НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Плакош Андріяна Іванівна

УДК 512.54+512.64+512.66

ЗАСТОСУВАННЯ МАТРИЧНИХ ЗАДАЧ В ТЕОРІЇ ГРУП

01.01.06 — алгебра та теорія чисел
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
ДРОЗД Юрій Анатолійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу алгебри.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ПЕТРАВЧУК Анатолій Петрович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри алгебри і математичної логіки;

доктор фізико-математичних наук, професор
ОЛІЙНИК Богдана Віталіївна,
Національний університет
«Києво-Могилянська Академія»,
завідувач кафедри математики.

Захист дисертації відбудеться “2” жовтня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий “1” вересня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Максименко С. І.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних задач та обчисленню когомологій, пов'язаних з проблемою класифікації p-груп Чернікова. Нагадаємо, що *група Чернікова*, або *черніківська група* — це скінченне розширення абелевої групи з умовою мінімальності M, тобто прямої суми квазіциклічних груп ("основи"). Еквівалентно, це — локально скінченна група з умовою мінімальності для підгруп. Ці групи, введені С. Черніковим, відіграють важливу роль у теорії нескінченних груп, особливо, розв'язних груп[1]. Оскільки черніківська група розкладається у прямий добуток p-груп, достатньо розглядати саме черніківські p-групи.

Відомо, що кільце ендоморфізмів квазіциклічної p-групи — це кільце $\mathbb{Z}_p$ цілих p-адичних чисел. Тому з кожною черніківською p-групою G пов'язаний гомоморфізм скінченної групи H ("верхівки") у групу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, тобто ціле p-адичне зображення групи H. Якщо таке зображення фіксоване, то група G визначається класом когомологій з $H^2(H, M)$. Зображення та клас когомологій визначаються при цьому з точністю до "слабкої еквівалентності", тобто, крім ізоморфізмів зображень допускаються ще й автоморфізми верхівки H. Отже, задача класифікації p-груп Чернікова розпадається на дві задачі:

- Класифікація цілих p-адичних зображень заданої скінченної групи H з точністю до слабкої еквівалентності.
- Обчислення когомологій $H^2(H, M)$, де основа M визначається заданим цілим p-адичним зображенням.

Такий підхід до вивчення черніківських груп був започаткований П. Гудивком, Ф. Ващуком і В. Дроботенком[2], а в подальшому розвинений П. М. Гудивком[3] та І. В. Шапочкою[4]. Звичайно, перш за все,

[1] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами систем подгрупп. – Москва: Наука, 1980. – 382 с.

[2] Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. В. Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, 6. – С. 742–753.

[3] Гудивок П. М., Шапочка И. В. О черниковских p-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, 3. – С. 291–304.

[4] Шапочка І. В. Про класифікацію нільпотентних черніковських p-груп // Наук. Вісн. Ужгород. унів., сер. мат. – 2005. – **10–11**. – С. 147–151.

він вимагає класифікації цілочисельних зображень груп. Тут перші результати були отримані С. Берманом і П. Гудивком[5], А. Геллером і І. Райнером[6], А. Джонсом[7], які класифікували зображення циклічних груп порядків p та p^2 і довели, що лише ці p-групи мають скінченну кількість нерозкладних зображень. Л. Назарова[8] описала зображення четвірної групи Кляйна, А. Яковлев[9] — циклічної групи порядку 8. У останніх роботах, інколи неявно, використовувались методи, які у 1970-і роки одержали назву *теорії матричних задач.*

Теорія матричних задач сформувалася, перш за все, під впливом робіт Л. Назарової, А. Ройтера[10], М. Клейнера[11] про зображення частково впорядкованих множин та П. Ґабріеля[12], І. Бернштейна, І. Гельфанда, В. Пономарьова[13] про зображення сагайдаків. Надалі, у роботах цих авторів, а також В. Длаба, К. Рінгеля, Ю. Дрозда, В. Бондаренка, В. Сергейчука та інших вона оформилась у потужний метод досліджень не лише у теорії зображень, а й у алгебраїчній геометрії, алгебраїчній топології, теорії особливостей та інших розділах математики. Зокрема, у теорії груп вона була застосова-

[5] Берман С. Д., Гудивок П. М. Целочисленные представления конечных групп // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**. – С. 1199–1201.

