Міністерство освіти і науки України

Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Касіренко Тетяна Миколаївна

УДК 517.956.2

ДИСЕРТАЦІЯ

НЕРЕГУЛЯРНІ ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

01.01.02 – диференціальні рівняння

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ______________________________ Т. М. Касіренко

Науковий керівник:
Мурач Олександр Олександрович
доктор фізико-математичних наук

Київ – 2018

АНОТАЦІЯ

Касіренко Т. М. Нерегулярні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 «Диференціальні рівняння» (111 – Математика). — Інститут математики Національної академії наук України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена науковій проблемі побудови теорії загальних (взагалі кажучи, нерегулярних) еліптичних крайових задач у класах функціональних просторів Хермандера.

Теорія еліптичних крайових задач у соболєвських просторах була створена в 1950 – 1970 рр. зусиллями таких відомих математиків як С. Агмон, А. Дугліс і Л. Ніренберг, Ю. М. Березанський, С. Г. Крейн і Я. А. Ройтберг, Ф. Браудер, Л. Р. Волевич, Ж.-Л. Ліонс і Е. Мадженес, Ж. Петре, В. А. Солонніков, Л. Хермандер, М. Шехтер та інших. Втім, шкала просторів Соболєва є недостатньо тонко градуйованою для низки задач, що виникають в аналізі і теорії рівнянь з частинними похідними.

У цьому зв'язку Л. Хермандер у 1963 р. ввів і дослідив широкий клас нормованих функціональних просторів, для яких показником регулярності розподілів служить досить загальна вагова функція, залежна від частотних змінних. Вона дозволяє більш тонко охарактеризувати регулярність розподілів, ніж числовий параметр, використаний для класичних просторів Соболєва. Л. Хермандер дав застосування цих просторів до дослідження регулярності розв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних. Однак, досить тривалий час простори Хермандера не використовували систематично у теорії крайових задач, оскільки не було виділено широких класів цих просторів,

які б допускали коректне означення на гладких многовидах. Окрім того, бракувало зручних аналітичних методів для роботи з просторами Хермандера.

Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач виділили досить широкі класи гільбертових просторів Хермандера, що отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар соболєвських просторів і допускають коректне означення на гладких многовидах. Один з таких класів просторів Хермандера — уточнена соболєвська шкала, для якої В. А. Михайлець і О. О. Мурач побудували теорію розв'язності еліптичних крайових задач та еліптичних систем на многовидах. Інтерполяція з функціональним параметром є ключовим і зручним методом дослідження у цій теорії. Згодом її доповнили у своїх кандидатських дисертаціях Т. М. Зінченко, А. В. Аноп та І. С. Чепурухіна стосовно інших сімей еліптичних крайових задач та більш широких класів просторів Хермандера. Втім, ця теорія ще не є завершеною.

Так, частину її результатів встановлено лише для регулярних еліптичних крайових задач. Окрім того, не були досліджені у просторах Хермандера еліптичні задачі з крайовими умовами, порядки яких більші за порядок еліптичного рівняння, або рівні йому. Такі задачі зустрічаються в акустиці, гідродинаміці і теорії випадкових процесів. Оскільки ці задачі є нерегулярними еліптичними, то для них класична формула Гріна не має місця, що істотно ускладнює їх дослідження. Більше того, для еліптичних задач з крайовими умовами вищих порядків класична теорія розв'язності у соболєвських просторах не була побудована у тій же повноті, що і для регулярних еліптичних крайових задач. Це, зокрема, стосується відомих теорем Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса.

Мета дисертаційної роботи — розробити теорію розв'язності загальних еліптичних крайових задач у широких класах гільбертових просторів Хермандера. На відміну від попередніх робіт за цією тематикою, у дисертації досліджено еліптичні задачі з крайовими умовами довільних порядків, які можуть бути більшими або рівними за порядок еліптичного рівняння. Окрім того, висуваються істотно більш слабкі припущення про показник регулярності для просторів Хермандера.

Дисертація складається з анотацій українською і англійською, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатку. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, зазначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок роботи з науковими темами й особистий внесок здобувача, вказано також де було апробовано та опубліковано результати дисертації.

У першому розділі обговорено об'єкт і основний метод дослідження. Об'єктом дослідження є загальні (взагалі кажучи, нерегулярні) еліптичні крайові задачі, а основним методом — інтерполяція з функціональним параметром пар гільбертових просторів. Використані у дисертації класи просторів Хермандера отримуються інтерполяцією з функціональним параметром деяких пар гільбертових просторів Соболєва. Найбільш широкий з цих класів — розширена соболєвська шкала — складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва. Обговорено й інші властивості просторів Хермандера, серед яких теореми вкладення і теорема про сліди. Наведено постановку загальної еліптичної крайової задачі, спеціальної формули Гріна для цієї задачі, формально спряженої задачі відносно вказаної формули Гріна та розглянуто відповідні приклади. Розглянуто випадок регулярної еліптичної крайової задачі, для якої правильна класична формула Гріна.

У розділі 2 досліджено характер розв'язності та властивості розв'язків загальної еліптичної крайової задачі у просторах Хермандера H^{φ}, які утворюють розширену соболєвську шкалу. Порядки крайових умов припускаються довільними; вони можуть бути більшими за порядок еліптичного рівняння, або рівними йому. На показник регулярності φ накладається досить слабке обмеження, яке гарантує існування лівих частин крайових умов. Доведено теореми про нетеровість досліджуваної задачі і породжені нею ізоморфізми, локальну апріорну оцінку та локальну регулярність її узагальнених розв'язків у зазначених просторах Хермандера. Як застосування цих результатів, отримано нову достатню умову неперервності узагальнених частинних похідних (довільно вибраного порядку) розв'язків досліджуваної задачі та нову умову класичності її узагальненого розв'язку. Для еліптичних задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах вищих порядків доведено теореми про нетеровість, породжені ізоморфізми та локальну апріорну оцінку узагальнених розв'язків у просторах Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу.

У розділі 3 досліджено характер розв'язності та властивості розв'язків загальної еліптичної крайової задачі у двобічній шкалі просторів Хермандера, модифікованих за Я. А. Ройтбергом. Доведено теореми про нетеровість досліджуваної задачі, породжений нею повний набір ізоморфізмів і локальну регулярність її узагальнених розв'язків у просторах Хермандера – Ройтберга. Встановлено теорему типу Ліонса – Мадженеса про нетеровість загальної еліптичної задачі з крайовими умовами вищих порядків у просторах Соболєва і Хермандера з числовим показником регулярності $s \leq m + 1/2$, де m — максимум порядків крайових умов.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані в теорії рівнянь з частинними похідними, насамперед, еліптичних рівнянь, та спектральній теорії еліптичних диференціальних операторів.

Ключові слова: еліптична крайова задача, простір Хермандера, RO-змінна функція, нетерів оператор, інтерполяція з функціональним параметром, апріорна оцінка, регулярність розв'язку.

Список публікацій здобувача за темою дисертації

1. Anop A. V. Elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces / A. V. Anop, T. M. Kasirenko // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2016. — V. 22, № 4. — P. 295 — 310.

2. Касіренко Т. М. Еліптичні задачі з крайовими умовами високих порядків у просторах Хермандера / Т. М. Касіренко, О. О. Мурач // Український математичний журнал. — 2017. — Т. 69, № 11. — С. 1486 — 1504. (Переклад англійською: Kasirenko T. M. Elliptic problems with boundary conditions of higher orders in Hörmander spaces / T. M. Kasirenko, O. O. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — V. 69, № 11 (April). — P. 1727 — 1748.)

3. Касіренко Т. М. Еліптичні за Лавруком задачі з крайовими операторами вищих порядків в уточненій соболєвській шкалі / Т. М. Касіренко, І. С. Чепурухіна // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 161 — 203.

4. Касіренко Т. М. Загальні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера–Ройтберга / Т. М. Касіренко // Доповіді Національної академії наук України. — 2018. — № 2. — С. 3 — 11.

5. Аноп А. В. Нерегулярні еліптичні крайові задачі та простори Хермандера / А. В. Аноп, Т. М. Касіренко, О. О. Мурач // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 3. — С. 299 — 317.

6. Касіренко Т. М. Про некласичні крайові задачі для рівняння Пуассона у просторах Хермандера / Т. М. Касіренко // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2015" (1 – 3 квітня 2015, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2015. — С. 19 — 22.

7. Kasirenko T. M. On elliptic problems with boundary operators of arbitrary orders in the Hörmander spaces / T. M. Kasirenko // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, 20 – 24 September, 2016, Lviv, Ukraine. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. — P. 75 — 76.

8. Anop A. V. On general elliptic boundary value problems on the extended Sobolev scale / A. V. Anop, T. M. Kasirenko // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: Book of Abstracts. — Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 36 – 38.

9. Касіренко Т. М. Про загальні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера, модифікованих за Ройтбергом / Т. М. Касіренко // Матеріали XV міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2017" (4 – 6 квітня 2017, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2017. — С. 27 – 31.

10. Касіренко Т. М. Про еліптичні задачі з крайовими операторами довільних порядків у просторах Хермандера–Ройтберга / Т. М. Касіренко // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008), 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 87.

ABSTRACT

Kasirenko T. M. Nonregular elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of the Candidate of Sciences in Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 “Differential equations” (111 – Mathematics), Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the scientific problem of the elaborating of the theory of general (generally speaking, nonregular) elliptic boundary-value problems in classes of function Hörmander spaces.

The theory of general elliptic boundary-value problems was created in 1950 – 1970 by the efforts of such well-known mathematicians as S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg, Yu. M. Berezansky, S. G. Krein, and Ya. A. Roitberg, F. Browder, L. Hörmander, J.-L. Lions and E. Magenes, J. Peetre, V. A. Solonnikov, M. Schechter, L. R. Volevich, and others. Nevertheless, the scale of Sobolev spaces is not finely calibrated enough for a number of problems appearing in mathematical analysis and the theory of partial differential equations.

In this connection, L. Hörmander in 1963 introduced and investigated a broad class of normed function spaces for which an arbitrary enough weight function depending on frequency variables serves as an index of regularity of distributions. This function parameter allows one to characterize the regularity of distributions more finely than the number parameter used for the classical Sobolev spaces. L. Hörmander gave applications of these spaces to the investigation of regularity of solutions to partial differential equations. However, the Hörmander spaces have not been used systematically in the theory of boundary-value problems for a long time because mathematicians have not selected broad classes of these spaces which

allow the correct definition on smooth manifolds. Besides, there have been a lack of convenient analytical methods for the working with the Hörmander spaces.

Recently V. A. Mikhailets and A. A. Murach have selected sufficiently broad classes of inner product Hörmander spaces that are obtained by the interpolation with a function parameter between Sobolev spaces and allow a correct definition on smooth manifolds. One of these classes of spaces is the refined Sobolev scale, for which V. A. Mikhailets and A. A. Murach have built a theory of solvability of elliptic boundary value problems and elliptic systems on manifolds. The interpolation with a function parameter is a key and convenient method of research in this theory. Subsequently, this theory was supplemented in PhD theses by T. M. Zinchenko, A. V. Anop and I. S. Chepurukhina with regard to other families of elliptic boundary-value problems and broader classes of Hörmander spaces. However, this theory has not completed yet.

Thus, a number of its results are established only for regular elliptic boundary-value problems. Besides, elliptic problems with boundary conditions whose orders are greater than or equal to the order of the elliptic equation have not been investigated in the Hörmander spaces. Such problems appear in acoustic, hydrodynamics and the theory of stochastic processes. Since these problems are nonregular elliptic, the classical Green formula does not hold for them, which essentially complicates their investigation. Moreover, for elliptic problems with boundary conditions of higher orders, the classical theory of solvability in Sobolev spaces has not been developed so completely as for regular elliptic boundary-value problems. Specifically, this concerns the well-known theorems by J.-L. Lions and E. Magenes.

The purpose of the thesis is to elaborate the theory of solvability of general elliptic boundary-value problems in broad classes of inner product Hörmander spaces. Unlike previous works on this subject, in the thesis we investigate elliptic problems with boundary conditions of arbitrary orders, which can be greater than or equal to the order of the elliptic equation. In addition, we make essentially weaker assumptions about the regularity index for Hörmander spaces.

The dissertation consists of the annotation in Ukrainian and in English, introduction, three sections of its main part, conclusions, the list of references, and appendix. The introduction grounds the relevance of the research topic, formulates the purpose, object, subject, task, and methods of the research, indicates the scientific novelty of the results obtained, their practical significance, the relation of the research to scientific programs, and the personal contribution of the applicant, and also points out where the results of the dissertation have been discussed and published.

Section 1 discusses the object and the main method of the research. The object is general (generally speaking, nonregular) elliptic boundary-value problems, and the main method is the interpolation with a function parameter between Hilbert spaces. The classes of Hörmander spaces used in the dissertation are obtained by the interpolation with a function parameter between certain inner product Sobolev spaces. The extended Sobolev scale is broadest among these classes; it consists of all Hilbert spaces that are interpolation ones between inner product Sobolev spaces. Other properties of the Hörmander spaces are discussed; among them are embedding theorems and a trace theorem. We state a general elliptic boundary-value problem, give the special Green formula, state formally adjoint problem with respect to this Green formula, and propose some relevant examples. We consider the case of a regular elliptic boundary-value problem, for which the classical Green formula holds true.

Section 2 investigates the character of solvability and properties of solutions of a general elliptic boundary-value problem in the Hörmander spaces H^{φ} that form the extended Sobolev scale. The orders of the boundary conditions are supposed to be arbitrary; they can be greater than or equal to the order of the elliptic equation. The regularity index φ is subject to a weak enough restriction, which ensures the existence of the left-hand sides of the boundary conditions. We prove theorems on the Fredholm property of the problem under investigation and on some isomorphisms generated by the problem, on a local *a priori* estimate and the local regularity of its generalized solutions in the Hörmander spaces mentioned. As an application of these results, we obtain a sufficient condition under which the generalized partial derivatives (of an arbitrarily chosen order) of the solutions to the problem are continuous and obtain a new sufficient condition for the generalized solutions to be classical. Investigating elliptic problems with additional unknown functions in boundary conditions of higher orders, we prove theorems on their Fredholm property, generated isomorphisms, and local *a priori* estimate of the solutions in the Hörmander spaces that form the refined Sobolev scale.

Section 3 investigates the character of solvability and properties of solutions of a general elliptic boundary-value problem in a two-sided scale of the Hörmander spaces modified by Ya. A. Roitberg. We prove theorems on the Fredholm property of the problem under investigation, on a complete collection of isomorphisms generated by this problem, and on the local regularity of its generalized solutions in the Hörmander – Roitberg spaces. We prove a Lions – Magenes-type theorem on the Fredholm property of a general elliptic problem with boundary conditions of higher orders in the Sobolev and Hörmander spaces with the number regularity index $s \leq m + 1/2$, where m is the maximum of the orders of the boundary conditions.

Appendix contains applicant's publications list concerning the topic of the thesis and informs where the results of the dissertation have been reported and discussed.

The practical significance of the results. Thesis is a theoretical investigation. Its results and the method for the obtaining of these results can be used in the theory of partial differential equations—first of all, elliptic equations—and in the spectral theory of elliptic differential operators.

Keywords: elliptic boundary-value problem, Hörmander space, RO-varying function, Fredholm operator, interpolation with a function parameter, a priori estimate, regularity of solution.

Applicant's publications list concerning the topic of the thesis

1. Anop A. V. Elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces / A. V. Anop, T. M. Kasirenko // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2016. — V. 22, № 4. — P. 295 — 310.

2. Kasirenko T. M. Elliptic problems with boundary conditions of higher orders in Hörmander spaces / T. M. Kasirenko, O. O. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — V. 69, № 11 (April). — P. 1727 — 1748.

3. Kasirenko T. M. Elliptic problems in the sense of Lawruk with boundary operators of higher orders in refined Sobolev scale / T. M. Kasirenko, I. S. Chepurukhina // Differential equations and related problems of analysis. Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2017. — V. 14, № 3. — P. 161 — 203.

4. Kasirenko T. M. General elliptic boundary-value problems in Hörmander–Roitberg spaces / T. M. Kasirenko // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. — 2018. — № 2. — P. 3 — 11.

5. Anop A. V. Nonregular elliptic boundary-value problems and Hörmander spaces / A. V. Anop, T. M. Kasirenko, A. A. Murach // Ukraïns'kyi Matematichnyi Zhurnal. — 2018. — V. 70, № 3. — P. 299 — 317.

6. Kasirenko T. M. On nonclassical boundary-value problems for Poisson equation in Hörmander spaces / T. M. Kasirenko // Proceedings of XIII Scientific-Practical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists "Shevchenkivska Vesna 2015" (April, 1 – 3, 2015, Kyiv, Ukraine). — Kyiv : Publishing and Printing Center "Kyiv University", 2015. — P. 19 — 22.

7. Kasirenko T. M. On elliptic problems with boundary operators of arbitrary orders in the Hörmander spaces / T. M. Kasirenko // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, 20 – 24 September, 2016, Lviv, Ukraine. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. — P. 75 — 76.

8. Anop A. V. On general elliptic boundary value problems on the extended Sobolev scale / A. V. Anop, T. M. Kasirenko // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: Book of Abstracts. — Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 36 — 38.

9. Kasirenko T. M. On general elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces modified by Roitberg / T. M. Kasirenko // Proceedings of XV Scientific-Practical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists "Shevchenkivska Vesna 2017" (April, 4 – 6, 2017, Kyiv, Ukraine). — Kyiv: Publishing and Printing Center "Kyiv University", 2017. — P. 27 – 31.

10. Kasirenko T. M. On elliptic problems with boundary operators of arbitrary orders in Hörmander-Roitberg spaces / T. M. Kasirenko // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008), June 7 – 10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017. — P. 87.

ЗМІСТ

ВСТУП

Дисертація присвячена науковій проблемі побудови теорії загальних (взагалі кажучи, нерегулярних) еліптичних крайових задач у класах функціональних просторів Хермандера.

Актуальність теми. Теорію еліптичних крайових задач у соболєвських просторах було побудовано в 1950 – 1970 рр. зусиллями відомих математиків С. Агмона, А. Дугліса і Л. Ніренберга [1, 107], Ю. М. Березанського, С. Г. Крейна і Я. А. Ройтберга [11, 12, 13], Ф. Браудера [120, 121], Л. Р. Волевича [18, 19], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [49, 149, 150], Ж. Петре [75], В. А. Солоннікова [87, 88, 89], Л. Хермандера [95], М. Шехтера [103, 104, 184, 185, 186] та інших. Центральний результат цієї теорії полягає у тому, що загальна еліптична крайова задача є нетеровою у парах відповідних просторів Соболєва, а її розв'язки допускають апріорні оцінки у цих просторах. Він має різні важливі застосування, насамперед до дослідження регулярності розв'язків задачі.

Проте для низки математичних задач (наприклад, теореми про вкладення просторів, теореми про регулярність розв'язків рівнянь з частинними похідними) потрібні шкали функціональних просторів, градуйовані більш тонко, ніж простори Соболєва. У цьому зв'язку Л. Хермандер у 1963 р. увів і дослідив широкий клас функціональних просторів, для яких регулярність розподілів характеризується не числом (як у просторах Соболєва), а досить загальною ваговою функцією, залежною від частотних змінних. Л. Хермандер [95, 96] навів застосування уведених ним просторів до диференціальних рівнянь з частинними похідними. Однак, досить тривалий час простори Хермандера не використовували систематично у теорії крайових задач, оскільки не було виділено досить широких класів цих просторів, які б допускали коректне означення на гладких многовидах. Окрім того, бракувало зручних аналітичних методів для роботи з просторами Хермандера.

Ситуація кардинально змінилася у 2005 – 2010 рр., коли В. А. Михайлець і О. О. Мурач виділили досить широкі класи гільбертових просторів Хермандера, що отримуються інтерполяцією з функціональним параметром пар соболєвських просторів і допускають коректне означення на многовидах. Один з таких класів просторів Хермандера — уточнена соболєвська шкала, для якої В. А. Михайлецю і О. О. Мурачу [54 — 61, 68 — 72, 73, 158, 159, 167] вдалося побудувати теорію розв'язності еліптичних крайових задач та еліптичних систем на многовидах. Інтерполяція з функціональним параметром є ключовим і зручним методом дослідження у цій теорії. Згодом її доповнили Т. М. Зінченко [23, 24, 25, 26, 28, 170, 192], А. В. Аноп [3, 4, 5, 6, 110] та І. С. Чепурухіна [98, 99, 100, 125, 169] стосовно інших сімей еліптичних крайових задач та більш широких класів просторів Хермандера (див. також їх кандидатські дисертації [7, 27, 101]). Втім, ця теорія ще не є завершеною.

Так, частину її результатів встановлено лише для регулярних еліптичних крайових задач. Окрім того, не досліджували в класах просторів Хермандера еліптичні задачі з крайовими умовами вищих порядків, тобто еліптичні задачі, для яких максимум порядків крайових умов більший за порядок еліптичного рівняння, або рівний йому. Такі задачі зустрічаються, наприклад, в акустиці, гідродинаміці і теорії випадкових процесів [16, 17, 42]. Ці задачі є нерегулярними еліптичними, тому для них класична формула Гріна не має місця, що істотно ускладнює їх дослідження. Більше того, для еліптичних задач з крайовими умовами вищих порядків класична теорія у соболєвських просторах не побудована у тій же повноті, що і для регулярних еліптичних крайових задач. Це, зокрема, стосується відомих теорем Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [49, 149, 150].

В останні десятиліття простори Хермандера та різні їх узагальнення знаходять важливі застосування не лише у теорії диференціальних рівнянь, а і в математичному аналізі, теорії інтегральних рівнянь, теорії випадкових процесів. Про це свідчать монографії В. Г. Маз'ї і Т. О. Шапошнікової [155], В. А. Михайлеця і О. О. Мурача [64, 165], Ф. Нікола і Л. Родіно [172], Б. П. Панеяха [175], О. І. Степанця [91], Ґ. Трібеля [190], Н. Якоба [141].

Отже, побудова теорії загальних еліптичних крайових задач у класах просторів Хермандера є актуальною науковою проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконано у відділі нелінійного аналізу Інституту математики НАН України згідно із загальним планом у рамках науково-дослідної теми «Дробове числення, неархімедів та спектральний аналіз у задачах теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики» (номер державної реєстрації 0116U003127).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є побудова теорії загальних (взагалі кажучи, нерегулярних) еліптичних крайових задач у класах гільбертових функціональних просторів Хермандера.

Об'єктом дослідження є загальні еліптичні крайові задачі та функціональні гільбертові простори Хермандера, придатні для дослідження цих задач.

Предметом дослідження є характер розв'язності загальних еліптичних крайових задач і властивості їх узагальнених розв'язків у відповідних парах просторів Хермандера.

Завдання дослідження:

1. Дослідити характер розв'язності загальної еліптичної крайової задачі у просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу.

2. Встановити локальну апріорну оцінку узагальнених розв'язків досліджуваної задачі у розширеній соболєвській шкалі.

3. Дослідити локальну регулярність цих розв'язків у просторах Хермандера і отримати нові достатні умови неперервності їх узагальнених частинних похідних довільно вибраного порядку.

4. Дослідити характер розв'язності еліптичної за Лавруком задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах вищих порядків і встановити локальну апріорну оцінку її узагальнених розв'язків у просторах Хермандера.

5. Дослідити характер розв'язності та регулярність розв'язків загальної еліптичної крайової задачі у двобічній шкалі просторів Хермандера, модифікованих за Ройтбергом.

6. Встановити теорему типу Ліонса – Мадженеса про нетеровість загальної еліптичної задачі з крайовими умовами вищих порядків у просторах Соболєва і Хермандера з від'ємним або малим додатним числовим показником регулярності.

Методи дослідження. У дисертації використано методи теорії рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу та теорії функцій. Основним у роботі є метод інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у такому:

1. Доведено теореми про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі та породжені нею ізоморфізми у просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу.

2. Встановлено локальну апріорну оцінку узагальнених розв'язків досліджуваної задачі в розширеній соболєвській шкалі.

3. Доведено теорему про локальну регулярність цих розв'язків у просторах Хермандера і отримано нові достатні умови неперервності їх узагальнених частинних похідних довільно вибраного порядку.

4. Для еліптичної за Лавруком задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах вищих порядків доведено теореми про нетеровість, породжені ізоморфізми і локальну апріорну оцінку узагальнених розв'язків у просторах Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу.

5. Доведено теореми про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі у двобічній шкалі просторів Хермандера – Ройтберга, породжений нею повний набір ізоморфізмів і локальну регулярність її розв'язків у цих просторах.

6. Встановлено теорему типу Ліонса – Мадженеса про нетеровість загальної еліптичної задачі з крайовими умовами вищих порядків у просторах Соболєва і Хермандера з числовим показником регулярності $s \leq m + 1/2$, де m — максимум порядків крайових умов.

Результати, вказані у пп. 2, 3 і 5, є новими і для регулярних еліптичних крайових задач.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані в теорії рівнянь з частинними похідними, насамперед, еліптичних рівнянь, та спектральній теорії еліптичних диференціальних операторів.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дисертації та постановка задач належать науковому керівникові — доктору фізико-математичних наук О. О. Мурачу. Основні наукові результати, які винесено на захист, отримано здобувачкою самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включено лише ті результати, що належать дисертантці.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);

— семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);

— Тринадцятій міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна-2015" (Київ, 1–3 квітня 2015 року);

— Міжнародній конференції з диференціальних рівнянь, присвяченій 110-й річниці Я. Б. Лопатинського (Україна, Львів, 20–24 вересня 2016 року);

— П'ятій міжнародній конференції молодих науковців з диференціальних рівнянь і застосувань, присвяченій Я. Б. Лопатинському (Україна, Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);

— П'ятнадцятій міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна-2017" (Київ, 4 – 6 квітня 2017 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Україна, Київ, 7 – 10 червня 2017 року).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано в 10 наукових працях. Серед них 5 статей [8, 34, 35, 36, 111] — у фахових наукових виданнях, з яких 2 статті [34, 111] — в журналах, що входять до міжнародних наукометричних баз даних Scopus і Web of Science. Роботи [37, 38, 39, 112, 145] опубліковано у матеріалах міжнародних наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотацій українською і англійською, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел, що налічує 192 найменування, і додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації. Повний обсяг роботи складає 170 сторінок друкованого тексту.

РОЗДІЛ 1
ОБ'ЄКТ І ОСНОВНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ

Як зазначалося у вступі, об'єктом дисертаційного дослідження є загальні еліптичні крайові задачі та пов'язані з ними гільбертові функціональні простори Хермандера, а основним методом дослідження є інтерполяція з функціональним параметром пар гільбертових просторів. Цим питанням, а також деяким суміжним до них, присвячено перший розділ дисертації.

1.1. RO-змінні функції

Означимо спочатку клас RO, до якого належать функціональні параметри, що служать показниками регулярності для просторів Хермандера, використаних у дисертації.

За означенням, клас RO складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\alpha : [1, \infty) \to (0, \infty)$, для яких існують числа $b > 1$ і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \alpha(\lambda t)/\alpha(t) \leq c \quad \text{для довільних} \quad t \geq 1 \quad \text{і} \quad \lambda \in [1, b]$$

(числа b і c можуть залежати від α). Такі функції називають RO- (або OR-) змінними на нескінченності. Вони введені В. Г. Авакумовичем [115] у 1936 р. і повно вивчені (див., наприклад, монографії [83] (додаток 1) і [116] (пп. 2.0 – 2.2)).

Зауважимо, що будь-яка функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ обмежена та відокремлена від нуля на кожному відрізку $[1, a]$, де $1 < a < \infty$ (див. [83, с. 87], лема П.1).

Клас RO допускає простий опис, а саме:

$$\alpha \in \mathrm{RO} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(t) = \exp\left(\beta(t) + \int_1^t \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\right) \text{ для } t \geq 1,$$

де дійсні функції β і γ вимірні за Борелем і обмежені на півосі $[1,\infty)$. Цей опис належить Й. Карамата [144] (див. також монографію [83] (додаток 1, теорема 1)).

У подальшому важлива така властивість класу RO: для кожної функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ існують числа $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, і $c_0, c_1 > 0$ такі, що

$$c_0\lambda^{s_0} \leq \frac{\alpha(\lambda t)}{\alpha(t)} \leq c_1\lambda^{s_1} \quad \text{для всіх} \quad t \geq 1, \;\; \lambda \geq 1 \tag{1.1}$$

(див. [83] (додаток 1, теорема 2)). Покладемо

$$\sigma_0(\alpha) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{ виконується ліва нерівність в (1.1)}\},$$

$$\sigma_1(\alpha) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{ виконується права нерівність в (1.1)}\}.$$

Числа $\sigma_0(\alpha)$ і $\sigma_1(\alpha)$ є відповідно нижнім і верхнім індексами Матушевської [154] функції $\alpha \in \mathrm{RO}$ (див. також монографію [116] (п. 2.1.2)). Звісно, $-\infty < \sigma_0(\alpha) \leq \sigma_1(\alpha) < \infty$.

Покладаючи $t := 1$ у властивості (1.1), бачимо, що кожна функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ є міжстепеневою, тобто

$$(s_0 < \sigma_0(\alpha),\; \sigma_1(\alpha) < s_1) \;\Rightarrow\; (d_0\lambda^{s_0} \leq \alpha(\lambda) \leq d_1\lambda^{s_1} \text{ для усіх } \lambda \geq 1), \tag{1.2}$$

де додатні числа d_0 і d_1 не залежать від λ.

Наведемо деякі характерні приклади функцій, RO-змінних на нескінченності.

Приклад 1.1. Розглянемо неперервну функцію $\alpha : [1,\infty) \to (0,\infty)$ таку, що

$$\alpha(t) := t^s(\ln t)^{r_1}(\ln\ln t)^{r_2}\ldots(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{k\text{ разів}} t)^{r_k} \quad \text{при} \quad t \gg 1. \tag{1.3}$$

Тут довільно вибрано ціле число $k \geq 1$ і дійсні числа $s, r_1, \ldots, r_k$. Функція α належить до класу RO і для неї $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = s$. Цей факт добре відомий [83, с. 50].

Взагалі, до класу RO належить будь-яка вимірна функція $\alpha : [1,\infty) \to (0,\infty)$, яка обмежена і відокремлена від нуля на кожному компакті і є правильно змінною на нескінченності за Й. Караматою [143]. Остання властивість значить, що $\alpha(\lambda t)/\alpha(t) \to \lambda^s$ при $t \to \infty$ для деякого $s \in \mathbb{R}$. Індекси Матушевської такої функції дорівнюють числу s, яке називають порядком змінення функції на нескінченності. У випадку, коли $s = 0$, функція α називається повільно змінною за Караматою на нескінченності. Правильно змінні функції широко застосовуються у математиці (див. монографії [83, 116]).

Позначимо через RO_0 клас усіх функцій $\alpha \in \mathrm{RO}$ таких, що $\sigma_0(\alpha) = \sigma_1(\alpha) = 0$. Відмітимо, що до класу RO_0 належить будь-яка неперервна функція $\alpha : [1,\infty) \to (0,\infty)$, повільно змінна на нескінченності за Караматою, зокрема, кожна функція вигляду (1.3) при $s = 0$.

Зауважимо, що існують функції з класу RO_0, які не еквівалентні (у слабкому сенсі) в околі нескінченності жодній функції, повільно змінній на нескінченності.

Приклад 1.2. Прикладом такої функції $\alpha \in \mathrm{RO}_0$ є функція $\alpha(t) := e^{h(\ln t)}$ аргументу $t \geq 1$, де h означено за формулами: $h(x) := 0$ при $x \in [0,1]$ і $h(x) := h(2^j) + (x - 2^j)^{1/2}$ при $x \in [2^j, 2^{j+1}]$ для будь-якого $0 \leq j \in \mathbb{Z}$. Це доведено в [116, с. 75] (твердження 2.2.8).

Розглянемо приклад функції класу RO, у якої індекси Матушевської різні.

Приклад 1.3. Нехай $\theta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ і $r \in (0,1]$. Покладемо

$$\alpha(t) := \begin{cases} t^{\theta+\delta\sin(\ln\ln t)^r} & \text{при } t > e, \\ t^{\theta} & \text{при } 1 \leq t \leq e. \end{cases}$$

Тоді $\alpha \in \mathrm{RO}$, причому $\sigma_0(\alpha) = \theta - \delta$ і $\sigma_1(\alpha) = \theta + \delta$ (див. [100], приклад 6).

1.2. Простори Хермандера

Нехай $\alpha \in \mathrm{RO}$. Дамо означення простору Хермандера H^α спочатку на $\mathbb{R}^n$, де ціле $n \geq 1$, а потім на евклідових областях та замкнених многовидах. Цей простір складається з розподілів (узагальнених функцій), які нам зручно трактувати як *анти*лінійні функціонали на відповідному просторі основних функцій. У дисертації усі функції і функціонали є, взагалі кажучи, комплекснозначними, і тому розглядаються комплексні лінійні простори.

За означенням, (комплексний) лінійний простір $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх повільно зростаючих на $\mathbb{R}^n$ розподілів w таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ локально інтегровне за Лебегом на $\mathbb{R}^n$ і задовольняє умові

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{w}(\xi)|^2\,d\xi < \infty,$$

де $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$ є згладженим модулем вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. Цей простір наділений скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha^2(\langle\xi\rangle)\,\widehat{w_1}(\xi)\,\overline{\widehat{w_2}(\xi)}\,d\xi$$

і відповідною нормою

$$\|w\|_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)} := (w, w)^{1/2}_{H^\alpha(\mathbb{R}^n)}$$

та є гільбертовим і сепарабельним відносно цієї норми.

Простір $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ — гільбертів ізотропний випадок просторів $\mathcal{B}_{p,k}$, введених і досліджених Ларсом Хермандером в [95] (п. 2.2) (див. також його монографію [96], п. 10.1). А саме, $H^\alpha(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_{p,k}$, якщо $p = 2$ і $k(\xi) = \alpha(\langle\xi\rangle)$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. У зазначених монографіях [95, 96] Л. Хермандер навів важливі застосування уведених ним просторів до питань про існування, єдиність і регулярність розв'язків рівнянь з частинними похідними, заданих у евклідових областях. Зауважимо, що у гільбертовому випадку $p = 2$ простори Хермандера збігаються з просторами, введеними і дослідженими Л. Р. Волєвичем і Б. П. Панеяхом [20] (§ 2).

Якщо $\alpha(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) =: H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ є гільбертів простір Соболєва порядку s.

Наслідуючи [66, 165], клас гільбертових сепарабельних просторів

$$\{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \tag{1.4}$$

називаємо розширеною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$. Він виділений та досліджений В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем у статтях [62, 66] і монографіях [64, 165] (п. 2.4.2).

Наведемо три властивості розширеної соболєвської шкали (1.4), які пов'язані з вкладеннями просторів. Ці властивості безпосередньо випливають з доведених Л. Хермандером теорем [95] (п. 2.2, відповідно теореми 2.2.2, 2.2.3 і 2.2.7).

Твердження 1.1. *Нехай α_1, $\alpha_2 \in \mathrm{RO}$. Якщо функція α_1/α_2 обмежена в околі нескінченності, то $H^{\alpha_2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n)$. Це вкладення щільне та неперервне. Зворотно, якщо для деякої відкритої непорожньої підмножини V простору $\mathbb{R}^n$ маємо включення*

$$\Big\{w \in H^{\alpha_2}(\mathbb{R}^n) :\, \operatorname{supp} w \subset V\Big\} \subset H^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n),$$

то функція α_1/α_2 обмежена в околі нескінченності.

Згідно з цим твердженням і формулою (1.2) отримаємо такий зв'язок шкали (1.4) з просторами Соболєва:

$$(s_0 < \sigma_0(\alpha),\ \sigma_1(\alpha) < s_1) \ \Rightarrow\ H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), \tag{1.5}$$

причому обидва вкладення неперервні й щільні.

Твердження 1.2. *Нехай α_1, $\alpha_2 \in \mathrm{RO}$, а C є компактною множиною в $\mathbb{R}^n$, яка має хоча б одну внутрішню точку. Тоді $\alpha_1(t)/\alpha_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$ тоді і лише тоді, коли справджується компактне вкладення*

$$\left\{w \in H^{\alpha_2}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \subset C\right\} \hookrightarrow H^{\alpha_1}(\mathbb{R}^n).$$

Тут ліва частина вкладення трактується як підпростір простору $H^{\alpha_2}(\mathbb{R}^n)$.

Третя властивість є версією теореми вкладення Хермандера [95] (теорема 2.2.7) для розширеної соболєвської шкали (1.4) і встановлює зв'язок останньої з просторами $C^p_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$, де ціле $p \geq 0$. За означенням, банахів простір $C^p_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх функцій $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, які мають обмежені та неперервні на $\mathbb{R}^n$ частинні похідні до порядку p включно. Цей простір наділений нормою

$$\|w\|_{C^p_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)} := \max_{|\mu| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\mu w(x)|; \tag{1.6}$$

де μ є мультиіндексом вимірності n.

Твердження 1.3. *Нехай $0 \leq p \in \mathbb{Z}$ і $\alpha \in \mathrm{RO}$. Якщо*

$$\int\limits_1^\infty t^{2p+n-1}\, \alpha^{-2}(t)\, dt < \infty, \tag{1.7}$$

то виконується неперервне вкладення $H^\alpha(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^p_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$. Зворотно, якщо для деякої відкритої непорожньої підмножини V простору $\mathbb{R}^n$ виконується вкладення

$$\left\{w \in H^\alpha(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \subset V\right\} \subset C^p(\mathbb{R}^n),$$

то α задовольняє умову (1.7).

Зауважимо, що для функції $k(\xi) \equiv \alpha(\langle\xi\rangle)$ нерівність (1.7) еквівалентна нерівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|\xi|)^{2p}}{k^2(\xi)}\, d\xi < \infty,$$

яка була використана Л. Хермандером [95] (теорема 2.2.7). Це доведено в [23, с. 1487].

Простори $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ і $H^{1/\varphi}(\mathbb{R}^n)$ взаємно дуальні (з рівністю норм) відносно продовження за неперервністю скалярного добутку в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (див. [95] (теорема 2.2.9)). Тут, звісно, $\varphi \in \mathrm{RO} \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathrm{RO}$. Як звичайно, $L_2(\mathbb{R}^n)$ позначає гільбертів простір усіх функцій, квадратично інтегровних на $\mathbb{R}^n$ відносно міри Лебега.

