НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КАСІРЕНКО ТЕТЯНА МИКОЛАЇВНА

УДК 517.956.2

НЕРЕГУЛЯРНІ ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
МУРАЧ Олександр Олександрович,
Інститут математики НАН України, м. Київ,
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ЛОПУШАНСЬКА Галина Петрівна,
Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,
професор кафедри диференціальних рівнянь;

доктор фізико-математичних наук, доцент
ЛОСЬ Валерій Миколайович,
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського", м. Київ,
доцент кафедри прикладної математики.

Захист дисертації відбудеться 25 вересня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "15" серпня 2018 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук,
професор **ПЕЛЮХ Г. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертація присвячена науковій проблемі побудови теорії загальних (взагалі кажучи, нерегулярних) еліптичних крайових задач у класах функціональних просторів Хермандера.

Актуальність теми. Теорію еліптичних крайових задач у соболєвських просторах було побудовано в 1950 – 1970 рр. зусиллями відомих математиків С. Агмона, А. Дугліса і Л. Ніренберга, Ю. М. Березанського, С. Г. Крейна і Я. А. Ройтберга, Ф. Браудера, Л. Р. Волевича, Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса, Ж. Петре, В. А. Солоннікова, Л. Хермандера, М. Шехтера та інших. Центральний результат цієї теорії полягає у тому, що загальна еліптична крайова задача є нетеровою у парах відповідних просторів Соболєва, а її розв'язки допускають апріорні оцінки у цих просторах. Він має різні важливі застосування, насамперед до дослідження регулярності розв'язків задачі.

Проте для низки математичних задач (наприклад, теореми про вкладення просторів, теореми про регулярність розв'язків рівнянь з частинними похідними) потрібні шкали функціональних просторів, градуйовані більш тонко, ніж простори Соболєва. У цьому зв'язку Л. Хермандер у 1963 р. увів і дослідив широкий клас функціональних просторів, для яких регулярність розподілів характеризується не числом (як у просторах Соболєва), а досить загальною ваговою функцією, залежною від частотних змінних. Л. Хермандер навів застосування уведених ним просторів до диференціальних рівнянь з частинними похідними. Однак, досить тривалий час простори Хермандера не використовували систематично у теорії крайових задач, оскільки не було виділено досить широких класів цих просторів, які б допускали коректне означення на гладких многовидах. Окрім того, бракувало зручних аналітичних методів для роботи з просторами Хермандера.

Ситуація кардинально змінилася у 2005 – 2010 рр., коли В. А. Михайлець і О. О. Мурач виділили досить широкі класи гільбертових просторів Хермандера, що отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар соболєвських просторів і допускають коректне означення на многовидах. Один з таких класів просторів Хермандера — уточнена соболєвська шкала, для якої В. А. Михайлецю і О. О. Мурачу вдалося побудувати теорію розв'язності еліптичних крайових задач та еліптичних систем на многовидах. Інтерполяція з функціональним параметром є ключовим і зручним методом дослідження у цій теорії. Згодом її доповнили у своїх кандидатських дисертаціях Т. М. Зінченко, А. В. Аноп та І. С. Чепурухіна стосовно інших сімей еліптичних крайових задач та більш широких класів просторів Хермандера. Втім, ця теорія ще не є завершеною.

Так, частину її результатів встановлено лише для регулярних еліптичних крайових задач. Окрім того, не досліджували в класах просторів Хермандера еліптичні задачі з крайовими умовами вищих порядків, тобто еліптичні задачі, для яких максимум порядків крайових умов більший за порядок еліптичного рівняння або рівний йому. Такі задачі зустрічаються, наприклад, в акустиці, гідродинаміці і теорії випадкових процесів. Ці задачі є нерегулярними еліптичними, тому для них класична формула Гріна не має місця, що істотно ускладнює їх дослідження. Більше того, для еліптичних задач з крайовими умовами вищих порядків класична теорія у соболєвських просторах не була побудована у тій же повноті, що і для регулярних еліптичних крайових задач. Це, зокрема, стосується відомих теорем Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса.

В останні десятиліття простори Хермандера та різні їх узагальнення знаходять важливі застосування не лише у теорії диференціальних рівнянь, а і в математичному аналізі, теорії інтегральних рівнянь, теорії випадкових процесів. Про це свідчать монографії В. Г. Маз'ї і Т. О. Шапошнікової (2009), В. А. Михайлеця і О. О. Мурача (2010, 2014), Ф. Нікола і Л. Родіно (2010), Б. П. Панеяха (2000), О. І. Степанця (2002), Ґ. Трібеля (2001), Н. Якоба (2001, 2002, 2005).

З огляду на сказане, побудова теорії загальних еліптичних крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера є актуальною математичною проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконано у відділі нелінійного аналізу Інституту математики НАН України згідно із загальним планом у рамках науково-дослідної теми «Дробове числення, неархімедів та спектральний аналіз у задачах теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики» (номер державної реєстрації 0116U003127).

Метою дослідження дисертаційної роботи є побудова теорії загальних (взагалі кажучи, нерегулярних) еліптичних крайових задач у класах гільбертових функціональних просторів Хермандера.

Об'єктом дослідження є загальні еліптичні крайові задачі та функціональні гільбертові простори Хермандера, придатні для дослідження цих задач.

Предметом дослідження є характер розв'язності загальних еліптичних крайових задач і властивості їх узагальнених розв'язків у відповідних парах просторів Хермандера.

Завдання дослідження:

1. Дослідити характер розв'язності загальної еліптичної крайової задачі у просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу.

2. Встановити локальну апріорну оцінку узагальнених розв'язків досліджуваної задачі у розширеній соболєвській шкалі.

3. Дослідити локальну регулярність цих розв'язків у просторах Хермандера і отримати нові достатні умови неперервності їх узагальнених частинних похідних довільно вибраного порядку.

4. Дослідити характер розв'язності еліптичної за Лавруком задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах вищих порядків і встановити локальну апріорну оцінку її узагальнених розв'язків у просторах Хермандера.

5. Дослідити характер розв'язності та регулярність розв'язків загальної еліптичної крайової задачі у двобічній шкалі просторів Хермандера, модифікованих за Ройтбергом.

6. Встановити теорему типу Ліонса – Мадженеса про нетеровість загальної еліптичної задачі з крайовими умовами вищих порядків у просторах Соболєва і Хермандера з від'ємним або малим додатним числовим показником регулярності.