Берман С. Д., Гудивок П. М. Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – **28**. – С. 875–910.

[6] Heller A., Reiner I. Representations of cyclic groups in rings of integers I // Ann. Math. – 1962. – **76**. – P. 73–92.

Heller A., Reiner I. Representations of cyclic groups in rings of integers II // Ann. Math. – 1963. – **77**. – P. 318–328.

[7] Jones A. Groups with a finite number of indecomposable integral representations // Michigan Math. J. – 1963. – **10**. – P. 257–261.

[8] Назарова Л. А. Целочисленные представления четверной группы // Докл. Акад. Наук СССР. – 1961. – **140**. – С. 1101–1014.

[9] Яковлев А. В. Классификация 2-адических представлений циклической группы восьмого порядка // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 93–129.

[10] Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.

[11] Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.

Клейнер М. М. О точных представлениях частично упорядоченных множеств конечного типа // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 42–59.

[12] Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen. I // Manuscr. Math. – 1972. – **6**. – P. 71–103.

[13] Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. П. Функторы Кокстера и теорема Габриеля // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, 2. – С. 19–33.

на до класифікації груп з абелевою підгрупою індексу p[14] та груп з комутатором індексу p[15].

Теорія когомологій груп була натхнена роботами Гуревича про когомології ациклічних просторів і розвинена у 1940-і роки С. Ейленбергом, С. Маклейном, В. Екманом, Х. Хопфом та іншими. Ці роботи були одними з першоджерел гомологічної алгебри. Вони також були пов'язані з теорією розширень груп та проективними зображеннями, де когомології виникають як набори факторів. Ця теорія широко використовується у топології, теорії чисел, алгебраїчній геометрії та інших галузях математики. Саме тому вона активно вивчається багатьма математиками. Зокрема, є багато статей, присвячених обчисленню когомологій конкретних груп та їх класів. У цих дослідженнях часто необхідні спеціальні типи резольвент, які простіші та зручніші, ніж стандартна. Наприклад, Ш. Такахаші[16] запровадив новий підхід до обчислення когомологій скінченних абелевих груп і запропонував застосування цього методу до когомологій тривіальних модулів та деяких груп Галуа.

Отже, дослідження у цих напрямках є актуальними і приводять до нових результатів у теорії зображень, теорії груп, гомологічній алгебрі та інших розділах математики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертації безпосередньо пов'язана з дослідженнями, які виконуються у відділі алгебри і топології у рамках науково-дослідних тем: "Теорія зображень та її застосування в алгебрі, геометрії та топології" (номер державної реєстрації — 0111U002096), "Розробка й застосування нових методів у теорії зображень, абстрактній алгебрі та алгебраїчній геометрії" (номер державної реєстрації — 0116U003125).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис нових класів p-груп Чернікова, знаходження пов'язаних з ними цілочисельних зображень груп, впровадження і застосування нових методів у теорії когомологій скінченних груп. *Об'єктом дослідження*

[14] Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М. Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.

[15] Сергейчук В. В. Конечно порождённые группы с коммутантом простого порядка // Укр. мат. жур. – 1978. – **30**, 6. – С. 789–796.

[16] Takahashi Sh. Cohomology groups of finite abelian groups // Tohoku Math. J. – 1952. – **4**, 3. – P. 294–302.

є p-групи Чернікова, зображення четвірної групи Кляйна та когомології решіток.

Предмет дослідження — матричні задачі й обчислення когомологій, які виникають при дослідженні р-груп Чернікова, та їх застосування до класифікації цих груп.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються при дослідженнях, є методи теорії зображень та матричних задач, гомологічної алгебри та теорії груп.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати дисертаці, запропоновані до захисту, є новими і полягають у такому:

- Описано черніківські p-групи з елементарною абелевою верхівкою та основою рангу 2.
- Дано класифікацію пар кососиметричних форм над полем з точністю до узагальненої конгруентності.
- Встановлено відповідність між цілочисельними зображеннями четвірної групи Кляйна та зображеннями сагайдака типу $\tilde{D}_4$.
- Дано класифікацію цілочисельних зображень четвірної групи Кляйна з точністю до слабкої еквівалентності.
- Побудовано нову резольвенту тривіальної решітки над скінченною абелевою групою, краще пристосовану до обчислення когомологій, та встановлено її зв'язок із стандартною резольвентою.
- Встановлено нові співвідношення двоїстості для решіток над скінченними групами.
- Обчислено когомології незвідних решіток та дуальних до них модулів над скінченними абелевими групами.
- Обчислено когомології модулів, дуальних до неточних решіток над четвірною групою Кляйна.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при вивченні груп Чернікова, зокрема, їх класифікації, при дослідженнях, у яких істотну роль відіграють когомології скінченних груп, у лінійній алгебрі.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У статті [4] з І. В. Шапочкою та статтях [1, 3, 5] з науковим керівником останнім належать постановки задач і загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на наукових конференціях та наукових семінарах:

— Студентській науковій конференції математичного факультету УжНУ (Ужгород, 18 квітня 2013 р.);

— Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 3–6 червня 2015 р.);

— X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20–27 серпня 2015 р.);

— Міжнародній математичній коференції "Group and Actions", присвяченій пам'яті професора Віталія Сущанського (м. Київ, 19–22 грудня 2016 р.);

— XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3–7 липня 2017 р.);

— семінарі під кінець року при механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, керівники — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, доктор фізико-математичних наук А. П. Петравчук, 24 грудня 2015 р.);

— семінарі кафедри алгебри Ужгородського національного університету (м. Ужгород, керівник — кандидат фізико-математичних наук, доцент І. В. Шапочка, 12 травня 2016 р.);

— алгебраїчних семінарах Інституту математики НАН України (м. Київ, керівник — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, 2014–2018 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 11 наукових працях, з них 4 — у міжнародних журналах, які входять до міжнародних наукометричних баз [1, 3, 5, 6], 5 — у фахових виданнях з "Переліку", затвердженого Міністерством освіти і науки України [2, 3, 4, 5, 6], 1 — у матеріалах студентської конференції [7], 4 — у матеріалах міжнародних наукових конференцій [8, 9, 10, 11].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації — 126 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації — 102 сторінки. Список використаних джерел займає 4 сторінки (44 найменування). Додатки займають 3 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** наведено загальну характеристику та мету роботи, обгрунтовано її актуальність і наукову новизну.

У **першому розділі** ми нагадуємо деякі означення та наводимо огляд робіт, що пов'язані з тематикою роботи. Формулюємо твердження, що знадобляться нам у подальшій роботі.

Другий розділ присвячений класифікації одного класу нільпотентних p-груп Чернікова. Нагадаємо, що p-група Чернікова G, тобто розв'язна p-група з умовою мінімальності для підгруп, — це розширення скінченної прямої суми M квазіциклічних p-груп, або, що те саме, груп типу p^∞, за допомогою скінченної p-групи H. Ми називаємо H та M, відповідно, *верхівкою* та *основою* G. Відомо, що p-група Чернікова є нільпотентною тоді і тільки тоді, коли її верхівка діє на основі тривіально. Отже, структура модуля M відома й залишається класифікувати класи когомологій. Ми розглядаємо випадок, коли верхівка $H = H_m$ є елементарною абелевою p-групою з m твірними. Тоді $H^2(H, M)$ ототожнються з кососиметричними білінійними відображеннями $H \times H \to M$, або з наборами $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ кососиметричних матриць над полем лишків $\mathbb{F}_p$. При цьому такі набори кососиметричних матриць треба розглядати з точністю до *узагальненої конгруентності.* Це означає, що, крім перетворень конгруентності $(A_i) \mapsto (SA_iS^\top)$, набір (A_i) можна замінити на (A'_i), де $A'_i = \sum_j c_{ij}A_j$ для оборотної матриці $(c_{ij}) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{F}_p)$.