Нехай Ω — довільна обмежена область (тобто відкрита зв'язна непорожня множина) в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$. Припустимо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ цієї області є нескінченно гладким замкненим (тобто компактним і без краю) многовидом вимірності $n-1$. При цьому, як звичайно, вважаємо, що C^{∞}-структура на Γ індукована простором $\mathbb{R}^n$. Аналоги розширеної соболєвської шкали (1.4) для Ω і Γ будуються стандартним чином (див. [166, с. 4] і [63, с. 30]). Наведемо відповідні означення.

За означенням, лінійний простір $H^{\alpha}(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω всіх розподілів $w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ і наділений нормою

$$\|v\|_{H^{\alpha}(\Omega)} := \inf\bigl\{\, \|w\|_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)} :\, w \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n),\ w = v \ \text{ в } \ \Omega \,\bigr\}, \tag{1.8}$$

де $v \in H^{\alpha}(\Omega)$. Простір $H^{\alpha}(\Omega)$ гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми, оскільки він є факторпростором гільбертового сепарабельного простору $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ за підпростором

$$\bigl\{\omega \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp}\omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega\bigr\}. \tag{1.9}$$

Зауважимо, що норма (1.8) у просторі $H^{\alpha}(\Omega)$ породжена скалярним добутком

$$(u_1, u_2)_{H^{\alpha}(\Omega)} := (w_1 - \Pi w_1, w_2 - \Pi w_2)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.10}$$

Тут $u_j \in H^{\alpha}(\Omega)$, $w_j \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $u_j = w_j$ в Ω для кожного $j \in \{1, 2\}$, а Π є ортопроектором простору $H^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ на підпростір (1.9). Відмітимо, що права частина формули (1.10) не залежить від зазначеного вибору розподілів w_1 і w_2.

Множина $C^\infty(\overline{\Omega})$, яка складається зі звужень на $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ усіх функцій класу $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, є щільною у просторі $H^\alpha(\Omega)$. Це випливає зі щільності множини $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ пробних функцій у $H^\alpha(\mathbb{R}^n)$. Окрім того, виконується неперервне вкладення $H^\alpha(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Як звичайно, $\mathcal{D}'(\Omega)$ позначає лінійний топологічний простір усіх розподілів в Ω.

Зауважимо, що $H^\alpha(\Omega)$ є окремим ізотропним випадком гільбертових функціональних просторів, введених і досліджених Л. Р. Волєвичем і Б. П. Панеяхом [20] (§ 3).

Згідно з [166, с. 146], клас гільбертових функціональних просторів

$$\{H^\alpha(\Omega) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \tag{1.11}$$

називаємо розширеною соболєвською шкалою на Ω.

Якщо $\alpha(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^\alpha(\Omega) =: H^{(s)}(\Omega)$ є гільбертовим простором Соболєва порядку s. (У дисертації використовується досить поширене означення просторів Соболєва на евклідовій області, однакове як для додатного, так і для від'ємного порядку s; див. монографію Ґ. Трібеля [92, с. 384].)

Наведемо потрібні в дисертації властивості шкали (1.11), які стосуються вкладень просторів.

Твердження 1.4. *Нехай α_1, $\alpha_2 \in \mathrm{RO}$. Функція α_1/α_2 обмежена в околі нескінченності тоді і лише тоді, коли $H^{\alpha_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{\alpha_1}(\Omega)$. Це вкладення неперервне та щільне. Воно компактне тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1(t)/\alpha_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$*

Це твердження безпосередньо випливає з тверджень 1.1 і 1.2 (див. також [20] (теорема 7.4 і зауваження 8.1)).

На підставі твердження 1.4 та імплікації (1.2) отримаємо таку властивість:

$$(s_0 < \sigma_0(\alpha),\ \sigma_1(\alpha) < s_1) \ \Rightarrow\ H^{(s_1)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\Omega), \qquad (1.12)$$

причому обидва вкладення є компактними та щільними.

Твердження 1.5. *Нехай $0 \leq p \in \mathbb{Z}$ і $\alpha \in \mathrm{RO}$. Тоді нерівність* (1.7) *еквівалентна вкладенню $H^{\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{p}(\overline{\Omega})$, причому воно неперервне.*

Це твердження безпосередньо випливає з твердження 1.3. Як звичайно, банахів простір $C^{p}(\overline{\Omega})$ складається зі звужень на замкнену область $\overline{\Omega}$ усіх функцій $w \in C^{p}(\mathbb{R}^{n})$. Цей простір наділений нормою, яка означається за формулою (1.6), якщо у ній взяти $\mathbb{R}^{n}$ замість $\overline{\Omega}$.

Зауважимо, що у соболєвському випадку, коли $\alpha(t) \equiv t^{s}$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, твердження 1.5 є теоремою вкладення Соболєва:

$$s > p + n/2 \ \Leftrightarrow\ H^{(s)}(\Omega) \hookrightarrow C^{p}(\overline{\Omega}).$$

Перейдемо до просторів Хермандера на Γ. Лінійний простір $H^{\alpha}(\Gamma)$, де $\alpha \in \mathrm{RO}$, складається, коротко кажучи, з усіх розподілів на Γ, які в локальних координатах дають елементи простору $H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$. Дамо детальне означення. Довільно виберемо скінченний атлас із C^{∞}-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\pi_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, де $j = 1, \ldots, \lambda$. Тут відкриті множини $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\lambda\}$ складають покриття многовиду Γ. Виберемо також функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \lambda$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$.

За означенням, лінійний простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ складається з усіх розподілів h на Γ таких, що $(\chi_j h) \circ \pi_j \in H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ для усіх $j \in \{1, \ldots, \lambda\}$. Тут $(\chi_j h) \circ \pi_j$ є зображенням розподілу $\chi_j h$ у локальній карті π_j. Простір $H^{\alpha}(\Gamma)$ наділений скалярним добутком

$$(h_1, h_2)_{H^{\alpha}(\Gamma)} := \sum_{j=1}^{\lambda} ((\chi_j h_1) \circ \pi_j, (\chi_j\, h_2) \circ \pi_j)_{H^{\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})},$$

де $h_1, h_2 \in H^\alpha(\Gamma)$, і відповідною нормою

$$\|h\|_{H^\alpha(\Gamma)} := \left(\sum_{j=1}^{\lambda} \|(\chi_j h) \circ \pi_j\|^2_{H^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{1/2}.$$

Він гільбертів і сепарабельний відносно цієї норми та з точністю до еквівалентності норм не залежить від зробленого вибору атласу і розбиття одиниці (див. [63, с. 32] і [165, с. 139] (теорема 2.31)).

Множина $C^\infty(\Gamma)$ щільна в $H^\alpha(\Gamma)$, оскільки множина $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ щільна в просторі $H^\alpha(\mathbb{R}^{n-1})$. Окрім того, виконується неперервне вкладення $H^\alpha(\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Gamma)$. Як звичайно, $\mathcal{D}'(\Gamma)$ позначає лінійний топологічний простір усіх розподілів на многовиді Γ.

Щойно означені функціональні простори утворюють розширену соболєвську шкалу

$$\{H^\alpha(\Gamma) : \alpha \in \mathrm{RO}\} \tag{1.13}$$

на Γ. Вона містить гільбертову шкалу просторів Соболєва: якщо $\alpha(t) \equiv t^s$ для деякого $s \in \mathbb{R}$, то $H^\alpha(\Gamma) =: H^{(s)}(\Gamma)$ є гільбертовим простором Соболєва порядку s. Шкала (1.13) була введена та досліджена В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем у статті [63] і монографіях [64, 165] (п. 2.4.2).

Твердження 1.6. *Для шкали просторів* (1.13) *виконується твердження* 1.4, *якщо у ньому замінити* Ω *на* Γ.

Ця властивість безпосередньо випливає з тверджень 1.1 і 1.2. На підставі твердження (1.6) отримаємо таку властивість:

$$(s_0 < \sigma_0(\alpha),\ \sigma_1(\alpha) < s_1) \ \Rightarrow\ H^{(s_1)}(\Gamma) \hookrightarrow H^\alpha(\Gamma) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\Gamma), \tag{1.14}$$

причому обидва вкладення є компактними та щільними.

Твердження 1.7. *Нехай* $0 \leq p \in \mathbb{Z}$ *і* $\alpha \in \mathrm{RO}$. *Тоді нерівність*

$$\int_1^\infty t^{2p+n-2}\, \alpha^{-2}(t)\, dt < \infty \tag{1.15}$$

еквівалентна вкладенню $H^{\alpha}(\Gamma)\hookrightarrow C^{p}(\Gamma)$. *Воно неперервне.*

Ця властивість безпосередньо випливає з твердження 1.3. Як зазвичай, $C^{p}(\Gamma)$ позначає банахів простір усіх функцій $h:\Gamma\to\mathbb{C}$ таких, що $(\chi_j h)\circ\pi_j\in C^{p}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного номера $j\in\{1,\ldots,\lambda\}$. Він наділений нормою

$$\|h\|_{C^{p}(\Gamma)}:=\sum_{j=1}^{\lambda}\|(\chi_j h)\circ\pi_j\|_{C^{p}_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^{n-1})}. \tag{1.16}$$

Простір $C^{p}(\Gamma)$ з точністю до еквівалентності норм не залежить від зазначеного вибору атласу та розбиття одиниці на межі Γ.

У дисертації показник регулярності для простору Хермандера $H^{\alpha}(G)$, де $G\in\{\mathbb{R}^{n},\Omega,\Gamma\}$, часто набиратиме вигляду $\alpha(t)\equiv\varphi(t)t^{s}$, де $\varphi\in\mathrm{RO}$ і $s\in\mathbb{R}$. Для того, щоб не вказувати аргумент t у показнику будемо використовувати функціональний параметр $\varrho(t):=t$ аргументу $t\geq 1$ й записувати α у вигляді $\varphi\varrho^{s}$. Якщо $\varphi\in\mathrm{RO}$, то, звісно, $\varphi\varrho^{s}\in\mathrm{RO}$ та $\sigma_j(\varphi\varrho^{s})=\sigma_j(\varphi)+s$ для кожного $j\in\{0,1\}$.

Зокрема, якщо $\varphi\in\mathrm{RO}_0$ і $s\in\mathbb{R}$, то простір $H^{\varphi\varrho^{s}}(G)$ позначаємо (для зручності) також через $H^{s,\varphi}(G)$. Відповідний клас просторів Хермандера

$$\bigl\{H^{s,\varphi}(G):s\in\mathbb{R},\,\varphi\in\mathrm{RO}_0\bigr\}, \tag{1.17}$$

є частиною розширеної соболєвської шкали на G. Він містить у собі уточнену соболєвську шкалу, виділену та досліджену В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [54, 57] (див. також їх монографії [64, 165]). Вона складається з усіх просторів $H^{s,\varphi}(G)$, де $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathcal{M}$, а $\mathcal{M}$ — множина всіх вимірних за Борелем функцій $\varphi:[1,\infty)\to(0,\infty)$, які обмежені та відокремлені від нуля на кожному компакті і повільно змінюються за Караматою на нескінченності. Остання властивість означає [83, с. 10], що $\varphi(\lambda t)/\varphi(t)\to 1$ при $t\to\infty$ для кожного $\lambda>0$.

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$. У випадку, коли $\varphi(t) \equiv 1$, простір $H^{s,\varphi}(G)$ є гільбертовим простором Соболєва $H^{(s)}(G)$ порядку $s \in \mathbb{R}$. Взагалі,

$$H^{(s+\varepsilon)}(G) \hookrightarrow H^{s,\varphi}(G) \hookrightarrow H^{(s-\varepsilon)}(G) \quad \text{для кожного} \quad \varepsilon > 0, \tag{1.18}$$

причому вкладення неперервні й щільні. Це безпосередньо випливає з властивості (1.1), у якій покладаємо $s_0 := -\varepsilon$, $s_1 := \varepsilon$ і $t := 1$. Вкладення (1.18) свідчать про те, що числовий параметр s характеризує основну регулярність розподілів з простору $H^{s,\varphi}(G)$, а функціональний параметр φ уточнює її. Якщо $G \in \{\Omega, \Gamma\}$, то ці вкладення компактні, що негайно випливає з тверджень 1.4 і 1.6.

Наприкінці цього підрозділу зауважимо, що в останні п'ятдесят років простори Хермандера та різні їх узагальнення і версії, які часто називають просторами узагальненої гладкості, активно досліджуються багатьма математиками (див., наприклад, огляд П. І. Лізоркіна [48], монографії Ф. Нікола та Л. Родіно [172], О. І. Степанця [90, 91], Ґ. Трібеля [190, розд. III] та Н. Якоба [141], статті В. І. Буренкова [122], П. Гурки та Б. Опіка [137], А. М. Каетано та Г.-Г. Леопольда [123], В. Фаркаса та Г.-Г. Леопольда [131], Д. Д. Хароске та С. Д. Моури [139, 140] і зазначену там літературу). Зокрема, введено різні версії просторів Соболєва, Лізоркіна–Трібеля та Нікольського–Бєсова з функціональними показниками регулярності розподілів. З використанням цих просторів встановлено точні умови вкладення одних класів функціональних просторів у інші, доведено теореми про сліди розподілів на многовидах меншої розмірності, теореми про продовження розподілів за межі їх області визначення та встановлено деякі інші важливі результати.

Протягом останніх років простори узагальненої гладкості широко використовуються не лише у теорії диференціальних рівнянь, а і в інших математичних дисциплінах. Такі простори застосовувалися Д. Е. Едмундсом і Ґ. Трібелем [128, 129, 190] у спектральній теорії еліптичних диференціальних операторів, заданих на фрактальних множинах, В. Г. Маз'єю і Т. О. Шапошниковою [155, розд. 16] до інтегральних рівнянь, В. А. Михайлецем, В. М. Молибогою [161, 162, 163] і Й. Пешелем [180] у спектральній теорії диференціальних операторів Шрьодінгера та Хіла, В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [64, 67, 160, 164, 165] у теорії еліптичних крайових задач і еліптичних диференціальних операторів, Ф. Нікола й Л. Родіно [172] до еліптичних псевдодиференціальних операторів, заданих на евклідовому просторі, Б. П. Панеяхом [175] до крайової задачі з косою похідною та її узагальнень, О. І. Степанцем [90, 91] у теорії апроксимації функцій, Н. Якобом [141] у теорії випадкових процесів.

1.3. Інтерполяція з функціональним параметром

Широкі класи просторів узагальненої гладкості з'являються при інтерполяції з функціональними параметрами пар просторів Соболєва, Лізоркіна–Трібеля та Нікольського–Бєсова. Відмітимо, що методи інтерполяції пар нормованих просторів відіграють значну роль в аналізі й теорії операторів. Це пов'язано з тим, що у результаті інтерполяції просторів успадковується обмеженість лінійних операторів, які діють у цих просторах.

Перший метод інтерполяції (пар гільбертових просторів) запропонували незалежно Ж.-Л. Ліонс [147] і С. Г. Крейн [43]. Пізніше виникли інші методи інтерполяції нормованих просторів з числовими параметрами. Теорія інтерполяції нормованих просторів викладена в книгах Й. Берга і Й. Льофстрьома [10], Ю. А. Брудного і Н. Я. Кругляка [119], С. Г. Крейна, Ю. І. Петуніна і Е. М. Семенова [44], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [49], В. І. Овчинникова [173], Л. Тартара [189], Ґ. Трібеля [92]. Зауважимо, що у монографіях Ж.-Л. Ліонса, Е. Мадженеса [49, 152] і Ґ. Трібеля [92] систематично використовувалися різні методи інтерполяції з числовими параметрами до еліптичних, параболічних і гіперболічних диференціальних операторів.

Методи інтерполяції з функціональним параметром пар нормованих просторів уперше ввели К. Фояш і Ж.-Л. Ліонс [132]. Невдовзі узагальнення методів інтерполяції на випадок функціональних параметрів інтерполяції були розглянуті Я. Густавссоном [138], Т. Ф. Калугіною [29], М. І. Карро, Й. Л. Керда [124], К. Меруччі [156], В. І. Овчинниковим [173, 174], Л.-Е. Перссоном [179], М. Шехтером [187], С. Янсоном [142] та іншими авторами.

Інтерполяція з функціональним параметром широко використовується, перш за все, у теорії функціональних просторів. Однак, інтерполяція з функціональним параметром просторів диференційовних функцій (і, зокрема, просторів узагальненої гладкості), на відміну від просторів інтегровних функцій, застосовувалася в роботах декількох математиків, таких як М. Шехтер [187], С. Меруччі [157], Ф. Кобос і Д. Л. Фернандез [127], В. А. Михайлець і О. О. Мурач [57, 62 — 66, 158, 165, 166]. М. Шехтер встановив інтерполяційні формули для просторів Волєвича–Панеяха та просторів Хермандера відносно деяких методів інтерполяції з функціональним параметром. С. Меруччі, Ф. Кобосом і Д. Л. Фернандезом був застосований дійсний метод інтерполяції з функціональним параметром до просторів узагальненої гладкості, які являються аналогами просторів Лізоркіна–Трібеля та Нікольського–Бєсова. В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем були виділені та досліджені важливі класи гільбертових просторів Хермандера, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва. Вони систематично використовували ці класи просторів у теорії загальних еліптичних операторів і еліптичних крайових задач (див. їх монографії [64, 165] та огляди [67, 160, 164]).

Відмітимо, що з точки зору застосувань (наприклад, у спектральній теорії диференціальних операторів) найбільш цікавою є інтерполяція саме пар гільбертових просторів. Вона має дві фундаментальні властивості. Перша з них стверджує, що множина всіх функціональних параметрів цієї інтерполяції збігається з класом усіх додатних функцій, псевдоугнутих в околі нескінченності. Цей факт випливає з теореми Я. Петре [177, 178]. Друга властивість, яка випливає з теореми В. І. Овчинникова [173, с. 511], стверджує, що гільбертів простір є інтерполяційним для даної сумісної пари гільбертових просторів тоді і тільки тоді, коли він є результатом інтерполяції цієї пари з деяким функціональним параметром. Теорія інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів систематично викладена в монографіях В. А. Михайлеця та О. О. Мурача [64, 165].

Зауважимо, що при інтерполяції просторів успадковується не тільки обмеженість лінійних операторів, а й їх нетеровість (при незмінному дефекті). Цей результат, доведений Ж. Жеймона [134, с. 281], часто використовується в теорії еліптичних рівнянь із застосуванням різних методів інтерполяції з числовими параметрами; див. монографії Ю. М. Березанського [12], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [49], Я. А. Ройтберга [182], Ґ. Трібеля [92, 93].

Однак, до недавнього часу інтерполяція з функціональним параметром не знаходила використання в теорії диференціальних операторів. Єдиним виключенням була робота Г. Шлензак [105], в якій за допомогою інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва, була встановлена теорема про ізоморфізми, породжені регулярною еліптичною крайовою задачею у відповідних парах просторів Хермандера $\mathcal{B}_{2,\mu}$. Як недолік цієї роботи зауважимо те, що використаний у ній клас функціональних параметрів μ не належить до відомих в аналізі та не був конструктивно описаний.

Простори Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу, можна отримати інтерполяцією з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва. Наведемо означення цієї інтерполяції та її властивості, потрібні у подальшому. Будемо слідувати монографії [64, п. 1.1]. Для наших цілей достатньо обмежитися випадком сепарабельних гільбертових просторів.

Нехай задано впорядковану пару $X := [X_0, X_1]$ сепарабельних гільбертових комплексних просторів X_0 і X_1 таких, що X_1 є щільним лінійним многовидом у просторі X_0 та існує число $c > 0$ таке, що $\|w\|_{X_0} \leq c\,\|w\|_{X_1}$ для довільного $w \in X_1$ (коротко кажучи, виконується неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$). Пару X називаємо припустимою. Для неї існує самоспряжений додатно визначений оператор J у гільбертовому просторі X_0 з областю визначення X_1 такий, що $\|Jw\|_{X_0} = \|w\|_{X_1}$ для довільного $w \in X_1$. Оператор J називається породжуючим для X і однозначно визначається за парою X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, які відокремлені від нуля на кожній множині $[r, \infty)$ і обмежені на кожному відрізку $[a, b]$, де $r > 0$ і $0 < a < b < \infty$. Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. У просторі X_0 за допомогою спектральної теореми означений, як функція від J, оператор $\psi(J)$, взагалі необмежений. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або, коротше, X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену скалярним добутком

$$(w_1, w_2)_{X_\psi} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$$

і відповідною нормою $\|w\|_{X_\psi} = (w, w)^{1/2}_{X_\psi}$. Простір X_ψ гільбертів і сепарабельний, причому виконується неперервне і щільне вкладення $X_\psi \hookrightarrow X_0$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ називається інтерполяційним параметром, якщо для довільних припустимих пар $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для будь-якого лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується така умова: якщо при кожному $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. У цьому випадку говоримо, що простір X_ψ отриманий інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари X.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і лише тоді, коли вона псевдоугнута в околі нескінченності, тобто еквівалентна там деякій угнутій додатній функції. Цей факт випливає з теореми Ж. Петре [178] про опис усіх інтерполяційних функцій додатного порядку (цю теорему викладено у монографії [10, с. 153]).

Сформулюємо зазначену інтерполяційну властивість розширеної соболєвської шкали.

Твердження 1.8. *Нехай задано функцію* $\alpha \in \mathrm{RO}$ *і дійсні числа* s_0, s_1 *такі, що* $s_0 < \sigma_0(\alpha)$ *і* $s_1 > \sigma_1(\alpha)$. *Покладемо*

$$\psi(t) = \begin{cases} t^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\alpha\bigl(t^{1/(s_1-s_0)}\bigr) & \text{при} \quad t \geq 1, \\ \alpha(1) & \text{при} \quad 0 < t < 1. \end{cases} \tag{1.19}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ *є інтерполяційним параметром і виконується така рівність просторів разом з еквівалентністю норм у них:*

$$\bigl[H^{(s_0)}(G), H^{(s_1)}(G)\bigr]_\psi = H^\alpha(G),$$

де $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$. *Якщо* $G = \mathbb{R}^n$, *то буде рівність норм у цих просторах.*

Це твердження доведено в [165, теореми 2.19 і 2.22] для $G \in \{\mathbb{R}^n, \Gamma\}$ і в [166, теорема 5.1] для $G = \Omega$.

З твердження 1.8 безпосередньо випливає таке твердження.

Твердження 1.9. *Нехай задано функцію* $\varphi \in \mathrm{RO}_0$ *і додатні дійсні числа* ε, δ. *Означимо функцію* $\psi \in \mathcal{B}$ *за формулою*

$$\psi(t) = \begin{cases} t^{\varepsilon/(\varepsilon+\delta)}\varphi(t^{1/(\varepsilon+\delta)}) & \text{при} \;\; t \geq 1 \\ \varphi(1) & \text{при} \;\; 0 < t < 1. \end{cases} \tag{1.20}$$

Тоді ψ є інтерполяційним параметром, і виконується така рівність просторів разом з еквівалентністю норм у них:

$$\left[H^{(s-\varepsilon)}(G), H^{(s+\delta)}(G)\right]_{\psi} = H^{s,\varphi}(G) \quad \text{для кожного} \quad s \in \mathbb{R},$$

де $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$. Якщо $G = \mathbb{R}^n$, то буде рівність норм у цих просторах.

Зауважимо, що розширена соболєвська шкала на $G \in \{\mathbb{R}^n, \Omega, \Gamma\}$ замкнена відносно інтерполяції з функціональним параметром і збігається (з точністю до еквівалентності норм) з класом усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва. Це показано В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем (див. [165] (теореми 2.18, 2.20, 2.22 і 2.24) у випадку $G \in \{\mathbb{R}^n, \Gamma\}$ і [166] (теореми 2.7 і 5.2) у випадку $G = \Omega$). Остання властивість випливає з теореми В. І. Овчинникова [173] (п. 11.4) про опис усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для заданої пари гільбертових просторів. Нагадаємо, що властивість гільбертового простору H бути інтерполяційним для припустимої пари $X = [X_0, X_1]$ значить таке: виконується неперервне вкладення $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$ і будь-який лінійний оператор, обмежений на кожному з просторів X_0 і X_1, є також обмеженим на H.

Сформулюємо дві загальні властивості інтерполяції [165, теореми 1.7 і 1.5], які будуть використані в доведеннях. У зв'язку з цим нагадаємо, що лінійний обмежений оператор $T : E_1 \to E_2$, де E_1 і E_2 — банахові простори, називають *нетеровим*, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $E_2/T(E_1)$ скінченновимірні. Якщо цей оператор нетерів, то його область значень замкнена в просторі E_2 (див., наприклад, [97] (лема 19.1.1)) і для нього означений скінченний індекс

$$\operatorname{ind} T := \dim \ker T - \dim(E_2/T(E_1)).$$

Якщо індекс нетерового оператора дорівнює нулю, то він називається *фредгольмовим.* Зауважимо, що в англомовній літературі нетерові оператори називають фредгольмовими.

Твердження 1.10. *Нехай задано дві припустимі пари* $X = [X_0, X_1]$ *і* $Y = [Y_0, Y_1]$ *гільбертових просторів. Нехай, окрім того, на* X_0 *задано лінійне відображення* T *таке, що його звуження на простори* X_j, *де* $j = 0, 1$, *є обмеженими і нетеровими операторами* $T : X_j \to Y_j$, *які мають спільне ядро і однаковий індекс. Тоді для довільного інтерполяційного параметра* $\psi \in \mathcal{B}$ *обмежений оператор* $T : X_\psi \to Y_\psi$ *нетерів з тим же ядром і індексом, а його область значень дорівнює* $Y_\psi \cap T(X_0)$.

Твердження 1.11. *Нехай задано скінченне число припустимих пар* $[X_0^{(j)}, X_1^{(j)}]$ *гільбертових просторів, де* $j = 1, \ldots, p$. *Тоді для довільної функції* $\psi \in \mathcal{B}$ *правильна така рівність просторів разом з рівністю норм у них:*

$$\Bigl[\bigoplus_{j=1}^{q} X_0^{(j)}, \bigoplus_{j=1}^{p} X_1^{(j)}\Bigr]_\psi = \bigoplus_{j=1}^{p} \bigl[X_0^{(j)},\, X_1^{(j)}\bigr]_\psi .$$

У дисертації важливу роль відіграє той факт, що лінійні диференціальні оператори з гладкими коефіцієнтами є обмеженими на парах відповідних просторів Хермандера.

Твердження 1.12. (i) *Нехай* L — *лінійний диференціальний оператор порядку* $l \geq 0$ *на* $\overline{\Omega}$ *з коефіцієнтами класу* $C^\infty(\overline{\Omega})$. *Тоді відображення* $u \mapsto Lu$, *де* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$L : H^{\alpha}(\Omega) \to H^{\alpha\varrho^{-l}}(\Omega)$$

для кожного параметра $\alpha \in \mathrm{RO}$.

(ii) *Нехай* K — *крайовий лінійний диференціальний оператор порядку* $p \geq 0$ *на межі* Γ *з коефіцієнтами класу* $C^\infty(\Gamma)$. *Тоді відображення* $u \mapsto Ku$, *де* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$K : H^{\alpha}(\Omega) \to H^{\alpha\varrho^{-p-1/2}}(\Gamma)$$

для кожного параметра $\alpha \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\alpha) > p + 1/2$.

(iii) *Нехай* S *— дотичний лінійний диференціальний оператор порядку* $s \geq 0$ *на межі* Γ *з коефіцієнтами класу* $C^\infty(\Gamma)$. *Тоді відображення* $u \mapsto Su$, *де* $u \in C^\infty(\Gamma)$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$S:\, H^{\alpha}(\Gamma) \to H^{\alpha\varrho^{-s}}(\Gamma)$$

для кожного параметра $\alpha \in \mathrm{RO}$.

У випадку просторів Соболєва, коли $\alpha(t) \equiv t^s$, твердження 1.12 добре відоме. Звідси випадок довільного $\alpha \in \mathrm{RO}$ легко виводиться за допомогою інтерполяції з функціональним параметром на підставі твердження 1.8 (див. [7] (пункт 3.2) щодо пп. (i), (ii) і [25] (лема 4.1) стосовно п. (iii)).

Відмітимо, що оператор з пункту (i) твердження 1.12 є звуженням лінійного неперервного оператора $L:\, \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ на простір $H^\alpha(\Omega)$, а оператор з пункту (iii) твердження 1.12 є звуженням лінійного неперервного оператора $S:\, \mathcal{D}'(\Gamma) \to \mathcal{D}'(\Gamma)$ на простір $H^\alpha(\Gamma)$.

На завершення цього підрозділу обговоримо зв'язок між розширеними соболєвськими шкалами на області Ω та її межі Γ. Нехай функція $\alpha \in \mathrm{RO}$ така, що $\sigma_0(\alpha) > 1/2$. Тоді відображення $R_\Gamma : u \mapsto u \restriction \Gamma$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, продовжується за неперервністю до обмеженого лінійного та сюр'єктивного оператора сліду [7, с. 77]

$$R_\Gamma:\, H^{\alpha}(\Omega) \to H^{\alpha\varrho^{-1/2}}(\Gamma). \tag{1.21}$$

Він є окремим випадком оператора з пункту (ii) твердження 1.12. Отже, для кожного розподілу $u \in H^\alpha(\Omega)$, де $\alpha \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\alpha) > 1/2$, його слід $R_\Gamma u$ коректно означено. Окрім того, для $h \in H^{\alpha\varrho^{-1/2}}(\Gamma)$ маємо еквівалентність норм

$$\|h\|_{H^{\alpha\varrho^{-1/2}}(\Gamma)} \asymp \inf\bigl\{\|u\|_{H^\alpha(\Omega)} :\, u \in H^\alpha(\Omega),\; R_\Gamma u = h\bigr\}.$$

1.4. Еліптичні крайові задачі

Об'єктом дисертаційного дослідження є загальні (взагалі кажучи, нерегулярні) еліптичні крайові задачі. Поняття еліптичної крайової задачі було (незалежно) введено у 1953 році З. Я. Шапіро [102] та у загальній ситуації Я. Б. Лопатинським [50, 51]. Класичну теорію розв'язності загальних еліптичних крайових задач у просторах Гельдера – Зігмунда і Соболєва створено у 50 – 70-х роках минулого століття в роботах С. Агмона, А. Дугліса і Л. Ніренберга [1, 107], М. С. Аграновича і А. С. Диніна [2], Ю. М. Березанського, С. Г. Крейна і Я. А. Ройтберга [11, 12, 13], Ф. Браудера [120, 121], Л. Р. Волевича [18, 19], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [49, 149, 150], Ж. Петре [75], Я. А. Ройтберга [78, 79, 80, 82], Л. Н. Слободецького [84, 85], В. А. Солонникова [87, 88, 89], Л. Хермандера [95], М. Шехтера [103, 104, 184, 185, 186] (див. також огляд М. С. Аграновича [109] та наведену там літературу). Теорія загальних еліптичних крайових задач та її застосування викладені у монографіях С. Агмона [108], Ю. М. Березанського [12], Й. Т. Влоки, Б. Ровлі і Б. Лаврука [191], Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [49], О. І. Панича [74], Я. А. Ройтберга [182], Ґ. Трібеля [92, 93], Л. Хермандера [95, 97], М. Шехтера [188].

Наведемо постановку загальної еліптичної крайової задачі. Далі у дисертації Ω є довільною обмеженою областю в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де ціле $n \geq 2$. Як і раніше, припускаємо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ цієї області є нескінченно гладким замкненим многовидом вимірності $n-1$, причому C^∞-структура на Γ індукована простором $\mathbb{R}^n$. Відмітимо, що тоді область Ω локально лежить по один бік від своєї межі Γ. Як звичайно, $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ є замиканням області Ω.

В області Ω розглянемо таку крайову задачу:

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.22}$$

$$B_j u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q. \tag{1.23}$$

Тут

$$A := A(x, D) := \sum_{|\mu| \le 2q} a_\mu(x) D^\mu$$

є лінійним диференціальним оператором на $\overline{\Omega} := \Omega \cup \Gamma$ довільного парного порядку $2q \ge 2$, а кожне

$$B_j := B_j(x, D) := \sum_{|\mu| \le m_j} b_{j,\mu}(x) D^\mu$$

є крайовим лінійним диференціальним оператором на Γ довільного цілого порядку $m_j \ge 0$. Усі коефіцієнти $a_\mu(x)$ і $b_{j,\mu}(x)$ цих операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно, тобто $a_\mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $b_{j,\mu} \in C^\infty(\Gamma)$. Покладемо $B := (B_1, \dots, B_q)$.

У наведених формулах і далі використано такі стандартні позначення: $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — мультиіндекс з невід'ємними цілими компонентами, $|\mu| := \mu_1 + \dots + \mu_n$, $D^\mu := D_1^{\mu_1} \dots D_n^{\mu_n}$, де $D_k := i\partial/\partial x_k$ для кожного номера $k \in \{1, ..., n\}$, i — уявна одиниця, а $x = (x_1, \dots, x_n)$ — довільна точка простору $\mathbb{R}^n$. Також покладаємо $D_\nu := i\partial/\partial\nu$, де $\nu(x)$ — орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці $x \in \Gamma$, а ν — нескінченно гладке векторне поле цих ортів, задане на межі Γ.

У дисертації припускаємо, що крайова задача (1.22), (1.23) є еліптичною в області Ω. Нагадаємо відповідне означення (див., наприклад, довідник [94] (розд. III, § 6, пп. 1 і 2) або огляд [109] (п. 1.2)).

Диференціальним операторам $A(x, D)$ при фіксованому $x \in \overline{\Omega}$ і $B_j(x, D)$ при фіксованому $x \in \Gamma$ поставимо у відповідність однорідні характеристичні поліноми

$$A^\circ(x, \xi) := \sum_{|\mu| = 2q} a_\mu(x) \xi^\mu \quad \text{і} \quad B_j^\circ(x, \xi) := \sum_{|\mu| = m_j} b_{j,\mu}(x) \xi^\mu.$$

Тут змінна $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ і покладаємо $\xi^\mu := \xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n}$. Їх називають головними символами цих диференціальних операторів.

Означення 1.1. Крайову задачу (1.22), (1.23) називають *еліптичною* в області Ω, якщо виконуються такі дві умови:

(i) Диференціальний оператор A є правильно еліптичним в $\overline{\Omega}$, тобто для довільної точки $x \in \overline{\Omega}$ і будь-яких лінійно незалежних векторів $\tau, \eta \in \mathbb{R}^n$ многочлен $A^\circ(x, \tau + \zeta\eta)$ комплексної змінної ζ має рівно q коренів $\zeta_j^+(x; \tau, \eta)$, $j = 1, \ldots, q$, з додатною уявною частиною і таку ж кількість коренів з від'ємною уявною частиною (з урахуванням їх кратності).

(ii) Система $B = (B_1, \ldots, B_q)$ крайових диференціальних операторів задовольняє умову доповнюваності (інакше кажучи, умову Шапіро – Лопатинського, умову накриття чи умову коерцитивності) щодо A на Γ, тобто для довільної точки $x \in \Gamma$ і довільного вектора $\tau \neq 0$ дотичного до Γ в точці x, многочлени $B_j^\circ(x, \tau + \zeta\nu(x))$, $j = 1, \ldots, q$, комплексної змінної ζ лінійно незалежні за модулем многочлена $\prod_{j=1}^{q}\bigl(\zeta - \zeta_j^+(x; \tau, \nu(x))\bigr)$.

З умови (i) випливає, що

$$A^\circ(x, \xi) \neq 0 \quad \text{для будь-яких} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

тобто диференціальний оператор A є еліптичним в $\overline{\Omega}$. Якщо $n \geq 3$, то умова еліптичності еквівалентна умові (i) [94, с. 166]. Якщо всі старші коефіцієнти оператора A дійсні, то ця еквівалентність виконується і для $n = 2$.

Підкреслимо, що у дисертації допускається випадок крайових умов вищих порядків, тобто коли $m := \max\{m_1, ..., m_q\} \geq 2q$. У цьому зв'язку покладемо $r := \max\{2q, m + 1\}$ для більшої лаконічності деяких подальших формул.

Еліптичні задачі з крайовими умовами вищих порядків зустрічаються в акустиці, гідродинаміці та теорії випадкових процесів [16, 17, 42]. Мабуть, першою такою задачею, яка виникла в застосуваннях, була відома еліптична крайова задача А. Д. Вентцеля [16]. Вона складається з еліптичного диференціального рівняння другого порядку та крайової умови такого ж порядку і виникла в дослідженнях дифузійних процесів. Цій задачі присвячено багато робіт, наприклад, статті [52, 117, 153] і огляд [113]. В акустиці викликає інтерес еліптична задача, яка складається з рівняння Гельмгольца та деякої крайової умови п'ятого порядку [17, 42]. З теоретичної точки зору, найпростішим прикладом таких задач є задача, яка складається з рівняння Лапласа та крайової умови $\partial^k u/\partial\nu^k = g$, де ціле $k \geq 2$ [14, 86] (деякі узагальнення цього прикладу розглянуті в [30, 31, 32, 33]).

Пов'яжемо із задачею (1.22), (1.23) лінійне відображення

$$(A,B): u \mapsto (Au, Bu) = (Au,\, B_1u, ..., B_qu), \quad \text{де} \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{1.24}$$

У дисертації досліджуємо властивості продовження за неперервністю цього відображення у підходящих парах просторів Хермандера та деяких їх модифікаціях.