Методи дослідження. У дисертації використано методи теорії рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу та теорії функцій. Основним у роботі є метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у такому:

1. Доведено теореми про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі та породжені нею ізоморфізми у просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу.

2. Встановлено локальну апріорну оцінку узагальнених розв'язків досліджуваної задачі в розширеній соболєвській шкалі.

3. Доведено теорему про локальну регулярність цих розв'язків у просторах Хермандера і отримано нові достатні умови неперервності їх узагальнених частинних похідних довільно вибраного порядку.

4. Для еліптичної за Лавруком задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах вищих порядків доведено теореми про нетеровість, породжені ізоморфізми і локальну апріорну оцінку узагальнених розв'язків у просторах Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу.

5. Доведено теореми про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі у двобічній шкалі просторів Хермандера – Ройтберга, породжений нею повний набір ізоморфізмів і локальну регулярність її розв'язків у цих просторах.

6. Встановлено теорему типу Ліонса – Мадженеса про нетеровість загальної еліптичної задачі з крайовими умовами вищих порядків у просторах Соболєва і Хермандера з числовим показником регулярності $s \leq m + 1/2$, де m — максимум порядків крайових умов.

Результати, вказані у пп. 2, 3 і 5, є новими і для регулярних еліптичних крайових задач.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані в теорії рівнянь з частинними похідними, насамперед, еліптичних рівнянь, та спектральній теорії еліптичних диференціальних операторів.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дисертації та постановка задач належать науковому керівникові — доктору фізико-математичних наук О. О. Мурачу. Основні наукові результати, які винесено на захист, отримано здобувачкою самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включено лише ті результати, що належать дисертантці.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);

— семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);

— Тринадцятій міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна – 2015" (Київ, 1 – 3 квітня 2015 року);

— Міжнародній конференції з диференціальних рівнянь, присвяченій 110-й річниці Я. Б. Лопатинського (Україна, Львів, 20 – 24 вересня 2016 року);

— П'ятій міжнародній конференції молодих науковців з диференціальних рівнянь і застосувань, присвяченій Я. Б. Лопатинському (Україна, Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);

— П'ятнадцятій міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна – 2017" (Київ, 4 – 6 квітня 2017 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Україна, Київ, 7 – 10 червня 2017 року).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано в 10 наукових працях. Серед них 5 статей [1 – 5] — у фахових наукових виданнях, з яких 2 статті [1, 2] — в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus і Web of Science. Роботи [6 – 10] опубліковано у матеріалах міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською і англійською, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел, що налічує 192 найменування, і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи складає 170 сторінок друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У *першому* розділі обговорено об'єкт і основний метод дослідження. Об'єктом дослідження є загальна (взагалі кажучи, нерегулярна) еліптична крайова задача і пов'язані з нею гільбертові функціональні простори Хермандера. Основним методом дослідження служить інтерполяція з функціональним параметром пар гільбертових просторів. Ключова роль цього методу у дисертації зумовлена тим, що використані у ній класи просторів Хермандера отримуються інтерполяцією з функціональним параметром відповідних пар гільбертових просторів Соболєва. Найбільш широкий з цих класів — розширена соболєвська шкала — складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва.

Підрозділ 1.1 присвячений класу RO, до якого належить функціональний параметр, який служить показником регулярності для просторів Хермандера, використаних у дисертації. За означенням, клас RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha : [1,\infty) \to (0,\infty)$ таких, що $c^{-1} \leq \alpha(\lambda t)/\alpha(t) \leq c$ для довільних $t \geq 1$ і $\lambda \in [1,b]$, де числа $b > 1$ і $c \geq 1$ не залежать від t і λ (але можуть залежати α). Такі функції називають RO- (або OR-) змінними на нескінченності. Вони введені В. Г. Авакумовичем (V. G. Avakumović) у 1936 р. і повно вивчені (див. монографії Є. Сенети (1985) (додаток 1) і N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels (1989) (пп. 2.0 – 2.2)).

Клас RO допускає простий опис, а саме:

$$\alpha \in \mathrm{RO} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(t) = \exp\biggl(\beta(t) + \int_1^t \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\,d\tau\biggr) \ \text{для} \ t \geq 1,$$

де дійсні функції β і γ вимірні за Борелем і обмежені на півосі $[1,\infty)$.

RO-змінні та степеневі функції пов'язані між собою: для кожної функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ існують числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1}\lambda^{s_0} \leq \alpha(\lambda t)/\alpha(t) \leq c\,\lambda^{s_1} \quad \text{для усіх} \quad t \geq 1,\ \lambda \geq 1. \tag{1}$$

Цей зв'язок характеризують індекси Матушевської функції $\alpha \in \mathrm{RO}$:

$$\sigma_0(\alpha) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{виконується ліва частина нерівності (1)}\},$$
$$\sigma_1(\alpha) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{виконується права частина нерівності (1)}\}.$$

Важливим прикладом функцій з класу RO є неперервна функція $\alpha : [1,\infty) \to (0,\infty)$ така, що

$$\alpha(t) := t^s (\ln t)^{r_1} (\ln\ln t)^{r_2} \ldots (\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k \text{ разів}} t)^{r_k} \quad \text{при} \quad t \gg 1,$$

де числа $k \in \mathbb{N}$ і $s, r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ вибрано довільно; її індекси Матушевської дорівнюють s. Прикладом функції класу RO з різними індексами Матушевської служить така функція: $\alpha(t) := t^{\theta + \delta\sin(\ln\ln t)^r}$, якщо $t > e$, і

$\alpha(t) := t^{\theta}$, якщо $1 \le t \le e$; тут числа $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ і $r \in (0,1]$ вибрано довільно. Для цієї функції $\sigma_0(\alpha) = \theta - \delta$ і $\sigma_1(\alpha) = \theta + \delta$.

Покладемо $\mathrm{RO}_0 := \{\alpha \in \mathrm{RO} : \sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = 0\}$.

У п. 1.2 наведено означення і обговорено властивості просторів Хермандера H^{α}, використаних для дослідження еліптичних крайових задач. Ці простори означено спочатку на $\mathbb{R}^n$, а потім на обмеженій евклідовій області Ω, де задано задачу, та на межі Γ цієї області. У дисертації усі функції і розподіли є комплекснозначними і тому розглядаються комплексні функціональні простори. При цьому розподіли трактуються як антилінійні функціонали на просторі основних функцій.

