_2 A_3 (A^{-1}\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) = c. \tag{2.49}$$

4. Випадок В.А. Стєклова [127] (узагальнений П.В. Харламовим [139] і В.Н. Рубановським [113]): $\bar{s} = n\bar{\lambda}$, $B = n\left(Sp(Ac)\delta - 2A\right) - \chi A^{-1}$, $C = -n^2 A - n\chi A^{-1}$ (n, χ – постійні параметри); інтеграл запишемо у векторному виді

$$(A\bar{\omega} + nA\bar{\nu} + \lambda)^2 + 2\chi(\bar{\omega} \cdot \bar{\nu}) = c. \tag{2.50}$$

5. Випадок А.М. Ляпунова [92] (узагальнений П.В. Харламовим [139] і В.Н. Рубановським [115]): $A_2 = A_3 = A_1$ $\bar{\lambda} = \bar{0}$ $C_1 = -\dfrac{B_2 B_3}{A_1}$ $C_2 = -\dfrac{B_3 B_1}{A_1}$ $C_3 = -\dfrac{B_1 B_2}{A_1}$;

інтеграл має вигляд:

$$(B_2 + B_3)\left(\omega_1 - \frac{B_1\nu_1}{A_1} + \frac{s_1}{B_2 + B_3}\right)^2 + (B_3 + B_1)\left(\omega_2 - \frac{B_2\nu_2}{A_1} + \frac{s_2}{B_1 + B_3}\right)^2 + \\ + (B_1 + B_2)\left(\omega_3 - \frac{B_3\nu_3}{A_1} + \frac{s_3}{B_1 + B_2}\right)^2 = c. \quad (2.51)$$

Інтеграли (2.47) – (2.51) існують за умови, що матриці *A, B, C* мають діагональний вигляд.

2.4. Метод інваріантних співвідношень.

Метод інваріантних співвідношень, запропонований Т. Леві–Чивітою [91]. Розглянемо систему диференціальних рівнянь :

$$\dot{x}_i = X_i(x_1,...,x_n,t),\ (i = \overline{1,n}), \quad (2.52)$$

у якій введені наступні позначення: t – незалежна змінна, $x_1,...x_n$ – невідомі функції цієї змінної; $X_i(x_1,...,x_n,t)$ – функції від $n+1$ змінних, заданих на деякій відкритій множині U і нескінченне число разів диференційовані. Нехай задане співвідношення:

$$f(x_1,...,x_n,t) = 0, \quad (2.53)$$

у (2.53) функція $f(x_1,...,x_n,t)$ має безперервні частинні похідні будь–якого порядку по всіх змінних і $\overline{gradf} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},...,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right) \neq 0$ в області U, визначеною вектором $(x_1(t),...,x_n(t),t)$. Т. Леві – Чивіта запропонував наступне визначення: співвідношення (2.53) називається інваріантним співвідношенням (ІС), якщо з умови $f(x_1(t_0),...,x_n(t_0),t_0) = 0$ витікає рівність $f(x_1(t),...,x_n(t),t) = 0$ для усіх t, де $x_1(t),...,x_n(t)$ – розв'язок рівнянь (2.52). Для функції (2.53) отримано рівняння [91]:

$$\frac{df(x_1,...,x_n,t)}{dt} = f(x_1,...,x_n,t)\lambda(x_1,...,x_n,t), \quad (2.54)$$

де

$$\frac{df(x_1,...,x_n,t)}{dt} = \dot{f} = \frac{\partial f(x_1,...,x_n,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,...,x_n,t)}{\partial x_i} X(x_1,...,x_n,t)$$

є повною похідною від ІС (2.53) в силу системи (2.52), $\lambda(x_1,...x_n,t)$ – аналітична функція своїх змінних. Це визначення буде використано в розділах 3 – 5 дисертацій.

Т. Леві–Чивіта [91] узагальнив метод ІС на випадок системи ІС

$$f_i(x_1,...,x_n,t) = 0 \ (j = \overline{1,m}). \qquad (2.55)$$

У певних припущеннях він для ІС (2.55) вказав систему рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{f}_1(x_1,...,x_n,t) &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_{1j}(x_1,...,x_n,t) f_j(x_1,...,x_n,t),..., \\ \dot{f}_m(x_1,...,x_n,t) &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_{mj}(x_1,...,x_n,t) f_j(x_1,...,x_n,t). \end{aligned} \qquad (2.56)$$

Цей підхід у визначенні ІС для автономного випадку використали Г.В. Горр, О.К. Щетініна [66] при розгляді проблеми інтегрування рівнянь (2.52) на ІС класу Т. Леві–Чивіта. Ними доведено два твердження. Перше твердження: якщо система (2.52) має властивість $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \ (i = \overline{1,n})$, допускає $n-3$ перших інтегралів і одне ІС класу Т. Леві–Чивіта, то при виконанні однієї умови, інтегрування рівнянь (2.52) на даному ІС зводиться до квадратури. Друге твердження: якщо система (2.52) має властивість $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_i} \neq 0 \ (i = \overline{1,n})$, допускає $n-4$ перших інтегралів і два ІС класса Т. Леві–Чивіта, тоді при виконанні однієї умови, інтегрування рівнянь (2.52) на даних ІС зводиться до квадратури.

Метод інваріантних співвідношень П.В. Харламова для автономних диференціальних рівнянь. Розглянемо випадок, коли рівняння (2.52) є автономною системою диференціальних рівнянь :

$$\dot{x}_i = X_i(x_1,...,x_n) \ \ (i = \overline{1,n}). \qquad (2.57)$$

Приведемо цитату з [145]: «Визначення інваріантного співвідношення. У зв'язку з системою диференціальних рівнянь (2.57) (приймаємо нумерацію дисертації) зіставлена послідовність:

$$f^{(i)}(x_1,...,x_n),\ i=0,1,2,..., \qquad (2.58)$$

члени якої визначено так

$$f^{(i)}(x_1,...,x_n)=\sum X_j(x_1,...,x_n)\frac{\partial}{\partial x_j}f^{(j-1)}(x_1,...,x_n)\ i=1,2,... \qquad (2.59)$$

Якщо багатовид

$$\sum:\ f^{(i)}(x_1,...,x_n)=0,\ i=0,1,2,... \qquad (2.60)$$

не порожній, він називається інваріантним багатовидом системи диференціальних рівнянь (2.57), а співвідношення $f(x_1,...,x_n)=0$ – інваріантним співвідношенням цих рівнянь». У [145] доведено *основне твердження:* багатовид $\sum$ визначено першими l рівняннями з (2.60).

П. В. Харламов [145] вводить і поняття шару ІС. Як відмічено в монографії Г.В. Горра і А.В. Мазнєва [55] це поняття відіграє важливу роль в характеристиці розв’язків рівнянь динаміки твердого тіла. Пояснюючий приклад, приведений в [55] полягає в наступному. Відомі два розв’язки рівнянь Ейлера – Пуассона, які характеризуються лінійним ІС. Це розв’язки В. Гесса [173] і Д. Гріолі [172]. Для того, щоб мати інформацію про властивості, які відрізняють ці розв’язки один від одного досить скористатися поняттям шару ІС, що введене в [145]. На його основі встановлюємо, що розв’язок В. Гесса [173] визначений ІС нульового шару, а розв’язок Д. Гріолі [172] четверного шару.

Аналіз методу ІС П.В. Хараламова проведений в [39].

Метод інваріантних співвідношень неавтономної системи диференціальних рівнянь. Оскільки в дисертації вивчаються рівняння руху неавтономного гіростата, то вказаний метод ІС розглянемо детальніше. При цьому використовуватимемо результати статті [81].

Приведемо на початку визначення [81].

Визначення 1. Непорожня множина $M \subseteq U$ називається інваріантною множиною (ІМ) по відношенню до системи (2.52), якщо для будь–якої точки $(x_1^{(0)},...x_n^{(0)},t_0) \in M$ розв'язок рівняння (2.52) з початковими умовами $x_i^0 = x_i(t_0)$ задовольняє умові $(x_1(t),...x_n(t),t) \in M$ при $t \in (t_0 - t_1, t_0 + t_2)$.

Визначення 2. Співвідношення (2.53) називається ІС системи (2.52), якщо множина точок G, що задовольняє цьому співвідношенню, містить деяку інваріантну множину M.

У статті [81] для ІС (2.53) побудована послідовність, що є аналогічною до послідовності (2.59)

$$
\begin{aligned}
&f^{(1)}(u_1,...,u_{n+1}) = f(u_1,...,u_{n+1}),...,\\
&f^{(l)}(u_1,...,u_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial f^{(l-1)}(u_1,...,u_{n+1})}{\partial u_j} X_j(u_1,...,u_{n+1}),... .
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

де виконана заміна $x_i = u_i \quad (i = \overline{1,n}),\ u_{n+1} = t$.

Доведена лема [81]: Нехай для рівнянь (2.52) співвідношення є ІС, і множина G містить ІМ. Тоді для точок M повинні виконуватися співвідношення

$$
\begin{aligned}
&f^{(1)}(u_1,...,u_{n+1}) = 0,\\
&f^{(2)}(u_1,...,u_{n+1}) = 0,\\
&\qquad ...\\
&f^{(e)}(u_1,...,u_{n+1}) = 0,\\
&\qquad ... \ .
\end{aligned}
\tag{2.62}
$$

За допомогою цієї леми в [81] доведена теорема:

Якщо в послідовності (2.62) існують k незалежних функцій, тоді незалежними будуть і перші k функцій послідовності (2.62).

Застосування теореми здійснюється таким чином. На початку для заданої функції (2.53) складається ланцюжок похідних (2.61), потім поетапно проводиться дослідження залежності функцій, що входять в рівняння (2.62). Наприклад, на першому етапі вивчаються умови, при виконанні яких залежні перші дві функції. Якщо показується, що вони не можуть бути залежними ні при яких значеннях параметрів, то співвідношення (2.53) не є ІС. Якщо інакше, триває процес вивчення функціональних рівнянь $f^{(1)}=0$, $f^{(2)}=0$, $f^{(3)}=0$ і знаходяться умови їх залежності. Аналогічно вивчається і загальний випадок.

2.5. Теорія еліптичних функцій Якобі.

Розглянемо еліптичний інтеграл першого роду :

$$\int \frac{du}{\sqrt{c_4u^4+c_3u^3+c_2u^2+c_4u+c_0}}=t \tag{2.63}$$

Відомо, що інтеграл (2.63) за допомогою дробово–лінійного перетворення можна привести до стандартного виду, а потім до форми, запропонованої Лежандром

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=t\,, \tag{2.64}$$

де $k^2<1$, $k-$ називається модулем еліптичних функцій Якобі. Оскільки з (2.64) витікає, що $\dfrac{d\varphi}{dt}>0$ то $\varphi(t)$ – монотонна функція змінної t.

$$\varphi = amt\,. \tag{2.65}$$

Якобі еліптичні функції вводить таким чином:

$$\sin\varphi = snt\,,\ \cos\varphi = cnt\,,\ \sqrt{1-k^2sn^2t}=dnt\,. \tag{2.66}$$

Функції (2.66) задовольняють наступним диференціальним рівнянням

$$\frac{dsnt}{dt}=cntdnt\,,\ \frac{dcnt}{dt}=-sntdnt\,,\ \frac{d}{dt}dnt=-k^2sntcnt$$

і кінцевим співвідношенням $sn^2t+cn^2t=1$ $k^2sn^2t+dn^2t=1$.

Еліптична функція (2.65) називається «амплітудою t», еліптична функція snt – еліптичним синусом, еліптична функція cnt – еліптичним косинусом, функція dnt – еліптичним тангенсом.

Розглянемо приклад знаходження еліптичних функцій.

Нехай

$$\int \frac{du}{\sqrt{\beta_1+\beta_2\sin u}}=t\,. \tag{2.67}$$

Вважаємо, що для параметрів β_1 і β_2 виконані умови $\beta_1 > -\beta_2 > 0$. Тоді з (2.67), застосовуючи метод зведення розв'язку рівняння (2.67) до еліптичних функцій часу t отримаємо

$$\varphi = 2am\mu_1 t - \frac{\pi}{2},\ \dot{\varphi} = 2\mu_1 dn\mu_1 t,\ \sin\varphi = -1 + 2sn^2\mu_1 t,\ \cos\varphi = 2sn\mu_1 tcn\mu_1 t, \quad (2.68)$$

де $\mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1 - \beta_2}$. Модуль еліптичних функцій (2.68) має значення $k = \sqrt{\frac{2\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}}$.

Результати цього прикладу використовуються в 3 – 5 розділах дисертації.

2.6. Метод годографів кінематичного тлумачення руху тіла.

У рівняннях Эйлера–Пуассона задачі про рух важкого твердого тіла і в рівняннях Кірхгофа–Пуассона основними змінними задачі є вектор–функції $\overline{\omega}(t), \overline{\nu}(t)$. Вони пов'язані з кутами Ейлера φ, ψ, θ наступними співвідношеннями

$$\omega_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,\ \omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,\ \omega_3 = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta, \quad (2.69)$$

$$\nu_1 = \sin\theta\sin\varphi,\ \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi,\ \nu_3 = \cos\theta. \quad (2.70)$$

Після інтегрування рівнянь руху гіростата відомі вектор–функції

$$\overline{\omega}(t) = \omega_1(t)\bar{\varepsilon}_1 + \omega_2(t)\bar{\varepsilon}_2 + \omega_3(t)\bar{\varepsilon}_3,\ \overline{\nu}(t) = \nu_1(t)\bar{\varepsilon}_1 + \nu_2(t)\bar{\varepsilon}_2 + \nu_3(t)\bar{\varepsilon}_3. \quad (2.71)$$

На підставі співвідношень (2.69), (2.70) можна знайти залежності кутів Ейлера від часу

$$\theta(t) = \arccos\nu_3(t), \varphi(t) = arctg\frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)}, \psi(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{\left(\omega_1(\tau)\nu_1(\tau) + \omega_2(\tau)\nu_2(\tau)\right)d\tau}{\nu_1^2(\tau) + \nu_2^2(\tau)} \quad (2.72)$$

За допомогою формул (2.72) можна визначити положення тіла (гіростата) в нерухомому просторі при будь–якому значенні t, тобто отримати тлумачення руху тіла.

Іншим способом тлумачення руху тіла служить метод годографів, ґрунтований на теоремі Пуансо :

Рух тіла представляється за допомогою кочення рухливого годографа кутової швидкості по нерухомому годографу. Рухливий годограф – геометричне місце кінців вектор–функції $\overline{\omega}(t)$ у рухливій системі координат, нерухомий годограф – геометричне місце кінців вектор–функції в нерухомій системі координат.

Для отримання рівнянь нерухомого годографа П.В. Харламов [141, 143] використав циліндричну систему координат.

У цій системі координат вектор кутової швидкості має вигляд

$$\overline{\omega} = \omega_\xi \bar{i}_1 + \omega_\eta \bar{i}_2 + \omega_\zeta \bar{i}_3,\ \omega_\xi = \omega_\rho \cos\alpha,\ \omega_\eta = \omega_\rho \cos\alpha, \tag{2.73}$$

де

$$\omega_\zeta = \overline{\omega} \cdot \overline{\nu} = \omega_1 \nu_1 + \omega_2 \nu_2 + \omega_3 \nu_3,\ \omega_\rho^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_\zeta^2, \tag{2.74}$$

$$d = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\omega_\rho^2(\tau)} \begin{vmatrix} \nu_1(\tau) & \nu_2(\tau) & \nu_3(\tau) \\ \omega_1(\tau) & \omega_2(\tau) & \omega_3(\tau) \\ \dot{\omega}_1(\tau) & \dot{\omega}_2(\tau) & \dot{\omega}_3(\tau) \end{vmatrix} d\tau \tag{2.75}$$

На основі рівнянь (2.73) – (2.75) отримана значна інформація про властивості руху тіла і гіростата (див. оглядові монографії [39, 55]). Клас рухів гіростата, який використовується в даній дисертації характеризується симетричністю рухливого і нерухомого аксоїдів відносно дотичної до них площини.

Такі рухи називаються ізоконічними рухами.

Необхідною і достатньою умовою ізоконічності руху є інваріантне співвідношення:

$$\overline{\omega} \cdot (\overline{\nu} - \overline{c}) = 0, \tag{2.76}$$

де $\overline{c}$ – одиничний вектор, незмінно пов'язаний з тілом–носієм.

2.7. Прецесійні рухи гіростата.

Розглянемо рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Нехай вісь l_1 з одиничним вектором $\overline{a}$ має початок в нерухомій точці і незмінно пов'язана з тілом–носієм, а вісь l_2 спрямована по деякому вектору $\bar{\gamma}$ нерухомого простору. Запишемо очевидні співвідношення

$$\overline{a} \cdot \overline{a} = 1,\ \overline{\nu} \cdot \overline{\nu} = 1,\ \bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma} = 1,\ \overline{\nu} \cdot \bar{\gamma} = c_0,\ \dot{\overline{a}} = 0,\ \dot{\bar{\gamma}} = \bar{\gamma} \times \overline{\omega},\quad \dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu} \times \overline{\omega}, \tag{2.77}$$

де $c_0 = \cos\chi_0 (\chi_0 = \angle(\overline{\nu}, \bar{\gamma})$. У формулах (2.77) точкою позначена відносна похідна за часом t.

<u>Визначення</u>. Прецесійним рухом гіростата з нерухомою точкою називають рух [55, 61], для якого є постійним кут між векторами $\overline{a}$ і $\bar{\gamma}$

$$\bar{a}\cdot\bar{\gamma}=a_0\,(a_0=\cos\theta_0,\theta_0=\angle(\bar{a},\bar{\gamma})). \qquad (2.78)$$

Вичислимо в силу (2.77) похідну від лівої частини співвідношення (2.78) : $\overline{\omega}\cdot(\bar{a}\times\bar{\gamma})=0$. З цієї рівності виходить

$$\overline{\omega}=\dot{\varphi}\bar{a}+\dot{\psi}\bar{\gamma}\,, \qquad (2.79)$$

де φ,ψ – кути Ейлера (θ_0 – є третім кутом Ейлера).

Підставимо вираз (2.79) в кінематичні рівняння для $\bar{\nu},\bar{\gamma}$ з системи (2.77)

$$\dot{\bar{\gamma}}=\dot{\varphi}(\bar{\gamma}\times\bar{a}),\ \dot{\bar{\nu}}=\dot{\varphi}(\bar{\nu}\times\bar{a})+\dot{\psi}(\bar{\nu}\times\bar{\gamma}). \qquad (2.80)$$

Якщо рухливу систему координат зв'язати з вектором $\bar{a}=(0{,}0{,}1)$,тоді умові $\bar{\nu}\cdot\bar{\nu}=1$ з (2.77), першому рівнянню з (2.80) задовольнимо, вважаючи [55]

$$\gamma_1=a_0'\sin\varphi,\ \gamma_2=a_0'\cos\varphi,\ \gamma_3=a_0\,,(a_0'=\sin\theta_0). \qquad (2.81)$$

Для вектору $\bar{\nu}$, що задовольняє другій кінематичній умові з (2.77) і другому рівнянню з (2.80) в монографії [55] вказано наступний вираз

$$\bar{\nu}=(C_0+a_0b_0'\sin\psi)\bar{\gamma}-b_0'\bar{a}\sin\psi-b_0'(\bar{\gamma}\times\bar{a})\cos\psi\,, \qquad (2.82)$$

де $b_0'=\dfrac{b_0}{a_0'},\ b_0=\sin\chi_0$.

Таким чином, співвідношення (2.81), (2.82) застосовуються для дослідження прецесійних рухів гіростата з нерухомою точкою у будь–якому динамічному завданні.

Зауваження 1. При розгляді прецесійних рухів відносно вектору $\bar{\gamma}$ (тобто $\bar{\gamma}=\bar{\nu}$) маємо рівності

$$\bar{a}=(0{,}0{,}1),\ \bar{\nu}=(a_0'\sin\varphi,a_0'\cos\varphi,a_0),\ \overline{\omega}=\dot{\varphi}\bar{a}+\dot{\psi}\bar{\nu}\,. \qquad (2.83)$$

Зауваження 2. Для аналізу умов існування прецесійних рухів можна використати рівняння Д. Гріолі

$$\omega_1\dot{\omega}_2-\omega_2\dot{\omega}_1+\omega_1(\omega_2^2+\omega_3^2)-(\omega_1^2+\omega_2^2)^{3/2}ctg\theta_0=0\,, \qquad (2.84)$$

де ω_i – компоненти вектору кутової швидкості тіла–носія, θ_0 – кут між вектором вертикалі (або $\bar{\gamma}$) і віссю в тілі–носії, проекція на яку дорівнює ω_3. Рівняння (2.84) застосували Є.І. Харламова і Г.В. Горр [154].

Прецесійні рухи гіростата підрозділяються на класи:

1. Регулярні прецесії: $\dot{\varphi} = n, \dot{\psi} = m$ (n і $m-$ постійні);
2. Напіврегулярні прецесії першого типу $\dot{\psi} = m, \dot{\varphi} \neq n$ (n і $m-$ постійні);
3. Напіврегулярні прецесії другого типу $\dot{\varphi} = n, \dot{\psi} \neq m$ (n і $m-$ постійні);
4. Прецесії загального вигляду : $\dot{\varphi} \neq n, \dot{\psi} \neq m$ (n і $m-$ постійні).

2.8. Прецесійно–ізоконічні рухи гіростата.

Визначення. Рух тіла (гіростата) називається прецесійно–ізоконічним [52], якщо він має властивості прецесійності і ізоконічності.

Слідуючи [52, 55], допустимо, що виконуються властивості (2.76), (2.83)

$$\overline{\omega} \cdot (\overline{\nu} - \overline{c}) = 0, \ \overline{\omega} = \dot{\varphi}\overline{a} + \dot{\psi}\overline{\nu}, \ \overline{\nu} \cdot \overline{a} = a_0. \tag{2.85}$$

Внесемо $\overline{\omega}$ з другої рівності в першу рівність

$$\dot{\varphi}(a_0 - \overline{a} \cdot \overline{c}) + \dot{\psi}(1 - \overline{\nu} \cdot \overline{c}) = 0 \tag{2.86}$$

Регулярні прецесійно–ізоконічні рухи. Покладемо в (2.86) $\dot{\varphi} = n, \dot{\psi} = m$. Виберемо вектори $\overline{a}$ і $\overline{c}$ так: $\overline{a} = (0,0,1)$ $\overline{c} = (c_1, 0, c_3)$. Підставимо $\overline{\nu}$ з (2.83) і вимагатимемо, щоб отримана рівність була тотожністю за t. Тоді знайдемо рівність $c_1 = 0, \ m = n$. Тобто, для регулярних прецесійно–ізоконічних рухів маємо

$$\begin{aligned} &\omega_1 = na_0' \sin(nt + \varphi_0), \ \omega_2 = na_0' \cos(nt + \varphi_0), \ \omega_3 = n(1 + a_0), \\ &\nu_1 = a_0' \sin(nt + \varphi_0), \ \nu_2 = a_0' \cos(nt + \varphi_0), \ \nu_3 = a_0. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Напіврегулярні прецесійно–ізоконічні рухи першого типу. Припустимо, що швидкість прецесії гіростата постійна: $\dot{\psi} = m$. З (2.83) слідує

$$\overline{\omega} = \dot{\varphi} a + m\overline{\nu}. \tag{2.88}$$

Рівність (2.86) набуде вигляду

$$\dot{\varphi} = m(b_0 + c_0 \sin\varphi), \tag{2.89}$$

де

$$b_0 = \frac{a_0 c_3 - 1}{a_0 - c_3}, c_0 = \frac{a_0' c_1}{a_0 - c_3} \tag{2.90}$$

Очевидно, що в силу $|\overline{c}| = 1$ з рівності (2.90) виходить умова на параметри b_0, c_0: $b_0 = 1 + c_0^2$.

Припускаючи у формулі (2.89) $m > 0,\ b_0 > 0,\ c_0 > 0,$ отримаємо

$$\varphi(t) = 2arctg\left(\frac{b_0 tg\,\frac{mt}{2}}{1 - c_0 tg\,\frac{mt}{2}}\right). \tag{2.91}$$

Напіврегулярні прецесійно–ізоконічні рухи другого типу. Припустимо, що швидкість власного обертання гіростата постійна: $\dot{\varphi} = n$. З (2.83) слідує

$$\nu_1 = a_0' \sin nt,\ \nu_2 = a_0' \cos nt,\ \nu_3 = a_0, \tag{2.92}$$

$$\overline{\omega} = n\overline{a} + \dot{\psi}\overline{\nu}. \tag{2.93}$$

Для випадку (2.92), (2.93) рівняння для $\psi(t)$ з (2.86) інтегрується (при $t = 0, \varphi = 0$), оскільки

$$\dot{\varphi} = \frac{n}{b_0 - c_0 \sin nt},\quad b_0^2 = 1 + c_0^2. \tag{2.94}$$

Запишемо явно розв’язок (вважаючи, при $t = 0, \psi = 0$)

$$\psi(t) = 2arctg\left(\frac{tg\,\frac{nt}{2}}{b_0 + c_0 tg\,\frac{nt}{2}}\right). \tag{2.95}$$

Рухливий годограф кутової швидкості тіла–носія визначається в силу (2.93), (2.95) співвідношеннями:

$$\omega_1 = \frac{a_0' n \sin nt}{b_0 + c_0 \sin nt},\ \omega_2 = \frac{a_0' n \cos nt}{b_0 + c_0 \sin nt},\ \omega_3 = n\left(1 + \frac{a_0}{b_0 + c_0 \sin nt}\right). \tag{2.96}$$

На основі (2.93), (2.96) встановлюємо, що рух тіла–носія має періодичний характер.

Таким чином, за допомогою властивостей функцій $\varphi(t)$ з (2.91) і $\psi(t)$ з (2.95) робимо висновок, що кути прецесії і власного обертання у випадках напіврегулярних прецесійно–ізоконічних рухів монотонно залежать від часу.

Прецесії загального вигляду. У разі прецесії загального вигляду з рівності (2.86) виходять два варіанти:

$$a_0 = \overline{c},\ \psi = \varphi \tag{2.97}$$

$$a_0 \neq \bar{c}, \; \dot{\psi} = \frac{\varphi}{b_0 + c_0 \sin\varphi}, \; (b_0^2 = 1 + c_0^2)\,. \tag{2.98}$$

Вважаючи в (2.98) умову: при $\varphi = 0, \psi = 0$, запишемо функцію $\psi = \psi(\varphi)$

$$\psi = 2arctg\left(\frac{tg\,\frac{\varphi}{2}}{b_0 + c_0 tg\,\frac{\varphi}{2}}\right). \tag{2.99}$$

Відмінність формул (2.97) – (2.99), отриманих для прецесії загального вигляду від формул (2.91), (2.95) полягає в тому, що формули (2.97), (2.98) встановлюють лише зв'язок між змінними ψ і φ. Тому для інтегрування динамічних рівнянь задач про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил необхідно задавати (або визначати) функції $\varphi(t),\; \psi(t)$.

Висновки. У цьому розділі наведено основні кінематичні і динамічні характеристики задачі про рух гіростата під дією сили тяжіння і задачі про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Наведено рівняння Эйлера–Пуассона і Кірхгофа–Пуассона для вказаних задач. Відмічено, що у разі змінного гіростатичного моменту, рівняння руху гіростата не допускають інтеграл енергії.

Наведено основні методи теорії інваріантних співвідношень: метод Т. Леві–Чивіта, метод П.В. Харламова і його узагальнення на випадок неавтономних диференціальних рівнянь (цей метод використовується в дисертації).

Коротко сформульовані відомості з теорії еліптичних функцій Якобі.

Описано метод годографів, ґрунтований на теоремі Пуансо і рівняннях П.В. Харламова.

Надано постановку задачі про умови існування прецесійних рухів гіростата. Приведено класифікацію прецесій і прецесійно–ізоконічних рухів гіростата з нерухомою точкою.

РОЗДІЛ 3
РІВНОМІРНІ ОБЕРТАННЯ ГІРОСТАТА ЗІ ЗМІННИМ ГІРОСТАТИЧНИМ МОМЕНТОМ ВІДНОСНО ПОХИЛОЇ ОСІ

3.1. Рівномірні обертання гіростата, що несе один ротор

Рівномірні обертання сучасних механічних систем (роботів, маніпуляторів, гіроскопічних приладів і інших об'єктів техніки) є робочими режимами. Тому задачі моделювання таких рухів гіростата і розробка законів управління є актуальними. Умови існування рівномірних обертань гіростата істотно залежать від властивостей силових дій на гіростат. Наприклад, якщо на гіростат діє тільки сила тяжіння, то рівномірні його обертання можливі тільки навколо вектора, який співнаправлений з вектором сили тяжіння [143]. Коли на гіростат діють потенціальні і гіроскопічні сили класу [55], то рівномірні обертання гіростата з постійним гіростатичним моментом можливі не лише навколо вертикалі, але і навколо похилої осі.

Оскільки для стабілізації рівномірних обертань необхідно враховувати можливість руху маховиків, то останнім часом умови існування рівномірних обертань розглядаються у припущенні, що гіростатичний момент залежить від часу [28, 31, 32, 55 – 58, 96 – 101]. У цьому розділі досліджено рівномірні обертання гіростата в двох випадках: перший випадок характеризується тим, що гіростатичний момент спрямовано по нерухомій в тілі–носії осі; другий випадок характеризується тим, що гіростатичний момент знаходиться в деякій площині тіла–носія. Припускаємо, що на гіростат діють потенціальні і гіроскопічні сили, що дозволяє описати рух гіростата узагальненими рівняннями Кірхгофа–Пуассона.

3.1.1. Постановка задачі. Розглядається механічна модель, яка називається гіростатом [144]. Передбачається, що гіростатичний момент має вигляд: $\overline{\lambda}(t)=\lambda(t)\overline{\alpha}$, де $\overline{\alpha}$ – одиничний вектор, незмінно пов'язаний з тілом–носієм.

Вважатимемо, що на гіростат діє спеціальний клас потенціальних і гіроскопічних сил. Раніше рівномірні обертання гіростата відносно похилої осі розглядалися в задачі про рух гіростата під дією сили тяжіння [143]. Показано, що клас таких рухів значно ширше класу рівномірних обертань гіростата з постійним гіростатичним моментом.

У цьому розділі вивчено умови існування рівномірних обертань гіростата в загальній задачі про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Застосований метод дослідження прецесійних рухів в динаміці твердого тіла, запропоновано в книзі [55].

Запишемо рівняння руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом під дією потенціальних і гіроскопічних сил [55]

$$A\dot{\overline{\omega}} = A\overline{\omega}\times\overline{\omega} - \dot{\lambda}(t)\overline{\alpha} + \overline{\omega}\times\left(B\overline{\nu} - \lambda(t)\overline{\alpha}\right) + \overline{\nu}\times\left(C\overline{\nu} - \overline{s}\right), \qquad (3.1)$$

$$\dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu}\times\overline{\omega}\,. \qquad (3.2)$$

У рівняннях (3.1), (3.2) введені наступні позначення: $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор кутової швидкості тіла–носія; $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – одиничний вектор, що вказує напрямок магнітного поля; $A = (A_{ij})$ – тензор інерції гіростата, компоненти якого сформовано в залежності від способу обертання несених тіл [144]; $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – одиничний вектор, незмінно пов'язаний з тілом–носієм; $\overline{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, співнаправлений з вектором узагальненого центру мас гіростата; $B = (B_{ij})$ $C = (C_{ij})$ – постійні матриці третього порядку; точка над змінними $\overline{\omega}$ $\overline{\nu}$ і $\lambda(t)$ означає відносну похідну за часом.

Рівняння (3.1), (3.2) допускають два перші інтеграли

$$\overline{\nu}\cdot\overline{\nu} = 1, \qquad (A\overline{\omega} + \lambda(t)\overline{\alpha})\cdot\overline{\nu} - \frac{1}{2}(B\overline{\nu}\cdot\overline{\nu}) = k\,, \qquad (3.3)$$

де k – довільна постійна.

Система (3.1), (3.2) не замкнута, оскільки не заданий закон зміни функції $\lambda(t)$.

Нехай гіростат рівномірно обертається відносно похилій осі l, нерухомої в просторі. Вважатимемо, що вісь l не паралельна вектору $\bar{\nu}$. Тобто, якщо $\bar{\gamma} \in l$ і $|\bar{\gamma}| = 1$, то кут $\theta_0 = \angle(\bar{\gamma}, \bar{\nu}) \neq 0$. Вісь l (і вектор $\bar{\gamma}$) незмінна і в гіростаті. Позначимо через $\bar{a}$ вектор, який співпадає з $\bar{\gamma}$. Тоді можна записати

$$\bar{a} \cdot \bar{\nu} = a_0, \; (a_0 = \cos\theta_0). \tag{3.4}$$

Оскільки гіростат здійснює рівномірне обертання, то можна записати

$$\bar{\omega} = \omega_0 \bar{a}. \tag{3.5}$$

Підставивши вираз (3.5) в рівняння (3.2), отримаємо

$$\nu_1 = a_0' \sin\omega_0 t, \; \nu_2 = a_0' \cos\omega_0 t, \; \nu_3 = a_0. \tag{3.6}$$

Виберемо систему координат так, щоб вектор $\bar{a}$ мав вигляд $\bar{a} = (0,0,1)$. Відмітимо, що співвідношення (3.6) перетворюють рівняння (3.2) на тотожність. Внесемо вираз (3.5) в рівняння (3.1) і отримаємо

$$\omega_0^2 (A\bar{a} \times \bar{a}) + \omega_0 \lambda(t)(\bar{\alpha} \times \bar{a}) - \dot{\lambda}(t)\bar{\alpha} + \omega_0 (\bar{a} \times B\bar{\nu}) + \bar{\nu} \times (C\bar{\nu} - \bar{s}) = 0. \tag{3.7}$$

Вважаючи, вектори $\bar{a}$, $\bar{\nu}$, $\bar{a} \times \bar{\nu}$ – незалежними, розглянемо проекції лівої частини (3.7) на ці вектори. Введемо позначення

$$C_2 = \frac{1}{2} a_0'^2 (C_{22} - C_{11}), \; C_2' = a_0'^2 C_{12}, \; C_1' = a_0'(s_1 - a_0 C_{13}), \; C_1 = a_0'(s_2 - a_0 C_{23}),$$

$$B_2 = \frac{1}{2} a_0'^2 \omega_0 (B_{22} - B_{11}), \; B_2' = a_0'^2 \omega_0 B_{12}, \; B_1' = a_0' \omega_0 (a_0 B_{13} - \omega_0 A_{13}),$$

$$B_1 = a_0' \omega_0 (a_0 B_{23} - \omega_0 A_{23}), \tag{3.8}$$

$$D_2 = \frac{a_0'}{2} [\omega_0 (B_{22} - B_{11}) + a_0 (C_{22} - C_{11})], \; D_2' = a_0' (\omega_0 B_{12} + a_0 C_{12}),$$

$$D_1 = a_0 \omega_0 B_{23} + C_{23}(2a_0^2 - 1) - a_0 s_2 - \omega_0^2 A_{23}, \; D_1' = a_0 \omega_0 B_{13} + C_{13}(2a_0^2 - 1) - a_0 s_1 - \omega_0^2 A_{13},$$

$$D_0 = \frac{a_0' \omega_0}{2} (B_{11} + B_{22}) + a_0' s_3 + \frac{1}{2} a_0 a_0' (C_{11} + C_{22} - 2C_{33}).$$

Тоді в силу позначень (3.8) з рівняння (3.7) отримаємо (вибором рухливої системи координат можна добитися умови $\alpha_2 = 0$)

$$\alpha_3 \dot{\lambda}(t) = C_2 \sin 2\omega_0 t - C_2' \cos 2\omega_0 t - C_1 \sin \omega_0 t + C_1' \cos \omega_0 t, \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered}(\alpha_1 a_0' \sin\omega_0 t + \alpha_3 a_0)\dot{\lambda}(t) + a_0'\omega_0\alpha_1\lambda(t)\cos\omega_0 t + \\ + B_2 \sin 2\omega_0 t - B_2' \cos 2\omega_0 t + B_1 \sin\omega_0 t - B_1' \cos\omega_0 t = 0\end{gathered}, \qquad (3.10)$$

$$\begin{gathered}\alpha_1 \cos\omega_0 t \cdot \dot{\lambda}(t) - \omega_0\alpha_1\lambda(t)\sin\omega_0 t + \\ + D_2 \cos 2\omega_0 t + D_2' \sin 2\omega_0 t + D_1 \cos\omega_0 t + D_1' \sin\omega_0 t + D_0 = 0.\end{gathered} \qquad (3.11)$$

Умови існування у системи (3.9) – (3.11) розв'язку $\lambda(t)$ і визначають рівномірні обертання гіростата відносно похилої осі.

3.1.2. Розв'язок задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом, що несе один ротор, в окремих випадках

Випадок 1. $\alpha_3 = 0$. З рівняння (3.9) в силу (3.8) і $\alpha_3 = 0$ маємо

$$C_{11} = C_{22}, \; C_{12} = 0, \; s_1 = a_0 C_{13}, \; s_2 = a_0 C_{23}. \qquad (3.12)$$

Розглянемо дві комбінації рівнянь (3.10), (3.11)

$$\begin{gathered}a_0'\omega_0\lambda(t) = \cos\omega_0 t\left(B_2' \cos 2\omega_0 t - B_2 \sin 2\omega_0 t + B_1' \cos\omega_0 t - B_1 \sin\omega_0 t\right) + \\ + a_0' \sin\omega_0 t\left(D_2 \cos 2\omega_0 t + D_2' \sin 2\omega_0 t + D_1 \cos\omega_0 t + D_1' \sin\omega_0 t + D_0\right),\end{gathered} \qquad (3.13)$$

$$\begin{gathered}a_0'\dot{\lambda}(t) = \sin\omega_0 t \cdot \left(B_2' \cos 2\omega_0 t - B_2 \sin 2\omega_0 t + B_1' \cos\omega_0 t - B_1 \sin\omega_0 t\right) - \\ - a_0' \cos\omega_0 t \cdot \left(D_2 \cos 2\omega_0 t + D_2' \sin 2\omega_0 t + D_1 \cos\omega_0 t + D_1' \sin\omega_0 t + D_0\right).\end{gathered} \qquad (3.14)$$

Підставляючи $\lambda(t)$ із співвідношення (3.13) в співвідношення (3.14) і вимагаючи, щоб отримана рівність була тотожністю за t з урахуванням умов (3.12), отримаємо остаточні умови існування рівномірних обертань гіростата

$$\begin{gathered}C_{ij} = 0 \;\; (i \neq j), \; C_{22} = C_{11}, \; s_2 = s_1 = 0, \\ a_0 B_{23} - \omega_0 A_{23} = 0, \; s_3 = a_0(C_{33} - C_{11}) - \frac{\omega_0}{2}(B_{11} + B_{22}) = 0.\end{gathered} \qquad (3.15)$$

Залежність $\lambda(t)$ в силу умов (3.15) спрощується

$$\lambda(t) = a_0' B_{12} \cos\omega_0 t + \frac{a_0'}{2}(B_{11} - B_{22})\sin\omega_0 t + a_0 B_{13} - \omega_0 A_{13}. \qquad (3.16)$$

Класичний випадок ($B_{ij} = 0, \; C_{ij} = 0 \;\; i, j = \overline{1,3}$) призводить на підставі рівності (3.15), (3.16) до умови $\bar{s} = \bar{0}, \; \lambda(t) = const$ і неможливості існування рівномірного обертання гіростата для випадку змінного гіростатичного моменту.

Випадок 2. $\alpha_3 \neq 0$. З рівняння (3.9) знайдемо

$$\lambda(t) = \frac{1}{\alpha_3\omega_0}\left(-\frac{C_2}{2}\cos 2\omega_0 t - \frac{C_2^{/}}{2}\sin 2\omega_0 t + C_1\cos\omega_0 t + C_1^{/}\sin\omega_0 t + \lambda_*\right), \tag{3.17}$$

де λ_* – постійна.