Для опису області значень цього продовження нам потрібна така спеціальна формула Гріна, встановлена Б. Лавруком [45] (п. 4) (див. також монографію [146], теорема 3.1.1 і формула (4.1.10)):

$$(Au, v)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{r-2q} (D_{\nu}^{j-1} Au, w_j)_{\Gamma} + \sum_{j=1}^{q} (B_j u, h_j)_{\Gamma} =$$
$$= (u, A^{+}v)_{\Omega} + \sum_{k=1}^{r} \Bigl(D_{\nu}^{k-1} u, K_k v + \sum_{j=1}^{r-2q} R_{j,k}^{+} w_j + \sum_{j=1}^{q} Q_{j,k}^{+} h_j \Bigr)_{\Gamma}$$

де $u, v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і $w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q \in C^{\infty}(\Gamma)$ та через $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ і $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ позначено відповідно скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій квадратично інтегровних на Ω і Γ відносно мір Лебега, а надалі й розширення цих скалярних добутків за неперервністю. Тут A^{+} — диференціальний оператор, формально спряжений до A, тобто

$$(A^{+}v)(x) := \sum_{|\mu|\leq 2q} D^{\mu}(\overline{a_{\mu}(x)}v(x)).$$

Окрім того, усі $R^{+}_{j,k}$ і $Q^{+}_{j,k}$ є дотичними диференціальними операторами, формально спряженими відповідно до $R_{j,k}$ і $Q_{j,k}$ відносно $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$, а дотичні лінійні диференціальні оператори $R_{j,k} := R_{j,k}(x, D_{\tau})$ і $Q_{j,k} := Q_{j,k}(x, D_{\tau})$ узяті із зображення крайових диференціальних операторів $D^{j-1}_{\nu}A$ і B_j у вигляді

$$D^{j-1}_{\nu}A(x,D) = \sum_{k=1}^{r} R_{j,k}(x, D_{\tau})D^{k-1}_{\nu}, \quad j = 1,\ldots, r-2q,$$
$$B_j(x,D) = \sum_{k=1}^{r} Q_{j,k}(x, D_{\tau})D^{k-1}_{\nu}, \quad j = 1,\ldots, q.$$

Відмітимо, що $\operatorname{ord} R_{j,k} \leq 2q + j - k$ і $\operatorname{ord} Q_{j,k} \leq m_j - k + 1$, причому, звісно, $R_{j,k} = 0$ при $k \geq 2q + j + 1$ і $Q_{j,k} = 0$ при $k \geq m_j + 2$. Нарешті, кожне $K_k := K_k(x, D)$ — деякий крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} K_k \leq 2q - k$ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Звісно, якщо $r = 2q$, то у розглянутій формулі Гріна і пов'язаних з нею формулах відсутні функції $w_1, \ldots, w_{r-2q}$ і суми з індексом підсумовування j, що пробігає значення від 1 до $r - 2q$.

Спеціальна формула Гріна приводить до такої крайової задачі в області Ω:

$$A^{+}v = \omega \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.25}$$

$$K_k v + \sum_{j=1}^{r-2q} R^{+}_{j,k} w_j + \sum_{j=1}^{q} Q^{+}_{j,k} h_j = \theta_k \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad k = 1, ..., r. \tag{1.26}$$

Ця задача містить, окрім невідомої функції v на Ω, ще $r - q$ додаткових невідомих функцій $w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q$ на межі Γ. Задачу (1.25), (1.26) називають формально спряженою до задачі (1.22), (1.23) відносно розглянутої спеціальної формули Гріна. Відомо [146] (теорема 4.1.1), що крайова задача (1.22), (1.23) еліптична тоді і тільки тоді, коли формально спряжена задача

(1.25), (1.26) еліптична як задача з додатковими невідомими функціями у крайових умовах (див. п. 2.6).

Еліптичні задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах були уперше розглянуті Б. Лавруком [45, 46, 47]. Тому називаємо ці задачі еліптичними за Лавруком. Як бачимо, вони виникають при переході від загальної еліптичної крайової задачі до формально спряженої крайової задачі відносно вказаної спеціальної формули Гріна. Окрім того, клас еліптичних за Лавруком задач є замкненим відносно цього переходу (див. монографії В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россмана [146] (розд. 3) і Я. А. Ройтберга [183] (розд. 2)).

Означення 1.2. Систему $B = (B_1, \ldots, B_q)$ крайових диференціальних операторів називають *нормальною*, якщо

(i) їх порядки $m_j \leq 2q - 1$ для кожного $j \in \{1, \ldots, q\}$;

(ii) усі числа $m_1, \ldots, m_q$ різні;

(iii) $B_j^{\circ}(x, \nu(x)) \neq 0$ для будь-яких $x \in \Gamma$ і $j \in \{1, \ldots, q\}$.

Еліптичну крайову задачу (1.22), (1.23) називають *регулярною*, якщо система $B = (B_1, \ldots, B_q)$ є нормальною.

Якщо еліптична крайова задача (1.22), (1.23) є регулярною, то для неї виконується така класична формула Гріна:

$$(Au, v)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{q} (B_j u,\, C_j^{+} v)_{\Gamma} = (u, A^{+} v)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{q} (C_j u,\, B_j^{+} v)_{\Gamma}$$

для довільних функцій $u, v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ (див., наприклад, довідник [94, с. 168] або огляд [109] (розділ 4.2)). Тут $\{B_j^{+}\}$, $\{C_j\}$ і $\{C_j^{+}\}$ — деякі нормальні системи крайових лінійних диференціальних операторів з коефіцієнтами класу

$C^\infty(\Gamma)$; порядки цих операторів задовольняють умову

$$\operatorname{ord} B_j + \operatorname{ord} C_j^+ = \operatorname{ord} C_j + \operatorname{ord} B_j^+ = 2q-1.$$

Вказані умова нормальності системи B і класична формула Гріна уведені незалежно Н. Ароншайном, А. Мільграмом [114] і М. Шехтером [103]. Формально спряженою до регулярної еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23) відносно класичної формули Гріна є така регулярна еліптична крайова задача:

$$A^+ v = \omega \ \text{ в } \ \Omega, \quad B_j^+ v = \theta_j \ \text{ на } \ \Gamma, \ \ j=1,\ldots,q. \tag{1.27}$$

Система крайових диференціальних операторів $\{B_1^+,\ldots,B_q^+\}$ називається спряженою до нормальної системи B відносно оператора A. Вона визначається не однозначно, проте всі спряжені системи еквівалентні у такому сенсі [94, с. 168; 188, с. 232]: якщо є ще одна система $\{\widetilde{B}_1^+,\ldots,\widetilde{B}_q^+\}$, спряжена до системи B відносно оператора A, то

$$\begin{aligned}&\bigl\{v\in C^\infty(\overline{\Omega}) :\ \widetilde{B}_j^+ v = 0 \text{ на } \Gamma,\ j=1,\ldots,q\bigr\} = \\ &= \bigl\{v\in C^\infty(\overline{\Omega}) :\ B_j^+ v = 0 \text{ на } \Gamma,\ j=1,\ldots,q\bigr\}.\end{aligned} \tag{1.28}$$

У випадку, коли $A = A^+$ і в класичній формулі Гріна можна взяти $\bigl\{B_1^+,\ldots,B_q^+\bigr\} = B$, регулярна еліптична крайова задача (1.22), (1.23) називається формально самоспряженою. Простими прикладами такої задачі є крайові задачі Діріхле та Неймана для рівняння Пуассона.

Зазначимо, що крайові задачі, формально спряжені до регулярної еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23) відносно класичної формули Гріна і відносно спеціальної формули Гріна, еквівалентні в у деякому сенсі [146, лема 3.1.1 і п. 3.1.6]. Тому, якщо крайова задача (1.22), (1.23) є регулярною еліптичною, то додаткові невідомі функції можна виключити з крайових умов формально спряженої задачі (1.25), (1.26), пов’язаної із спеціальною формулою Гріна.

Для нерегулярних еліптичних крайових задач класична формула Гріна, взагалі кажучи, не має місця, що ускладнює їх дослідження. У випадку нерегулярної еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23) буває так, що не можна виключити додаткові невідомі функції з крайових умов формально спряженої задачі (1.25), (1.26). Розглянемо відповідний приклад [146] (п. 3.1.5).

Приклад 1.4. Нехай β, γ — дійсні функції класу $C^\infty(\Gamma)$, які задовольняють умову $\beta^2 + \gamma^2 = 1$. У двовимірній області Ω розглянемо еліптичну крайову задачу з косою похідною для рівняння Пуассона:

$$\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\beta\, \partial_\nu u + \gamma\, \partial_\Gamma u = g \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

У цих формулах і надалі Δ є оператором Лапласа, $\partial_\nu := \partial/\partial\nu$ — похідна вздовж орта ν, а ∂_Γ — похідна вздовж межі Γ, яку обходимо так, щоб область Ω завжди була ліворуч. Для розглянутої задачі формально спряжена задача відносно спеціальної формули Гріна має такий вигляд:

$$\Delta v = \omega \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\partial_\nu v - \partial_\Gamma(\gamma h) = \theta_1 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$v - \beta h = \theta_2 \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Ця задача є еліптичною за Лавруком в області Ω. Вона містить одну додаткову невідому функцію h у крайових умовах. Якщо $\beta(x) = 0$ для деякої точки $x \in \Gamma$, то розглянута еліптична крайова задача нерегулярна (порушується умова (iii) означення 1.2) і функцію h не можна виключити з крайових умов формально спряженої задачі. Якщо $\beta(x) \neq 0$ у кожній точці $x \in \Gamma$, то розглянута еліптична крайова задача є регулярною і формально спряженою до неї задачею відносно класичної формули Гріна є така задача:

$$\Delta v = \omega \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$\partial_\nu v - \partial_\Gamma(\gamma v/\beta) = \theta \quad \text{на} \quad \Gamma.$$

Остання задача еквівалентна формально спряженій задачі відносно спеціальної формули Гріна.

Розглянемо найпростіший приклад нерегулярної еліптичної крайової задачі та спеціальної формули Гріна у випадку, коли $m = 2q$ (крайові умови вищих порядків).

Приклад 1.5. Запишемо спеціальну формулу Гріна для нерегулярної еліптичної крайової задачі

$$\Delta u = f \;\text{ в }\; \Omega, \qquad \partial_\nu^2 u = g \;\text{ на }\; \Gamma, \tag{1.29}$$

заданої в крузі $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Відмітимо, що $\Delta u = \partial_\nu^2 u - \partial_\nu u + \partial_\varphi^2 u$ на Γ; тут $\partial_\nu := \partial/\partial\nu = -\partial/\partial\varrho$ і $\partial_\varphi := \partial/\partial\varphi$, а (ϱ, φ) — полярні координати. Застосувавши другу класичну формулу Гріна для оператора Лапласа, отримаємо рівності

$$(\Delta u, v)_\Omega + (\Delta u, w)_\Gamma + (\partial_\nu^2 u, h)_\Gamma =$$
$$= (u, \Delta v)_\Omega - (\partial_\nu u, v)_\Gamma + (u, \partial_\nu v)_\Gamma + (\partial_\nu^2 u - \partial_\nu u + \partial_\varphi^2 u, w)_\Gamma + (\partial_\nu^2 u, h)_\Gamma =$$
$$= (u, \Delta v)_\Omega + (u, \partial_\nu v + \partial_\varphi^2 w)_\Gamma + (\partial_\nu u, -v - w)_\Gamma + (\partial_\nu^2 u, w + h)_\Gamma$$

для довільних функцій $u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $w, h \in C^\infty(\Gamma)$. Отже, спеціальна формула Гріна для крайової задачі (1.29) набирає вигляду

$$(\Delta u, v)_\Omega + (\Delta u, w)_\Gamma + (\partial_\nu^2 u, h)_\Gamma =$$
$$= (u, \Delta v)_\Omega + (u, \partial_\nu v + \partial_\varphi^2 w)_\Gamma + (D_\nu u, -iv - iw)_\Gamma + (D_\nu^2 u, -w - h)_\Gamma.$$

Тому крайова задача

$$\Delta v = \omega \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\partial_\nu v + \partial_\varphi^2 w = \theta_1, \quad -iv - iw = \theta_2, \quad -w - h = \theta_3 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

є формально спряженою до задачі (1.29) відносно цієї формули Гріна. Отримана формально спряжена задача містить дві додаткові невідомі функції w і h на Γ. До речі, їх можна виключити з крайових умов, тобто виразити через функцію v і праві частини цих умов.

Розглянемо різні приклади еліптичних крайових задач. Серед них є досить загальним такий:

Приклад 1.6. Розглянемо крайову задачу, яка складається з диференціального рівняння $Au = f$ в Ω, де диференціальний оператор A (порядку $2q$) правильно еліптичний в $\overline{\Omega}$, і крайових умов

$$\frac{\partial^{k+j-1} u}{\partial \ell^{k+j-1}} + \sum_{|\mu| \leq k+j-2} b_{j,\mu}(x) D^\mu = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q.$$

Тут ціле число $k \geq 0$, а $\ell : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ є нескінченно гладким полем векторів $\ell(x) \neq 0$, недотичних до Γ у кожній точці $x \in \Gamma$. Безпосередньо перевіряється, що розглянута крайова задача є еліптичною в області Ω. Ця еліптична задача є регулярною тоді і лише тоді, коли $k \leq q$ [92, с. 454]. Важливий окремий випадок цієї задачі отримуємо, поклавши $A := \Delta^q$ — ітерований оператор Лапласа та $\ell(x) := \nu(x)$ для усіх $x \in \Gamma$. Зокрема, якщо $k = 0$ (випадок крайової задачі Діріхле для диференціального рівняння (1.22)), то формально спряженою відносно класичної формули Гріна є крайова задача Діріхле для рівняння $A^+ v = \omega$ [94, с. 168]. У випадку, коли $A = A^+$, задача Діріхле буде формально самоспряженою. Зокрема, якщо всі коефіцієнти диференціального оператора A дійсні та сталі (наприклад $A = \Delta^q$), то умова $A = A^+$ виконується.

Перейдемо до прикладів нерегулярних еліптичних крайових задач.

Приклад 1.7. Нехай $n = 2$. У механіці виникає така еліптична крайова задача [52]:

$$\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$\partial_\Gamma(\beta\partial_\Gamma u) + \gamma\partial_\nu u = g \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{1.30}$$

тут додатні функції $\beta, \gamma \in C^\infty(\Gamma)$ є заданими. Умова (1.30) є окремим випадком крайової умови А. Д. Вентцеля [16]. Ця задача описує, зокрема, статичне положення мембрани, край якої прошитий кордом чи струною. У цьому випадку функції β і γ є коефіцієнтами натягу. Розглянута задача нерегулярна, бо порушується умова (i) означення 1.2.

Приклад 1.8. Нехай диференціальний оператор A має четвертий порядок і є правильно еліптичним в плоскій замкненій області $\overline{\Omega}$, тобто $n = 2$ і $q = 2$. Розглянемо еліптичну крайову задачу, яка складається з рівняння $Au = f$ в Ω і крайових умов

$$\partial_\nu u + \partial_\Gamma u = g_1, \quad \partial_\nu u - \partial_\Gamma u = g_2 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

(див. [81], п. 4). Вона нерегулярна, бо порушується умова (ii) означення 1.2.

Приклад 1.9. Нехай диференціальний оператор A такий як у попередньому прикладі, але $n = \dim\Omega \geq 2$. Розглянемо еліптичну крайову задачу, яка складається з рівняння $Au = f$ в Ω і крайових умов

$$\partial_\nu^k u = g_1, \quad \partial_\nu^{k+2} u = g_2 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

де ціле число $k \geq 0$. Вона нерегулярна тоді і лише тоді, коли $k \geq 2$ (бо порушується умова (i) означення 1.2). Зауважимо, що ця задача не охоплюється прикладом 1.6.

Приклад 1.10. Нехай $n = 2$. Розглянемо еліптичну крайову задачу

$$\Delta^2 v = \omega \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\partial_\nu^3 u + \partial_\Gamma^3 u = g_1, \quad \partial_\nu^3 u = g_2 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

(пор. з [81], п. 4). Вона нерегулярна, бо порушується умова (ii) означення 1.2.

Обговоримо основні властивості еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23) у гільбертових просторах Соболєва. Відображення (1.24) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$(A, B) : H^{(s)}(\Omega) \to H^{(s-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{(s-2q)}(\Omega, \Gamma) \qquad (1.31)$$

для довільного дійсного $s > m+1/2$. Цей оператор нетерів, його ядро складається з функцій класу $C^\infty(\overline{\Omega})$ і разом з індексом не залежить від s. Область значень оператора (1.31), замкнена у просторі $\mathcal{H}^{(s-2q)}(\Omega, \Gamma)$, допускає опис за допомогою формально спряженої задачі (див. п. 2.1). Цей факт є результатом фундаментальних робіт С. Агмона, А. Дугліса і Л. Ніренберга [1] (розд. 5), Ф. Е. Браудера [121], М. Шехтера [103], Ж. Петре [176] та інших. Доведено також, що еліптичність крайової задачі (1.22), (1.23) є не лише достатньою, але і необхідною умовою нетеровості оператора (2.1) у соболєвському випадку (див., наприклад, [176, с. 730]).

З нетеровості оператора (1.31) випливає така апріорна оцінка розв'язку еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23):

$$\|u\|_{H^{(s)}(\Omega)} \leq c \left(\|(f, g)\|_{\mathcal{H}^{(s-2q)}(\Omega,\Gamma)} + \|u\|_{L_2(\Omega)} \right);$$

для кожної функції $u \in H^{(s)}(\Omega)$, де $c = c(s)$ — деяке додатне число, яке не залежить від u і (f, g). Зауважимо, що з цієї оцінки випливає скінченновимірність ядра та замкненість області значень оператора (1.31).

Сформульовані властивості еліптичних крайових задач мають важливі застосування до дослідження регулярності розв'язків еліптичних крайових задач, у теорії індексу еліптичних задач, у спектральній теорії еліптичних операторів, до задач оптимального управління, до певних класів нелінійних еліптичних крайових задач та інші (див. монографії [12, 49, 74, 76, 92, 93, 95, 97, 108, 182, 188, 191] і огляд [109] та наведену там літературу).

Серед цих застосувань відмітимо таке твердження про підвищення регулярності розв'язків еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23): якщо функція $u \in H^{(s)}(\Omega)$, де $s > m + 1/2$, є розв'язком цієї задачі, праві частини якої задовольняють умову $(f, g) \in \mathcal{H}^{(s-2q+\varepsilon)}(\Omega, \Gamma)$ для деякого числа $\varepsilon > 0$, то $u \in H^{(s+\varepsilon)}(\Omega)$. Звідси, зокрема, випливає, що умова $(f, g) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{q}$ тягне за собою включення $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

Висновки до розділу 1

У першому розділі обговорено об'єкт дослідження — загальні (взагалі кажучи, нерегулярні) еліптичні крайові задачі і пов'язані з ними гільбертові функціональні простори Хермандера, а також основний метод дослідження — інтерполяцію з функціональним параметром пар гільбертових просторів. Розглянуті класи просторів Хермандера мають таку важливу властивість: вони отримуються інтерполяцією з функціональним параметром відповідних пар гільбертових просторів Соболєва. Цей метод інтерполяції робить зазначені класи просторів Хермандера зручними у застосуванні до еліптичних крайових задач. Важливо, що найбільш широкий з цих класів — розширена соболєвська шкала — складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних для пар гільбертових просторів Соболєва. Зазначено й інші властивості просторів Хермандера, серед яких теореми вкладення і теореми про сліди. Наведено постановку загальної еліптичної крайової задачі, спеціальної формули Гріна для цієї задачі, формально спряженої задачі відносно вказаної формули Гріна та розглянуто відповідні приклади. Обговорено випадок регулярної еліптичної крайової задачі, для якої правильна класична формула Гріна.

РОЗДІЛ 2
ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

У цьому розділі досліджуємо характер розв'язності та властивості розв'язків загальної (взагалі кажучи, нерегулярної) еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23) у просторах Хермандера $H^{\varphi}(\Omega)$, що утворюють розширену соболєвську шкалу, розглянуту в п. 1.2. Порядки крайових умов (1.23) є довільними; вони можуть бути більшими за порядок еліптичного рівняння (1.22), або рівними йому. На показник регулярності $\varphi \in \mathrm{RO}$ розв'язків $u \in H^{\varphi}(\Omega)$ цієї задачі накладаємо досить слабке обмеження $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$, яке гарантує існування лівих частин крайових умов. Окрім того, у цьому розділі досліджуємо еліптичні за Лавруком задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах вищих порядків. Останні містять крайові оператори, порядки яких більші за порядок еліптичного рівняння, або рівні йому.

2.1. Нетеровість задачі

Позначимо через N лінійний простір усіх розв'язків $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ крайової задачі (1.22), (1.23) у випадку, коли $f = 0$ в Ω і кожне $g_j = 0$ на Γ. Позначимо також через $N_{\star}$ лінійний простір усіх розв'язків

$$(v, w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{r-q}$$

формально спряженої крайової задачі (1.25), (1.26) у випадку, коли $\omega = 0$ в Ω і кожне $\theta_k = 0$ на Γ. Оскільки обидві задачі еліптичні в Ω, то простори N і $N_{\star}$ скінченновимірні (див., наприклад, [146], наслідок 4.1.1).

На підставі твердження 1.12 відображення (1.24) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$(A,B):H^{\varphi}(\Omega)\to H^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{q}H^{\varphi\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma)=:\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \tag{2.1}$$

для кожного $\varphi\in\mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\varphi)>m+1/2$.

Теорема 2.1. *Нехай* $\varphi\in\mathrm{RO}$ *і* $\sigma_0(\varphi)>m+1/2$. *Тоді обмежений оператор* (2.1) *нетерів. Його ядро дорівнює* N*, а область значень складається з усіх векторів* $(f,g):=(f,g_1,\ldots,g_q)\in\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ *таких, що*

$$\begin{gathered}(f,v)_\Omega+\sum_{j=1}^{r-2q}(D_\nu^{j-1}f,w_j)_\Gamma+\sum_{j=1}^{q}(g_j,h_j)_\Gamma=0\\ \textit{для всіх}\quad (v,w_1,\ldots,w_{r-2q},h_1,\ldots,h_q)\in N_\star.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Індекс оператора (2.1) *дорівнює* $\dim N-\dim N_\star$ *та не залежить від* φ.

Дамо коментар до формули (2.2). Обговоримо спочатку випадок, коли $m\le 2q-1$, тобто $r=2q$. Тоді, як зазначалося у п. 1.4, ця формула набирає вигляду

$$(f,v)_\Omega+\sum_{j=1}^{q}(g_j,h_j)_\Gamma=0\quad\text{для всіх}\quad(v,h_1,\ldots,h_q)\in N_\star.$$

Якщо $\sigma_0(\varphi)>2q$, то $f\in H^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega)\subset L_2(\Omega)$ і тому вираз $(f,v)_\Omega$ у цій формулі є скалярним добутком у просторі $L_2(\Omega)$. Якщо $m+1/2<\sigma_0(\varphi)\le 2q$, то вираз $(f,v)_\Omega$ означений за допомогою граничного переходу; а саме: $(f,v)_\Omega:=\lim\limits_{k\to\infty}(f_k,v)_\Omega$, де $C^\infty(\overline{\Omega})\ni f_k\to f$ в $H^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega)$ при $k\to\infty$. При цьому умова $(v,h_1,\ldots,h_q)\in N_\star$ істотна (див. доведення теореми 2.1). Адже, якщо $\sigma_0(\varphi)\le 2q-1/2$ (це буде при $m\le 2q-2$) і v є довільно вибраною нескінченно гладкою функцією на $\overline{\Omega}$, то відображення $f\mapsto(f,v)_\Omega$, де $f\in C^\infty(\overline{\Omega})$, не можна продовжити до неперервного лінійного функціонала на $H^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega)$. Зокрема, для соболєвських просторів, це випливає з [92] (теореми

4.8.2(c) і 4.3.2/1(c)). До речі, з умови $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$ випливає, що кожне $g_j \in H^{\varphi\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$ і тому вираз $(g_j, h_j)_\Gamma$ є скалярним добутком у просторі $L_2(\Gamma)$. Якщо еліптична крайова задача (1.22), (1.23) регулярна, то формула (2.2) набирає вигляду

$$(f, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (g_j, C_j^+ v)_\Gamma = 0 \quad \text{для всіх} \quad v \in N^+,$$

де N^+ позначає скінченновимірний лінійний простір усіх розв'язків $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ формально спряженої крайової задачі (1.27) у випадку, коли $v = 0$ в Ω і кожне $\theta_j = 0$ на Γ. Це є наслідком [146] (п. 3.1.6, приклад 2).

У випадку $m \geq 2q$ з умови $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$ випливає, що вирази $(f, v)_\Omega$ і $(D_\nu^{j-1} f, w_j)_\Gamma$, $(g_j, h_j)_\Gamma$ є скалярними добутками у просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ відповідно. Тут, згідно з твердженням 1.12, для кожної функції $f \in H^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega)$, де $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$, коректно означені образи

$$D_\nu^{j-1} f \in H^{\varphi\varrho^{-2q-j+1/2}}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$$

відносно крайового оператора D_ν^{j-1} порядку $j - 1 \leq m - 2q$.

Доведення теореми 2.1. Її виведемо за допомогою інтерполяції з функціональним параметром із соболєвського випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ і $s > m + 1/2$. У цьому випадку висновки теореми 2.1 стосовно нетеровості оператора 2.1, рівності ядра простору N та незалежності індексу від s складають один з центральних результатів теорії еліптичних крайових задач у соболєвських просторах. Він добре відомий (див., наприклад, монографії-підручники [22] (розділ III, п. 2.2) і [130] (п. 54.2)).

Залишається обґрунтувати у соболєвському випадку висновок теореми 2.1, який стосується опису області значень оператора (2.1) за допомогою простору $N_\star$. Розглянемо окремо випадки $m \leq 2q - 1$ і $m \geq 2q$.

У випадку $m \leq 2q - 1$ (тоді $r = 2q$) цей висновок обґрунтовано у монографії [146] (теорема 3.4.1 і п. 4.4.1) для кожного дійсного $s \geq 2q$. Тому залишається довести його для усіх дійсних $s \in (m+1/2, 2q)$. Отже, нехай $m+1/2 < s < 2q$. Через $(A,B)_s$ позначимо нетерів обмежений оператор (2.1) у соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^s$ і $s > m+1/2$. Як звичайно, $(A,B)_s^*$ є оператором, спряженим до оператора (2.1). Якщо $m+1/2 < s_0 < s_1$, то $(A,B)_{s_0}^*$ є звуженням оператора $(A,B)_{s_1}^*$ і тому $\ker(A,B)_{s_0}^* \subseteq \ker(A,B)_{s_1}^*$. Але $\ker(A,B)_{s_0}^*$ і $\ker(A,B)_{s_1}^*$ мають однакову скінченну вимірність. Справді, остання дорівнює ковимірності області значень оператора $(A,B)_s$, і ця ковимірність скінченна й не залежить від s, як зазначено вище у цьому доведенні. Таким чином, $\ker(A,B)_{s_0}^* = \ker(A,B)_{s_1}^*$. Згідно з [146] (теорема 3.4.2), маємо рівність $\ker(A,B)_s^* = N_\star$, якщо $s \geq 2q$. Тут кожен вектор $(v, h_1, \ldots, h_q) \in N_\star$ інтерпретуємо як неперервний лінійний функціонал

$$\Upsilon : (f, g_1, \ldots, g_q) \mapsto (f, v)_\Omega + \sum_{j=1}^{q} (g_j, h_j)_\Gamma$$

на просторі

$$\mathcal{H}^{(s-2q)}(\Omega, \Gamma) := H^{(s-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma).$$

Звідси $\ker(A,B)_s^* = N_\star$, якщо $s > m+1/2$. Тому Υ продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного неперервного функціонала на $\mathcal{H}^{(s-2q)}(\Omega, \Gamma)$ у випадку, коли $m+1/2 < s < 2q$. Зокрема, форма $(f, v)_\Omega$ коректно означена для кожного $f \in H^{(s-2q)}(\Omega)$ за допомогою граничного переходу в цьому випадку. Тепер, оскільки оператор $(A,B)_s$ є нетеровим при $s > m+1/2$, то його область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{(s-2q)}(\Omega, \Gamma)$ таких, що $\Upsilon(f, g_1, \ldots, g_q) = 0$ для всіх $\Upsilon \in \ker(A,B)_s^*$. Ця умова стає умовою (2.2) з огляду на рівність $\ker(A,B)_s^* = N_\star$. Крім того, індекс оператора $(A,B)_s$ дорівнює $\dim N - \dim N_\star$, тому що вимірність $\dim \ker(A,B)_s^*$ дорівнює ковимірності області значень оператора $(A,B)_s$. Тим самим, обґрунтовано висновок теореми 2.1 про опис області значень оператора (2.1) у соболєвському випадку і за умови $m \leq 2q-1$.

Обґрунтуємо цей висновок за умови $m \geq 2q$ (тоді $r = m+1$). Для цілих $s > m+1/2$ він міститься в [146] (наслідок 4.1.1). Доведемо його для довільного дійсного $s > m+1/2$. Для цього скористаємося результатом Я. А. Ройтберга [182] (теорема 4.1.3), згідно з яким відображення (1.24) продовжується за неперервністю до обмеженого і нетерового оператора

$$\begin{aligned}(A,B) : H^{s,(r)}(\Omega) \to H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma) =: \\ =: \mathcal{H}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)\end{aligned} \tag{2.3}$$

для довільного $s \in \mathbb{R}$. Тут $H^{s,(k)}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $1 \leq k \in \mathbb{Z}$, є гільбертовим простором Соболєва – Ройтберга [182] (п. 2.1). Якщо $s \notin \{1/2, \ldots, k-1/2\}$, то, за означенням, $H^{s,(k)}(\Omega)$ — поповнення простору $C^\infty(\overline{\Omega})$ за нормою

$$\|u\|_{H^{s,(k)}(\Omega)} := \left(\|u\|^2_{H^{s,(0)}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \|(D_\nu^{j-1}u)\restriction\Gamma\|^2_{H^{s-j+1/2}(\Gamma)} \right)^{1/2}.$$

Тут $H^{s,(0)}(\Omega) := H^s(\Omega)$ для $s \geq 0$; якщо $s < 0$, то $H^{s,(0)}(\Omega)$ є дуальний гільбертів простір до простору $H^{-s}(\Omega)$ відносно розширення за неперервністю скалярного добутку в $L_2(\Omega)$ (див. детальніше п. 3.1).

Зауважимо, що для просторів Соболєва – Ройтберга виконується неперервне і щільне вкладення $H^{s+\delta,(k)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,(k)}(\Omega)$ при $\delta > 0$. Окрім того, якщо $s > k-1/2$, то простори $H^{s,(k)}(\Omega)$ і $H^s(\Omega)$ рівні як поповнення лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за еквівалентними нормами. Тому оператор (2.1), де $\varphi(t) \equiv t^s$, і оператор (2.3) рівні при $s > m+1/2$.

Згідно зі згаданим результатом [182] (теорема 4.1.3) ядро оператора (2.3) збігається з N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ таких, що задовольняють умову (2.2), у якій замість $N_\star$ фігурує деякий скінченновимірний простір, що лежить в $C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{r-q}$ і не залежить від s. Звідси негайно випливає рівність

$$(A,B)(H^{s_2,(r)}(\Omega)) = \mathcal{H}^{s_2-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)(H^{s_1,(r)}(\Omega)) \quad \text{при} \quad s_1 < s_2.$$

Зокрема,

$$
\begin{gathered}
(A,B)(H^{(s)}(\Omega)) = \mathcal{H}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)(H^{m,(r)}(\Omega)) \\
\text{при} \quad m+1/2 < s \in \mathbb{R}.
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

Згідно з [146] (теорема 4.1.4) простір $(A,B)(H^{m,(r)}(\Omega))$ складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{m-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (2.2), де $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ є також продовженням за неперервністю скалярного добутку в $L_2(\Gamma)$. Тим самим, обґрунтовано висновок теореми 2.1 про опис області значень оператора (2.1) у соболєвському випадку і за умови $m \geq 2q$.

Доведемо тепер цю теорему у загальному випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром, застосованої до пар відповідних просторів Соболєва. А саме, нехай параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$ такий, що $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. Візьмемо дійсні числа l_0 і l_1, які задовольняють умови $m + 1/2 < l_0 < \sigma_0(\varphi)$ і $\sigma_1(\varphi) < l_1$. Відображення (1.24) продовжується за неперервністю до обмежених і нетерових операторів

$$
(A,B) : \; H^{(l_i)}(\Omega) \to \mathcal{H}^{(l_i-2q)}(\Omega,\Gamma), \quad i \in \{0,1\},
\tag{2.5}
$$

які діють у соболєвських просторах. Тут

$$
\mathcal{H}^{(l_i-2q)}(\Omega,\Gamma) := H^{(l_i-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(l_i-m_j-1/2)}(\Gamma).
$$

Оператори (2.5) мають спільне ядро N, однаковий індекс, який дорівнює $\dim N - \dim N_\star$, і області значень

$$
(A,B)\bigl(H^{(l_i)}(\Omega)\bigr) = \bigl\{(f,g) \in \mathcal{H}^{(l_i-2q)}(\Omega,\Gamma) : \text{ виконується } (2.2)\bigr\}.
\tag{2.6}
$$

Нехай ψ є інтерполяційним параметром з твердження 1.8, в якому $\eta := \varphi$, $s_0 := l_0$ і $s_1 := l_1$. На підставі твердження 1.10 з обмеженості та нетеровості операторів (2.5) випливає обмеженість і нетеровість оператора

$$
(A,B) : \; \bigl[H^{(l_0)}(\Omega), H^{(l_1)}(\Omega)\bigr]_\psi \to \bigl[\mathcal{H}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_\psi.
\tag{2.7}
$$

Він є звуженням оператора (2.5), де $i=0$. Доведемо, що (2.7) — це оператор (2.1) з теореми 2.1.

На підставі твердження 1.8 отримаємо такі рівності просторів разом з еквівалентністю норм у них:

$$\bigl[H^{(l_0)}(\Omega),H^{(l_1)}(\Omega)\bigr]_{\psi}=H^{\varphi}(\Omega), \tag{2.8}$$

$$\bigl[H^{(l_0-2q)}(\Omega),H^{(l_1-2q)}(\Omega)\bigr]_{\psi}=H^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega); \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered}\bigl[H^{(l_0-m_j-1/2)}(\Gamma),H^{(l_1-m_j-1/2)}(\Gamma)\bigr]_{\psi}=\\ =H^{\varphi\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma),\quad \text{де}\quad j\in\{1,\ldots,q\}.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Пояснимо останні дві рівності. Формулу (2.9) дістали, поклавши

$$\alpha:=\varphi\varrho^{-2q},\quad s_0:=l_0-2q,\quad s_1:=l_1-2q$$

у твердженні 1.8. Аналогічно, формулу (2.10) отримали, поклавши в цьому ж твердженні

$$\alpha:=\varphi\varrho^{-m_j-1/2},\quad s_0:=l_0-m_j-1/2,\quad s_1:=l_1-m_j-1/2.$$

На підставі рівностей (2.9) та (2.10) отримаємо згідно з твердженням 1.11 таку рівність:

$$\begin{gathered}\bigl[\mathcal{H}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma),\mathcal{H}^{(l_1-2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi}=\\ =\bigl[H^{(l_0-2q)}(\Omega),H^{(l_1-2q)}(\Omega)\bigr]_{\psi}\oplus\\ \oplus\bigoplus_{j=1}^{q}\bigl[H^{(l_0-m_j-1/2)}(\Gamma),H^{(l_1-m_j-1/2)}(\Gamma)\bigr]_{\psi}=\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma).\end{gathered} \tag{2.11}$$

З рівностей (2.8) і (2.11) випливає, що обмежений і нетерів оператор (2.7) діє в парі просторів (2.1). Оскільки цей оператор є продовженням за неперервністю відображення (1.24), то він є оператором (2.1). На підставі твердження 1.10 ядро цього оператора та його індекс збігаються з спільним ядром N і однаковим індексом $\dim N-\dim N_{\star}$ обох операторів (2.5). Окрім того, область значень значень оператора (2.1) дорівнює

$$(A,B)\bigl(H^{\varphi}(\Omega)\bigr)=\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)\cap(A,B)\bigl(H^{(l_0)}(\Omega)\bigr)= \\ =\bigl\{(f,g)\in\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma):\ \text{вірно (2.2)}\bigr\}. \tag{2.12}$$

Тут використали рівність (2.6) та вкладення

$$\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)\hookrightarrow\mathcal{H}^{(l_0-2q)}(\Omega,\Gamma),$$

яке випливає з властивості (1.5). Отже, доведено всі властивості оператора (2.1), сформульовані в теоремі 2.1.

Теорему 2.1 доведено.

Зауважимо, що умову $\sigma_0(\varphi)>m+1/2$ у теоремі 2.1 не можна відкинути чи послабити. Зокрема, якщо $\varphi(t)\equiv t^s$ для деяких дійсного $s\leq m_j+1/2$ і цілого $j\in\{1,\ldots,q\}$, то відображення $u\mapsto B_ju$, де $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$, не можна продовжити до неперервного лінійного оператора, що діє з простору Соболєва $H^{(s)}(\Omega)$ у лінійний топологічний простір $\mathcal{D}'(\Gamma)$ усіх розподілів на Γ (див., наприклад, [165], зауваження 3.5).

Для соболєвських просторів теорема 2.1 є результатом робіт С. Агмона, А. Дугліса і Л. Ніренберга [1] (розд. 5), Ф. Е. Браудера [121], М. Шехтера [103], Ж. Петре [176] та інших. Зауважимо, що у випадку $m\geq 2q$, мабуть, уперше Б. Р. Вайнберг і В. В. Грушин [15] (§ 4, формула (76)) звернули увагу на те, що в описі (2.2) області значень оператора (A,B) треба використовувати вираз вигляду

$$\sum_{j=1}^{m-2q+1}(D_\nu^{j-1}f,w_j)_\Gamma.$$

Для просторів Хермандера теорему 2.1 довели В. А. Михайлець і О. О. Мурач [57] (п. 4) у випадку, коли функція φ правильно змінна на нескінченності і $m\leq 2q-1$ (див. також їх монографії [64, 165], п. 4.1.1). Згодом А. В. Аноп [4] (теорема 1) довела цю теорему для усіх $\varphi\in\mathrm{RO}$ з

$\sigma_0(\varphi) > m+1/2$, але за припущення $m \leq 2q-1$; див. також роботи А. В. Аноп і О. О. Мурача [3, 5, 6], де розглянуто різні класи еліптичних крайових задач з $m \leq 2q-1$ і припускається, що принаймні $\sigma_0(\varphi) > 2q-1/2$. Проте в [4] (теорема 1), як і в інших щойно згаданих роботах, не використовували простір $N_\star$ для опису області значень оператора (2.1). Такий опис міститься у статті І. С. Чепурухіної [100] (теорема 1) і стосується того ж самого випадку, коли $m \leq 2q-1$ і $\sigma_0(\varphi) > 2q-1/2$ (див. також її попередню роботу [98], де розглянуто правильно змінні функції φ). Зауважимо, що існує досить широкий клас еліптичних з параметром крайових задач [109] (§ 3), для яких оператор (2.1) є ізоморфізмом [110] і для їх розв'язків виконується двобічна апріорна оцінка зі сталими, незалежними від параметра (див. також [60] (п. 7) і [64, 165] (п. 4.1.4), де розглянуто правильно змінні функції φ з $\sigma_0(\varphi) > 2q$). У роботі [110] ізоморфізм та оцінку доведено без обмежень на m і за умови $\sigma_0(\varphi) > \max\{0, m+1/2\}$.