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. За означенням, лінійний простір $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих на $\mathbb{R}^n$ розподілів w таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ локально інтегровне на $\mathbb{R}^n$ і задовольняє властивість

$$\|w\|^2_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi < \infty,$$

де $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$. Цей простір гільбертів і сепарабельний відносно норми $\|\cdot\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)}$. Він є гільбертовим ізотропним випадком просторів $\mathcal{B}_{p,k}$, введених і досліджених у монографії Л. Хермандера (1963).

Нехай Ω — довільна обмежена область в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \ge 2$. Припустимо, що її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є нескінченно гладким замкненим (компактним і без краю) орієнтовним многовидом вимірності $n-1$ (як звичайно, C^{∞}-структура на Γ індукована простором $\mathbb{R}^n$).

За означенням, лінійний простір $H^{\alpha}(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω всіх розподілів $w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ і наділений нормою

$$\|v\|_{H^{\alpha}(\Omega)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} :\, w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),\ w = v \ \text{в}\ \Omega \,\bigr\},$$

де $v \in H^{\alpha}(\Omega)$. Простір $H^{\alpha}(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний.

Лінійний простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається, коротко кажучи, з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах дають елементи простору $H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$. Дамо детальне означення. Довільно виберемо скінченний атлас із C^{∞}-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \lambda$. Тут відкриті множини $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda$ складають покриття многовиду Γ. Виберемо також функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \lambda$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$.

За означенням, лінійний простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів h на Γ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$. Тут $(\chi_j h) \circ \pi_j$ позначає зображення розподілу $\chi_j h$ у локальній карті π_j. Простір

$H^{\alpha}(\Gamma)$ наділений нормою

$$\|h\|_{H^{\alpha}(\Gamma)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \|(\chi_j h)\circ\pi_j\|^2_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{1/2}.$$

Він гільбертів і сепарабельний та з точністю до еквівалентності норм не залежить від зробленого вибору атласу і розбиття одиниці (В. А. Михайлець і О. О. Мурач, 2009).

Якщо $\alpha(t)\equiv t^s$ для деякого $s\in\mathbb{R}$, то $H^{\alpha}(G) =: H^{(s)}(G)$ є гільбертовим простором Соболєва порядку s на $G\in\{\mathbb{R}^n,\Omega,\Gamma\}$. Взагалі, $H^{(s_1)}(G)\hookrightarrow H^{\alpha}(G)\hookrightarrow H^{(s_0)}(G)$ для довільних чисел $s_1>\sigma_1(\alpha)$ і $s_0<\sigma_0(\alpha)$, причому обидва вкладення неперервні й щільні (а також компактні, якщо $G\in\{\Omega,\Gamma\}$). Клас функціональних просторів $\{H^{\alpha}(G):\alpha\in\mathrm{RO}\}$ називають розширеною соболєвською шкалою на G. Її ввели і дослідили В. А. Михайлець і О. О. Мурач (2009, 2010).

У дисертації показник регулярності для простору Хермандера $H^{\alpha}(G)$ часто набиратиме вигляду $\alpha(t)\equiv\varphi(t)t^s$, де $\varphi\in\mathrm{RO}$ і $s\in\mathbb{R}$. Для того, щоб не вказувати аргумент t у показнику будемо використовувати функціональний параметр $\varrho(t):=t$ аргументу $t\geq 1$ й записувати α у вигляді $\varphi\varrho^s$.

У випадку, коли $\varphi\in\mathrm{RO}_0$ і $s\in\mathbb{R}$, простір $H^{\varphi\varrho^s}(G)$ (тобто $H^{\alpha}(G)$, де $\alpha=\varphi\varrho^s$) позначаємо для зручності також через $H^{s,\varphi}(G)$. У цьому випадку виконуються неперервні вкладення $H^{(s+\varepsilon)}(G)\hookrightarrow H^{s,\varphi}(G)\hookrightarrow H^{(s-\varepsilon)}(G)$ для кожного $\varepsilon>0$; вони компактні, якщо $G\in\{\Omega,\Gamma\}$. З них випливає, що у класі просторів $\{H^{s,\varphi}(G): s\in\mathbb{R},\varphi\in\mathrm{RO}_0\}$ числовий параметр s задає основну (степеневу) регулярність розподілів, а функціональний параметр φ характеризує додаткову регулярність. Цей клас містить у собі уточнену соболєвську шкалу, введену і досліджену В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем (2005, 2006). Вона складається з просторів $H^{s,\varphi}(G)$, де $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$, а $\mathcal{M}$ — множина всіх вимірних за Борелем функцій $\varphi:[1,\infty)\to(0,\infty)$, які обмежені та відокремлені від нуля на кожному компакті і повільно змінюються за Й. Караматою на нескінченності. Остання властивість означає, що $\varphi(\lambda t)/\varphi(t)\to 1$ при $t\to\infty$ для кожного $\lambda>0$.

У п. 1.2 обговорено й інші властивості просторів Хермандера, серед яких теореми вкладення і теореми про сліди.

Підрозділ 1.3 присвячений методу інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів, його властивостям і застосуванню до розглянутих просторів Хермандера. Виклад цих питань наслідує в основному монографію В. А. Михайлеця і О. О. Мурача (2010). Зазначено, що кожний простір $H^{\alpha}(G)$, де $\alpha\in\mathrm{RO}$ і $G\in\{\mathbb{R}^n,\Omega,\Gamma\}$, є (з точністю до еквівалентності норм) результатом інтерполяції з відповідним функціональним параметром пари гільбертових соболєвських просторів $H^{(s_0)}(G)$ і $H^{(s_1)}(G)$, де числа $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ і $s_1 > \sigma_1(\alpha)$.

У п. 1.4 обговорено об'єкт дослідження дисертації — загальну (взагалі кажучи, нерегулярну) еліптичну крайову задачу

$$Au(x) \equiv \sum_{|\mu|\leq 2q} a_\mu(x) D^\mu u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$B_j u(x) \equiv \sum_{|\mu|\leq m_j} b_{j,\mu}(x) D^\mu u(x) = g_j(x), \quad x \in \Gamma, \quad j = 1, \ldots, q. \tag{3}$$

Тут A є лінійним диференціальним оператором на $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ довільного парного порядку $2q \geq 2$, а кожне B_j є крайовим лінійним диференціальним оператором на Γ довільного порядку $m_j \geq 0$. Їх коефіцієнти $a_\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $b_{j,\mu} \in C^\infty(\Gamma)$. Можливий випадок, коли $m := \max\{m_1, ..., m_q\} \geq 2q$. З огляду на це покладемо $r := \max\{2q, m+1\}$.