Підставимо вираз (3.17) в рівності (3.10), (3.11), отримаємо

$$\begin{aligned}&\omega_0(\alpha_1 a_0^{/}\sin\omega_0 t + \alpha_3 a_0)(-C_2^{/}\cos 2\omega_0 t + C_2\sin 2\omega_0 t + C_1^{/}\cos\omega_0 t - C_1\sin\omega_0 t +)\\ &+\omega_0 a_0^{/}\alpha_1\cos\omega_0 t\left(-\frac{C_2}{2}\cos 2\omega_0 t - \frac{C_2^{/}}{2}\sin 2\omega_0 t + C_1\cos\omega_0 t + C_1^{/}\sin\omega_0 t + \lambda_*\right)+\\ &+\omega_0\alpha_3(-B_2^{/}\cos 2\omega_0 t + B_2\sin 2\omega_0 t - B_1^{/}\cos\omega_0 t + B_1\sin\omega_0 t) = 0,\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}&\omega_0\alpha_1\cos\omega_0 t(-C_2^{/}\cos 2\omega_0 t + C_2\sin 2\omega_0 t + C_1^{/}\cos\omega_0 t - C_1\sin\omega_0 t) -\\ &-\omega_0\alpha_1\sin\omega_0 t\left(-\frac{C_2}{2}\cos 2\omega_0 t - \frac{C_2^{/}}{2}\sin 2\omega_0 t + C_1\cos\omega_0 t + C_1^{/}\sin\omega_0 t + \lambda_*\right)+\\ &+\omega_0\alpha_3(D_2\cos 2\omega_0 t + D_2^{/}\sin 2\omega_0 t + D_1\cos\omega_0 t + D_1^{/}\sin\omega_0 t + D_0) = 0.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Рівняння (3.18), (3.19) мають бути тотожністю за t. Ця вимога призводить до двох різних випадків існування рівномірних обертань гіростата відносно похилої осі.

У першому випадку виконуються умови

$$\begin{aligned}&\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 1,\ C_{23} = C_{13} = 0,\\ &\omega_0^2 A_{23} - a_0\omega_0 B_{23} + a_0 s_2 = 0,\ \ \omega_0^2 A_{13} - a_0\omega_0 B_{13} + a_0 s_1 = 0,\\ &\quad\omega_0(B_{22} - B_{11}) + a_0(C_{22} - C_{11}) = 0,\ \ \omega_0 B_{12} + a_0 C_{12} = 0,\\ &s_3 = \frac{1}{2}\left[a_0(2C_{33} - C_{11} - C_{22}) - \omega_0(B_{11} + B_{22})\right],\end{aligned} \tag{3.20}$$

а залежність $\lambda(t)$ з (3.17) має вигляд

$$\lambda(t) = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{a_0^{/2}}{4}(C_{11} - C_{22})\cos 2\omega_0 t - \frac{a_0^{/2}}{2}C_{12}\sin 2\omega_0 t + a_0^{/}s_2\cos\omega_0 t + a_0^{/}s_1\sin\omega_0 t + \lambda_*\right) \tag{3.21}$$

У другому випадку отримаємо наступні обмеження на параметри

$$C_{ij} = 0\ \ (i \neq j),\ C_{22} = C_{11},$$

$$\alpha_1 s_1 - \frac{\omega_0}{2}\alpha_3(B_{11}-B_{22})=0,\ \alpha_1 s_2 - \omega_0\alpha_3 B_{12}=0,\ a_0 s_2 + \omega_0(\omega_0 A_{23} - a_0 B_{23})=0,$$

$$\lambda_* = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}(\omega_0(a_0 B_{13} - \omega_0 A_{13}) - a_0 s_1),\ s_3 = \frac{1}{2}[2a_0(C_{33}-C_{11}) - \omega_0(B_{11}+B_{22})]. \qquad (3.22)$$

В силу умов (3.22) і позначень (3.8) з формули (3.17) отримаємо

$$\lambda(t) = \frac{1}{\alpha_3\omega_0}\left(a_0^/ s_2 \cos\omega_0 t - a_0^/ s_1 \sin\omega_0 t + \lambda_*\right). \qquad (3.23)$$

Оскільки варіант (3.22) отриманий за умови $\alpha_1 \neq 0$, то з формул (3.22), (3.23) витікає, що цей варіант для класичного випадку ($B_{ij}=0 \quad C_{ij}=0 \quad i,j=\overline{1,3}$) призводить до випадку постійного гіростатичного моменту.

Розглянемо задачу про рух гіростата під дією сили тяжіння для випадку (3.20), (3.21). З першої трьох рівностей витікає $\overline{\alpha}=\overline{a}$. Інші умови такі

$$\omega_0^2 A_{23} + a_0 s_2 = 0,\ \omega_0^2 A_{13} + a_0 s_1 = 0,\ s_3 = 0 \qquad (3.24)$$

Із співвідношень (3.24) при $a_0 = 0$ витікає, що вісь рівномірного обертання є головною. Функцію $\lambda(t)$ можна знайти з формули (3.21)

$$\lambda(t) = \frac{1}{\omega_0}\left(a_0^/ s_2 \cos\omega_0 t + a_0^/ s_1 \sin\omega_0 t + \lambda_*\right) \qquad (3.25)$$

Умова $s_3 = 0$ показує, що центр мас гіростата знаходиться в головній площині еліпсоїда інерції, тобто $\overline{s}\cdot\overline{a}=0$.

У випадку $a_0 \neq 0$ $\left(\theta_0 \neq \dfrac{\pi}{2}\right)$ координати s_1, s_2 центру мас набудуть конкретних значень, а вісь обертання не буде головною віссю еліпсоїда інерції. Таким чином, обертання навколо головної осі при $\overline{s} \neq 0$ може бути тільки у разі, якщо ця вісь горизонтальна. Застосування системи координат, пов'язаної з вектором $\overline{a}$ дозволяє значно спростити докази багатьох факторів. Наприклад, з системи (3.24) витікає, що для будь–якого за розподілом мас гіростата (тобто для будь–яких значень тензора інерції гіростата) координати центру мас s_1, s_2 вибираються однозначно (при $a_0 \neq 0$).

Розглянемо умови (3.20), (3.21) і (3.22), (3.23). Якщо випадок (3.20), (3.21) може переходити в класичний випадок, то випадок (3.22), (3.23) не має аналога в задачі про рух гіростата під дією сили тяжіння. Нехай в системі (3.20) $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Тоді повинні виконуватися умови

$$A_{13} = A_{23} = 0,\ B_{12} = 0,\ B_{22} = B_{11},\ s_3 = -\omega_0 B_{11}. \tag{3.26}$$

З умов (3.26) витікає, що вісь рівномірного обертання є головною віссю еліпсоїда інерції. Параметри s_1, s_2 набувають довільних значень. Для умов (3.22) варіант $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ істотних спрощень не приносить. Якщо виконані умови

$$A_{13} = A_{23} = 0,\ B_{ij} = 0\ \left(i, j = \overline{1,3}\right),\ s_3 = 0,\ a_0 = 0,\ C_{22} \neq C_{11},\ C_{12} \neq 0, \tag{3.27}$$

тоді рівномірні обертання відносно горизонтальної осі можуть відбуватися з довільною кутовою швидкістю. Вектор гіростатичного моменту спрямований по осі, паралельній осі обертання, а залежність $\lambda(t)$ можна знайти з формули (3.21)

$$\lambda(t) = \frac{1}{\omega_0}\left(\frac{1}{4}\left(C_{11} - C_{22}\right)\cos 2\omega_0 t - \frac{1}{2}C_{12}\sin 2\omega_0 t + \lambda_*\right). \tag{3.28}$$

Відмітимо, що аналогічні рухи з довільною кутовою швидкістю для варіанту (3.22) неможливі. Проте інтерес випадку (3.22), (3.23) полягає в тому, що він можливий для довільних значень θ_0, тобто у разі, коли в системі (3.22) виконуються умови $A_{23} = 0$, $s_2 = \omega_0 B_{23}$, $C_{33} = C_{11}$. Вісь обертання гіростата є головною, матриця C у рівняння (3.1) не входить. Але матриця B у рівнянні (3.1) може вважатися не нульовою, а значення λ_* у формулі (3.23) може набувати довільних значень.

3.2. Рівномірні обертання гіростата, що несе два ротори

3.2.1. Постановка задачі

Розглянемо рівняння (3.1), (3.2) з інтегралами (3.3). У пункті 3.2 вивчений випадок $\overline{\lambda}(t) = \lambda(t)\overline{\alpha}$. У цьому пункті припускатимемо, що гіростатичний момент лежить в площині векторів $\overline{\alpha}$ і $\overline{\beta}$

$$\overline{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\overline{\alpha} + \lambda_2(t)\overline{\beta} \tag{3.29}$$

$$\text{де } |\overline{\alpha}| = |\overline{\beta}| = 1, \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = 0. \tag{3.30}$$

Слідуючи (3.5), покладемо

$$\overline{\omega} = \omega_0 \overline{a}. \tag{3.31}$$

Нагадаємо, що тут ω_0 – постійна, відмінна від нуля; $\overline{a}$ – одиничний вектор, незмінно пов'язаний з тілом–носієм. Оскільки $\dot{\overline{a}} = 0$ і вектор $\overline{a}$ колінеарний вектору кутової швидкості $\overline{\omega}$, то $\dfrac{d\overline{a}}{dt} = 0$. Це означає, що вектор $\overline{a}$ незмінний в нерухомому просторі. Вважатимемо, що він не співпадає з вектором $\overline{\nu}$. Видозмінимо отримання формул (3.6). Підставимо (3.31) в рівняння (3.2)

$$\dot{\overline{\nu}} = \omega_0 (\overline{\nu} \times \overline{a}). \tag{3.32}$$

Якщо помножимо ліву і праву частини рівняння (3.32) скалярно на $\overline{a}$, то отримаємо

$$\overline{a} \cdot \overline{\nu} = a_0 \quad \left(a_0 = (\overline{a}, \hat{\ } \overline{\nu}) = const \right). \tag{3.33}$$

Як показано в [55], інваріантному співвідношенню (3.33), геометричному інтегралу з (3.3) і рівнянню (3.32) задовольняє наступна вектор–функція

$$\overline{\nu}(t) = (a_0' \sin \omega_0 t,\ a_0' \cos \omega_0 t,\ a_0), \tag{3.34}$$

де $a_0' = \sin \theta_0$. Функцію (3.34) можна розглядати, як загальний розв'язок рівняння (3.32).

Підставимо вирази (3.29), (3.31) в рівняння (3.1)

$$\begin{gathered} \dot{\lambda}_1(t)\overline{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\overline{\beta} = \omega_0 \left[\lambda_1(t)(\overline{\alpha} \times \overline{a}) + \lambda_2(t)(\overline{\beta} \times \overline{a}) \right] + \\ + \omega_0^2 (A\overline{a} \times \overline{a}) + \omega_0 (\overline{a} \times B\overline{\nu}) + \overline{s} \times \overline{\nu} + \overline{\nu} \times C\overline{\nu}, \end{gathered} \tag{3.35}$$

Тут $\overline{\nu} = \overline{\nu}(t)$, де $\overline{\nu}(t)$ визначається рівністю (3.34).

Позначимо через $\overline{\gamma} = \overline{\alpha} \times \overline{\beta} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Тоді в силу $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ отримаємо

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \ \ \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \ \ \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \tag{3.36}$$

В силу $\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = 0$ вектори $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ складають ортогональний базис. Тому розглянемо рівняння, які витікають при проектуванні лівої і правої частин (3.35) на ці вектори

$$\dot{\lambda}_1(t) = \omega_0 \gamma_3 \lambda_2(t) + A_0 + A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t + A_3 \sin 2\omega_0 t + A_4 \cos 2\omega_0 t, \quad (3.37)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\omega_0 \gamma_3 \lambda_1(t) + B_0 + B_1 \sin \omega_0 t + B_2 \cos \omega_0 t + B_3 \sin 2\omega_0 t + B_4 \cos 2\omega_0 t, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} &\omega_0 \left(\beta_3 \lambda_1(t) - \alpha_3 \lambda_2(t)\right) + C_0 + C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t + \\ &+ C_3 \sin 2\omega_0 t + C_4 \cos 2\omega_0 t = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

У рівняннях (3.37) – (3.39) введені позначення

$$A_0 = \alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1,\ B_0 = \beta_1 c_2 - \beta_2 c_1,\ C_0 = \gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1,$$

$$A_1 = a_0' \left(\alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_0 - \alpha_3 b_2\right),\ A_2 = a_0' \left(\alpha_2 b_0 - \alpha_1 b_1' - \alpha_3 b_2'\right),$$

$$A_3 = \frac{1}{2} a_0'^2 \left[\alpha_1 C_{13} - \alpha_2 C_{23} + \alpha_3 \left(C_{22} - C_{11}\right)\right],$$

$$A_4 = \frac{1}{2} a_0'^2 \left(\alpha_1 C_{23} + \alpha_2 C_{13} - 2\alpha_3 C_{12}\right),$$

$$B_1 = a_0' \left(\beta_2 b_1 - \beta_1 b_0 - \beta_3 b_2\right),\ B_2 = a_0' \left(\beta_2 b_0 - \beta_1 b_1' + \beta_3 b_2'\right),$$

$$B_3 = \frac{1}{2} a_0'^2 \left[\beta_1 C_{13} - \beta_2 C_{23} + \beta_3 \left(C_{22} - C_{11}\right)\right],$$

$$B_4 = \frac{1}{2} a_0'^2 \left(\beta_1 C_{23} + \beta_2 C_{13} - 2\beta_3 C_{12}\right),$$

$$C_1 = a_0' \left(\gamma_2 b_1 - \gamma_1 b_0 - \gamma_3 b_2\right),\ C_2 = a_0' \left(\gamma_2 b_0 - \gamma_1 b_1' + \gamma_3 b_2'\right), \quad (3.40)$$

$$C_3 = \frac{1}{2} a_0'^2 \left[\gamma_1 C_{13} - \gamma_2 C_{23} + \gamma_3 \left(C_{22} - C_{11}\right)\right],$$

$$C_4 = \frac{1}{2} a_0'^2 \left(\gamma_1 C_{23} + \gamma_2 C_{13} - 2\gamma_3 C_{12}\right),$$

$$c_1 = \omega_0^2 A_{13} - a_0 \omega_0 B_{13} + a_0 s_1 + \frac{C_{13}}{2} \left(a_0'^2 - 2a_0^2\right),$$

$$c_2 = \omega_0^2 A_{23} - a_0 \omega_0 B_{23} + a_0 s_2 + \frac{C_{23}}{2} \left(a_0'^2 - 2a_0^2\right),$$

$$b_0 = \omega_0 B_{12} + a_0 C_{12},\ b_1 = s_3 + \omega_0 B_{11} + a_0 \left(C_{11} - C_{33}\right),\ b_2 = s_1 - a_0 C_{23},$$

$$b_1' = s_3 + \omega_0 B_{22} + a_0 \left(C_{22} - C_{33}\right),\ b_2' = s_2 - a_0 C_{13}.$$

Таким чином, задачу про дослідження умов існування рівномірних рухів гіростата (3.31) зведено до аналізу рішень рівнянь (3.37), (3.38) за наявності у них інваріантного співвідношення (3.39).

Дослідження рівнянь (3.37) – (3.39). Згідно з методом інваріантних співвідношень вичислимо першу і другу похідні від інваріантного співвідношення (3.39) в силу рівнянь (3.37), (3.38)

$$\begin{aligned}&\gamma_3\omega_0\left(\beta_3\lambda_2(t)+\alpha_3\lambda_1(t)\right)+\left(\beta_3A_0-\alpha_3B_0\right)+\left(\beta_3A_1-\alpha_3B_1-C_2\right)\sin\omega_0t+\\&+\left(\beta_3A_2-\alpha_3B_2+C_1\right)\cos\omega_0t+\left(\beta_3A_3-\alpha_3B_3-2C_4\right)\sin2\omega_0t+\\&+\left(\beta_3A_4-\alpha_3B_4+2C_3\right)\cos2\omega_0t=0,\end{aligned}\tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}&\gamma_3^2\omega_0\left(\alpha_3\lambda_2(t)-\beta_3\lambda_1(t)\right)+\gamma_3\left(\alpha_3A_0+\beta_3B_0\right)+\\&+\left(\gamma_3\beta_3B_1+\gamma_3\alpha_3A_1-\beta_3A_2+\alpha_3B_2-C_1\right)\sin\omega_0t+\\&+\left(\gamma_3\beta_3B_2+\gamma_3\alpha_3A_2-\beta_3A_1-\alpha_3B_1-C_2\right)\cos\omega_0t+\\&+\left(\gamma_3\beta_3B_3+\gamma_3\alpha_3A_3-2\beta_3A_4+2\alpha_3B_4-4C_3\right)\sin2\omega_0t+\\&+\left(\gamma_3\beta_3B_4+\gamma_3\alpha_3A_4+2\beta_3A_3-2\alpha_3B_3-4C_4\right)\cos2\omega_0t.\end{aligned}\tag{3.42}$$

Вигляд співвідношень (3.41), (3.42) показує, що обчислення похідних від (3.39) більш високого порядку недоцільне.

3.2.2. Розв'язок задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом, що несе два ротори, в окремих випадках

Розгляд інваріантних співвідношень (3.39), (3.41), (3.42) робитимемо в наступних трьох варіантах

$$1.\ \alpha_3=0,\ \beta_3=0;\ \ 2.\ \gamma_3=0,\ \alpha_3^2+\beta_3^2\neq0;\ \ 3.\ \gamma_3\neq0,\ \alpha_3^2+\beta_3^2\neq0. \tag{3.43}$$

Вивчимо перший варіант з (3.43). Покладемо в рівняннях (3.37), (3.38), співвідношенні (3.39) і в позначеннях (3.40) : $\alpha_3=0,\ \beta_3=0$. Рівність (3.39) має бути тотожністю за t. Тобто повинні виконуватися умови $C_i=0\ \left(i=\overline{0,\,4}\right)$. На основі (3.40) з них отримаємо (систему координат без обмеження спільності можна вибрати так, щоб виконувалася рівність $\alpha_2=0,\ \beta_1=0$)

$$C_{12}=0,\quad C_{22}=C_{11},\quad s_1=a_0C_{13},\quad s_2=a_0C_{23}. \tag{3.44}$$

Для інтегрування рівнянь (3.37), (3.38) виключимо з рівняння (3.37) функцію $\lambda_2(t)$ за допомогою рівняння (3.38). Використовуючи умови (3.44), отримаємо

$$\ddot{\lambda}_1(t)+\omega_0^2\lambda_1(t)=\omega_0 B_0+D_1\sin\omega_0 t+D_3\sin 2\omega_0 t+D_4\cos 2\omega_0 t\,, \qquad (3.45)$$

де

$$\begin{gathered}D_1=a_0'\omega_0\left[2s_3+\omega_0\left(B_{11}+B_{22}\right)+2a_0\left(C_{11}-C_{33}\right)\right]\\ D_3=-\frac{3}{2}a_0'^2\omega_0 C_{23},\quad D_4=\frac{3}{2}a_0'^2\omega_0 C_{13}.\end{gathered} \qquad (3.46)$$

Із структури рівняння (3.45) виходить, що в загальному випадку $(D_1\neq 0)$ загальний розв’язок рівняння (3.45) міститиме віковий член. Цей варіант не представляє інтересу для додатків. Тому в (3.45) покладемо $D_1=0$ або в силу (3.46) отримаємо умову на параметри

$$2s_3+\omega_0\left(B_{11}+B_{22}\right)+2a_0\left(C_{11}-C_{33}\right)=0\,. \qquad (3.47)$$

Розв’язок рівняння (3.45) за наявності обмеження (3.47) такий

$$\lambda_1(t)=C_1^*\sin\omega_0 t+C_2^*\cos\omega_0 t+\frac{B_0}{\omega_0}-\frac{D_3}{3\omega_0^2}\sin 2\omega_0 t-\frac{D_4}{3\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t\,. \qquad (3.48)$$

Функцію $\lambda_2(t)$ знайдемо, підставивши вираз (3.48) в рівняння (3.37)

$$\begin{gathered}\lambda_2(t)=\frac{1}{\gamma_3\omega_0}\left[-A_0\left(\omega_0 C_1^*-A_2\right)\cos\omega_0 t-\left(\omega_0 C_2^*+A_1\right)\sin\omega_0 t+\right.\\ \left.+\left(\frac{2D_4}{3\omega_0}-A_3\right)\sin 2\omega_0 t-\left(\frac{2D_3}{3\omega_0}+A_4\right)\cos 2\omega_0 t\right].\end{gathered} \qquad (3.49)$$

Таким чином, в першому випадку з (3.43) вектор $\bar{\gamma}$ співпадає з вектором $\bar{a}$, параметри задачі задовольняють умовам (3.44), (3.47), розв’язок рівнянь (3.37), (3.38) має вигляд (3.48) (3.49).

Вивчимо випадок 2 з (3.43). В силу (3.36) параметри α_1, α_2, β_1, β_2 задовольняють рівності $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0$. Очевидно, що тоді $\alpha_3^2+\beta_3^2=1$. Рівність (3.39) міститиме функції $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ (або одну з них), а перша похідна з (3.41) буде функцією змінної t. Тому повинна виконуватися рівності

$$\beta_3 A_0 - \alpha_3 B_0 = 0,\ \beta_3 A_1 - \alpha_3 B_1 - C_2 = 0,\ \beta_3 A_2 - \alpha_3 B_2 + C_1 = 0,$$
$$\beta_3 A_3 - \alpha_3 B_3 - 2C_4 = 0,\ \beta_3 A_4 - \alpha_3 B_4 + 2C_3 = 0. \tag{3.50}$$

Внесемо значення $A_i,\ B_i,\ C_i\ \left(i = \overline{0,\ 4}\right)$ з (3.40) в систему (3.50). Тоді отримаємо

$$\gamma_1\mu_0 = 0,\ \gamma_2\mu_0 = 0,\ C_{13}\gamma_2 + C_{23}\gamma_1 = 0,\ C_{23}\gamma_2 - C_{13}\gamma_1 = 0, \tag{3.51}$$

$$\gamma_1\left(\omega_0^2 A_{13} - \omega_0 a_0 B_{13} + a_0 s_1\right) + \gamma_2\left(\omega_0^2 A_{23} - \omega_0 a_0 B_{23} + a_0 s_2\right) = 0, \tag{3.52}$$

де

$$\mu_0 = 2s_3 + \omega_0\left(B_{11} + B_{22}\right) + a_0\left(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}\right). \tag{3.53}$$

Оскільки $\gamma_3 = 0,\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$, то з рівнянь (3.51) виходить, що параметр μ_0 дорівнює нулю і величини $C_{13},\ C_{23}$ задовольняють рівностям

$$C_{13} = 0,\ C_{23} = 0. \tag{3.54}$$

З (3.53) витікає

$$2s_3 + \omega_0\left(B_{11} + B_{22}\right) + a_0\left(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}\right) = 0. \tag{3.55}$$

Отже, умовами існування рівномірних обертань гіростата у випадку $\gamma_3 = 0$ є рівності (3.52), (3.54), (3.55). При цьому рівність (3.55) може служити умовою на значення ω_0– швидкості обертання в припущенні $B_{11} + B_{22} \neq 0$. Якщо $B_{11} + B_{22} = 0$, $C_{11} + C_{22} - 2C_{33} \neq 0$, тоді з (3.55) можна визначити значення кута θ_0. Умову (3.52) можна трактувати при певних обмеженнях, як умову на параметри $\omega_0,\ a_0$. При цьому вісь рівномірного обертання може бути і головною, тобто може виконуватися рівність $A_{23} = 0,\ A_{13} = 0$. Вона в нерухомому просторі може займати й горизонтальне положення.

Функції $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t)$ визначимо з рівнянь (3.37) (3.38)

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{\omega_0}\left(A_2 \sin\omega_0 t - A_1 \cos\omega_0 t + \frac{A_4}{2}\sin 2\omega_0 t - \frac{A_3}{2}\cos 2\omega_0 t\right) + \mu_1,$$
$$\lambda_2(t) = \frac{1}{\omega_0}\left(B_2 \sin\omega_0 t - B_1 \cos\omega_0 t + \frac{B_4}{2}\sin 2\omega_0 t - \frac{B_3}{2}\cos 2\omega_0 t\right) + \mu_2. \tag{3.56}$$

У формулах (3.56) довільні постійні $\mu_1,\ \mu_2$ задовольняють умові

$$\left(\mu_1\beta_3 - \mu_2\alpha_3\right)\omega_0 + C_0 = 0.$$

Розглянемо третій випадок з (3.43). Підставимо вираз $\beta_3\lambda_1(t)-\alpha_3\lambda_2(t)$ з рівняння (3.39) в рівняння (3.42) і вимагатимемо, щоб отримане рівняння було тотожністю за t. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}
&\gamma_3 C_0+\alpha_3 A_0+\beta_3 B_0=0,\\
&C_1\left(\gamma_3^2-1\right)+\gamma_3\left(\beta_3 B_1+\alpha_3 A_1\right)+\alpha_3 B_2-\beta_3 A_2=0,\\
&C_2\left(\gamma_3^2-1\right)+\gamma_3\left(\beta_3 B_2+\alpha_3 A_2\right)+\beta_3 A_1-\alpha_3 B_1=0,\\
&C_3\left(\gamma_3^2-4\right)+\gamma_3\left(\beta_3 B_3+\alpha_3 A_3\right)-2\beta_3 A_4+2\alpha_3 B_4=0,\\
&C_4\left(\gamma_3^2-4\right)+\gamma_3\left(\beta_3 B_4+\alpha_3 A_4\right)+2\beta_3 A_3-2\alpha_3 B_3=0.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

На підставі рівностей $|\bar{\alpha}|=1,\ |\bar{\beta}|=1,\ |\bar{\gamma}|=1,\ \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=0,\ \bar{\alpha}\cdot\bar{\gamma}=0,\ \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=0$, неважко довести справедливість рівностей

$$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1,\quad \gamma_1\gamma_3+\beta_1\beta_3+\alpha_1\alpha_3=0,\quad \alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0.$$

Використовуючи ці рівності, підставимо вирази (3.40) в систему (3.57). Після декількох перетворень маємо перші дві рівності з (3.51), в яких μ_0 має значення (3.53) і умови

$$\gamma_3 C_{12}-\gamma_2 C_{13}-\gamma_1 C_{23}=0,\quad \gamma_3\left(C_{22}-C_{11}\right)-2\gamma_2 C_{23}+2\gamma_1 C_{13}=0. \tag{3.58}$$

Якщо в рівності $\gamma_1\mu_0=0,\ \gamma_2\mu_0=0$, покласти $\gamma_1=0,\ \gamma_2=0$, тоді $\gamma_3=1$ і вектор $\bar{\gamma}$ буде співнаправлений з вектором $\bar{a}$. В цьому випадку повинні виконуватися умови $\alpha_3=0,\ \beta_3=0$, які призводять до вже розглянутого вище першого варіанта з (3.43). Тому необхідно вважати, що $\mu_0=0$. У параметрах задачі ця умова призводить до рівності (3.55). Таким чином, рівняння (3.42) є наслідком рівняння (3.39) при виконанні умов (3.55) (3.58). Функції $\lambda_1(t)$ і $\lambda_2(t)$ знайдемо з рівнянь (3.39), (3.41)

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t)=\frac{1}{\omega_0\gamma_3\left(\alpha_3^2+\beta_3^2\right)}\Big\{&\left[\alpha_3^2 B_0-\beta_3\left(\gamma_3 C_0+\alpha_3 A_0\right)\right]+\\
&+\left[\alpha_3^2 B_1-\beta_3\left(\gamma_3 C_1+\alpha_3 A_1\right)-\alpha_3 C_2\right]\sin\omega_0 t+\\
&+\left[\alpha_3^2 B_2-\beta_3\left(\gamma_3 C_2+\alpha_3 A_2\right)-\alpha_3 C_1\right]\cos\omega_0 t+\\
&+\left[\alpha_3^2 B_3-\beta_3\left(\gamma_3 C_3+\alpha_3 A_3\right)+2\alpha_3 C_4\right]\sin 2\omega_0 t+\\
&+\left[\alpha_3^2 B_4-\beta_3\left(\gamma_3 C_4+\alpha_3 A_4\right)-2\alpha_3 C_3\right]\cos 2\omega_0 t\Big\},
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\lambda_2(t)=\frac{1}{\omega_0\gamma_3\left(\alpha_3^2+\beta_3^2\right)}\Big\{\left[-\beta_3^2A_0+\alpha_3\left(\gamma_3C_0+\beta_3B_0\right)\right]+$$
$$+\left[-\beta_3^2A_1+\alpha_3\left(\gamma_3C_1+\beta_3B_1\right)+\beta_3C_2\right]\sin\omega_0t+$$
$$+\left[-\beta_3^2A_2+\alpha_3\left(\gamma_3C_2+\beta_3B_2\right)-\beta_3C_1\right]\cos\omega_0t+ \qquad (3.60)$$
$$+\left[-\beta_3^2A_3+\alpha_3\left(\gamma_3C_3+\beta_3B_3\right)+2\beta_3C_4\right]\sin2\omega_0t+$$
$$+\left[-\beta_3^2A_4+\alpha_3\left(\gamma_3C_4+\beta_3B_4\right)-2\beta_3C_3\right]\cos2\omega_0t\Big\}.$$

З (3.59), (3.60) витікає, що компоненти гіростатичного моменту $\overline{\lambda}(t)$ є періодичними функціями часу з періодом $\dfrac{\pi}{\omega_0}$.

Проведемо аналіз умов існування (3.55) (3.58). Якщо в початковому рівнянні (3.1) відсутня матриця C, тобто $C=0$, тоді рівність (3.58) стає тотожністю, а умова (3.55) набуде вигляду

$$2s_3+\omega_0\left(B_{11}+B_{22}\right)=0. \qquad (3.61)$$

Якщо $B_{11}+B_{22}\neq0$, тоді з (3.61) маємо $\omega_0=-\dfrac{2s_3}{B_{11}+B_{22}}$.

Отриманий результат можна трактувати таким чином. Оскільки немає умов на параметри α_i, β_i, тоді вектори $\overline{\alpha}$ і $\overline{\beta}$ можуть займати довільне положення в тілі–носії. Швидкість рівномірного обертання гіростата фіксована і залежить від параметрів s_3 і B_{11}, B_{22}. Кут θ_0 не входить в обговорювані умови, тому вісь рівномірного обертання гіростата може займати довільне положення в нерухомому просторі. Якщо в рівності (3.61) $B_{11}+B_{22}=0$, тоді $s_3=0$. В цьому випадку швидкість рівномірного обертання гіростата може бути довільною, але барицентрична вісь ортогональна осі рівномірного обертання. Параметр θ_0, як і у попередньому випадку, залишається довільним.

Нехай матриця $C\neq0$. З рівності (3.58) в силу $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$маємо

$$\gamma_1=\frac{2C_{12}C_{23}+C_{13}\left(C_{11}-C_{22}\right)}{2\left(C_{13}^2+C_{23}^2\right)}\gamma_3,\quad \gamma_2=\frac{2C_{12}C_{13}-C_{23}\left(C_{11}-C_{22}\right)}{2\left(C_{13}^2+C_{23}^2\right)}\gamma_3,$$
$$\gamma_3=2\sqrt{\frac{C_{13}^2+C_{23}^2}{4\left(C_{12}^2+C_{13}^2+C_{23}^2\right)+\left(C_{11}-C_{22}\right)}}. \qquad (3.62)$$

Компоненти вектора $\bar{\gamma}$ з (3.62) визначають в тілі–носії деяку вісь. В силу постановки задачі необхідно вимогати, щоб вектор гіростатичного моменту знаходився в площині, ортогональній вказаній осі. Ця властивість обмежує спільність положення векторів $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$.

Розглянемо рівність (3.55). Якщо в ній покласти

$B_{11} + B_{22} = 0, \; C_{11} + C_{22} - 2C_{33} = 0,$

тоді в рішенні (3.59), (3.60) параметри ω_0 і a_0 можуть приймати довільні значення $\left(|a_0| < 1\right)$. Оскільки $s_3 = 0$, то вісь, що несе узагальнений центр мас, є ортогональною осі рівномірного обертання.

При виконанні умови $B_{11} + B_{22} \neq 0$ з рівності (3.55) виходить, що рівномірне обертання гіростата може відбуватися з фіксованим значенням ω_0. Умови на положення барицентричної осі в тілі–носії немає.

Коли $B_{11} + B_{22} = 0$, $C_{11} + C_{22} - 2C_{33} \neq 0$, з рівності (3.55) можна визначити значення

$$a_0 = \frac{2s_3}{2C_{33} - C_{11} - C_{22}}. \qquad (3.63)$$

Тобто, рівномірне обертання відбуватиметься навколо фіксованої осі в нерухомому просторі. При цьому необхідно вимагати, щоб права частина виразу (3.63) не перевершувала за модулем одиниці.

У загальному випадку умова (3.55) може служити обмеженням на швидкість рівномірного обертання і кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{\nu}$.

3.3. Висновки до розділу

Для задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом, який спрямовано вздовж певної осі в тілі–носії, отримано три розв'язки узагальнених рівнянь Кірхгофа–Пуассона. Перший розв'язок характеризується ортогональністю осі рівномірного обертання і осі гіростатичного моменту. Другий розв'язок визначається колінеарністю вказаних осей. Третій розв'язок отримано за умови, яка виключає умови перших двох розв’язків. Вказано зв'язок знайдених тут результатів з результатами для варіанту дії на гіростат тільки сили тяжіння [30]. Показано, що вживаний тут підхід значно простіше підходів, розглянутих в роботах [30, 84]. Встановлено, що компоненти вектора гіростатичного моменту є тригонометричними функціями часу (див. формули (3.16), (3.17), (3.23), (3.25), (3.28)).

Отримано умови існування рівномірних обертань гіростата, що несе два ротори. Дослідження цих умов вдалося розбити на вивчення трьох варіантів. Перший варіант відповідає випадку, коли гіростатичний момент знаходиться в площині, ортогональній осі рівномірного обертання. Для нього повинні виконуватися умови (3.44), (3.47), а розв’язок зредукованих рівнянь має вигляд (3.48) (3.49). У другому варіанті вектори $\overline{a}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ компланарні, а параметри задачі повинні задовольняти рівностям (3.54), (3.55), які відрізняються від умов (3.44) (3.47). Третій варіант характеризується загальним розташуванням векторів $\overline{\alpha}$ і $\overline{\beta}$ тільки у разі, коли в рівняння (3.1) не входить матриця C. Якщо ж $C \neq 0$,то вектори $\overline{\alpha}$ і $\overline{\beta}$, які визначають вектор гіростатичного моменту, лежать в деякій площині, ортогональній осі з направляючим вектором (3.62). Загальна властивість знайдених розв’язків полягає в тому, що при виконанні умови $B_{11} + B_{22} = 0$ рівномірне обертання гіростата може відбуватися з довільною кутовою швидкістю.

РОЗДІЛ 4
НАПІВРЕГУЛЯРНІ ПРЕЦЕСІЇ ПЕРШОГО ТИПУ В ЗАДАЧІ ПРО РУХ ГІРОСТАТА ЗІ ЗМІННИМ ГІРОСТАТИЧНИМ МОМЕНТОМ

4.1. Спеціальні випадки

У цьому розділі розглянуто задачі про рух гіростата зі змінним гіростатичним моментом, спрямованим за деякою віссю в тілі–носії. Припускається, що на гіростат діють потенціальні і гіроскопічні сили, для яких рівняння руху описуються узагальненими рівняннями класу Кірхгофа–Пуассона. В якості програмного руху прийняті напіврегулярні прецесії тіла–носія відносно вертикалі. До теперішнього часу для цієї задачі розглянуто рівномірні обертання [29, 30, 84], регулярні прецесії [31, 32, 104, 105], маятникові рухи під дією сили тяжіння [32].

Для дослідження умов існування прецесій в дисертації використаний метод А.В. Мазнєва [103], розроблений ним для загального випадку прецесій гіростата зі змінним гіростатичним моментом.

4.1.1. Постановка задачі. Запишемо рівняння руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом

$$A\dot{\overline{\omega}} = A\overline{\omega}\times\overline{\omega} - \mathrm{L}(t)\overline{\alpha} + \overline{\omega}\times\left(B\overline{\nu} - \lambda(t)\overline{\alpha}\right) + \overline{\nu}\times\left(C\overline{\nu} - \overline{s}\right), \qquad (4.1)$$

$$\dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu}\times\overline{\omega}, \; \dot{\lambda}(t) = \mathrm{L}(t). \qquad (4.2)$$

У рівняннях (4.1), (4.2) попередні позначення: $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор кутової швидкості тіла–носія; $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – одиничний вектор, що вказує напрямок магнітного поля; $A = (A_{ij})$ – тензор інерції гіростата, компоненти якого сформовано в залежності від способу обертання несених тіл; $\mathrm{L}(t)$ – функція, що характеризує проекції сил, що діють на несені тіла; $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – одиничний вектор, незмінно пов'язаний з тілом–носієм; $\overline{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, співнаправлений з вектором узагальненого центру мас гіростата; $B = (B_{ij})$,

$C=(C_{ij})$ – постійні матриці третього порядку; точки над змінними $\overline{\omega}$, $\overline{\nu}$ і $\lambda(t)$ означають відносну похідну за часом.

Рівняння (4.1), (4.2) допускають два перші інтеграли

$$\overline{\nu}\cdot\overline{\nu}=1, \qquad (A\overline{\omega}+\lambda(t)\overline{\alpha})\cdot\overline{\nu}-\frac{1}{2}(B\overline{\nu}\cdot\overline{\nu})=k, \tag{4.3}$$

де k – довільна постійна.

Поставимо задачу визначення функції L(t) і параметрів A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, α_{i}, s_i за наявності яких рівняння (4.1), (4.2) описують напіврегулярну прецесію першого типу.

Нехай в процесі руху кут між одиничним вектором $\overline{a}$, незмінно пов'язаним з несеним тілом довільним за розподілом мас, і вектором $\overline{\nu}$ постійний і дорівнює θ_0. Тоді має місце інваріантне співвідношення

$$\overline{a}\cdot\overline{\nu}=a_0, \; (a_0=\cos\theta_0). \tag{4.4}$$

Для напіврегулярних прецесій першого типу мають місце наступні вирази

$$\overline{\omega}=\dot{\varphi}\overline{a}+m_0\overline{\nu}, \quad \overline{\nu}=(a_0'\sin\varphi, a_0'\cos\varphi, a_0), \quad \overline{a}=(0,0,1), \tag{4.5}$$

де $a_0'=\sin\theta_0$, $\dot{\varphi}$ – швидкість власного обертання гіростата, $m_0=const$, при підстановці яких в рівняння Пуассона з (4.2), отримуємо тотожність.

Розглянемо рівняння (4.1) за умови (4.5). Внесемо вираз ω з (4.5) в рівняння (4.1) :

$$\begin{aligned}&\dot{\lambda}(t)\overline{\alpha}+\ddot{\varphi}A\overline{a}+\dot{\varphi}m_0[Sp(A)(\overline{\nu}\times\overline{a})-2(A\overline{\nu}\times\overline{a})]-\lambda(t)[\dot{\varphi}(\overline{\alpha}\times\overline{a})+m_0(\overline{\alpha}\times\overline{\nu})]-\\&-\dot{\varphi}^2(A\overline{a}\times\overline{a})-m_0^{\;2}(A\overline{\nu}\times\overline{\nu})-\dot{\varphi}(\overline{a}\times B\overline{\nu})-m_0(\overline{\nu}\times B\overline{\nu})-\overline{\nu}\times(C\overline{\nu}-\overline{s})=0\end{aligned}, \tag{4.6}$$

де $Sp(A)$ – слід матриці A.