Наслідок 2.3. *Два n-набори $\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}'$ кососиметричних матриць розміру $m \times m$ над полем $\mathbb{F}_p$ визначають ізоморфні нільпотентні p-групи Чернікова з верхівками H_m і основами $M^{(m)}$ тоді і тільки тоді, коли вони узагальнено конгруентні.*

Якщо $p > 2$, то ми користуємося методом В. Сергейчука, який зводить задачу про конгруентність таких наборів до зображень сагайдака. Якщо ранг m основи, тобто кількість матриць у наборі, більша за 2, то відповідний сагайдак є *диким.* Тому розраховувати на більш-менш прийнятну класифікацію не доводиться. При $m = 2$

відповідний сагайдак — це відомий сагайдак Кронекера. Це дає можливість у підрозділі 2.2.2 явно побудувати множину $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\Bbbk)$ всіх неізоморних нерозкладних пар кососиметричних матриць і дати повну класифікацію пар кососиметричних матриць з точністю до узагальненої конгруентності і визначити дію на ній групи $\mathfrak{g} = \mathrm{GL}(2, \Bbbk)$. Ця дія переноситься на множину функцій $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\Bbbk)$ $\mathfrak{A} \to \mathbb{N}$ зі скінченними носіями і доводяться такі теореми.

Теорема 2.10. *Нехай* $\Bbbk$ *— поле і* $\mathrm{char}\,\Bbbk \neq 2$.

1. *Кожна пара кососиметричних форм над полем* $\Bbbk$ *узагальнено конгруентна до* $\mathfrak{A}^\rho = \oplus_{R\in\mathfrak{A}}\rho(R)R$ *для деякої функції* $\rho \in \mathfrak{F}$.
2. *Пари* $\mathfrak{A}^\rho$ *і* $\mathfrak{A}^{\rho'}$ *узагальнено конгруентні тоді і тільки тоді, коли функції* ρ *і* ρ' *належать одній і тій самій орбіті групи* $\mathfrak{g}$.

Теорема 2.11. *Нехай* $\mathfrak{R}$ *— набір представників орбіт групи* $\mathfrak{g} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$, *що діють на множині функцій* $\mathfrak{F}(\mathbb{F}_p)$. *Тоді кожна нільпотентна* p*-група Чернікова з елементарною верхівкою і основою* $M^{(2)}$ *ізоморфна групі* $G(\rho)$ *для однозначно визначеної функції* $\rho \in \mathfrak{R}$.

Наводиться також опис цих груп у термінах твірних та співвідношень і дається критерій розкладності групи $G(\rho)$.

У випадку $p = 2$ метод Сергейчука незастосовний. Тому ми користуємося результатами Уотерхауса про пари симетричних білінійних форм над полем характеристики 2. За їх допомогою в цьому випадку також доводяться результати, які за формулюванням не відрізняються від наведних вище (теорема 2.16 — для класифікації пар форм і теорема 2.17 — для класифікації груп Чернікова).

У **третьому розділі** ми розглянули задачу про слабку еквівалентність цілих 2-адичних зображень четвірної групи Кляйна $G = \langle a, b \,|\, a^2 = b^2 = 1, ab = ba\rangle$. Відомо, що це — єдина нециклічна p-група, для якої класифікація цілих p-адичних зображень не є дикою. Зображення цієї групи вперше описала Л. Назарова. Але дана нею класифікація жорстко прив'язана до вибору твірних і, як наслідок, не пристосована до вирішення того, які з цих зображень є слабо еквівалентними у розумінні підрозділу 1.2. Ми пропонуємо інший підхід. Оскільки групове кільце $\mathbb{Z}_2G$ горенштейнове, то його цілочисельні зображення, крім регулярного, насправді є зображеннями його мінімального надкільця $\mathbf{A}$. Доводиться, що кільце $\mathbf{A}$ є *порядком Бакстрема* у розумінні підрозділу 1.4, а відповідний сагайдак має тип $\tilde{D}_4$. При цьому дія групи автоморфізмів групи G, яка ототожнюється з групою перестановок $\mathbf{S}_3$, зводиться до перестановки вершин. Тому питання про слабку еквівалентність стає цілком прозорим і, оскільки Q — ручний сагайдак, вдається дати повну класифікацію нерозкладних зображень з точністю до слабкої еквівалентності. Вони діляться на три частини: *препроективні зображення*; *преін'єктивні зображення* і *регулярні зображення*, які діляться на *однорідні труби* та *особливі труби*.

Точний вигляд цих зображень наведений у підрозділі 3.2. Група $\mathbf{S}_3$ природно діє на множині $\mathfrak{R}$ нерозкладних зображень, а тому й на множині $\tilde{\mathfrak{R}}$ функцій $\mathfrak{R} \to \mathbb{N}$ зі скінченним носієм, і має місце такий результат.