У дисертації припускаємо, що крайова задача (2), (3) є еліптичною в області Ω, тобто диференціальний оператор A є правильно еліптичним на $\overline{\Omega}$, а набір крайових диференціальних операторів $B := (B_1, \ldots, B_q)$ задовольняє умову Лопатинського щодо A на Γ.

Пов'яжемо з цією задачею лінійне відображення

$$(A, B) : u \mapsto (Au, Bu) = (Au,\, B_1 u, ..., B_q u), \quad \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}). \tag{4}$$

У дисертації досліджується продовження за неперервністю відображення (4) у відповідних парах просторів Хермандера.

Для опису області значень цього продовження нам потрібна така спеціальна формула Гріна:

$$(Au, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{r-2q} (D_\nu^{j-1} Au, w_j)_\Gamma + \sum_{j=1}^{q} (B_j u, h_j)_\Gamma =$$

$$= (u, A^+ v)_\Omega + \sum_{k=1}^{r} \left(D_\nu^{k-1} u, K_k v + \sum_{j=1}^{r-2q} R_{j,k}^+ w_j + \sum_{j=1}^{q} Q_{j,k}^+ h_j \right)_\Gamma$$

для довільних функцій $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q \in C^\infty(\Gamma)$. Тут $D_\nu := i\partial/\partial_\nu$, де i — уявна одиниця, а ν — орт внутрішньої нормалі до межі Γ області Ω, та через $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ позначено скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій квадратично інтегровних відповідно на Ω і Γ відносно міри Лебега, а надалі й розширення цих скалярних добутків за неперервністю. Як звичайно, A^{+} позначає диференціальний оператор, формально спряжений до A. Окрім того, усі $R^{+}_{j,k}$ і $Q^{+}_{j,k}$ є дотичними диференціальними операторами, формально спряженими відповідно до дотичних лінійних диференціальних операторів $R_{j,k} := R_{j,k}(x, D_\tau)$ і $Q_{j,k} := Q_{j,k}(x, D_\tau)$ відносно $(\cdot,\cdot)_\Gamma$. Останні узято із зображення крайових диференціальних операторів $D^{j-1}_\nu A$ і B_j у вигляді

$$D^{j-1}_\nu A(x,D) = \sum_{k=1}^{r} R_{j,k}(x,D_\tau) D^{k-1}_\nu, \quad B_j(x,D) = \sum_{k=1}^{r} Q_{j,k}(x,D_\tau) D^{k-1}_\nu.$$

Відмітимо, що $\operatorname{ord} R_{j,k} \le 2q + j - k$ і $\operatorname{ord} Q_{j,k} \le m_j - k + 1$, причому $R_{j,k} = 0$ при $k \ge 2q + j + 1$ і $Q_{j,k} = 0$ при $k \ge m_j + 2$. Кожне $K_k := K_k(x,D)$ — деякий крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} K_k \le 2q - k$ з коефіцієнтами класу $C^\infty(\overline{\Omega})$. Якщо $r = 2q$, то у розглянутій формулі Гріна і пов'язаних з нею формулах відсутні функції $w_1, \dots, w_{r-2q}$ і суми з індексом підсумовування j, що пробігає значення від 1 до $r - 2q$.

Беручи до уваги цю спеціальну формулу Гріна, розглянемо в області Ω таку крайову задачу:

$$A^{+} v = \omega \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{5}$$

$$K_k v + \sum_{j=1}^{r-2q} R^{+}_{j,k} w_j + \sum_{j=1}^{q} Q^{+}_{j,k} h_j = \theta_k \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad k = 1, ..., r. \tag{6}$$

Вона містить $r - q$ додаткових невідомих функцій $w_1, \dots, w_{r-2q}, h_1, \dots, h_q$ у крайових умовах і є формально спряженою до задачі (2), (3) відносно розглянутої формули Гріна. Зауважимо, що крайова задача (2), (3) еліптична тоді і тільки тоді, коли формально спряжена задача (5), (6) еліптична як крайова задача з додатковими невідомими функціями на межі області.

Основні результати дисертації викладено у її другому та третьому розділах.

У пп. 2.1 − 2.5 *другого* розділу дисертації досліджено характер розв'язності та властивості розв'язків загальної еліптичної крайової задачі (2), (3) у просторах Хермандера $H^\varphi(\Omega)$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$. На показник регулярності $\varphi \in \mathrm{RO}$ розв'язків $u \in H^\varphi(\Omega)$ цієї задачі накладаємо досить слабке обмеження $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$, яке гарантує існування лівих частин $B_j u$ крайових умов.

Позначимо через N лінійний простір усіх розв'язків $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ крайової задачі (2), (3) у випадку, коли $f = 0$ в Ω і кожне $g_j = 0$ на Γ. Позначимо також через $N_\star$ лінійний простір усіх розв'язків $(v, w_1, \dots, w_{r-2q}, h_1, \dots, h_q) \in$

$C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{r-q}$ формально спряженої крайової задачі (5), (6) у випадку, коли $\omega = 0$ в Ω і кожне $\theta_k = 0$ на Γ. Оскільки обидві задачі еліптичні в Ω, то простори N і $N_\star$ скінченновимірні.

Відображення (4) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$(A, B) : H^\varphi(\Omega) \to H^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{\varphi\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma) \qquad (7)$$

для кожного $\varphi \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$.

Теорема 2.1. *Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. Тоді обмежений оператор (7) нетерів. Його ядро дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$ таких, що*

$$\begin{gathered}(f, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{r-2q} (D_\nu^{j-1} f, w_j)_\Gamma + \sum_{j=1}^{q} (g_j, h_j)_\Gamma = 0 \\ \textit{для кожного} \quad (v, w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q) \in N_\star.\end{gathered} \qquad (8)$$

Індекс оператора (7) дорівнює $\dim N - \dim N_\star$ та не залежить від φ.