Отже, теорема 2.1 є новим результатом у випадку $m \geq 2q$ (крайові умови вищих порядків). Окрім того, її висновок про опис області значень оператора (2.1) є новим результатом і у випадку $m \leq 2q-1$, якщо $m+1/2 < \sigma_0(\varphi) \leq 2q-1/2$.

2.2. Ізоморфізми, породжені задачею

Якщо $N=\{0\}$ і $N_\star=\{0\}$, то оператор (2.1) здійснює ізоморфізм між просторами $H^{\varphi}(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$. Це негайно випливає з теореми 2.1 і теореми Банаха про обернений оператор. У загальній ситуації оператор (2.1) породжує ізоморфізм між деякими їх підпросторами скінченної ковимірності. Ці підпростори і проектори на них зручно будувати у такий спосіб.

Розглянемо розклад простору $H^{\varphi}(\Omega)$, де $\sigma_0(\varphi)>0$, у пряму суму підпросторів

$$H^{\varphi}(\Omega)=N\dotplus\big\{u\in H^{\varphi}(\Omega):\,(u,w)_{\Omega}=0\ \text{ для всіх }\ w\in N\big\}\tag{2.13}$$

(як звичайно, знак $\dotplus$ служить для позначення прямої суми підпросторів). Ця рівність правильна, оскільки вона є звуженням розкладу простору $L_2(\Omega)$ в ортогональну суму підпростору N і його доповнення. Стосовно розкладу простору $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ скористаємося таким результатом.

Лема 2.1. *Існує скінченновимірний простір $G\subset C^{\infty}(\overline{\Omega})\times(C^{\infty}(\Gamma))^{q}$ такий, що для кожного $\varphi\in\mathrm{RO}$ з $\sigma_0(\varphi)>m+1/2$ правильний розклад простору $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ у пряму суму підпросторів*

$$\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)=G\dotplus\big\{(f,g)\in\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma):\textit{виконується}\ (2.2)\big\};\tag{2.14}$$

при цьому $\dim G=\dim N_{\star}$.

Доведення. Якщо $m\leq 2q-1$, то рівність (2.14) отримуємо, поклавши $G:=N_{\star}$. Справді, згідно з теоремою 2.1 підпростори G і

$$\big\{(f,g)\in\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma):\text{виконується }(2.2)\big\}$$

мають тривіальний перетин і скінченна вимірність першого з них дорівнює ковимірності другого, що тягне за собою рівність (2.14) для $G=N_{\star}$.

Розглянемо тепер випадок, коли $m\geq 2q$ (тоді $r=m+1$). Скористаємося обмеженим нетеровим оператором (2.3) для $s:=m$. Згідно з [146] (теорема 4.1.4) вимірність коядра цього оператора дорівнює $\dim N_{\star}$. Лінійний многовид $C^{\infty}(\overline{\Omega})\times(C^{\infty}(\Gamma))^{q}$ щільний у просторі $\mathcal{H}^{m-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$. Тому на підставі [21] (лема 2.1) існує скінченновимірний простір $G\subset C^{\infty}(\overline{\Omega})\times(C^{\infty}(\Gamma))^{q}$ такий, що

$$\mathcal{H}^{m-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)=G\dotplus(A,B)(H^{m,(r)}(\Omega)).\tag{2.15}$$

Звідси випливає, що $\dim G = \dim N_{\star}$.

Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$, $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$, а число s задовольняє умову $m + 1/2 < s < \sigma_0(\varphi)$. Тоді виконуються неперервні вкладення

$$\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{H}^{(s-2q)}(\Omega,\Gamma) = \mathcal{H}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) \hookrightarrow \mathcal{H}^{m-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$$

на підставі (1.5) і того, що простори $H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega)$ і $H^{(s-2q)}(\Omega)$ рівні з точністю до еквівалентності норм при $s - 2q > r - 2q - 1/2$, як це зазначалося у доведенні теореми 2.1. Окрім того, $G \subset \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$. Тому з рівності (2.15) випливає формула

$$\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma) = G \dotplus \big((A,B)(H^{m,(r)}(\Omega)) \cap \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)\big). \tag{2.16}$$

Згідно з [146] (теорема 4.1.4) область значень $(A,B)(H^{m,(r)}(\Omega))$ оператора (2.3), де $s = m$, складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{m-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (2.2). Тому другий доданок у сумі (2.16) складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють (2.2). Отже, (2.16) перетворюється на рівність (2.14). У ній, згідно з нашими міркуваннями, простір G не залежить від φ.

Лему 2.1 доведено.

Позначимо через P і Q косі проектори відповідно просторів $H^{\varphi}(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ на другі доданки в сумах (2.13) і (2.14) паралельно першим доданкам. Звісно, ці проектори не залежать від φ.

Теорема 2.2. *Нехай* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *і* $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$. *Тоді звуження відображення* (2.1) *на підпростір* $P(H^{\varphi}(\Omega))$ *є ізоморфізмом*

$$(A,B) :\ P(H^{\varphi}(\Omega)) \leftrightarrow Q(\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)). \tag{2.17}$$

Доведення. Згідно з теоремою 2.1, N — ядро, а $Q(\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma))$ — область значень оператора (2.1). Тому звуження відображення (2.1) на простір $P(H^{\varphi}(\Omega))$ є обмеженим лінійним бієктивним оператором. Отже, він є ізоморфізмом (2.17) за теоремою Банаха про обернений оператор.

Теорему 2.2 доведено.

Історичні коментарі до цієї теореми такі самі, як і до теореми 2.1. Зауважимо лише, що А. В. Аноп [4] (теорема 2) довела версію цієї теореми у випадку $m \leq 2q-1$, при цьому простір $N_{\star}$ не був використаний.

2.3. Локальна апріорна оцінка розв'язків

Дослідимо властивості узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23) у просторах Хермандера. Нагадаємо означення цих розв'язків. Покладемо

$$H^{m+1/2+}(\Omega) := \bigcup_{\substack{\alpha\in\mathrm{RO}:\\ \sigma_0(\alpha)>m+1/2}} H^{\alpha}(\Omega) = \bigcup_{s>m+1/2} H^{(s)}(\Omega);$$

тут остання рівність правильна з огляду на властивість (1.5). Функцію $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ називаємо (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (1.22), (1.23) з правою частиною $(f,g) \in \mathcal{D}'(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^{q}$, якщо $(A,B)u = (f,g)$, де (A,B) — обмежений оператор (2.1). Тут, як звичайно, $\mathcal{D}'(\Omega)$ і $\mathcal{D}'(\Gamma)$ позначають топологічні простори усіх розподілів на Ω і Γ відповідно.

Теорема 2.3. *Нехай параметри $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\lambda \in \mathbb{R}$ задовольняють нерівності $\sigma_0(\varphi) > m+1/2$ і $0 < \lambda < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2$, а функції $\chi, \eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ задовольняють умову $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Тоді існує число $c = c(\varphi, \lambda, \chi, \eta) > 0$ таке, що для довільної функції $u \in H^{\varphi}(\Omega)$ виконується оцінка*

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi}(\Omega)} \leq c \left(\|\eta(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-\lambda}}(\Omega)} \right). \tag{2.18}$$

Тут c не залежить від u.

Зауваження 2.1. У випадку, коли $\chi = \eta = 1$, нерівність (2.18) є глобальною апріорною оцінкою узагальненого розв'язку u еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23). У цьому випадку умову $\lambda < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2$ можна прибрати. Взагалі, нерівність (2.18) є локальною апріорною оцінкою розв'язку u. Справді, для кожної непорожньої відкритої (у топології $\overline{\Omega}$) підмножини множини $\overline{\Omega}$, можна вибрати функції χ, η так, щоб вони задовольняли умову теореми 2.3 і їх носії лежали в цій підмножині. Якщо $0 < \lambda \leq 1$, то у нерівності (2.18) можна узяти $\chi(A, B)u$ замість $\eta(A, B)u$.

Доведення. У випадку, коли $\chi = \eta = 1$, ця теорема є наслідком скінченновимірності ядра і замкнености області значень оператора (2.1), доведених у теоремі 2.1, та компактності вкладення $H^{\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{\varphi\varrho^{-\lambda}}(\Omega)$ (твердження 1.4). Це стверджує лема Петре [176] (лема 3). У цьому випадку λ — довільне додатне число. Таким чином, існує число $\tilde{c} = \tilde{c}(\varphi, \lambda) > 0$ таке, що для довільної функції $v \in H^{\varphi}(\Omega)$ виконується глобальна апріорна оцінка

$$\|v\|_{H^{\varphi}(\Omega)} \leq \tilde{c}\left(\|(A, B)v\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|v\|_{H^{\varphi\varrho^{-\lambda}}(\Omega)}\right). \tag{2.19}$$

Виведемо з цієї оцінки теорему 2.3 для $\lambda = 1$. Зауважимо спочатку, що нерівність $\lambda < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2$, вказана в умові цієї теореми, виконується для $\lambda = 1$. Довільно виберемо функцію $u \in H^{\varphi}(\Omega)$. Нехай функції $\chi, \eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ такі як в умові теореми 2.3. Узявши $v := \chi u \in H^{\varphi}(\Omega)$ і $\lambda := 1$ в оцінці (2.19), запишемо

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi}(\Omega)} \leq \tilde{c}\left(\|(A, B)(\chi u)\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\chi u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}\right). \tag{2.20}$$

Переставивши оператор множення на функцію χ з диференціальними операторами A і $B_1, \ldots, B_q$, отримаємо рівність

$$(A, B)(\chi u) = (A, B)(\chi\eta u) = \chi(A, B)(\eta u)+$$
$$+(A', B')(\eta u) = \chi(A, B)u + (A', B')(\eta u).$$

Тут A' — деякий лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ порядку $\operatorname{ord} A' \leq 2q-1$, а $B' := (B'_1, \ldots, B'_q)$ — набір деяких крайових лінійних диференціальних операторів на Γ, порядки яких задовольняють умову $\operatorname{ord} B'_j \leq m_j - 1$ для кожного $j \in \{1, \ldots, q\}$. При цьому всі коефіцієнти операторів A' і B'_j належать до $C^\infty(\overline{\Omega})$ і $C^\infty(\Gamma)$ відповідно. Таким чином,

$$(A, B)(\chi u) = \chi(A, B)u + (A', B')(\eta u). \tag{2.21}$$

Згідно з твердженням 1.12 виконується нерівність

$$\|(A', B')(\eta u)\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} \leq c_1 \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}. \tag{2.22}$$

Тут і далі у доведенні через $c_1, \ldots, c_7$ позначено деякі додатні числа, не залежні від u.

На підставі формул (2.20) – (2.22) отримаємо нерівності

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi}(\Omega)} \leq \tilde{c} \big(\|\chi(A, B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} +$$
$$+ \|(A', B')(\eta u)\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\chi u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}\big) \leq$$
$$\leq \tilde{c}\, \|\chi(A, B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \tilde{c}\, c_1 \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)} + \tilde{c}\, \|\chi u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}.$$

Тут на підставі твердження 1.12 маємо

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)} = \|\chi\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)} \leq c_2 \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}.$$

Отже,

$$\|\chi u\|_{H^{\varphi}(\Omega)} \leq c_3 \big(\|\chi(A, B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-1}}(\Omega)}\big). \tag{2.23}$$

З цієї нерівності випливає потрібна оцінка (2.18), оскільки

$$\|\chi(A, B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} = \|\chi\eta(A, B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} \leq$$
$$\leq c_4 \|\eta(A, B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)}$$

на підставі твердження 1.12. Теорему 2.3 доведено у випадку, коли $\lambda = 1$. Звісно, її висновок правильний і якщо $0 < \lambda < 1$.

Доведемо тепер цю теорему у випадку, коли

$$1 < \lambda < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2. \tag{2.24}$$

Для кожного дійсного числа $l \geq 1$ позначимо через $\mathcal{P}_l$ висновок теореми 2.3 у випадку, коли $\lambda = l$. А саме, $\mathcal{P}_l$ позначає таке твердження: для довільних функцій $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\chi, \eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$, які задовольняють умови $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$, $l < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$, існує число $c = c(\varphi, l, \chi, \eta) > 0$ таке, що для довільної функції $u \in H^\varphi(\Omega)$ виконується нерівність (2.18) з $\lambda = l$. Істинність твердження $\mathcal{P}_1$ доведена вище. Довільно виберемо дійсні числа $l \geq 1$ і $\delta \in (0, 1]$. Доведемо, що $\mathcal{P}_l \Rightarrow \mathcal{P}_{l+\delta}$.

Припустимо, що твердження $\mathcal{P}_l$ істинне. Нехай функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ та $\chi, \eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ задовольняють умови $\sigma_0(\varphi) > m+1/2$, $l+\delta < \sigma_0(\varphi) - m + 1/2$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Тоді знайдеться функція $\eta_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\eta_1 = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\eta_1$. За припущенням, існує число $c_5 > 0$ таке, що для довільної функції $u \in H^\varphi(\Omega)$ виконується оцінка

$$\|\chi u\|_{H^\varphi(\Omega)} \leq c_5\bigl(\|\eta_1(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta_1 u\|_{H^{\varphi\varrho^{-l}}(\Omega)}\bigr). \tag{2.25}$$

Оскільки $\sigma_0(\varphi\varrho^{-l-\delta+1}) > m+1/2$, то на підставі твердження $\mathcal{P}_1$ маємо оцінку

$$\begin{gathered}\|\eta_1 u\|_{H^{\varphi\varrho^{-l}}(\Omega)} \leq \|\eta_1 u\|_{H^{\varphi\varrho^{-l-\delta+1}}(\Omega)} \leq \\ \leq c_6\bigl(\|\eta(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-l-\delta+1-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-l-\delta}}(\Omega)}\bigr).\end{gathered} \tag{2.26}$$

Окрім того,

$$\begin{gathered}\|\eta_1(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} = \|\eta_1\eta(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} \leq \\ \leq c_7\|\eta(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)}.\end{gathered} \tag{2.27}$$

На підставі оцінок (2.25) – (2.27) запишемо

$$\begin{gathered}\|\chi u\|_{H^\varphi(\Omega)} \leq c_5c_7\|\eta(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \\ +c_5c_6\bigl(\|\eta(A,B)u\|_{\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta u\|_{H^{\varphi\varrho^{-l-\delta}}(\Omega)}\bigr),\end{gathered}$$

тобто отримали нерівність (2.18) з $\lambda = l + \delta$. Імплікацію $\mathcal{P}_l \Rightarrow \mathcal{P}_{l+\delta}$ обґрунтовано.

Тепер можемо довести теорему 2.3 у випадку (2.24). За доведеним, правильний ланцюжок імплікацій

$$\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mathcal{P}_{[\lambda]} \Rightarrow \mathcal{P}_\lambda,$$

де твердження $\mathcal{P}_1$ істинне, а $\mathcal{P}_\lambda$ є висновком теореми 2.3 у досліджуваному випадку (як звичайно, $[\lambda]$ — ціла частина числа λ). Тому цей висновок є також істинним.

Теорему 2.3 доведено.

У зауваженні 2.1 потребують обґрунтування друге і останнє речення. Друге речення обґрунтоване у першому абзаці доведення цієї теореми, а останнє речення є прямим наслідком оцінки (2.23).

Для соболєвських просторів апріорну оцінку (2.18) та її версії доведено у роботах С. Агмона, А. Дугліса і Л. Ніренберга [1] (розд. 5), Ф. Е. Браудера [121], Ж. Петре [176], Л. Хермандера [95] (пп. 10.4 і 10.5), М. Шехтера [103] та інших. Зауважимо, що згідно з вже згаданою лемою Петре [176] (лема 3) з глобальної апріорної оцінки випливає скінченновимірність ядра оператора (2.1) і замкненість його області значень.

Для просторів Хермандера глобальну апріорну оцінку (2.18) (випадок $\chi = \eta = 1$) отримали В. А. Михайлець і О. О. Мурач [57, с. 369] (для правильно змінних функціональних параметрів φ) і А. В. Аноп [4] (для функціональних параметрів φ класу RO) за умови, що $m \leq 2q - 1$.

Отже, теорема 2.3 є новим результатом як для регулярних, так і для нерегулярних еліптичних крайових задач.

2.4. Регулярність розв'язків

Дослідимо регулярність узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23). Нехай V — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, яка має непорожній перетин з областю Ω. Покладемо $\Omega_0 := \Omega \cap V$ і $\Gamma_0 := \Gamma \cap V$ (можливий випадок, коли $\Gamma_0 = \varnothing$). Для довільного параметра $\alpha \in \mathrm{RO}$ введемо локальні аналоги просторів $H^\alpha(\Omega)$ і $H^\alpha(\Gamma)$.

За означенням, лінійний простір $H^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ складається з усіх розподілів $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ таких, що $\chi u \in H^\alpha(\Omega)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Аналогічно, лінійний простір $H^\alpha_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ складається з усіх розподілів $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi h \in H^\alpha(\Gamma)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\Gamma)$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$.

Теорема 2.4. *Нехай функція $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1.22), (1.23), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f,g) \in H^{\varphi\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \times \prod_{j=1}^{q} H^{\varphi\varrho^{-m_j-1/2}}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0) =: \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \qquad (2.28)$$

для деякого функціонального параметра $\varphi \in \mathrm{RO}$ такого, що $\sigma_0(\varphi) > m+1/2$. Тоді розв'язок $u \in H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.

Доведення. Спочатку обґрунтуємо цю теорему у випадку, коли $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \Gamma$. У цьому випадку локальні простори $H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ і $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ збігаються з просторами $H^\varphi(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)$ відповідно. Тому теорема 2.4 стверджує, що регулярність узагальненого розв'язку u підвищується глобально, тобто в усій області Ω аж до її межі Γ. За умовою, $u \in H^{(s)}(\Omega)$ для деякого дійсного числа s такого, що $m+1/2 < s < \sigma_0(\varphi)$, і

$$(f,g) = (A,B)u \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma).$$

Тому

$$(f,g)\in\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma)\cap(A,B)(H^{(s)}(\Omega))=(A,B)(H^{\varphi}(\Omega));$$

тут рівність правильна на підставі теореми 2.1. Отже, поряд з умовою $(A,B)u=(f,g)$ виконується рівність $(A,B)v=(f,g)$ для деякого $v\in H^{\varphi}(\Omega)$. Тому $(A,B)(u-v)=0$, що за теоремою 2.1 тягне за собою включення $w:=u-v\in N\subset C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Звідси $u=v+w\in H^{\varphi}(\Omega)$. У розглянутому випадку теорему 2.4 доведено.

Доведемо її в загальному випадку. Довільно виберемо відкриту множину $V_1\subset\mathbb{R}^n$ таку, що $\overline{V_1}\subset V$ і $\Omega\cap V_1\neq\varnothing$ та покладемо $\Omega_1:=\Omega\cap V_1$ і $\Gamma_1:=\Gamma\cap V_1$. Доведемо, що $u\in H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1,\Gamma_1)$.

Нехай функції $\chi,\eta\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ такі, що їх носії лежать в $\Omega_0\cup\Gamma_0$ і $\chi=1$ в околі $\Omega_1\cup\Gamma_1$ та $\eta=1$ на $\operatorname{supp}\chi$. За умовою, $u\in H^{(s)}(\Omega)$ для деякого $s\in\mathbb{R}$ такого, що $m+1/2<s<\sigma_0(\varphi)$, і

$$(A,B)u=(f,g)\in\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0).$$

Тому

$$(A,B)(\chi u)=\eta(A,B)(\chi u)=\eta(f,g)-\eta(A,B)((1-\chi)u).$$

Використовуючи проектор Q з теореми 2.2, запишемо

$$(A,B)(\chi u)=Q(\eta(f,g))+F,$$

де

$$F:=(1-Q)(\eta(f,g))-\eta(A,B)((1-\chi)u).$$

Оскільки $Q(\eta(f,g))\in Q(\mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega,\Gamma))$, то

$$F=(A,B)(\chi u)-Q(\eta(f,g))\in Q\bigl(\mathcal{H}^{\varrho^{s-2q}}(\Omega,\Gamma)\bigr).$$

За теоремою 2.2, існують функції $u_1\in H^{\varphi}(\Omega)$ і $u_2\in H^{(s)}(\Omega)$ такі, що $(A,B)u_1=Q(\eta(f,g))$ і $(A,B)u_2=F$. Тоді $(A,B)(\chi u-u_1-u_2)=0$, звідки

$$w := \chi u - u_1 - u_2 \in N \subset C^\infty(\overline{\Omega})$$

на підставі теореми 2.1. Помітимо, що $F \in \mathcal{H}^{\varrho^{l-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1)$ для кожного дійсного числа $l > \sigma_1(\varphi)$, оскільки $(1-Q)(\eta(f,g)) \in N_\star$ і $\eta(A,B)((1-\chi)u) = 0$ на $\Omega_1 \cup \Gamma_1$. Тому

$$u_2 \in H^{\varrho^l}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1) \subset H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1)$$

згідно з відомою властивістю локального підвищення регулярності у просторах Соболєва розв'язків еліптичних крайових задач (див., наприклад, [60] (теорема 5.2) у випадку $m \leq 2q-1$ і [182] (теорема 7.2.1) у випадку $m \geq 2q$). Таким чином,

$$\chi u = u_1 + u_2 + w \in H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1).$$

Отже, $\zeta u = \zeta \chi u \in H^{\varphi}(\Omega)$ для довільної функції $\zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp} \zeta \subset \Omega_1 \cup \Gamma_1$, тобто $u \in H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_1, \Gamma_1)$. Тепер $u \in H^{\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ згідно із зробленим вибором множини V_1.

Теорему 2.4 доведено.

Якщо $\Gamma_0 = \varnothing$ і $\Omega_0 = \Omega$, то згідно з теоремою 2.4 регулярність розв'язку u підвищується в околах усіх внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Для соболєвських просторів теорему 2.4 та її версії встановили С. Агмон, А. Дугліс і Л. Ніренберг [1] (розд. 5), Ф. Е. Браудер [121], Ж. Петре [176], М. Шехтер [103] та інші.

Для просторів Хермандера теорему 2.4 довели В. А. Михайлець і О. О. Мурач [57] (п. 5) для правильно змінних функціональних параметрів φ за умови, що $m \leq 2q-1$. У випадку, коли $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > 2q - 1/2$, цю теорему довели А. В. Аноп і О. О. Мурач [6] для регулярних еліптичних крайових задач і А. В. Аноп [5] (теорема 5) для нерегулярних еліптичних крайових задач таких, що $m \leq 2q-1$.

Отже, теорема 2.4 є новим результатом у випадку $m \geq 2q$ та у випадку, коли $m \leq 2q - 1$ і $m + 1/2 < \sigma_0(\varphi) \leq 2q - 1/2$. Зокрема, вона є новим результатом для задачі Діріхле, якщо $q - 1/2 < \sigma_0(\varphi) \leq 2q - 1/2$.

2.5. Достатні умови неперервності узагальнених похідних розв'язків

Як застосування просторів Хермандера встановимо достатні умови неперервності узагальнених похідних (заданого порядку) розв'язків еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23). Ці умови отримаємо за допомогою теореми 2.4 і твердження 1.5.

Теорема 2.5. *Нехай довільно задане ціле число* $p \geq 0$*. Припустимо, що функція* $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1.22), (1.23)*, праві частини якої задовольняють умову* (2.28) *для деякого функціонального параметра* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *такого, що* $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$ *і*

$$\int_1^\infty t^{2p+n-1}\varphi^{-2}(t)dt < \infty. \tag{2.29}$$

Тоді $u \in C^p(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$*.*

Доведення. Довільно виберемо точку $x \in \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ і $\chi = 1$ у деякому околі $V(x)$ точки x. З теореми 2.4, умови (2.29) і твердження 1.5 випливає включення $\chi u \in H^\varphi(\Omega) \subset C^p(\overline{\Omega})$. Тому $u \in C^p(V(x))$. Звідси, з урахуванням довільності вибору точки x, робимо висновок, що $u \in C^p(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$.

Теорему 2.5 доведено.

Зауваження 2.2. Умова (2.29) є точною у теоремі 2.5. А саме, нехай $0 \leq p \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$; тоді з імплікації

$$\bigl(u \in H^{m+1/2+}(\Omega) \ \text{ і } \ (A, B)u \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)\bigr) \ \Rightarrow \ u \in C^p(\Omega_0 \cup \Gamma_0) \qquad (2.30)$$

випливає, що φ задовольняє умову (2.29).

Доведення. Нехай $0 \leq p \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathrm{RO}$ і $\sigma_0(\varphi) > m+1/2$. Припустимо, що імплікація (2.30) істинна. Нехай V — деяка відкрита куля така, що $\overline{V} \subset \Omega_0$. Довільно виберемо функцію $v \in H^{\varphi}(V)$. Згідно з означенням простору $H^{\varphi}(V)$ виконується рівність $v = u \restriction V$ для деякого $u \in H^{\varphi}(\Omega)$. Оскільки $(A, B)u \in \mathcal{H}^{\varphi\varrho^{-2q}}(\Omega, \Gamma)$, то на підставі (2.30) маємо включення $u \in C^p(\Omega_0 \cup \Gamma_0)$. Звідси $v \in C^p(\overline{V})$. Таким чином, $H^{\varphi}(V) \subset C^p(\overline{V})$, що тягне за собою умову (2.29) на підставі твердження 1.5.

Зауваження 2.2 обґрунтовано.

Теорему 2.5 довели А. В. Аноп і О. О. Мурач [6] (теорема 5) для регулярних еліптичних крайових задач за більш сильних умов

$$u \in H^{2q-1/2+}(\Omega) := \bigcup_{s > 2q-1/2} H^{(s)}(\Omega)$$

і $\sigma_0(\varphi) > 2q - 1/2$. У випадку $m \leq 2q$ теорема 2.5 міститься у результаті А. В. Аноп [5] (теорема 6), де на u і φ накладено ці умови.

З теореми 2.5 випливають достатні умови класичності узагальненого розв'язку u еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23). Обговоримо окремо випадки $m \leq 2q - 1$ і $m \geq 2q$.

Перший випадок був досліджений А. В. Аноп [4] (теорема 5). Наведемо його для повноти викладу результатів і для порівняння з другим випадком.

Твердження 2.1. *Нехай $m \leq 2q - 1$. Припустимо, що функція $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1.22), (1.23), *де*

$$f \in H^{\varphi_1 \varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{\varphi_2 \varrho^{-2q}}(\Omega), \tag{2.31}$$

$$g_j \in H^{\varphi_2 \varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma) \quad \textit{при} \quad j \in \{1, \ldots, q\} \tag{2.32}$$

для деяких параметрів $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{RO}$, *які задовольняють умови* $\sigma_0(\varphi_1) > m + 1/2$, $\sigma_0(\varphi_2) > m + 1/2$ *і*

$$\int\limits_1^\infty t^{2q+n-1} \varphi_1^{-2}(t) dt < \infty, \tag{2.33}$$

$$\int\limits_1^\infty t^{2m+n-1} \varphi_2^{-2}(t) dt < \infty. \tag{2.34}$$

Тоді u *— класичний розв'язок, тобто* $u \in C^{2q}(\Omega) \cap C^m(\overline{\Omega})$.

Справді, на підставі теореми 2.5, де покладаємо $p := 2q$, $\varphi := \varphi_1$, $\Omega_0 := \Omega$ і $\Gamma_0 := \varnothing$, та умов (2.31), (2.33) отримаємо включення $u \in C^{2q}(\Omega)$. Далі, на підставі цієї ж теореми, де покладаємо $p := m$, $\varphi := \varphi_2$, $\Omega_0 := \Omega$ і $\Gamma_0 := \Gamma$, та умов (2.31), (2.32), (2.34) маємо включення $u \in C^m(\overline{\Omega})$. Таким чином, u є класичним розв'язком еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23).

Зауважимо, що для правильно змінного функціонального параметра φ твердження 2.1 доведено В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [60] (п. 6) (див. також їх монографії [64, 165], п. 4.1.2).

Дослідимо тепер випадок, коли $m \geq 2q$. У цьому випадку узагальнений розв'язок $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ крайової задачі (1.22), (1.23) називаємо класичним, якщо

$$u \in C^{2q}(\Omega) \cap C^m(U_\varepsilon \cup \Gamma) \quad \text{для деякого числа} \quad \varepsilon > 0.$$

Тут позначено $U_\varepsilon := \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon\}$. Це означення природне, бо у ньому на функцію u накладено найслабшу умову, за якої ліві частини досліджуваної задачі обчислюються за допомогою класичних похідних і є неперервними функціями на Ω і Γ відповідно.

Теорема 2.6. *Нехай $m \geq 2q$. Припустимо, що функція $u \in H^{m+1/2+}(\Omega)$ є узагальненим розв'язком еліптичної крайової задачі* (1.22), (1.23), *де*

$$f \in H^{\varphi_1\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \varnothing) \cap H^{\varphi_2\varrho^{-2q}}_{\mathrm{loc}}(U_\varepsilon, \Gamma), \tag{2.35}$$

$$g_j \in H^{\varphi_2\varrho^{-m_j-1/2}}(\Gamma) \quad \text{при кожному} \quad j \in \{1, \ldots, q\} \tag{2.36}$$

для деякого числа $\varepsilon > 0$ і параметрів $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{RO}$, які задовольняють умови $\sigma_0(\varphi_1) > m + 1/2$, $\sigma_0(\varphi_2) > m + 1/2$ і (2.33), (2.34). *Тоді розв'язок u класичний.*

Доведення. Включення $u \in C^{2q}(\Omega)$ є наслідком умов (2.35) і (2.33) на підставі теореми 2.5, у якій покладаємо $p := 2q$, $\varphi := \varphi_1$, $\Omega_0 := \Omega$ і $\Gamma_0 := \varnothing$. Включення $u \in C^m(U_\varepsilon \cup \Gamma)$ є наслідком умов (2.35), (2.36) і (2.34) на підставі тієї ж теореми, у якій беремо $\Omega_0 := U_\varepsilon$ і $\Gamma_0 := \Gamma$. Таким чином, розв'язок u класичний.

Теорему 2.6 доведено.

2.6. Еліптична за Лавруком задача

Цей і наступний пункти присвячені дослідженню еліптичних крайових задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Їх було введено Б. Лавруком [45, 46, 47] у 1963 році. Вони природно виникають при переході від загальної (нерегулярної) еліптичної крайової до формально спряженої задачі відносно спеціальної формули Гріна. Клас еліптичних за Лавруком крайових задач є замкненим відносно такого переходу. Важливі приклади цих задач виникають у теорії пружності і гідродинаміці [9, 126, 171].

Еліптичні за Лавруком крайові задачі досліджено у соболєвських просторах В. О. Козловим, В. Г. Маз'єю і Й. Россманом [146, розд. 3] в основному для одного еліптичного рівняння та І. Я. Ройтберг [77, 181] для еліптичних систем мішаного порядку (див. також монографію [183, розд. 2]). Було доведено теореми про нетеровість обмежених операторів, що відповідають цим задачам, і породжені ними ізоморфізми, та теореми про апріорні оцінки розв'язків задач і підвищення регулярності розв'язків.

У різних класах гільбертових просторів Хермандера еліптичні за Лавруком крайові задачі досліджено в статтях О. О. Мурача та І. С. Чепурухіної [98, 99, 100, 125, 169] та в дисертації І. С. Чепурухіної [101]. Втім, важливий випадок, коли максимум порядків крайових операторів більший за порядків еліптичного рівняння, або рівний йому, дотепер не вивчали у просторах Хермандера.

Наведемо постановку еліптичної за Лавруком крайової задачі. Довільно виберемо цілі числа $q \geq 1$, $\varkappa \geq 1$, $m_1, \ldots, m_{q+\varkappa}$ і $r_1, \ldots, r_\varkappa$. Розглянемо в області Ω таку лінійну крайову задачу:

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2.37}$$

$$B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q + \varkappa. \tag{2.38}$$

Тут є невідомими функція u в області Ω і $\varkappa$ функцій $v_1, \ldots, v_\varkappa$ на Γ. У цій задачі A (як і раніше) є лінійним диференціальним оператором на $\overline{\Omega}$ парного порядку $2q \geq 2$, кожне B_j є крайовим лінійним диференціальним оператором на Γ порядку $\operatorname{ord} B_j \leq m_j$, а кожне $C_{j,k} = C_{j,k}(x, D_\tau)$ є дотичним лінійним диференціальним оператором на Γ порядку $\operatorname{ord} C_{j,k} \leq m_j + r_k$. При цьому, як звичайно, $B_j = 0$, якщо $m_j < 0$, і $C_{j,k} = 0$, якщо $m_j + r_k < 0$. Усі коефіцієнти цих диференціальних операторів є нескінченно гладкими функціями, заданими на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно.

Припускаємо, що

$$m := \max\{m_1, \ldots, m_{q+\varkappa}\} = \max\{\operatorname{ord} B_1, \ldots, \operatorname{ord} B_{q+\varkappa}\}.$$

Окрім того, робимо природне припущення про те, що

$$m \geq -r_k \quad \text{для кожного} \quad k \in \{1, \ldots, \varkappa\}. \tag{2.39}$$

(Якщо $m + r_k < 0$ для деякого k, то усі оператори $C_{1,k}$,..., $C_{q+\varkappa,k}$ дорівнюють нулю і тому шукана функція v_k відсутня у крайових умовах (2.38).)

Далі припускаємо, що крайова задача (2.37), (2.38) є еліптичною в області Ω за Лавруком. Наведемо відповідне означення (див., наприклад, [146], п. 3.1.2).

Для кожного номера $j \in \{1, \ldots, m + \varkappa\}$ покладемо

$$B_j^{\circ}(x, \xi) := \sum_{|\mu| = m_j} b_{j,\mu}(x)\xi^{\mu} \quad \text{для довільних} \quad x \in \Gamma, \quad \xi \in \mathbb{C}^n;$$

при цьому $B_j^{\circ}(x, \xi) \equiv 0$, якщо $m_j < \operatorname{ord} B_j$. Якщо $m_j = \operatorname{ord} B_j$, то $B_j^{\circ}(x, \xi)$ є головним символом крайового диференціального оператора $B_j(x, D)$. Окрім того, для будь-яких номерів $j \in \{1, \ldots, m + \varkappa\}$ і $k \in \{1, \ldots, \varkappa\}$ позначимо через $C_{j,k}^{\circ}(x, \tau)$ головний символ дотичного диференціального оператора $C_{j,k}(x, D_\tau)$, якщо $\operatorname{ord} C_{j,k} = m_j + r_k$. Для кожної точки $x \in \Gamma$ вираз $C_{j,k}^{\circ}(x, \tau)$ є однорідним поліномом порядку $m_j + r_k$ змінної τ, де τ— довільний дотичний вектор до межі Γ у точці x. Якщо $\operatorname{ord} C_{j,k} < m_j + r_k$, то покладаємо $C_{j,k}^{\circ}(x, \tau) := 0$.

Означення 2.1. Крайову задачу (2.37), (2.38) називають еліптичною в області Ω за Лавруком, якщо виконуються такі дві умови:

(i) Диференціальний оператор $A(x, D)$ є правильно еліптичним в $\overline{\Omega}$.

(ii) Система крайових умов (2.38) накриває рівняння (2.37) у кожній точці $x \in \Gamma$, тобто для кожного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до Γ у точці x, крайова задача

$$A^{\circ}(x, \tau + \nu(x)D_t)\theta(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \tag{2.40}$$

$$
\begin{gathered}
B_j^{\circ}(x,\tau+\nu(x)D_t)\theta(t)\big|_{t=0}+ \\
+\sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k}^{\circ}(x,\tau)\lambda_k=0, \quad j=1,...,q+\varkappa,
\end{gathered} \tag{2.41}
$$

має лише тривіальний (нульовий) розв'язок. Ця задача розглядається відносно невідомої функції $\theta \in C^{\infty}([0,\infty))$, яка задовольняє умову $\theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, і невідомих комплексних чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_{\varkappa}$. Тут $A^{\circ}(x,\tau+\nu(x)D_t)$ і $B_j^{\circ}(x,\tau+\nu(x)D_t)$ є диференціальними операторами відносно $D_t := i\partial/\partial t$, які отримуємо, поклавши $\zeta := D_t$ у відповідно многочленах $A^{\circ}(x,\tau+\zeta\nu(x))$ і $B_j^{\circ}(x,\tau+\zeta\nu(x))$ змінної ζ.

Розглянемо деякі приклади еліптичних за Лавруком крайових задач.

Приклад 2.1. Нехай $n=2$, $q=1$ і $\varkappa=1$. Припустимо, що диференціальний оператор $A(x,D)$ другого порядку є правильно еліптичним в $\overline{\Omega}$. Розглянемо крайову задачу, яка складається з диференціального рівняння (2.37) і пари крайових умов

$$
\begin{gathered}
\partial_{\nu}^{p}u+v=g_1 \quad \text{на} \quad \Gamma, \\
\partial_{\nu}^{p+1}u+\partial_{\Gamma}v=g_2 \quad \text{на} \quad \Gamma,
\end{gathered}
$$

де довільно вибрано ціле $p \geq 0$. Тут $\partial_{\nu} := \partial/\partial\nu$ — похідна вздовж орта ν, а ∂_{Γ} — похідна вздовж кривої Γ у додатному напряму. Ці крайові умови набирають вигляду (2.38), де $B_1=\partial_{\nu}^{p}$, $B_2=\partial_{\nu}^{p+1}$ і $C_{1,1}=1$, $C_{2,1}=\partial_{\Gamma}$, а $m_1=p$, $m_2=p+1$ і $r_1=-p$. У випадку $p=0$ цей приклад розглянуто в [101] (п. 3.2).