Теорема 3.3. *Класи слабкої еквівалентності G-решіток знаходяться у взаємно однозначній відповідності з орбітами групи $\mathbf{S}_3$ на множині $\tilde{\mathfrak{R}}$. А саме, функції φ відповідає решітка $M(V_\varphi)$, де $V_\varphi = \bigoplus_{R\in\tilde{\mathfrak{R}}} \varphi(R)R$, причому $M(V_\varphi) \simeq M(V_\psi)$ тоді і тільки тоді, коли функції φ і ψ належать одній орбіті.*

Четвертий розділ присвячений обчисленню когомологій груп. У цьому розділі побудовано нову, спрощену резольвенту, яка дає можливість обчислювати когомології скінченних абелевих груп. А саме: нехай $\boldsymbol{R} = \mathbb{Z}G$, де $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \,|\, a_i^{o_i} = 1\rangle$, $\mathbb{P} = \boldsymbol{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, $\mathbb{P}_d$ — $\boldsymbol{R}$-підмодуль однорідних многчленів степеня d і гомоморфізм $d\colon \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n-1}$ заданий правилом

$$d_n\bigl(x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_s^{k_s}\bigr) = \sum_{i-1}^{s}(-1)^{K_i}C_i x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_i^{k_i-1}\cdots x_s^{k_s},$$

де $K_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} k_j$, а

$$C_i = \begin{cases} a_i - 1, & \text{якщо } k_i \text{ непарне},\\ \sum\limits_{j=0}^{o_i-1} a^j, & \text{якщо } k_i \neq 0 \text{ і парне},\\ 0, & \text{якщо } k_i = 0. \end{cases}$$

Теорема 4.1. $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_n, d_n)$ *— вільна резольвента G-модуля $\mathbb{Z}$.*

Ми будуємо також явний квазі-ізоморфізм нової резольвенти зі стандартною (теорема 4.2). Це дає, зокрема, можливість “перекладу” обчислень, виконаних за допомогою нової резольвенти, на звичну мову систем факторів, які виникають у розширеннях груп.

Далі вивчаються когомології решіток та дуальних до них модулів. Такі модулі виникають, наприклад, при розгляді груп Чернікова та кристалографічних груп. Ми встановлюємо таку теорему двоїстості для когомологій Тейта решіток. Позначимо $DM = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{T})$, де $\mathbb{T} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$.

Теорема 4.4. *Нехай M — G-решітка. Тоді*

$$\begin{aligned}
&\hat{H}^{n-1}(G, DM) \simeq D\hat{H}^{-n}(G, M),\\
&\hat{H}^{n}(G, DM) \simeq \hat{H}^{n+1}(G, M^*),\\
&\hat{H}^{n}(G, M^*) \simeq D\hat{H}^{-n}(G, M).
\end{aligned}$$

Ми також отримуємо технічні результати про когомології розширень і прямих добутків (твердження 4.5 і наслідок 4.6) і обчислюємо когомології незвідних решіток та дуальних до них модулів.

Наслідок 4.8. *Якщо M — нетривіальна незвідна G-решітка (тобто $M \not\simeq \mathbb{Z}$, то*

$$\hat{H}^{n}(G, M) \simeq \hat{H}^{n-1}(G, DM) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\nu(|n|-1,s)},$$

де $\nu(n,s) = (-1)^n \sum\limits_{i=0}^{n} \binom{-s}{i}$.

Зауважимо, що ця формула є спільною для всіх нетривіальних незвідних G-решіток.

Теорема 4.9. *Якщо $n \neq 0$ і $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_s$, то*

$$\hat{H}^{n}(G, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus\nolimits_{i=1}^{s} \left(\mathbb{Z}/p^{k_i}\mathbb{Z}\right)^{\nu(|n|-1,i)}).$$

Нагадаємо, що $\hat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, де $m = \sum\limits_{k=1}^{s} m_k$.

Раніше ці результати були відомі лише для тривіальної решітки (з істотно складнішим доведенням).

Ми також встановлюємо явний вигляд першої та другої груп когомологій цих решіток.