Якщо $N = \{0\}$ і $N_\star = \{0\}$, то оператор (7) здійснює ізоморфізм між просторами $H^\varphi(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$. У загальній ситуації правильні такі розклади цих просторів у прямі суми їх підпросторів:

$$H^\varphi(\Omega) = N \dotplus \bigl\{u \in H^\varphi(\Omega) : (u, w)_\Omega = 0 \ \text{ для всіх } \ w \in N\bigr\}, \qquad (9)$$

$$\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma) = G \dotplus \bigl\{(f, g) \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma) : \text{виконується (8)}\bigr\}; \qquad (10)$$

тут G — деякий підпростір простору $C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^q$ такий, що $\dim G = \dim N_\star < \infty$. Якщо $m \leq 2q - 1$, то можна покласти $G := N_\star$. Позначимо через P і Q косі проектори відповідно просторів $H^\varphi(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$ на другі доданки в сумах (9) і (10) паралельно першим доданкам. Ці проектори не залежать від φ.

Теорема 2.2. *Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. Тоді звуження відображення (7) на підпростір $P(H^\varphi(\Omega))$ є ізоморфізмом цього підпростору на $Q(\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma))$.*

Позначимо через $H^{m+1/2+}(\Omega)$ об'єднання усіх просторів $H^\alpha(\Omega)$ таких, що $\alpha \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\alpha) > m + 1/2$. Функцію $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ називаємо (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (2), (3) з правою частиною

$(f,g)\in\mathcal{D}'(\Omega)\times(\mathcal{D}'(\Gamma))^q$, якщо $(A,B)u=(f,g)$, де (A,B) — обмежений оператор (7). Тут, як звичайно, $\mathcal{D}'(\Omega)$ і $\mathcal{D}'(\Gamma)$ позначають лінійні топологічні простори усіх розподілів на Ω і Γ відповідно. Доведено таку локальну апріорну оцінку цього розв'язку.

Теорема 2.3. *Нехай параметри $\varphi\in\mathrm{RO}$ і $\lambda\in\mathbb{R}$ задовольняють нерівності $\sigma_0(\varphi)>m+1/2$ і $0<\lambda<\sigma_0(\varphi)-m+1/2$, а функції $\chi,\eta\in C^\infty(\overline{\Omega})$ задовольняють умову $\eta=1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Тоді існує число $c=c(\varphi,\lambda,\chi,\eta)>0$ таке, що для довільної функції $u\in H^{\varphi}(\Omega)$ виконується оцінка*

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi}(\Omega)}\leq c\,\bigl(\|\eta(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)}+\|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-\lambda}}(\Omega)}\bigr). \tag{11}$$

Тут c не залежить від u.

Якщо $0<\lambda\leq 1$, то у нерівності (11) можна узяти $\chi(A,B)u$ замість $\eta(A,B)u$. У випадку, коли $\chi=\eta=1$, нерівність (11) є глобальною апріорною оцінкою розв'язку u. У цьому випадку умову $\lambda<\sigma_0(\varphi)-m+1/2$ можна прибрати.

Досліджено також локальну регулярність узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (2), (3). Нехай V — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$ така, що $\Omega_0:=\Omega\cap V\neq\varnothing$. Покладемо $\Gamma_0:=\Gamma\cap V$ (можливий випадок, коли $\Gamma_0=\varnothing$). За означенням, лінійний простір $H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$, де $\alpha\in\mathrm{RO}$, складається з усіх розподілів $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ таких, що $\chi u\in H^{\alpha}(\Omega)$ для довільної функції $\chi\in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Gamma_0$. Аналогічно, лінійний простір $H^{\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ складається з усіх розподілів $h\in\mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi h\in H^{\alpha}(\Gamma)$ для довільної функції $\chi\in C^\infty(\Gamma)$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\Gamma_0$.

Теорема 2.4. *Нехай функція $u\in H^{m+1/2+}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (2), (3)*, праві частини якої задовольняють умову*

$$(f,g_1,\ldots,g_q)\in H^{\varphi\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)\times\prod_{j=1}^{q}H^{\varphi\varrho^{-m_j-1/2}}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) \tag{12}$$

для деякого $\varphi\in\mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\varphi)>m+1/2$. Тоді $u\in H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.

Для соболєвських просторів теореми 2.1 – 2.4 є результатами робіт С. Агмона, А. Дугліса і Л. Ніренберга (S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, 1959), Ф. Е. Браудера (F. E. Browder, 1959), М. Шехтера (M. Schechter, 1960), Ж. Петре (J. Peetre, 1961) та інших. Для уточненої соболєвської шкали версії цих теореми довели В. А. Михайлець і О. О. Мурач (2006, 2007), а для розширеної соболєвської шкали — А. В. Аноп і О. О. Мурач (2014) за припущення, що $m\leq 2q-1$.

Отже, теореми 2.1 – 2.4 є новими результатами у випадку $m\geq 2q$ (крайові умови вищих порядків). Окрім того, висновок теореми 2.1 про опис (8) області значень оператора (7) є новим результатом і у випадку $m \leq 2q-1$, якщо $m+1/2 < \sigma_0(\varphi) \leq 2q-1/2$. Теорема 2.3 є новим результатом як для регулярних, так і для нерегулярних еліптичних крайових задач (раніше було доведено лише глобальні апріорні оцінки розв'язків еліптичних крайових задач у просторах Хермандера). Теорема 2.4 є новим результатом також у випадку, коли $m \leq 2q-1$ і $m+1/2 < \sigma_0(\varphi) \leq 2q-1/2$, зокрема, — для задачі Діріхле, якщо $q-1/2 < \sigma_0(\varphi) \leq 2q-1/2$.

Як застосування просторів Хермандера встановлено достатню умову неперервності узагальнених частинних похідних (заданого порядку) розв'язків досліджуваної задачі.

Теорема 2.5. *Нехай ціле число* $p \geq 0$. *Припустимо, що функція* $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (2), (3), *праві частини якої задовольняють умову* (12) *для деякого функціонального параметра* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\varphi) > m+1/2$ *і* $\int_1^\infty t^{2p+n-1}\varphi^{-2}(t)dt < \infty$. *Тоді* $u \in C^p(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

У пп. 2.6 і 2.7 досліджено еліптичну за Б. Лавруком задачу з додатковими невідомими функціями у крайових умовах, що містять крайові оператори, порядки яких більші за порядок еліптичного рівняння або рівні йому. Для цієї задачі доведено теореми про нетеровість відповідного обмеженого оператора, породжені ізоморфізми і локальну апріорну оцінку розв'язків у просторах Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу.