Нехай вектори $\overline{a}$, $\overline{\nu}$, $\overline{a}\times\overline{\nu}$ складають базис, розглянемо проекції лівої частини (4.6) на осі цього базису :

$$\begin{aligned}&\dot{\lambda}(t)(\overline{\alpha}\cdot\overline{a})+\ddot{\varphi}(A\overline{a}\cdot\overline{a})-\lambda(t)m_0[\overline{a}\cdot(\overline{\alpha}\times\overline{\nu})]-m_0^{\;2}[\overline{a}\cdot(A\overline{\nu}\times\overline{\nu})]-\\&\quad-m_0[\overline{a}\cdot(\overline{\nu}\times B\overline{\nu})]-[\overline{a}\cdot(\overline{s}\times\overline{\nu})]-\overline{a}\cdot(\overline{\nu}\times C\overline{\nu})=0,\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}&\dot{\lambda}(t)(\overline{\alpha}\cdot\overline{\nu})+\ddot{\varphi}(A\overline{a}\cdot\overline{\nu})+2\dot{\varphi}m_0[A\overline{\nu}\cdot(\overline{\nu}\times\overline{a})]+\lambda(t)\dot{\varphi}[\overline{\alpha}\cdot(\overline{\nu}\times\overline{a})]-\\&-\dot{\varphi}[B\overline{\nu}\cdot(\overline{\nu}\times\overline{a})]+\dot{\varphi}^2[A\overline{a}\cdot(\overline{\nu}\times\overline{a})]=0\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\dot{\lambda}(t)[\overline{\alpha}\cdot(\overline{v}\times\overline{a})]+\ddot{\varphi}[A\overline{a}\cdot(\overline{v}\times\overline{a})]+\lambda(t)\{\dot{\varphi}[a_0(\overline{\alpha}\cdot\overline{a})-(\overline{\alpha}\cdot\overline{v})]+$$
$$+m_0[(\overline{\alpha}\cdot\overline{a})-a_0(\overline{\alpha}\cdot\overline{v})]\}+\dot{\varphi}m_0[a_0'^2 Sp(A)-2(A\overline{v}\cdot\overline{v})+2a_0(A\overline{a}\cdot\overline{v})]-$$
$$-m_0^2[(a_0(A\overline{v}\cdot\overline{v})-(A\overline{a}\cdot\overline{v})]-\dot{\varphi}^2[(A\overline{a}\cdot\overline{v})-a_0(A\overline{a}\cdot\overline{a})]+ \qquad (4.9)$$
$$+\dot{\varphi}[(B\overline{v}\cdot\overline{v})-a_0(B\overline{a}\cdot\overline{v})]+m_0[a_0(B\overline{v}\cdot\overline{v})-(B\overline{a}\cdot\overline{v})]+$$
$$+(\overline{a}\cdot\overline{s})-a_0(\overline{s}\cdot\overline{v})+a_0(C\overline{v}\cdot\overline{v})-(C\overline{v}\cdot\overline{a})=0.$$

Система диференціальних рівнянь (4.7) – (4.9) на відміну від системи (4.1), (4.2) є системою диференціальних рівнянь відносно функцій $\varphi(t)$ і $\lambda(t)$.

Для отримання скалярних рівнянь, що витікають з системи (4.7) – (4.9), введемо наступні позначення:

$$C_{11}^*=m_0^2A_{11}-m_0B_{11}-C_{11},\ C_{12}^*=m_0^2A_{12}-m_0B_{12}-C_{12},\ C_{13}^*=m_0^2A_{13}-m_0B_{13}-C_{13},$$
$$C_{22}^*=m_0^2A_{22}-m_0B_{22}-C_{22},\ C_{23}^*=m_0^2A_{23}-m_0B_{23}-C_{23},\ C_{33}^*=m_0^2A_{33}-m_0B_{33}-C_{33},$$
$$B_{11}^*=B_{11}-2m_0A_{11},\qquad B_{12}^*=B_{12}-2m_0A_{12},\qquad B_{13}^*=B_{13}-2m_0A_{13}, \qquad (4.10)$$
$$B_{22}^*=B_{22}-2m_0A_{22},\qquad B_{23}^*=B_{23}-2m_0A_{23},\qquad B_{33}^*=B_{33}-2m_0A_{33}.$$

Скориставшись останніми двома векторними рівностями з (4.5) з урахуванням (4.10), з рівнянь (4.7) – (4.9) маємо

$$\alpha_3\dot{\lambda}(t)+A_{33}\ddot{\varphi}-a_0'm_0(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi)\lambda(t)+\frac{1}{2}a_0'^2(C_{22}^*-C_{11}^*)\sin 2\varphi-$$
$$-a_0'^2C_{12}^*\cos 2\varphi+a_0'(a_0C_{23}^*+s_2)\sin\varphi-a_0'(a_0C_{13}^*+s_1)\cos\varphi=0, \qquad (4.11)$$

$$(a_0'\alpha_2\cos\varphi+a_0'\alpha_1\sin\varphi+a_0\alpha_3)\dot{\lambda}(t)+a_0'(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi)\lambda(t)\dot{\varphi}+$$
$$+(a_0'A_{23}\cos\varphi+a_0'A_{13}\sin\varphi+a_0A_{33})\ddot{\varphi}+a_0'(A_{13}\cos\varphi-A_{23}\sin\varphi)\dot{\varphi}^2+ \qquad (4.12)$$
$$+a_0'\left(a_0'\left(\frac{1}{2}(B_{22}^*-B_{11}^*)\sin 2\varphi-B_{12}^*\cos 2\varphi\right)+a_0(B_{23}^*\sin\varphi-B_{13}^*\cos\varphi)\right)\dot{\varphi}=0,$$

$$(\alpha_1\cos\varphi-\alpha_2\sin\varphi)\dot{\lambda}(t)-((\alpha_1\sin\varphi+\alpha_2\cos\varphi)(a_0m_0+\dot{\varphi})-a_0'\alpha_3m_0)\lambda(t)+$$
$$+(A_{13}\cos\varphi-A_{23}\sin\varphi)\ddot{\varphi}-(A_{23}\cos\varphi+A_{13}\sin\varphi)\dot{\varphi}^2+(a_0'(B_{12}^*\sin 2\varphi+$$
$$+\frac{1}{2}(B_{22}^*-B_{11}^*)\cos 2\varphi)+a_0(B_{13}^*\sin\varphi+B_{23}^*\cos\varphi)+\frac{1}{2}(a_0'(B_{11}^*+B_{22}^*+ \qquad (4.13)$$
$$+2m_0(A_{11}+A_{22}+A_{33})))\dot{\varphi}-a_0a_0'(C_{12}^*\sin 2\varphi+\frac{1}{2}(C_{22}^*-C_{11}^*)\cos 2\varphi)-$$

$$-(a_0 s_1 + C_{13}^*(a_0{}^2 - a_0'^2))\sin\varphi - (a_0 s_2 + C_{23}^*(a_0{}^2 - a_0'^2))\cos\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}a_0'(2s_3 + a_0(2C_{33}^* - C_{11}^* - C_{22}^*)) = 0$$

Рівняння (4.11) – (4.13) допускають інтеграл

$$(a_0'(\alpha_2\cos\varphi + \alpha_1\sin\varphi) + a_0\alpha_3)\lambda(t) + (a_0'(A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi) + a_0 A_{33})\dot\varphi -$$

$$-\frac{1}{2}a_0'(a_0'(B_{12}^*\sin 2\varphi + \frac{1}{2}(B_{22}^* - B_{11}^*)\cos 2\varphi) + 2a_0(B_{13}^*\sin\varphi + B_{23}^*\cos\varphi) + \qquad (4.14)$$

$$+\frac{1}{2}a_0'(B_{22}^* + B_{11}^*)) - \frac{1}{2}a_0{}^2 B_{33}^* = k,$$

який є наслідком другого інтеграла з системи (4.3) на інваріантних співвідношеннях (4.5).

4.1.2. Умови існування напіврегулярних прецесій першого типу в окремих випадках.

Випадок $\overline{\alpha} = (0,0,1)$, $a_0 = 0$. Нехай $\overline{\alpha} = (0,0,1)$, $a_0 = 0$ ($a_0' = 1$), тоді система рівнянь (4.11) – (4.14) набуде вигляду

$$\dot\lambda(t) + A_{33}\ddot\varphi + \frac{1}{2}C\sin 2\varphi - C_{12}^*\cos 2\varphi + s_2\sin\varphi - s_1\cos\varphi = 0, \qquad (4.15)$$

$$(A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi)\ddot\varphi + (A_{13}\cos\varphi - A_{23}\sin\varphi)\dot\varphi^2 + \left(\frac{1}{2}B\sin 2\varphi - B_{12}^*\cos 2\varphi\right)\dot\varphi = 0, \quad (4.16)$$

$$m_0\lambda(t) + (A_{13}\cos\varphi - A_{23}\sin\varphi)\ddot\varphi - (A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi)\dot\varphi^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{2}B\cos 2\varphi + B_{12}^*\sin 2\varphi + P\right)\dot\varphi + C_{13}^*\sin\varphi + C_{23}^*\cos\varphi + s_3 = 0, \qquad (4.17)$$

$$(A_{23}\cos\varphi + A_{13}\sin\varphi)\dot\varphi - \frac{1}{4}B\cos 2\varphi - \frac{1}{2}B_{12}^*\sin 2\varphi + R = 0. \qquad (4.18)$$

У рівняннях (4.15) – (4.18) введено додаткові позначення

$$B = B_{22}^* - B_{11}^*, \quad P = \frac{1}{2}\left(B_{22}^* + B_{11}^* + 2m_0(A_{11} + A_{22} + A_{33})\right), \qquad (4.19)$$

$$C = C_{22}^* - C_{11}^*, \quad R = -\frac{1}{4}\left(B_{22}^* + B_{11}^*\right) - k.$$

Очевидно, рівняння (4.16) є наслідком інтеграла (4.18). Тому в цьому варіанті дослідження прецесій гіростата його можна відкинути.

Рухливу систему координат виберемо так, що $A_{23} = 0$.

З рівняння (4.18) виражаємо $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{B\cos 2\varphi + 2B_{12}^{*}\sin 2\varphi - 4R}{4A_{13}\sin\varphi}. \tag{4.20}$$

З рівняння (4.17) виразимо $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{1}{m_0}[A_{13}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi}^2 - A_{13}\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} -$$

$$-\left(\frac{1}{2}B\cos 2\varphi + B_{12}^{*}\sin 2\varphi + P\right)\dot{\varphi} - C_{13}^{*}\sin\varphi - C_{23}^{*}\cos\varphi - s_3]. \tag{4.21}$$

При використанні співвідношень (4.20), (4.21) виникає особливий випадок $A_{13} = 0$. Зупинимося на ньому детальніше.

Рівняння (4.18) має бути тотожністю за φ. Тому, з (4.18) в силу (4.10), (4.19) отримаємо умови

$$B_{22} - B_{11} = 2m_0(A_{22} - A_{11}),\ B_{12} = 2m_0A_{12},\ \mathrm{k} = -\frac{1}{2}(B_{11} - 2m_0A_{11}). \tag{4.22}$$

Вираз для $\lambda(t)$ з (4.21) спрощується

$$\lambda(t) = -\frac{1}{m_0}\left(P\dot{\varphi} + C_{13}^{*}\sin\varphi + C_{23}^{*}\cos\varphi + \mathrm{s}_3\right), \tag{4.23}$$

де в силу (4.22)

$$P = B_{11} + m_0(A_{22} + A_{33} - A_{11}). \tag{4.24}$$

Підставимо вираз для $\lambda(t)$ з (4.23) в рівняння (4.15) і врахуємо (4.24)

$$(B_{11} + m_0(A_{22} - A_{11}))\ddot{\varphi} + (C_{23}^{*}\sin\varphi - C_{13}^{*}\cos\varphi)\dot{\varphi} +$$

$$+ m_0\left(C_{12}^{*}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}C\sin 2\varphi + s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi\right) = 0\ . \tag{4.25}$$

Якщо має місце умова

$$B_{11} = m_0(A_{11} - A_{22}), \tag{4.26}$$

тоді з (4.25) слідує

$$\dot{\varphi} = \frac{m_0\left(C_{12}^{*}\cos 2\varphi - \frac{1}{2}C\sin 2\varphi + s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi\right)}{C_{13}^{*}\cos\varphi - C_{23}^{*}\sin\varphi}. \tag{4.27}$$

Таким чином, при виконанні рівностей $A_{23}=0$, $A_{13}=0$ (4.22), (4.24), (4.26) швидкість власного обертання виражається співвідношенням (4.27), а $\lambda(t)$ – (4.23). Це перший варіант розв’язку напіврегулярних прецесій в особливому випадку.

Другий варіант розв’язку може бути отриманий з рівняння (4.25) за умов $C_{13}^{*}=0, C_{23}^{*}=0$, $B_{11}\neq \mathrm{m}_0(A_{11}-A_{22})$ або в силу (4.10) при виконанні рівностей

$$mB_{13}+C_{13}=0,\ \ mB_{23}+C_{23}=0 \tag{4.28}$$

У випадку (4.28) співвідношення (4.23) спрощується

$$\lambda(t) = -\frac{1}{m_0}\ (P\dot{\varphi}+s_3),$$

де функція $\dot{\varphi}$ може бути отримана з (4.25)

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\kappa_2'\sin 2\varphi - \kappa_2\ \cos 2\varphi + 2\kappa_1'\sin\varphi - 2\kappa_1\ \cos\varphi + \kappa_0}, \tag{4.29}$$

тут в силу умов (4.10)

$$\mu_0 = \frac{m_0}{B_{11}+m_0(A_{22}-A_{11})}$$

$$\kappa_2 = \frac{\mu_0}{2}\left[\mathrm{m}_0^2(A_{22}-A_{11}) - m_0(B_{22}-B_{11}) - (C_{22}-C_{11})\right],$$

$$\kappa_2' = -\mu_0(\mathrm{m}_0^2 A_{12} - m_0 B_{12} - C_{12}), \qquad \kappa_1 = \mu_0 s_2, \qquad \kappa_1' = -\mu_0 s_1,$$

де κ_0 – довільна стала.

З формул (4.27) і (4.29) виходить, що в першому варіанті *φ(t)* – елементарна функція часу, в другому варіанті *φ(t)* – еліптична функція часу.

Розглянемо вираз (4.20) в загальному випадку. Він має особливість в знаменнику при $\varphi=0$. Для усунення цієї особливості вимогатимемо, щоб

$$\mathrm{B} - 4\mathrm{R} = 0,$$

чи на підставі позначень (4.10) і (4.19)

$$k = m_0 A_{22} - B_{22}.$$

Тоді вираз (4.20) можна переписати у вигляді

$$\dot{\varphi} = \frac{2B_{12}^* \cos\varphi - B\sin\varphi}{2A_{13}}. \tag{4.30}$$

З рівняння (4.17) з урахуванням (4.30) знайдемо $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2m_0 \mathrm{A}_{13}}\left[2(A_{13}C_{23}^* + PB_{12}^*)\cos\varphi + (2A_{13}C_{13}^* - PB)\sin\varphi + 2A_{13}s_3\right]. \tag{4.31}$$

Підставимо (4.30) і (4.31) в рівняння (4.15) і вимагатимемо, щоб отримана рівність була тотожністю за φ. Враховуючи позначення (4.10), (4.19), отримаємо наступні умови на параметри:

$$\mathrm{C}_{12} = \kappa_3^{(1)} m_0^3 + \kappa_2^{(1)} m_0^2 + \kappa_1^{(1)} m_0 + \kappa_0^{(1)},\ \mathrm{C}_{22} = \kappa_3^{(2)} m_0^3 + \kappa_2^{(2)} m_0^2 + \kappa_1^{(2)} m_0 + \kappa_0^{(2)},$$

$$s_1 = 0,\ \ s_2 = 0,\ (2\mathrm{m}_0 A_{12} - B_{12})(m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13} - C_{13}) = \tag{4.32}$$

$$= \frac{1}{2}(B_{22} - B_{11} + 2(A_{11} - A_{22})m_0)(m_0^2 A_{23} - m_0 B_{23} - C_{23}),$$

де введені наступні позначення:

$$\kappa_3^{(1)} = -\frac{\mathrm{A}_{12}}{\mathrm{m}_0}, \qquad \kappa_2^{(1)} = \frac{A_{12}\left[(B_{22} + B_{11})(A_{11} - A_{22}) + 2A_{13}B_{13}\right]}{A_{13}^2 m_0},$$

$$\kappa_1^{(1)} = \frac{2A_{13}(2A_{12}C_{13} - B_{12}B_{13}) - B_{12}(B_{22} + B_{11})(A_{11} - A_{22}) + A_{12}(B_{22}^2 - B_{11}^2)}{2A_{13}^2 m_0},$$

$$\kappa_0^{(1)} = -\frac{B_{12}(4A_{13}C_{13} + B_{22}^2 - B_{11}^2)}{4A_{13}^2 m_0}, \qquad \kappa_3^{(2)} = -\frac{2A_{12}A_{23}}{A_{13}m_0},$$

$$\kappa_2^{(2)} = \frac{1}{2A_{13}^2 m_0}[4(B_{22} + B_{11})A_{12}^2 + 4A_{13}A_{12}B_{23} - (B_{22} - B_{11})A_{13}^2 -$$

$$- 2((A_{11} - A_{22})B_{13} - A_{23}B_{12})A_{13} - (A_{11} - A_{22})^2(B_{22} + B_{11})],$$

$$\kappa_1^{(2)} = -\frac{1}{2A_{13}^2 m_0}[-2A_{13}^2 C_{11} + ((B_{22} - B_{11})B_{13} + 2(A_{11} - A_{22})C_{13} - 4A_{12}C_{23} +$$

$$+ 2B_{12}B_{23})A_{13} + (B_{22} + B_{11})((B_{22} - B_{11})(A_{11} - A_{22}) + 4B_{12}A_{12})],$$

$$\kappa_0^{(2)} = -\frac{1}{8A_{13}^2 m_0}[4((B_{22} - B_{11})C_{13} + 2B_{12}C_{23})A_{13} +$$

$$+(B_{22}+B_{11})((B_{22}-B_{11})^2-4B_{12}^2)].$$

При виконанні умов (4.32) в силу (4.10) і (4.19) функції $\dot{\varphi}$ з (4.30) і $\lambda(t)$ з (4.31) набудуть вигляду

$$\dot{\varphi}=\frac{(B_{12}-2\mathrm{m}_0A_{12})\cos\varphi-\frac{1}{2}((B_{22}-B_{11})+2(A_{11}-A_{22})m_0)\sin\varphi}{A_{13}},$$

$$\lambda(t)=\rho_1^{(1)}\cos\varphi+\rho_1'^{(1)}\sin\varphi+\rho_0^{(1)}, \tag{4.33}$$

де

$$\rho_1^{(1)}=-\frac{1}{A_{13}m_0}\Big[(-2A_{33}\mathrm{A}_{12}+A_{23}A_{13})m_0^2+(A_{33}B_{12}-B_{23}A_{13}-$$

$$-(B_{22}+B_{11})A_{12})m_0+\frac{1}{2}(B_{22}+B_{11})B_{12}-C_{23}A_{13}\Big],$$

$$\rho_1'^{(1)}=-\frac{1}{A_{13}m_0}\Big[(A_{13}^2-\mathrm{A}_{33}(A_{11}-A_{22}))m_0^2-(A_{13}B_{13}+\frac{1}{2}(B_{22}+B_{11})+$$

$$+\frac{1}{2}A_{33}(B_{22}-B_{11}))m_0-\frac{1}{4}(B_{22}^2-B_{11}^2)-C_{13}A_{13}\Big],$$

$$\rho_0^{(1)}=\frac{s_3}{m_0}.$$

Таким чином, для третього варіанту з (4.33) витікає, що функція *φ(t)* – елементарна функція часу. Розв’язуваність умов (4.32) виходить з того факту, що параметри C_{ij} в силу постановки задачі не стиснені обмеженнями, а величини $\kappa_{\mathrm{i}}^{(\mathrm{j})}$ від них не залежать.

Випадок $\overline{\alpha}=(0{,}0{,}1)$, $a_0\neq 0$. Виразив з рівняння (4.12) $\dot{\lambda}(t)$, з рівняння (4.14) $\lambda(t)$ і підставивши знайдені вирази в рівняння (4.11), (4.13), отримаємо систему з двох рівнянь:

$$-\frac{a_0'\ddot{\varphi}}{a_0}\left(A_{23}\cos\varphi+A_{13}\sin\varphi\right)+\frac{a_0'\dot{\varphi}^2}{a_0}\left(A_{23}\sin\varphi-A_{13}\cos\varphi\right)-$$

$$-\frac{a_0'\dot{\varphi}}{a_0}\left(\frac{a_0'}{2}B\sin 2\varphi-a_0'B_{12}^*\cos 2\varphi-a_0B_{13}^*\cos\varphi+a_0B_{23}^*\sin\varphi\right)+ \tag{4.34}$$

$$+\frac{1}{2}a_0'^2 C\sin 2\varphi - a_0'^2 C_{12}^* \cos 2\varphi + a_0'(C_{23}^* a_0 + s_2)\sin\varphi - a_0'(C_{13}^* a_0 + s_1)\cos\varphi = 0,$$

$$a_0'\ddot{\varphi}\left(A_{13}\cos\varphi - A_{23}\sin\varphi\right) - a_0'\dot{\varphi}^2\left(A_{13}\sin\varphi + A_{23}\cos\varphi\right) +$$

$$+\frac{a_0'\dot{\varphi}}{a_0}\Big(2a_0' a_0 B_{12}^*\sin 2\varphi + a_0' a_0 B\cos 2\varphi + 2(a_0^2 B_{13}^* - a_0'^2 m_0 A_{13})\sin\varphi +$$

$$+2(a_0^2 B_{23}^* - a_0'^2 m_0 A_{23})\cos\varphi + 2a_0 a_0' m_0 (A_{11} + A_{22}) + a_0 a_0' (B_{11}^* + B_{22}^*)\Big) -$$

$$-\frac{a_0'^2}{2a_0}(2a_0^2 C_{12}^* - a_0'^2 m_0 B_{12}^*)\sin 2\varphi - \frac{a_0'^2}{4a_0}(2a_0^2 C + a_0'^2 m_0 B)\cos 2\varphi - \tag{4.35}$$

$$-a_0'\left(C_{23}^*(a_0^2 - a_0'^2) - a_0'^2 m_0 B_{23}^* + a_0 s_2\right)\cos\varphi -$$

$$-a_0'\left(C_{13}^*(a_0^2 - a_0'^2) - a_0'^2 m_0 B_{13}^* + a_0 s_1\right)\sin\varphi +$$

$$+\frac{a_0'^2}{4a_0}\left(a_0'^2 m_0 (B_{11}^* + B_{22}^*) + a_0^2(4C_{33}^* - 2C_{22}^* - 2C_{11}^*) + 2a_0^2 m_0 B_{33}^* + 4a_0 s_3 + 4m_0 k\right) = 0$$

Умови існування розв’язків системи диференціальних рівнянь (4.34), (4.35) в загальному випадку можна знайти таким чином. Необхідно з рівнянь, виключивши $\ddot{\varphi}$, визначити функцію $\dot{\varphi}$. Підстановка цієї функції в одне з рівнянь системи (4.34), (4.35) і вимога того, щоб отримане рівняння було тотожністю за φ призводить до умов існування розв’язків системи (4.26), (4.27). У даній роботі розглянуто окремі випадки розв’язку цієї системи.

У першому окремому випадку вимагатимемо, щоб рівняння (4.34) було тотожністю для будь–яких $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$. Тоді отримаємо умови на параметри, які запишемо з урахуванням позначень (4.10) і (4.19)

$$\begin{gathered} A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0,, \quad B_{12} = 2m_0 A_{12}, \quad B_{13} = 0, \quad B_{23} = 0, \\ C_{22} - C_{11} = m_0^2 (A_{11} - A_{22}), \quad C_{12} = -m_0^2 A_{12}, \quad s_2 = a_0 C_{23}, \quad s_1 = a_0 C_{13}. \end{gathered} \tag{4.36}$$

При виконанні умов (4.36) з рівняння (4.35) маємо

$$\dot{\varphi} = \rho_1^{(2)}\cos\varphi + \rho_1'^{(2)}\sin\varphi + \rho_0^{(2)}, \tag{4.37}$$

де

$$\rho_1^{(2)} = \frac{a_0' C_{23}}{\sigma_0}, \quad \rho_1'^{(2)} = \frac{a_0' C_{13}}{\sigma_0},$$

$$\rho_0^{(2)} = -\frac{1}{2a_0\sigma_0}\Big[2m_0^2(a_0^2(A_{11} - A_{22}) - A_{22}) + m_0(2k + a_0^2(B_{22} - B_{33}) + B_{22}) +$$
$$+ 2a_0^2(C_{11} - C_{33}) + 2s_3 a_0\Big], \quad \sigma_0 = m_0(A_{11} - A_{22}) + B_{22}.$$

В (4.37) вважаємо, що $B_{22} \neq m_0(A_{22} - A_{11})$. З рівняння (4.14) функцію $\lambda(t)$ при виконанні умов (4.36) можна записати так:

$$\lambda(t) = -A_{33}\dot{\varphi} + \frac{m_0}{a_0}(a_0'^2 A_{22} + a_0^2 A_{33}) + \frac{1}{2a_0}(a_0'^2 B_{22} + a_0^2 B_{33}) + \frac{k}{a_0}. \tag{4.38}$$

Отже, за наявності умов (4.36) напіврегулярна прецесія гіростата описується формулами (4.37), (4.38).

У другому окремому випадку вимагатимемо, щоб рівняння (4.35) було тотожністю для усіх $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}.$ Тоді умови на параметри з урахуванням позначень (4.10), (4.19) набудуть вигляду

$$\begin{gathered} A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad B_{12} = 2m_0 A_{12}, \quad B_{13} = 0, \quad B_{23} = 0, \\ B_{11} = m_0(A_{11} - A_{22}), \quad B_{22} = m_0(A_{22} - A_{11}), \quad C_{22} - C_{11} = m_0^2(A_{11} - A_{22}), \\ C_{12} = -m_0^2 A_{12}, \quad C_{13} = 0, \quad C_{23} = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \\ s_3 = \frac{-m_0 k^* + 2a_0^2[m_0^2(A_{33} - A_{22}) + m_0(B_{22} - B_{33}) + (C_{22} - C_{33})]}{2a_0}, \end{gathered} \tag{4.39}$$

де

$$k^* = a_0{}^2 B_{33} + 2k - m_0(a_0'^2(A_{11} + A_{22}) + 2a_0{}^2 A_{33}).$$

При виконанні умов (4.39) рівняння (4.34) обертається в тотожність. Функція $\dot{\varphi}$ є довільною. З рівняння (4.14) з урахуванням (4.10), (4.39) слідує

$$\lambda(t) = \frac{\mathrm{k}^*}{2a_0} - A_{33}\dot{\varphi}. \tag{4.40}$$

З формули (4.40) витікає, що проекція вектора моменту кількості руху на вісь власного обертання постійна.

Випадок $\overline{\alpha} = (1,0,0)$, $\dot{\varphi} = \sqrt{a + b\sin\varphi}$. Нехай $\overline{\alpha} = (1,0,0)$. Виразив з рівняння (4.14) функцію $\lambda(t)$ і підставивши $\lambda(t)$ і $\dot{\lambda}(t)$ у рівняння (4.11) і (4.13), отримаємо наступну систему рівнянь :

$$4A_{33}\ddot{\varphi}\sin\varphi + 2(a_0'(A_{23}\cos 2\varphi + A_{13}\sin 2\varphi) + 2a_0A_{33}\cos\varphi + a_0'A_{23})m_0\dot{\varphi} -$$

$$-a_0'^2 p_1\sin 3\varphi + \frac{1}{2}a_0'^2 p_2\cos 3\varphi - 2a_0' p_3\sin 2\varphi - 2a_0' p_4\cos 2\varphi - \tag{4.41}$$

$$-a_0'^2 p_5\sin\varphi - p_6\cos\varphi + p_7 = 0,$$

$$(a_0A_{33}\sin 2\varphi + 2a_0'A_{23}\sin\varphi)\ddot{\varphi} - 2(a_0'A_{23}\cos\varphi + a_0A_{33})\dot{\varphi}^2 +$$

$$+\left(\frac{1}{2}a_0a_0'm_0(A_{23}\cos 3\varphi + A_{13}\sin 3\varphi) + \left(p_8 + \frac{1}{2}a_0'^2(B_{11}^* + B_{22}^*)\right)\cos 2\varphi -\right.$$

$$\left.-\frac{3}{2}a_0a_0'm_0A_{13}\sin\varphi + p_9\cos\varphi - p_8 + \frac{1}{2}a_0'^2 B + a_0^2B_{33}^* + 2k\right)\dot{\varphi} -$$

$$-\frac{1}{4}a_0a_0'^2 p_1\sin 4\varphi + \frac{1}{8}a_0a_0'^2 p_2\cos 4\varphi - \frac{1}{2}a_0'(a_0p_3 - a_0'^2C_{13}^*)\sin 3\varphi - \tag{4.42}$$

$$-\frac{1}{2}a_0'(a_0p_4 - a_0'^2C_{23}^*)\cos 3\varphi + \frac{1}{2}a_0'^2 a_0p_1\sin 2\varphi + p_{10}\cos 2\varphi +$$

$$+\frac{3}{2}a_0'(a_0p_3 - a_0'^2C_{13}^*)\sin\varphi + \frac{1}{2}a_0'(a_0p_4 - a_0'^2C_{23}^*)\cos\varphi + p_{11} = 0,$$

де введені позначення

$$p_1 = m_0B_{12}^* + 2C_{12}^*,\ p_2 = m_0(B_{11}^* - B_{22}^*) + 2(C_{11}^* - C_{22}^*),\ p_3 = s_1 + a_0(m_0B_{13}^* + C_{13}^*),$$

$$p_4 = s_2 + a_0(m_0B_{23}^* + C_{23}^*),\ p_5 = m_0B_{12}^* - 2C_{12}^*,\ p_8 = m_0(a_0'^2(A_{11} + A_{22}) + A_{33}),$$

$$p_6 = \frac{m_0}{2}\left(a_0'^2(B_{11}^* + 3B_{22}^*) + 4a_0^2B_{33}^* + 4k\right) + a_0'^2(C_{11}^* - C_{22}^*),$$

$$p_7 = 2a_0's_2 + 2a_0'a_0(C_{23}^* - m_0B_{23}^*),\ p_9 = \frac{a_0'a_0}{2}(4B_{23}^* - m_0A_{23}),$$

$$p_{10} = a_0'^2a_0(C_{33}^* - C_{11}^*) - \frac{a_0m_0}{2}(a_0'^2B_{11}^* + a_0^2B_{33}^*) + a_0'^2s_3 - a_0m_0k,$$

$$p_{11} = \frac{a_0'^2 a_0}{4}(3C_{11}^* + C_{22}^* - 4C_{33}^*) + \frac{a_0 m_0}{8}(3a_0'^2 B_{11}^* + a_0'^2 B_{22}^* + 4a_0^2 B_{33}^*) - a_0'^2 s_3 + a_0 m_0 k .$$

Допустимо, що функція $\dot{\varphi}$ набуває вигляду

$$\dot{\varphi} = \sqrt{a + b\sin\varphi} . \tag{4.43}$$

Підставивши $\dot{\varphi}$, $\dot{\varphi}^2$, $\ddot{\varphi}$ у рівняння (4.41), (4.42) і за умовою, щоб отримані рівняння були тотожністю, отримаємо умови на параметри, які з урахуванням (4.10) і (4.19) можна записати так

$$\begin{gathered} A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0, \; a_0 = 0 , \; a_0' = 1 , \; s_2 = 0, \quad s_3 = 0 , \\ k = m_0(A_{22} + A_{33}) + \frac{1}{2}B_{11} , \; B_{22} = -2m_0 A_{33} - B_{11}, \quad B_{12} = 2m_0 A_{12} , \\ C_{12} = -m_0^2 A_{12} , \quad C_{13} = -m_0 B_{13} , \quad C_{23} = -m_0 B_{23} , \\ C_{22} - C_{11} = m_0^2 A_{33} + m_0 B_{11} , \quad b = \frac{2s_1}{A_{33}} . \end{gathered} \tag{4.44}$$

З рівності (4.14) в силу (4.44) витікає

$$\lambda(t) = (B_{11} - m_0(A_{11} - A_{22} - A_{33}))\sin\varphi.$$

З формули (4.43) виходить, що $\varphi(t)$ – еліптична функція часу.

Випадок $\overline{\alpha} = (1,0,0)$, $\dot{\varphi} = a + b\sin\varphi$. Нехай

$$\dot{\varphi} = a + b\sin\varphi . \tag{4.45}$$

З рівняння (4.14) з урахуванням (4.45) знайдемо

$$\lambda(\mathrm{t}) = \frac{1}{4a_0' \sin\varphi}(d_2' \sin 2\varphi + d_2 \cos 2\varphi + d_1' \sin\varphi + d_1 \cos\varphi + d_0), \tag{4.46}$$

де

$$d_2' = 2a_0'(a_0' B_{12}^* - A_{23} b), \quad d_2 = a_0'(2A_{13} b + a_0'(B_{22}^* - B_{11}^*)),$$

$$d_1' = 4(a_0(a_0' B_{13}^* - A_{33} b) - a_0' A_{13} a), \quad d_1 = 4a_0'(a_0 B_{23}^* - A_{23} a),$$

$$d_0 = 2a_0(a_0 B_{33}^* - 2A_{33} a) - a_0'(2A_{13} b - a_0'(B_{11}^* + B_{22}^*)) + 4k.$$

Для усунення особливості в знаменнику формули (4.46) вимагатимемо, щоб виконувалися рівності

$$\mathrm{A}_{23} a = a_0 B_{23}^*,\ 2a_0 A_{33} a - a_0'^2 B_{22}^* - a_0^2 B_{33}^* = 2k.$$

Допустимо, що $A_{23} \neq 0$, тоді $a = \dfrac{B_{23}^* a_0}{A_{23}}$, отже, ототожнивши рівняння (4.11) і (4.13) за φ, отримаємо умови на параметри, виписані з урахуванням (4.10)

$$a = \frac{a_0(B_{23} - 2m_0 A_{23})}{A_{23}}, \quad b = \frac{a_0'(B_{12} - 2m_0 A_{12})}{A_{12}},$$

$$k = \frac{a_0^2 A_{33}}{A_{23}}(B_{23} - 2m_0 A_{23}) - \frac{1}{2} a_0'^2 (B_{22} - 2m_0 A_{22}) - \frac{1}{2} a_0^2 (B_{33} - 2m_0 A_{33}),$$

$$s_1 = -\frac{a_0}{2A_{23}^2}\left[A_{23}(2m_0 A_{13} B_{23} + (B_{11} + B_{22})(B_{12} - 2m_0 A_{12})) - 2m_0 A_{23}^2 B_{13}\right], \quad s_2 = 0,$$

$$s_3 = -\frac{a_0}{2A_{23}^2}\Big[A_{23}{}^2(-2m_0{}^2(A_{33} + A_{22}) - m_0(B_{11} + B_{22} 2B_{33}) - 2(C_{33} - C_{11})) -$$

$$- \mathrm{A}_{23}(4A_{13}A_{12}m_0^2 - 2(A_{33}B_{23} + A_{13}B_{12})m_0 - B_{23}(B_{22} + B_{11})) -$$

$$- 8A_{12}A_{33}m_0(B_{12} - m_0 A_{12}^2) + 2A_{33}B_{12}^2\Big],$$

$$C_{13} = m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13} + \frac{1}{2\mathrm{A}_{23}}(B_{12} - 2m_0 A_{12})(2m_0 A_{33} + B_{11} + B_{22}),$$

$$C_{22} = m_0(m_0 A_{22} - B_{22}) + \frac{1}{2A_{23}^2}[A_{23}^2(2C_{11} - 2m_0^2 A_{22} + m_0(B_{11} + B_{22})) -$$

$$- 2m_0 A_{13}A_{23}(2m_0 A_{12} - B_{12}) + 2A_{33}(4m_0 A_{12}(m_0 A_{12} - B_{12}) + B_{12}^2)],$$

$$C_{23} = m_0^2 A_{23} - m_0 B_{23}, \quad C_{12} = m_0^2 A_{12} - m_0 B_{12}.$$

При виконанні цих умов функція λ(t) з (4.46) прийме вигляд

$$\lambda(t) = \mathrm{g}_1 \sin\varphi + g_0,$$

де

$$\mathrm{g}_1 = \frac{a_0'}{2A_{23}}(2B_{12}A_{13} + A_{23}(B_{22} - B_{11}) - 2m_0(2A_{12}A_{13} + A_{23}(A_{22} - A_{11})),,$$

$$\mathrm{g}_0 = \frac{a_0'}{A_{23}}(B_{23}A_{13} - A_{23}B_{13} + A_{33}(B_{12} - 2m_0 A_{12})).$$

Припустимо, що в $\mathrm{A}_{23}a = a_0 B_{23}^*$, $A_{23} = 0$. Тоді отримуємо два випадки при $a_0 = 0$, $\mathrm{B}_{23}^* = 0$.

Нехай $a_0 = 0$, тоді $a_0' = 1$. Підставивши (4.46) в рівняння (4.11) і (4.13), і ототожнивши за φ, випишемо умови на параметри

$$C_{12} = -m_0^2 A_{12}, \quad C_{23}^* = -m_0 B_{23},$$

$$C_{13} = -\mathrm{b}\left(\frac{1}{2}(B_{22} + B_{11}) + m_0 A_{33}\right) + m_0^2 A_{13} - m_0 B_{13},$$

$$C_{11} = -b(m_0 A_{13} + A_{33} b) + \frac{1}{2} m_0 (B_{22} - B_{11}) + C_{22},$$

$$B_{12} = 2m_0 A_{12}, \quad s_1 = a(A_{33} b + m_0 A_{13}), \quad s_2 = 0,$$

$$s_3 = -a\left(\frac{1}{2}(B_{22} + B_{11}) + m_0 A_{33}\right), \quad k = -\frac{1}{2}(B_{22} - 2m_0 A_{22}).$$

З (4.46) слідує

$$\lambda(t) = -\mathrm{A}_{13} a - \sin\varphi\left(A_{13} b + \frac{1}{2}(B_{22} - B_{11}) - m_0 (A_{22} - A_{11})\right).$$

Випадок $\mathrm{B}_{23}^* = 0$ розглядається аналогічно і призводить до лінійної залежності $\lambda(t)$ від $sin\varphi$.

4.2. Загальні властивості прецесій гіростата першого типу

4.2.1. Застосування заміни Тиссерана. В задачі про рух гіростата з постійним гіростатичним моментом заміна Тиссерана [55]

$$\overline{\omega} = \overline{\omega}^* + m\overline{\nu} \tag{4.47}$$

не змінює рівняння руху класу Кірхгофа–Пуассона.

Розглянемо перетворення (4.47) стосовно до рівнянь (4.1), (4.2). Підставимо вираз (4.47) у векторні рівняння (4.41), (4.42) і врахуємо в першому рівнянні $L(t) = \dot{\lambda}(t)$.

$$A\dot{\overline{\omega}}^* = A\overline{\omega}^* \times \overline{\omega}^* - \dot{\lambda}(t)\overline{\alpha} + \overline{\omega}^* \times \left(B^*\overline{\nu} - \lambda(t)\overline{\alpha}\right) + \overline{\nu} \times (C^*\overline{\nu} - \overline{s}) - \lambda(t)m(\overline{\nu} \times \overline{\alpha}),$$
$$\dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu} \times \overline{\omega}^*, \tag{4.48}$$

де

$$B^* = B + mSp(A)\delta - 2mA, C^* = C + mB - m^2 A. \tag{4.49}$$

З рівнянь (4.48) витікає, що для рівнянь (4.1), (4.2) перетворення (4.47) не є інваріантним.

Проте заміна Тиссерана (4.47) дозволяє звести задачу вивчення напіврегулярних прецесій (4.5) для рівнянь (4.1), (4.2) до задачі дослідження маятникових рухів для рівнянь (4.48) в яких матриці B^* і C^* мають вигляд (4.49). Ця обставина хоча і не дозволяє використати раніше отримані результати [55], але істотно спрощує аналіз умов існування прецесій першого типу. Відмітимо, що на відміну від позначень (4.10) для матриці C^* у рівнянні (4.48) прийняті позначення елементів, які відрізняються від (4.10) знаком. Крім того надалі нульовий індекс у m_0 опускатимемо.