Теорема 4.10. *Нехай $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_s \,|\, a_i^{p^{m_i}} = 1,\, a_i a_j = a_j a_i \rangle$ — скінченна p-група.*

1. *$H^1(G,\mathbb{Z})=0$, а $H^2(G,\mathbb{Z})\simeq\bigoplus_{i=1}^s\mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}$ з твірними $\gamma_k\colon\mathbb{P}^2\to\mathbb{Z}$ такими, що $\gamma_k(x_ix_j)=0$ при $i<j$, а $\gamma_k(x_i)^2=\delta_{ik}$.*
2. *$H^1(G,\mathbb{T}_p)\simeq\bigoplus_{i=1}^s\mathbb{T}_{m_i}$, де $\mathbb{T}_{m_i}=\{u\in\mathbb{T}_p\,|\,p^{m_i}u=0\}$, а $H^2(G,\mathbb{T}_p)\simeq\bigoplus_{i<j}\mathbb{Z}/p^{m_{ij}}$, де $m_{ij}=\min\{m_i,m_j\}$ з твірними $\gamma_{kl}\colon\mathbb{P}^2\to\mathbb{T}_p$ $(1\le k<l\le s)$ такими, що*

$$\begin{aligned}&\gamma_{kl}\big(x_i^2\big)=0\ \text{ для всіх } i,\\&\gamma_{kl}(x_ix_j)=\delta_{ik}\delta_{jl}u_{ij}\ \text{ при } i<j,\end{aligned}$$

де u_{ij} — фіксований елемент групи $\mathbb{T}_p$ порядку $p^{m_{ij}}$.

3. *У цьому та у наступному пунктах нехай M — G-решітка у полі $\mathbb{Q}[\zeta]$, де ζ — первісний корінь степеня p^r з 1. Ми вважаємо, без зменшення загальності, що a_1 діє множенням на ζ, а всі a_i при $i>1$ діють тривіально. Тоді $H^1(G,M)=\mathbb{Z}[\zeta]/(\zeta-1)\simeq\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а $H^2(G,M)\simeq(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{s-1}$ з твірними $\gamma_k\colon\mathbb{P}_2\to M$ $(1<k\le s)$ такими, що*

$$\gamma_k(x_i)^2=\begin{cases}0, & \text{якщо } i\neq k,\\(1-\zeta)^{-1}p^{m_k}, & \text{якщо } i=k;\end{cases}$$

$$\gamma_k(x_ix_j)=\begin{cases}0, & \text{якщо } 1<i<j,\\\delta_{jk}, & \text{якщо } i=1<j.\end{cases}$$

4. *$H^1(G,D_pM)\simeq(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{s-1}$ з твірними $\xi_k\colon\mathbb{P}_1\to D_pM(1<k\le s)$ такими, що $\delta_k(x_i^2)=\delta_{ik}u_0$, де u_0 — твірний групи $(D_pM/(\zeta-1)D_pM\simeq\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, а $H^2(G,D_pM)\simeq(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{(s^2-s+2)/2}$ з твірними γ_k $(1\le k\le s)$ та γ_{kl} $(1<k<l\le s)$ такими, що*

$$\begin{aligned}&\gamma_k(x_i)^2=\delta_{ik}u_0,\\&\gamma_k(x_ix_j)=0\ \text{ при } i<j,\\&\gamma_{kl}(x_i^2)=0,\\&\gamma_{kl}(x_ix_j)=\delta_{ik}\delta_{jl}u_0.\end{aligned}$$

Далі ми застосовуємо ці результати до випадку четвірної групи Кляйна й обчислюємо у явному вигляді другу групу когомологій для модулів, дуальних до всіх неточних решіток над цією групою (твердження 4.11–4.22) і наводимо приклади черніківських груп, які визначаються неточними G-решітками, знаходячи для них задання твірними та співвідношеннями (приклади 4.23–4.25).

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних задач та обчисленню когомологій, пов'язаних з проблемою класифікації p-груп Чернікова.

У дисертаційній роботі одержано наступні нові наукові результати.