У *третьому* розділі дисертації досліджено характер розв'язності і властивості розв'язків загальної еліптичної крайової задачі (2), (3) у просторах Хермандера $H^{\varphi}(\Omega)$ та їх модифікаціях за Я. А. Ройтбергом без обмеження $\sigma_0(\varphi) > m+1/2$, накладеного на показник регулярності φ у другому розділі.

У пп. 3.1 – 3.4 цю задачу досліджено у двобічній шкалі просторів Хермандера – Ройтберга $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$. Наведемо їх означення.

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Якщо $s \notin E_k := \{1/2, \dots, k-1/2\}$, то $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ є, за означенням, поповненням лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за нормою

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \|(D_\nu^{j-1}u)\restriction\Gamma\|^2_{H^{s-j+1/2,\varphi}(\Gamma)} \right)^{1/2}.$$

Тут $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) := H^{s,\varphi}(\Omega)$ при $s \geq 0$, а якщо $s < 0$, то $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ — гільбертів простір, дуальний до $H^{-s,1/\varphi}(\Omega)$ відносно розширення за неперервністю скалярного добутку в $L_2(\Omega)$. Простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ для $s \in E_k$ є, за означенням, результатом інтерполяції з числовим параметром 1/2 пари гільбертових просторів $H^{s\mp 1/2,\varphi,(k)}(\Omega)$.

У соболєвському випадку, коли $\varphi(t)\equiv 1$, простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ увів і дослідив Я. А. Ройтберг (1964, 1965). Для більш вузького, ніж RO_0, класу $\mathcal{M}$ повільно змінних функціональних параметрів φ цей простір ввели і дослідили В. А. Михайлець і О. О. Мурач (2008).

Якщо $s>k-1/2$, то $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)=H^{s,\varphi}(\Omega)$ з точністю до еквівалентності норм. Якщо $s<k-1/2$, то навіть $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)\not\subset\mathcal{D}'(\Omega)$. Простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$, де $s\in\mathbb{R}\setminus E_k$, допускає такий опис: лінійне відображення $T_k: u\mapsto\bigl(u,u\restriction\Gamma,\ldots,(D_\nu^{k-1}u)\restriction\Gamma\bigr)$, де $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізометричного лінійного оператора

$$T_k: H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)\to H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{k}H^{s-j+1/2,\varphi}(\Gamma)=:\Pi_{s,\varphi,(k)}(\Omega,\Gamma),$$

область значення якого складається з усіх векторів $(u_0,u_1,\ldots,u_k)\in\Pi_{s,\varphi,(k)}(\Omega,\Gamma)$ таких, що $u_j=(D_\nu^{j-1}u_0)\restriction\Gamma$ для кожного $j\in\{1,\ldots,k\}$ за умови $s>j-1/2$.

Відображення (4) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$(A,B): H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)\to H^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{q}H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma):= \qquad (13)$$
$$:=\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$$

для довільних $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathrm{RO}_0$.

Теорема 3.1. *Нехай $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathrm{RO}_0$. Тоді обмежений оператор* (13) *нетерів. Його ядро дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(f,g_1,\ldots,g_q)\in\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ таких, що*

$$(f_0,v)_\Omega+\sum_{j=1}^{r-2q}(f_j,w_j)_\Gamma+\sum_{j=1}^{q}(g_j,h_j)_\Gamma=0$$
$$\text{для кожного}\quad (v,w_1,\ldots,w_{r-2q},h_1,\ldots,h_q)\in N_\star,$$

де $(f_0,f_1,\ldots,f_{r-2q}):=T_{r-2q}f$ (якщо $r=2q$, то $f_0:=f$, а всі члени $(f_j,w_j)_\Gamma$ відсутні). Індекс оператора (13) *дорівнює* $\dim N-\dim N_\star$ *і тому не залежить від s і φ.*

Якщо $s>r-1/2$, то оператор (13) діє у (немодифікованих) просторах Хермандера. Тому у цьому випадку теорема 3.1 міститься у теоремі 2.1.

Нетерів оператор (13) породжує ізоморфізм між деякими підпросторами скінченної ковимірності просторів $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$. Набір цих ізоморфізмів є повним відносно числового параметра s, який пробігає всю дійсну вісь.

Позначимо через $H^{-\infty,(k)}(\Omega)$, де $k\in\mathbb{N}$, об'єднання всіх просторів $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$, де $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathrm{RO}_0$. Вектор $u\in H^{-\infty,(r)}(\Omega)$ називаємо (сильним) узагальненим за Ройтбергом розв'язком крайової задачі (2), (3) з правою частиною $(f,g)\in H^{-\infty,(r-2q)}(\Omega)\times(\mathcal{D}'(\Gamma))^q$, якщо $(A,B)u=(f,g)$, де (A,B) — обмежений оператор (13).

У п. 3.4 досліджено локальну регулярність цих розв'язків у просторах Хермандера – Ройтберга. Нехай підмножини $\Omega_0\subset\Omega$ і $\Gamma_0\subset\Gamma$ такі, як у теоремі 2.4. Позначимо через $H^{s,\varphi,(k)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ лінійний простір усіх векторів $u\in H^{-\infty,(k)}(\Omega)$ таких, що $\chi u\in H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ для довільної функції $\chi\in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi\subset\Omega_0\cup\Gamma_0$. Звісно, $H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0):=H^{\varphi\varrho^s}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$.

Теорема 3.3. *Припустимо, що вектор* $u\in H^{-\infty,(r)}(\Omega)$ *є узагальненим за Ройтбергом розв'язком еліптичної крайової задачі* (2), (3), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f,g_1,\dots,g_q)\in H^{s-2q,\varphi,(r-2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)\times\prod_{j=1}^{q}H^{s-m_j-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$$

для деяких параметрів $s\in\mathbb{R}$ *і* $\varphi\in\mathrm{RO}_0$. *Тоді* $u\in H^{s,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.