Покладемо в рівняннях (4.48)

$$\overline{\omega}^* = \dot{\varphi}\overline{a} \tag{4.50}$$

і розглянемо скалярні рівняння, які витікають з (4.48) за умови $\alpha_2 = 0$, якої можна досягти поворотом системи координат

$$\alpha_3\dot{\lambda}(t) + A_{33}\ddot{\varphi} - a_0' m\alpha_1\lambda(t)\cos\varphi + C_2'\cos 2\varphi - C_2'\sin\varphi + k_1\sin\varphi - k_1\cos\varphi = 0, \tag{4.51}$$

$$\dot{\lambda}(t)(a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0\alpha_3) + a_0'\alpha_1\lambda(t)\dot{\varphi}\cos\varphi + (\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi + \beta_0)\ddot{\varphi} +$$
$$+ (\beta_1'\cos\varphi - \beta_1'\sin\varphi)\dot{\varphi} - (B_2'\cos 2\varphi - B_2\sin 2\varphi + a_0\gamma_1'\cos\varphi - a_0\gamma_1\sin\varphi)\dot{\varphi} = 0, \tag{4.52}$$

$$a_0'\alpha_1\dot{\lambda}(t)\cos\varphi - a_0'\alpha_1\lambda(t)\dot{\varphi}\sin\varphi + (\beta_1'\cos\varphi - \beta_1\sin\varphi)\ddot{\varphi} - (\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi)\dot{\varphi} +$$
$$+ (B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi - a_0\gamma_1'\sin\varphi - B_0)\dot{\varphi} + a_0 C_2\cos 2\varphi + \tag{4.53}$$
$$+ a_0 C_2'\sin 2\varphi + \delta_1\cos\varphi + \delta_1'\sin\varphi + G_0 - a_0 m\lambda(t)(a_0\alpha_1\sin\varphi - a_0'\alpha_3) = 0.$$

У рівняннях (4.51) – (4.53) введені позначення

$$C_2 = \frac{a_0'^2}{2}(C_{22}^* - C_{11}^*), \quad C_2' = a_0'^2 C_{12}^*, \quad k_1 = a_0'(s_2 - a_0 C_{23}^*), \quad k_1' = a_0'(s_1 - a_0 C_{13}^*),$$

$$\beta_0 = a_0 A_{33}, \quad \beta_1 = a_0' A_{23}, \quad \beta_1' = a_0' A_{13}, \quad B_2 = \frac{a_0'^2}{2}(B_{22}^* - B_{11}^*), \quad B_2' = a_0'^2 B_{12}^*,$$

$$\gamma_0 = a_3 B_{33}^*, \quad \gamma_1 = a_0' B_{23}^*, \quad \gamma_1' = a_0' B_{13}^*, \quad B_0 = -\frac{a_0'^2}{2}(B_{11}^* + B_{22}^*), \tag{4.54}$$

$$\delta_1 = a_0'\left[(2a_0^2 - 1)C_{23}^* - a_0 s_2\right], \quad \delta_1' = a_0'\left[(2a_0^2 - 1)C_{13}^* - a_0 s_1\right],$$

$$G_0 = \frac{a_0'^2}{2}\left[2s_3 + a_0(C_{11}^* + C_{22}^* - 2C_{33}^*)\right].$$

4.2.2. Редукція системи рівнянь. Рівняння (4.51) – (4.53) мають перший інтеграл, який представимо з використанням позначень (4.54) і з урахуванням того, що випадок $\alpha_1 = 0, a_0 = 0$ розглянутий в пункті 4.1.

$$\lambda(t) = \frac{1}{a_0'\alpha_1 \sin\varphi + a_0\alpha_3}\left[\frac{1}{2}B_2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_2' \sin 2\varphi + a_0\gamma_1 \cos\varphi - a_0\gamma_1' \sin\varphi + \right. \\ \left. + k_0 - (\beta_1 \cos\varphi + \beta_1' \sin\varphi + \beta_0)\dot{\varphi}\right] \tag{4.55}$$

$$k_0 = k - \frac{1}{2}m(A_{11} + A_{22} + A_{33})\cos\varphi + \frac{1}{4}\left[2a_0^2 B_{33}^*, + a_0'^2(B_{11}^* + B_{22}^*)\right]. \tag{4.56}$$

Отже, задача про дослідження умов існування прецесій першого типу (4.5) для рівнянь (4.1), (4.2) зведена до вивчення розв'язку рівнянь (4.51) – (4.53) з інтегралом (4.55), в якому введені позначення (4.56).

Розглянемо редукцію (4.51), (4.53). Оскільки в [55] розглянутий особливий випадок $\alpha_1 = 0$, $a_0 = 0$, при якому формула (4.55) втрачає сенс, то надалі вважаємо $a_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$.

При дослідженні системи (4.51) – (4.53) відмітимо, що інтеграл (4.55) є наслідком рівняння (4.52). Тому у ряді випадків замість рівняння (4.52) зручно прийняти функцію (4.55).

Нехай

$$\begin{aligned} &M_1(\varphi) = a_0'\alpha_1 \sin\varphi + a_0\alpha_3, \quad N_1(\varphi) = \beta_1 \cos\varphi + \beta_1' \sin\varphi + \beta_0, \\ &Q_1(\varphi) = (a_0'\alpha_1\beta_0 - a_0\alpha_3\beta_1')\cos\varphi + a_0\alpha_3\beta_1 \sin\varphi + a_0'\alpha_1\beta_1, \\ &S_1(\varphi) = \beta_1' \cos\varphi - \beta_1 \sin\varphi, \quad R_1(\varphi) = \beta_1 \cos\varphi - \beta_1' \sin\varphi, \\ &P_1(\varphi) = a_0\alpha_1 \sin\varphi - a_0\alpha_3, \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$M_2(\varphi) = \frac{1}{2}B_2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi + a_0\gamma_1'\sin\varphi + k_0,$$
$$N_2(\varphi) = B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi + a_0\gamma_1'\sin\varphi - B_0,$$
$$L_2(\varphi) = C_2'\cos 2\varphi - C_2\sin 2\varphi - k_1'\cos\varphi + k_1\sin\varphi,$$
$$Q_2(\varphi) = a_0C_2\cos 2\varphi + a_0C_2'\sin 2\varphi + \delta_1\cos\varphi + \delta_1'\sin\varphi + G_0, \qquad (4.58)$$
$$M_3(\varphi) = \frac{1}{4}a_0'\alpha_1B_2\cos 3\varphi + \frac{1}{4}a_0'\alpha_1B_2'\sin 3\varphi + a_0\alpha_3B_2'\cos 2\varphi - a_0\alpha_3B_2\sin 2\varphi +$$
$$+\left(a_3^2\alpha_3\gamma_1' - \frac{3}{4}a_0'\alpha_1B_2 - a_0'\alpha_1k_0\right)\cos\varphi - \left(a_0^2\alpha_3\gamma_1 + \frac{3}{4}a_0'\alpha_1B_2'\right)\sin\varphi - a_0a_0'\alpha_1\gamma_1.$$

На підставі співвідношень (4.55), (4.57) знайдемо

$$\lambda(t) = \frac{1}{M_1(\varphi)}\left(M_2(\varphi) - N_1(\varphi)\dot\varphi\right),$$
$$\dot\lambda(t) = \frac{1}{M_1^2(\varphi)}\left(Q_1(\varphi)\dot\varphi^2 + M_3(\varphi)\dot\varphi - M_1(\varphi)N_1(\varphi)\ddot\varphi\right), \qquad (4.59)$$

де $N_i(\varphi)$, $M_i(\varphi)$ мають значення з системи (4.57).

Підставимо функції (4.59) в рівняння (4.51) , (4.53)

$$\begin{aligned}&M_1(\varphi)(A_{33}M_1(\varphi) - \alpha_3N_1(\varphi))\ddot\varphi + \alpha_3Q_1(\varphi)\dot\varphi^2 +\\ &+\left(\alpha_3M_3(\varphi) + a_0'm\alpha_1N_1(\varphi)M_1(\varphi)\cos\varphi\right)\dot\varphi +\\ &+M_1(\varphi)\left(L_2(\varphi)M_1(\varphi) - a_0'm\alpha_1M_2(\varphi)\cos\varphi\right) = 0,\end{aligned} \qquad (4.60)$$

$$\begin{aligned}&M_1(\varphi)\left(S_1'(\varphi)M_1(\varphi) - a_0'\alpha_1\cos\varphi N_1(\varphi)\right)\ddot\varphi +\\ &+\left(a_0'\alpha_1Q_1(\varphi)\cos\varphi + a_0'\alpha_1M_1(\varphi)N_1(\varphi)\sin\varphi - R_1(\varphi)M_1^2(\varphi)\right)\dot\varphi^2 +\\ &+\left(a_0'\alpha_1M_3(\varphi)\cos\varphi - a_0'\alpha_1M_1(\varphi)M_2(\varphi)\sin\varphi + M_1^2(\varphi)N_2(\varphi) +\right.\\ &\left.+a_0'mP_1(\varphi)M_1(\varphi)N_1(\varphi)\right)\dot\varphi^2 + M_1(\varphi)\left(Q_2(\varphi)M_1(\varphi) - a_0'mP_1(\varphi)M_2(\varphi)\right) = 0,\end{aligned} \qquad (4.61)$$

Отже, умови існування прецесій гіростата (4.5) для рівнянь (4.1), (4.2) зведено до вивчення розв’язку рівнянь (4.60), (4.61).

4.2.3. Розв’язок редукованої системи рівнянь в окремих випадках.

Випадок $\alpha_1 \neq 0$. У загальному випадку знаходження загального розв’язку рівнянь (4.60), (4.61), досить складна задача. Тому представляє інтерес отримання деяких окремих випадків існування таких розв’язків. Наприклад, в п. 4.1 при розгляді випадку $\alpha_1 = 0$ передбачається, що одне з рівнянь системи (4.60), (4.61) є тотожністю для будь–яких значень $\dot{\varphi}$ і φ. Тут розглянемо випадок, коли $\alpha_1 \neq 0$ і рівняння (4.60) – тотожність за вказаними змінними ($\dot{\varphi}$ і φ). Тоді в силу (4.54) отримаємо умови:

$$\begin{gathered} A_{23} = 0, \quad \alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad s_2 = a_0 C_{23}, \quad B_{12} = 2mA_{12}, \\ C_{12} = -m^2 A_{12}, \quad \alpha_3^2 \left[B_{22} - B_{11} + 2m(A_{11} - A_{22})\right] = 2m\alpha_1^2 A_{33}, \\ \alpha_3^2 \left[C_{22} - C_{11} + m(B_{22} - B_{11})\right] - m^2 (A_{22} - A_{11}) = m^2 \alpha_1^2 A_{33}, \\ k_0 = \frac{a_0^2 m\alpha_3}{m\alpha_1}(B_{13} - mA_{13}) - \frac{a_0'^2 m\alpha_1^2 A_{33}}{2\alpha_3^2}. \end{gathered} \tag{4.62}$$

Внаслідок того, що вектор $\overline{\alpha}$ є одиничним вектором з другої рівності системи (4.62) і умови $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1$ отримаємо:

$$\alpha_1 = \frac{A_{13}}{\sqrt{A_{13}^2 + A_{33}^2}}, \quad \alpha_3 = \frac{A_{33}}{\sqrt{A_{13}^2 + A_{33}^2}}. \tag{4.63}$$

Таким чином, компоненти (4.63) залежать тільки від компонент тензора інерції.

Умови (4.62) дозволяють розглянути не лише окремий випадок $A_{12} = 0$, при якому $B_{12} = 0, \ C_{12} = 0$, але і загальний випадок $A_{12} \neq 0$. Для нього з п'ятої і шостої рівності системи (4.62) витікає

$$m = \frac{B_{12}}{2A_{12}}, \quad 4A_{12}C_{12} + B_{12}^2 = 0,$$

а інші рівності залишається без змін.

Розглянемо рівняння (4.61) за наявності співвідношень (4.62). Вважаючи $\alpha_3^2 B_{22}^* - mA_{33} \neq 0$, з (4.61) отримаємо:

$$\dot{\varphi} = \mu_1 \sin\varphi + \mu_0, \tag{4.64}$$

де

$$\mu_1 = \frac{a_0' \alpha_3^2 (C_{13} - mB_{13})}{\alpha_3^2 B_{22}^* - mA_{33}}, \quad \mu_0 = \frac{\alpha_3^2 \left[\alpha_3 \left(s_1 - a_0 C_{13}^*\right) - s_3 \alpha_1 + a_0 \alpha_1 (C_{33}^* - C_{22}^*)\right]}{\alpha_3^2 B_{22}^* - mA_{33}}, \tag{4.65}$$

де в силу (4.49)

$$B_{22}^* = B_{22} + m(A_{11} - A_{22} + A_{33}), \ C_{22}^* = C_{22} + mB_{22} - mA_{22}, \ C_{33}^* = C_{33} + mB_{33} - m^2 A_{33}.$$

Використовуючи умови (4.62) і позначення (4.54),з першої формули системи знайдемо

$$\lambda(t) = \sigma_1 \sin\varphi + \sigma_0 - \frac{A_{33}}{\alpha_3}\dot{\varphi}, \tag{4.66}$$

де

$$\sigma_1 = \frac{a_0'\alpha_1 m A_{33}}{\alpha_3^2}, \quad \sigma_0 = \frac{a_0}{m\alpha_1}(C_{13} + mB_{13} - m^2 A_{13}). \tag{4.67}$$

В силу співвідношень (4.64) – (4.67) з формули (4.66) витікає, що функція $\lambda(t)$ не може вироджуватися в постійну. Отже, розв'язок (4.64) – (4.66) рівнянь (4.60), (4.61) існує при виконанні умов (4.62). Для знаходження первинних змінних $\overline{\omega}$ і $\overline{\nu}$ необхідно звернутися до формул (4.5) і врахувати в них залежності $\varphi(t)$ і $\lambda(t)$, які є елементарними функціями часу і їх знаходження не є складним.

Випадок $\alpha_1 = 0$. Розглянемо випадок $\alpha_1 = 0, a_0 \neq 0$. Припускаємо, що жодне з рівнянь (4.60), (4.61) не звертається в тотожність. Вибором системи координат можна добитися виконання умови $\beta_1 = 0$, тобто рівності $A_{23} = 0$.

Тоді розглядаючи лінійні комбінації рівнянь (4.60), (4.61), отримаємо

$$a_0\beta_1'\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}R_2(\varphi) + R_3(\varphi), \tag{4.68}$$

$$a_0\beta_1'\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}P_2(\varphi) + P_3(\varphi), \tag{4.69}$$

де

$$\begin{aligned} R_3(\varphi) &= -n_3\cos 3\varphi - m_3\sin 3\varphi + n_2\cos 2\varphi + m_2\sin 2\varphi - n_1\cos\varphi - m_1\sin\varphi + n_0, \\ P_3(\varphi) &= n_3\sin 3\varphi - m_3\cos 3\varphi - n_2\sin 2\varphi + m_2\cos 2\varphi - p_1\sin\varphi + m_1\cos\varphi - p_0, \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned} R_2(\varphi) &= q_2\sin 2\varphi - q_1\sin\varphi + q_1'\cos\varphi + q_0, \\ P_2(\varphi) &= q_2\cos 2\varphi + q_1\cos\varphi - p_1'\sin\varphi + p_0'. \end{aligned} \tag{4.71}$$

У рівності (4.70), (4.71) введені позначення:

$$n_3 = \frac{1}{4}a_0'^2 mB_2, \quad m_3 = \frac{1}{4}a_0'^2 mB_2', \quad n_2 = \frac{1}{2}a_0 a_0'^3(C_{23} + 2m^2 A_{23}),$$

$$m_2 = \frac{1}{2}a_0 a_0'^3(C_{13} + m^2 A_{13}), \quad n_1 = \frac{1}{2}(4a_0^2 C_2 + a_0'^2 mB_2 + 4a_0 G_0 + 4a_0'^2 k_0 m),$$

$$n_1 = \frac{1}{4}(4a_0^2 C_2' + a_0'^2 mB_2'), \quad n_0 = \frac{1}{2}a_0 a_0'\left[2a_0 s_2 + (1 - 3a_0^2)C_{23}^* - a_0'^2 mB_{23}^*\right],$$

$$p_1 = \frac{1}{4}(4a_0^2 C_2 + a_0'^2 mB_2 - 4a_0 G_0 - 4a_0'^2 k_0 m), \tag{4.72}$$

$$p_0 = \frac{1}{2}a_0 a_0'\left[2a_0 s_1 + (1-3a_0^2)(C_{13}^* - a_0'^2 mB_{13}^*\right], \quad q_2 = \frac{1}{2}a_0'^2 m\beta_1',$$

$$q_1 = a_0 B_2', \quad q_1' = a_0 a_0'^2(mA_{33} - B_{22}^*), \quad q_0 = -a_0^2\gamma_1,$$

$$p_1' = a_0 a_0'^2(mA_{33} - B_{22}^*), \quad p_0' = \frac{1}{2}(2a_0^2\gamma_1' - a_0'^2 m\beta_1').$$

З рівняння (4.69) витікає:

$$\dot{\varphi} = \frac{P_2(\varphi) \pm \sqrt{P_2^2(\varphi) - 4a_0\beta_1' P_2(\varphi)}}{2a_0\beta_1'} \tag{4.73}$$

Друге значення $\dot{\varphi}$ отримаємо, диференціюючи за часом обидві частини рівності (4.69) і виключаючи в підсумковому рівнянні $\ddot{\varphi}$ за допомогою рівняння (4.68)

$$\dot{\varphi} = \frac{n_3\cos 5\varphi + m_3\sin 5\varphi + \cdots}{q_2\sin 4\varphi + \cdots},$$

де багатокрапкою позначені члени, що містять тригонометричні функції меншого аргументу, ніж перші доданки. Оскільки $\beta_1' \neq 0$, тоді з останньої рівності і рівності (4.73) виходить, що функція $\dot{\varphi}$ має вигляд:

$$\dot{\varphi} = \varepsilon_1\sin\varphi + \varepsilon_0. \tag{4.74}$$

Підставимо вираз (4.74) в рівняння (4.68) (4.69). Враховуючи позначення (4.70), (4.71) і позначення (4.72), вимагатимемо, щоб отримана рівність була тотожністю за φ. Тоді знайдемо наступні умови

$$\begin{gathered}
A_{23} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad C_{23} = 0, \quad s_2 = 0, \quad B_{12} = -2mA_{12} = 0, \quad C_{12} + m^2 A_{12} = 0, \\
8mA_{13}^2\left[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{22} - A_{11})\right] + \left[B_{12} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})\right]\times \\
\times\left[B_{22}^2 - B_{11}^2 + 4A_{13}(C_{13} + m^2 A_{13}) - 2m(A_{22} - A_{11})(B_{11} + B_{22})\right] = 0, \\
4a_0 A_{13}\left[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{22} - A_{11})\right]^2 - \\
-2a_0(B_{13} - 2mA_{13})\left[B_{22} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})\right]\left[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{22} - A_{11})\right] + \\
+\left[s_1 - a_0(C_{13} + mB_{13} - m^2 A_{13})\right]\left[B_{22} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})\right]^2 = 0 \\
k_0 = \frac{1}{a_0'^2 m}\left(\varepsilon_0 q_1' - a_0\beta'\varepsilon_0\varepsilon_1 - n_3 - a_0^2 C_2 - \frac{1}{4}a_0'^2 mB_2 - a_0 G_0\right).
\end{gathered} \tag{4.75}$$

Використовуючи формули для $\dot{\varphi}$ з (4.74), $\lambda(t)$ з першої рівності системи (4.59), в силу (4.75), отримаємо розв'язок рівнянь (4.60) (4.61)

$$\dot{\varphi} = \varepsilon_1 \sin\varphi + \varepsilon_0, \quad \lambda(t) = \lambda_1 \sin\varphi + \lambda_0, \tag{4.76}$$

де

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = \frac{a_0'}{A_{13}}\left[2m(A_{22} - A_{11}) - B_{22} + B_{11}\right], \quad \varepsilon_0 = \frac{2a_0\left[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{11} - A_{22})\right]}{B_{22} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})}, \\
\lambda_1 = \frac{1}{a_0' B_2}\left(a_0'^2 A_{13} B_{13} B_2 + A_{33} B_2^2 - 2a_0'^2 A_{13}^2 C_2\right), \quad \lambda_0 = \frac{1}{2a_0}\left(B_2 + 2k_0 - 2a_0 \varepsilon_0 A_{33}\right), \\
B_2 = \frac{a_0'^2}{2}\left[B_{22} - B_{11} - 2m(A_{22} - A_{11})\right], \quad C_2 = \frac{a_0'^2}{2}\left[C_{22} - C_{11} + m^2(A_{22} - A_{11})\right].
\end{gathered} \tag{4.77}$$

Отже, при $\overline{\alpha} = (0,0,1)$, $a_0 \neq 0$ рівняння (4.60), (4.61) мають розв'язок $\dot{\varphi} = \varepsilon_1 \sin\varphi + \varepsilon_0$, тобто $\varphi(t)$ є елементарною функцією часу. Наприклад, при $\varepsilon_0 > 0, \quad \varepsilon_0^2 - \varepsilon_1^2 > 0$ вона така

$$\varphi(t) = \arcsin \frac{\varepsilon_0\left[\varepsilon_1(\cos\upsilon - 1) + k_0 \sin\upsilon\right]}{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_1(\cos\upsilon - 1) + k_0 \sin\upsilon}, \quad (k_0 = \sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_1^2}, \upsilon = k_0 t). \tag{4.78}$$

Залежність $\lambda(t)$ знайдемо підстановкою (4.78) в другий вираз з системи (4.76). Функції $\omega_i = \omega_i(t), \quad \nu_i = \nu_i(t)$ визначимо з (4.5)

$$\begin{gathered}
\nu_1 = a_0' \sin\varphi(t), \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi(t), \quad \nu_3 = a_0, \\
\omega_1 = a_0' m \sin\varphi(t), \quad \omega_2 = a_0' m \cos\varphi(t), \quad \omega_3 = \varepsilon_1 \sin\varphi(t) + (\varepsilon_0 + a_0 m).
\end{gathered} \tag{4.79}$$

Побудований розв'язок (4.76), (4.79) рівнянь (4.1), (4.2) існує при виконанні умов $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1$ і рівності (4.75) (4.77).

Особливий інтерес представляє варіант побудованого розв'язку у разі, коли гіростат здійснює прецесію (4.5) під дією сили тяжіння, т. е. у випадку $B_{ij} = 0, \quad C_{ij} = 0$. Тоді з (4.75), (4.77) маємо:

$$\dot{\varphi} = \varepsilon_1 \sin\varphi + \varepsilon_0, \quad \lambda(t) = \lambda_1 \sin\varphi + \lambda_0, \tag{4.80}$$

де

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = \frac{a_0' m}{A_{13}}(A_{22} - A_{11}), \quad \varepsilon_0 = -a_0 m, \quad \lambda_1 = \frac{a_0' m}{A_{13}}\left[A_{33}(A_{11} - A_{22}) - A_{13}^2\right], \\
\lambda_0 = \frac{1}{m}(a_0 m^2 A_{22} - s_3).
\end{gathered} \tag{4.81}$$

Розв’язок (4.80), (4.81) має місце при виконанні умов

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad A_{23} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_1 = 0. \qquad (4.82)$$

Відмітимо характерні властивості розв’язку (4.80) – (4.82). По–перше, в силу перших трьох рівностей з (4.82) одиничний вектор гіростатичного моменту $\bar{\alpha}$ співнаправлений з вектором $\bar{a}$, який утворює постійний кут з вертикаллю. По–друге, такій же властивості задовольняє і вектор $\bar{s}$. У третіх, вектори $\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{s}$ лежать в головній площині еліпсоїда інерції, побудованого для нерухомої точки.

Оскільки швидкість власного обертання гіростата лінійно залежить від синуса кута цього обертання, то $\varphi(t)$ є елементарною функцією часу. В силу формули (4.79) і другої формули з (4.80) основні змінні задачі (4.1), (4.2) є елементарними функціями часу. Якщо гіростат за розподілом мас задовольняє умові Гріолі $(A_{22} = A_{11})$, то прецесія стає регулярною прецесією. Якщо гіростат за розподілом мас задовольняє умові Гесса $\left(A_{13}^2 = A_{33}(A_{11} - A_{22})\right)$, тоді гіростатичний момент буде постійним. Отже, обидва ці варіанти ми виключаємо з розгляду. Неважко переконатися в тому, що для розв’язання (4.80) – (4.82) не може виконуватися умова $a_0^2 = \dfrac{a_0'^2}{A_{13}^2}(A_{22} - A_{11})^2 + 1$, тобто прецесія гіростата не може бути прецесійно–ізоконічним рухом[55].

Для розв’язання (4.76) – (4.78) вектор гіростатичного моменту спрямовано по вектору $\bar{a}$, але вектор $\bar{s}$ може бути не колінеарним вектору $\bar{a}$. Проте прецесія (4.79) з функціями (4.76), які отримані за умов (4.75), може описувати ізоконічний рух [55], оскільки для величин $\varepsilon_1, \varepsilon_0$ з (4.77) може виконуватися умова ізоконічності $\varepsilon_0^2 = m^2 + \varepsilon_1^2$. При цьому рухливий і нерухомий годографи вектора кутової швидкості симетричні один одному відносно дотичної до них площини.

Випадок $\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13} = 0, A_{23} = 0$. При розгляді цього випадку змінимо частину позначень (4.57). Це пов'язано з тим, що в цьому пункті будуть досліджені прецесії в розгорнутому вигляді. Запишемо рівняння (4.51) – (4.53) так

$$\begin{aligned}
&\alpha_3\dot{\lambda}(t)+A_{33}\ddot{\varphi}-a_0' m\alpha_1\lambda(t)\cos\varphi+L_2(\varphi)=0,\\
&N_1(\varphi)\dot{\lambda}(t)+a_0'\alpha_1\dot{\varphi}\lambda(t)\cos\varphi+M_1(\varphi)\ddot{\varphi}+M_1'(\varphi)\dot{\varphi}^2+M_2'(\varphi)\dot{\varphi}=0,\\
&a_0'\alpha_1\dot{\lambda}(t)\cos\varphi-a_0'\alpha_1\lambda(t)\dot{\varphi}\sin\varphi+M_1'(\varphi)\ddot{\varphi}-Q_1(\varphi)\dot{\varphi}^2+Q_2(\varphi)\dot{\varphi}+\\
&+R_2(\varphi)-ma_0'\lambda(t)R_1(\varphi)=0,
\end{aligned} \tag{4.83}$$

де введені позначення:

$$\begin{aligned}
&M_1(\varphi)=A_1\cos\varphi+A_1'\sin\varphi+A_0,\\
&M_1'(\varphi)=A_1'\cos\varphi-A_1\sin\varphi,\ Q_1(\varphi)=A_1\cos\varphi+A_1'\sin\varphi,\\
&M_2(\varphi)=\frac{1}{2}B_2\cos 2\varphi+\frac{1}{2}B_2'\sin 2\varphi+a_0B_1\cos\varphi+a_0B_1'\sin\varphi+k_0,\\
&M_2'(\varphi)=-B_2\sin 2\varphi+B_2'\cos 2\varphi-a_0B_1\sin\varphi+a_0B_1'\cos\varphi,\ R_1(\varphi)=a_0\alpha_1\sin\varphi+a_0'\alpha_3,\\
&N_1(\varphi)=a_0'\alpha_1\sin\varphi+a_0\alpha_3,
\end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}
&L_2(\varphi)=C_2'\cos 2\varphi-C_2\sin 2\varphi-k_1'\cos\varphi+k_1\sin\varphi,\\
&Q_2(\varphi)=B_2\cos 2\varphi+B_2'\sin 2\varphi-a_0B_1\cos\varphi+a_0B_1'\sin\varphi-B_0,\\
&R_2(\varphi)=a_0C_2\cos 2\varphi+a_0C_2'\sin 2\varphi+\delta_1\cos\varphi+\delta_1'\sin\varphi+\delta_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A_1=a_0'A_{23},\ A_1'=a_0'A_{13},\ A_0=a_0A_{33},\ B_2=\frac{a_0'^2}{2}(B_{22}^*-B_{11}^*),\\
&B_2'=a_0'^2B^*{}_{12},B_1=a_0'B_{23}^*,B_1'=a_0'B_{13}^*,\\
&B_0=\frac{a_0'^2}{2}(B_{22}^*+B_{11}^*),C_2=\frac{a_0'^2}{2}(C_{22}^*-C_{11}^*),C_2'=a_0'^2C_{12}^*,k_1=a_0'(s_2-a_0C_{23}^*),\\
&k_1'=a_0'(s_1-a_0C_{13}^*),\delta_1=a_0'\left((2a_0'^2-1)C^*{}_{23}-a_0s_2\right),\delta_1'=a_0'\left((2a_0^2-1)C_{13}^*-a_0s_1\right),\\
&\delta_0=\frac{a_0'^2}{2}\left[2s_3+a_0(C_{11}^*+C_{22}^*-2C_{33}^*)\right],\\
&k_0=k-\frac{1}{2}m\cdot sp(A)+\frac{1}{4}\left[a_0'^2(B_{11}^*+B_{22}^*)+2a_0^2B_{33}^*\right].
\end{aligned} \tag{4.85}$$

У співвідношення (4.85) входять елементи матриць B^* і C^*, визначених таким чином

$$B^*=msp(A)E-2mA+B,\ C^*=C+mB-m^2A,$$

E – одинична матриця $sp(A)$ – слід матриці A. По аналогії з (4.59) отримаємо

$$\begin{aligned}
&\lambda(t)=\frac{1}{N_1(\varphi)}\left(M_2(\varphi)-M_1(\varphi)\dot{\varphi}\right),\\
&\dot{\lambda}(t)=\frac{1}{N_1^2(\varphi)}\left(-M_1(\varphi)N_1(\varphi)\ddot{\varphi}+P_1(\varphi)\dot{\varphi}^2+M_3(\varphi)\dot{\varphi}\right).
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Тут позначено:

$$P_1(\varphi) = a_0\alpha_3 A_1 \sin\varphi + a_0(a_0'\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_1')\cos\varphi + a_0'\alpha_1 A_1,$$

$$M_3(\varphi) = \frac{1}{4}a_0'\alpha_1 B_2 \cos 3\varphi + \frac{1}{4}a_0'\alpha_1 B_2' \sin 3\varphi + a_0\alpha_3 B_2' \cos 2\varphi - a_0\alpha_3 B_2 \sin 2\varphi + \quad (4.87)$$

$$+\left(a_0^2\alpha_3 B_1' - \frac{3}{4}a_0'\alpha_1 B_2 - a_0'\alpha_1 k_0\right)\cos\varphi - \left(a_0^2\alpha_3 B_1 + \frac{3}{4}a_0'\alpha_1 B_2'\right)\sin\varphi - a_0 a_0'\alpha_1 B_1$$

Підставимо вирази (4.86) в рівняння (4.83). Внаслідок того, що друге рівняння системи (4.83) стає тотожністю, то маємо два рівняння:

$$N_1(\varphi)D_1(\varphi)\ddot{\varphi} + \alpha_3 P_1(\varphi)\dot{\varphi}^2 + L_3(\varphi)\dot{\varphi} - N_1(\varphi)R_3(\varphi) = 0, \quad (4.88)$$

$$N_1(\varphi)P_1(\varphi)\ddot{\varphi} - G_1(\varphi)\dot{\varphi}^2 - H_3(\varphi)\dot{\varphi} - N_1(\varphi)F_3(\varphi) = 0, \quad (4.89)$$

де з урахуванням позначень (4.84), (4.87) вирази коефіцієнтів при $\dot{\varphi}, \dot{\varphi}^2, \ddot{\varphi}$ і вільний член такі

$$D_1(\varphi) = A_{33}N_1(\varphi) - \alpha_3 M_1(\varphi) = (a_0'\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_1')\sin\varphi - \alpha_3 A_1 \cos\varphi,$$

$$G_1(\varphi) = a_0'\alpha_1 P_1(\varphi)\cos\varphi + a_0'\alpha_1 N_1(\varphi)\sin\varphi - Q_1(\varphi)N_1^2(\varphi) =$$

$$= a_0^2\alpha_3(a_0'\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_1')\sin\varphi + A_1(a_0'^2 a_1^2 - a_0^2\alpha_3^2)\cos\varphi + a_0 a_0'\alpha_1(a_0'\alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_1'),$$

$$L_3(\varphi) = \alpha_3 M_3(\varphi) + a_0'\alpha_1 M_1(\varphi)N_1(\varphi) m\cos\varphi = \sum_{n=0}^{3}(l_n \cos n\varphi + l_n' \sin n\varphi),$$

$$l_3 = \frac{a_0'\alpha_1}{4}(\alpha_3 B_2 - a_0'\alpha_1 m A_1'), \quad l_3' = \frac{a_0'\alpha_1}{4}(\alpha_3 B_2' - a_0'\alpha_1 m A_1),$$

$$l_2 = \frac{a_0\alpha_3}{2}(2\alpha_3 B_2' + a_0'\alpha_1 m A_1), \quad l_2' = \frac{1}{2}\left[a_0\alpha_3(-2\alpha_3 B_2 + a_0'\alpha_1 m A_1') + a_0'^2\alpha_1^2 m A_0\right],$$

$$l_1 = \frac{a_0'\alpha_1}{4}(-3\alpha_3 B_2 + a_0'\alpha_1 m A_1') + a_0^2\alpha_3^2 B_1' + a_0\alpha_1\alpha_3(a_0 m A_0 - k_0),$$

$$l_1' = \frac{a_0'\alpha_1}{4}(-3\alpha_3 B_2' + a_0'\alpha_1 m A_1) - a_0^2\alpha_3^2 B_1, \quad l_0 = \frac{a_0 a_0'\alpha_1\alpha_3}{2}(mA_1 - 2B_2).$$

$$R_3(\varphi) = a_0'\alpha_1 M_2(\varphi) m\cos\varphi - L_2(\varphi)N_1(\varphi) = \sum_{n=0}^{3}(r_n \cos n\varphi + r_n' \sin n\varphi),$$

$$r_0 = \frac{a_0'\alpha_1}{2}(a_0 m B_1 - k_1), \quad r_3 = \frac{a_0'\alpha_1}{4}(mB_2 - 2C_2), \quad r_3' = \frac{a_0'\alpha_1}{4}(mB_2' - 2C_2'),$$

$$r_2 = \frac{a_0\alpha_1}{2}(a_0 m B_1 + k_1) - a_0\alpha_3 C_2', \quad r_2' = \frac{a_0\alpha_1}{2}(a_0 m B_1' + k_1') + a_0\alpha_3 C_2,$$

$$r_1 = \frac{a_0'\alpha_1}{4}(mB_2 + 2C_2) + a_0\alpha_2 k_1' + a_0'\alpha_1 m k_0, \quad r_1' = \frac{a_0'\alpha_1}{4}(mB_2' + 2C_2') - a_0\alpha_3 k_1.$$

$$H_3(\varphi) = a_0'\alpha_1 M_3(\varphi)\cos\varphi + a_0'\alpha_1 N_1(\varphi)M_2(\varphi)\sin\varphi + Q_2(\varphi)N_1^2(\varphi) +$$

$$+ a_0' m R_1(\varphi)N_1(\varphi)M_1(\varphi) = \sum_{n=0}^{3}(h_n \cos n\varphi + h_n' \sin n\varphi),$$

$$h_3 = \frac{a_0 a_0' \alpha_1}{4}(\alpha_3 B_2 + a_0'\alpha_1 m A_1), \quad h_3' = \frac{a_0 a_0' \alpha_1}{4}(\alpha_3 B_2' - a_0'\alpha_1 m A_1'),$$

$$h_2 = a_0^2\alpha_3^2 B_2 + \frac{a_0'\alpha_1\alpha_3 m}{2}(a_0'^2 - a_0^2)A_1' + \frac{a_0'^2\alpha_1^2}{2}(B_0 - a_0 m A_0),$$

$$h_2' = a_0^2\alpha_3^2 B_2' - \frac{a_0'\alpha_1\alpha_3 m}{2}(a_0'^2 - a_0^2)A_1 ,$$

$$h_1 = a_0 B_1(a_0^2\alpha_3^2 - a_0'^2\alpha_1^2) + \frac{5}{4}a_0 a_0'\alpha_1\alpha_3 B_2' + \frac{a_0 a_0'^2 m}{4}(\alpha_1^2 - 4\alpha_3^2)A_1,$$

$$h_1' = a_0^3\alpha_3^2 B_1' + a_0\alpha_1\alpha_3\left[m\left(a_0^2 - a_0'^2\right)A_0 - a_0\left(k_0 + 2B_0 + \frac{5}{4}B_2\right)\right] + \frac{a_0 a_0'^2 m}{4}(3\alpha_1^2 - 4\alpha_3^2)A_1',$$

$$h_0 = a_0' a_0^2 \alpha_1\alpha_3 B_1' + \frac{a_0'\alpha_1\alpha_3 m}{2}\left(a_0^2 - a_0'^2\right)A_1' + \frac{a_0'^2\alpha_1^2}{2}(a_0 m A_0 - B_2 - B_0 - 2k_0) -$$

$$- a_0\alpha_3^2(a_0'^2 m A_0 + a_0 B_0).$$

$$F_3(\varphi) = R_2(\varphi)N_1(\varphi) - a_0' m R_1(\varphi)M_2(\varphi) = \sum_{n=0}^{3}(f_n \cos n\varphi + f_n' \sin n\varphi),$$

$$f_3 = \frac{a_0 a_0'\alpha_1}{4}(mB_2' - 2C_2'), \quad f_3' = \frac{a_0 a_0'\alpha_1}{4}(mB_2 - 2C_2),$$

$$f_2 = \frac{\alpha_3}{2}(2a_0^2 C_2 + a_0'^2 m B_2) + \frac{a_0'\alpha_1}{2}(\delta_1 - a_0^2 m B_1),$$

$$f_2' = \frac{\alpha_3}{2}(2a_0^2 C_2' + a_0'^2 m B_2') - \frac{a_0'\alpha_1}{2}(\delta_1' - a_0^2 m B_1'),$$

$$f_1 = -\frac{a_0 a_0'\alpha_1}{4}(mB_2' - 2C_2') + a_0\alpha_3(a_0'^2 m B_1 + \delta_1),$$

$$f_1' = \frac{a_0 a_0'\alpha_1}{4}(mB_2 - 2C_2) + a_0\alpha_3(a_0'^2 m B_1' + \delta_1') + a_0'\alpha_1(\delta_0 - a_0 m k_0),$$

$$f_0 = \frac{a_0'\alpha_1}{2}(\delta_1 - a_0^2 m B_1') + \alpha_3(a_0\delta_0 + a_0'^2 m k_0).$$

Таким чином, задача про дослідження напіврегулярних прецесій першого типу неавтономного гіростата зводиться до вивчення розв'язків рівнянь (4.88) (4,89).