Переконаємося, що розглянута крайова задача є еліптичною за Лавруком в області Ω. Треба перевірити лише, що вона задовольняє умову (ii) означення 2.1. Виберемо довільно точку $x\in\Gamma$ і вектор $\tau\neq 0$, дотичний до Γ у цій точці. Загальний розв'язок диференціального рівняння (2.40), який задовольняє умову $\theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, записується у вигляді

$$\theta(t) = c \exp(-i\zeta_{-}(x,\tau)t), \tag{2.42}$$

де c є довільним комплексним числом, а $\zeta_{-}(x,\tau)$ є ζ-коренем многочлена $A^{\circ}(x, \tau + \zeta\nu(x))$ таким, що $\operatorname{Im} \zeta_{-}(x,\tau) < 0$. Для розглянутої крайової задачі умови (2.41) набирають вигляду

$$\theta^{(p)}(0) + \lambda_1 = 0, \tag{2.43}$$

$$\theta^{(p+1)}(0) \mp i|\tau|\lambda_1 = 0. \tag{2.44}$$

Справді, оскільки

$$B_j(x, D) = \partial_{\nu}^{p+j-1} = (-i)^{p+j-1} D_{\nu}^{p+j-1}$$

для кожного номера $j \in \{1, 2\}$, то в умові (iii)

$$B_j^{\circ}(x, \tau + \zeta\nu(x)) = (-i\zeta)^{p+j-1}.$$

Отже,

$$B_j^{\circ}(x, \tau + \nu(x)D_t)\theta(t) = (-iD_t)^{p+j-1}\theta(t) = \theta^{(p+j-1)}(t). \tag{2.45}$$

Окрім того,

$$C_{2,1}(x, D_{\Gamma}) = \partial_{\Gamma} = \frac{\pm\tau_1}{|\tau|}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\pm\tau_2}{|\tau|}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\mp i}{|\tau|}(\tau_1 D_1 + \tau_2 D_2),$$

де записуємо $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ і вибираємо верхній (відповідно нижній) знак, якщо дотичний вектор τ направлений у бік додатного (від'ємного) обходу кривої Γ. Тому

$$C_{2,1}^{\circ}(x, \tau) = \frac{\mp i}{|\tau|}(\tau_1^2 + \tau_2^2) = \mp i|\tau|. \tag{2.46}$$

З огляду на (2.45) і (2.46) робимо висновок, що крайова умова (2.41) при $j = 1$ набирає вигляду (2.43), а при $j = 2$ — вигляду (2.44).

Підставивши (2.42) в умови (2.43) і (2.44), запишемо

$$(-i\zeta_-(x,\tau))^p c + \lambda_1 = 0,$$

$$(-i\zeta_-(x,\tau))^{p+1} c \mp i|\tau|\lambda_1 = 0.$$

Це — система лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $c, \lambda_1 \in \mathbb{C}$. Її визначник

$$\begin{vmatrix} (-i\zeta_-(x,\tau))^p & 1 \\ (-i\zeta_-(x,\tau))^{p+1} & \mp i|\tau| \end{vmatrix} = -i(-i\zeta_-(x,\tau))^p(\pm|\tau| - \zeta_-(x,\tau))$$

відмінний від нуля. Тому ця система має лише тривіальний розв'язок, тобто умова (ii) означення 2.1 виконується. Отже, розглянута у цьому прикладі крайова задача є еліптичною за Лавруком в області Ω.

Приклад 2.2. Нехай $n \geq 2$, $q = 2$ і $\varkappa = 2$. Припустимо, що диференціальний оператор $A(x, D)$ четвертого порядку є правильно еліптичним в $\overline{\Omega}$. Розглянемо крайову задачу, яка складається з диференціального рівняння (2.37) і таких чотирьох крайових умов на Γ:

$$\partial_\nu^p u + v_1 = g_1,$$

$$\partial_\nu^{p+1} u + v_2 = g_2,$$

$$\partial_\nu^{p+2} u + \Delta_\Gamma v_1 = g_3,$$

$$\partial_\nu^{p+3} u + \Delta_\Gamma v_2 = g_4.$$

Тут ціле $p \geq 0$ вибрано довільно, а Δ_Γ позначає, як звичайно, оператор Бельтрамі-Лапласа на Γ, при цьому на Γ введено ріманову метрику, індуковану простором $\mathbb{R}^n$. Ці крайові умови набирають вигляду (2.38), де $B_j = \partial_\nu^{p+j-1}$ для кожного $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, а $C_{1,1} = 1$, $C_{1,2} = 0$, $C_{2,1} = 0$, $C_{2,2} = 1$, $C_{3,1} = \Delta_\Gamma$, $C_{3,2} = 0$, $C_{4,1} = 0$ і $C_{4,2} = \Delta_\Gamma$. Тут $m_j = p + j - 1$ для кожного $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, а $r_1 = -p$ і $r_2 = -p - 1$. У випадку $p = 0$ цей приклад розглянуто в [101] (п. 3.2).

Додатково припустимо, що для довільної точки $x \in \Gamma$ і вектора $\tau \neq 0$, дотичного до Γ у цій точці, многочлен $A^{\circ}(x, \tau + \zeta\nu(x))$ не має кратних ζ-коренів. Це припущення виконується, наприклад, якщо $A = \partial_{\nu}^{4} + \Delta_{\Gamma}^{2}$ на Γ, бо тоді $A^{\circ}(x, \tau + \zeta\nu(x)) = \zeta^{4} + \gamma^{2}(x, \tau)$. Тут $\gamma(x, \tau)$ позначає головний символ оператора Δ_{Γ}; цей символ задовольняє умову $\gamma(x, \tau) < 0$ при $\tau \neq 0$.

Перевіримо, що розглянута крайова задача є еліптичною за Лавруком в області Ω. Треба показати лише, що вона задовольняє умову (ii) означення 2.1. Виберемо довільно точку $x \in \Gamma$ і вектор $\tau \neq 0$, дотичний до Γ у цій точці. Для цієї задачі система крайових умов (2.41) набирає вигляду

$$\theta^{(p)}(0) + \lambda_1 = 0,$$

$$\theta^{(p+1)}(0) + \lambda_2 = 0,$$

$$\theta^{(p+2)}(0) + \gamma(x, \tau)\lambda_1 = 0,$$

$$\theta^{(p+3)}(0) + \gamma(x, \tau)\lambda_2 = 0.$$

Тут $\theta(t)$ — загальний розв'язок диференціального рівняння (2.37), який задовольняє умову $\theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, а λ_1, λ_2 — довільні комплексні числа. Ця система еквівалентна такій:

$$\lambda_1 = -\theta^{(p)}(0),$$

$$\lambda_2 = -\theta^{(p+1)}(0),$$

$$\theta^{(p+2)}(0) - \gamma(x, \tau)\theta^{(p)}(0) = 0, \tag{2.47}$$

$$\theta^{(p+3)}(0) - \gamma(x, \tau)\theta^{(p+1)}(0) = 0. \tag{2.48}$$

Згідно зроблених припущень щодо оператора A розв'язок $\theta(t)$ запишемо у вигляді

$$\theta(t) = c_1 \exp(-i\zeta_1(x, \tau)t) + c_2 \exp(-i\zeta_2(x, \tau)t),$$

де $\zeta_1(x, \tau)$ і $\zeta_2(x, \tau)$ — різні ζ-корені многочлена $A^{(0)}(x, \tau + \zeta\nu(x))$, які мають від'ємну уявну частину, а c_1 і c_2 — довільні комплексні числа. Підставивши цей розв'язок в умови (2.47) і (2.48), отримаємо систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(\zeta_1(x,\tau))^p\gamma_1(x,\tau)c_1 + (\zeta_2(x,\tau))^p\gamma_2(x,\tau)c_2 = 0,$$
$$(\zeta_1(x,\tau))^{p+1}\gamma_1(x,\tau)c_1 + (\zeta_2(x,\tau))^{p+1}\gamma_2(x,\tau)c_2 = 0,$$

відносно невідомих чисел c_1 і c_2, де позначено

$$\gamma_j(x,\tau) := -\zeta_j^2(x,\tau) - \gamma(x,\tau) \quad \text{для кожного} \quad j \in \{1,2\}.$$

Отже, для розглянутої у цьому прикладі крайової задачі умова (ii) означення 2.1 рівносильна тому, що ця система має лише тривіальний розв'язок, тобто її головний визначник

$$(\zeta_1(x,\tau))^p(\zeta_2(x,\tau))^p\gamma_1(x,\tau)\gamma_2(x,\tau)(\zeta_2(x,\tau) - \zeta_1(x,\tau)) \neq 0.$$

Оскільки корені $\zeta_1(x,\tau)$ і $\zeta_2(x,\tau)$ різні та ненульові, то остання умова еквівалентна такій

$$\gamma_1(x,\tau)\gamma_2(x,\tau) \neq 0. \tag{2.49}$$

Покажемо, що ця нерівність виконується. Для кожного номера $j \in \{1,2\}$ запишемо $\zeta_j(x,\tau) = \alpha_j + i\beta_j$, де $\alpha_j \in \mathbb{R}$ та $\beta_j < 0$. Тоді

$$\gamma_j(x,\tau) = -(\alpha_j + i\beta_j)^2 - \gamma(x,\tau) = \beta_j^2 - \alpha_j^2 - \gamma(x,\tau) - 2i\alpha_j\beta_j;$$

тут, нагадаємо, $\gamma(x,\tau) < 0$. Таким чином, якщо $\alpha_j = 0$, то $\gamma_j(x,\tau) > 0$, а якщо $\alpha_j \neq 0$, то $\gamma_j(x,\tau) \notin \mathbb{R}$. Отже, умова (2.49) виконується і тому розглянута крайова задача є еліптичною за Лавруком в області Ω.

Далі припускаємо, що $m \geq 2q$, тобто принаймні один крайовий оператор B_j має порядок $\operatorname{ord} B_j \geq 2q$. Як і раніше, у цьому випадку покладаємо $r := m + 1$.

Пов'яжемо із задачею (2.37), (2.38) лінійне відображення

$$\Lambda : (u, v_1, ..., v_\varkappa) \to$$
$$\to \Big(Au,\ B_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{1,k} v_k, ..., B_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{q+\varkappa,k} v_k\Big), \tag{2.50}$$
$$\text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad v_1, \ldots, v_\varkappa \in C^\infty(\Gamma).$$

Ми досліджуємо властивості продовження за неперервністю цього відображення у підходящих парах гільбертових просторів Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу.

Для опису області значень цього продовження нам потрібна така спеціальна формула Гріна (див. [146], формула (4.1.10)):

$$(Au, \omega)_\Omega + \sum_{j=1}^{r-2q} (D_\nu^{j-1} Au, w_j)_\Gamma + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} \Big(B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k, h_j\Big)_\Gamma =$$
$$= (u, A^+ \omega)_\Omega + \sum_{k=1}^{r} \Big(D_\nu^{k-1} u, K_k \omega + \sum_{j=1}^{r-2q} R_{j,k}^+ w_j + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} Q_{j,k}^+ h_j\Big)_\Gamma +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\varkappa} \Big(v_k, \sum_{j=1}^{q+\varkappa} C_{j,k}^+ h_j\Big)_\Gamma,$$

для довільних функцій $u, \omega \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і

$$v_1, \ldots, v_\varkappa, w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_{q+\varkappa} \in C^\infty(\Gamma).$$

Тут, як звичайно, A^+ — диференціальний оператор, формально спряжений до A. Окрім того, усі $C_{j,k}^+$, $R_{j,k}^+$ і $Q_{j,k}^+$ є дотичними диференціальними операторами, формально спряженими відповідно до $C_{j,k}$, $R_{j,k}$ і $Q_{j,k}$ відносно $(\cdot, \cdot)_\Gamma$. Нагадаємо, що дотичні лінійні диференціальні оператори $R_{j,k} := R_{j,k}(x, D_\tau)$ і $Q_{j,k} := Q_{j,k}(x, D_\tau)$ узяті із зображення крайових диференціальних операторів $D_\nu^{j-1} A$ і B_j у вигляді

$$D_\nu^{j-1} A(x, D) = \sum_{k=1}^{r} R_{j,k}(x, D_\tau) D_\nu^{k-1}, \quad j = 1, \ldots, r-2q,$$

$$B_j(x,D)=\sum_{k=1}^{r}Q_{j,k}(x,D_\tau)D_\nu^{k-1},\quad j=1,\ldots,q+\varkappa.$$

Відмітимо, що $\operatorname{ord}R_{j,k}\leq 2q+j-k$ і $\operatorname{ord}Q_{j,k}\leq m_j-k+1$; при цьому, звісно, $R_{j,k}=0$ при $k\geq 2q+j+1$ і $Q_{j,k}=0$ при $k\geq m_j+2$. Нарешті, кожне $K_k:=K_k(x,D)$ — деякий крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord}K_k\leq 2q-k$ з коефіцієнтами класу $C^\infty(\Gamma)$; при цьому, якщо $k\geq 2q+1$, то $K_k=0$.

Спеціальна формула Гріна приводить до такої крайової задачі в області Ω:

$$A^{+}\omega=\eta\quad\text{в}\quad\Omega,\tag{2.51}$$

$$K_k\omega+\sum_{j=1}^{r-2q}R_{j,k}^{+}w_j+\sum_{j=1}^{q+\varkappa}Q_{j,k}^{+}h_j=\psi_k\quad\text{на}\quad\Gamma,\qquad k=1,...,r,\tag{2.52}$$

$$\sum_{j=1}^{q+\varkappa}C_{j,k}^{+}h_j=\psi_{r+k}\quad\text{на}\quad\Gamma,\quad k=1,...,\varkappa.\tag{2.53}$$

Ця задача містить, окрім невідомої функції ω в області Ω, ще $r-q+\varkappa$ додаткових невідомих функцій $w_1,\ldots,w_{r-2q}$ і $h_1,\ldots,h_{q+\varkappa}$ на межі Γ. Задачу (2.51) – (2.53) називають формально спряженою до задачі (2.37), (2.38) відносно розглянутої спеціальної формули Гріна. Відомо (див. [146], теорема 4.1.1), що еліптичність за Лавруком задачі (2.37), (2.38) рівносильна еліптичності за Лавруком формально спряженої задачі (2.51) – (2.53).

Приклад 2.3. Запишемо спеціальну формулу Гріна для крайової задачі

$$\begin{gathered}\Delta u=f\quad\text{в}\quad\Omega,\\ \partial_\nu u+v=g_1,\quad \partial_\nu^2 u+\partial_\Gamma v=g_2\quad\text{на}\quad\Gamma,\end{gathered}\tag{2.54}$$

заданої в крузі

$$\Omega:=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: x_1^2+x_2^2<1\}.$$

Ця задача є еліптичною за Лавруком в Ω, оскільки вона є окремим випадком еліптичної крайової задачі, розглянутої у прикладі 2.1. Зауважимо, що $\Delta u = \partial_\nu^2 u - \partial_\nu u + \partial_\Gamma^2 u$ на Γ; тут $\partial_\nu = -\partial/\partial\varrho$ і $\partial_\Gamma = \partial/\partial\varphi$, а (ϱ, φ) — полярні координати. Застосувавши другу класичну формулу Гріна для оператора Лапласа, отримаємо такі рівності:

$$(\Delta u, \omega)_\Omega + (\Delta u, w)_\Gamma + (\partial_\nu u + v, h_1)_\Gamma + (\partial_\nu^2 u + \partial_\Gamma v, h_2)_\Gamma =$$

$$= (u, \Delta\omega)_\Omega - (\partial_\nu u, \omega)_\Gamma + (u, \partial_\nu \omega)_\Gamma + (\partial_\nu^2 u - \partial_\nu u + \partial_\Gamma^2 u, w)_\Gamma +$$

$$+ (\partial_\nu u + v, h_1)_\Gamma + (\partial_\nu^2 u + \partial_\Gamma v, h_2)_\Gamma =$$

$$= (u, \Delta\omega)_\Omega + (u, \partial_\nu \omega + \partial_\Gamma^2 w)_\Gamma + (\partial_\nu u, -\omega - w + h_1)_\Gamma +$$

$$+ (\partial_\nu^2 u, w + h_2)_\Gamma + (v, h_1 - \partial_\Gamma h_2)_\Gamma$$

для довільних функцій $u, \omega \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $v, w, h_1, h_2 \in C^\infty(\Gamma)$. Отже, спеціальна формула Гріна для крайової задачі (2.54) набирає вигляду

$$(\Delta u, \omega)_\Omega + (\Delta u, w)_\Gamma + (\partial_\nu u + v, h_1)_\Gamma + (\partial_\nu^2 u + \partial_\Gamma v, h_2)_\Gamma =$$

$$= (u, \Delta\omega)_\Omega + (u, \partial_\nu \omega + \partial_\Gamma^2 w)_\Gamma + (D_\nu u, -i\omega - iw + ih_1)_\Gamma +$$

$$+ (D_\nu^2 u, -w - h_2)_\Gamma + (v, h_1 - \partial_\Gamma h_2)_\Gamma .$$

Тому крайова задача

$$\Delta\omega = \eta \quad \text{в} \quad \Omega,$$

$$\partial_\nu \omega + \partial_\Gamma^2 w = \psi_1, \quad -i\omega - iw + ih_1 = \psi_2 \quad \text{на} \quad \Gamma,$$

$$-w - h_2 = \psi_3, \quad h_1 - \partial_\Gamma h_2 = \psi_4 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

є формально спряженою до задачі (2.54) відносно цієї формули Гріна. Отримана формально спряжена задача містить три додаткові невідомі функції w, h_1 і h_2 на Γ.

2.7. Властивості еліптичної за Лавруком задачі

Сформулюємо теореми про характер розв'язності і властивості розв'язків еліптичної крайової задачі (2.37), (2.38) в уточненій соболєвській шкалі.

Пов'яжемо із задачею (2.37), (2.38) гільбертові простори

$$\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) := H^{s,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma),$$

та

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma) := H^{s-2q,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma),$$

де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Нагадаємо, що $\mathcal{M}$ — множина всіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, які обмежені і відокремлені від нуля на кожному компакті і повільно змінюються на нескінченності за Караматою [143], тобто $\varphi(\lambda t)/\varphi(t) \to 1$ при $t \to \infty$ для кожного числа $\lambda > 0$. Звісно, $\mathcal{M} \subset \mathrm{RO}_0$.

У соболєвському випадку, коли $\varphi(\cdot) \equiv 1$, будемо пропускати індекс φ в позначеннях просторів $\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$.

Позначимо через $\mathcal{N}$ лінійний простір усіх розв'язків

$$(u, v_1, \ldots, v_{\varkappa}) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{\varkappa}$$

крайової задачі (2.37), (2.38) в однорідному випадку, коли $f = 0$ в Ω і кожне $g_j = 0$ на Γ. Аналогічно, позначимо через $\mathcal{N}_{\star}$ лінійний простір усіх розв'язків

$$(\omega, w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_{q+\varkappa}) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{r-q+\varkappa}$$

формально спряженої крайової задачі (2.51) – (2.53) в однорідному випадку, коли $\eta = 0$ в Ω і кожне $\psi_k = 0$ на Γ. Оскільки обидві задачі еліптичні за Лавруком в Ω, то простори $\mathcal{N}$ і $\mathcal{N}_{\star}$ скінченновимірні [146] (наслідок 4.1.1).

На підставі твердження 1.12 відображення (2.50) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$\Lambda : \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma). \tag{2.55}$$

для довільних $s > m + 1/2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$.

Теорема 2.7. *Нехай* $s > m+1/2$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді оператор* (2.55) *нетерів. Його ядро збігається з простором* $\mathcal{N}$, *а область значень складається з усіх векторів*

$$(f, g) := (f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega, \Gamma) \tag{2.56}$$

таких, що

$$\begin{gathered}(f, \omega)_\Omega + \sum_{j=1}^{r-2q} (D_\nu^{j-1} f, w_j)_\Gamma + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} (g_j, h_j)_\Gamma = 0 \\ \text{для всіх} \quad (\omega, w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_{q+\varkappa}) \in \mathcal{N}_\star.\end{gathered} \tag{2.57}$$

Індекс оператора (2.55) *дорівнює* $\dim \mathcal{N} - \dim \mathcal{N}_\star$ *й не залежить від* s *та* φ.

Зауважимо, що в умові (2.57) функції

$$D_\nu^{j-1} f \in H^{(s-2q-j+1/2)}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$$

коректно означені для кожного номера $j \in \{1, \ldots, r-2q\}$ на підставі твердження 1.12 (ii) і нерівності $s > m + 1/2$.

Доведення теореми 2.7. У випадку просторів Соболєва, коли $\varphi(\cdot) \equiv 1$ і $s > m + 1/2$, ця теорема (для загальних еліптичних систем) доведена в статтях І. Я. Ройтберг [77, 181] та в монографії Я. А. Ройтберга [183] (теорема 2.4.1) за виключенням вказаного зв'язку скінченновимірного простору $\mathcal{N}_\star$ з формально спряженою задачею (2.51) – (2.53). За додаткового припущення $s \in \mathbb{Z}$, у повному обсязі теорема 2.7 міститься у результаті, встановленому в монографії В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россмана [146] (наслідок 4.1.1). Доведемо, що і для кожного дробового $s > m + 1/2$ висновок цієї теореми правильний у повному обсязі.

Згідно з [183] (теорема 2.4.1) відображення (2.50) продовжується за неперервністю до обмеженого і нетерового оператора

$$\begin{gathered}\Lambda : H^{s,(r)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{(s+r_k-1/2)}(\Gamma) \to \\ \to H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma)\end{gathered} \tag{2.58}$$

для кожного $s \in \mathbb{R}$ (нагадаємо, що $r = m + 1$). Тут, як і в доведенні теореми 2.1, $H^{s,(k)}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $1 \leq k \in \mathbb{Z}$, є гільбертовим простором Соболєва–Ройтберга [182] (п. 2.1). Нагадаємо, що у випадку $s > k - 1/2$ простори $H^{s,(k)}(\Omega)$ і $H^{s}(\Omega)$ рівні як поповнення лінійного многовиду $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ за еквівалентними нормами. Тому оператор (2.55), де $\varphi(\cdot) \equiv 1$, і оператор (2.58) рівні при $s > m + 1/2$.

З огляду на формулу (2.58) покладемо

$$\mathcal{D}^{s,(r)}(\Omega, \Gamma) := H^{s,(r)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{(s+r_k-1/2)}(\Gamma),$$

$$\mathcal{E}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega, \Gamma) := H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma).$$

Згідно із згаданим результатом [183] (теорема 2.4.1) ядро оператора (2.58) дорівнює $\mathcal{N}$, а область значень складається з усіх векторів

$$(f, g) \in \mathcal{E}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega, \Gamma),$$

які задовольняють умову (2.57), у котрій замість $\mathcal{N}_{\star}$ фігурує деякий скінченновимірний простір, що лежить в

$$C^{\infty}(\overline{\Omega}) \times (C^{\infty}(\Gamma))^{r-q+\varkappa}$$

і не залежить від s. Звідси випливає рівність

$$\Lambda(\mathcal{D}^{s_2,(r)}(\Omega, \Gamma)) = \mathcal{E}^{s_2-2q,(r-2q)}(\Omega, \Gamma) \cap \Lambda(\mathcal{D}^{s_1,(r)}(\Omega, \Gamma))$$

для довільних чисел $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ таких, що $s_1 < s_2$. Зокрема,

$$\Lambda(\mathcal{D}^{s}(\Omega,\Gamma)) = \mathcal{E}^{s-2q}(\Omega,\Gamma) \cap \Lambda(\mathcal{D}^{m,(r)}(\Omega,\Gamma)),$$

$$\text{якщо} \quad m + 1/2 < s \in \mathbb{R}.$$

На підставі [146] (теорема 4.1.4) простір $\Lambda(\mathcal{D}^{m,(r)}(\Omega,\Gamma))$ складається з усіх векторів $(f,g) \in \mathcal{E}^{m-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (2.57). Тому для довільного дійсного $s > m+1/2$ область значень $\Lambda(\mathcal{D}^{s}(\Omega,\Gamma))$ оператора (2.55), де $\varphi(\cdot) \equiv 1$, є такою як це стверджується у теоремі 2.7. Таким чином, у соболєвському випадку ця теорема доведена.

Теорему 2.7 для довільного $\varphi \in \mathcal{M}$ виведемо тепер із соболєвського випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром. Нехай $s > m + 1/2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Покладемо $\varepsilon := \delta := (s - m - 1/2)/2 > 0$. Відображення (2.50) продовжується за неперервністю до обмежених і нетерових операторів

$$\Lambda : \mathcal{D}^{s\mp\varepsilon}(\Omega,\Gamma) \to \mathcal{E}^{s\mp\varepsilon-2q}(\Omega,\Gamma), \tag{2.59}$$

що діють у парах соболєвських просторів. Вони мають спільне ядро $\mathcal{N}$ та однаковий індекс, рівний $\dim\mathcal{N} - \dim\mathcal{N}_{\star}$. Окрім того,

$$\Lambda(\mathcal{D}^{s\mp\varepsilon}(\Omega,\Gamma)) = \bigl\{(f,g) \in \mathcal{E}^{s\mp\varepsilon-2q}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується (2.57)}\bigr\}. \tag{2.60}$$

Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою (1.20), у якій беремо $\varepsilon = \delta$. Застосувавши до (2.59) інтерполяцію з параметром ψ та використавши твердження 1.10, отримаємо нетерів обмежений оператор

$$\Lambda : [\mathcal{D}^{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma), \mathcal{D}^{s+\varepsilon}(\Omega,\Gamma)]_{\psi} \to [\mathcal{E}^{s-\varepsilon-2q}(\Omega,\Gamma), \mathcal{E}^{s+\varepsilon-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)]_{\psi}. \tag{2.61}$$

Оператор (2.61) є звуженням відображення (2.59), заданого на $\mathcal{D}^{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma)$. Отже, він є продовженням за неперервністю відображення (2.50).

Опишемо інтерполяційні простори, в яких діє оператор (2.61). Згідно з твердженнями 1.11 і 1.9 маємо такі рівності просторів разом з еквівалентністю норм у них:

$$[\mathcal{D}^{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma),\mathcal{D}^{s+\varepsilon}(\Omega,\Gamma)]_{\psi}=[H^{(s-\varepsilon)}(\Omega),H^{(s+\varepsilon)}(\Omega)]_{\psi}\oplus$$

$$\oplus\bigoplus_{k=1}^{\varkappa}[H^{(s+r_k-1/2-\varepsilon)}(\Gamma),H^{(s+r_k-1/2+\varepsilon)}(\Gamma)]_{\psi}=$$

$$=H^{s,\varphi}(\Omega)\oplus\bigoplus_{k=1}^{\varkappa}H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma)=\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma).$$

Аналогічно

$$[\mathcal{E}^{s-2q-\varepsilon}(\Omega,\Gamma),\mathcal{E}^{s-2q+\varepsilon}(\Omega,\Gamma)]_{\psi}=\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma).$$

Таким чином, обмежений нетерів оператор (2.61) є оператором (2.55) з теореми 2.7.

Згідно з твердженням 1.10 ядро оператора (2.55) і його індекс збігаються відповідно зі спільним ядром $\mathcal{N}$ і однаковим індексом $\dim\mathcal{N}-\dim\mathcal{N}_{\star}$ операторів (2.59). Окрім того, на підставі рівності (2.60) робимо висновок, що область значень оператора (2.55) дорівнює

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)\cap\Lambda(\mathcal{D}^{s-\varepsilon}(\Omega,\Gamma))$$

$$=\bigl\{(f,g)\in\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma):\ \text{виконується (2.57)}\bigr\}.$$

Отже, доведено всі властивості оператора (2.55), зазначені в теоремі 2.7.

Теорему 2.7 доведено.

Зауважимо, що умову $s>m+1/2$ в теоремі 2.7 не можна відкинути або послабити. Зокрема, якщо $s\leq m_j+1/2$ і $\varphi(\cdot)\equiv 1$, то відображення $u\mapsto B_j u$, де $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, не можна продовжити до неперервного лінійного оператора, що діє з простору Соболєва $H^{(s)}(\Omega)$ у лінійний топологічний простір $\mathcal{D}'(\Gamma)$ усіх розподілів на Γ (див., наприклад, [64], зауваження 3.5).

Якщо $\mathcal{N}=\{0\}$ і $\mathcal{N}_{\star}=\{0\}$, то оператор (2.55) є ізоморфізмом простору $\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ на простір $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. У загальній ситуації цей оператор породжує ізоморфізм між деякими їх (замкненими) підпросторами скінченної ковимірності. Ці підпростори і проектори на них будуємо у такий спосіб.

Розглянемо розклад простору $\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$, де $s>m+1/2$ і $\varphi\in\mathcal{M}$, у таку пряму суму його підпросторів:

$$\begin{gathered}\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)=\mathcal{N}\dotplus\Bigl\{(u,v_1,\ldots,v_\varkappa)\in\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma):\\ (u,u^\circ)_\Omega+\sum_{k=1}^{\varkappa}(v_k,v_k^\circ)_\Gamma\ \text{для кожного}\ (u^\circ,v_1^\circ,\ldots,v_\varkappa^\circ)\in\mathcal{N}\Bigr\}.\end{gathered}\tag{2.62}$$

Таке зображення існує, оскільки воно є звуженням розкладу простору $L_2(\Omega)\oplus(L_2(\Gamma))^\varkappa$ в ортогональну суму підпростору $\mathcal{N}$ та його доповнення. Тут

$$\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)\hookrightarrow L_2(\Omega)\oplus(L_2(\Gamma))^\varkappa\quad\text{при}\quad s>m+1/2\tag{2.63}$$

на підставі умови (2.39).

Щодо розкладу простору $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ скористаємося таким результатом.

Лема 2.2. *Існує скінченновимірний простір*

$$\mathcal{G}\subset C^\infty(\overline{\Omega})\times(C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$$

такий, що для довільних $s>m+1/2$ і $\varphi\in\mathcal{M}$ є правильним наступний розклад простору $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ у пряму суму його підпросторів:

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)=\mathcal{G}\dotplus\bigl\{(f,g)\in\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma):\textit{виконується}\ (2.57)\bigr\}.\tag{2.64}$$

При цьому $\dim\mathcal{G}=\dim\mathcal{N}_\star$.

Доведення леми 2.2. Скористаємося нетеровим обмеженим оператором (2.58) у випадку, коли $s=m$. Згідно з [146] (теорема 4.1.4) вимірність коядра цього оператора дорівнює $\dim\mathcal{N}_\star$. Оскільки лінійний многовид $C^\infty(\overline{\Omega})\times(C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$ щільний у просторі $\mathcal{E}^{m-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$, то згідно з [21] (лема 2.1) існує скінченновимірний простір

$$\mathcal{G}\subset C^\infty(\overline{\Omega})\times(C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$$

такий, що

$$\mathcal{E}^{m-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)=\mathcal{G}\dotplus\Lambda(\mathcal{D}^{m,(r)}(\Omega,\Gamma)). \tag{2.65}$$

Звідси випливає, що $\dim\mathcal{G}=\dim\mathcal{N}_{\star}$.

Нехай дійсне число l задовольняє умову $m+1/2<l<s$. Тоді виконуються неперервні вкладення

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)\hookrightarrow\mathcal{E}^{l-2q}(\Omega,\Gamma)=\mathcal{E}^{l-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)\hookrightarrow\mathcal{E}^{m-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$$

на підставі (1.5) і того, що простори $H^{l-2q,(r-2q)}(\Omega)$ і $H^{l-2q}(\Omega)$ рівні з точністю до еквівалентності норм при $l-2q>r-2q-1/2$, як це зазначалося у доведенні теореми 2.7. Окрім того, $\mathcal{G}\subset\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. Тому з рівності (2.65) випливає формула

$$\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)=\mathcal{G}\dotplus\bigl(\Lambda(\mathcal{D}^{m,(r)}(\Omega,\Gamma))\cap\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)\bigr). \tag{2.66}$$

На підставі [146] (теорема 4.1.4) область значень $\Lambda(\mathcal{D}^{m,(r)}(\Omega,\Gamma))$ оператора (2.58), де $s=m$, складається з усіх векторів

$$(f,g)\in\mathcal{E}^{m-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma),$$

які задовольняють умову (2.57). Тому другий доданок у сумі (2.66) складається з усіх векторів $(f,g)\in\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють (2.57). Таким чином, формула (2.66) перетворюється на рівність (2.64), в якій, згідно з наведеними міркуваннями, простір $\mathcal{G}$ не залежить від s і φ.

Лему 2.2 доведено.

Позначимо через $\mathcal{P}$ і $\mathcal{Q}$ відповідно проектори просторів $\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ і $\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ на другий доданок у сумах (2.62) і (2.64) паралельно першому доданку. Ці проектори не залежать (як відображення) від s і φ.

Теорема 2.8. *Нехай $s>m+1/2$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Тоді звуження відображення* (2.55) *на підпростір $\mathcal{P}(\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma))$ є ізоморфізмом*

$$\Lambda:\,\mathcal{P}(D^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma))\leftrightarrow\mathcal{Q}(\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)). \tag{2.67}$$

Доведення теореми 2.8. Згідно з теоремою 2.7 звуження оператора (2.55) на підпростір $\mathcal{P}(\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma))$ є неперервним і взаємно однозначним відображенням цього підпростору на підпростір $\mathcal{Q}(\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma))$. Тому на підставі теореми Банаха про обернений оператор це відображення є ізоморфізмом (2.67).

Теорему 2.8 доведено.

Дослідимо властивості узагальнених розв'язків еліптичної крайової задачі (2.37), (2.38). Попередньо дамо означення такого розв'язку. Покладемо

$$\mathcal{D}^{m+1/2+}(\Omega,\Gamma) := \bigcup_{\substack{s>m+1/2,\\ \varphi\in\mathcal{M}}} \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma) = \bigcup_{s>m+1/2} \mathcal{D}^{s}(\Omega,\Gamma);$$

тут остання рівність правильна з огляду на властивість (1.5). Вектор

$$(u,v) := (u,v_1,\ldots,v_\varkappa) \in \mathcal{D}^{m+1/2+}(\Omega,\Gamma) \tag{2.68}$$

називаємо (сильним) узагальненим розв'язком крайової задачі (2.37), (2.38) з правою частиною

$$(f,g) := (f,g_1,\ldots,g_{q+\varkappa}) \in \mathcal{D}'(\Omega)\times\bigl(\mathcal{D}'(\Gamma)\bigr)^{q+\varkappa},$$

якщо $\Lambda(u,v)=(f,g)$, де Λ — оператор (2.55) для деяких $s>m+1/2$ і $\varphi\in\mathcal{M}$. Наведене означення узагальненого розв'язку коректне, оскільки не залежить від s і φ.

Теорема 2.9. *Нехай $\varphi\in\mathcal{M}$, а числа $s,\lambda\in\mathbb{R}$ задовольняють нерівності $s>m+1/2$ і $0<\lambda<s-m+1/2$. Нехай також функції $\chi,\eta\in C^\infty(\overline{\Omega})$ задовольняють умову $\eta=1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Тоді існує число $c=c(s,\varphi,\lambda,\chi,\eta)>0$ таке, що*

$$\|\chi(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \le c\,\bigl(\,\|\eta\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-\lambda,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\bigr) \tag{2.69}$$

для довільного вектора $(u,v)\in\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. Тут c не залежить від (u,v).

Тут, звісно,

$$\chi(u,v) := (\chi u, (\chi\restriction\Gamma)v_1, \ldots, (\chi\restriction\Gamma)v_{\varkappa})$$

і аналогічно розуміємо вираз $\eta\Lambda(u,v)$.

Зауваження 2.3. Якщо $\chi = \eta = 1$, то нерівність (2.69) є глобальною апріорною оцінкою узагальненого розв'язку u еліптичної крайової задачі (2.37), (2.38). У цьому випадку умову $\lambda < s - m + 1/2$ можна прибрати. Взагалі, нерівність (2.69) є локальною апріорною оцінкою розв'язку u. Якщо $0 < \lambda \leq 1$, то у нерівності (2.69) можна узяти $\chi\Lambda(u,v)$ замість $\eta\Lambda(u,v)$.

Доведення теореми 2.9. У випадку, коли $\chi(\cdot) \equiv \eta(\cdot) \equiv 1$ ця теорема є наслідком скінченновимірності ядра і замкнености області значень оператора (2.55) з теореми 2.7 та компактності вкладення $\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}^{s-\lambda,\varphi}(\Omega)$ для довільного $\lambda > 0$. Це стверджує лема Ж. Петре [176] (лема 3). Отже, існує число $\tilde{c} = \tilde{c}(s,\varphi,\lambda) > 0$ таке, що для довільного вектора $(u',v') \in \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ виконується глобальна апріорна оцінка

$$\|(u',v')\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq \tilde{c}\left(\|\Lambda(u',v')\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \|(u',v')\|_{\mathcal{D}^{s-\lambda,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\right). \qquad (2.70)$$

У цій оцінці число $\lambda > 0$ вибране довільним чином.

Виведемо з цієї оцінки теорему 2.9 для $\lambda = 1$. Зауважимо спочатку, що нерівність $\lambda < s - m + 1/2$, вказана в умові цієї теореми, виконується для $\lambda = 1$. Довільно виберемо вектор $(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$. Нехай функції $\chi, \eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ такі як в умові теореми 2.9. Поклавши $(u',v') := \chi(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ та $\lambda := 1$ в оцінці (2.70), запишемо

$$\|\chi(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq \tilde{c}\left(\|\Lambda(\chi(u,v))\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \|\chi(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-1,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\right). \qquad (2.71)$$

Переставивши оператор множення на функцію χ з диференціальним оператором Λ отримаємо рівність

$$\Lambda(\chi(u,v)) = \Lambda(\chi\eta(u,v)) = \chi\Lambda(\eta(u,v)) + \Lambda'(\eta(u,v)) =$$
$$= \chi\Lambda(u,v) + \Lambda'(\eta(u,v)).$$

Тут

$$\Lambda'(u,v) := \left(A'u,\; B'_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C'_{1,k} v_k, ..., B'_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C'_{q+\varkappa,k} v_k\right),$$

де A' — деякий лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ порядку $\operatorname{ord} A' \leq 2q-1$, B'_j — деякий крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} B'_j \leq m_j - 1$, а $C'_{j,k}$ — деякий (дотичний) лінійний диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} C'_{j,k} \leq m_j + r_k - 1$. Коефіцієнти цих операторів є нескінченно гладкими функціями на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно.