- Описано черніківські p-групи з елементарною абелевою верхівкою та основою рангу 2.
- Дано класифікацію пар кососиметричних форм над полем з точністю до узагальненої конгруентності.
- Встановлено відповідність між цілочисельними зображеннями четвірної групи Кляйна та зображеннями сагайдака типу $\tilde{D}_4$.
- Дано класифікацію цілочисельними зображеннями четвірної групи Кляйна з точністю до слабкої еквівалентності, що є важливим для вивчення груп Чернікова.
- Побудовано нову резольвенту тривіальної решітки над скінченною абелевою групою, краще пристосовану до обчислення когомологій, та встановлено її зв'язок зі стандартною резольвентою, що є особливо важливим для розгляду розширень груп.
- Встановлено нові співвідношення двоїстості для решіток над скінченними групами.
- Обчислено когомології незвідних решіток над скінченними абелевими групами.
- Обчислено когомології модулів, дуальних до неточних решіток над четвірною групою Кляйна.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // Arch. Math. – 2014. – **103**. – P. 401–409.

2. Plakosh A. On weak equivalence of representationes of Klein four-group // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2016. – **28**, 1.– С. 114–117.

3. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov 2-groups with elementary tops // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, 2. – P. 201–208.

4. Плакош А. І., Шапочка І. В. Про когомології четверної групи Клейна // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2017. – **30**, 1. – С. 95–102.

5. Drozd Y., Plakosh A. Cohomologies of finite abelian groups // Algebra Discrete Math. – 2017. – **24**, 1. – P. 144–157.

6. Plakosh A. Weak equivalence of representations of Kleinian 4-group // Algebra Discrete Math. – 2018. – **25**, 1. – P. 130–136.

Тези конференцій:

7. Плакош А. І. Про нільпотентні черніковські 3-групи // Студентська наукова конференція математичного факультету УжНУ: Ужгород, квітень 2013: Збірник праць. Серія "Математика і прикладна математика". – Ужгород, 2013. – С. 218.

8. Дрозд Ю. А., Плакош А. І. Нільпотентні p-групи Чернікова з елементарними верхівками // Міжнародна конференція молодих математиків. Тези доповідей. – Київ, 2015 – С.30.

9. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd. Book of abstracts. -– Odessa, 2015. – P. 88.

10. Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // International mathematical conference Group and Actions dedicated to the memory of professor Vitaliy Sushchanskyy. Book of abstracts. – Kyiv, 2016. – P. 20.

11. Plakosh A. On cohomologies of Kleinian 4-group // International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko. Book of abstracts. – Kyiv, 2017. – P. 103.

АНОТАЦІЯ

Плакош А. І. Застосування матричних задач в теорії груп. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра та теорія чисел. – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних задач та обчисленню когомологій, пов'язаних з проблемою класифікації p-груп Чернікова.

Описано черніківські p-групи з елементарною абелевою верхівкою та основою рангу 2. Дано класифікацію пар кососиметричних

форм над полем з точністю до узагальненої конгруентності. Встановлено відповідність між цілочисельними зображеннями четвірної групи Кляйна та зображеннями сагайдака типу $\tilde{D}_4$. Дано класифікацію цілочисельних зображень четвірної групи Кляйна з точністю до слабкої еквівалентності. Побудовано нову резольвенту тривіальної решітки над скінченною абелевою групою, краще пристосовану до обчислення когомологій, та встановлено її зв'язок зі стандартною резольвентою. Встановлено нові співвідношення двоїстості для решіток над скінченними групами. Обчислено когомології незвідних решіток та дуальних до них модулів над скінченними абелевими групами. Обчислено когомології модулів, дуальних до неточних решіток над четвірною групою Кляйна.

Ключові слова: p-групи Чернікова, кососиметричні форми, зображення сагайдаків, розширення груп, когомології груп, вільна резольвента, четвірна група Кляйна.

АННОТАЦИЯ

Плакош А. И. Применение матричных задач в теории групп. - Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена изучению матричных задач и вычислению групп когомологий, связанных с проблемой классификации p-групп Черникова.