Покладемо $A_{23} = 0, \quad \alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13} = 0$. Рівняння (4.88), (4.89) раніше (див. п. 4.2) були вивчені у разі, коли одне з рівнянь ставало тотожністю, тобто коефіцієнти при $\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}^2, \dot{\varphi}$ і вільний член перетворювалися на нуль для будь–яких значень φ. Тут розглянемо варіант, для якого виконуються умови

$$A_{23} = 0, \quad \alpha_1 A_{33} - \alpha_3 A_{13} = 0\,. \tag{4.90}$$

Тоді з (4.88), (4.89) витікає (коефіцієнти при $\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}^2$ у силу (4.87), (4.90) дорівнюють нулю):

$$L_3(\varphi)\dot{\varphi} - N_1(\varphi)R_3(\varphi) = 0, \tag{4.91}$$

$$H_3(\varphi)\dot{\varphi} + N_1(\varphi)F_3(\varphi) = 0. \tag{4.92}$$

З (4.91) знайдемо (припускаємо $L_3(\varphi) \neq 0$)

$$\dot{\varphi} = \frac{N_1(\varphi)R_3(\varphi)}{L_3(\varphi)} \tag{4.93}$$

Підставимо (4.93) в (4.92). Оскільки $N_1(\varphi)$ не може бути тотожним нулем в силу постановки задачі, то маємо:

$$H_3(\varphi)R_3(\varphi) + F_3(\varphi)L_3(\varphi) = 0\,. \tag{4.94}$$

Враховуючи в рівнянні (4.94) рівності (4.90) і позначення (4.84), (4.87), вимагатимемо, щоб (4.94) виконувалося для усіх φ. Отримаємо наступну систему алгебраїчних рівнянь на параметри задачі :

$$\frac{\alpha_3 A_1'}{A_{33}^3}\Big\{a_0'^2 m A_{33}\big(A_{33}(B_2^2 - B_2'^2) - 2A_1'^2 C_2\big) + A_1'\big[\big(mA_1'^2 - B_2 A_{33}\big)(a_0 k_1' + \delta_1') -$$
$$- B_2' A_{33}(a_0 k_1 + \delta_1) + B_0 A_1'(mB_2 - 2C_2)\big]\Big\} = 0,$$

$$\frac{\alpha_3 A_1'}{A_{33}^3}\Big\{2a_0'^2 m A_{33}\big(B_2 B_2' A_{33} - A_1'^2 C_2'\big) + A_1'\big[-\big(mA_1'^2 - B_2 A_{33}\big)(a_0 k_1 + \delta_1) - B_2' A_{33}(a_0 k_1' + \delta_1') +$$
$$+ B_0 A_1'(mB_2' - 2C_2')\big]\Big\} = 0,$$

$$\frac{a_0 a_0'^2 \alpha_3^3 m B_2 B_2'}{2} - \frac{\alpha_3^3 A_1'}{8A_{33}^3}\Big\{A_0\big[3\big(mA_1'^2 - B_2 A_{33}\big)(a_0 k_1 + \delta_1) + 3B_2' A_{33}(a_0 k_1' + \delta_1') -$$
$$- a_0'^2 m A_{33}(B_2 B_1 - B_2' B_1') + A_1'(B_2' C_2 - B_2 C_2' - 2mB_0 B_2')\big] + A_1'\big[a_0 A_1' B_1\big(mB_2 - mB_0 - 2C_2\big) -$$
$$- (k_1 A_1' - 6A_0 C_2')(B_0 + m a_0'^2 A_{33}) + \delta_0 A_{33} B_2' - a_0 m A_1'^2 C_2'\big]\Big\} = 0,$$

$$\frac{a_0 a_0'^2 \alpha_3^3 m(B_2'^2 - B_2^2)}{4} - \frac{\alpha_3^3 A_1'}{8A_{33}^3}\{(mA_1'^2 - B_2 A_{33})(3A_0(a_0 k_1' + \delta_1') + A_1'\delta_0) -$$
$$- a_0'^2 m A_0 A_{33}(B_2 B_1' + B_2' B_1) - 3A_0 A_{33} B_2'(a_0 k_1 + \delta_1) + A_0 A_1'(B_2' C_2' - B_2 C_2 + 2mB_0 B_2) +$$
$$+ A_1'[a_0 A_1'(B_1(mB_2 - 2C_2) - mB_0 B_1') - (k_1' A_1' + 6A_0 C_2)(B_0 + ma_0'^2 A_{33}) + a_0 m A_1'^2 C_2]\} = 0,$$

$$\frac{a_0^2 \alpha_3^3}{4}\left[2B_2(a_0 k_1' + \delta_1') + 2B_2'(a_0 k_1 + \delta_1) + 3a_0'^2 m(B_2 B_1' + B_2' B_1)\right] + \frac{\alpha_3^3 A_1'}{16A_{33}^3}\{4A_0^2[mB_2^2 + B_2 C_2 -$$
$$- B_2' C_2' + 6B_0 C_2 - mB_2 B_0 - mB_2'^2 + B_1(a_0 k_1 + \delta_1) - (B_1' + 3mA_1')(a_0 k_1' + \delta_1') + 6ma_0'^2 A_{33} C_2] -$$
$$- A_1'^2[4a_0 k_1 B_1 - 2C_2(3B_0 + 2B_2 + 4k_0)] + mA_1'^2[6A_{33} C_2(a_0'^2 - 2a_0^2) -$$
$$- B_2(2B_2 + B_0 + 4k_0) - 4a_0^2 B_1^2 - 12\delta_0 A_0 + 4B_0 k_0 - 3A_1'(a_0 k_1' + \delta_1')] +$$
$$+ 3A_{33}^3[4a_0 \delta_0 B_2 - a_0'^2 m(B_2^2 - B_2'^2 - 4a_0 k_1' A_1)] +$$
$$+ A_1' A_{33}[B_2'(3\delta_1 + 7a_0 k_1) + a_0 k_1'(5B_2 + 12B_0 + 4k_0) + \delta_1'(4k_0 + 5B_2) +$$
$$+ 4a_0^2(4B_1 C_2' - 2B_1' C_2 + m(2B_0 B_1' + B_2 B_1' - B_2' B_1))]\} = 0,$$

$$\frac{a_0^2 \alpha_3^3}{4}\left[2B_2(a_0 k_1' + \delta_1') - 2B_2(a_0 k_1 + \delta_1) + 3a_0'^2 m(B_2' B_1' + B_2 B_1)\right] +$$
$$+ \frac{\alpha_3^3 A_1'}{16A_{33}^3}\{4A_0^2[B_2'(C_2 + 2mB_2 - mB_0) + C_2'(B_2 + 6B_0 + 6ma_0'^2 A_{33}) + B_1(a_0 k_1' + \delta_1') +$$
$$+ (B_1' + 3mA_1')(a_0 k_1 + \delta_1)] + + A_1'^2[2C_2'(3B_0 + 2B_2 + 4k_0) - 4a_0 k_1' B_1] +$$
$$+ 6A_{33}^2[2a_0 \delta_0 B_2' - a_0'^2 m(B_2 B_2' + 2a_0 k_1 A_1')] + mA_1'^2[6A_{33} C_2'(a_0'^2 - 2a_0^2) - \qquad (4.95)$$
$$- B_2'(2B_2 + B_0 + 4k_0) - 4a_0^2 B_1 B'] - A_1' A_{33}[a_0 k_1(7B_2 + 12B_0 + 4k_0) +$$
$$+ 4a_0^2(4B_1 C_2 + 2B_1' C_2' - m(B_2 B_1 + B_2' B_1' - 2B_0 B_1)) +$$
$$+ \delta_1(4k_0 + 3B_2) - 5B_2'(a_0 k_1' + \delta_1')] + mA_1'^3(5a_0 k_1 + \delta_1)\} = 0,$$

$$\frac{\alpha_3^3 a_0}{2} - [2a_0(B_2' \delta_0 + a_0 C_2' B_0) + a_0^2(B_1(a_0 k_1' + \delta_1') + B_1'(a_0 k_1 + \delta_1)) + 2ma_0'^2(a_0^2 B_1 B_1' + B_2' k_0 +$$
$$+ a_0^2 A_{33} C_2')] - \frac{\alpha_3^3 A_1'}{4A_{33}^3}\{a_0 A_{33}^2[[ma_0'^2(3B_2 B_1 - 2B_2' B_1' + 2k_0 B_1) + 6a_0^2(C_2 B_1 + C_2' B_1') +$$
$$+ 2a_0^2 m(B_2' B_1' - 2B_2 B_1 + B_0 B_1) + 6mA_1' C_2'(a_0^2 - a_0'^2) + (B_2 + 2k_0)(a_0 k_1 + \delta_1) -$$
$$- 2B_2'(a_0 k_1' + 2\delta_1') + 2a_0(k_1(3B_0 + 2B_2) - B_1 \delta_0)] +$$
$$+ A_1'^2[(k_1 + 2ma_0 B_1)(B_2 + 2k_0) + 2k_1(B_0 + mA_{33}(a_0'^2 - 3a_0^2))] +$$
$$+ A_1' A_{33}[a_0(2B_2' C_2 - 5B_2 C_2') - 2a_0 \delta_1' B_1 -$$
$$- 6a_0 C_2(B_0 + k_0) - 2a_0 m B_2 B_2' + 2a_0^2(B_1 k_1' - B_1' k_1) - 2\delta_0 B_2'] +$$
$$2a_0 m[A_1'^3 C_2' + a_0 A_{33}^3(k_1(3a_0'^2 - a_0^2) - a_0 \delta_1)]\} = 0,$$

$$\frac{a_0\alpha_3^3}{2}[a_0^2(B_1'(a_0k_1'+\delta_1')-B_1(a_0k_1+\delta_1))-2a_0(a_0B_0C_2+\delta_0B_2)-$$
$$-ma_0'^2(2B_2k_0+2a_0^2A_{33}C_2+a_0^2(B_1^2-B_1'^2))]-\frac{\alpha_3^3A_1'}{4A_{33}^3}\{a_0A_{33}^2[ma_0'^2(2B_1'k_0+3B_2'B_1+2B_2B_1')+$$
$$+6a_0^2(B_1C_2'-B_1'C_2)+2a_0^2m(B_1'B_0-B_2B_1'-2B_2'B_1)+6mA_1'C_2(a_0'^2-a_0^2)+$$
$$+2(2B_2+k_0)(a_0k_1'+\delta_1')+B_2'(5a_0k_1+\delta_1)-2a_0\delta_0(B_1'+3mA_1')+2a_0k_1'(3B_0-B_2)]+$$
$$+A_1'^2[(B_2+B_0+2k_0)(a_0mB_1'+k_1')+mA_{33}k_1'(a_0'^2-3a_0^2)+a_0m(B_2'B_1-3A_{33}\delta_1']+$$
$$+A_1'A_{33}[2\delta_0(B_2+k_0)--2a_0^3m(B_1^2+B_1'^2)-2a_0^2(B_1'k_1'+B_1k_1)+6a_0C_2(B_2+B_0+k_0)+$$
$$+a_0(B_2'C_2'-2B_2C_2)-2a_0mB_2'^2+4a_0mk_0B_0+2a_0\delta_1B_1]-$$
$$-m[A_1'^3(a_0C_2+\delta_0)+2a_0^2A_{33}^3(a_0^2k_1'+a_0\delta_1'-3a_0^2k_1')]\}=0,$$

$$\frac{a_0^2\alpha_3^3}{4}[a_0'^2(a_0'^2m(B_1'(B_2-4k_0))-B_2'B_1)-2B_2(a_0k_1'+\delta_1')+2B_2'(a_0k_1-\delta_1)+$$
$$+4a_0^2B_1'C_2'-4a_0B_1'(a_0C_2+\delta_0)+4a_0k_1'(B_0+a_0'^2mA_{33})]+$$
$$+\frac{\alpha_3^3A_1'}{8A_{33}^3}\{A_{33}^2[a_0'^2m(B_2^2+B_2'^2+8a_0^2B_1^2+8k_0(B_2+k_0))+8a_0^2mk_0(B_0-B_2)+$$
$$+2a_0^2(B_1(a_0k_1+5\delta_1)-B_1'(5a_0k_1'+\delta_1')+3(B_2C_2+B_2'C_2'))-$$
$$-2a_0^2m(B_2^2+B_2'^2-B_2B_0+4a_0^2B_1^2+3A_1'\delta_1')+$$
$$+2a_0(\delta_0(4k_0+5B_2)+2a_0C_2(2k_0+3B_0)+3mA_1'k_1'(a_0'^2-a_0^2))]+$$
$$+A_1'^2[2C_2(B_2+B_0+2k_0)+mB_2^2+2mk_0(3B_2+B_0+4k_0)+2mA_{33}(a_0'^2C_2-3a_0(a_0C_2+\delta_0))+$$
$$+2a_0B_1(3a_0mB_1-k_1)]+A_1'A_{33}[6a_0k_1'B_0+2B_2(3a_0k_1'+\delta_1')+B_2'(3a_0k_1+\delta_1)+$$
$$+2k_0(5a_0k_1'+\delta_1')-2a_0^2m(B_1'(B_2-2B_0+4k_0)+5B_2'B_1)-$$
$$-4a_0^2B_1'C_2]-m[4a_0^2A_{33}^3(C_2(2a_0^2-3a_0'^2)+2a_0\delta_0)+A_1'^3(a_0k_1'+\delta_1')]\}=0,$$

$$\frac{a_0\alpha_3^3}{4}[a_0'^2m(B_1(B_2+4k_0)+B_2'B_1')-2B_2'(a_0k_1'-\delta_1')-2B_2(a_0k_1-\delta_1)-4a_0^2B_1'C_2'-$$
$$-4a_0B_1(a_0C_2-\delta_0)-4a_0k_1(B_0+a_0'^2mA_{33})]+\frac{\alpha_3^3A_1'}{8A_{33}^3}\{A_{33}^2[2a_0'^2m(4B_2'k_0-9a_0k_1A_1')-$$
$$-8a_0^2mB_1B_1'(a_0^2-a_0'^2)+10a_0\delta_0B_2'+2a_0^2(2C_2'(2k_0+3B_0)+9(B_2C_2'-B_2'C_2)+$$
$$+B_1(7\delta_1'-a_0k_1')-B_1'(\delta_1-7a_0k_1)+3mA_1'(3a_0k_1-\delta_1)+mB_2'(B_0-4k_0))]+$$
$$+A_1'^2[2C_2'(B_2+2B_0+2k_0)+mB_2'(B_2+B_0+2k_0)+2mA_{33}C_2'(2a_0'^2-9a_0^2)+$$
$$+2a_0B_1(a_0mB_1'+k_1')]+A_1'A_{33}[-2a_0k_1(k_0+9B_0)+B_2'(5\delta_1'-3a_0k_1')+$$
$$+2(B_2+k_0)(\delta_1-6a_0k_1)-4a_0^2B_1'C_2'+8a_0B_1\delta_0+2a_0^2m(B_1(B_2+2B_0-4k_0)-5B_2'B_1')]-$$
$$m[4a_0^2A_{33}^3C_2'(2a_0^2-3a_0'^2)-A_1'^3(5a_0k_1-\delta_1)]\}=0,$$

$$\frac{a_0^3\alpha_3^3}{2}\left[B_1(a_0k_1'-\delta_1')-B_1'(a_0k_1-\delta_1)+2(B_2'C_2-B_2C_2')\right]+$$
$$\frac{\alpha_3^3A_1'}{8A_{33}^3}\left\{A_{33}^2\left[a_0B_2(7a_0k_1-5\delta_1)+a_0B_2'(7a_0k_1'-5\delta_1')+4a_0^3(B_1C_2+B_1'C_2')+\right.\right.$$
$$+4a_0k_1(a_0k_1-\delta_1)+4a_0^3m\big(B_1(B_2+2k_0-B_0)+B_1'B_2'+3A_1'C_2'\big)-$$
$$-3a_0a_0'^2m(3B_2B_1+B_2'B_1'+2A_1'C_2'+4k_0B_1)+12a_0^2(B_0k_1-B_1\delta_0)\Big]+$$
$$+A_1'^2\left[k_1(3B_0+2B_2+4k_0)-2a_0B_1C_2+3mk_1A_{33}(a_0'^2-3a_0^2)-a_0mB_1(B_0+3B_2+8k_0)+\right.$$
$$3a_0m\delta_1A_{33}-a_0mB_1(B_0+3B_2+8k_0)+3a_0m\delta_1A_{33}\Big]+A_1'A_{33}\Big[B_2'(5a_0C_2-3\delta_0)-$$
$$-a_0\big(C_2'(5B_2+6B_0+4k_0)-2mB_2'(4k_0-B_0)+4B_1(a_0k_1'+\delta_1')+4a_0B_1'(k_1-2ma_0B_1)\big)\Big]+$$
$$\left.+a_0m\left[3A_1'^3C_2'+4a_0k_1A_{33}^3(3a_0'^2-a_0^2)+4a_0^2\delta_1A_{33}^3\right]\right\}=0.$$

Таким чином, система (4.95) з одинадцяти рівнянь є умовою існування напіврегулярних прецесій першого типу за умов (4.90).

Випадок маятникових рухів. Покладемо в (4.95) $m=0$, $\alpha_1=0$, $\alpha_3=1$. Тоді з другої рівності з (4.90) слідує $A_{13}=0$.

Можна показати, що система (4.95) допускає наступні розв’язки.
Для першого прикладу покладемо

$$C_{13}=C_{23}=0,\ B_{22}=-B_{11},\ s_3=\frac{a_0}{2}(C_{11}+C_{22}-2C_{33}),$$
$$s_1=\frac{a_0}{a_0'(B_2'^2+B_2^2)}\left[C_2'(B_2B_1-B_2'B_1')-C_2(B_2'B_1+B_2B_1')\right],\tag{4.96}$$
$$s_2=-\frac{a_0}{a_0'(B_2'^2+B_2^2)}\left[C_2(B_2B_1-B_2'B_1')+C_2'(B_2'B_1+B_2B_1')\right],$$

$$ctg^2\theta_0=\frac{B_{11}^2+B_{12}^2}{B_{13}^2+B_{23}^2}.\tag{4.97}$$

Кут нутації θ_0, як видно з (4.97), залежить тільки від компонент матриці $B=(B_{ij})$, яка характеризує гіроскопічні сили. Для того, щоб навести числовий приклад розв’язку покладемо:

$$B_{11}=b_0,\ B_{12}=2b_0,\ B_{13}=4b_0,\ B_{23}=-b_0,\ C_{11}=c_0,\ C_{22}=3c_0,\ C_{12}=-3c_0,\ C_{33}=6c_0,$$
$$a_0=\frac{\sqrt{110}}{22},\quad a_0'=\frac{\sqrt{374}}{22},\quad s_1=\frac{27\sqrt{110}}{110}c_0,\quad s_2=-\frac{\sqrt{110}}{10}c_0,\quad s_3=\frac{2\sqrt{110}}{11}c_0,$$

де b_0 і c_0 – числові незалежні параметри. З (4.86) і (4.93) маємо:

$$\dot{\varphi}=\frac{c_0\left(5610\cos 2\varphi+1870\sin 2\varphi+27\sqrt{41140}\cos\varphi+11\sqrt{41140}\sin\varphi\right)}{b_0\left(748\sqrt{110}\cos 2\varphi+374\sqrt{110}\sin 2\varphi+110\sqrt{374}\cos\varphi+440\sqrt{374}\sin\varphi\right)},$$

$$\lambda(t)=\frac{\sqrt{110}}{5}\left(\frac{17b_0}{44}(2\sin 2\varphi-\cos 2\varphi)+\frac{\sqrt{85}b_0}{22}(4\sin\varphi-\cos\varphi)+k_0-\frac{\sqrt{110}A_{33}}{22}\dot{\varphi}\right).$$

На відміну від розв'язків п. 4.2 в даному випадку $\dot{\varphi}$ є раціональною функцією від тригонометричних поліномів другого порядку.

У другому прикладі покладемо:

$$B_{22}=B_{11},\quad B_{12}=0,\quad B_1=\frac{-2B_{11}(C_{13}C_2'+C_{23}C_2)}{a_0'(C_{13}^2+C_{23}^2)},\quad B_1'=\frac{-2B_{11}(C_{23}C_2'-C_{13}C_2)}{a_0'(C_{13}^2+C_{23}^2)},$$

$$s_1=\frac{a_0a_0'^4C_{13}(C_{23}^2+C_{13}^2)-2a_0C_{13}(C_2'^2+C_2^2)+2\delta_0(C_{23}C_2'-C_{13}C_2)}{a_0'^4(C_{13}^2+C_{23}^2)},$$

$$s_2=\frac{a_0a_0'^4C_{23}(C_{23}^2+C_{13}^2)-2a_0C_{23}(C_2'^2+C_2^2)+2\delta_0(C_{13}C_2'+C_{23}C_2)}{a_0'^4(C_{13}^2+C_{23}^2)}, \tag{4.98}$$

$$\left(2C_2C_{13}C_{23}-C_2'(C_{23}^2-C_{13}^2)\right)\left(a_0'^6(C_{13}^2+C_{23}^2)-4a_0^2(C_2'^2+C_2^2)\right)=0.$$

Якщо в останній рівності системи (4.98) параметр C_2' задовольняє умові $C_2'=\dfrac{2C_2C_{13}C_{23}}{C_{23}^2-C_{13}^2}$, тоді співвідношення набуде вигляду:

$$\dot{\varphi}=\frac{1}{B_{11}}\left[a_0'C_{13}\sin\varphi+a_0'C_{23}\cos\varphi+\frac{1}{a_0'^2}(a_0C_2-\delta_0)\right]+\frac{2a_0C_2C_{13}^2}{a_0'^2B_{11}(C_{23}^2-C_{13}^2)}. \tag{4.99}$$

Якщо ж покладемо $a_0'^6(C_{13}^2+C_{23}^2)-4a_0^2(C_2'^2+C_2^2)=0$, тоді після урахування (4.85) знайдемо:

$$tg^2\theta_0=\frac{4C_{12}^2(C_{22}-C_{11})^2}{C_{13}^2+C_{23}^2}. \tag{4.100}$$

У формулі (4.100), на відміну від (4.97), кут нутації θ_0 залежить від компонент матриці $C=(C_{ij})$, що характеризує ньютонівську дію. Наведемо числовий приклад. Нехай:

$$B_{11} = B_{22} = 2b_0, \quad C_{11} = c_0, \quad C_{22} = 2c_0, \quad C_{33} = -5c_0, \quad C_{12} = c_0, \quad C_{13} = -c_0,$$

$$C_{23} = -2c_0,\, c_0 > 0, \quad a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_0' = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad B_{23} = \frac{8b_0}{5}, \quad B_{13} = \frac{6b_0}{5},$$

$$s_1 = \frac{c_0}{5}(6 - 11\sqrt{2}),\; s_2 = \frac{c_0}{10}(16 - 31\sqrt{2}),\; s_3 = -2c_0 .$$

Якщо виконані ці рівності, тоді з (4.86), (4.93) визначимо:

$$\dot{\varphi} = \frac{c_0\left(5\sqrt{2}(\sin 2\varphi - 2\cos 2\varphi) + 2(12 - 17\sqrt{2})\cos\varphi + 2(21\sqrt{2} - 16)\sin\varphi\right)}{8b_0\left(3\cos\varphi - 4\sin\varphi\right)},$$

$$\lambda(t) = \sqrt{2}\left(\frac{4}{5}b_0\cos\varphi + \frac{3}{5}b_0\sin\varphi + k_0 - \frac{\sqrt{2}}{2}A_{33}\dot{\varphi}\right).$$

З першої формули можна знайти $\varphi(t)$, а з другої – $\lambda(t)$. Розв’язок початкової системи (4.1), (4.2) задають формули (4.5).

Випадок $m = 0, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0$. Варіантом розв’язуваності рівнянь (4.95) служить рівність:

$$C_{12} = B_{23} = 0, \quad C_{23} = \frac{C_{13}B_2'}{B_2}, \quad C_2 = \frac{a_0'^3 A_{33}(B_2C_{13} + B_2'C_{23})}{2A_0'B_0},$$

$$k = \frac{B_2\left[A_{33}\left(B_2^2 + B_2'^2\right) + 2B_2'B_1'A_1'\right]}{2A_{33}(B_2^2 + B_2'^2)} - \frac{1}{4}\left[a_0'^2(B_{11} + B_{22}) + 2a_0^2 B_{33}\right],$$

$$s_3 = -\frac{a_0}{2}(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) - \frac{a_0'C_{13}\sqrt{B_2^2 + B_2'^2}\left(B_2 + 2B_0\right)}{2B_2B_0}, \tag{4.101}$$

$$s_1 = \frac{a_0a_0'^3A_{33}^2\left[C_{13}\left(B_2'^2 - B_2^2\right) - 2B_2B_2'C_{23}\right] + 2A_1'B_0(a_0a_0'A_1'C_{13}B_0 - A_{33}B_2\delta_0)}{2a_0'A_1'^2B_0^2},$$

$$s_2 = \frac{a_0a_0'^3A_{33}^2\left[C_{23}\left(B_2'^2 - B_2^2\right) + 2B_2B_2'C_{23}\right] + 2A_1'B_0(a_0a_0'A_1'C_{23}B_0 - A_{33}B_2'\delta_0)}{2a_0'A_1'^2B_0^2},$$

$$tg\theta_0 = \frac{A_{33}\sqrt{4B_{12}^2(B_{22} - B_{11})^2}}{A_{13}(B_{22} - B_{11})}. \tag{4.102}$$

Із співвідношень (4.101), зокрема, витікає, що жодна з величин s_i у загальному випадку не дорівнює нулю. Рівність (4.102) показує, що θ_0 залежить від моментів інерції і величин B_{ij}.

Числовий приклад задамо у вигляді:

$$A_{33}=\xi_0,\, A_{13}=2\xi,\, B_{11}=2b_0,\, B_{22}=3b_0,\, B_{33}=5b_0,\, B_{12}=-b_0,\, B_{13}=7b_0,$$

$$C_{11}=5c_0,\, C_{33}=4c_0,\, C_{13}=4c_0,\, a_0=\frac{2}{3},\, a_0'=\frac{\sqrt{5}}{3},\, C_{23}=-8c_0,\, C_{22}=3c_0,$$

$$s_1=2c_0,\, s_2=\frac{-20}{3}c_0,\; s_3=-6c_0,\, k=-\frac{1}{9}b_0,$$

де ξ, b_0 і c_0 – числові незалежні параметри. Тоді з формули (4.93) знайдемо

$$\dot{\varphi}=\frac{U_4(\varphi)}{V_3(\varphi)}, \qquad (4.103)$$

де

$$U_4(\varphi)=4c_0\big[-25\sin 4\varphi+10\sqrt{5}(2\sin 3\varphi-3\cos 3\varphi)+10(11\sin 2\varphi+8\cos 2\varphi)+$$
$$+38\sqrt{5}(2\sin\varphi-\cos\varphi)-80\big]$$
$$V_3(\varphi)=15b_0\big[\sqrt{5}(2\sin 3\varphi-\cos 3\varphi)+4(\sin 2\varphi+2\cos 2\varphi)-\sqrt{5}(6\sin\varphi-5\cos\varphi)\big].$$

Функцію $\lambda(t)$ визначимо з першої формули системи (4.86).

$$\lambda(t)=\frac{b_0(5\cos 2\varphi-10\sin 2\varphi+56\sqrt{5}\sin\varphi+61)}{24\alpha_3(\sqrt{5}\sin\varphi+1)}-\frac{\xi\dot{\varphi}}{\alpha_3}\,. \qquad (4.105)$$

Відмітною особливістю співвідношень (4.103) – (4.105) є порядок тригонометричних многочленів, що входять в них, і структура функції (4.105).

Приклад напіврегулярної прецесії при $\dot{\psi}=m\neq 0$. Покажемо існування умов розв’язуваності системи (4.95) при $m\neq 0$. Для цієї мети в (4.95) покладемо $\alpha_1=0, \alpha_3=1$.

Тоді отримаємо систему рівнянь

$$A_{13}=0,\quad A_{23}=0,\quad B_2=0,\quad B_2'=0,$$

$$C_{13}=-\frac{2(B_0+a_0'^2 mA_{33})(B_1'C_2-B_1C_2')}{a_0'^3(B_1^2+B_1'^2)},\, C_{23}=\frac{2(B_0+a_0'^2 mA_{33})(B_1C_2-B_1'C_2')}{a_0'^3(B_1^2+B_1'^2)},$$

$$s_1=-\frac{a_0'a_0^2(C_{13}+mB_{13})(B_0+a_0'^2 mA_{33})+B_1'(a_0\delta_0+a_0'^2 mk_0)-a_0^2(B_1C_2'-B_1'C_2)}{a_0a_0'(B_0+a_0'^2 mA_{33})},$$

$$s_2=\frac{a_0'a_0^2(C_{23}+mB_{23})(B_0+a_0'^2 mA_{33})+B_1(a_0\delta_0+a_0'^2 mk_0)-a_0^2(B_1C_2+B_1'C_2')}{a_0a_0'(B_0+a_0'^2 mA_{33})}, \qquad (4.106)$$

$$\left(C_2'(B_1^2-B_1'^2)-2C_2B_1B_1'\right)\left(a_0'^4m^2A_{33}^2+2a_0'^2 mA_{33}B_0-a_0^2(B_1^2+B_1'^2)+B_0^2\right)=0\,.$$

Числовий приклад розв'язку рівнянь (4.106) будуватимемо для наступного випадку:

$$A_{11}=3\xi,\ A_{22}=4\xi, A_{33}=5\xi,\ A_{12}=-2\xi,\ B_{11}=b_0,\ B_{22}=7b_0,$$
$$B_{33}=-5b_0,\ B_{12}=-12b_0, B_{13}=8b_0,\ B_{23}=5b_0,\ C_{11}=10c_0,\ C_{22}=6c_0, \qquad (4.107)$$
$$C_{33}=8c_0,\ s_3=c_0,\ a_0=\frac{1}{3},\ a_0'=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Нехай $m=3\dfrac{b_0}{\xi}$. Якщо в останній рівності (4.106) покласти $C_2'=\dfrac{2C_2B_1B_1'}{B_1^2-B_1'^2}$, тоді, з урахуванням (4.86), (4.93) маємо:

$$C_{12}=\frac{2(171b_0^2+80c_0\xi)}{39\xi}, C_{23}=\frac{20(9b_0^2-4c_0\xi)}{39\xi}, C_{23}=\frac{32(9b_0^2-4c_0\xi)}{39\xi},$$
$$s_1=\frac{-2(456b_0^2+c_0\xi+351b_0k_0)}{39\xi}, s_2=\frac{-5(456b_0^2+c_0\xi+351b_0k_0)}{156\xi},$$
$$\dot{\varphi}=\frac{8\sqrt{2}(9b_0^2-4c_0\xi)(5\cos\varphi+8\sin\varphi)+61c_0\xi1980b_0^2-1053b_0k_0}{468b_0}, \qquad (4.108)$$
$$\lambda(t)=\frac{4\sqrt{2}(10c_0\xi-3b_0^2)(5\cos\varphi+8\sin\varphi)}{117b_0}+\frac{6669b_0k_0-305c_0\xi+9900b_0^2}{468b_0}.$$

Якщо ж в останній рівності системи (4.106) вираз у другій дужці дорівнює нулю, то на основі (4.85) отримаємо квадратне рівняння на m

$$a_0'^2(A_{22}-A_{11})^2m^2+2a_0'^2B_{11}(A_{22}-A_{11})m-a_0^2(B_{23}^2+B_{13}^2)+a_0'^2B_{11}^2=0,$$

звідки з урахуванням (4.107), знайдемо $m=\left(-1+\dfrac{\sqrt{178}}{4}\right)\dfrac{b_0}{\xi}$. Покладемо $C_{12}=5c_0$,

$$C_{13}=\frac{\sqrt{178}\left[7b_0^2(97-4\sqrt{178})-164\xi c_0\right]}{712\xi}, C_{23}=\frac{3\sqrt{178}\left[9b_0^2(97-4\sqrt{178})-160\xi c_0\right]}{2848\xi},$$
$$s_2=\frac{\sqrt{178}\left[480\xi c_0-b_0^2(12077-164\sqrt{178})+720k_0b_0(4-\sqrt{178})\right]}{8544\xi},$$
$$s_1=\frac{\sqrt{178}\left[108\xi c_0-5b_0^2(745-4\sqrt{178})+288k_0b_0(4-\sqrt{178})\right]}{2136\xi}.$$

Залежність $\dot{\varphi}(t)$ має вигляд

$$\dot{\varphi}=\frac{U_2(\varphi)}{V_1(\varphi)}, \qquad (4.109)$$

де

$$U_2 = 7209\sqrt{2}\left\{4\left[b_0^2(97-4\sqrt{178}) - 20\xi c_0\right]\cos 2\varphi + \right.$$
$$+\left[b_0^2(97-4\sqrt{178}) - 32\xi c_0\right]\sin 2\varphi + 4(2\sqrt{178}-89)\left\{11664 b_0 k_0 + 81 b_0^2(17\sqrt{178}+28) - \right.$$
$$-68(4+\sqrt{178})\xi c_0\left]\cos\varphi + \left[-2430 b_0 k_0 - 27 b_0^2(8+13\sqrt{178}) - \right.\right.$$
$$\left.-20(4+\sqrt{178})\xi c_0\right]\sin\varphi\Big\}, V_1 = 173016\xi b_0(8\cos\varphi - 5\sin\varphi).$$

Функція $\lambda(t)$ набуде вигляду

$$\lambda(t) = \frac{2\sqrt{2}b_0}{3}(5\cos\varphi + 8\sin\varphi) + 3k_0 - 5\xi\dot{\varphi}. \qquad (4.110)$$

Таким чином, в припущенні $m \neq 0$ наведено приклади розв’язуваності системи (4.95).

4.3. Висновки до розділу

У розділі розглянуто напіврегулярні прецесії гіростата зі змінним гіростатичним моментом. Отримано умови існування цих рухів в окремих випадках:

1. $\overline{\alpha} = (0,0,1), \quad a_0 = 0$;
2. $\overline{\alpha} = (0,0,1), \quad a_0 \neq 0$;
3. $\overline{\alpha} = (1,0,0), \quad \dot{\varphi} = \sqrt{a + b\sin\varphi}$;
4. $\overline{\alpha} = (1,0,0), \quad \dot{\varphi} = a + b\sin\varphi$.

Проведено в загальному випадку редукцію початкових рівнянь до системи двох диференціальних рівнянь другого порядку на змінну, яка характеризує кут власного обертання гіростата. Для цих рівнянь побудовано розв’язки в наступних варіантах:

1. $\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33} = 0$;
2. $\alpha_1 = 0,\ a_0 \neq 0,\ \dot{\varphi} = \varepsilon_1 \sin\varphi + \varepsilon_0$;
3. $\alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33} = 0$, $\dot{\varphi}$ – раціональна функція;
4. $m = 0$ (маятникові рухи), $\overline{\alpha} = (0,0,1)$;

5. $m = 0$, $\overline{\alpha} = (\alpha_1, 0, \alpha_3)$;

6. $m \neq 0$, $\overline{\alpha} = (0,0,1)$.

РОЗДІЛ 5
НАПІВРЕГУЛЯРНІ ПРЕЦЕСІЇ ГІРОСТАТА, ЩО НЕСЕ ДВА РОТОРИ

У цьому розділі розглянуто напіврегулярні прецесії гіростата, що несе два ротори. Знайдено рівняння руху такої системи, проведена редукція отриманих рівнянь до системи меншого порядку, отримані нові розв'язки зредукованих рівнянь, що описуються елементарними і еліптичними функціями часу.

5.1. Постановка задачі

Розглянемо механічну систему, яка складається з абсолютно твердого тіла – носія S_0 і двох маховиків. Рівняння руху запишемо у вигляді (див. главу 2).

$$A\dot{\overline{\omega}} = \left(\lambda_1(t)\overline{\alpha} + \lambda_2(t)\overline{\beta}\right)\times\overline{\omega} - \dot{\lambda}_1(t)\overline{\alpha} - \dot{\lambda}_2(t)\overline{\beta} + A\overline{\omega}\times\overline{\omega} + \overline{\omega}\times B\overline{\nu} + \overline{s}\times\overline{\nu} + \overline{\nu}\times C\overline{\nu}, \quad (5.1)$$

$$\dot{\overline{\nu}} = \overline{\nu}\times\overline{\omega}, \quad (5.2)$$

де введені позначення: $\overline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – кутова швидкість тіла–носія; $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – одиничний вектор осі симетрії силових полів; $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ і $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – одиничні ортогональні вектори; $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$– компоненти гіростатичного моменту у базисі $\overline{\alpha}$ і $\overline{\beta}$; $\overline{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постійний вектор, що характеризує узагальнений центр мас системи; $A = (A_{ij})$– тензор інерції [143, 144]; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постійні симетричні матриці третього порядку.

Рівняння (5.1), (5.2) допускають два перші інтеграли

$$\overline{\nu}\cdot\overline{\nu} = 1,\ (A\overline{\omega} + \lambda_1(t)\overline{\alpha} + \lambda_2(t)\overline{\beta})\cdot\overline{\nu} - \frac{1}{2}(B\overline{\nu}\cdot\overline{\nu}) = k \quad (5.3)$$

Тут k – довільна стала.

Відмітимо, що при $B = 0, C = 0$ на гіростат діє тільки сила тяжіння. Отримані з (5.1), (5.2) рівняння в цьому випадку можна вважати узагальненими рівняннями Эйлера–Пуассона.

Випишемо основні співвідношення, що описують напіврегулярну прецесію гіростата [55] першого типу у векторному виді

$$\bar{a} \cdot \bar{\nu} = a_0 = \cos\theta_0, \ \bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{a} + m\bar{\nu} \tag{5.4}$$

і в скалярному

$$\bar{a} = (0,0,1), \ \bar{\nu} = (a_0' \sin\varphi, a_0' \cos\varphi, a_0), \tag{5.5}$$

$$\omega_1 = a_0' m \sin\varphi, \ \omega_2 = a_0' m \cos\varphi, \ \omega_3 = \dot{\varphi} + m a_0. \tag{5.6}$$

У формулах (5.4) – (5.6) m– постійна, $a_0' = \sin\theta_0$. З них витікає, що в процесі руху гіростата кут між незмінним в тілі–носії вектором $\bar{a}$ і вектором $\bar{\nu}$ не змінюється з часом.

Внесемо вираз для $\bar{\omega}$ з (5.4) в рівняння (5.1)

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda}_1(t)\bar{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\bar{\beta} = \lambda_1(t)\left[\dot{\varphi}(\bar{\alpha} \times \bar{a}) + m(\bar{\alpha} \times \bar{\nu})\right] + \lambda_2(t)\left[\dot{\varphi}(\bar{\beta} \times \bar{a}) + m(\bar{\beta} \times \bar{\nu})\right] - \\ &- \ddot{\varphi} A\bar{a} + \dot{\varphi}^2 (A\bar{a} \times \bar{a}) - \dot{\varphi}(B^*\bar{\nu} \times \bar{a}) + \bar{\nu} \times C^*\bar{\nu} = 0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

де

$$B^* = B + mSp(A)\delta - 2mA, C^* = C + mB - m^2 A. \tag{5.8}$$

Відмітимо, що вирази (5.5), (5.6) дозволяють рівняння Пуассона (5.2) не розглядати, оскільки при підстановці (5.5), (5.6) в (5.2) отримаємо тотожність.