Таким чином,

$$\Lambda(\chi(u,v)) = \chi\Lambda(u,v) + \Lambda'(\eta(u,v)). \tag{2.72}$$

З властивостей порядків компонент диференціального оператора Λ' негайно випливає нерівність

$$\|\Lambda'(\eta(u,v))\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq c_1 \|\eta(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-1,\varphi}(\Omega,\Gamma)}. \tag{2.73}$$

У цьому доведенні через $c_1, \ldots, c_7$ позначено додатні числа, не залежні від (u,v).

На підставі формул (2.71) – (2.73) отримаємо нерівності

$$\|\chi(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq \tilde{c}\left(\|\chi\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} +\right.$$
$$\left.+\|\Lambda'(\eta(u,v))\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \|\chi(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-1,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\right) \leq$$
$$\leq \tilde{c}\,\|\chi\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \tilde{c}\,c_1\|\eta(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-1,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \tilde{c}\,\|\chi(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-1,\varphi}(\Omega,\Gamma)}.$$

Тут

$$\|\chi(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-1,\varphi}(\Omega,\Gamma)} = \|\chi\eta(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-1,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq c_2\|\eta(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-1,\varphi}(\Omega,\Gamma)}.$$

Отже,

$$\|\chi(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq c_3\bigl(\|\chi\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-1,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\bigr). \tag{2.74}$$

З цієї нерівності випливає оцінка (2.69) для $\lambda = 1$, оскільки

$$\|\chi\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} = \|\chi\eta\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq c_4\|\eta\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)}.$$

Теорему 2.9 доведено у випадку, коли $\lambda = 1$. Звісно, її висновок правильний і якщо $0 < \lambda < 1$.

Доведемо тепер цю теорему у випадку, коли

$$1 < \lambda < s - m + 1/2. \tag{2.75}$$

Для кожного дійсного числа $l \geq 1$ позначимо через $\mathcal{K}_l$ твердження теореми 2.9 у випадку, коли $\lambda = l$ і фіксоване $\varphi \in \mathcal{M}$. А саме, $\mathcal{K}_l$ позначає таке твердження: для довільних числа $s > m + 1/2$ і функцій $\chi, \eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$, які задовольняють умови $l < s - m + 1/2$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$, існує число $c = c(s,\varphi,l,\chi,\eta) > 0$ таке, що для довільного вектора $(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ виконується нерівність (2.69) з $\lambda = l$. Істинність твердження $\mathcal{K}_1$ доведена вище. Довільно виберемо дійсні числа $l \geq 1$ і $\delta \in (0,1]$. Доведемо, що $\mathcal{K}_l \Rightarrow \mathcal{K}_{l+\delta}$.

Припустимо, що твердження $\mathcal{K}_l$ істинне. Нехай число $s > m+1/2$ і функції $\chi, \eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ задовольняють умови $l+\delta < s-m+1/2$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Тоді знайдеться функція $\eta_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що $\eta_1 = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$ і $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\eta_1$. За припущенням, існує число $c_5 > 0$ таке, що для довільного вектора $(u,v) \in \mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$ виконується оцінка

$$\|\chi(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)} \leq c_5\bigl(\|\eta_1\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)} + \|\eta_1(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-l,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\bigr). \tag{2.76}$$

Оскільки $s-l-\delta+1>m+1/2$, то на підставі твердження $\mathcal{K}_1$ маємо оцінку

$$\begin{gathered}\|\eta_1(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-l,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\leq\|\eta_1(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-l-\delta+1,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\leq\\ \leq c_6\bigl(\|\eta\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-l-\delta+1-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)}+\|\eta(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-l-\delta,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\bigr).\end{gathered}\tag{2.77}$$

Окрім того,

$$\begin{gathered}\|\eta_1\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)}=\|\eta_1\eta\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\leq\\ \leq c_7\|\eta\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)}.\end{gathered}\tag{2.78}$$

На підставі оцінок (2.76) – (2.78) запишемо

$$\begin{gathered}\|\chi(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\leq c_5c_7\|\eta\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)}+\\ +c_5c_6\bigl(\|\eta\Lambda(u,v)\|_{\mathcal{E}^{s-2q,\varphi}(\Omega,\Gamma)}+\|\eta(u,v)\|_{\mathcal{D}^{s-l-\delta,\varphi}(\Omega,\Gamma)}\bigr),\end{gathered}$$

тобто отримано нерівність (2.69) з $\lambda=l+\delta$. Імплікація $\mathcal{K}_l\Rightarrow\mathcal{K}_{l+\delta}$ обґрунтована.

Тепер можемо довести теорему 2.9 у випадку (2.75). За доведеним, правильний ланцюжок імплікацій

$$\mathcal{K}_1\Rightarrow\mathcal{K}_2\Rightarrow\ldots\Rightarrow\mathcal{K}_{[\lambda]}\Rightarrow\mathcal{K}_\lambda,$$

де твердження $\mathcal{K}_1$ істинне, а $\mathcal{K}_\lambda$ є твердженням теореми 2.9 у досліджуваному випадку.

Теорему 2.9 доведено.

У зауваженні 2.3 потребують обґрунтування друге і останнє речення. Друге речення обґрунтоване у першому абзаці доведення цієї теореми, а останнє речення є прямим наслідком оцінки (2.74).

Для соболєвських просторів теореми 2.7 – 2.9 є наслідками результатів Буте де Монвеля [118], Г. І. Ескіна [106] (§ 23), Ш. Ремпеля і Б.-В. Шульце [76] (розд. 4), Г. Грубб [135, 136], які стосуються властивостей загальних еліптичних псевдодиференціальних крайових задач. Ці теореми також містяться у результатах, встановлених в монографії В. О. Козлова, В. Г. Маз'ї і Й. Россмана [146] (п. 4.1), статтях І. Я. Ройтберг [77, 181] і монографії А. Я. Ройтберга [183] (п. 2.4), де еліптичні за Лавруком крайові задачі досліджено у двобічних шкалах соболєвських просторів, модифікованих за А. Я. Ройтбергом.

Для просторів Хермандера версії теорем 2.7 і 2.8, а також 2.9 (глобальна апріорна оцінка) довела І. С. Чепурухіна [98, 100, 101] у випадку $m \leq 2q - 1$. У розглянутому випадку $m \geq 2q$ ці теореми є новими результатами для просторів Хермандера.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі досліджено характер розв'язності та властивості розв'язків загальної (взагалі кажучи, нерегулярної) еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23) у просторах Хермандера $H^{\varphi}(\Omega)$ з показником регулярності $\varphi \in \mathrm{RO}$. Останній задовольняє природну умову $\sigma_0(\varphi) > m + 1/2$, де m — максимум порядків крайових умов (1.23), який може бути більшим за порядок еліптичного рівняння (1.22), або рівним йому. У просторах Хермандера досліджено також характер розв'язності еліптичної за Лавруком задачі (2.37), (2.38), яка містить додаткові невідомі функції у крайових умовах вищих порядків.

Отримано такі результати:

1. Доведено, що загальній еліптичній крайовій задачі (1.22), (1.23) відповідають нетерові обмежені оператори у парах гільберових просторів Хермандера (теорема 2.1).

2. Доведено, що досліджувана задача породжує ізоморфізми між відповідними підпросторами просторів Хермандера (теорема 2.2).

3. Для узагальнених розв'язків цієї задачі встановлено локальну апріорну оцінку у просторах Хермандера (теорема 2.3).

4. Доведено теорему про локальну регулярність узагальнених розв'язків досліджуваної задачі у просторах Хермандера (теорема 2.4).

5. Для розв'язків досліджуваної задачі отримано нову достатню умову неперервності їх узагальнених частинних похідних довільно вибраного порядку (теорема 2.5) та отримано нову достатню умову класичності узагальнених розв'язків задачі (теорема 2.6).

6. Доведено, що еліптичній за Лавруком задачі (2.37), (2.38) з крайовими умовами вищих порядків відповідають нетерові обмежені оператори у парах просторів Хермандера з правильно змінними показниками регулярності (теорема 2.7).

7. Доведено, що ця задача породжує ізоморфізми між відповідними підпросторами вказаних просторів Хермандера (теорема 2.8).

8. Для узагальнених розв'язків задачі (2.37), (2.38) встановлено локальну апріорну оцінку у просторах Хермандера (теорема 2.9).

Результати, вказані у пп. 3, 4 і 5 (теорема 2.5), є новими і для регулярних еліптичних крайових задач.

Результати другого розділу опубліковано в статтях [34, 35, 111] та висвітлено в тезах конференцій [37, 112, 145].

РОЗДІЛ 3
ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У МОДИФІКОВАНИХ ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

У випадку, коли $\sigma_0(\varphi) \leq m+1/2$, теореми про розв'язність загальних еліптичних крайових задач, доведені в другому розділі, не є правильними [57] (зауваження 4.3). Зокрема, якщо $\varphi(t) \equiv t^s$ для деякого дійсного $s \leq m + 1/2$, то відображення $u \mapsto Bu$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, не можна продовжити до неперервного лінійного оператора, який діє з простору $H^{(s)}(\Omega)$ в простір $(\mathcal{D}'(\Gamma))^q$ (див., наприклад, [64], зауваження 3.5).

Для того, щоб отримати обмежений оператор (A, B) за умови $\sigma_0(\varphi) \leq m + 1/2$ треба замість $H^\varphi(\Omega)$ брати інший (модифікований на основі $H^\varphi(\Omega)$) простір як область визначення цього оператора. Відомо два принципово різних способи побудови такої області визначення, запропоновані Я. А. Ройтбергом [78, 79] і Ж.-Л. Ліонсом, Е. Мадженесом [49, 53, 148, 149, 150, 151] для соболєвських просторів. Підхід Я. А. Ройтберга приводить до загальної теореми про розв'язність еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23), але виводить за межі класу узагальнених функцій. У загальних теоремах область визначення оператора (A, B) не залежить від коефіцієнтів еліптичного оператора A. Наприклад, теорема 2.1 про нетеровість еліптичної крайової задачі є загальною. Підхід Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса приводить до індивідуальних теорем про розв'язність еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23). В індивідуальних теоремах область визначення оператора (A, B) залежить від коефіцієнтів диференціального оператора A. Недавно В. А. Михайлець і О. О. Мурач [61, 64, 65, 165] перенесли ці підходи на простори Хермандера $H^{s,\varphi}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, стосовно регулярних еліптичних крайових задач.

У цьому розділі дисертації реалізуємо підходи Ройтберга та Ліонса–Мадженеса для загальних (взагалі кажучи, нерегулярних) еліптичних крайових задач, досліджуваних у просторах Хермандера. При цьому підхід Ройтберга розробимо для більш широкого класу просторів Хермандера $H^{s,\varphi}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$.

3.1. Модифіковані за Ройтбергом простори Хермандера

Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$. Для кожного натурального числа k означимо гільбертів простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$, який є модифікацією за Ройтбергом простору $H^{s,\varphi}(\Omega)$. У соболєвському випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ цю модифікацію увів і дослідив Я. А. Ройтберг [78, 79] (див. його монографію [182], п. 2.1), а у випадку $\varphi \in \mathcal{M}$ — В. А. Михайлець і О. О. Мурач [61] (див. також їх монографії [64, 165], п. 4.2.2).

Попередньо потрібно означити простір $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$. Якщо $s \geq 0$, то покладемо $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega) := H^{s,\varphi}(\Omega)$. Якщо $s < 0$, то простір $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ є, за означенням, поповненням лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)} := \sup\left\{ \frac{|(u,v)_\Omega|}{\|v\|_{H^{-s,1/\varphi}(\Omega)}} \,:\, v \in H^{-s,1/\varphi}(\Omega),\, v \neq 0 \right\}.$$

В результаті для кожного $s < 0$ отримали оснащення гільбертового простору $L_2(\Omega)$ позитивним простором Хермандера $H^{-s,1/\varphi,(0)}(\Omega) = H^{-s,1/\varphi}(\Omega)$ і негативним простором Хермандера $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$. Поняття гільбертового оснащення та пов'язані з ним поняття викладені, наприклад, в монографії Ю. М. Березанського [12] (розд. I, §§ 1 і 3), який ввів і дослідив оснащення соболєвськими просторами. В. А. Михайлець і О. О. Мурач [54, 59] дослідили оснащення зазначеними просторами Хермандера у випадку $\varphi \in \mathcal{M}$ (див. також їх монографії [64, 165], п. 3.2.3).

Для кожного $s \in \mathbb{R}$, гільбертові простори $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ і $H^{-s,1/\varphi,(0)}(\Omega)$ взаємно дуальні відносно розширення за неперервністю скалярного добутку в $L_2(\Omega)$ (якщо $s=0$, то дуальність справджується з точністю до еквівалентності норм). У випадку $s \neq 0$ це стверджує загальна теорія гільбертових оснащень [12, с. 47], а у випадку $s=0$ це доводиться цілком аналогічно до теореми 3.9(iii) з монографії [165]. При цьому вираз $(u,v)_\Omega$ коректно означено за замиканням для довільних $u \in H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ і $v \in H^{-s,1/\varphi}(\Omega)$.

Негативний простір $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$, де $s<0$, допускає явний опис. Розглянемо відображення $u \mapsto \mathcal{O}u$, де $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $(\mathcal{O}u)(x) := u(x)$ для $x \in \overline{\Omega}$ і $(\mathcal{O}u)(x) := 0$ для $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Якщо $s<0$, то це відображення продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму $\mathcal{O}$ між гільбертовим простором $H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)$ і підпростором

$$\bigl\{v \in H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} v \subseteq \overline{\Omega}\bigr\}$$

простору $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Цей факт є окремим випадком результату Л. Р. Волєвича і Б. П. Панеяха [20] (розділ 3.4).

Нехай тепер $k \in \mathbb{N}$. Дамо означення гільбертового простору $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$. Покладемо

$$E_k := \{j-1/2 : j \in \mathbb{Z},\ 1 \leq j \leq k\}.$$

Якщо $s \in \mathbb{R} \setminus E_k$, то, за означенням, простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ є поповненням лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)} := \Biggl(\|u\|^2_{H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{k} \|(D_\nu^{j-1}u)\restriction\Gamma\|^2_{H^{s-j+1/2,\varphi}(\Gamma)}\Biggr)^{1/2}.$$

Якщо $s \in E_k$, то гільбертів простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ означаємо за допомогою інтерполяції зі степеневим параметром $\varphi(t) \equiv t^{1/2}$ пари гільбертових просторів у такий спосіб:

$$H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) := \bigl[H^{s-1/2,\varphi,(k)}(\Omega), H^{s+1/2,\varphi,(k)}(\Omega)\bigr]_{t^{1/2}}. \qquad (3.1)$$

У соболєвському випадку, коли $\varphi(t)\equiv 1$, простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ увів і дослідив Я. А. Ройтберг [78, 79] (див. також його монографію [182], розд. 2). Тому говоримо, що простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ є модифікацією за Ройтбергом простору Хермандера $H^{s,\varphi}(\Omega)$ або, коротко кажучи, є простором Хермандера – Ройтберга. Число k називається порядком модифікації. У випадку $\varphi(t)\equiv 1$ опускаємо індекс φ в позначеннях просторів, введених у цьому пункті та нижче. Зокрема, $H^{s,(k)}(\Omega):=H^{s,1,(k)}(\Omega)$ є простором Соболєва – Ройтберга.

У випадку $\varphi\in\mathcal{M}$ простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ увели і дослідили В. А. Михайлець і О. О. Мурач [61]. Усі властивості простору $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$, де $\varphi\in\mathrm{RO}_0$, використані у цьому розділі, доводяться дослівним повторенням міркувань, наведених у монографіях В. А. Михайлеця і О. О. Мурача [64, 165] (п. 4.2). Це дозволяє посилатися на відповідні властивості простору $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$, де $\varphi\in\mathcal{M}$, доведені у цих монографіях. У соболєвському випадку, коли $\varphi(t)\equiv 1$, наведені нижче властивості просторів $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ встановлені Я. А. Ройтбергом (див. його монографію [182], п. 2.1). Зауважимо, що В. А. Михайлець і О. О. Мурач виводять властивості просторів $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ з результатів Я. А. Ройтберга за допомогою інтерполяції з функціональним параметром.

Нехай, як і раніше, $s\in\mathbb{R}$ і $\varphi\in\mathrm{RO}_0$. Простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$, де $s\in\mathbb{R}\setminus E_k$, допускає такий опис [64, 165] (теорема 4.11(i)): лінійне відображення

$$T_k: u\mapsto \bigl(u, u\restriction\Gamma,\ldots,(D_\nu^{k-1}u)\restriction\Gamma\bigr),\quad \text{де}\ \ u\in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізометричного лінійного оператора

$$T_k: H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)\to H^{s,\varphi,(0)}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{k} H^{s-j+1/2,\varphi}(\Gamma)=:\Pi_{s,\varphi,(k)}(\Omega,\Gamma),$$

область значень якого складається з усіх векторів

$$(u_0,u_1,\ldots,u_k)\in\Pi_{s,\varphi,(k)}(\Omega,\Gamma)$$

таких, що $u_j = R_\Gamma D_\nu^{j-1} u_0$ для кожного $j \in \{1, \dots, k\}$ за умови $s > j - 1/2$. Якщо $s \in E_k$, то це відображення продовжується єдиним чином до обмеженого лінійного оператора T_k, який діє з $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ в $\Pi_{s,\varphi,(k)}(\Omega, \Gamma)$ [64, 165] (зауваження 4.6). Зауважимо, що у випадку $s \in E_k$ не можна стверджувати, що цей оператор є ізометричним і що його область значення складається з усіх векторів, вказаних вище.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо клас гільбертових просторів Хермандера–Ройтберга

$$\left\{H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) : s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathrm{RO}_0\right\}.$$

Ці простори сепарабельні [64, 165] (теорема 4.12(i)). Вказаний клас є двобічною шкалою відносно числового параметра s. Обговоримо властивості цього класу, потрібні у подальшому.

Він пов'язаний з просторами Хермандера у такий спосіб:

$$H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) = H^{s,\varphi}(\Omega) \quad \text{для кожного } \ s > k - 1/2 \tag{3.2}$$

з еквівалентністю норм (див. [64, 165], теорема 4.12(iii)). У межах цього класу виконуються щільні компактні вкладення

$$H^{s+\varepsilon,\varphi_1,(k)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) \quad \text{при } \ \varepsilon > 0, \tag{3.3}$$

де параметри $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi, \varphi_1 \in \mathrm{RO}_0$ довільні (див. [64, 165], теорема 4.12(iv)). Зокрема,

$$H^{s+\varepsilon,(k)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon,(k)}(\Omega) \quad \text{при } \ \varepsilon > 0.$$

Тому є коректним позначення

$$H^{-\infty,(k)}(\Omega) := \bigcup_{s\in\mathbb{R},\, \varphi\in\mathrm{RO}_0} H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) = \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^{s,(k)}(\Omega).$$

Лінійний простір $H^{-\infty,(k)}(\Omega)$ не лежить в $\mathcal{D}'(\Omega)$; втім його частина

$$H^{k-1/2+}(\Omega) := \bigcup_{\substack{s>k-1/2,\\ \varphi\in\mathrm{RO}_0}} H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) = \bigcup_{\substack{s>k-1/2,\\ \varphi\in\mathrm{RO}_0}} H^{s,\varphi}(\Omega)$$

лежить в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Тут друга рівність виконується на підставі (3.2). Зауважимо, що властивості (3.2) і (3.3) виконуються і у випадку $k = 0$ (див. [64, 165], теорема 3.9). Тому останні два позначення застосовні у цьому випадку.

Розглянуті простори Хермандера – Ройтберга отримуються інтерполяцією з функціональним параметром відповідних пар просторів Соболєва – Ройтберга. А саме, є правильним такий результат (див. [64, 165], теорема 4.22):

Твердження 3.1. *Нехай довільно задано натуральне число k, функціональний параметр $\varphi \in \mathrm{RO}_0$ і додатні дійсні числа ε, δ. Якщо число k непарне, то додатково припустимо, що виконується хоча б одна з нерівностей $s - \varepsilon > k - 1/2$ і $s + \delta < k + 1/2$. Тоді*

$$\bigl[H^{s-\varepsilon,(k)}(\Omega), H^{s+\delta,(k)}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) \quad \text{для кожного} \quad s \in \mathbb{R}$$

з еквівалентністю норм. Тут ψ є інтерполяційним параметром з твердження 1.9.

Простір $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ корисний в теорії крайових задач для довільного $s \in \mathbb{R}$ завдяки такому факту (див. [64, 165], теорема 4.13).

Твердження 3.2. *Нехай $k \in \mathbb{N}$. Припустимо, що L є лінійним диференціальним оператором на $\overline{\Omega}$ порядку $l \leq k$ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Тоді відображення $u \mapsto Lu$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується единим чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$L : H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) \to H^{s-l,\varphi,(k-l)}(\Omega) \quad \text{для всіх} \quad s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathrm{RO}_0.$$

Крім того, припустимо, що K є обмеженим лінійним диференціальним оператором на Γ порядку $p \leq k-1$ з коефіцієнтами класу $C^{\infty}(\Gamma)$. Тоді відображення $u \mapsto Ku$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора

$$K:\, H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) \to H^{s-p-1/2,\varphi}(\Gamma) \quad \textit{для всіх} \quad s \in \mathbb{R},\ \varphi \in \mathrm{RO}_0.$$

Зауваження 3.1. Знадобиться ще така версія твердження 3.2, яка стосується оператора L: нехай припущення цього твердження про L виконується, тоді відображення $u \mapsto Lu$, де $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора

$$L : H^{s,\varphi,(k)}(\Omega) \to H^{s-l,\varphi,(\lambda)}(\Omega), \quad \text{якщо} \quad 0 \leq \lambda \leq k-l \quad \text{і} \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Тут $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$ довільні. Ця версія випливає з твердження 3.2 і нерівності

$$\|v\|_{H^{s-l,\varphi,(\lambda)}(\Omega)} \leq c\,\|v\|_{H^{s-l,\varphi,(k-l)}(\Omega)} \quad \text{для всіх} \quad v \in C^{\infty}(\overline{\Omega}), \tag{3.4}$$

застосованої до $v := Lu$. Тут c є деяким додатнім числом, яке не залежить від v. Якщо $s-l \notin E_{k-l}$, то ця нерівність очевидна ($c=1$). Для інших s вона одержується за допомогою інтерполяції на підставі твердження 3.1. А саме, нехай $s-l \in E_{k-l}$. Оскільки тотожне відображення на $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ продовжується єдиним чином до обмежених операторів, які діють з $H^{s-l\mp 1/4,\varphi,(k-l)}(\Omega)$ в $H^{s-l\mp 1/4,\varphi,(\lambda)}(\Omega)$, то це відображення продовжується єдиним чином до обмеженого оператора, який діє з простору

$$\bigl[H^{s-l-1/4,\varphi,(k-l)}(\Omega), H^{s-l+1/4,\varphi,(k-l)}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H^{s-l,\varphi,(k-l)}(\Omega)$$

в простір

$$\bigl[H^{s-l-1/4,\varphi,(\lambda)}(\Omega), H^{s-l+1/4,\varphi,(\lambda)}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H^{s-l,\varphi,(\lambda)}(\Omega).$$

Тут ψ є інтерполяційним параметром з твердження 1.9, в якому покладаємо $\varepsilon := \delta := 1/4$. Ці рівності виконуються з точністю до еквівалентності норм згідно з твердженням 3.1. Звідси випливає нерівність (3.4) у випадку, коли $s - l \in E_{k-l}$.

3.2. Нетеровість задачі у просторах Хермандера – Ройтберга

Як і раніше, розглядаємо еліптичну крайову задачу (1.22), (1.23) в області Ω з крайовими диференціальними операторами $B_j := B_j(x, D)$ на Γ довільних порядків $m_j \geq 0$, де $j = 1, \ldots, q$. Нагадаємо, що $m := \max\{m_1, ..., m_q\}$ і $r := \max\{2q, m+1\}$. Дослідимо характер розв'язності цієї задачі у просторах Хермандера – Ройтберга.

Для $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$ означимо гільбертів простір

$$\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega, \Gamma) := H^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

У соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv 1$, будемо опускати φ у позначенні цього простору.

На підставі твердження 3.2 відображення (1.24) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора

$$(A, B) : H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) \to \mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega, \Gamma). \tag{3.5}$$

Теорема 3.1. *Нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$. Тоді обмежений оператор* (3.5) *нетерів. Його ядро дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів*

$$(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega, \Gamma)$$

таких, що

$$(f_0,v)_\Omega+\sum_{j=1}^{r-2q}(f_j,w_j)_\Gamma+\sum_{j=1}^{q}(g_j,h_j)_\Gamma=0 \qquad (3.6)$$
$$\text{для кожного}\quad (v,w_1,\ldots,w_{r-2q},h_1,\ldots,h_q)\in N_\star,$$

де $(f_0,f_1,\ldots,f_{r-2q}):=T_{r-2q}f$ *(якщо* $r=2q$*, то* $f_0:=f$*, а всі члени* $(f_j,w_j)_\Gamma$ *відсутні). Індекс оператора* (3.5) *дорівнює* $\dim N-\dim N_\star$ *і тому не залежить від* s *і* φ*.*

Доведення. У випадку просторів Соболєва, коли $\varphi(t)\equiv 1$, ця теорема доведена у монографії Я. А. Ройтберга [182] (теорема 4.1.3) за виключенням вказаного зв'язку простору $N_\star$ з формально спряженою задачею (1.25), (1.26). А саме, доведено, що відображення (1.24) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до нетеревого обмеженого лінійного оператора

$$(A,B):H^{s,(r)}(\Omega)\to\mathcal{H}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma). \qquad (3.7)$$

Окрім того, доведено, що ядро оператора (3.7) дорівнює N, його область значень складається з усіх векторів

$$(f,g_1,\ldots,g_q)\in\mathcal{H}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$$

таких, що

$$(f_0,v)_\Omega+\sum_{j=1}^{r-2q}(f_j,w_j)_\Gamma+\sum_{j=1}^{q}(g_j,h_j)_\Gamma=0 \qquad (3.8)$$
$$\text{для всіх}\quad (v,w_1,\ldots,w_{r-2q},h_1,\ldots,h_q)\in M,$$

а індекс дорівнює $\dim N-\dim M$. Тут M є деяким скінченновимірним простором, який лежить в $C^\infty(\overline{\Omega})\times(C^\infty(\Gamma))^{r-q}$ та не залежить від s. Звідси випливає, що

$$(A,B)(H^{s,(r)}(\Omega))=\mathcal{H}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)\cap(A,B)(H^{s-\varepsilon,(r)}(\Omega)) \qquad (3.9)$$
$$\text{для довільних}\ \ s\in\mathbb{R}\ \text{ і }\ \varepsilon>0.$$

Згідно з [146] (теорема 4.1.4) можна покласти $M := N_\star$ в описі (3.8) області значень оператора (3.7) для цілих s. У випадку дробового s теж можемо це зробити, що безпосередньо випливає з властивості (3.9), розглянутої для $s-\varepsilon \in \mathbb{Z}$.

Покажемо, що можна покласти $M := N_\star$ і у формулі індексу цього оператора. Це достатньо показати для $s=0$ з огляду на незалежність індексу від s. Оскільки $N_\star \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^{r-q}$, то $N_\star$ можна розглядати як скінченновимірний підпростір простору

$$H^{2q}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{r-2q} H^{2q+j-1/2}(\Gamma) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{m_j+1/2}(\Gamma).$$

Останній є взаємно спряженим до простору

$$\Pi_{-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{-m_j-1/2}(\Gamma) \tag{3.10}$$

відносно розширення за неперервністю скалярного добутку в $L_2(\Omega) \oplus (L_2(\Gamma))^{r-q}$. За такого розгляду простір, спряжений до $N_\star$, збігається з факторпростором простору (3.10) за підпростором усіх векторів

$$(f_0, f_1, \ldots, f_{r-2q}, g_1, \ldots, g_q) \in \Pi_{-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{-m_j-1/2}(\Gamma),$$

які задовольняють умову (3.8), де беремо $M := N_\star$. Звідси, оскільки оператор T_{r-2q} здійснює ізоморфізм простору $H^{-2q,(r-2q)}(\Omega)$ на простір $\Pi_{-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$, випливає, що ковимірність області значень оператора (3.7), де $s=0$, дорівнює вимірності цього факторпростору, тобто становить $\dim N_\star$. Отже, індекс цього оператора дорівнює $\dim N - \dim N_\star$. Таким чином, висновок теореми 3.1 правильний у соболєвському випадку для кожного дійсного s.

Припускаючи, що $\varphi \in \mathrm{RO}_0$, виведемо теорему 3.1 з соболєвського випадку за допомогою інтерполяції з функціональним параметром. А саме, нехай $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$. Виберемо число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ і розглянемо обмежені лінійні оператори

$$(A,B): H^{s\mp\varepsilon,(r)}(\Omega) \to \mathcal{H}^{s\mp\varepsilon-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma). \tag{3.11}$$

За теоремою 3.1, доведеною у соболєвському випадку, вони є нетеровими, мають спільне ядро N і однаковий індекс $\dim N - \dim N_{\star}$. Крім того,

$$\begin{gathered}(A,B)(H^{s\mp\varepsilon,(r)}(\Omega)) = \\ = \bigl\{(f,g) \in \mathcal{H}^{s\mp\varepsilon-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma):\ \text{виконується (3.6)}\bigr\}.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Нехай ψ є інтерполяційним параметром з твердження 1.9, в якому $\delta := \varepsilon$. Застосовуючи інтерполяцію з функціональним параметром ψ до операторів (3.11) і використовуючи твердження 1.10, отримаємо обмежений нетерів оператор

$$(A,B): \bigl[H^{s-\varepsilon,(r)}(\Omega), H^{s+\varepsilon,(r)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \to \tag{3.13}$$

$$\to \bigl[\mathcal{H}^{s-\varepsilon-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}^{s+\varepsilon-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi}. \tag{3.14}$$

Цей оператор є звуженням відображення (3.11), заданого на $H^{s-\varepsilon,(r)}(\Omega)$.

Опишемо інтерполяційні простори в (3.13) за допомогою твердження 3.1. Оскільки $0 < \varepsilon < 1/2$, то обидва числа $s \mp \varepsilon$ задовольняють хоча б одну з нерівностей $s \mp \varepsilon > r - 1/2$ і $s \mp \varepsilon < r + 1/2$. Тому згідно з твердженням 3.1 маємо рівність

$$\bigl[H^{s-\varepsilon,(r)}(\Omega), H^{s+\varepsilon,(r)}(\Omega)\bigr]_{\psi} = H^{s,\varphi,(r)}(\Omega).$$

Крім того,

$$\begin{gathered}\bigl[\mathcal{H}^{s-\varepsilon-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}^{s+\varepsilon-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi} = \\ = \bigl[H^{s-2q-\varepsilon,(r-2q)}(\Omega), H^{s-2q+\varepsilon,(r-2q)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \oplus \\ \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \bigl[H^{(s-m_j-1/2-\varepsilon)}(\Gamma), H^{(s-m_j-1/2+\varepsilon)}(\Gamma)\bigr]_{\psi} = \\ = H^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) = \mathcal{H}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)\end{gathered}$$

з огляду на твердження 1.11. Ці рівності просторів виконуються разом з еквівалентністю норм.

Звідси випливає, що обмежений нетерів оператор (3.13) є оператором (3.5) з теореми 3.1. Згідно з твердженням 1.10 ядро і індекс оператора (3.5) співпадають відповідно зі спільним ядром N і індексом $\dim N - \dim N_{\star}$ операторів (3.11). Більш того, на підставі (3.12) область значень оператора (3.5) дорівнює

$$\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)(H^{s-\varepsilon,(r)}(\Omega)) =$$
$$= \bigl\{(f,g) \in \mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) : \ \text{виконується (3.6)}\bigr\}.$$

Таким чином, нетерів оператор (3.5) має всі властивості, сформульовані в теоремі 3.1.

Теорему 3.1 доведено.

Зауважимо, що у випадку $s > r - 1/2$ нетерів обмежений оператор (3.5) діє між (немодифікованими) просторами Хермандера

$$(A,B) : \ H^{s,\varphi}(\Omega) \to H^{s-2q,\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma)$$

на підставі властивості (3.2). Тому у цьому випадку теорема 3.1 міститься у теоремі 2.1.

Для просторів Соболєва – Ройтберга (коли $\varphi(t) \equiv 1$), теорема 3.1 та наступні теореми 3.2 і 3.3 доведені Я. А. Ройтбергом [78] для регулярних еліптичних крайових задач та ним і Ю. В. Костарчуком [82, 40, 41] для нерегулярних еліптичних крайових задач. Їх доведення наведено також у монографії Я. А. Ройтберга [182] (розд. 4 і 7). У вказаних роботах не була використана формальна спряжена крайова задача (1.25), (1.26) для опису області значень оператора (3.5); пізніше це було зроблено в [146] (пп. 3.4 і 4.1).

Для просторів Хермандера – Ройтберга теореми 3.1 – 3.3 довели В. А. Михайлець і О. О. Мурач [61] (див. також їх монографії [64, 165], п. 4.2) для регулярних еліптичних крайових задач та О. О. Мурач і І. С. Чепурухіна [125] для нерегулярних еліптичних крайових задач таких, що $m \leq 2q-1$. При цьому припускалося, що функціональний параметр φ пробігає більш вузький клас $\mathcal{M}$ ніж RO_0 (див. приклад 1.2).

Отже, теореми 3.1 – 3.3, доведені у дисертації для більш широкого класу просторів Хермандера – Ройтберга ніж раніше, є новими і для регулярних еліптичних крайових задач.

3.3. Теорема про повний набір ізоморфізмів

Якщо $N = \{0\}$ і $N_{\star} = \{0\}$, то оператор (3.5) є ізоморфізмом між просторами $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$. У загальній ситуації цей оператор породжує ізоморфізм між деякими його підпросторами скінченої ковимірності. Ці підпростори виділяємо за допомогою наступного результату.

Лема 3.1. *Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$ виконуються такі розклади просторів $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ та $\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ в прямі суми їх підпросторів:*

$$H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) = N \dotplus \bigl\{u \in H^{s,\varphi,(r)}(\Omega) : (u_0,\omega)_\Omega = 0 \ \text{для всіх} \ \omega \in N\bigr\} \tag{3.15}$$

та

$$\begin{gathered}\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) = \\ = G \dotplus \bigl\{(f,g_1,\ldots,g_q) \in \mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується } (3.6)\bigr\}.\end{gathered} \tag{3.16}$$

Тут u_0 є початковою компонентою вектора $T_r u = (u_0,u_1,\ldots,u_r)$. Крім того, G є деяким скінченновимірним простором таким, що $\dim G = \dim N_{\star}$, $G \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^q$ і G не залежить від s і φ. Якщо $m \leq 2q-1$, то можна узяти $G := N_{\star}$.

Доведення. Розклад (3.15) обґрунтовується так само, як подібний розклад в доведенні леми 4.4 (формула (4.90)) з монографії [165], де був розглянутий випадок парного r (див. також доведення лем 4.1.1 і 4.1.2 з монографії [182] у соболєвському випадку). Встановимо розклад (3.16).

Спочатку дослідимо випадок, коли $s = r$ і $\varphi(t) \equiv 1$. Розглянемо ортогональну суму

$$\begin{gathered}\mathcal{H}^{r-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) = G_0 \oplus \\ \oplus \bigl\{(f,g) \in \mathcal{H}^{r-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується } (3.6)\bigr\}.\end{gathered} \tag{3.17}$$

Тут G_0 є скінченновимірним підпростором простору $\mathcal{H}^{r-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ згідно з теоремою 3.1. Оскільки лінійний многовид $C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^q$ щільний у просторі $\mathcal{H}^{r-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$, то з (3.17) випливає на підставі [21] (лема 2.1), що існує скінченновимірний підпростір G простору $C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^q$ такий, що правильна формула (3.16) у розглянутому випадку. Згідно з теоремою 3.1 отримаємо рівність $\dim G = \dim N_\star$.

Розклад (3.16) залишається правильним для цього підпростору G і у випадку довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$. Справді, оскільки $G \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^q$, маємо рівності

$$\begin{gathered}G \cap \bigl\{(f,g) \in \mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується } (3.6)\bigr\} = \\ = G \cap \bigl\{(f,g) \in \mathcal{H}^{r-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma) : \text{виконується } (3.6)\bigr\} = \{0\}.\end{gathered}$$

Крім того, згідно з теоремою 3.1 вимірність простору G дорівнює $\dim N_\star$ і збігається з ковимірністю другого доданку в (3.16).

Лему 3.1 доведено.

Зауваження 3.2. Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}_0$ і припустимо, що $s < 1/2 + 2q$. Тоді T_{r-2q} є ізометричним ізоморфізмом між просторами $H^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega)$ і $\Pi_{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$. Тому можемо вибрати

$$\begin{gathered}G := \bigl\{(T^{-1}_{r-2q}(v, w_1, \ldots, w_{r-2q}), h_1, \ldots, h_q) : \\ (v, w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q) \in N_\star\bigr\}\end{gathered}$$

в розкладі (3.16). Справді, вибраний простір G і другий доданок в (3.16) мають тривіальний перетин і число $\dim G = \dim N_\star$ дорівнює ковимірності другого доданку з огляду на теорему 3.1. Однак, цей вибір неможливий у випадку $s \geq 1/2 + 2q$, оскільки тоді простір

$$\{(v, w_1, \ldots, w_{r-2q}) : (v, w_1, \ldots, w_{r-2q}, h_1, \ldots, h_q) \in N_\star\}$$

не лежить, взагалі кажучи, в $T_{r-2q}(H^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega))$.

Позначимо через P і Q відповідно проектори просторів $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$ на другі доданки в сумах (3.15) і (3.16) паралельно першим доданкам. Очевидно, що ці проектори не залежать від s і φ.