Для просторів Соболєва – Ройтберга (коли $\varphi(t)\equiv1$), теореми 3.1 і 3.3 доведено Я. А. Ройтбергом (1964) для регулярних еліптичних крайових задач та ним і Ю. В. Костарчуком (1970, 1973) для нерегулярних еліптичних крайових задач. Для просторів Хермандера – Ройтберга ці теореми довели В. А. Михайлець і О. О. Мурач (2008) для регулярних еліптичних крайових задач та О. О. Мурач і І. С. Чепурухіна (2015) для нерегулярних еліптичних крайових задач таких, що $m\le 2q-1$. При цьому припускалося, що функціональний параметр φ пробігає більш вузький клас $\mathcal{M}$, ніж RO_0. Отже, теореми 3.1 і 3.3 є новими і для регулярних еліптичних крайових задач.

У заключному п. 3.5 доведено теорему типу Ліонса – Мадженеса про нетеровість еліптичної задачі (2), (3) з крайовими умовами вищих порядків у просторах Соболєва і Хермандера з числовим показником регулярності $s\le m+1/2$. Отже, тут $m\ge 2q$.

Нехай $s\le m+1/2$, $\varphi\in\mathcal{M}$ і $\lambda>m+1/2-2q$. Розглянемо лінійний простір

$$H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega):=\bigl\{u\in H^{s,\varphi}(\Omega):Au\in H^{(\lambda)}(\Omega)\bigr\},$$

наділений нормою графіка

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)} := \bigl(\,\|u\|^2_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \|Au\|^2_{H^{(\lambda)}(\Omega)}\bigr)^{1/2},$$

де Au розуміємо в сенсі теорії розподілів в області Ω. Цей простір гільбертів і залежить від коефіцієнтів диференціального оператора A.

Теорема 3.4. *За вказаних умов на параметри s, φ і λ множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в просторі $H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)$, а відображення* (4) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$(A,B) : H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega) \to H^{(\lambda)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) =: \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma). \tag{14}$$

Цей оператор нетерів. Його ядро дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (8). *Індекс оператора* (14) *дорівнює* $\dim N - \dim N_\star$ *та не залежить від s, φ і λ.*

Теорема 3.4 є новою і в соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv 1$.

ВИСНОВКИ

У дисертації досліджено характер розв'язності та властивості розв'язків загальної (взагалі кажучи, нерегулярної) еліптичної крайової задачі у просторах Хермандера $H^\varphi(\Omega)$, які утворюють розширену соболєвську шкалу, та їх модифікаціях за Ройтбергом. Порядки крайових умов є довільними; вони можуть бути більшими за порядок еліптичного рівняння, або рівними йому. На показник регулярності φ накладається досить слабке обмеження, яке гарантує існування лівих частин крайових умов.

Одержано такі основні результати:

1. Доведено теорему про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі у просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу, і теорему про породжені цією задачею ізоморфізми.

2. Встановлено локальну апріорну оцінку узагальнених розв'язків досліджуваної задачі в розширеній соболєвській шкалі.

3. Доведено теорему про локальну регулярність цих розв'язків у просторах Хермандера і отримано нову достатню умову неперервності їх узагальнених частинних похідних довільно вибраного порядку та нову достатню умову класичності узагальнених розв'язків задачі.

4. Для еліптичної за Лавруком задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах вищих порядків доведено теореми про нетеровість, породжені ізоморфізми і локальну апріорну оцінку розв'язків у просторах Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу.

5. Доведено теореми про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі у двобічній шкалі просторів Хермандера – Ройтберга, породжений нею повний набір ізоморфізмів і локальну регулярність її розв'язків у цих просторах.

6. Встановлено теорему типу Ліонса – Мадженеса про нетеровість загальної еліптичної задачі з крайовими умовами вищих порядків у просторах Соболєва і Хермандера з числовим показником регулярності $s \leq m + 1/2$, де m — максимум порядків крайових умов.

Результати, вказані у пп. 2, 3 і 5, є новими і для регулярних еліптичних крайових задач.

Основні положення дисертації відображено у таких публікаціях автора:

1. Anop A. V. Elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces / A. V. Anop, T. M. Kasirenko // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2016. — V. 22, № 4. — P. 295 — 310.

2. Касіренко Т. М. Еліптичні задачі з крайовими умовами високих порядків у просторах Хермандера / Т. М. Касіренко, О. О. Мурач // Український математичний журнал. — 2017. — Т. 69, № 11. — С. 1486 — 1504. (Переклад англійською: Kasirenko T. M. Elliptic problems with boundary conditions of higher orders in Hörmander spaces / T. M. Kasirenko, O. O. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — V. 69, № 11 (April). — P. 1727 — 1748.)

3. Касіренко Т. М. Еліптичні за Лавруком задачі з крайовими операторами вищих порядків в уточненій соболєвській шкалі / Т. М. Касіренко, І. С. Чепурухіна // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 161 — 203.

4. Касіренко Т. М. Загальні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера – Ройтберга / Т. М. Касіренко // Доповіді Національної академії наук України. — 2018. — № 2. — С. 3 — 11.

5. Аноп А. В. Нерегулярні еліптичні крайові задачі та простори Хермандера / А. В. Аноп, Т. М. Касіренко, О. О. Мурач // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 3. — С. 299 — 317.

6. Касіренко Т. М. Про некласичні крайові задачі для рівняння Пуассона у просторах Хермандера / Т. М. Касіренко // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2015" (1 – 3 квітня 2015, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2015. — С. 19 — 22.

7. Kasirenko T. M. On elliptic problems with boundary operators of arbitrary orders in the Hörmander spaces / T. M. Kasirenko // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, 20 – 24 September, 2016, Lviv, Ukraine. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. — P. 75 — 76.

8. Anop A. V. On general elliptic boundary value problems on the extended Sobolev scale / A. V. Anop, T. M. Kasirenko // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: Book of Abstracts. — Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 36 – 38.

9. Касіренко Т. М. Про загальні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера, модифікованих за Ройтбергом / Т. М. Касіренко // Матеріали XV міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2017" (4 – 6 квітня 2017, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2017. — С. 27 – 31.

10. Касіренко Т. М. Про еліптичні задачі з крайовими операторами довільних порядків у просторах Хермандера–Ройтберга / Т. М. Касіренко // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008), 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 87.

Анотації

Касіренко Т. М. Нерегулярні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

У дисертації досліджено характер розв'язності та властивості розв'язків загальної (взагалі кажучи, нерегулярної) еліптичної крайової задачі у гільбертових просторах Хермандера H^{φ}, які утворюють розширену соболєвську шкалу, та їх модифікаціях за Ройтбергом. Порядки крайових умов припускаються довільними; вони можуть бути більшими за порядок еліптичного рівняння або рівними йому.