Таким чином, дослідження напіврегулярних прецесій (5.4) зводиться до дослідження розв’язків рівняння (5.7). У силу (5.3) воно має інтеграл

$$(\dot{\varphi} A\bar{a} + mA\bar{\nu} + \lambda_1(t)\bar{\alpha} + \lambda_2(t)\bar{\beta}) \cdot \bar{\nu} - \frac{1}{2}(B\bar{\nu} \cdot \bar{\nu}) = k. \tag{5.9}$$

При розгляді скалярних рівнянь, що витікають з (5.7) використовуватимемо базис $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} = \bar{\alpha} \times \bar{\beta}$:

$$\bar{\gamma} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1). \tag{5.10}$$

Тоді, помноживши скалярно обидві частини (5.7) на вектори $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_2(t)\left[m(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2 \cos\varphi + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot{\varphi}\right] - \mu_0\ddot{\varphi} + \mu_1\dot{\varphi}^2 + \\ &+ \dot{\varphi}(\mu_2 \sin\varphi + \mu_3 \cos\varphi + \mu_4) + \mu_5 \sin 2\varphi + \mu_6 \cos 2\varphi + \mu_7 \sin\varphi + \mu_8 \cos\varphi + \mu_9, \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda}_2(t) = \lambda_1(t)\left[m(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2 \cos\varphi + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot{\varphi}\right] - \varepsilon_0\ddot{\varphi} + \varepsilon_1\dot{\varphi}^2 + \\ &+ \dot{\varphi}(\varepsilon_2 \sin\varphi + \varepsilon_3 \cos\varphi + \varepsilon_4) + \varepsilon_5 \sin 2\varphi + \varepsilon_6 \cos 2\varphi + \varepsilon_7 \sin\varphi + \varepsilon_8 \cos\varphi + \varepsilon_9, \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\lambda_1(t)[m(a_0'\beta_1\sin\varphi + a_0'\beta_2\cos\varphi + a_0\beta_3) + \dot\varphi\beta_3] -$$
$$- \lambda_2(t)[m(a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0'\alpha_2\cos\varphi + a_0\alpha_3) +$$
$$+ \alpha_3\dot\varphi] - \sigma_0\ddot\varphi + \sigma_1\dot\varphi^2 + \dot\varphi(\sigma_2\sin\varphi + \sigma_3\cos\varphi + \sigma_4) +$$
$$+ \sigma_5\sin 2\varphi + \sigma_6\cos 2\varphi + \sigma_7\sin\varphi + \sigma_8\cos\varphi + \sigma_9 = 0 \tag{5.13}$$

В рівностях (5.11) – (5.13) введено позначення

$$\mu_0 = \alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33},\ \varepsilon_0 = \beta_1 A_{13} + \beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33},\ \sigma_0 = \gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33} \tag{5.14}$$

$$\mu_1 = \alpha_1 A_{23} - \alpha_2 A_{13},\ \varepsilon_1 = \beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13},\ \sigma_1 = \gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}, \tag{5.15}$$

$$\mu_2 = a_0'(\alpha_2 B_{11}^* - \alpha_1 B_{12}^*),\ \varepsilon_2 = a_0'(\beta_2 B_{11}^* - \beta_1 B_{12}^*),\ \sigma_2 = a_0'(\gamma_2 B_{11}^* - \gamma_1 B_{12}^*)\ , \tag{5.16}$$

$$\mu_3 = a_0'(\alpha_2 B_{12}^* - \alpha_1 B_{22}^*),\ \varepsilon_3 = a_0'(\beta_2 B_{12}^* - \beta_1 B_{22}^*),\ \sigma_3 = a_0'(\gamma_2 B_{12}^* - \gamma_1 B_{22}^*)\ , \tag{5.17}$$

$$\mu_4 = a_0(\alpha_2 B_{13}^* - \alpha_1 B_{23}^*),\ \varepsilon_4 = a_0(\beta_2 B_{13}^* - \beta_1 B_{23}^*),\ \sigma_4 = a_0(\gamma_2 B_{13}^* - \gamma_1 B_{23}^*)\ , \tag{5.18}$$

$$\mu_5 = \frac{1}{2}a_0^2\left[\alpha_1 C_{13}^* - \alpha_2 C_{23}^* + \alpha_3(C_{22}^* - C_{11}^*)\right],\ \varepsilon_5 = \frac{1}{2}a_0^2\left[\beta_1 C_{13}^* - \beta_2 C_{23}^* + \beta_3(C_{22}^* - C_{11}^*)\right],$$
$$\sigma_5 = \frac{1}{2}a_0^2\left[\gamma_1 C_{13}^* - \gamma_2 C_{23}^* + \gamma_3(C_{22}^* - C_{11}^*)\right]. \tag{5.19}$$

$$\mu_6 = \frac{1}{2}a_0^2(\alpha_1 C_{23}^* + \alpha_2 C_{13}^* - 2\alpha_3 C_{12}^*),\ \varepsilon_6 = \frac{1}{2}a_0^2(\beta_1 C_{23}^* + \beta_2 C_{13}^* - 2\beta_3 C_{12}^*),$$
$$\sigma_6 = \frac{1}{2}a_0^2(\gamma_1 C_{23}^* + \gamma_2 C_{13}^* - 2\gamma_3 C_{12}^*). \tag{5.20}$$

$$\mu_7 = a_0'\left[-a_0\alpha_1 C_{12}^* + \alpha_2\left(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{11}^*)\right) - \alpha_3(s_2 - a_0 C_{23}^*)\right],$$
$$\varepsilon_7 = a_0'\left[-a_0\beta_1 C_{12}^* + \beta_2\left(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{11}^*)\right) - \beta_3(s_2 - a_0 C_{23}^*)\right],$$
$$\sigma_7 = a_0'\left[-a_0\gamma_1 C_{12}^* + \gamma_2\left(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{11}^*)\right) - \gamma_3(s_2 - a_0 C_{23}^*)\right]. \tag{5.21}$$

$$\mu_8 = a_0'\left[-\alpha_1\left(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{22}^*)\right) + a_0\alpha_2 C_{12}^* + \alpha_3(s_1 - a_0 C_{13}^*)\right],$$
$$\varepsilon_8 = a_0'\left[-\beta_1\left(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{22}^*)\right) + a_0\beta_2 C_{12}^* + \beta_3(s_1 - a_0 C_{13}^*)\right],$$
$$\sigma_8 = a_0'\left[-\gamma_1\left(s_3 - a_0(C_{33}^* - C_{22}^*)\right) + a_0\gamma_2 C_{12}^* + \gamma_3(s_1 - a_0 C_{13}^*)\right]. \tag{5.22}$$

$$\mu_9 = \frac{\alpha_1}{2}\left[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}^*\right] - \frac{\alpha_2}{2}\left[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}^*\right],$$
$$\varepsilon_9 = \frac{\beta_1}{2}\left[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}^*\right] - \frac{\beta_2}{2}\left[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}^*\right],$$
$$\sigma_9 = \frac{\gamma_1}{2}\left[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}^*\right] - \frac{\gamma_2}{2}\left[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}^*\right]. \tag{5.23}$$

Запишемо компоненти матриць B^* і C^*

$$
\begin{aligned}
&B_{11}^{*}=B_{11}-m(A_{11}-A_{22}-A_{33}), B_{22}^{*}=B_{22}-m(A_{22}-A_{33}-A_{11}),\\
&B_{33}^{*}=B_{33}-m(A_{33}-A_{11}-A_{22}),\\
&B_{12}^{*}=-2mA_{12}+B_{12}, B_{13}^{*}=-2mA_{13}+B_{13}, B_{23}^{*}=-2mA_{23}+B_{23},
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_{11}^{*}=C_{11}+mB_{11}-m^2A_{11}, C_{22}^{*}=C_{22}+mB_{22}-m^2A_{22}, C_{33}^{*}=C_{33}+mB_{33}-m^2A_{33},\\
&C_{12}^{*}=C_{12}+mB_{12}-m^2A_{12}, C_{13}^{*}=C_{13}+mB_{13}-m^2A_{13}, C_{23}^{*}=C_{23}+mB_{23}-m^2A_{23}.
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

Зредукована система (5.11) – (5.13) є системою трьох звичайних диференціальних рівнянь на три функції: $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \varphi(t)$. Відносно функцій $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ вона є лінійною. Отже дослідження прецесій першого типу гіростата з двома роторами, зведена до дослідження умов існування розв'язків системи (5.11) – (5.13), в якій введені позначення (5.14) – (5.23).

5.2. Маятникові рухи гіростата

Якщо в (5.4) $m=0$, тоді вектор кутової швидкості матиме вигляд

$$\overline{\omega}=\dot{\varphi}\overline{a} \tag{5.26}$$

З (5.26) витікає, що гіростат обертається відносно нерухомої осі в просторі. Такі рухи називаються маятниковими рухами. Можна вважати, що ці рухи є окремим особливим випадком прецесій першого типу. Тому використовуватимемо підхід вказаний в п. 5.1. Запишемо (5.11) – (5.25), прийнявши $m=0$.

$$
\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1(t)=\gamma_3\dot{\varphi}\lambda_2(t)-\mu_0\ddot{\varphi}+\mu_1\dot{\varphi}^2+\dot{\varphi}(\mu_2\sin\varphi+\mu_3\cos\varphi+\mu_4)+\\
&+\mu_5\sin 2\varphi+\mu_6\cos 2\varphi+\mu_7\sin\varphi+\mu_8\cos\varphi+\mu_9.
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_2(t)=-\gamma_3\dot{\varphi}\lambda_1(t)-\varepsilon_0\ddot{\varphi}+\varepsilon_1\dot{\varphi}^2+\dot{\varphi}(\varepsilon_2\sin\varphi+\varepsilon_3\cos\varphi+\varepsilon_4)+\\
&+\varepsilon_5\sin 2\varphi+\varepsilon_6\cos 2\varphi+\varepsilon_7\sin\varphi+\varepsilon_8\cos\varphi+\varepsilon_9.
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{\varphi}\big(\beta_3\lambda_1(t)-\alpha_3\lambda_2(t)\big)-\sigma_0\ddot{\varphi}+\sigma_1\dot{\varphi}^2+\dot{\varphi}(\sigma_2\sin\varphi+\sigma_3\cos\varphi+\sigma_4)+\\
&+\sigma_5\sin 2\varphi+\sigma_6\cos 2\varphi+\sigma_7\sin\varphi+\sigma_8\cos\varphi+\sigma_9=0.
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

де в силу (5.10), (5.14) – (5.23)

$$\gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2,\ \gamma_2=\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3,\ \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1,, \tag{5.30}$$

$$\mu_0=A_{13}\alpha_1+A_{23}\alpha_2+A_{33}\alpha_3,\ \varepsilon_0=A_{13}\beta_1+A_{23}\beta_2+A_{33}\beta_3,\ \sigma_0=A_{13}\gamma_1+A_{23}\gamma_2+A_{33}\gamma_3, \tag{5.31}$$

$$\mu_1 = \alpha_1 A_{23} - \alpha_2 A_{13},\ \varepsilon_1 = \beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13},\ \sigma_1 = \gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}\ , \tag{5.32}$$

$$\mu_2 = a_0'(\alpha_2 B_{11} - \alpha_1 B_{12}),\ \varepsilon_2 = a_0'(\beta_2 B_{11} - \beta_1 B_{12}),\ \sigma_2 = a_0'(\gamma_2 B_{11} - \gamma_1 B_{12})\ , \tag{5.33}$$

$$\mu_3 = a_0'(\alpha_2 B_{12} - \alpha_1 B_{22}),\ \varepsilon_3 = a_0'(\beta_2 B_{12} - \beta_1 B_{22}),\ \sigma_3 = a_0'(\gamma_2 B_{12} - \gamma_1 B_{22})\ , \tag{5.34}$$

$$\mu_4 = a_0(\alpha_2 B_{13} - \alpha_1 B_{23}),\ \varepsilon_4 = a_0(\beta_2 B_{13} - \beta_1 B_{23}),\ \sigma_4 = a_0(\gamma_2 B_{13} - \gamma_1 B_{23})\ , \tag{5.35}$$

$$\begin{gathered}\mu_5 = \frac{1}{2}a_0^2\left[\alpha_1 C_{13} - \alpha_2 C_{23} + \alpha_3(C_{22} - C_{11})\right], \mu_6 = \frac{1}{2}a_0^2(\alpha_1 C_{23} + \alpha_2 C_{13} - 2\alpha_3 C_{12}),\\ \mu_7 = a_0'\left[-\alpha_1 a_0 C_{12} + \alpha_2\left(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})\right) - \alpha_3(s_2 - a_0 C_{23})\right],\\ \mu_8 = a_0'\left[-\alpha_1\left(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})\right) + a_0\alpha_2 C_{12} + \alpha_3(s_1 - a_0 C_{13})\right],\\ \mu_9 = \frac{\alpha_1}{2}\left[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}\right] - \frac{\alpha_2}{2}\left[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}\right],\end{gathered} \tag{5.36}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_5 = \frac{1}{2}a_0^2\left[\beta_1 C_{13} - \beta_2 C_{23} + \beta_3(C_{22} - C_{11})\right], \varepsilon_6 = \frac{1}{2}a_0^2(\beta_1 C_{23} + \beta_2 C_{13} - 2\beta_3 C_{13}),\\ \varepsilon_7 = a_0'\left[-a_0\beta_1 C_{12} + \beta_2\left(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})\right) - \beta_3(s_2 - a_0 C_{23})\right],\\ \varepsilon_8 = a_0'\left[-\beta_1\left(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})\right) + a_0\beta_2 C_{12} + \beta_3(s_1 - a_0 C_{13})\right],\\ \varepsilon_9 = \frac{\beta_1}{2}\left[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}\right] - \frac{\beta_2}{2}\left[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}\right],\end{gathered} \tag{5.37}$$

$$\begin{gathered}\sigma_5 = \frac{1}{2}a_0^2\left[\gamma_1 C_{13} - \gamma_2 C_{23} + \gamma_3(C_{22} - C_{11})\right], \sigma_6 = \frac{1}{2}a_0^2(\gamma_1 C_{23} + \gamma_2 C_{13} - 2\gamma_3 C_{12}),\\ \sigma_7 = a_0'\left[-a_0\gamma_1 C_{12} + \gamma_2\left(s_3 - a_0(C_{11} - C_{33})\right) - \gamma_3(s_2 - a_0 C_{23})\right],\\ \sigma_8 = a_0'\left[-\gamma_1\left(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})\right) + \gamma_2 a_0 C_{12} + \gamma_3(s_1 - a_0 C_{13})\right],\\ \sigma_9 = \frac{1}{2}\gamma_1\left[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}\right] - \frac{1}{2}\gamma_2\left[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}\right].\end{gathered} \tag{5.38}$$

Якщо залежність $\varphi = \varphi(t)$ буде задана, то співвідношення (5.27) – (5.28) є системою двох лінійних диференціальних рівнянь, яка повинна допускати інваріантне співвідношення (5.29).

5.2.1. Загальний метод дослідження зредукованої системи. Запишемо рівняння (5.27) – (5.29) в короткій формі:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \gamma_3\dot{\varphi}\lambda_2(t) + F_1(t),\ \dot{\lambda}_2(t) = -\gamma_3\dot{\varphi}\lambda_1(t) + F_2(t), \tag{5.39}$$

$$\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t) + F_3(t) = 0\ , \tag{5.40}$$

де

$$F_1(t) = -\mu_0\ddot{\varphi}(t) + \mu_1\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\varphi}(t)(\mu_2 \sin\varphi(t) + \mu_3 \cos\varphi(t) + \mu_4) +$$
$$+ \mu_5 \sin 2\varphi(t) + \mu_6 \cos 2\varphi(t) + \mu_7 \sin\varphi(t) + \mu_8 \cos\varphi(t) + \mu_9, \quad (5.41)$$

$$F_2(t) = -\varepsilon_0\ddot{\varphi}(t) + \varepsilon_1\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\varphi}(t)(\varepsilon_2 \sin\varphi(t) + \varepsilon_3 \cos\varphi(t) + \varepsilon_4) +$$
$$+ \varepsilon_5 \sin 2\varphi(t) + \varepsilon_6 \cos 2\varphi(t) + \varepsilon_7 \sin\varphi(t) + \varepsilon_8 \cos\varphi(t) + \varepsilon_9, \quad (5.42)$$

$$F_3(t) = \frac{1}{\dot{\varphi}(t)}[-\sigma_0\ddot{\varphi}(t) + \sigma_1\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\varphi}(t)(\sigma_2 \sin\varphi(t) + \sigma_3 \cos\varphi(t) + \sigma_4) +$$
$$+ \sigma_5 \sin 2\varphi(t) + \sigma_6 \cos 2\varphi(t) + \sigma_7 \sin\varphi(t) + \sigma_8 \cos\varphi(t) + \sigma_9]. \quad (5.43)$$

Особливий інтерес представляє варіант, коли на гіростат діє тільки сила тяжіння. Випишемо функції $F_i(t)\ (i = \overline{1,3})$, поклавши в (5.33) – (5.38) $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1,3})$.

$$F_1(t) = -\mu_0\ddot{\varphi}(t) + \mu_1\dot{\varphi}^2(t) + a_0'(\alpha_2 s_3 - \alpha_3 s_2)\sin\varphi +$$
$$+ a_0'(\alpha_3 s_1 - \alpha_1 s_3)\cos\varphi + a_0(\alpha_1 s_2 - \alpha_2 s_1), \quad (5.44)$$

$$F_2(t) = -\varepsilon_0\ddot{\varphi}(t) + \varepsilon_1\dot{\varphi}^2(t) + a_0'(\beta_2 s_3 - \beta_3 s_2)\sin\varphi +$$
$$+ a_0'(\beta_3 s_1 - \beta_1 s_3)\cos\varphi + a_0(\beta_1 s_2 - \beta_2 s_1), \quad (5.45)$$

$$F_3(t) = \frac{1}{\dot{\varphi}(t)}[-\sigma_0\ddot{\varphi}(t) + \sigma_1\dot{\varphi}^2(t) + a_0'(\gamma_2 s_3 - \gamma_3 s_2)\sin\varphi +$$
$$+ a_0'(\gamma_3 s_1 - \gamma_1 s_3)\cos\varphi + a_0(\gamma_1 s_2 - \gamma_2 s_1)]. \quad (5.46)$$

Співвідношення (5.44) – (5.46) застосовні, наприклад, у разі регулярної прецесії.

Вичислимо першу і другу похідні від інваріантного співвідношення (5.40) в силу рівнянь (5.39)

$$\gamma_3(\alpha_3\lambda_1(t) + \beta_3\lambda_2(t)) + \frac{1}{\dot{\varphi}}(\beta_3 F_1(t) - \alpha_3 F_2(t) + \dot{F}_3(t)) = 0\ , \quad (5.47)$$

$$\gamma_3^{\ 2}(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) -$$
$$-\frac{1}{\dot{\varphi}}\left\{\gamma_3\left(\alpha_3 F_1(t) + \beta_3 F_2(t)\right) + \left[\frac{1}{\dot{\varphi}}(\beta_3 F_1(t) - \alpha_3 F_2(t) + \dot{F}_3(t))\right]^{\bullet}\right\} = 0. \quad (5.48)$$

При вивченні співвідношень (5.40), (5.47), (5.48) необхідно враховувати позначення (5.30) – (5.38) і (5.41) – (5.43) і структуру (5.47) (5.48). Таким чином, необхідно розглянути три випадки: $\alpha_3 = \beta_3 = 0; \gamma_3 = 0$, $\alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$; $\gamma_3 \neq 0$,

$\alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$. У першому випадку на основі (5.40) необхідно вимагати, щоб $F_3(t) = 0$ для будь–яких значень t. У другому випадку, використовуючи (5.47) отримаємо рівняння:

$$\beta_3 F_1(t) - \alpha_3 F_2(t) + \dot{F}_3(t) = 0 \tag{5.49}$$

Вимога того, що (5.49) виконується для будь–кого t призводить до умов на параметри. Вони забезпечують існування інваріантного співвідношення (5.26). У третьому випадку, в рівняння (5.48) можна внести вираз $\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)$ знайдений з рівняння (5.40). Тоді отримаємо рівняння виду $\Phi(t) = 0$. Для визначення умов існування маятникових рухів при заданій залежності $\varphi(t)$ слід вимагати, щоб $\Phi(t) = 0$ для будь–яких значень t.

5.2.2. Приклади розв'язку рівнянь руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Приклад 1. Якщо функція $\varphi(t)$ не задана, то рівняння: $F_3(t) = 0$, $\beta_3 F_1(t) - \alpha_3 F_2(t) + \dot{F}_3(t) = 0$, $\Phi(t) = 0$ служать диференціальними рівняннями на функцію $\varphi(t)$. Після отримання умов існування маятникових рухів функції $\lambda_1(t)$ і $\lambda_2(t)$ визначаються з рівнянь (5.27) (5.28). Наприклад у разі дії тільки сили тяжіння варіант $\alpha_3 = \beta_3 = 0$ розглядається наступним чином. Оскільки при цьому $\overline{\alpha} \cdot \overline{a} = 0, \overline{\beta} \cdot \overline{a} = 0$, $\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta} = 0$, можна покласти

$$\overline{\alpha} = (1,0,0),\ \overline{\beta} = (0,1,0),\ \overline{\gamma} = (0,0,1). \tag{5.50}$$

У силу (5.30) – (5.32), (5.50) з (5.46) знайдемо

$$A_{33}\ddot{\varphi}(t) + a_0'\left(s_2 \sin\varphi(t) - s_1 \cos\varphi(t)\right) = 0. \tag{5.51}$$

Рівняння (5.51) інтегрується досить просто, тобто з нього маємо

$$\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{C^* + a_0'(s_1 \sin\varphi + s_2 \cos\varphi)}} = \sqrt{\frac{2}{A_{33}}}(t - t_0). \tag{5.52}$$

Тоді функції $\lambda_1(t)$ і $\lambda_2(t)$ визначаються з рівнянь, що виходять з (5.27), (5.28), в силу (5.44) (5.45)

$$\dot{\lambda}_1(t) = \dot{\varphi}(t)\lambda_2(t) - A_{13}\ddot{\varphi} + A_{23}\dot{\varphi}^2 - a_0' s_3 \cos\varphi + a_0 s_2, \tag{5.53}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\dot{\varphi}(t)\lambda_1(t) - A_{23}\ddot{\varphi} - A_{13}\dot{\varphi}^2 + a_0' s_3 \sin\varphi - a_0 s_1. \tag{5.54}$$

Розглянемо аналог маятникових рухів, який є узагальненням маятникових рухів у разі, коли гіростатичний момент дорівнює нулю. Відомо, що важке тверде тіло здійснює маятниковий рух відносно головної в тілі і горизонтальній осі в просторі, яка ортогональна площині, що містить центр тяжіння. Тому покладемо в (5.53), (5.54) $A_{13} = A_{23} = 0$, $a_0 = 0$, $s_3 = 0$. Тоді з (5.53), (5.54) маємо

$$\dot{\lambda}_1(t) = \dot{\varphi}(t)\lambda_2(t),\ \dot{\lambda}_2(t) = -\dot{\varphi}(t)\lambda_1(t). \tag{5.55}$$

З рівнянь (5.55) виходить перший інтеграл $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = c^2$ (c – довільна стала). Покладемо $\lambda_1 = c\sin u$, $\lambda_2 = c\cos u$, де u – нова змінна. Якщо підставити ці функції в рівняння (5.55), то можна встановити залежності

$$\lambda_1 = c\sin(\varphi + \varphi_0),\ \lambda_2 = c\cos(\varphi + \varphi_0). \tag{5.56}$$

Таким чином, перший приклад описується формулами (5.52), (5.56) : $\varphi(t)$ – еліптична функція часу; λ_1 і λ_2 – періодичні функції змінної φ.

Приклад 2. В даному прикладі вважатимемо, що на гіростат діють потенціальні і гіроскопічні сили. Тобто розглядатимемо аналоги рівнянь (5.47) (5.48). Окрім цього будемо, як і в прикладі 1, вважати, що $\varphi(t)$ – еліптична функція часу, для якої $\dot{\varphi} \neq 0$. Інші умови прикладу 1 приймати не будемо.

Покладемо в рівняннях (5.39), (5.40) і позначеннях (5.41) – (5.43)

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\rho_0 + \rho_1 \cos\varphi}, \tag{5.57}$$

де ρ_0, ρ_1 – параметри, що задовольняють умові $\rho_0 > \rho_1 > 0$.

При їх виконанні з рівняння (5.57) отримаємо:

$$\varphi = 2am\chi_0 t,\ \sin\varphi = 2sn\chi_0 t cn\chi_0 t,\ \cos\varphi = 1 - 2cn^2\chi_0 t,\ \dot{\varphi} = 2\chi_0 dn\chi_0 t, \tag{5.58}$$

де $am\chi_0 t$, $sn\chi_0 t$, $cn\chi_0 t$, $dn\chi_0 t$ – еліптичні функції часу. Значення χ_0 і модуль еліптичних функцій k_* такі

$$\chi_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0 + \rho_1},\ k_*^2 = \frac{2\rho_1}{\rho_0 + \rho_1}.$$

Нехай $\gamma_3 \neq 0$, введемо замість $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ нову змінну $\rho(t)$

$$\lambda_1(t) = \rho(t)\sin\gamma_3\varphi(t),\ \lambda_2(t) = \rho(t)\cos\gamma_3\varphi(t). \tag{5.59}$$

Тоді на основі (5.59) з (5.39) – (5.43) маємо

$$\dot{\rho}(t)\sin\gamma_3\varphi(t) = (\mu_2\sin\varphi(t) + \mu_3\cos\varphi(t) + \mu_4)\sqrt{\rho_0 + \rho_1\cos\varphi(t)} + \\ + \mu_5\sin 2\varphi(t) + \mu_6\cos 2\varphi(t) + \mu_7^*\sin\varphi(t) + \mu_8^*\cos\varphi(t) + \mu_9^*, \tag{5.60}$$

$$\dot{\rho}(t)\cos\gamma_3\varphi(t) = (\varepsilon_2\sin\varphi(t) + \varepsilon_3\cos\varphi(t) + \varepsilon_4)\sqrt{\rho_0 + \rho_1\cos\varphi(t)} + \\ + \varepsilon_5\sin 2\varphi(t) + \varepsilon_6\cos 2\varphi(t) + \varepsilon_7^*\sin\varphi(t) + \varepsilon_8^*\cos\varphi(t) + \varepsilon_9^*, \tag{5.61}$$

$$\dot{\varphi}\big(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)\big) = \big(\sigma_2\sin\varphi(t) + \sigma_3\cos\varphi(t) + \sigma_4)\big)\sqrt{\rho_0 + \rho_1\cos\varphi(t)} + \\ + \sigma_5\sin 2\varphi(t) + \sigma_6\cos 2\varphi(t) + \sigma_7^*\sin\varphi(t) + \sigma_8^*\cos\varphi(t) + \sigma_9^*. \tag{5.62}$$

Тут

$$\mu_7^* = \mu_7 + \frac{\mu_0\rho_1}{2}, \mu_8^* = \mu_8 + \mu_1\rho_1, \mu_9^* = \mu_9 + \mu_1\rho_0, \\ \varepsilon_7^* = \varepsilon_7 + \frac{\varepsilon_0\rho_1}{2}, \varepsilon_8^* = \varepsilon_8 + \varepsilon_1\rho_1, \varepsilon_9^* = \varepsilon_9 + \varepsilon_1\rho_0, \\ \sigma_7^* = \sigma_7 + \frac{\sigma_0\rho_1}{2}, \sigma_8^* = \sigma_8 + \sigma_1\rho_1, \sigma_9^* = \sigma_9 + \sigma_1\rho_0. \tag{5.63}$$

У рівняннях (5.60) – (5.62) функції $\varphi(t)$, $\sin\varphi(t)$, $\cos\varphi(t)$ мають значення (5.58).

Виключимо в рівняннях (5.60), (5.61) $\dot{\rho}(t)$. Тоді отримаємо рівняння, з якого витікає

$$(\mu_2 - \varepsilon_3)\sin(1+\gamma_3)\varphi + (\mu_3 + \varepsilon_2)\cos(1+\gamma_3)\varphi + (\mu_2 + \varepsilon_3)\sin(1-\gamma_3)\varphi + \\ + (\mu_3 - \varepsilon_2)\cos(1-\gamma_3)\varphi + 2\mu_4\cos\gamma_3\varphi - 2\varepsilon_4\sin\gamma_3\varphi = 0, \tag{5.64}$$

$$(\mu_5 - \varepsilon_6)\sin(2+\gamma_3)\varphi + (\mu_6 + \varepsilon_5)\cos(2+\gamma_3)\varphi + (\mu_5 + \varepsilon_6)\sin(2-\gamma_3)\varphi + \\ + (\mu_6 - \varepsilon_5)\cos(2-\gamma_3)\varphi + (\mu_7^* - \varepsilon_8^*)\sin(1+\gamma_3)\varphi + (\mu_8^* + \varepsilon_7^*)\cos(1+\gamma_3)\varphi + \\ + (\mu_7^* + \varepsilon_8^*)\sin(1-\gamma_3)\varphi + (\mu_8^* - \varepsilon_7^*)\cos(1-\gamma_3)\varphi + 2\mu_9^*\cos\gamma_3\varphi - 2\varepsilon_9^*\sin\gamma_3\varphi = 0. \tag{5.65}$$

Розглянемо випадок, коли в рівняннях (5.64) (5.65) $\gamma_3 = 1$. В силу рівностей $\bar{\gamma} = \bar{\alpha}\times\bar{\beta}, (\bar{\alpha}\times\bar{\beta})\cdot\bar{a} = 1$, можна прийняти для векторів $\bar{\alpha}$ і $\bar{\beta}$ рівності $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$; $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 0$. Тоді значення (5.30) – (5.38) спрощуються

$\gamma_3 = 1$, $\mu_0 = A_{13}$, $\varepsilon_0 = A_{23}$, $\sigma_0 = A_{33}$, $\mu_1 = A_{23}$, $\varepsilon_1 = -A_{13}$, $\sigma_1 = 0$,

$\mu_2 = -a_0' B_{12}$, $\varepsilon_2 = a_0' B_{11}$, $\sigma_2 = 0$, $\mu_3 = -a_0' B_{22}$, $\varepsilon_3 = a_0' B_{12}$, $\sigma_3 = 0$,

$\mu_4 = -a_0 B_{23}$, $\varepsilon_4 = a_0 B_{13}$, $\sigma_4 = 0$,

$$\mu_5 = \frac{1}{2}a_0^2 C_{13}, \mu_6 = \frac{1}{2}a_0^2 C_{23}, \mu_7 = -a_0 a_0' C_{12}, \mu_8 = -a_0'\left[s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})\right],$$
$$\mu_9 = \frac{1}{2}\left[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}\right], \tag{5.66}$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{1}{2}a_0^2 C_{23}, \varepsilon_6 = \frac{1}{2}a_0^2 C_{13}, \varepsilon_7 = a_0'\left[s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})\right], \varepsilon_8 = a_0 C_{12},$$
$$\varepsilon_9 = -\frac{1}{2}\left[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}\right],$$

$$\sigma_5 = \frac{1}{2}\alpha_0'^2(C_{22} - C_{11}), \sigma_6 = -a_0^2 C_{12}, \sigma_7 = a_0'(s_2 - a_0 C_{23}), \sigma_8 = a_0'(s_1 - a_0 C_{13}), \sigma_9 = 0.$$

Оскільки $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$, то з рівняння (5.64) в силу (5.66) витікають рівнлості:

$$C_{12} = 0,\ C_{22} = C_{11},\ \rho_1 = \frac{2a_0'}{A_{33}}(s_2 - a_0 C_{23}),\ s_1 = a_0 C_{13}. \tag{5.67}$$

$$B_{12} = 0,\ B_{11} = 0,\ B_{22} = 0,\ a_0 B_{13} = 0,\ a_0 B_{23} = 0, \tag{5.68}$$

$$A_{23} = 0,\ A_{13} = 0, \tag{5.69}$$

$$s_1 = 0,\ a_0 s_2 + (a_0'^2 - a_0^2)C_{23} = 0,\ s_3 - a_0(C_{33} - C_{11}) = 0,\ C_{13} = 0. \tag{5.70}$$

На підставі рівності (5.67) – (5.70) з урахуванням функції $\sin\varphi(t)$ з (5.58) функцію $\rho(t)$ знайдемо з (5.60)

$$\rho(t) = \frac{2a_0'^2 C_{23}}{\chi_0 k_*^2} dn\chi_0 t + C_0, \tag{5.71}$$

де C_0 довільна стала. Функції $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ визначимо з (5.59)

$$\lambda_1(t) = 2\rho(t) sn\chi_0 t cn\chi_0 t,\ \lambda_2(t) = \rho(t)(1 - 2cn^2\chi_0 t). \tag{5.72}$$

З формул (5.72) в силу (5.71) витікає, що функції $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ є періодичними функціями часу з періодом $\frac{2K}{\chi_0}$, де K – повний еліптичний інтеграл

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 u}}.$$

Проведемо аналіз умов (5.67) – (5.70). З умов (5.69) виходить, що вісь обертання гіростата є головною віссю в тілі–носії. Для задачі про рух важкого гіростата зі змінним гіростатичним моментом: $B_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1,3})$, $C_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1,3})$.

Вважаючи, $s_1^{\ 2}+s_2^{\ 2}+s_3^{\ 2}\neq 0$, з (5.69), (5.62), (5.70), отримаємо $a_0=0$, $\rho_1=\dfrac{2s_2}{A_{33}}$, $s_1=0$, $s_3=0$. Ці умови показують, що маятниковий рух відбувається навколо горизонтальної осі в нерухомому просторі, а центр мас гіростата належить головній площині еліпсоїда інерції. При цьому русі швидкість власного обертання (5.57) характеризується умовою $\rho_0>s_2>0$. Тобто на параметр ρ_0 накладається обмеження у вигляді нерівності. В цьому випадку приходимо до результатів першого прикладу. Припустимо, що не усі елементи матриці B дорівнювали нулю. Тоді з системи (5.68) отримаємо $a_0=0$. Тобто обертання гіростата знову відбувається навколо горизонтальної осі в просторі. Якщо $a_0\neq 0$, тоді з (5.68) витікає рівність $B_{13}=B_{23}=0$.

З урахуванням перших трьох рівностей з (5.68) рівності $B_{13}=B_{23}=0$ показують, що в матриці В тільки елемент B_{33} відмінний від нуля.

З'ясуємо роль елементів матриці C в умовах (5.67), (5.70). Якщо припускати $a_0=0$, тоді матриця C матиме вигляд

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0\\ 0 & C_{11} & 0\\ 0 & 0 & C_{33}\end{pmatrix}, \qquad (5.73)$$

вектор узагальненого центру мас $\bar{s}$ у силу (5.70) належатиме головній площині еліпсоїда інерції, а параметр ρ_1 набуде значення $\dfrac{2s_2}{A_{33}}$. Якщо $a_0\neq 0$, то матриця C матиме загальніший вигляд, ніж у випадку (5.73), оскільки міститиме елемент C_{23}. При цьому на відміну від випадку $a_0=0$, для якого $\rho(t)=C_0$, у досліджуваному варіанті функція $\rho(t)$ з (5.71) залежить від часу, а в якості параметрів в неї входять величини a_0', C_{23}, χ_0, k_*, C_0.

Приклад 3. В узагальнених задачах [55] має місце випадок, коли швидкість власного обертання гіростата є лінійною функцією виду :

$$\dot{\varphi}=\rho_0+\rho_1\sin\varphi . \qquad (5.74)$$

Перейдемо в рівняннях (5.27) – (5.29) до диференціювання по φ і врахуємо в них (5.74)

$$\begin{gathered}\lambda_1'(\varphi)(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)=\gamma_3\lambda_2(t)(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)-\mu_0\rho_1\cos\varphi(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)+\\ \mu_1(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)^2+(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)(\mu_2\sin\varphi+\mu_3\cos\varphi+\mu_4)+\\ +\mu_5\sin2\varphi+\mu_6\cos2\varphi+\mu_7\sin\varphi+\mu_8\cos\varphi+\mu_9,\end{gathered}\tag{5.75}$$

$$\begin{gathered}\lambda_2'(\varphi)(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)=-\gamma_3\lambda_1(t)(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)-\varepsilon_0\rho_1\cos\varphi(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)+\\ \varepsilon_1(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)^2+(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)(\varepsilon_2\sin\varphi+\varepsilon_3\cos\varphi+\varepsilon_4)+\\ +\varepsilon_5\sin2\varphi+\varepsilon_6\cos2\varphi+\varepsilon_7\sin\varphi+\varepsilon_8\cos\varphi+\varepsilon_9,\end{gathered}\tag{5.76}$$

$$\begin{gathered}(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)\big(\beta_3\lambda_1(\varphi)-\alpha_3\lambda_2(\varphi)\big)-\sigma_0\rho_1\cos\varphi(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)+\\ +\sigma_1(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)^2+(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)(\sigma_2\sin\varphi+\sigma_3\cos\varphi+\sigma_4)+\\ +\sigma_5\sin2\varphi+\sigma_6\cos2\varphi+\sigma_7\sin\varphi+\sigma_8\cos\varphi+\sigma_9=0.\end{gathered}\tag{5.77}$$

Розглянемо випадок, коли похідні $\lambda_1'(\varphi),\lambda_2'(\varphi)$ не містять в знаменнику вираз $\rho_0+\rho_1\sin\varphi$. Тоді рівняння (5.75) – (5.77) повинні виконуватися для усіх значень φ, зокрема, коли φ задовольняє рівнянню $\rho_0+\rho_1\sin\varphi=0$. Це означає, що рівняння (5.75), (5.76) можна привести до вигляду

$$\lambda_1'(\varphi)=\gamma_3\lambda_2(\varphi)+\Phi_1(\varphi),\ \lambda_2'(\varphi)=-\gamma_3\lambda_1(\varphi)+\Phi_2(\varphi),\tag{5.78}$$

де

$$\Phi_1(\varphi)=g_0+g_1\sin\varphi+g_1'\cos\varphi,\Phi_2(\varphi)=h_0+h_1\sin\varphi+h_1'\cos\varphi,\tag{5.79}$$

$$g_0=q_0+\mu_1\rho_0+\mu_4,\ g_1=\mu_1\rho_1+\mu_2+q_1,\ g_1'=-\mu_0\rho_1+\mu_3+q_1',\tag{5.80}$$

$$h_0=r_0+\varepsilon_1\rho_0+\varepsilon_4,\ h_1=\varepsilon_1\rho_1+\varepsilon_2+r_1,\ h_1'=-\varepsilon_0\rho_1+\varepsilon_3+r_1'.\tag{5.81}$$

Постійні $\rho_0,q_0,q_1,q_1',r_0,r_1,r_1'$ задовольняють рівнянням

$$\begin{gathered}\rho_0=\frac{\mu_8\rho_1}{2\mu_5},q_0=\frac{1}{\rho_1}\left(\mu_7+\frac{\mu_6\mu_8}{\mu_5}\right),q_1=-\frac{2\mu_6}{\rho_1},q_1'=\frac{2\mu_5}{\rho_1},\\ r_0=\frac{1}{\rho_1}\left(\varepsilon_7+\frac{\varepsilon_6\varepsilon_8}{\varepsilon_5}\right),r_1=-\frac{2\varepsilon_1}{\rho_1},r_1'=\frac{2\varepsilon_5}{\rho_1}.\end{gathered}\tag{5.82}$$

Розкладання (5.78) і формули (5.79) – (5.82) справедливі, якщо виконано умови на параметри

$$2\mu_5^2(\mu_6+\mu_9)=\mu_8(\mu_5\mu_7+\mu_6\mu_8),\ 2\varepsilon_5^2(\varepsilon_6+\varepsilon_9)=\varepsilon_8(\varepsilon_5\varepsilon_7+\varepsilon_6\varepsilon_8),\ \varepsilon_8\mu_5=\varepsilon_5\mu_8.\tag{5.83}$$

Запишемо співвідношення (5.29)

$$(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)\big(\beta_3\lambda_1(\varphi)-\alpha_3\lambda_2(\varphi)\big)-\sigma_0\rho_1\cos\varphi(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)+$$
$$+\sigma_1(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)^2+(\rho_0+\rho_1\sin\varphi)(\sigma_2\sin\varphi+\sigma_3\cos\varphi+\sigma_4)+ \quad (5.84)$$
$$+\sigma_5\sin 2\varphi+\sigma_6\cos 2\varphi+\sigma_7\sin\varphi+\sigma_8\cos\varphi+\sigma_9=0.$$

Шукатимемо розв'язок $\lambda_1(\varphi),\lambda_2(\varphi)$ рівняння (5.84) в класі тригонометричних многочленів по $\sin\varphi,\cos\varphi$. Тоді з (5.84) слідує

$$\beta_3\lambda_1(\varphi)-\alpha_3\lambda_2(\varphi)+\Phi_3(\varphi)=0, \quad (5.85)$$

$$\Phi_3(\varphi)=f_0+f_1\sin\varphi+f_1'\cos\varphi, \quad (5.86)$$

$$f_0=\sigma_1\rho_0+\sigma_4+u_0,\; f_1=\sigma_1\rho_1+\sigma_2+u_1,\; f_1'=-\sigma_0\rho_1+\sigma_3+u_1',$$
$$u_0=\frac{1}{\rho_1}\left(\sigma_7+\frac{\sigma_6\sigma_8}{\sigma_5}\right),\; u_1=-\frac{2\sigma_6}{\rho_1},\; u_1'=-\frac{2\sigma_5}{\rho_1}. \quad (5.87)$$

До рівняння (5.85) і співвідношень (5.87) слід додати дві умови на параметри

$$2\cdot\sigma_5^2(\sigma_6+\sigma_9)=\sigma_8(\sigma_5\sigma_7+\sigma_6\sigma_8),\; \mu_5\sigma_8=\mu_2\sigma_5., \quad (5.88)$$

Випишемо розв'язок рівнянь (5.78), припускаючи $\gamma_3\neq 1$

$$\lambda_1(u)=C_1\cos\gamma_3\varphi+C_2\sin\gamma_3\varphi+\frac{b_0}{\gamma_3^2}+\frac{b_1}{\gamma_3^2-1}\sin\varphi+\frac{b_1'}{\gamma_3^2-1}\cos\varphi,$$
$$\lambda_2(u)=C_2\cos\gamma_3\varphi-C_1\sin\gamma_3\varphi+\frac{c_0}{\gamma_3^2}+\frac{c_1}{\gamma_3^2-1}\sin\varphi+\frac{c_1'}{\gamma_3^2-1}\cos\varphi, \quad (5.89)$$

де C_1,C_2 – довільні постійні і $b_0=h_0\cdot\gamma_3$, $b_1=\gamma_3\cdot h_1-g_1'$, $b_1'=\gamma_3\cdot h_1'-g_1$, $c_0=-g_0\cdot\gamma_3$, $c_1=-h_1'-\gamma_3\cdot g_1$, $c_1'=h_1-\gamma_3\cdot g_1'$.