Теорема 3.2. *Для довільних* $s \in \mathbb{R}$ *і* $\varphi \in \mathrm{RO}_0$ *звуження відображення* (3.5) *на підпростір* $P(H^{s,\varphi,(r)}(\Omega))$ *є ізоморфізмом*

$$(A, B) : \; P(H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)) \leftrightarrow Q(\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)). \tag{3.18}$$

Доведення. За теоремою 3.1 обмежений лінійний оператор (3.18) є бієкцією. Тому цей оператор є ізоморфізмом згідно з теоремою Банаха про обернений оператор.

Теорему 3.2 доведено.

Вона є теоремою про повний набір ізоморфізмів, породжений еліптичною крайовою задачею (1.22), (1.23) в просторах Хермандера – Ройтберга. Цей набір є повним у тому сенсі, що числовий параметр s пробігає всю дійсну вісь.

3.4. Регулярність узагальнених за Ройтбергом розв'язків задачі

Дослідимо локальну регулярність узагальнених за Ройтбергом розв'язків крайової задачі (1.22), (1.23). Спочатку дамо означення цих розв'язків. Припустимо, що

$$(f,g) := (f, g_1, \dots, g_q) \in H^{-\infty,(r-2q)}(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^q.$$

Вектор $u \in H^{-\infty,(r)}(\Omega)$ називаємо (сильним) узагальненим за Ройтбергом розв'язком цієї задачі, якщо $(A,B)u = (f,g)$, де (A,B) є оператором (3.5) для деяких $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$. Звісно, це означення коректне, тобто не залежить від s і φ. До того ж

$$H^{-\infty,(r-2q)}(\Omega) \times (\mathcal{D}'(\Gamma))^q = \bigcup_{s\in\mathbb{R},\, \varphi\in\mathrm{RO}_0} \mathcal{H}^{s,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma).$$

Нехай V є довільною відкритою підмножиною множини $\mathbb{R}^n$, яка має непорожній перетин з областю Ω. Покладемо $\Omega_0 := \Omega \cap V$ і $\Gamma_0 := \Gamma \cap V$ (можливий випадок $\Gamma_0 = \varnothing$). Введемо локальні аналоги просторів $H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ і $H^{s,\varphi}(\Gamma)$, де $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathrm{RO}_0$ і $k \in \mathbb{N}$. За означенням, простір $H^{s,\varphi,(k)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$ складається з усіх векторів $u \in H^{-\infty,(k)}(\Omega)$ таких, що $\chi u \in H^{s,\varphi,(k)}(\Omega)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Аналогічно, простір $H^{s,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ складається з усіх розподілів $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi h \in H^{s,\varphi}(\Gamma)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\Gamma)$ із $\operatorname{supp}\chi \subset \Gamma_0$. Покладемо

$$\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) := H^{s-2q,\varphi,(r-2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) \times \prod_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0).$$

Теорема 3.3. *Припустимо, що вектор $u \in H^{-\infty,(r)}(\Omega)$ є узагальненим за Ройтбергом розв'язком еліптичної крайової задачі* (1.22), (1.23), *праві частини якої задовольняють умову*

$$(f,g) \in \mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$$

для деяких параметрів $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$. Тоді $u \in H^{s,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0)$.

Якщо $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \Gamma$, то виконуються рівності $H^{s,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) = H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ і $\mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0,\Gamma_0) = \mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$. Тому теорема 3.3

стверджує в цьому випадку, що регулярність розв'язку u підвищується глобально, тобто на всій замкненій області $\overline{\Omega}$. Якщо $\Gamma_0 = \varnothing$, то ця теорема стає твердженням про підвищення локальної регулярності u в околах усіх внутрішніх точок замкненої області $\overline{\Omega}$.

Доведення теореми 3.3. Спочатку доведемо її у випадку, коли $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \Gamma$. За теоремою 3.1 вектор $(f, g) := (A, B)u$ задовольняє умову (3.6). Крім того, $(f, g) \in \mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega, \Gamma)$ за припущенням теореми 3.3 у розглянутому випадку. Тому $(f, g) \in (A, B)(H^{s,\varphi,(r)}(\Omega))$ на підставі теореми 3.1. Таким чином, існує вектор $v \in H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ такий, що $(A, B)v = (f, g)$. Тоді $(A, B)(u - v) = 0$; звідси $w := u - v \in N \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ за теоремою 3.1. Отже, $u = v + w \in H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$. Теорему 3.3 доведено у розглянутому випадку.

Тепер доведемо теорему 3.3 у загальній ситуації. Спочатку покажемо, що за припущення цієї теореми для кожного натурального числа k виконується така імплікація:

$$u \in H^{s-k,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0) \implies u \in H^{s-k+1,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0). \tag{3.19}$$

Довільним чином виберемо натуральне число k і припустимо, що є правильною посилка цієї імплікації. Тоді $\chi u \in H^{s-k,\varphi,(r)}(\Omega)$ для кожної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ такої, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Виберемо функцію $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$.

Переставивши оператор множення на функцію χ з диференціальними операторами A і $B_1, \ldots, B_q$, отримаємо рівність (2.21), тобто

$$(A, B)(\chi u) = \chi(A, B)u + (A', B')(\eta u), \tag{3.20}$$

Тут, як в доведенні теореми 2.3, A' є лінійним диференціальним оператором на $\overline{\Omega}$ порядку $\operatorname{ord} A' \le 2q - 1$, тоді як $B' := (B'_1, \ldots, B'_q)$ є набором крайових лінійних диференціальних операторів на Γ таким, що $\operatorname{ord} B'_j \le m_j - 1$ для кожного $j \in \{1, \ldots, q\}$. Всі коефіцієнти операторів A' і B'_j є нескінченно гладкими на $\overline{\Omega}$ і Γ відповідно. При цьому

$$\chi(A, B)u = \chi(f, g) \in \mathcal{H}^{s-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega, \Gamma) \tag{3.21}$$

за умовою теореми 3.3. Крім того, $\eta u \in H^{s-k,\varphi,(r)}(\Omega)$ за посилкою імплікації, що тягне за собою включення

$$(A', B')(\eta u) \in \mathcal{H}^{s-k+1-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega, \Gamma) \tag{3.22}$$

на підставі твердження 3.2 і зауваження 3.1. Використовуючи формули (3.20) – (3.22), отримаємо включення

$$(A, B)(\chi u) \in \mathcal{H}^{s-k+1-2q,\varphi,(r-2q)}(\Omega, \Gamma). \tag{3.23}$$

Звідси $\chi u \in H^{s-k+1,\varphi,(r)}(\Omega)$ згідно з теоремою 3.3, доведеною вище в глобальному випадку $\Omega_0 = \Omega$ і $\Gamma_0 = \Gamma$. Таким чином, $u \in H^{s-k+1,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ з урахуванням довільності вибору функції χ. Імплікацію (3.19) доведено.

Використовуючи цю імплікацію, доведемо теорему 3.3 у загальному випадку. Згідно з умовою $u \in H^{-\infty,(r)}(\Omega)$ і включенням (3.3), існує число $l \in \mathbb{N}$ таке, що

$$u \in H^{s-l,\varphi,(r)}(\Omega) \subset H^{s-l,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0).$$

Тому, використовуючи (3.19) послідовно для $k = l$, $k = l - 1$, ..., і $k = 1$, приходимо до потрібного включення $u \in H^{s,\varphi,(r)}_{\mathrm{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.

Теорему 3.3 доведено.

3.5. Теорема типу Ліонса – Мадженеса

У цьому підрозділі досліджуємо характер розв'язності еліптичної задачі (1.22), (1.23) з крайовими умовами вищих порядків, розв'язки якої належать до простору $H^{s,\varphi}(\Omega)$ з показниками $s \leq m + 1/2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Отже, $m \geq 2q$.

В ідейному плані дотримуємося підходу Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [49, 53, 149, 150], розробленому для регулярних еліптичних крайових задач у двобічній соболєвській шкалі. Обмежимося розглядом розв'язків $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ еліптичного рівняння $Au = f$, права частина якого належить до простору

$$H^{m+1/2-2q+}(\Omega) := \bigcup_{\lambda > m+1/2-2q} H^{(\lambda)}(\Omega) = \bigcup_{\substack{\lambda > m+1/2-2q, \\ \eta \in \mathcal{M}}} H^{\lambda,\eta}(\Omega)$$

(тут друга рівність виконується з огляду на вкладення (1.5)).

Нехай $s \leq m + 1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і $\lambda > m + 1/2 - 2q$. Розглянемо лінійний простір

$$H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega) := \bigl\{ u \in H^{s,\varphi}(\Omega) : Au \in H^{(\lambda)}(\Omega) \bigr\},$$

наділений нормою графіка

$$\|u\|_{H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)} := \bigl(\|u\|^2_{H^{s,\varphi}(\Omega)} + \|Au\|^2_{H^{(\lambda)}(\Omega)} \bigr)^{1/2}. \tag{3.24}$$

Тут Au розуміємо в сенсі теорії розподілів в області Ω. У соболєвському випадку $\varphi(t) \equiv 1$ будемо пропускати індекс φ у позначеннях цього та інших просторів, введених на основі просторів Хермандера $H^{s,\varphi}(\Omega)$.

Простір $H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)$ гільбертів відносно норми (3.24). Справді, ця норма породжена скалярним добутком, оскільки такими є норми в правій частині рівності (3.24). Окрім того, простір $H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)$ повний відносно цієї норми. Справді, якщо послідовність $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в цьому просторі, то існують границі $u := \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в $H^{s,\varphi}(\Omega)$ і $f := \lim\limits_{k\to\infty} Au_k$ в $H^{(\lambda)}(\Omega)$, оскільки останні два простори повні. Диференціальний оператор A неперервний у топологічному просторі $\mathcal{D}'(\Omega)$; тому $Au = \lim\limits_{k\to\infty} Au_k = f$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Тут, нагадаємо, $u \in H^{s,\varphi}(\Omega)$ і $f \in H^{(\lambda)}(\Omega)$. Тому $u \in H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$ у просторі $H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)$. Отже, цей простір повний.

Теорема 3.4. *Нехай $s \leq m+1/2$, $\varphi \in \mathcal{M}$ і $\lambda > m+1/2-2q$. Тоді множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна в просторі $H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega)$, а відображення (1.24) продовжується* *єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого лінійного оператора*

$$(A,B): H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega) \to H^{(\lambda)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) =: \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma). \qquad (3.25)$$

Цей оператор нетерів. Його ядро дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (2.2). *Індекс оператора* (3.25) *дорівнює* $\dim N - \dim N_\star$ *та не залежить від s, φ і λ.*

Доведення. Спочатку дослідимо соболєвський випадок, коли $\varphi(t) \equiv 1$ і ціле $s < 2q$. У цьому випадку щільність множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ у просторі $H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)$, випливає з теорем 4.25(i) та 4.26 з монографії [165] (див. також [168], теореми 1(i) та 2). Справді, за другою з них простір $H^{(\lambda)}(\Omega)$ задовольняє умову I_{s-2q}, сформульовану в п. 4.4.2 цієї монографії. Тому за першою з цих теорем множина

$$\bigl\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : Au \in H^{(\lambda)}(\Omega)\bigr\} = C^\infty(\overline{\Omega})$$

щільна в просторі $H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)$.

Для доведення решти теореми 3.4 у розглянутому випадку скористаємося таким результатом (теорема 3.1 у випадку, коли $\varphi = 1$ і $m \geq 2q$) про розв'язність досліджуваної задачі (1.22), (1.23) у просторах Соболєва–Ройтберга: відображення (1.24) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до нетерового обмеженого лінійного оператора

$$\begin{aligned}(A,B): H^{s,(r)}(\Omega) \to H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma) =:\\ =: \mathcal{H}^{(r-2q)}_{s-2q,s}(\Omega,\Gamma)\end{aligned} \qquad (3.26)$$

(у даному доведенні зручно використовувати це позначення замість позначення $\mathcal{H}^{s-2q,(r-2q)}(\Omega,\Gamma)$, яке застосовували раніше). Ядро оператора (3.26) дорівнює N, а область значень складається з усіх векторів $(f, g_1, \ldots, g_q) \in$

$\mathcal{H}^{(r-2q)}_{s-2q,s}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (3.6). Індекс оператора (3.26) дорівнює $\dim N - \dim N_{\star}$.

Покладемо

$$H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega) := \bigl\{u \in H^{s,(r)}(\Omega) : Au \in H^{(\lambda)}(\Omega)\bigr\}.$$

Тут для кожного $u \in H^{s,(r)}(\Omega)$ елемент $Au \in H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega)$ означено за допомогою оператора (3.26). Для цього елемента умова $Au \in H^{(\lambda)}(\Omega)$ має сенс, оскільки, як зазначалося вище,

$$H^{(\lambda)}(\Omega) = H^{\lambda,(r-2q)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega), \tag{3.27}$$

причому вкладення неперервне. Наділимо лінійний простір $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ нормою графіка

$$\|u\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} := \bigl(\,\|u\|^2_{H^{s,(r)}(\Omega)} + \|Au\|^2_{H^{(\lambda)}(\Omega)}\bigr)^{1/2}. \tag{3.28}$$

Цей простір гільбертів відносно норми (3.28). Справді, ця норма, звісно, породжена деяким скалярним добутком. Окрім того, простір $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ повний відносно неї. Дійсно, якщо послідовність $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна в цьому просторі, то існують границі $u := \lim\limits_{k\to\infty} u_k$ в $H^{s,(r)}(\Omega)$ і $f := \lim\limits_{k\to\infty} Au_k$ в $H^{(\lambda)}(\Omega)$, оскільки останні два простори повні. З першої границі випливає, що $Au = \lim\limits_{k\to\infty} Au_k$ в $H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega)$. Звідси на підставі формули (3.27) і другої границі маємо рівність $Au = f$. Тому $u \in H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u$ у просторі $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$. Отже, цей простір повний.

Звуження відображення (3.26) на простір $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ є лінійним оператором

$$(A,B) : H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega) \to H^{(\lambda)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-m_j-1/2)}(\Gamma) =: \mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma). \tag{3.29}$$

Із вказаних вище властивостей оператора (3.26) безпосередньо випливає, що оператор (3.29) обмежений, його ядро дорівнює N, а область значень

$$(A,B)\bigl(H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)\bigr) = \mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma) \cap (A,B)\bigl(H^{s,(r)}(\Omega)\bigr). \tag{3.30}$$

З цієї рівності та замкненості $(A,B)(H^{s,(r)}(\Omega))$ у просторі

$$\mathcal{H}^{(r-2q)}_{s-2q,s}(\Omega,\Gamma)\hookleftarrow\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$$

випливає, що область значень оператора (3.29) замкнена у просторі $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$ і складається з усіх векторів $(f,g_1,\ldots,g_q)\in\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$, які задовольняють умову (3.6), де $(f_0,f_1,\ldots,f_{r-2q}):=T_{r-2q}f$. Оскільки $f\in H^{(\lambda)}(\Omega)$ і $\lambda>m+1/2-2q$, то з означення оператора T_{r-2q} випливає, що $f_0=f$ і $f_j=D_\nu^{j-1}f$ для кожного $j\in\{1,\ldots,r-2q\}$. Тому умова (3.6) набирає вигляду (2.2).

Для обґрунтування нетеровості оператора (3.29) залишається показати, що його область значень має скінченну ковимірність. Нагадаємо, що ковимірність області значень оператора (3.26) дорівнює $\dim N_\star<\infty$. Окрім того, множина $C^\infty(\overline{\Omega})\times(C^\infty(\Gamma))^q$ щільна в просторі $\mathcal{H}^{(r-2q)}_{s-2q,s}(\Omega,\Gamma)$. Тому, за лемою Гохберга–Крейна [21] (лема 2.1) існує скінченновимірний простір $N_1\subset C^\infty(\overline{\Omega})\times(C^\infty(\Gamma))^q$ такий, що

$$\mathcal{H}^{(r-2q)}_{s-2q,s}(\Omega,\Gamma)=(A,B)\bigl(H^{s,(r)}(\Omega)\bigr)\dotplus N_1$$

При цьому $\dim N_1=\dim N_\star$. Звуження цієї суми на простір $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$ дає на підставі формул (3.30) і $N_1\subset\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$ рівність

$$\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)=(A,B)\bigl(H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)\bigr)\dotplus N_1. \tag{3.31}$$

Отже, ковимірність області значень оператора (3.29) дорівнює $\dim N_1=\dim N_\star<\infty$. Таким чином, цей оператор нетерів.

Для того, щоб завершити доведення теореми 3.4 у розглянутому випадку, достатньо показати, що множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна у просторі $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ та норми у просторах $H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ еквівалентні на цій щільній множині. Справді, тоді нетерів оператор (3.29) стає оператором (3.25) з формулювання цієї теореми.

Доведемо спочатку, що множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$. Позначимо через $Q^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ ортогональне доповнення підпростору N у гільбертовому просторі $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$. Звуження нетерового оператора (3.29) на підпростір $Q^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ є ізоморфізмом

$$(A,B) : Q^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega) \leftrightarrow (A,B)\big(H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)\big); \tag{3.32}$$

тут, звісно, $(A,B)(H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega))$ трактується як підпростір простору $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$. Позначимо через $\mathcal{P}$ оператор косого проектування простору $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$ на підпростір $(A,B)(H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega))$ паралельно підпростору N_1 з прямої суми (3.31).

Подамо довільний елемент $u \in H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ у вигляді $u = v + w$, де $v \in Q^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $w \in N$. Оскільки множина $C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^q$ щільна у просторі $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$, то для вектора $F := (A,B)v \in \mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$ існує послідовність $(F_k) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^q$ така, що $F_k \to F$ у просторі $\mathcal{H}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)$. Тоді $\mathcal{P}F_k \to \mathcal{P}F = F$ у цьому просторі, причому $(\mathcal{P}F_k) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \times (C^\infty(\Gamma))^q$. Отже,

$$v_k := (A,B)^{-1}\mathcal{P}F_k \to (A,B)^{-1}F = v \quad \text{в} \;\; Q^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega);$$

тут через $(A,B)^{-1}$ позначено оператор, обернений до ізоморфізму (3.32). Оскільки

$$(A,B)v_k = \mathcal{P}F_k \in \mathcal{H}^{(r-2q)}_{\sigma-2q,\sigma}(\Omega,\Gamma) \quad \text{для кожного} \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

то згідно з [182] (теорема 7.1.1) виконується включення

$$v_k \in \bigcap_{\sigma\in\mathbb{R}} H^{\sigma,(r)}(\Omega) = C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Отже,

$$C^\infty(\overline{\Omega}) \ni v_k + w \to v + w = u$$

у просторі $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$. З огляду на довільність елемента $u \in H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ доведено щільність множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ в $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$.

Доведемо тепер, що норми у просторах $H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)$ і $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ еквівалентні на $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Зауважимо спочатку, що

$$\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} \quad \text{для довільного} \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}). \tag{3.33}$$

Це випливає з означення норми у просторі $H^{s,(r)}(\Omega)$: у випадку $s \geq 0$ — безпосередньо, а у випадку $s < 0$ — з огляду на те, що

$$\|u\|_{H^{(s)}(\Omega)} \leq \|\mathcal{O}u\|_{H^{(s)}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{H^{s,(0)}(\Omega)} \quad \text{для довільного} \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

Тут, як і раніше, $\mathcal{O}u$ позначає продовження нулем на $\mathbb{R}^n$ функції $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, а рівність правильна, як зазначено в [182, с. 52].

Доведемо оцінку, обернену до (3.33). Для цього розглянемо еліптичну крайову задачу, яка складається з рівняння (1.22) і крайових умов

$$D_{\nu}^{j-1}u = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q. \tag{3.34}$$

Згідно з [146] (теорема 4.1.4) відображення

$$u \mapsto (Au, \mathrm{D}u) := \bigl(Au, u\restriction\Gamma, \ldots, (D_{\nu}^{q-1}u)\restriction\Gamma\bigr), \quad \text{де} \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}), \tag{3.35}$$

продовжується єдиним чином (за неперервністю) до нетерового обмеженого лінійного оператора

$$(A, \mathrm{D}) : H^{s,(r)}(\Omega) \to H^{s-2q,(r-2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-j+1/2)}(\Gamma). \tag{3.36}$$

До того ж, ядро $\mathbf{N}$ цього оператора лежить в $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Звуження оператора (3.36) на простір $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)$ є нетеровим обмеженим оператором

$$(A, \mathrm{D}) : H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega) \to H^{(\lambda)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(s-j+1/2)}(\Gamma) =: \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma). \tag{3.37}$$

Це доводиться так само як і нетеровість оператора (3.29).

Крім того, згідно з [165] (теорема 4.27) відображення (3.35) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до нетерового обмеженого лінійного оператора

$$(A, \mathrm{D}) : H^{s}_{A,\lambda}(\Omega) \to \mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma), \tag{3.38}$$

причому ядро цього оператора лежить в $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ (див. також [168], наслідок 3). Зауважимо, що зазначена теорема доведена в [165] для регулярних еліптичних крайових задач, до яких і належить задача (1.22), (3.34). Оператори (3.37) і (3.38) мають спільне ядро $\mathbf{N} \subset C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і спільну область значень, бо вона є замиканням множини $\{(A, \mathrm{D})u : u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})\}$ у просторі $\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma)$. Позначимо цю спільну область значень через $\mathcal{R}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma)$.

Нетерові оператори (3.37) і (3.38) породжують у канонічний спосіб ізоморфізми

$$(A, \mathrm{D}) : H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathbf{N} \leftrightarrow \mathcal{R}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma),$$
$$(A, \mathrm{D}) : H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathbf{N} \leftrightarrow \mathcal{R}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma).$$

Тут, звісно, трактуємо $\mathcal{R}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma)$ як підпростір простору $\mathcal{H}^{\mathrm{D}}_{\lambda,s}(\Omega, \Gamma)$. Для довільної функції $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ розглянемо її клас суміжності $\widetilde{u} := \{u + w : w \in \mathbf{N}\}$, який належить обом факторпросторам $H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathbf{N}$ і $H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathbf{N}$. На підставі цих ізоморфізмів маємо еквівалентність норм

$$\|\widetilde{u}\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathbf{N}} \asymp \|(A, \mathrm{D})\widetilde{u}\|_{\mathcal{R}_{\lambda,s}(\Omega,\Gamma)} \asymp \|\widetilde{u}\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathbf{N}} \tag{3.39}$$

на функціях $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Спираючись на неї, доведено оцінку, обернену до (3.33).

Для довільного $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ існує таке $w \in \mathbf{N}$, що

$$\|u + w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} \leq 2 \, \|\widetilde{u}\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathbf{N}}. \tag{3.40}$$

Скориставшись еквівалентністю норм на скінченновимірному просторі **N** та послідовно формулами (3.33), (3.40) і (3.39), отримаємо такі нерівності:

$$\|u\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} \leq \|u+w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} + \|w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} \leq$$
$$\leq \|u+w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} + c_1\|w\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)} \leq$$
$$\leq \|u+w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} + c_1\|u+w\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)} + c_1\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)} \leq$$
$$\leq (1+c_1)\|u+w\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)} + c_1\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)} \leq$$
$$\leq 2(1+c_1)\|\widetilde{u}\|_{H^{s,(r)}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathbf{N}} + c_1\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)} \leq$$
$$\leq c_2\|\widetilde{u}\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)/\mathbf{N}} + c_1\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)} \leq (c_2+c_1)\|u\|_{H^{s}_{A,\lambda}(\Omega)};$$

тут c_1 і c_2 — деякі додатні числа, які не залежать від функцій u і w. Отже, доведено оцінку, обернену до (3.33).

Таким чином, теорему 3.4 доведено у розглянутому випадку, коли $\varphi(t) \equiv 1$, $s \in \mathbb{Z}$ і $s < 2q$.

У загальній ситуації виведемо цю теорему з розглянутого випадку і теореми 2.1 за допомогою інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів.

Виберемо ціле число $l \geq 1$, яке задовольняє умови $s > -2q(l-1)$ і $\lambda < 2ql$. Скористаємося нетеровим оператором (3.25) у випадку (вже розглянутому), коли $\varphi(t) \equiv 1$ і число $-2q(l-1)$ узято замість s, та нетеровим оператором (2.1) з теореми 2.1 у випадку, коли $\varphi(t) \equiv t^{\lambda+2q}$. Отже, отримаємо нетерові обмежені оператори

$$\begin{aligned}(A,B): H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega) \to H^{(\lambda)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(-2q(l-1)-m_j-1/2)}(\Gamma) = \\ = \mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma),\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$
\begin{aligned}
(A,B): H^{(\lambda+2q)}(\Omega) \to H^{(\lambda)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{(\lambda+2q-m_j-1/2)}(\Gamma) =:\\
=: \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma).
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

Вони мають спільне ядро N і однаковий індекс, рівний $\dim N - \dim N_{\star}$. Окрім того, перший оператор є розширенням другого.

Покладемо $\varepsilon := s + 2q(l-1) > 0$ і $\delta := \lambda + 2q - s > 0$ та означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою (1.20). Застосувавши інтерполяцію з функціональним параметром ψ до обмежених лінійних операторів (3.41) і (3.42), отримаємо обмежений лінійний оператор

$$
\begin{aligned}
(A,B): \bigl[H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega), H^{(\lambda+2q)}(\Omega)\bigr]_{\psi} \to\\
\to \bigl[\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi}.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Він є звуженням відображення (3.41) на інтерполяційний простір

$$
[H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega), H^{(\lambda+2q)}(\Omega)]_{\psi}. \tag{3.44}
$$

Наведені у формулі (3.43) пари гільбертових просторів є припустимими. Припустимість першої з них випливає, зокрема, із доведеної вище щільності множини $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ у просторі $H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega)$. Крім того, цей простір сепарабельний, що випливає з нетеровості оператора (3.41) і сепарабельності простору $\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma)$. Припустимість другої пари очевидна.

Множина $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ щільна у просторі (3.44), оскільки у нього неперервно і щільно вкладено простір $H^{(\lambda+2q)}(\Omega)$. Тому оператор (3.43) є продовженням за неперервністю відображення (1.24). На підставі зазначених вище властивостей нетерових операторів (3.41) і (3.42) робимо висновок згідно з твердженням 1.10, що оператор (3.43) нетерів з ядром N, індексом $\dim N - \dim N_{\star}$ та областю значень, рівною

$$
\bigl[\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma)\bigr]_{\psi} \cap (A,B)\bigl(H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega)\bigr).
$$

З останньої властивості і вже обґрунтованого опису області значень оператора (3.41) (з використанням умови (2.2)) випливає, що область значень оператора (3.43) складається з усіх векторів

$$(f, g_1, \ldots, g_q) \in \big[\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi},$$

які задовольняють умову (2.2).

Для того, щоб завершити доведення теореми 3.4, залишається показати, що простори, у яких діє нетерів оператор (3.43), задовольняють рівності

$$\big[H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega), H^{(\lambda+2q)}(\Omega)\big]_{\psi} = H^{s,\varphi}_{A,\lambda}(\Omega), \tag{3.45}$$

$$\big[\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi} = \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma) \tag{3.46}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Рівність (3.46) випливає з тверджень 1.11 і 1.9 . А саме,

$$\big[\mathcal{H}_{\lambda,-2q(l-1)}(\Omega,\Gamma), \mathcal{H}_{\lambda,\lambda+2q}(\Omega,\Gamma)\big]_{\psi} =$$
$$= \big[H^{(\lambda)}(\Omega), H^{(\lambda)}(\Omega)\big]_{\psi} \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \big[H^{(-2q(l-1)-m_j-1/2)}(\Gamma), H^{(\lambda+2q-m_j-1/2)}(\Gamma)\big]_{\psi} =$$
$$= H^{(\lambda)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} \big[H^{(s-m_j-1/2-\varepsilon)}(\Gamma), H^{(s-m_j-1/2+\delta)}(\Gamma)\big]_{\psi} =$$
$$= H^{(\lambda)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma) = \mathcal{H}_{\lambda,s,\varphi}(\Omega,\Gamma)$$

з точністю до еквівалентності норм.

Для доведення рівності (3.45) скористаємося одним результатом про інтерполяцію підпросторів, пов'язаних з довільним обмеженим лінійним оператором, який діє в парі гільбертових просторів. Нехай H, Φ і Ψ — гільбертові простори, причому виконується неперервне вкладення $\Phi \hookrightarrow \Psi$. Нехай також задано обмежений лінійний оператор $T : H \to \Psi$. Покладемо $(H)_{T,\Phi} := \{u \in H : Tu \in \Phi\}$. Простір $(H)_{T,\Phi}$ є гільбертовим відносно норми графіка

$$\|u\|_{(H)_{T,\Phi}} := \bigl(\|u\|_H^2 + \|Tu\|_\Phi^2\bigr)^{1/2}.$$

Твердження 3.3. *Нехай задано шість сепарабельних гільбертових просторів X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1 і Z_1 та три лінійних відображення T, R і S, що задовольняють такі сім умов:*

(i) пари $X = [X_0, X_1]$ і $Y = [Y_0, Y_1]$ припустимі;

(ii) простори Z_0 і Z_1 є підпросторами деякого лінійного простору E;

(iii) виконуються неперервні вкладення $Y_j \hookrightarrow Z_j$ при $j \in \{0, 1\}$;

(iv) відображення T означене на X_0 і задає обмежені оператори $T : X_j \to Z_j$ при $j \in \{0, 1\}$;

(v) відображення R, означене на E, задає обмежені оператори $R : Z_j \to X_j$ при $j \in \{0, 1\}$;

(vi) відображення S, означене на E, задає обмежені оператори $S : Z_j \to Y_j$ при $j \in \{0, 1\}$;

(vii) для кожного $\omega \in E$ виконується рівність $TR\omega = \omega + S\omega$.

Тоді пара просторів $[(X_0)_{T,Y_0}, (X_1)_{T,Y_1}]$ припустима і для довільного інтерполяційного параметра $\psi \in \mathcal{B}$ виконується така рівність просторів з точністю до еквівалентності норм:

$$\bigl[(X_0)_{T,Y_0}, (X_1)_{T,Y_1}\bigr]_\psi = \bigl([X_0, X_1]_\psi\bigr)_{T,[Y_0,Y_1]_\psi}.$$

Аналог цього твердження був уперше встановлений Ж.-Л. Ліонсом і Е. Мадженесом [49] (теорема 14.3) для комплексної інтерполяції з числовим параметром. Для інтерполяції з функціональним параметром твердження 3.3 доведено в [58] (п. 4) (див. також [165], п. 3.3.2)

У твердженні 3.3 покладемо

$$X_0 := H^{(-2q(l-1))}(\Omega), \quad X_1 := H^{(\lambda+2q)}(\Omega),$$

$$Y_0 := Y_1 := Z_1 := H^{(\lambda)}(\Omega), \quad Z_0 := E := H^{(-2ql)}(\Omega)$$

і $T := A$. Тоді

$$H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega) = (X_0)_{T,Y_0} \quad \text{і} \quad H^{(\lambda+2q)}(\Omega) = (X_1)_{T,Y_1}. \tag{3.47}$$

Зауважимо, що остання рівність виконується з точністю до еквівалентності норм, оскільки A є обмеженим оператором у парі просторів $H^{(\lambda+2q)}(\Omega)$ і $H^{(\lambda)}(\Omega)$ (для довільного дійсного λ). Звісно, умови (i) – (iv) твердження 3.3 виконуються. Побудуємо оператори R і S, які задовольняють решту умов (v) – (vii).

Для цього скористаємося тим, що відображення $u \mapsto A^l A^{l+} u + u$ задає ізоморфізм

$$A^l A^{l+} + I : \, H^{\sigma}_{\mathrm{D}}(\Omega) \leftrightarrow H^{(\sigma-4ql)}(\Omega) \quad \text{для довільного} \quad \sigma \geq 2ql \tag{3.48}$$

(див., наприклад, лему 3.1 [165], доведення якої проходить і для дійсних $\sigma \geq 2ql$). Тут, як звичайно, A^l є l-тою ітерацією оператора A, а A^{l+} є формально спряженим оператором до диференціального оператора A^l відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$, та I — тотожний оператор. Окрім того,

$$H^{\sigma}_{\mathrm{D}}(\Omega) := \bigl\{ u \in H^{(\sigma)}(\Omega) : R_{\Gamma} D^{j-1}_{\nu} u = 0 \ \text{для кожного} \ j \in \{1, \ldots, 2ql\} \bigr\}$$

є підпростором простору $H^{(\sigma)}(\Omega)$. Оператор, обернений до (3.48), є обмеженим лінійним оператором

$$(A^l A^{l+} + I)^{-1} : \, H^{(\theta)}(\Omega) \to H^{(\theta+4ql)}(\Omega) \quad \text{для довільного} \quad \theta \geq -2ql. \tag{3.49}$$

Покладемо

$$R := A^{l-1} A^{l+} (A^l A^{l+} + I)^{-1} \quad \text{і} \quad S = -(A^l A^{l+} + I)^{-1}.$$

Використовуючи (3.49), одержимо обмежені оператори

$$
\begin{aligned}
R: Z_0 = H^{(-2ql)}(\Omega) &\to H^{(2ql-2ql-2q(l-1))}(\Omega) = X_0,\\
R: Z_1 = H^{(\lambda)}(\Omega) &\to H^{(\lambda+4ql-2ql-2q(l-1))}(\Omega) = X_1,\\
S: Z_0 = H^{(-2ql)}(\Omega) &\to H^{(2ql)}(\Omega) \hookrightarrow H^{(\lambda)}(\Omega) = Y_0,\\
S: Z_1 = H^{(\lambda)}(\Omega) &\to H^{(\lambda+4ql)}(\Omega) \hookrightarrow H^{(\lambda)}(\Omega) = Y_1;
\end{aligned}
$$

тут вкладення неперервні. Окрім того,

$$AR = AA^{l-1}A^{l+}(A^lA^{l+}+I)^{-1} = (A^lA^{l+}+I-I)(A^lA^{l+}+I)^{-1} = I + S$$

на просторі $E = H^{(-2ql)}(\Omega)$. Таким чином, для введених операторів R і S виконуються умови (v) – (vii) твердження 3.3.

Згідно з цим твердженням і на підставі (3.47) отримаємо рівності

$$\bigl[H^{-2q(l-1)}_{A,\lambda}(\Omega), H^{(\lambda+2q)}(\Omega)\bigr]_\psi = \bigl[(X_0)_{T,Y_0}, (X_1)_{T,Y_1}\bigr]_\psi = \bigl([X_0, X_1]_\psi\bigr)_{T,[Y_0,Y_1]_\psi}.$$

Тут згідно з твердженням 1.9 маємо рівність просторів

$$
\begin{aligned}
[X_0, X_1]_\psi &= \bigl[H^{-2q(l-1)}(\Omega), H^{(\lambda+2q)}(\Omega)\bigr]_\psi =\\
&= \bigl[H^{(s-\varepsilon)}(\Omega), H^{(s+\delta)}(\Omega)\bigr]_\psi = H^{s,\varphi}(\Omega).
\end{aligned}
$$

Ці рівності виконуються з точністю до еквівалентності норм. Окрім того,

$$[Y_0, Y_1]_\psi = \bigl[H^{(\lambda)}(\Omega), H^{(\lambda)}(\Omega)\bigr]_\psi = H^{(\lambda)}(\Omega).$$

З останніх трьох виносних формул негайно випливає потрібна рівність (3.45).

Теорему 3.4 доведено.

Ця теорема є новою і в соболєвському випадку, коли $\varphi(t) \equiv 1$.

Зауважимо, що Ж.-Л. Ліонс і Е. Мадженес [49, 53, 148, 149, 150, 151] довели індивідуальні теореми про розв'язність еліптичних крайових задач у просторах Соболєва саме для регулярних еліптичних задач. У випадку, коли порядки крайових умов менші за порядок еліптичного рівняння, різні версії теорем Ліонса – Мадженеса доведено Ж. Жеймонатом [133], Я. А. Ройтбергом [80], Ю. В. Костарчуком і Я. А. Ройтбергом [40], О. О. Мурачем [168] для просторів Соболєва, та В. А. Михайлецем і О. О. Мурачем [65, 160], О. О. Мурачем і І. С. Чепурухіною [169] для уточненої соболєвської шкали (частина цих результатів викладена у монографіях [64, 165], пп. 4.4 і 4.5).

Висновки до розділу 3

У цьому розділі досліджено характер розв'язності та регулярність розв'язків загальної (взагалі кажучи, нерегулярної) еліптичної крайової задачі (1.22), (1.23) у двобічній шкалі просторів Хермандера – Ройтберга $H^{s,\varphi,(r)}(\Omega)$ з показниками регулярності $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathrm{RO}_0$. При цьому максимум m порядків крайових умов (1.23) може бути більшим за порядок $2q$ еліптичного рівняння (1.22), або рівним йому. Досліджено також характер розв'язності цієї задачі у випадку, коли $m \geq 2q$, а її розв'язки належать до простору Хермандера $H^{s,\varphi}(\Omega)$, де $s \leq m + 1/2$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, та задовольняють умову $Au \in H^{(\lambda)}(\Omega)$ для деякого $\lambda > m + 1/2 - 2q$.

Отримано такі результати:

1. Доведено, що загальній еліптичній крайовій задачі (1.22), (1.23) відповідають нетерові обмежені оператори у парах просторів Хермандера – Ройтберга (теорема 3.1).

2. Доведено, що досліджувана задача породжує повний набір ізоморфізмів між відповідними підпросторами просторів Хермандера – Ройтберга (теорема 3.2).

3. Для узагальнених за Ройтбергом розв'язків цієї задачі доведено теорему про їх локальну регулярність у просторах Хермандера–Ройтберга (теорема 3.3).

4. Встановлено теорему типу Ліонса – Мадженеса про нетеровість еліптичної задачі (1.22), (1.23) з крайовими умовами вищих порядків у просторах Соболєва і Хермандера з числовим показником регулярності $s \leq m + 1/2$ (теорема 3.4).

Результати, вказані у пп. 1 – 3, є новими і для регулярних еліптичних крайових задач.

Результати третього розділу опубліковано в статтях [8, 36] і висвітлено в тезах конференцій [38, 39].