Доведено теореми про нетеровість досліджуваної задачі і породжені нею ізоморфізми, локальну апріорну оцінку та локальну регулярність її узагальнених розв'язків у зазначених просторах Хермандера. При цьому на показник регулярності φ накладається досить слабке обмеження, яке гарантує існування лівих частин крайових умов. Як застосування просторів Хермандера отримано нову достатню умову неперервності узагальнених частинних похідних (довільно вибраного порядку) розв'язків досліджуваної задачі та нову умову класичності її узагальненого розв'язку. Для еліптичної за Лавруком задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах вищих порядків доведено теореми про нетеровість, породжені ізоморфізми та локальну апріорну оцінку узагальнених розв'язків у просторах Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу.

Доведено теореми про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі, породжений нею повний набір ізоморфізмів і локальну регулярність її розв'язків у двобічній шкалі просторів Хермандера – Ройтберга. Доведено теорему типу Ліонса – Мадженеса про нетеровість загальної еліптичної задачі з крайовими умовами вищих порядків у просторах Соболєва і Хермандера з числовим показником регулярності $s \leq m + 1/2$, де m — максимум порядків крайових умов.

Ключові слова: еліптична крайова задача, простір Хермандера, RO-змінна функція, нетерів оператор, інтерполяція з функціональним параметром, апріорна оцінка, регулярність розв'язку.

Касиренко Т. Н. Нерегулярные эллиптические краевые задачи в пространствах Хермандера. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

В диссертации исследованы характер разрешимости и свойства решений общей (вообще говоря, нерегулярной) эллиптической краевой задачи в гильбертовых пространствах Хермандера H^{φ}, которые образуют расширенную соболевскую шкалу, а также их модификациях по Ройтбергу. Порядки краевых условий предполагаются произвольными; они могут быть большими, чем порядок эллиптического уравнения, или равными ему.

Доказаны теоремы о нетеровости исследуемой задачи и порожденных ею изоморфизмах, локальной априорной оценке и локальной регулярности ее обобщенных решений в указанных пространствах Хермандера. При этом на показатель регулярности φ накладывается достаточно слабое ограничение, которое гарантирует существование левых частей краевых условий. В качестве приложения пространств Хермандера получены новое достаточное условие непрерывности обобщенных частных производных (произвольно выбранного порядка) решений исследуемой задачи и новое условие классичности ее обобщенного решения. Для эллиптической по Лавруку задачи с дополнительными неизвестными функциями в краевых условиях высших порядков доказаны теоремы о нетеровости задачи, порожденных изоморфизмах и локальной априорной оценке обобщенных решений в пространствах Хермандера, образующих уточненную соболевскую шкалу.

Доказаны теоремы о нетеровости общей эллиптической краевой задачи, порожденный ею полный набор изоморфизмов, и локальную регулярность ее решений в двусторонней шкале пространств Хермандера – Ройтберга. Доказана теорема типа Лионса – Мадженеса о нетеровости общей эллиптической задачи с краевыми условиями высших порядков в пространствах Соболева и Хермандера с числовым показателем регулярности $s \leq m+1/2$, где m — максимум порядков краевых условий.

Ключевые слова: эллиптическая краевая задача, пространство Хермандера, RO-меняющаяся функция, нетеров оператор, интерполяция с функциональным параметром, априорная оценка, регулярность решения.

Kasirenko T. M. Nonregular elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.02 — differential equations. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis elaborates the theory of solvability of general elliptic boundary-value problems in broad classes of the inner product Hörmander spaces H^{φ} and their modifications in the sense of Roitberg. Unlike previous works on this subject, we investigate elliptic problems with boundary conditions of arbitrary orders, which can be greater than or equal to the order of the elliptic equation. Besides, we make essentially weaker assumptions about the regularity index φ.

The dissertation consists of the annotation in Ukrainian and in English, introduction, three sections of its main part, conclusions, the list of references, and appendix. The introduction grounds the relevance of the research topic and gives a general description of the dissertation.

Section 1 discusses the object and the main method of the research. The object is general (generally speaking, nonregular) elliptic boundary-value problems, and the main method is the interpolation with a function parameter between Hilbert spaces. The classes of Hörmander spaces used in the dissertation are obtained by the interpolation with a function parameter between appropriate inner product Sobolev spaces. The extended Sobolev scale is the broadest among these classes; it consists of all Hilbert spaces that are interpolation ones between inner product Sobolev spaces. We also state a general elliptic boundary-value problem and discuss some relevant notions.

Section 2 investigates the character of solvability and properties of solutions of a general elliptic boundary-value problem in the Hörmander spaces H^{φ} that form the extended Sobolev scale. The regularity index φ is subject to a weak enough restriction, which ensures the existence of the left-hand sides of the boundary conditions. We prove theorems on the Fredholm property of the problem under investigation and on some isomorphisms generated by the problem, theorems on a local *a priori* estimate and the local regularity of its generalized solutions in the Hörmander spaces mentioned. As an application, we obtain a sufficient condition under which the generalized partial derivatives (of an arbitrarily chosen order) of the solutions to the problem are continuous and get a new sufficient condition for the generalized solutions to be classical. Investigating the Lawruk elliptic problem with additional unknown functions in boundary conditions of higher orders, we prove theorems on their Fredholm property, generated isomorphisms, and local *a priori* estimate of the solutions in Hörmander spaces that form the refined Sobolev scale.

Section 3 investigates the character of solvability and properties of solutions of a general elliptic boundary-value problem in a two-sided scale of the Hörmander spaces modified by Roitberg. We prove theorems on the Fredholm property of the problem under investigation, on a complete collection of isomorphisms generated by this problem, and on the local regularity of its generalized solutions in the Hörmander – Roitberg spaces. We prove a Lions – Magenes-type theorem on the Fredholm property of a general elliptic problem with boundary conditions of higher orders in Sobolev and Hörmander spaces with the number regularity index $s \leq m + 1/2$, where m is the maximum of the orders of the boundary conditions.

Key words: elliptic boundary-value problem, Hörmander space, RO-varying function, Fredholm operator, interpolation with a function parameter, a priori estimate, regularity of solution.

Підписано до друку . .2018. Формат А5. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. . Ум. друк. арк. .
Тираж пр. Зам. .

Інститут математики НАН України,
01601, м. Київ-4, вул. Терещенківська, 3.