Підставимо вирази (5.89) в рівняння (5.85) і врахуємо (5.86)

$$\beta_3\left(C_1\cos\gamma_3\varphi+C_2\sin\gamma_3\varphi+\frac{b_0}{\gamma_3^2}+\frac{b_1}{\gamma_3^2-1}\sin\varphi+\frac{b_1'}{\gamma_3^2-1}\cos\varphi\right)-$$
$$-\alpha_3\left(C_2\cos\gamma_3\varphi-C_1\sin\gamma_3\varphi+\frac{c_0}{\gamma_3^2}+\frac{c_1}{\gamma_3^2-1}\sin\varphi+\frac{c_1'}{\gamma_3^2-1}\cos\varphi\right)+ \quad (5.90)$$
$$+f_0+f_1\cdot\sin\varphi+f_1'\cos\varphi=0.$$

Рівняння (5.90) має бути тотожністю за φ. Оскільки за припущенням $\gamma_3\neq 1$, тоді з (5.90) отримаємо ряд умов на параметри. Випишемо ряд з них

$$\beta_3\cdot C_1-\alpha_3\cdot C_2=0,\; \beta_3\cdot C_2+\alpha_3\cdot C_1=0. \quad (5.91)$$

Якщо $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$, тоді з (5.10) слідує $\gamma_3 = 1$. Тому в (5.90) необхідно покласти $C_1 = C_2 = 0$. Тоді рівність (5.90) буде тотожністю по φ при виконанні умов

$$\beta_3 \cdot b_0 - \alpha_3 \cdot c_0 + f_0 = 0,\ \beta_3 \cdot b_1 - \alpha_3 \cdot c_1 + f_1 = 0,\ \beta_3 \cdot b_1' - \alpha_3 \cdot c_1' + f_1' = 0. \tag{5.92}$$

Таким чином, умовами існування маятникових рухів (5.26), (5.74) є рівності (5.83), (5.88), (5.92). Запишемо розв'язок для цих рухів

$$\begin{gathered}\bar{\nu} = (a_0' \sin\varphi, a_0' \cos\varphi, a_0), \dot{\varphi} = \rho_0 + \rho_1 \sin\varphi,\\ \bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{a}, \lambda_1(\varphi) = \frac{b_0}{\gamma_3^2} + \frac{b_1}{\gamma_3^2 - 1}\sin\varphi + \frac{b_1'}{\gamma_3^2 - 1}\cos\varphi,\\ \lambda_2(\varphi) = \frac{c_0}{\gamma_3^2} + \frac{c_1}{\gamma_3^2 - 1}\sin\varphi + \frac{c_1'}{\gamma_3^2 - 1}\cos\varphi.\end{gathered} \tag{5.93}$$

Окремий випадок. Покажемо існування у рівнянь (5.27) – (5.29) розв'язку виду (5.74). Покладемо в (5.29) $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$. Це означає, що вектори $\bar{\alpha}$ і $\bar{\beta}$ лежать в площині, ортогональній вектору $\bar{a}$. Отже, можна вважати, що $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$ (вектор $\bar{\gamma}$ співнаправлений з вектором $\bar{a}$). При цих значеннях з (5.30) – (5.35), (5.38) слідує

$$\begin{gathered}\sigma_0 = A_{33}, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0, \sigma_4 = 0, \sigma_5 = \frac{1}{2}a_0'^2(C_{22} - C_{11}),\\ \sigma_6 = -a_0'^2 C_{12}, \sigma_7 = a_0'\ (s_2 - a_0 C_{23}), \sigma_8 = a_0'(s_1 - a_0 C_{13}), \sigma_9 = 0.\end{gathered} \tag{5.94}$$

Підставимо вираз (5.74) в рівняння (5.29) і врахуємо в отриманому рівнянні рівності $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$ і (5.94)

$$\begin{gathered}-A_{33}\rho_1(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi)\cos\varphi + \frac{1}{2}a_0'^2(C_{22} - C_{11})\sin 2\varphi - a_0'^2 C_{12}\cos 2\varphi +\\ + a_0'(s_2 - a_0 C_{23})\sin\varphi + a_0'(s_1 - a_0 C_{13})\cos\varphi = 0.\end{gathered}$$

Це рівняння буде тотожністю за φ при виконанні рівностей

$$C_{12} = 0, \rho_1 = \sqrt{\frac{a_0'^2(C_{22} - C_{11})}{A_{33}}},\ s_2 = a_0 C_{23}, \rho_0 = \frac{a_0'(s_1 - a_0 C_{13})}{A_{33}\rho_1}. \tag{5.95}$$

Рівняння (5.27), (5.28) набудуть вигляду:

$$\dot{\lambda}_1(t) = (\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi)\lambda_2(t) - A_{13}\rho_1 \cos\varphi(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi) -$$
$$(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi)(a_0' B_{12} \sin\varphi + a_0' B_{22} \cos\varphi + a_0 B_{23}) + A_{23}(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi)^2 + \tag{5.96}$$
$$+\frac{1}{2} a_0'^2 C_{13} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} a_0'^2 C_{23} \cos 2\varphi - a_0' [s_3 - a_0 (C_{33} - C_{22})]\cos\varphi + \frac{a_0'^2}{2} C_{23},$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi)\lambda_1(t) + A_{23}\rho_1 \cos\varphi(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi) - A_{13}(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi)^2 +$$
$$+(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi)(a_0' B_{11} \sin\varphi + a_0' B_{12} \cos\varphi + a_0' B_{13}) - \frac{1}{2} a_0'^2 C_{23} \sin 2\varphi + \tag{5.97}$$
$$+\frac{1}{2} a_0'^2 C_{13} \cos 2\varphi + a_0' [s_3 - a_0 (C_{33} - C_{11})]\sin\varphi - \frac{1}{2}\left[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2) C_{13}\right].$$

Рівняння (5.96), (5.97) можна розглядати в двох підходах. Перший підхід полягає в тому, що рівняння (5.96), (5.97) інтегруються за наявності умов (5.95), а функція $\varphi(t)$ задовольняє рівнянню (5.74). Другий підхід використовує метод п. 5.2. (приклад 3). Наслідуючи цей метод і враховуючи рівність (5.95), знайдемо наступні умови на параметри

$$\rho_1 = \rho_0, s_2 = 0, C_{23} = 0, a_0 = 0, s_1 = C_{22} - C_{11}, s_3 = -C_{13}, \rho_0^2 = \frac{C_{22} - C_{11}}{A_{33}}, \tag{5.98}$$

при виконанні яких рівняння (5.97) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \lambda_1'(\varphi) &= \lambda_2(\varphi) + (A_{23}\rho_0 + B_{12})\sin\varphi + \left(\frac{C_{13}}{\rho_0} - A_{13}\rho_0 - B_{22}\right)\cos\varphi + A_{23}\rho_0, \\ \lambda_2'(\varphi) &= -\lambda_1(\varphi) + \left(-\frac{C_{13}}{\rho_0} - A_{13}\rho_0 + B_{11}\right)\sin\varphi + (B_{12} + A_{23}\rho_0)\cos\varphi - A_{13}\rho_0. \end{aligned} \tag{5.99}$$

У силу (5.98) з (5.74) маємо

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{C_{22} - C_{11}}{A_{33}}}(1 + \sin\varphi). \tag{5.100}$$

Рівняння (5.99) легко інтегруються. Виконаємо аналіз умов (5.98). У силу $a_0 = 0$, вісь рівномірного обертання горизонтальна. На підставі рівності для s_3 робимо висновок, що центр мас гіростата не знаходиться в площині, ортогональній осі обертання. Ця властивість відрізняється від властивості маятникового руху у разі нульового гіростатичного моменту.

Залежність $\varphi(t)$ визначимо з (5.100)

$$\varphi = -2arctg\left(1+\frac{2}{\chi_0 t}\right), \chi_0 = \sqrt{\frac{C_{22}-C_{11}}{A_{33}}}. \tag{5.101}$$

Знаходження $\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi)$ і (5.99) пов'язано з інтегруванням рівняння другого порядку. Наприклад, для функції $\lambda_1(\varphi)$ маємо рівняння

$$\lambda_1''(\varphi) + \lambda_1(\varphi) = n_0 + n_1 \sin\varphi + n_1' \cos\varphi, \tag{5.102}$$

де $n_0 = -A_{13}\rho_0, n_1 = B_{22} + B_{11} - \dfrac{2C_{13}}{\rho_0}, n_1' = 2A_{23}\rho_0 + 2B_{12}$.

Розв’язок рівняння (5.102) такий

$$\lambda_1(\varphi) = C_1 \sin\varphi + C_2 \cos\varphi + n_0 + \varphi\left(\frac{n_1'}{2}\sin\varphi - \frac{n_1}{2}\cos\varphi\right). \tag{5.103}$$

Вид функції $\lambda_2(\varphi)$ аналогічний (5.103), тільки замість постійних n_0, n_1, n_1' будуть інші постійні.

Таким чином, маятниковий рух характеризується формулами (5.101) і виразами для $\lambda_1(\varphi)$, $\lambda_2(\varphi)$.

Оскільки з (5.101) витікає, що при $t \to \infty$ змінна φ прагне до кінцевої границі, то, наприклад, функція (5.103) не може набувати необмежених значень.

5.3. Напіврегулярні прецесії

5.3.1. Загальний лінійний випадок. Розглянемо найчастіше досліджуваний випадок [55] – лінійну залежність швидкості власного обертання і функцій $\lambda_1(\varphi)$, $\lambda_2(\varphi)$ від функцій $\sin\varphi, \cos\varphi$.

$$\begin{aligned}
&\dot\varphi = \rho_0 + \rho_1 \sin\varphi + \rho_2 \cos\varphi,\\
&\ddot\varphi = (\rho_1 \cos\varphi - \rho_2 \sin\varphi)(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi + \rho_2 \cos\varphi)'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(\varphi) = g_0 + g_1 \sin\varphi + g_2 \cos\varphi,\\
&\dot\lambda_1(\varphi) = (g_1 \cos\varphi - g_2 \sin\varphi)(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi + \rho_2 \cos\varphi),\\
&\lambda_2(\varphi) = h_0 + h_1 \sin\varphi + h_2 \cos\varphi,\\
&\dot\lambda_2(\varphi) = (h_1 \cos\varphi - h_2 \sin\varphi)(\rho_0 + \rho_1 \sin\varphi + \rho_2 \cos\varphi).
\end{aligned} \tag{5.104}$$

Підставимо вирази (5.104) в рівняння (5.11) – (5.13)

$$
\begin{gathered}
(g_1\cos\varphi - g_2\sin\varphi)(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)-(h_0+h_1\sin\varphi+h_2\cos\varphi)[\gamma_3(\rho_0+a_0m)+\\
+(a_0'm\gamma_1+\gamma_3\rho_1)\sin\varphi+(a_0'm\gamma_2+\gamma_3\rho_2)\cos\varphi]+\\
+\mu_0(\rho_1\cos\varphi-\rho_2\sin\varphi)(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)-\mu_1(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)^2-\\
-(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)(\mu_2\sin\varphi+\mu_3\cos\varphi+\mu_4)-\\
-(\mu_5\sin2\varphi+\mu_6\cos2\varphi+\mu_7\sin\varphi+\mu_8\cos\varphi+\mu_9)=0,\\
(h_1\cos\varphi-h_2\sin\varphi)(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)+\\
+(g_0+g_1\sin\varphi+g_2\cos\varphi)[\gamma_3(\rho_0+a_0m)+\\
+(a_0'm\gamma_1+\gamma_3\rho_1)\sin\varphi+(a_0'm\gamma_2+\gamma_3\rho_2)\cos\varphi]+\\
+\varepsilon_0(\rho_1\cos\varphi-\rho_2\sin\varphi)(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)-\varepsilon_1(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)^2-\\
-(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)(\varepsilon_2\sin\varphi+\varepsilon_3\cos\varphi+\varepsilon_4)-\\
-(\varepsilon_5\sin2\varphi+\varepsilon_6\cos2\varphi+\varepsilon_7\sin\varphi+\varepsilon_8\cos\varphi+\varepsilon_9)=0,\\
(g_0+g_1\sin\varphi+g_2\cos\varphi)[\beta_3(a_0m+\rho_0)+(a_0'm\beta_1+\beta_3\rho_1)\sin\varphi+\\
+(a_0'm\beta_2+\beta_3\rho_2)\cos\varphi]-(h_0+h_1\sin\varphi+h_2\cos\varphi)+\\
+[\alpha_3(a_0m+\rho_0)+(a_0'm\alpha_1+\alpha_3\rho_1)\sin\varphi+(a_0'm\alpha_2+\alpha_3\rho_2)\cos\varphi]-\\
-(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)(\sigma_2\sin\varphi+\sigma_3\cos\varphi+\sigma_4)+\\
+\sigma_0(\rho_1\cos\varphi+\rho_2\sin\varphi)(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)+\sigma_1(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)^2+\\
+(\sigma_5\sin2\varphi+\sigma_6\cos2\varphi+\sigma_7\sin\varphi+\sigma_8\cos\varphi+\sigma_9)=0.
\end{gathered}
\tag{5.105}
$$

Рівняння (5.105) мають бути тотожністю за φ.

Застосуємо метод п. 5.2. Тоді

$$
\begin{gathered}
(h_0+h_1\sin\varphi+h_2\cos\varphi)(\gamma_3a_0m+a_0'm\gamma_1\sin\varphi+a_0'm\gamma_2\cos\varphi)+\\
+\mu_5\sin2\varphi+\mu_6\cos2\varphi+\mu_7\sin\varphi+\mu_8\cos\varphi+\mu_9=\\
=(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)(H_0+H_1\sin\varphi+H_2\cos\varphi),\\
(g_0+g_1\sin\varphi+g_2\cos\varphi)(a_0m\beta_3+a_0'm\beta_1\sin\varphi+a_0'm\beta_2\cos\varphi)-\\
(h_0+h_1\sin\varphi+h_2\cos\varphi)(a_0m\alpha_3+a_0'm\alpha_1\sin\varphi+a_0'm\alpha_2\cos\varphi)+\\
+\sigma_5\sin2\varphi+\sigma_6\cos2\varphi+\sigma_7\sin\varphi+\sigma_8\cos\varphi+\sigma_9)=\\
=(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)(L_0+L_1\sin\varphi+L_2\cos\varphi),\\
(g_0+g_1\sin\varphi+g_2\cos\varphi)(\gamma_3a_0m+a_0'm\gamma_1\sin\varphi+a_0'm\gamma_2\cos\varphi)-\\
-\varepsilon_5\sin2\varphi+\varepsilon_6\cos2\varphi+\varepsilon_7\sin\varphi+\varepsilon_8\cos\varphi+\varepsilon_9)=\\
=(\rho_0+\rho_1\sin\varphi+\rho_2\cos\varphi)(G_0+G_1\sin\varphi+G_2\cos\varphi).
\end{gathered}
\tag{5.106}
$$

Умови існування прецесій знаходитимемо в два етапи. На першому етапі вимагатимемо, щоб рівності (5.106) була тотожністю по φ, а на другому етапі розглянемо рівності (5.105). Тоді отримаємо наступні умови

$$\begin{aligned} H_0 &= -\gamma_3 h_0 - \mu_1\rho_0 - \mu_4, \\ H_1 &= -g_2 - \gamma_3 h_1 - \rho_2\mu_0 - \rho_1\mu_1 - \mu_2, \\ H_2 &= g_1 - h_2\gamma_3 - \mu_0\rho_1 - \mu_1\rho_2 - \mu_3, \end{aligned} \tag{5.107}$$

$$\begin{aligned} L_0 &= -g_0\beta_3 + \alpha_3 h_0 - \sigma_1\rho_0 - \sigma_4, \\ L_1 &= -g_1\beta_3 + \alpha_3 h_1 - \sigma_0\rho_2 - \sigma_1\rho_1 - \sigma_2, \\ L_2 &= -\beta_3 g_2 + \alpha_3 h_2 - \sigma_0\rho_1 - \sigma_1\rho_2 - \sigma_3, \end{aligned} \tag{5.108}$$

$$\begin{aligned} G_0 &= -\gamma_3 g_0 + \varepsilon_1\rho_0 + \varepsilon_4, \\ G_1 &= h_2 - \gamma_3 g_1 + \varepsilon_0\rho_2 + \varepsilon_1\rho_1 + \varepsilon_2, \\ G_2 &= -h_1 - \gamma_3 g_2 - \rho_1\varepsilon_0 + \varepsilon_1\rho_2 + \varepsilon_3, \end{aligned} \tag{5.109}$$

$$h_0 a_0 m\gamma_3 + \mu_9 + \frac{1}{2}a_0' m(h_1\gamma_1 + h_2\gamma_2) - \rho_0 H_0 - \frac{1}{2}(\rho_1 H_1 + \rho_2 H_2) = 0, \tag{5.110}$$

$$m(a_0' h_0\gamma_1 + a_0 h_0\gamma_3) + \mu_7 - \rho_0 H_1 - \rho_2 H_0 = 0, \tag{5.111}$$

$$m(a_0' h_0\gamma_2 + a_0\gamma_3 h_2) + \mu_8 - \rho_0 H_2 - \rho_2 H_0 = 0, \tag{5.112}$$

$$ma_0'(h_2\gamma_2 - h_1\gamma_1) + \mu_6 - \rho_2 H_2 + \rho_1 H_1 = 0, \tag{5.113}$$

$$ma_0'(h_1\gamma_2 + h_2\gamma_1) + \mu_5 - \rho_1 H_2 - \rho_2 H_1 = 0, \tag{5.114}$$

$$g_0 a_0 m\gamma_3 - \varepsilon_9 + \frac{1}{2}a_0' m(\gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2) - \rho_0 G_0 - \frac{1}{2}(\rho_1 G_1 + \rho_2 G_2) = 0, \tag{5.115}$$

$$m(a_0' g_0\gamma_1 + a_0 g_1\gamma_3) - \varepsilon_7 - \rho_0 G_1 - \rho_1 G_0 = 0, \tag{5.116}$$

$$m(a_0' g_0\gamma_2 + a_0 g_2\gamma_3) - \varepsilon_8 - \rho_0 G_2 - \rho_2 G_0 = 0, \tag{5.117}$$

$$ma_0'(g_2\gamma_2 - g_1\gamma_1) - \varepsilon_6 - \rho_2 G_2 - \rho_1 G_1 = 0, \tag{5.118}$$

$$ma_0'(g_1\gamma_2 + g_2\gamma_1) - \varepsilon_5 - \rho_1 G_2 - \rho_2 G_1 = 0, \tag{5.119}$$

$$\begin{aligned} & a_0 m(g_0\beta_3 - h_0\alpha_3) + \frac{1}{2}a_0' m(g_1\beta_1 + g_2\beta_2 - h_1\alpha_1 - h_2\alpha_2) - \\ & - \rho_0 L_0 - \frac{1}{2}(\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2) = 0, \end{aligned} \tag{5.120}$$

$$a_0' m(g_0\beta_1 - h_0\alpha_1) + a_0 m(g_1\beta_3 - h_1\alpha_3) + G_7 - \rho_0 L_1 - \rho_1 L_0 = 0, \tag{5.121}$$

$$a_0' m(g_0\beta_2 - h_0\alpha_2) + a_0 m(g_2\beta_3 - h_2\alpha_3) + G_8 - \rho_0 L_2 - \rho_2 L_0 = 0, \tag{5.122}$$

$$a_0' m(g_1\beta_2 + g_2\beta_1 - h_1\alpha_2 - h_2\alpha_1) + G_5 - \rho_1 L_2 - \rho_2 L_1 = 0, \quad (5.123)$$

$$a_0' m(-g_1\beta_1 + g_2\beta_2 + h_1\alpha_1 - h_2\alpha_2) + G_6 - \rho_2 L_2 + \rho_1 L_1 = 0. \quad (5.124)$$

Таким чином, система (5.110) – (5.124), в якій введені позначення (5.107) – (5.109), є системою 15 алгебраїчних рівнянь відносно 15 параметрів: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \rho_0, \rho_1, \rho_2, h_0, h_1, h_2, g_0, g_1, g_2$. Тобто, в загальному випадку вона є замкнутою системою. Проте в загальному випадку вона має досить складний вигляд. Навіть у найбільш практично важливому випадку дії сили тяжіння і за умови, що рухлива система є головною $(A_{ij} = 0, i \neq j)$, ця система не допускає істотних спрощень, оскільки параметри (5.14) – (5.25) мають вигляд:

$$B_{11}^* = m(A_{22} + A_{33} - A_{11}), B_{22}^* = m(A_{11} + A_{33} - A_{22}), B_{33}^* = m(A_{11} + A_{22} - A_{33}),$$
$$B_{12}^* = -2mA_{12} = 0, B_{13}^* = 0, B_{23}^* = 0,$$

$$C_{11}^* = -m^2 A_{11}, C_{22}^* = -m^2 A_{22}, C_{33}^* = -m^2 A_{33}, C_{12}^* = 0, C_{13}^* = 0, C_{23}^* = 0,$$

$$\mu_0 = \alpha_3 A_{33}, \mu_1 = 0, \mu_2 = a_0'\alpha_2 m(A_{22} + A_{33} - A_{11}), \mu_3 = -a_0'\alpha_1 m(A_{11} + A_{33} - A_{22}), \mu_4 = 0,$$
$$\varepsilon_0 = \beta_3 A_{33}, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = a_0'\beta_2 m(A_{22} + A_{33} - A_{11}), \varepsilon_3 = -a_0'\beta_1 m(A_{11} + A_{33} - A_{22}), \varepsilon_4 = 0,$$
$$\sigma_0 = \gamma_3 A_{33}, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = a_0'\gamma_2 m(A_{22} + A_{33} - A_{11}), \sigma_3 = -m(A_{11} + A_{33} - A_{22}), \sigma_4 = 0,$$
$$\mu_5 = \frac{1}{2} a_0'^2 \alpha_3 m^2 (A_{11} - A_{22}), \mu_6 = 0, \mu_7 = a_0' \{\alpha_2 [s_3 - a_0 (A_{11} - A_{33})] - \alpha_3 s_2\},$$
$$\mu_8 = a_0' \{-\alpha_1 [s_3 - a_0 (A_{22} - A_{33})] + \alpha_3 s_1\}, \mu_9 = a_0 (\alpha_1 s_2 - \alpha_2 s_1),$$
$$\varepsilon_5 = \frac{1}{2} a_0'^2 \beta_3 m^2 (A_{11} - A_{22}), \varepsilon_6 = 0, \varepsilon_7 = a_0'\beta_2 [s_3 - a_0 (A_{11} - A_{33})] - \beta_3 s_2,$$
$$\varepsilon_8 = a_0' \{-\beta_1 [s_3 - a_0 (A_{22} - A_{33})] + \beta_3 s_1\}, \varepsilon_9 = a_0 (\beta_1 s_2 - \beta_2 s_1),$$
$$\sigma_5 = \frac{1}{2} a_0' \gamma_3 (A_{11} - A_{22}), \sigma_6 = 0, \sigma_7 = a_0' \{\gamma_2 [s_3 - a_0 (A_{11} - A_{33})] - s_2 \gamma_3\},$$
$$\sigma_8 = a_0' \{-\gamma_1 [s_3 - a_0 (A_{22} - A_{33})] + \gamma_3 s_1\}, \sigma_9 = a_0 (\gamma_1 s_2 - \gamma_2 s_1).$$

5.3.2. Випадок сферичного гіростата з нерухомим центром мас. Запишемо умови на параметри задачі з урахуванням значень з 5.3.1.

$$s_1 = s_2 = s_3,\ A_{11} = A_{22} = A_{33} = A,\ B_{11}^* = mA,\ B_{22}^* = mA,\ B_{33}^* = mA,$$
$$B_{12}^* = 0,\ B_{13}^* = 0,\ B_{23}^* = 0,\ C_{11}^* = -m^2 A,\ C_{22}^* = -m^2 A,\ C_{33}^* = -m^2 A,$$

$$\begin{aligned}
&\mu_0 = \alpha_3 A, \mu_1 = 0, \mu_2 = a_0'\alpha_2 mA, \mu_3 = -a_0'\alpha_1 mA,\\
&\mu_4 = 0, \mu_5 = 0, \mu_6 = 0, \mu_7 = 0, \mu_8 = 0, \mu_9 = 0,\\
&\varepsilon_0 = \beta_3 A, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = a_0'\beta_2 mA, \varepsilon_3 = -a_0'\beta_1 mA,\\
&\varepsilon_4 = 0, \varepsilon_5 = 0, \varepsilon_6 = 0, \varepsilon_7 = 0, \varepsilon_8 = 0, \varepsilon_9 = 0,\\
&\sigma_0 = \gamma_3 A, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = a_0'\gamma_2 mA, \sigma_3 = -a_0'\gamma_1 mA,\\
&\sigma_4 = 0, \sigma_5 = 0, \sigma_6 = 0, \sigma_7 = 0, \sigma_8 = 0, \sigma_9 = 0.
\end{aligned} \tag{5.125}$$

В силу виразів (5.125) рівняння (5.11) – (5.13) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1 = \lambda_2\left[m(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2 \cos\varphi + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot{\varphi}\right] - \alpha_3 A\ddot{\varphi} +\\
&+ \dot{\varphi}a_0' mA(\alpha_2 \sin\varphi - \alpha_1 \cos\varphi),
\end{aligned} \tag{5.126}$$

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1\left[m(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2 \cos\varphi + a_0\gamma_3) + \gamma_3\dot{\varphi}\right] - \beta_3 A\ddot{\varphi} +\\
&+ \dot{\varphi}a_0' mA(\beta_2 \sin\varphi - \beta_1 \cos\varphi),
\end{aligned} \tag{5.127}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(t)\left[m(a_0'\beta_1 \sin\varphi + a_0'\beta_2 \cos\varphi + a_0\beta_3) + \dot{\varphi}\beta_3\right] -\\
&- \lambda_2(t)\left[m(a_0'\alpha_1 \sin\varphi + a_0'\alpha_2 \cos\varphi + a_0\alpha_3) + \dot{\varphi}\alpha_3\right] -\\
&- \gamma_3 A\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}a_0' mA(\gamma_2 \sin\varphi - \gamma_1 \cos\varphi) = 0.
\end{aligned} \tag{5.128}$$

Рівняння (5.126), (5.127) перетворимо так

$$\begin{aligned}
&\left[\lambda_1(t) + \alpha_3 A\dot{\varphi}(t) + a_0' mA\left(\alpha_1 \sin\varphi(t) + \alpha_2 \cos\varphi(t)\right)\right]^{\bullet} =\\
&= \lambda_2(t)\left[m\left(a_0'\gamma_1 \sin\varphi(t) + a_0'\gamma_2 \cos\varphi(t) + a_0\gamma_3\right) + \gamma_3\dot{\varphi}(t)\right],
\end{aligned} \tag{5.129}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\lambda_2(t) + \beta_3 A\dot{\varphi}(t) + a_0' mA\left(\beta_1 \sin\varphi(t) + \beta_2 \cos\varphi(t)\right)\right]^{\bullet} =\\
&= \lambda_1(t)\left[m\left(a_0'\gamma_1 \sin\varphi(t) + a_0'\gamma_2 \cos\varphi(t) + a_0\gamma_3\right) + \gamma_3\dot{\varphi}(t)\right].
\end{aligned} \tag{5.130}$$

Вид рівнянь (5.129), (5.130) показує, що система допускає розв’язок

$$\dot{\varphi} = -\frac{m}{\gamma_3}(a_0'\gamma_1 \sin\varphi(t) + a_0'\gamma_2 \cos\varphi(t) + a_0\gamma_3), \tag{5.131}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(t) + \alpha_3 A\dot{\varphi}(t) + a_0' mA\left(\alpha_1 \sin\varphi(t) + \alpha_2 \cos\varphi(t)\right) = \chi_1,\\
&\lambda_2(t) + \beta_3 A\dot{\varphi}(t) + a_0' mA\left(\beta_1 \sin\varphi(t) + \beta_2 \cos\varphi(t)\right) = \chi_2,
\end{aligned} \tag{5.132}$$

де χ_1, χ_2 – довільні постійні.

Підставимо (5.131), (5.132) в рівняння (5.128) і вимагатимемо, щоб отримане рівняння було тотожністю по змінній φ. На основі співвідношення (5.131) і знайдених умов на χ_i з (5.132) встановлюємо залежності

$$\lambda_1(t) = -\frac{a_0' mA}{\gamma_3}\left(\beta_2 \sin\varphi(t) + \beta_1 \cos\varphi(t)\right),$$
$$\lambda_2(t) = -\frac{a_0' mA}{\gamma_3}\left(\alpha_2 \sin\varphi(t) + \alpha_1 \cos\varphi(t)\right). \tag{5.133}$$

Отже, для випадку сферичного гіростата розв'язок рівнянь (5.11) – (5.13) описується співвідношеннями (5.131), (5.133). У цьому розв'язку a_0, m – довільні параметри. Тобто, за допомогою функцій (5.133) можна стабілізувати напіврегулярну прецесію відносно довільної осі в гіростаті за умови $\gamma_3 \neq 0$.

5.3.3. Випадок осесиметричного гіроскопа. Покладемо

$$A_{22} = A_{11}, s_2 = s_1 = 0, s_3 = a_0(A_{11} - A_{33})m^2 \tag{5.134}$$

З рівностей (5.14) – (5.25) отримаємо

$$\begin{aligned}
&\mu_0 = \alpha_3 A_{33}, \mu_1 = 0, \mu_2 = a_0'\alpha_2 m A_{33}, \mu_3 = -a_0'\alpha_1 m A_{33},\\
&\mu_4 = 0, \mu_5 = 0, \mu_6 = 0, \mu_7 = 0, \mu_8 = 0, \mu_9 = 0,\\
&\varepsilon_0 = \beta_3 A_{33}, \varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = a_0'\beta_2 m A_{33}, \varepsilon_3 = -a_0'\beta_1 m A_{33},\\
&\varepsilon_4 = 0, \varepsilon_5 = 0, \varepsilon_6 = 0, \varepsilon_7 = 0, \varepsilon_8 = 0, \varepsilon_9 = 0,\\
&\sigma_0 = \gamma_3 A_{33}, \sigma_1 = 0, \sigma_2 = a_0'\gamma_2 m A_{33}, \sigma_3 = -a_0'\gamma_1 m A_{33},\\
&\sigma_4 = 0, \sigma_5 = 0, \sigma_6 = 0, \sigma_7 = 0, \sigma_8 = 0, \sigma_9 = 0.
\end{aligned} \tag{5.135}$$

В силу (5.135) рівняння (5.11) – (5.13) перетворяться так

$$\begin{aligned}
&\dot\lambda_1(t) = \lambda_2(t)\left[m\left(a_0'\gamma_1 \sin\varphi(t) + a_0'\gamma_2 \cos\varphi(t) + a_0\gamma_3\right) + \gamma_3\dot\varphi(t)\right] -\\
&- \alpha_3 A_{33}\ddot\varphi(t) + \dot\varphi(t) a_0' m A_{33}\left(\alpha_2 \sin\varphi(t) - \alpha_1 \cos\varphi(t)\right),
\end{aligned} \tag{5.136}$$

$$\begin{aligned}
&\dot\lambda_2(t) = -\lambda_1(t)\left[m\left(a_0'\gamma_1 \sin\varphi(t) + a_0'\gamma_2 \cos\varphi(t) + a_0\gamma_3\right) + \gamma_3\dot\varphi(t)\right]\\
&- \beta_3 A_{33}\ddot\varphi(t) + \dot\varphi(t) a_0' m A_{33}\left(\beta_2 \sin\varphi(t) - \beta_1 \cos\varphi(t)\right),
\end{aligned} \tag{5.137}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(t)\left[m\left(a_0'\beta_1 \sin\varphi(t) + a_0'\beta_2 \cos\varphi(t) + a_0\beta_3\right) + \beta_3\dot\varphi(t)\right] -\\
&- \lambda_2(t)\left[m\left(a_0'\alpha_1 \sin\varphi(t) + a_0'\alpha_2 \cos\varphi(t) + a_0\beta_3\right) + \alpha_3\dot\varphi(t)\right] -\\
&- \gamma_3 A_{33}\ddot\varphi + \dot\varphi(t) a_0' m A_{33}\left(\gamma_2 \sin\varphi(t) - \gamma_1 \cos\varphi(t)\right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.138}$$

Порівнюючи системи (5.126) – (5.128) і (5.136) – (5.138) приходимо до висновку про те, що другу систему можна отримати заміною параметра A на A_{33}. Тому в силу (5.131) – (5.133) система (5.136) – (5.138) допускає розв'язок:

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{m}{\gamma_3}(a_0'\gamma_1 \sin\varphi(t) + a_0'\gamma_2 \cos\varphi(t) + a_0\gamma_3),$$
$$\lambda_1(t) = -\frac{a_0' m A_{33}}{\gamma_3}\left(\beta_2 \sin\varphi(t) - \beta_1 \cos\varphi(t)\right), \tag{5.139}$$
$$\lambda_2(t) = -\frac{a_0' m A_{33}}{\gamma_3}\left(\alpha_2 \sin\varphi(t) - \alpha_1 \cos\varphi(t)\right),$$

де $\gamma_3 \neq 0$. Перша властивість формул (5.139) полягає в тому, що вектор власного обертання тіла–носія $\bar{a}$ не може знаходитися в площині векторів $\bar{\alpha}$ і $\bar{\beta}$. Другу властивість можна охарактеризувати тим, що параметри m і a_0 набувають довільних значень, пов'язаних останньою рівністю з (5.134). Ці результати мають важливе застосування в теорії рівняння гіростата за допомогою двох роторів.

5.3.4. Розв'язок напіврегулярної прецесії у разі дії на гіростат потенціальних і гіроскопічних сил. Представляє значний інтерес розглянути випадок, коли на гіростат діють загальніший клас сил, чим сила тяжіння. Тут за основу аналізу візьмемо рівняння (5.13). Для того, щоб воно було тотожністю покладемо

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -A_{33}\left[m(a_0'\alpha_1 \sin\varphi + a_0'\alpha_2 \cos\varphi + a_0\alpha_3) + \alpha_3\dot{\varphi}\right], \\ \lambda_2 &= -A_{33}\left[m(a_0'\beta_1 \sin\varphi + a_0'\beta_2 \cos\varphi + a_0\beta_3) + \beta_3\dot{\varphi}\right]. \end{aligned} \tag{5.140}$$

Тоді рівняння (5.13) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &\sigma_1\dot{\varphi}^2 - \sigma_0\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}(\sigma_2 \sin\varphi + \sigma_3 \cos\varphi + \sigma_4) + \sigma_5 \sin 2\varphi + \sigma_6 \cos 2\varphi + \\ &+ \sigma_7 \sin\varphi + \sigma_8 \cos\varphi + \sigma_9 = 0. \end{aligned} \tag{5.141}$$

Для того, щоб виконати інтегрування рівняння (5.141) додатково покладемо:

$$A_{ij} = 0,\ B_{ij} = 0,\ C_{ij} = 0\,(i \neq j),\ C_{22} - C_{11} = m^2(A_{11} - A_{22}), \tag{5.142}$$

$$s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = a_0\left[C_{33} - C_{11} - m^2(A_{33} - A_1)\right]. \tag{5.143}$$

В силу позначень (5.14) – (5.25) і умов (5.142), (5.143) з рівняння (5.141) отримаємо

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{A_{33}\gamma_3}(a_0'\gamma_2 B_{11}^* \cos\varphi + a_0'\gamma_1 B_{22}^* \sin\varphi + C_*), \tag{5.144}$$

де C_* – довільна постійна. Слідуючи підходу, на додаток до рівняння (5.144), для виразу $\dot{\varphi}$ візьмемо вираз (5.131)

$$\dot{\varphi} = -\frac{1}{A_{33}\gamma_3}(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2 \cos\varphi + a_0\gamma_3)\,. \tag{5.145}$$

Оскільки вирази (5.144), (5.145) повинні співпадати, то повинні виконуватися умови

$$C_* = a_0\gamma_3, B_{11} = m(A_{11} - A_{22}), B_{22} = m(A_{22} - A_{11})\,. \tag{5.146}$$

За наявності рівності (5.142), (5.146) рівняння (5.11), (5.12) стають тотожністю. Якщо внести вираз (5.145) в співвідношення (5.140), то отримаємо останні дві рівності з (5.139).

Таким чином, рівняння (5.11) – (5.13) при виконанні умов (5.142), (5.143), (5.146) допускають розв’язок (5.139). Інтерес його полягає в тому, що він побудований для задачі про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Зауваження. Попри те, що вид розв’язку (5.139) і для випадку дії сили тяжіння і для випадку дії потенціальних і гіроскопічних сил однаковий, але його трактування для цих задач різне. Дійсно, в першому випадку він побудований для динамічно симетричного тіла–носія і має місце у разі, коли параметри a_0, m пов'язані умовою з (5.134), в другому випадку умови існування загальніші (5.142), (5.143), (5.146). Загальна властивість полягає в тому, що в розв’язку (5.139) немає обмежень на параметри α_i, β_i.

5.3.5. Загальний метод вивчення напіврегулярних прецесій. Для вивчення прецесій в загальному випадку необхідно до рівнянь (5.11) – (5.13) застосувати метод інваріантних співвідношень [55].

На початку обчислюємо похідну від лівої частини рівняння (5.13) в силу рівнянь (5.11) (5.12). В результаті отримаємо рівняння, яке є лінійним рівнянням відносно функцій $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$. Далі за його допомогою і залученням рівняння (5.13) знаходимо функції λ_1, λ_2 залежно від змінної φ і її похідних. Підставивши отримані вирази в рівняння (5.11), (5.12), приходимо до системи двох диференціальних рівнянь на функцію $\varphi(t)$. Умови розв'язуваності цих рівнянь і є умовами існування напіврегулярних прецесій гіростата.