ВИСНОВКИ ДО ДИСЕРТАЦІЇ

У дисертації досліджено характер розв'язності та властивості розв'язків загальної (взагалі кажучи, нерегулярної) еліптичної крайової задачі у просторах Хермандера $H^{\varphi}(\Omega)$, які утворюють розширену соболєвську шкалу, та їх модифікаціях за Ройтбергом. Порядки крайових умов є довільними; вони можуть бути більшими за порядок еліптичного рівняння, або рівними йому. На показник регулярності φ накладається досить слабке обмеження, яке гарантує існування лівих частин крайових умов.

Одержано такі основні результати:

1. Доведено теорему про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі у просторах Хермандера, які утворюють розширену соболєвську шкалу, і теорему про породжені цією задачею ізоморфізми.

2. Встановлено локальну апріорну оцінку узагальнених розв'язків досліджуваної задачі в розширеній соболєвській шкалі.

3. Доведено теорему про локальну регулярність цих розв'язків у просторах Хермандера і отримано нову достатню умову неперервності їх узагальнених частинних похідних довільно вибраного порядку та нову достатню умову класичності узагальнених розв'язків задачі.

4. Для еліптичної за Лавруком задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах вищих порядків доведено теореми про нетеровість, породжені ізоморфізми і локальну апріорну оцінку розв'язків у просторах Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу.

5. Доведено теореми про нетеровість загальної еліптичної крайової задачі у двобічній шкалі просторів Хермандера – Ройтберга, породжений нею

повний набір ізоморфізмів і локальну регулярність її розв'язків у цих просторах.

6. Встановлено теорему типу Ліонса–Мадженеса про нетеровість загальної еліптичної задачі з крайовими умовами вищих порядків у просторах Соболєва і Хермандера з числовим показником регулярності $s \leq m + 1/2$, де m — максимум порядків крайових умов.

Результати, вказані у пп. 2, 3 і 5, є новими і для регулярних еліптичних крайових задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агмон С. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. I / С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг. — Москва: Изд. иностранной литературы, 1962. — 206 с. (Переклад статті: Agmon S, Douglis A, Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I // Commun. Pure. Appl. Math. — 1959. — V. 12, № 4. — P. 623 — 727.)

2. Агранович М. С. Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области / М. С. Агранович, А. С. Дынин // Доклады АН СССР. — 1962. — Т. 146, № 3. — С. 511 — 514.

3. Аноп А. В. Еліптичні крайові задачі в многозв'язній області в розширеній соболєвській шкалі / А. В. Аноп // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 37 — 59.

4. Аноп А. В. Загальна еліптична крайова задача в розширеній соболєвській шкалі / А. В. Аноп // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2014. — № 4. — С. 7 — 14.

5. Аноп А. В. Еліптичні крайові задачі для систем диференціальних рівнянь у просторах узагальненої гладкості / А. В. Аноп // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 7 — 34.

6. Аноп А. В. Регулярные эллиптические краевые задачи в расширенной соболевской шкале / А. В. Аноп, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2014. — Т. 66, № 7. — С. 867 — 883.

7. Аноп А. В. Еліптичні крайові задачі у просторах узагальненої гладкості: Дис. ...канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. / А. В. Аноп. — Київ, 2014. — 170 с.

8. Аноп А. В. Нерегулярні еліптичні крайові задачі та простори Хермандера / А. В. Аноп, Т. М. Касіренко, О. О. Мурач // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 3. — С. 299 — 317.

9. Асланян А. Г. Частоты свободных колебаний тонкой оболочки, взаимодействующей з жидкостью / А. Г. Асланян, Д. Г. Васильев, В. Б. Лидский // Функц. анализ и его прилож. — 1981. — **15**, № 3. — С. 1 — 9.

10. Берг Й. Интерполяционные пространства. Введение / Й. Берг, Й. Лёфстрём. — Москва: Мир, 1980. — 264 с.

11. Березанский Ю. М. Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений / Ю. М. Березанский, С. Г. Крейн, Я. А. Ройтберг // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 148, № 4. — С. 745 — 748.

12. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.

13. Березанский Ю. М. Теорема о гомеоморфизмах и функция Грина для общих эллиптических граничных задач / Ю. М. Березанский, Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1967. — Т. 19, № 5. — С. 3 — 32.

14. Бицадзе А. В. К задаче Неймана для гармонических функций / А. В. Бицадзе // Докл. АН СССР. — 1990. — Т. 311, № 1. — С. 11 — 13.

15. Вайнберг Б. Р. О равномерно неэллиптических задачах. II / Б. Р. Вайнберг, В. В. Грушин // Матем. сборник. — 1967. — Т. 73 (115), № 4. — С. 126 — 154.

16. Вентцель А. Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов / А. Д. Вентцель // Теория вероятн. и ее примен. — 1959. — **4**. — С. 172 — 185.

17. Вешев В. А., Коузов Д. П. О влиянии среды на колебания пластин, сочлененных под прямым углом / В. А. Вешев, Д. П. Коузов // Акустический журнал. — 1977. — Т. 23, № 3. — С. 368 — 377.

18. Волевич Л. Р. К теории краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 148, № 3. — С. 489 — 492.

19. Волевич Л. Р. Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем / Л. Р. Волевич // Матем. сборник. — 1965. — Т. 68, № 3. — С. 373 — 416.

20. Волевич Л. Р. Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения / Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях // Успехи матем. наук. — 1965. — Т. 20, № 1. — С. 3 — 74.

21. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Основные положения о дефектных числах, корневых векторах и индексах линейных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г.Крейн // Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, № 2. — С. 43 — 118.

22. Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа / Ю. В. Егоров. — Москва: Наука, 1984. — 360 с.

23. Зинченко Т. Н. Эллиптические по Дуглису–Ниренбергу системы в пространствах Хермандера / Т. Н. Зинченко, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2012. — Т. 64, № 11. — С. 1477 — 1491.

24. Зинченко Т. Н. Эллиптические системы с параметром в расширенной соболевской шкале / Т. Н. Зинченко, А. А. Мурач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 2. — С. 180 — 202.

25. Зинченко Т. Н. Эллиптические по Петровскому системы в расширенной соболевской шкале / Т. Н. Зинченко, А. А. Мурач // Укр. матем. вісник. — 2013. — Т. 10, № 3. — С. 433 — 449.

26. Зинченко Т. Н. Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале / Т. Н. Зинченко // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2013. — № 3. — С. 14 — 20.

27. Зінченко Т. М. Еліптичні системи диференціальних рівнянь у просторах Хермандера: Дис. ...канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. / Т. М. Зінченко. — Київ, 2013. — 158 с.

28. Зинченко Т. Н. Эллиптические системы в расширенной соболевской шкале на замкнутом многообразии / Т. Н. Зинченко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 100 — 125.

29. Калугина Т. Ф. Интерполяция банаховых пространств с функциональным параметром. Теорема реитерации / Т. Ф. Калугина // Вестник Московского ун-та. Сер. 1, матем., механика. — 1975. — Т. 30, № 6. — С. 68 — 77.

30. Карачик В. В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре / В. В. Карачик // Сибирский математический журнал — 1991. — Т. 32, № 5. — С. 51 — 58.

31. Карачик В. В. О разрешимости краевой задачи для уравнения Гельмгольца с нормальными производными высокого порядка на границе / В. В. Карачик // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 5. — С. 907 — 909.

32. Карачик В. В. Об одной задаче для уравнения Пуассона с нормальными производными высокого порядка на границе / В. В. Карачик // Дифференц. уравнения. — 1996. — Т. 32, № 3. — С. 1501 — 1503.

33. Карачик В. В. Интегральные тождества на сфере для нормальных производных полигармонических функций / В. В. Карачик // Сибирские электронные математические известия — 2017. — Т. 14. — С. 533 — 551.

34. Касіренко Т. М. Еліптичні задачі з крайовими умовами високих порядків у просторах Хермандера / Т. М. Касіренко, О. О. Мурач // Український математичний журнал. — 2017. — Т. 69, № 11. — С. 1486 — 1504.

35. Касіренко Т. М. Еліптичні за Лавруком задачі з крайовими операторами вищих порядків в уточненій соболєвській шкалі / Т. М. Касіренко, І. С. Чепурухіна // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 161 — 203.

36. Касіренко Т. М. Загальні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера – Ройтберга / Т. М. Касіренко // Доповіді Національної академії наук України. — 2018. — № 2. — С. 3 — 11.

37. Касіренко Т. М. Про некласичні крайові задачі для рівняння Пуассона у просторах Хермандера / Т. М. Касіренко // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2015" (1 – 3 квітня 2015, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2015. — С. 19 – 22.

38. Касіренко Т. М. Про загальні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера, модифікованих за Ройтбергом / Т. М. Касіренко // Матеріали XV міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2017" (4 – 6 квітня 2017, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2017. — С. 27 – 31.

39. Касіренко Т. М. Про еліптичні задачі з крайовими операторами довільних порядків у просторах Хермандера–Ройтберга / Т. М. Касіренко // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008). 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 87.

40. Костарчук Ю. В. Теореми про ізоморфізми для еліптичних граничних задач з граничними умовами, які не є нормальними / Ю. В. Костарчук, Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1973. — Т. 25, № 2. — С. 271 — 277.

41. Костарчук Ю.В. Локальное повышение гладкости обощенных решений эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными / Ю. В. Костарчук // Укр. матем. журн. — 1973. — Т. 25, № 4. — С. 536 —540.

42. Красильников В. Н. О решении некоторых гранично-контактных задач линейной гидродинамики / В. Н. Красильников // Прикл. мат. мех. — 1961. — Т. 25, № 4. — С. 764 — 768.

43. Крейн С. Г. Об одной интерполяционной теореме в теории операторов / С. Г. Крейн // Доклады АН СССР. — 1960. — Т. 130, № 3. — С. 491 — 494.

44. Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — Москва: Наука, 1978. — 400 с.

45. Лаврук Б. О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. I. Построение сопряженных задач / Б. Лаврук // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1963. – V. 11, No 5. — P. 257 — 267.

46. Лаврук Б. О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. II. Граничная задача для полупространства / Б. Лаврук // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1963. — V. 11, No 5. — P. 269 — 278.

47. Лаврук Б. О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. III. Сопряженная граничная задача для полупространства / Б. Лаврук // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1965. — V. 13, No 2. — P. 105 — 110.

48. Лизоркин П. И. Пространства обобщенной гладкости / П. И. Лизоркин // Х. Трибель. Теория функциональных пространств. — Москва: Мир, 1986. — С. 381 — 415.

49. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — Москва: Мир, 1971. — 372 с. (Переклад видання: Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1. — Paris: Dunod, 1968. — 372 p.)

50. Лопатинский Я. Б. Об одном способе сведения краевых задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям / Я. Б. Лопатинский // Укр. матем. журн. — 1953. — Т. 5, № 2. — С. 123 — 151.

51. Лопатинский Я. Б. Теория общих граничных задач. Избранные труды / Я. Б. Лопатинский. — Киев: Наукова думка, 1984. — 316 с.

52. Лукьянов В. В., Назаров А. И. Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов / В. В. Лукьянов, А. И. Назаров // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 1998. — Т. 250. — С. 203 — 218.

53. Мадженес Э. Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных / Э. Мадженес // Успехи матем. наук. — 1966. — Т. 21, № 2. — С. 169 — 218.

54. Михайлец В. А. Эллиптические операторы в уточненной шкале функциональных пространств / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2005. — Т. 57, № 5. — С. 689 — 696.

55. Михайлец В. А. Интерполяция пространств с функциональным параметром и пространства дифференцируемых функций / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2006. — № 6. — С. 13 — 18.

56. Михайлец В. А. Эллиптический оператор в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2006. — № 10 — С. 27 — 33.

57. Михайлец В. А. Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. II / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2006. — Т. 58, № 3. — С. 352 — 370.

58. Михайлец В. А. Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2006. — Т. 58, № 11. — С. 1536 — 1555.

59. Михайлец В. А. Эллиптический оператор с однородными регулярными граничными условиями в двусторонней уточненной шкале пространств / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. вісник. — 2006. — Т. 3, № 4. — С. 547 — 580.

60. Михайлец В. А. Уточненные шкалы пространств и эллиптические краевые задачи. III / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2007. — Т. 59, № 5. — С. 679 — 701.

61. Михайлец В. А. Эллиптическая краевая задача в двусторонней уточненной шкале пространств / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2008. — Т. 60, № 4. — С. 497 — 520.

62. Михайлец В. А. Интерполяционные пространства Хермандера и эллиптические операторы / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, № 1. — С. 205 — 226.

63. Михайлец В. А. Об эллиптических операторах на замкнутом многообразии / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2009. — № 3. — С. 13 — 19.

64. Михайлец В. А. Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи / В. А. Михайлец, А. А. Мурач. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. — 372 с.

65. Михайлец В. А. Индивидуальные теоремы о разрешимости эллиптических задач и пространства Хермандера / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2011. — № 4. — С. 30 — 36.

66. Михайлец В. А. Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы / В. А. Михайлец, А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2013. — Т. 65, № 3. — С. 368 — 380.

67. Михайлець В. А. Простори Хермандера та еліптичні задачі / В. А. Михайлець, О. О. Мурач // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. — 2011. — Т. 1, № 1 — 2. — С. 129 — 144.

68. Мурач А. А. Эллиптические краевые задачи в многосвязных областях в уточненной шкале пространств / А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2007. — № 4. — С. 29 — 35.

69. Мурач А. А. Эллиптические по Петровскому системы дифференциальных уравнений в уточненной шкале пространств на замкнутом много-

образии / А. А. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2007. — № 5. — С. 29 — 35.

70. Мурач А. А. Эллиптические псевдодифференциальные операторы в уточненной шкале пространств на замкнутом многообразии / А. А. Мурач // Укр. матем. журн. — 2007. — Т. 59, № 6. — С. 798 — 814.

71. Мурач А. А. Эллиптические по Дуглису-Ниренбергу системы в пространствах обобщенной гладкости / А. А. Мурач // Укр. матем. вісник. — 2008. — Т. 5, № 3. — С. 350 — 365.

72. Мурач А. А. Эллиптические системы в двусторонней шкале пространств Хермандера / А. А. Мурач // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2009. — **6**, № 1. — С. 126 — 141.

73. Мурач О. О. Крайова задача для еліптичної за Петровським системи диференціальних рівнянь в уточненій шкалі просторів / О. О. Мурач // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2007. — № 6. — С. 24—31.

74. Панич О. И. Введение в общую теорию эллиптических краевых задач / О. И. Панич. — Киев: Выща школа, 1986. — 128 с.

75. Петре Ж. О новом подходе к граничным задачам для эллиптических уравнений / Ж. Петре // Математика: сб-к переводов.— 1963. — Т. 7, № 1. — С. 43 — 65. (Перевод статьи: Peetre J. Another approach to elliptic boundary problems. — Commun. Pure Appl. Math. — 1961. — V. 14. — P. 711 — 731.)

76. Ремпель Ш. Теория индекса эллиптических краевых задач / Ш. Ремпель, Б.-В. Шульце. — Москва: Мир, 1986. — 575 с.

77. Ройтберг И. Я. Эллиптические граничные задачи для общих систем уравнений в полных шкалах банаховых пространств / И. Я. Ройтберг // Доклады Академии Наук. — 1997. — Т. 354, № 1. — С. 25 — 29.

78. Ройтберг Я. А. Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений / Я. А. Ройтберг // Доклады АН СССР. — 1964. — Т. 157, № 4. — С. 798 — 801.

79. Ройтберг Я. А. Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений / Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1965. — Т. 17, № 5. — С. 122 — 129.

80. Ройтберг Я. А. Теоремы о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами / Я. А. Ройтберг // Доклады АН СССР. — 1968. — Т. 180, № 3. — С. 542 — 545.

81. Ройтберг Я. А. Формула Грина и теорема о гомеоморфизмах для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными / Я. А. Ройтберг // Укр. матем. журн. — 1969. — **21**, № 3. — С. 406–413.

82. Ройтберг Я. А. Теоремы о гомеоморфизмах и формула Грина для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными / Я. А. Ройтберг // Матем. сборник. — 1970. — Т. 83, № 2. — С. 181 — 213.

83. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. — Москва: Наука, 1985. — 142 с.

84. Слободецкий Л. Н. Оценки в L_p решений эллиптических систем / Л. Н. Слободецкий // Доклады АН СССР. — 1958. — Т. 123, № 4. — С. 616 — 619.

85. Слободецкий Л. Н. Оценки в L_2 решений линейных эллиптических и параболических систем, I / Л. Н. Слободецкий // Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр. — 1960. — № 7. — С. 28 — 47.

86. Соколовский В. Б. Об одном обобщении задачи Неймана / В. Б. Соколовский // Дифференц. уравнения. – 1988. — Т. 24, № 4. — С. 714 — 716.

87. Солонников В. А. Оценки решений общих краевых задач для эллиптических систем / В. А. Солонников // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 151, № 4. — С. 783 — 785.

88. Солонников В. А. Об общих краевых задачах, эллиптических в смысле А. Дуглиса-Л. Ниренберга. I / В. А. Солонников // Известия АН СССР, сер. матем. — 1964. — Т. 28, № 3. — С. 665 — 706.

89. Солонников В. А. Об общих краевых задачах, эллиптических в смысле А. Дуглиса-Л. Ниренберга. II / В. А. Солонников // Труды Матем. ин-та АН СССР. — 1966. — Т. 92. — С. 233 — 297.

90. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. — Киев: Наукова думка, 1987. — 268 с.

91. Степанец А. И. Методы теории приближений. В 2-х томах / А. И. Степанец. — Киев: Институт математики НАН Украины, 2002. — Т. 1. — 468 с. — Т. 2. — 427 с.

92. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. — Москва: Мир, 1980. — 664 с.

93. Трибель Х. Теория функциональных пространств / Х. Трибель. — Москва: Мир, 1986. — 447 с.

94. Функциональный анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна. — Москва: Наука, 1972. — 544 с.

95. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1965. — 380 с. (Переклад видання: Hörmander L. Linear partial differential operators. — Berlin: Springer, 1963. — vii+287 p.)

96. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1986. — 456 с.

97. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1987. — 696 с.

98. Чепурухіна І. С. Про деякі класи еліптичних крайових задач у просторах узагальненої гладкості / І. С. Чепурухіна // Диференціальні рівняння і суміжні питання. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 284 — 304.

99. Чепурухіна І. С. Напіводнорідна еліптична задача з додатковими невідомими функціями у крайових умовах / І. С. Чепурухіна // Доповіді

НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. — 2015. — № 7. — С. 20 — 29.

100. Чепурухіна І. С. Еліптичні крайові задачі за Б. Лавруком у розширеній соболєвській шкалі / І. С. Чепурухіна // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 338 — 374.

101. Чепурухіна І. С. Еліптичні за Лавруком крайові задачі у просторах Хермандера: Дис. ...канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. / І. С. Чепурухіна. — Київ, 2015. — 164 с.

102. Шапиро З. Я. Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений / З. Я. Шапиро // Известия АН СССР, сер. матем. — 1953. — Т. 17. — С. 539 — 562.

103. Шехтер М. Общие граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных / М. Шехтер // Математика: сб-к переводов. — 1960. — Т. 4, № 5. — С. 93 — 122. (Перевод статьи: Schechter M. General boundary value problems for elliptic partial differential equations. — Commun. Pure Appl. Math. — 1959. — V. 12, № 3. — P. 457 — 486.)

104. Шехтер М. Замечания об эллиптических граничных задачах / М. Шехтер // Математика: сб-к переводов. — 1960. — Т. 4, № 6. — С. 3 — 21. (Перевод статьи: Schechter M. Remarks on elliptic boundary value problems. — Commun. Pure Appl. Math. — 1959. — V. 12, № 4. — P. 561 — 578.)

105. Шлензак Г. Эллиптические задачи в уточненной шкале пространств / Г. Шлензак // Вестник Московского ун-та. Сер. 1, матем., механика. — 1974. — Т. 29, № 4. — С. 48 — 58.

106. Эскин Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений / Г. И. Эскин. — Москва: Наука, 1973. — 232 с.

107. Agmon S. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II / S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg // Commun. Pure Appl. Math. — 1964. — V. 17, № 1. — P. 35 — 92.

108. Agmon S. Lectures on Elliptic Boundary Value Problems / S. Agmon. — Princeton, N.J.: D. Van Nostrand Co., 1965. — 292 p.

109. Agranovich M. S. Elliptic boundary problems / M. S. Agranovich // Encycl. Math. Sci., vol. 79, Partial differential equations. IX. – Berlin: Springer-Verlag, 1997. — P. 1 — 144.

110. Anop A. V. Parameter-elliptic problems and interpolation with a function parameter / A. V. Anop, A. A. Murach // Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — V. 20, № 2. — P. 103 — 116.

111. Anop A. V. Elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces / A. V. Anop, T. M. Kasirenko // Methods Funct. Anal. Topology. — 2016. — V. 22, № 4. — P. 295 — 310.

112. Anop A. V. On general elliptic boundary value problems on the extended Sobolev scale / A. V. Anop, T. M. Kasirenko // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: Book of Abstracts. — Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 36 – 38.

113. Apushkinskaya D. E. A Survey of results on nonlinear Venttsel problems / D. E. Apushkinskaya, A. I. Nazarov // Appl. Math. — 2000, № 1. — P. 69 — 80.

114. Aronszajn N. Differential equations on Riemannian manifolds / N. Aronszajn, A. N. Milgram // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1953. — V. 2. — P. 1 — 61.

115. Avakumović V. G. O jednom O-inverznom stavu / V. G. Avakumović // Rad Jugoslovenske Akad. Znatn. Umjetnosti. — 1936. — V. 254. — P. 167 — 186.

116. Bingham N. H. Regular variation / N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. — 512 p.

117. Bonnaillie-Noel V. On generalized Ventcel's type boundary conditions for Laplace operator in a bounded domain / V. Bonnaillie-Noel, M. Dambrine, F. Herau, Vial G. // SIAM J. Math. Anal. — 2010. — V. 42, № 2. — P. 931 — 945.

118. Boutet de Monvel L. Boundary problems for pseudo-differential operators / L. Boutet de Monvel // Acta Math. — 1971. — V. 126, № 1 — 2. — P. 11 — 51.

119. Brudnyï Yu. A. Interpolation functors and interpolation spaces / Yu. A. Brudnyï, N. Ya. Krugljak. — Amsterdam: North-Holland, 1991. — xvi+718 p.

120. Browder F. E. On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations / F. E. Browder // Commun. Pure Appl. Math. — 1956. — V. 9, № 3. — P. 351 — 361.

121. Browder F. E. Estimates and existence theorems for elliptic boundary-value problems / F. E. Browder // Proc. Nat. Acad. Sci. — 1959. — V. 45, № 3. — P. 365 — 372.

122. Burenkov V. Extension theorems for Sobolev spaces / V. Burenkov // Operator Theory: Advances and Applications. V. 109. — Basel: Birkhäser, 1999. — P. 187 — 200.

123. Caetano A. M. Local growth envelops of Triebel–Lizorkin spaces of generalized smoothness / A. M. Caetano, H.-G. Leopold // J. Fourier Anal. Appl. — 2006. — V. 12, № 4. — P. 427 — 445.

124. Carro M. J. On complex interpolation with an analytic functional / M. J. Carro, J. Cerdà // Math. Scand. — 1990. — V. 66, № 2. — P. 264 — 274.

125. Chepurukhina I. S. Elliptic problems in the sense of B. Lawruk on two-sided refined scales of spaces / I. S. Chepurukhina, A. A. Murach // Methods Funct. Anal. Topology. — 2015. — V. 21, № 1. — P. 6 — 21.

126. Ciarlet P. G. Plates and junctions in ellastic multistructures. An asymptotic analysis / P. G. Ciarlet. — Paris: Mayson, 1990. — viii+218 p.

127. Cobos F. Hardy-Sobolev spaces and Besov spaces with a function parameter / F. Cobos, D. L. Fernandez // Proc. Lund Conf. 1986. Lecture Notes in Math. V. 1302. — Berlin: Springer, 1988. — P. 158 — 170.

128. Edmunds D. E. Spectral theory for isotropic fractal drums / D. E. Edmunds, H. Triebel // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1998. — V. 326. — P. 1269 – 1274.

129. Edmunds D. E. Eigenfrequencies of isotropic fractal drums / D. E. Edmunds, H. Triebel // Operator Theory: Advances and Applications. V. 110. — Basel: Birkhäser, 1999. — P. 81 — 102.

130. Eskin G. Lectures on Linear Partial Differential Equations / G. Eskin // Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2011. — 410 p.

131. Farkas W. Characterisations of function spaces of generalized smoothness / W. Farkas, H.-G. Leopold // Ann. Mat. Pura Appl. — 2006. — V. 185, № 1. — P. 1 — 62.

132. Foiaş C. Sur certains théorèmes d'interpolation / C. Foiaş, J.-L. Lions // Acta Scient. Math. Szeged. — 1961. — V. 22, № 3 – 4. — P. 269 — 282.

133. Geymonat G. Sul problema di Dirichlet per le equazoni lineari ellittiche // Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa. — 1962. — V. 16. — P. 225–284.

134. Geymonat G. Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellittici / G. Geymonat // Annali di Matematica Pura ed Applicata. (4). — 1965. — V. 69. — P. 207 — 284.

135. Grubb G. Pseudo-differential boundary problems in L_p spaces / G. Grubb // Comm. Partial Differential Equations. — 1990. — V. 15. — P. 289 — 340.

136. Grubb G. Functional calculas of pseudo-differential boundary problems / G. Grubb. — 2-nd ed. — Boston: Birkhäser, 1996. — 522 p.

137. Gurka P. Sharp embeddins of Besov-type spaces / P. Gurka, B. Opic // J. Comp. Appl. Math. — 2007. — V. 208, № 1. — P. 235 — 269.

138. Gustavsson J. A function parameter in connection with interpolation of Banach spaces / J. Gustavsson // Math. Scand. — 1978. — V. 42, № 2. — P. 289 – 305.

139. Haroske D. D. Continuity envelopes of spaces of generalised smoothness, entropy and approximation numbers / D. D. Haroske, S. D. Moura // J. Approximation Theory. — 2004. — V. 128. — P. 151 — 174.

140. Haroske D. D. Continuity envelopes and sharp embeddings in spaces of generalised smoothness / D. D. Haroske, S. D. Moura // J. Funct. Anal. — 2008. — V. 254, № 8. — P. 1487 — 1521.

141. Jacob N. Pseudodifferential operators and Markov processes: In 3 volumes / N. Jacob. — London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. — xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.

142. Janson S. Minimal and maximal methods of interpolation / S. Janson // J. Funct. Anal. — 1981. — V. 44, № 1. — P. 50 — 73.

143. Karamata J. Sur certains "Tauberian theorems" de M. M. Hardy et Littlewood / J. Karamata // Mathematica (Cluj). — 1930. — V. 3. — P. 33 — 48.

144. Karamata J. Primedba na prethodhi rad g. V. Avakumovica / J. Karamata // Rad. Jugosl. Akad. Znatn. Umjetn. — 1936. — V. 254. — P. 187 — 200.

145. Kasirenko T. M. On elliptic problems with boundary operators of arbitrary orders in the Hörmander spaces / T. M. Kasirenko // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, 20 – 24 September, 2016, Lviv, Ukraine. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. — P. 75 — 76.

146. Kozlov V. A. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities / V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, J. Rossmann. — Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – x+414 p.

147. Lions J.-L. Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications / J.-L. Lions // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. Roumanie. — 1958. — V. 50, № 4. — P. 419 — 432.

148. Lions J.-L. Problémes aux limites non homogénes, II / J.-L. Lions, E. Magenes // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1961. — V. 11. — 137 — 178.

149. Lions J.-L. Problémes aux limites non homogénes, V / J.-L. Lions, E. Magenes // Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa. — 1962. — V. 16. — P. 1 — 44.

150. Lions J.-L. Problémes aux limites non homogénes, VI / J.-L. Lions, E. Magenes // J. d'Analyse Math. — 1963. — V. 11. — P. 165 — 188.

151. Lions J.-L. Problémes aux limites non homogénes, VII / J.-L. Lions, E. Magenes // Ann. Mat. Pura Appl. (4) — 1963. — V. 63. — P. 201 — 224

152. Lions J.-L. Non-homogeneous boundary-value problems and applications, Vol. II / J.-L. Lions, E. Magenes. — Berlin: Springer, 1972. — x+242 p.

153. Luo Y. Linear second order elliptic equations with Venttsel' boundary conditions / Y. Luo, N. S. Trudinger // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. — 1991. — V. A 118, № 3–4. — P. 193 — 207.

154. Matuszewska W. On a generalization of regularly increasing functions / W. Matuszewska // Studia Math. — 1964. — V. 24. — P. 271 — 279.

155. Maz'ya V. G. Theory of Sobolev multipliers. With applications to differential and integral operators / V. G. Maz'ya, T. O. Shaposhnikova. — Berlin: Springer, 2009. — xiii+609 p.

156. Merucci C. Interpolation réelle avec fonction paramètre: réitération et applications aux espaces $\Lambda^{\varrho}(\varphi)$ / C. Merucci // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1982. — V. 295, № 6. — P. 427 — 430.

157. Merucci C. Application of interpolation with a function parameter to Lorentz, Sobolev and Besov spaces / C. Merucci // Proc. Lund Conf. 1983. Lecture Notes in Math. V. 1070. — Berlin: Springer, 1984. — P. 183 — 201.

158. Mikhailets V. A. Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Methods Funct. Anal. Topology. — 2008. — V 14, № 1. — P. 81 — 100.

159. Mikhailets V. A. Elliptic systems of pseudodifferential equations in a refined scale on a closed manifold / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 2008. — V. 56, № 3 — 4. — P. 213 — 224.

160. Mikhailets V. A. Elliptic problems and Hörmander spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Operator Theory: Advances and Applications. V. 191. — Basel: Birkhäser, 2009. — P. 447 — 470.

161. Mikhailets V. Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials / V. Mikhailets, V. Molyboga // Methods Funct. Anal. Topology. — 2009. — **15**, № 1. — P. 31 — 40.

162. Mikhailets V. A. Hill's potentials in Hörmander spaces and their spectral gaps / V. A. Mikhailets, V. Molyboga // Methods Funct. Anal. Topology. — 2011. — V. 17, № 3. — P. 235 — 243.

163. Mikhailets V. A. Smoothness of Hill's potential and lengths of spectral gaps / V. A. Mikhailets, V. Molyboga // Operator Theory: Advances and Applications. V. 221. — Basel: Birkhäser, 2012. — P. 467 — 478.

164. Mikhailets V. A. The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Banach J. Math. Anal. — 2012. — V. 6, № 2. — P. 211 — 281.

165. Mikhailets V. A. Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems / V. A. Mikhailets, A. A. Murach. — Basel: Birkhäuser, 2014. — xii+297 p.

166. Mikhailets V. A. Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces / V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Results Math. — 2015. — V. 67, № 1. — P. 135 — 152.

167. Murach A. A. Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold / A. A. Мурач // Methods Funct. Anal. Topology. — 2008. — V. 14, № 2. — P. 142 — 158.

168. Murach A. A. Extension of some Lions-Magenes theorems // Methods Funct. Anal. Topology. — 2009. — V. 15, №. 2. — P. 152 — 167.

169. Murach A. A. Elliptic boundary-value problems in the sense of Lawruk on Sobolev and Hörmander spaces / A. A. Murach, I. S. Chepurukhina // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 5. — С. 672 — 691.

170. Murach A. A. Parameter–elliptic operators on the extended Sobolev scale / A. A. Murach, T. Zinchenko // Methods Funct. Anal. Topology. — 2013. — V. 19, № 1. — C. 29 — 39.

171. Nazarov S. On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier–Stokes equations / S. Nazarov, K. Pileckas // J. Reine Angew. Math. — 1993. — V. 438. — P. 103 — 141.

172. Nicola F. Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces / F. Nicola, L. Rodino. — Basel: Birkhäser, 2010. — x+306 p.

173. Ovchinnikov V. I. The methods of orbits in interpolation theory / V. I. Ovchinnikov // Math. Rep. — 1984. — V. 1, № 2. — P. 349 — 515.

174. Ovchinnikov V. I. Interpolation orbits in couples of Lebesgue spaces / V. I. Ovchinnikov // Funct Anal Appl. — 2005. — V. 39, № 1. — P. 46 — 56.

175. Paneah B. The oblique derivative problem. The Poincaré problem / B. Paneah. — Berlin: Wiley–VCH, 2000. — 348 p.

176. Peetre J. Another approach to elliptic boundary problems / J. Peetre // Commun. Pure and Appl. Math. — 1961. — V. 14, № 4. — P. 711 — 731.

177. Peetre J. On interpolation functions / J. Peetre // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1966. — V. 27. — P. 167 — 171.

178. Peetre J. On interpolation functions. II / J. Peetre // Acta sci. math. — 1968. — V. 29, № 1. — P. 91 — 92.

179. Persson L.-E. Interpolation with a function parameter / L.-E. Persson // Math. Scand. — 1986. — V. 59, № 2. — P. 199 — 222.

180. Pöschel J. Hill's potentials in weighted Sobolev spaces and their spectral gaps / J. Pöschel // Hamiltonian dynamical systems and applications. — Dordrecht: Springer, 2008. — P. 421 — 430.

181. Roitberg I. Ya. Elliptic boundary value problems for general elliptic systems in complete scales of Banach spaces / I. Ya. Roitberg // Oper. Theory: Adv. and Appl. — 1998. — V. 102. — P. 231 — 241.

182. Roitberg Ya. A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions / Ya. A. Roitberg. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996. — xii+415 p.

183. Roitberg Ya. A. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions / Ya. A. Roitberg. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1999. — x+276 p.

184. Schechter M. Integral inequalities for partial differential equations and functions satisfying general boundary conditions / M. Schechter // Comm. Pure Appl. Math. — 1959. — V. 12, № 1. — P. 37 — 66.

185. Schechter M. A local regularity theorem / M. Schechter // J. Math. Mech. — 1961. — V. 10, № 2. — P. 279 — 288.

186. Schechter M. On L_p estimates and regularity, I / M. Schechter // Amer. J. Math. — 1963. — V. 85, № 1. — P. 1 — 13.

187. Schechter M. Complex interpolation / M. Schechter // Compos. Math. — 1967. — **18**, № 1, 2. — P. 117 — 147.

188. Schechter M. Modern methods in partial differential equations / M. Schechter. — New York: McGraw-Hill Inc, 1977. — xv+245 p.

189. Tartar L. An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces / L. Tartar. — Berlin: Springer, 2007. — xxv+219 p.

190. Triebel H. The structure of functions / H. Triebel. — Basel: Birkhäser, 2001. — xii+425 p.

191. Wloka J. T. Boundary value problems for elliptic systems / J. T. Wloka, B. Rowley, B. Lawruk. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995. — xiv+641 p.

192. Zinchenko T. N. Petrovskii elliptic systems in the extended Sobolev scale / T. N. Zinchenko, A. A. Murach. // J. Math. Sci. (N. Y.) — 2014. — V. 196, № 5. — P. 721 — 732.

ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Anop A. V. Elliptic boundary-value problems in Hörmander spaces / A. V. Anop, T. M. Kasirenko // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2016. — V. 22, № 4. — P. 295 — 310.

2. Касіренко Т. М. Еліптичні задачі з крайовими умовами високих порядків у просторах Хермандера / Т. М. Касіренко, О. О. Мурач // Український математичний журнал. — 2017. — Т. 69, № 11. — С. 1486 — 1504. (Переклад англійською: Kasirenko T. M. Elliptic problems with boundary conditions of higher orders in Hörmander spaces / T. M. Kasirenko, O. O. Murach // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — V. 69, № 11 (April). — P. 1727 — 1748.)

3. Касіренко Т. М. Еліптичні за Лавруком задачі з крайовими операторами вищих порядків в уточненій соболєвській шкалі / Т. М. Касіренко, І. С. Чепурухіна // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу. Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — Т. 14, № 3. — С. 161 — 203.

4. Касіренко Т. М. Загальні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера–Ройтберга / Т. М. Касіренко // Доповіді Національної академії наук України. — 2018. — № 2. — С. 3 — 11.

5. Аноп А. В. Нерегулярні еліптичні крайові задачі та простори Хермандера / А. В. Аноп, Т. М. Касіренко, О. О. Мурач // Український математичний журнал. — 2018. — Т. 70, № 3. — С. 299 — 317.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Касіренко Т. М. Про некласичні крайові задачі для рівняння Пуассона у просторах Хермандера / Т. М. Касіренко // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2015" (1 – 3 квітня 2015, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2015. — С. 19 — 22.

2. Kasirenko T. M. On elliptic problems with boundary operators of arbitrary orders in the Hörmander spaces / T. M. Kasirenko // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky, 20 – 24 September, 2016, Lviv, Ukraine. — Lviv: Ivan Franko National University of Lviv, 2016. — P. 75 — 76.

3. Anop A. V. On general elliptic boundary value problems on the extended Sobolev scale / A. V. Anop, T. M. Kasirenko // 5th International Conference of Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine: Book of Abstracts. — Vinnytsia: Vasyl' Stus Donetsk National University, 2016. — P. 36 – 38.

4. Касіренко Т. М. Про загальні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера, модифікованих за Ройтбергом / Т. М. Касіренко // Матеріали XV міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2017" (4 – 6 квітня 2017,

м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2017. — С. 27 – 31.

5. Касіренко Т. М. Про еліптичні задачі з крайовими операторами довільних порядків у просторах Хермандера–Ройтберга / Т. М. Касіренко // Міжнародна конференція молодих математиків присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008), 7 – 10 червня 2017 р., Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2017. — С. 87.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— Тринадцятій міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна-2015” (Київ, 1 – 3 квітня 2015 року);

— Міжнародній конференції з диференціальних рівнянь, присвяченій 110-й річниці Я. Б. Лопатинського (Україна, Львів, 20 – 24 вересня 2016 року);

— П’ятій міжнародній конференції молодих науковців з диференціальних рівнянь і застосувань, присвяченій Я. Б. Лопатинському (Україна, Київ, 9 – 11 листопада 2016 року);

— П’ятнадцятій міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених „Шевченківська весна-2017” (Київ, 4 – 6 квітня 2017 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Україна, Київ, 7 – 10 червня 2017 року);

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко) 2 квітня 2018 року;

— семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей) 2 квітня 2018 року.