Існує і інший метод дослідження прецесій. Він грунтований на використанні інтеграла моментів з (5.3). У силу (5.4), (5.8) запишемо його у вигляді:

$$\lambda_1(t)(\overline{\alpha}\cdot\overline{\nu})+\lambda_2(\overline{\beta}\cdot\overline{\nu})=g_1(t),\ g_1(t)=\frac{1}{2}(B^*\overline{\nu}\cdot\overline{\nu})-\dot{\varphi}(A\overline{a}\cdot\overline{\nu})+k_*, \tag{5.147}$$

де k_* – довільна постійна. Рівняння (5.13) представимо так

$$\begin{aligned}&\lambda_1(t)\left[m(\overline{\beta}\cdot\overline{\nu})+(\overline{\beta}\cdot\overline{a})\dot{\varphi}\right]+\lambda_2(t)\left[m(\overline{\alpha}\cdot\overline{\nu})+(\overline{\alpha}\cdot\overline{a})\dot{\varphi}\right]=g_2(t),\\ &g_2(t)=\sigma_0\ddot{\varphi}-\sigma_1\dot{\varphi}^2-\dot{\varphi}(\sigma_2\sin\varphi+\sigma_3\cos\varphi+\sigma_4)-\sigma_5\sin 2\varphi-\sigma_6\cos 2\varphi-,\\ &-\sigma_7\sin\varphi-\sigma_8\cos\varphi-\sigma_9.\end{aligned} \tag{5.148}$$

З (5.147), (5.148) слідує

$$\lambda_1(t)=\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)},\lambda_2(t)=\frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}, \tag{5.149}$$

де

$$\begin{aligned}&\Delta(t)=m\left[(\overline{\alpha}\cdot\overline{\nu})^2-(\overline{\beta}\cdot\overline{\nu})^2\right]+\dot{\varphi}\left[(\overline{\alpha}\cdot\overline{\nu})(\overline{\alpha}\cdot\overline{a})-(\overline{\beta}\cdot\overline{\nu})(\overline{\beta}\cdot\overline{a})\right],\\ &\Delta_1(t)=g_1(t)\left[m(\overline{\alpha}\cdot\overline{\nu})+\dot{\varphi}(\overline{\alpha}\cdot\overline{a})\right]-g_2(t)(\overline{\beta}\cdot\overline{\nu}),\\ &\Delta_2(t)=g_2(t)(\overline{\alpha}\cdot\overline{\nu})-g_1(t)\left[m(\overline{\beta}\cdot\overline{\nu})+\dot{\varphi}(\overline{\beta}\cdot\overline{a})\right].\end{aligned} \tag{5.150}$$

Згідно загальної теорії звичайних диференціальних рівнянь одне з рівнянь (5.11), (5.12) можна замінити першим інтегралом (5.147). Тому вирази (5.149) досить підставити в одне з рівнянь (5.11) (5.12). Тоді отримаємо рівняння $G(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi})=0$, яке містить тільки функцію $\varphi(t)$. Якщо ця функція буде знайдена, то умови її існування і будуть умовами існування прецесій (5.4).

Вказаний спосіб особливо ефективний у разі, коли одна з функцій $\lambda_1(t),\lambda_2(t)$ постійна (він представляє певний інтерес для додатків, оскільки на практиці забезпечити рівномірне обертання одного з роторів досить просто).

5.4. Висновки до розділу.

У цьому розділі розглянуто напіврегулярні прецесії гіростата у випадку, коли швидкість прецесії тіла–носія постійна. Передбачається, що гіростат несе два ротори.

Отримано три диференціальні рівняння на функції $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ (компоненти гіростатичного моменту) і $\varphi(t)$ (кут власного обертання тіла–носія).

У п. 5.2. розглянуто маятникові рухи $(\overline{\omega} = \dot{\varphi}\overline{a})$. Вказано загальний метод дослідження і знайдено нові розв’язки рівнянь руху гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил. При цьому знайдено два варіанти залежності $\varphi(t)$: в першому варіанті $\varphi(t)$ – еліптична функція часу, в другому варіанті $\varphi(t)$ – елементарна функція часу.

Пункт 5.3. присвячено вивченню прецесій гіростата в загальному вигляді. Розглянуто випадок, коли $\dot{\varphi}(t)$ є лінійною функцією від $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$. Для нього отримано загальні умови існування, які записано у вигляді системи п'ятнадцяти рівнянь відносно п'ятнадцяти параметрів. Окремо вивчено випадки сферичного і осесиметричного розподілу мас тіла–носія. Для них побудовано нові розв’язки рівнянь руху гіростата, що описують напіврегулярні прецесії гіростата відносно вертикалі.

ВИСНОВКИ

1. Отримано нові розв’язки рівнянь Кірхгофа–Пуассона задачі про рух гіростата під дією потенціальних та гіроскопічних сил, що описують рівномірне обертання гіростата відносно похилої осі у двох задачах: задачі про рух гіростата з одним ротором; задачі про рух гіростата з двома роторами.

2. Запропоновано новий підхід знаходження умов існування маятникових рухів, напіврегулярних прецесій гіростата, що несе один ротор.

3. Побудовано нові розв’язки рівнянь Кірхгофа – Пуассона у квадратурах для напіврегулярних прецесій. Вони характеризуються наступними властивостями: кут власного обертання є або елементарною функцією часу, або еліптичною функцією часу.

4. Досліджено вироджені класи напіврегулярних прецесій гіростата, які характеризуються маятниковими рухами або рухами, що існують при додаткових обмеженнях на параметри задачі.

5. Для рівнянь Кірхгофа – Пуассона розроблено загальний підхід дослідження напіврегулярних прецесій гіростата, що несе два ротори.

6. Побудовано нові класи прецесійних рухів задачі про рух гіростата з двома роторами для різних способів завдання швидкостей власного обертання. Розглянуто випадки сферичного і осесиметричного розподілу мас тіла-носія. Для них побудовано нові розв’язки рівнянь руху гіростата, що описують напіврегулярні прецессії гіростата відносно вертикалі.

7. Одержано залежності гіростатичного моменту від часу, які можуть знайти застосування в задачах керування механічними системами класу гіростат.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амелькин Н. И. О свойствах стационарных движений тела, несущего систему двухстепенных силовых гироскопов /Н. И. Амелькин // Прикл. математика и механика. – 2011. – 75, вып. 3 – С. 355 – 369.
2. Аппельрот Г. Г. По поводу § 1 мемуара С.В. Ковалевской «Sur le probleme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe» /Г. Г. Аппельрот // Матем. сборник Кружка любителей матем. наук. – 1892. – 16, вып. 3. – С. 483 – 507.
3. Аппельрот Г. Г. Дополнение к статье «По поводу первого параграфа мемуара С. В. Ковалевской» / Г. Г. Аппельрот // Матем. сборник Кружка любителей матем. наук. – 1892. – 16, вып. 3. – С. 592 – 596.
4. Билимович А. Д. Уравнения движения тяжелого твёрдого тела около неподвижной точки. / А. Д. Билимович // Сборник статей, посв. Г. К. Суслову. – К., 1911. – С. 23 – 74.
5. Бобылев Д. К. Об одном частном решении дифференциальных уравнений вращения тяжелого твёрдого тела вокруг неподвижной точки / Д. К. Бобылев // Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1896. – 8, вып. 2. – С. 21 –25.
6. Болграбская И. А. Динамика систем связанных твёрдых тел / И. А. Болграбская, М. Е. Лесина, Д. А. Чебанов // Задачи и методы: математика, механика, кибернетика. – Том 9. – К.: Наукова Думка, 2012. – 395 с.
7. Брюм А. З. Исследование регулярной процессии тяжелого твёрдого тела с неподвижной точкой первым методом Ляпунова / А. З. Брюм // Механика твёрдого тела. – 1987. – 50, Вып.19. – С. 68 – 72.
8. Брюм А. З. Достаточные условия существования асимптотических маятниковых движений тяжелого твёрдого тела с неподвижной точкой / А. З. Брюм, Г. В. Горр // Прикл. Математика и механика. – 1986. – 50, вып.4. – С. 681 – 684.

9. Вархалев Ю. П. Об асимптотически равномерных движениях твёрдого тела с одной неподвижной точкой / Ю. П. Вархалев // Матем. физика и нелинейная механика. – 1989. – Вып. 12 (46). – С. 4 – 9.

10. Вархалев Ю. П. Новый класс асимптотических равномерных движений тяжелого твёрдого, имеющих неподвижную точку / Ю. П. Вархалев, Г. В. Горр // Прикладная математика и механика. – 1982. – 46, вып. 3. – С. 397 – 400.

11. Вархалев Ю. П. Асимптотически маятниковые движения гироскопа Гесса-Аппельрота / Ю. П. Вархалев, Г. В. Горр // Прикладная математика и механика. – 1984. – 48, вып. 3. – С. 490 – 495.

12. Вархалев Ю. П. Первый метод Ляпунова в исследовании движений твердого тела / Ю. П. Вархалев, Г. В. Горр // Механика твёрдого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 25 – 41.

13. Вархалев Ю. П. Об асимптотически равномерных движениях гиростата относительно наклонной оси / Ю. П. Вархалев, А. М. Ковалёв // Механика твёрдого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 43 – 48.

14. Виттенбург Й. Динамика систем твёрдых тел / Й. Виттенбург. – М.: Мир, 1980. – 288 с.

15. Возняк А. А. О равномерных вращениях относительно наклонной оси гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк, Е. В. Миронова // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2010. – № 2. – С. 15–18.

16. Возняк А. А. Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – 24. – С. 45–57.

17. Возняк А. А. Маятниковые движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента / А. А. Возняк // Механика твердого тела. –

2013. – Вып. 43. – С. 69–78.

18. Возняк А. А. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. А. Возняк, Г. А. Котов // Вісник Донецького національного університету. Серія А: Природничі науки. – 2013. – № 2. – С. 27–36.
19. Возняк А. А. О равномерных движениях гиростата, несущего два вращающихся ротора, под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк // Труды ИПММ НАН Украины. – 2013. – 27. – С. 89–97.
20. Возняк А. А. Моделирование полурегулярных прецессий гиростата в случае переменного гиростатического момента / Е. К. Щетинина, А. А. Возняк // Компьютерные исследования и моделирование. – 2014. –Т. 6, № 4. – С. 559–568.
21. Возняк А. А. Об изоконических движениях гиростата в случае одного линейного инвариантного соотношения уравнений Кирхгофа–Пуассона / А. А. Возняк, Е. К. Щетинина // Материалы международной конференции «Классические задачи динамики твердого тела». – Донецк, 2007. – С. 16–17.
22. Возняк А. А. Об изоконических движениях гиростата в случае линейного инвариантного соотношения уравнений Кирхгофа – Пуассона / А. А. Возняк // Thesis of conference reports of International conference «Dynamical system modeling and stability investigation». – Kyiv, 2009. – P. 55.
23. Возняк А. А. Условия существования равномерных вращений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. А. Возняк // Abstracts of 11-th International conference «Stability, control and rigid bodies dynamics». – Donetsk, 2011. – P. 26–27.
24. Возняк А. А. Исследование условий существования полурегулярных прецессий первого типа с переменным гиростатическим моментом /

А. А. Вozняк, А. В. Липлянская, А. В. Чепак // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти». – Донецьк, 2012. – С. 29-30.

25. Возняк А. А. Частные случаи интегрируемости уравнений класса Кирхгофа-Пуассона для случая переменного гиростатического момента / А. А. Возняк // Матеріали ІІ міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні тенденції розвитку математики та її прикладні аспекти». – Донецьк, 2013. – С. 35-37.

26. Возняк А. А. Об условиях существования маятниковых движений гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. А. Возняк // Матеріали міжнародної науково-практичної конференції «Інноваційний розвиток науки нового тисячоліття». – Ужгород, 2017. – С. 69–70.

27. Волкова О. С. Два линейных инвариантных соотношения уравнений движения неавтономного гиростата / О. С. Волкова // Труды института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 50 – 62.

28. Волкова О. С. Некоторые классы движений тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: спец. 01.02.01/ О. С. Волкова. – Донецк, 2010. – 19 с.

29. Волкова О. С. О стабилизации равномерных вращений вокруг наклонной оси твёрдого тела, несущего маховики / О. С. Волкова // Труды ин-та прикладной математики и механики. – 2007. – Т.14. – С. 41 – 51.

30. Волкова О. С. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твёрдого тела, несущего маховик / О.С. Волкова // Механика твёрдого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80 – 86.

31. Волкова О. С. Регулярные процессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси / О .С. Волкова // Труды ин-та прикладной математики и механики. – 2009. – Т.19. – С. 30 – 35.

32. Волкова О .С. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом / О. С. Волкова, И.Н. Гашененко // Механика твёрдого тела. – 2009. – Вып. 39. С. 42 – 49.
33. Волкова О. С. Решения с линейными инвариантными соотношениями уравнений движения тяжелого гиростата / О. С. Волкова, И.Н. Гашененко // Сборник тезисов междунар. конф. ICSCD'11. – Донецк, 2011. – С. 27 –29.
34. Волкова О. С. Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки / О. С. Волкова, И.Н. Гашененко // Современные проблемы математики, механики и информатики. – Харьков, 2011. – С. 74 – 84.
35. Гашененко И. Н. Характерные свойства годографов угловой скорости в решении Горячева–Чаплыгина / И. Н. Гашененко // Механика твёрдого тела. – 1989. – Вып. 21. – С. 9 – 18.
36. Гашененко И. Н. Геометрический анализ двухчастотных квазипериодических движений гироскопа Ковалевской / И.Н. Гашененко // Механика твёрдого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 3 – 10.
37. Гашененко И. Н Один случай интегрируемости уравнений движения гиростата / И. Н. Гашененко // Механика твёрдого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 1 – 4.
38. Гашененко И. Н. Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиростата / И. Н. Гашененко // Механика твёрдого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 1–7.
39. Гашененко И.Н. Классические задачи динамики твёрдого тела / И. Н. Гашененко, Г. В. Горр, А. М. Ковалёв. – К. : Наук. Думка, 2012. – 400 с.
40. Гашененко И. Н. Один частный случай движения гироскопа Ковалевской / И. Н. Гашененко, В. Н. Касяник // Механика твёрдого тела. – 1983. – Вып. 15. – С.31 – 34.

41. Горр Г. В. Об одном движении тяжелого твёрдого тела в случае Горячева-Чаплыгина / Г. В. Горр // Прикл. математика и механика – 1970. – 34, вып. 6. – С. 1139 – 1143.

42. Горр Г. В. Некоторые свойства прецессионных движений относительно вертикали тяжелого твёрдого тела с одной неподвижной точкой / Г. В. Горр //Прикл. математика и механика – 1974. – 38, вып. 3. – С. 451 – 458.

43. Горр Г. В. О прецессии гиростата в потенциальном поле сил / Г. В. Горр // Механика твёрдого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 64 – 67.

44. Горр Г. В. Необходимые условия существования асимптотически равномерных движений тяжелого твёрдого тела, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр // Механика твёрдого тела. – 1981. – Вып. 13. – С. 27 – 35.

45. Горр Г. В. Новый класс асимптоматических движений тяжелого твёрдого тела имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр // Докл. АН СССР. – 1981. – 260, № 6 – С. 1316 – 1317.

46. Горр Г. В. Методы исследования движения твёрдого тела и их приложение в классификации движений / Г. В. Горр // Механика твёрдого тела. – 1982 – Вып. 14. – С. 54 – 74.

47. Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твёрдого тела и динамике систем связанных твёрдых тел / Г. В. Горр // Прикладная математика и механика. – 2003. – 67, вып. 4. – С. 573 – 587.

48. Горр Г. В. Об асимптотически процессионных движениях гиростата в обобщённой задаче динамики / Г. В. Горр, Д.И. Думбай // Механика твёрдого тела. – 1994. – Вып. 26(1). – С. 20 – 28.

49. Горр Г. В. Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой / Г. В. Горр, А. В. Зыза // Известия РАН. Механика твёрдого тела. – 1998. – № 6. – С. 12 – 21.

50. Горр Г. В. Движение гиростата / Г. В. Горр, А. М. Ковалев. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.

51. Горр Г. В. О решении Н. Ковалевского уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. А. Илюхин, В. К. Козьменко // Матем. физика. – 1968. – Вып. 5. – С. 46 – 53.
52. Горр Г. В. Нелинейный анализ поведения механических систем / Г. В. Горр, А. А. Илюхин, А. М. Ковалёв, А. Я. Савченко. – К. : Наук. Думка, 1984. – 285 с.
53. Горр Г. В. Об асимптотически равномерных движениях вокруг наклонной оси в обобщённой задаче о движении твёрдого тела с неподвижной точкой / Г. В. Горр, В. М. Ковалёв // Механика твёрдого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 13 – 18.
54. Горр Г. В. Классические задачи динамики твердого тела / Г. В. Горр, Л. В. Кудряшова, Л. А. Степанова. – К. : Наук. Думка, 1978. – 296 с.
55. Горр Г. В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку / Г. В. Горр, А. В. Мазнев. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
56. Горр Г. В. О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики / Г. В. Горр, А. В. Мазнев // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8, № 2. – С. 369 – 376.
57. Горр Г. В. О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатического момента / Г. В. Горр, А. В. Мазнев //Динамические системы. Таврический нац. ун-т им. В.И. Вернадского. – 2012. – Т. 2 (30), № 1–2. – С. 23 – 32.
58. Горр Г. В. О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщённой задаче динамики / Г.В.Горр, А. В. Мазнев // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – 21. – С. 64 – 75.
59. Горр Г. В. Об условиях существования первого интеграла уравнений Кирхгофа-Пуассона на инвариантном множестве / Г. В. Горр, А. В Мазнев // Механика твёрдого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 50 –61.
60. Горр Г. В. Об условиях существования первого интеграла уравнений Кирхгофа-Пуассона на инвариантном множестве / Г. В. Горр, А. В.

Мазнев // Моделирование, идентификация, синтез систем управления: сб. тезисов 13 Междунар. науч. – техн. конф., (12 – 19 сент. 2010 г.) – Донецк, 2010. С. 61.

61. Горр Г. В. Прецессионные движения в динамике твёрдого тела и в динамике систем связанных твёрдых тел / Г. В. Горр, А. В. Мазнев, Е. К. Щетинина. – Донецк: ДонНУ, 2009, – 222 с.
62. Горр Г. В. Об асимптотически-прецессионных движениях сферического гиростата / Г. В. Горр, Е. М. Миронова // Механика твёрдого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 56 – 62.
63. Горр Г. В. Об интегрировании уравнений Пуассона в случае трёх линейных инвариантных соотношений / Г. В. Горр, Е. К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2002. – 66, вып. 3. – С. 418 – 426.
64. Горр Г. В. О новом решении уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения / Г. В. Горр, Е. К. Узбек // Прикл. математика и механика. – 2005. – 67, вып. 6. – С. 931 – 939.
65. Горр Г. В. Новые классы прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Г. В. Горр, Е. К. Щетинина // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – 12. – С. 36 – 45.
66. Горр Г. В. Об интегрирующем множителе уравнений динамики твёрдого тела на инвариантных многообразиях / Г. В. Горр, Е. К. Щетинина // Доп. НАН України. – 2007. – № 1. – С. 60 – 66.
67. Горячев Д. Н. Новое частное решение задачи о движении тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки / Д. Н. Горячев // Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – 10, вып.1. – С. 23 –24.
68. Горячев Д. Н. О движении тяжёлого твёрдого тела вокруг неподвижной точки в случае A=B=4C / Д. Н. Горячев // Матем. сб. Кружка любителей матем. наук. – 1900. – 21, вып. 3. – С. 431 – 438.
69. Даламбер Ж. Динамика / Ж. Даламбер. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 343 с.

70. Докшевич А. И. Решения в конечном виде уравнений Эйлера–Пуассона / А. И. Докшевич. – К.: Наук. думка, 1992. – 168 с.

71. Дружинин Э. И. О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата / Э. И. Дружинин // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63, Вып. 5. – С. 825 – 826.

72. Жуковский Н. Е. О движении твёрдого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. Соч. / Н.Е. Жуковский. – М., 1949. – Т.1. – С. 31 – 152.

73. Жуковский Н. Е. Локсодромический маятник Гесса // Собр. Соч. / Н.Е. Жуковский. – М., 1948. – Т. 1. С – 297 – 310.

74. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществования первых интегралов в гамильтоновых системах / С. Л. Зиглин //Функц. анализ и его приложения. – 1982. – 16, № 3. – С. 30 – 41.

75. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновых системах / С. Л. Зиглин // Функц анализ и его приложения. – 1983. –17, № 1. – 8 – 23.

76. Ковалёв А. М. Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ковалёв // Прикл. математика и механика. – 1968. – 32, вып. 6. – С. – 1111 – 1118.

77. Ковалёв А. М. О движении тела в случае Гесса / А. М. Ковалёв // Механика твёрдого тела. – 1969. –Вып. 1. – С. 12 – 27.

78. Ковалёв А. М. Подвижный годограф угловой скорости в решении Л.Н. Сретенского задачи о движении гиростата / А. М. Ковалёв // Механика твёрдого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 37 – 45.

79. Ковалёв А. М. Кинематическое истолкование движения тела в случае Л.Н. Сретенского / А. М. Ковалёв // Прикл. математика и механика. – 1970. – Вып. 2. – С. 45 – 50.

80. Ковалёв А. М. Кинематическое истолкование движений тела в решении Гесса / А. М. Ковалёв // Прикл. математика и механика. – 1970. – 34, вып. 3. – С. 567 – 570.

81. Ковалев А. М. Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике / А. М. Ковалев, Г. В. Горр, В. Н. Неспирный // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3 – 18.

82. Ковалёв А. М. Вложение инвариантных многообразий в семейство интегральных многообразий и анализ решения Гесса / А. М. Ковалёв // Механика твёрдого тела. – 2002. – Вып. 32. – С. 16 – 31.

83. Ковалёв А. М. Устойчивость равномерных вращений твёрдого тела вокруг главной оси / А. М. Ковалёв, А. Я. Савченко // Прикл. матеметика и механика. – 1975. – 39, вып. 4. – С. 650 – 661.

84. Ковалёва Л. М. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твёрдого тела с одним маховиком / Л. М. Ковалёва, А. Е. Позднякович // Механика твёрдого тела. –2000. – Вып. 30. – С. 100 – 105.

85. Ковалевская С. В. Задача о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки // Научные работы / С. В. Ковалевская. – М., 1948. – С. 153 – 220.

86. Ковалевская С. В. Мемуар об одном частном случае задачи о вращении твёрдого тела вокруг неподвижной точки, когда интегрирование производится с помощью ультраэллиптических функций времени // Научные работы / С. В. Ковалевская. – М., 1948. – С. 235 – 244.

87. Козлов В. В. Несуществование дополнительного аналитического интеграла в задаче о движении несимметричного тяжелого твёрдого тела вокруг неподвижной точки / В. В. Козлов / Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1975. – № 1. – С. 105 – 110.

88. Коносевич Б. И. Два частных решения задачи о движениях тела, имеющего неподвижную точку / Б. И. Коносевич, Е. В. Позднякович // Прикл. математика и механика. – 1968. – 32, вып. 3. – С. 544 – 548.

89. Коносевич Б. И. Движение твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, в двух частных случаях интегрируемости уравнений Эйлера-Пуассона / Б.И. Коносевич, Е. В. Позднякович //Механика твёрдого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 77 – 80.
90. Лагранж Ж. Аналитическая механика: в 2 т. /Ж. Лагранж. – М.; Л.: Гостехиздат., 1950. – Т. 1. – 594 с.
91. Леви-Чевита Т. Курс теоретической механики: в 2 т./ Т. Леви-Чевита, У. Амальди. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2. – 555 с.
92. Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твёрдого тела в жидкости //Собр. соч. / А. М. Ляпунов. – М., 1954. – Т. 1. – С. 320 – 324.
93. Ляпунов А. М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твёрдого тела, имеющего неподвижную точку / А. М. Ляпунав. // Сообщ. Харьков.матем. о-ва. Сер. 2. 1894. – 4, № 3. – С. 123 – 140.
94. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения // Собр. Соч.: в 5 т. / А. М. Ляпунов. – М.; Л., 1956. – Т. 2. – С. 7 – 263.
95. Мазнев А. В. Линейное инвариантное соотношение уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. В. Мазнев // Вісн. Донецького нац.. ун-ту. Сер. А.: Природничі науки. – 2012. – № 2. – С. 59 – 65.
96. Мазнев А. В. О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев / Механика твёрдого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 51 – 60.
97. Мазнев А. В. Линейное инвариантное соотношение уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом в магнитном поле / А. В. Мазнев // Механика твёрдого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 84 – 92.

98. Мазнев А. В. О процессии сферического гиростата с переменным гиростатическим моментом в поле силы тяжести / А. В. Мазнев // Вісн. Донецького нац.. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2011. – № 1. – С. 14 – 18.
99. Мазнев А. В. О трёх инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2011. – Т. 16, вип. 16. – С. 158 – 165.
100. Мазнев А. В. Об одном классе трёх нелинейных инвариантных соотношений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом / А. В. Мазнев // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 23. – С. 155 – 162.
101. Мазнев А. В. Об одном классе прецессионно-изоконинического движения сферического по распределению масс гиростата / А. В. Мазнев // Классические задачи динамики твёрдого тела: тезисы докл. Междунар. конф., (23 – 26 июня 2004г.). – Донецк, 2004, – С.43.
102. Мазнев А. В. Прецессионно-изоконическое движение в одном решении уравнений Киргофа / А. В. Мазнев // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А: Природничі науки. – 2001. – Вип. 2. С. 12 – 16.
103. Мазнев А. В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев // Механика твёрдого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91 – 102.
104. Мазнев А. В. Регулярные процессии гиростата с переменным гиростатическим моментом в обобщённой задаче динамики / А. В. Мазнев // Вісн. Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2011. – Вип. 2. – С. 55 – 58.
105. Мазнев А. В. Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и

гироскопических сил / А. В. Мазнев // Доклады Национальной академии наук Украины. – 2011. – № 8. – С. 66 – 72.

106. Мазнев А. В. Асимптотически-равномерные движения относительно наклонной оси гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / А. В. Мазнев, Ю. Ю. Пилпани // Приккладная математика и механика. – 2012. – Т. 76, вып. 2. – С. 237 – 246.
107. Маркеев А. П. Асимптотические траектории и устойчивость периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы / А. П. Маркеев // Прикл. матем. и механика. – 1988. – 52, вып. 3. – С. 363 – 372.
108. Маркеев А. П. Об устойчивости плоских движений твёрдого тела в случае Ковалевской / А. П. Маркеев // Прикл. математика и механика. – 2001. –65, вып. 1. – С. 51 – 58.
109. Маркеев А. П. Об устойчивости прецессии Гриоли / А. П. Маркеев // Прикл. математика и мехпника. – 2003. – 67, вып. 4. – С. 556 – 572.
110. Млодзеевский Б. К. О перманентных осях в движении тяжелого твёрдого тела около неподвижной точки / Б. К. Млодзеевский // Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1894. – 7, вып. 1. – С. 46 – 48.
111. Орешкина Л. Н. О необходимых и достаточных условиях существования четвёртого квадратичного интеграла в некоторых задачах динамики твёрдого тела / Л. Н. Орешкина // Механика твёрдого тела. – 1988. – Вып. 20. – С. 18 – 19.
112. Паункаре А. Новые методы небесной механики // Избр. труды: в 3 т. / А. Паункаре. – М.: Наука, 1971. – 1. – 771 с.
113. Рубановский В. Н. Новые случаи интегрируемости уравнений движения тяжелого твёрдого тела в жидкости / В. Н. Рубановский //Вестн. Моск ун-та. Математика, механика. – 1968. – Вып. 2. – С. 99 – 106.

114. Рубановский В. Н. О бифуркации устойчивости стационарных движений в некоторых задачах динамики твёрдого тела. / В.Н. Рубановский //Прикл. матеметика и механика. – 1974. – 38, вып. 4. – С. 616 – 627.

115. Рубановский В. Н. Об одном новом частном решении уравнений движений тяжелого твёрдого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1985. – 49, вып. 2. –С. 212 – 219.

116. Рубановский В. Н. О квадратичных интегралах уравнений движения твёрдого тела в жидкости / В. Н. Рубановский // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52, вып. 3. – С. 402 – 414.

117. Румянцев В. В. Устойчивость перманентных вращений тяжелого твёрдого тела / В. В. Румянцев //Прикл. математика и механика. – 1956. – 30, вып. 1. – С. 51 – 66.

118. Румянцев В. В. Об устойчивости движений гиростатов / В. В. Румянцев // Прикл. математика и механика. – 1961. – 25, вып. 1. – С. 9–16.

119. Румянцев В. В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами / В. В. Румянцев // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83 – 96.

120. Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем / А. Я. Савченко – К.: Нук. думка, 1977. – 160 с.

121. Савченко А. Я. Устойчивость движения систем связанных твёрдых тел / А. Я. Савченко, И. А. Болграбская, Г. А. Кононыхин, – К.: Нук. думка, 1991. – 168 с.

122. Скрыпник С. В. Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщённой задаче динамики / С. В. Скрыпник // Механика твёрдого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31 – 40.

123. Соколов В. В. Новый интегральный случай для уравнений Киргофа / В. В. Соколов // Теор. и мат. физика. – 2001. – 129, вып. 1. – С. 31 – 36.

124. Сретенский Л. Н. О некоторых случаях движения твёрдого тела с гироскопом / Л. Н. Сретенский // Вестник Моск. ун-та. Математика, механика. – 1963. – № 3. – С. 60 – 71.

125. Сретенский Л. Н. О некоторых случаях интегрируемости уравнений движения гиростата / Л. Н. Сретенский //Докл. АН УССР. – 1963. – 149, № 2. – С. 292 – 294.

126. Стеклов В. А. О движении твёрдого тела в жидкости / В. А. Стеклов. – Харьков, 1893. – 234 с.

127. Стеклов В. А. О некоторых возможных движениях твёрдого тела в жидкости / В. А. Стеклов // Труды отд–ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1895. – 7, вып.2. – С. 10 – 21.

128. Стеклов В. А. Один случай движения твёрдого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // Труды отд–ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1896. – 8, вып.2. – С. 19 – 21.

129. Стеклов В. А. Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твёрдого тела, имеющего неподвижную точку / В. А. Стеклов // Труды отд–ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – 10, вып.1. – С. 1 – 3.

130. Узбек Е. К. Об интегрировании уравнений Кирхгофа в случае линейного инвариантного соотношения / Е. К. Узбек, Е. А. Данилейко // Механика твёрдого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 87 – 94.

131. Харламов А. П. Об удалении невидимых линий при построении плоских проекций сложных трёхмерных проекций / А. П. Харламов // Механика твёрдого тела. – 1993. – Вып. 25. – С. 70 – 75.

132. Харламов М. П. Понижение порядка в механических системах с симметрией / М. П. Харламов // Механика твёрдого тела. – 1976. – Вып. 8. – С. 4 – 18.

133. Харламов М. П. О построении аксоидов пространственного движения твёрдого тела / М. П. Харламов // Механика твёрдого тела. – 1980. – Вып. 12. – С. 3 – 8.

134. Харламов М. П. Об одном классе движения гиростата / М. П. Харламов // Механика тввёрдого тела. – 1983. – Вып. 15. – С. 47 – 56.
135. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела / М. П. Харламов – Л.: Издат-во Ленингр.ун-та, 1988. – 200 с.
136. Харламов М. П. Обобщение 4-го класса Аппельпорта: области существования движений и разделение переменных / М. П. Харламов // Нелинейная динамика. – 2006. – 2, № 4, – С. 453 – 472.
137. Харламов М. П. Построение полного решения одной задачи динамики твёрдого тела / М. П. Харламов, Е. К. Сергеев // Механика твёрдого тела. – 1982. – Вып. 14. – С. 33 – 38.
138. Харламов П. В. Об уравнении движения тяжелого тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикладная математика и механика. – 1963. – 27, вып. 4. – С. 703 – 707.
139. Харламов П. В. О движении жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью / П. В. Харламов // Журнал прикл. математики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17 – 29.
140. Харламов П. В. Кинематическое истолкование одного решения задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Докл. АН СССР. – 1964. – 158, № 5. – С. 1048 – 1050.
141. Харламов П. В. Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1964. – 28, вып. 1. – С. 158 – 159.
142. Харламов П. В. О решениях уравнений динамики твёрдого тела / П. В. Харламов // Прикл. математика и механика. – 1965. – 29, вып. 3. – С. 567 – 572.
143. Харламов В.П. Лекции по динамики твёрдого тела / П. В. Харламов. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
144. Харламов В.П Об уравнениях движения системы твёрдых тел / П. В. Харламов // Механика твёрдого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52 – 73.

145. Харламов П. В. Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений / П. В. Харламов // Механика твёрдого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15 – 24.
146. Харламов П. В. Об алгебраических инвариантных соотношениях уравнений движений твёрдого тела, имеющего неподвижную точку / П. В. Харламов // Механика твёрдого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 25 – 33.
147. Харламов П. В. Об одном новом решении задачи о движении тяжелого гиростата / П. В. Харламов, Л.М. Ковалёва // Механика твёрдого тела. – 1970. – Вып. 2. – С. 3 – 8.
148. Харламова Е. И. Сведение задачи о движении тяжелого твёрдого тела, имеющего неподвижную точку, к одному уравнению. Новое частное решение этой задачи / Е. И. Харламова // Прикл. математика и механика. – 1966. – 30, вып. 4. – С. 784 – 788.
149. Харламова Е. И. Кинематическое истолкование одного движения тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова // Прикл. математика и механика. – 1968. – 32, вып. 2. – С. 258 – 305.
150. Харламова Е. И. О линейном инвариантном соотношении уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова // Механика твёрдого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 5 – 12.
151. Харламова Е. И. О каноническом уравнении движения тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова // Механика твёрдого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 102 – 107.
152. Харламова Е. И. Сведение задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку, к одному дифференциальному уравнению / Е. И. Харламова // Механика твёрдого тела. – 1969. – Вып. 1. – С. 107 – 116.
153. Харламова Е. И. О двух решениях интегродифференциального уравнения задачи о движении твёрдого тела с неподвижной точкой / Е. И. Харламова // Механика твёрдого тела. – 1971. – Вып. 3. – С. 69 – 74.

154. Харламова Е. И. О безнутационных движениях твёрдого тела, имеющего неподвижную точку / Е. И. Харламова, Г. В. Горр // Механика твёрдого тела. – 1976. – Вып. 8. – С. 23 – 31.
155. Харламова Е. И. Уравнения движений гиростата в ньютоновском поле сил / Е. И. Харламова, Л.М. Ковалева // Механика твёрдого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 92 – 98.
156. Харламова Е. И. Исследование решения В.А. Стеклова уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку / Е.И. Харламов, Г.В. Мозалевская // Матем. физика. – 1968. – Вып. 5. –С 194 – 202.
157. Харламова Е. И. Интегродифференциальные уравнения динамики твёрдого тела / Е. И. Харламова, Г.В. Мозалевская – К.: Наук.думка, 1986. – 296 с.
158. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твёрдого тела в жидкости. Статья первая /С. А. Чаплыгин // Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1894. – 6, вып. 2. – С. 20 – 42.
159. Чаплыгин С. А. О некоторых случаях движения твёрдого тела в жидкости. Статья вторая /С. А. Чаплыгин // Матем. сборник Кружка любителей матем. наук. – 1897. – 20, вып. 1. – С. 115 – 170; вып. 2. – С. 173 – 246.
160. Чаплыгин С. А. Новые случаи вращения тяжелого твёрдого тела, подпёртого в одной точке /С. А. Чаплыгин // Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1901. – 10, вып. 2. – С. 32 – 34.
161. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о движении твёрдого тела в жидкости /С. А. Чаплыгин // Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1903. – 11, вып. 2. – С. 7 – 10.
162. Чаплыгин С. А. Новое частное решение задачи о вращении тяжелого твёрдого тела вокруг неподвижной точки /С. А. Чаплыгин // Труды отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1904. – 12, вып. 2. – С. 1 – 4.

163. Щетинина Е. К. Об асимптотически-прецессионных движениях сферического гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Е. К. Щетинина // Докл. НАН Украины. – 2005. – № 12. – С. 63 – 70.
164. Щетинина Е. К. О регулярной процессии гиростата относительно наклонной оси в задаче о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил / Е. К. Щетинина // Нелинейные колебания. – 2006. – 9, № 1. _ С. 133 – 144.
165. Clebsch A. Über die Bevegung eines Ellipsoides in einer tropfaber Flüssigkeit / A. Clebsch // J. reine und angew.Math. – 1856/ – 52, H. 2. – S. 103 – 132.
166. Clebsch A. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit / A. Clebsch // Math. Ann. – Leipzig, 1871 – B. 3. – S. 238 – 262.
167. D’Alembert J. Recherches sun la precession des equinoxes, et sur la nutation de l’axe de la Terre, dans le systeme Newtonien / J. D’Alembert – Acad. Paris. – 1749. – 184 p.
168. Darboux G. Sur le mouvement d’un corps pesant de revolution, fixe par un point de son axe / G. Darboux // C. r. Acad. sci. – 1885. – 101 – P. 115 – 119.
169. Darboux G. Sur la theorie de Poinsot et sur des mouvements correspondants a la meme polhodie / G. Darboux // C. r. sci. – 1885. – 101 – P. 1555 – 1561.
170. Euler L. Recherches sur la precession des equinoxes, et sur la nutation de l’axe de la Terre / L.Euler // Histoire de l’Academie Royale des Sciences, Berlin. – 1749 – 1751. – P. 289 – 295.
171. Euler L. Recherches sur la connaissance mècanicque des corps / L. Euler // Histoire de l’Academie Royale des Sciences, Berlin. – 1758 – 1765. – 16. – P. 131 – 153.
172. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico / G. Grioli // Ann. mat. pura et appl. – 1947. – S. 4. – 26, f. 3–4. – P. 271 –281.

173. Hess W. Über die Eulerchen Bewegungsgleichungen und über eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren schweren Körpers um einen festen Punkt / W. Hess // Math . Ann. – 1890. – 37 , H. 2. –S. 153–181.
174. Husson E. Recherche des integrales algebriques dans le movement d'un solide pesant autour d'un point fixe / E. Husson // Ann. Fac. sci Univ .Toulouse ,Serie 2 . – 1906.– 8. – P. 73–152.
175. Husson E. Sur un theorem de M. Poincaré relativement au movement d'un solide pesant / E. Husson//Acta math. – 1908. – 31. – P.71 – 88.
176. Jacobi C.G.J. Sur la rotation d'un corps / C.G.J. Jacobi // Gesammelte Werke. – 2. – Berlin. – 1882. – S. 289 – 352.
177. Jacobi C.G.J. Second memoire sur la rotation d'un corps non soumis á des forces accélératrices/ C.G.J Jacobi // Gesammelte Werke. – 2. – Berlin. – 1882. – S. 427 – 467.
178. Kirchhoff G.R. Über die Bewegung eines Rötation korpers in einer Flüssigkeit / G.R. Kirchhoff // J. fur die reine und angew. Math. – 1870. – 71. – S. 237 – 262.
179. Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differenzial gleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt / N. Kowalewski // Math. Ann. – 1908. – 65. – S. 528 – 537.
180. Levi – Civita T. Sur la recherché des solutions partikuliéres des systems différentielles et sur les mouvements stationnaires / T. Levi – Civita // Prace. Matém. Fizyeznych. – 1906. – 17. – P. 1 – 40.
181. Liouville J. Développments sur un chapitre de la Mécanique de Poisson / J. Liouville // J. math. pures et appl. – 1858. – 3. – P. 1 – 25.
182. Liouville R. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini / R. Liouville // C. r. Acad. sci. – 1896. – P. 874 – 876.
183. Liouville R. Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points / R. Liouville // Acta math. – 1897. – 20. – P. 239 – 284.

184. Poinsot L. Théorie nouvelle de la rotation des corps / L.Poinsot // J. math. pures et appl. – 1851. – 16. – P. 9 – 130; P. 289 – 336.

185. Poisson S.D. Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant / S.D. Poisson // Mém, Acad. sci. – 1832. – 11. – P. 521 – 581.

186. Staude O. Über permanente Rotationsaxen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt / O.Staude // J. rein und angew. Math. – 1894. – 113, H. 4. – S. 318 – 334.

187. Thomson W. On the forces experienced by solid immersed in a moving liquid / W. Thomson // Proc. Roy Soc. Edinburg. – 1870. 3. – P. 384 – 390.

188. Thomson W. On the motion of rigid solids in a liquid circulating irrotationally through perforations in them or in any fixed solid / W. Thomson // Proc. Roy Soc. Edinburg. – 1872. – 7. – P. 668 – 674.

189. Volterra V. Sur la theorie des variations des latitudes / V. Volterra // Acta. Math. – 1899. – 22. – P. 201 – 358.

190. Yehia H. M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations / H. M. Yehia // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – 5, № 5. – P. 747 – 754.

191. Yehia H. M. On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, II: A new form of the equations of motion of a rigid body in an ideal incompressible fluid / H. M. Yehia // J. theoretical and applied mechanics. – 1986. – 5, № 5. – P. 755 – 762.