Описаны черниковские p-группы с элементарной абелевой верхушкой и основанием ранга 2. Дана классификация пар кососимметрических форм над полем с точностью до обобщенной конгруэнтности. Получено соответствие между целочисленными представлениями четверной группы Кляйна и представлениями колчана типа $\tilde{D}_4$. Дана классификация целочисленных представлений четверной группы Кляйна с точностью до слабой эквивалентности. Построена новая резольвента тривиальной решетки над конечной абелевой группой, лучше приспособленная к вычислению когомологий, и показана её связь со стандартной резольвентой. Установлены новые соотношения двойственности для решеток над конечными группами. Вычислены когомологии неприводимых решеток и дуальных к ним модулей над конечными абелевых групп. Вычислены когомологии модулей, дуальных к неточным решеткам, над четверной группы Кляйна.

Ключевые слова: p-группы Черникова, кососимметрические формы, представления колчанов, расширения групп, еогомологии групп, свободная резольвента, четверная группа Кляйна.

ABSTRACT

Plakosh A. I. Application of matrix problems in group theory. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality 01.01.06 — "algebra and number theory". – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of matrix problems and the calculation of cohomology related to the problem of classification of Chernikov p-groups. We recall that a *Chernikov group* is an extension of a finite group, called *the top*, with an Abelian group M, called *the bottom*, with the minimality condition, that is a direct sum of quasicyclic groups. These groups, introduced by S. Chernikov, play an important role in the theory of infinite groups, especially of solvable, locally finite groups and their generalizations. Since a Chernikov group is decomposed into a direct product of p-groups, it is sufficient to consider only Chernykov p-groups.

Since the endomorphism ring of a quasicyclic p-group is isomorphic to the ring of p-adic integers, it is known that the problem of classification of Chernikov p-groups can be divided into two problems:

(i) Classification of p-adic integer representations of the given finite group H up to weak equivalence.

(ii) Calculation of cohomologies $H^2(H, M)$, where the bottom M is defined by the given p-adic representation.

We investigate these problems using the technique of *matrix problems* developed mainly in the Kyiv school of representation theory.

Section 1 contains necessary preliminary results and a survey of the related literature.

In Section 2 nilpotent Chernikov groups are considered. In this case, the action of the tops on the bottoms, that is the representation of the top, is trivial. It remains to calculate the cohomology and the action of automorphisms of the top on cohomologies. If the top is elementary Abelian, the cohomology group $H^2(H, M)$ is identified with the set of tuples (A_i) of skew-symmetric matrices over the field $\mathbb{F}_p$ with p elements. The classification of Chernikov groups is thus reduced to the classification of such tuples up to the *weak congruence*, that is, in addition to

the usual transformation of the congruence $A_i \mapsto SA_iS^\top$, one can use transformations that replace A_i by $\sum_j c_{ij}A_j$, where (c_{ij}) is an invertible matrix over $\mathbb{F}_p$. If the number of matrices is greater than 2, this problem is *wild* in the sense of the theory of representations. We give a complete classification of pairs of skew-symmetric matrices up to the weak congruence (Theorems 2.10 and 2.16) and, as a consequence, obtain a classification of Chernikov p-groups with elementary top and bottom of rank 2 (Theorems 2.11 and 2.17). For these groups, a presentaion in terms of generators and relations is given.

Section 3 is devoted to the problem of weak equivalence of integer 2-adic representations of the Kleinian 4-group. The representations of the Kleinian group were described by L. Nazarova, but her result is not adapted to the consideration of weak equivalence, since it is strictly tied to the choice of generators. We give another description, which is based on the theory of Backström orders and representations of quivers. Namely, we reduce the description of the representations of the Kleinian group to the description of the representations of a certain quiver Q. In this case, the corresponding action of the automorphisms of the group on the representations of the quiver Q coincides with the action of a certain group of its symmetries. Therefore, the question about the weak equivalence becomes completely transparent and we give a complete classification of indecomposable representations up to weak equivalence.

Section 4 is devoted to the cohomologies of groups, mostly of finite Abelian groups. As the standard resolution is too cumbersome for explicit calculations, we construct, for the case of finite Abelian groups, a new free resolution, which is much simpler (Theorem 4.1). In view of possible applications to group extensions, we also give an explicit formula for a quasi-isomorphism between the standard resolution and that proposed by us (Theorem 4.2). Further, we study the cohomology of G-lattices and their dual modules, because they are very important in the study of Chernikov groups. We establish some duality relations for cohomologies of lattices (Theorem 4.4) and calculate the cohomologies of irreducible G-lattices and their dual modules (Theorem 4.7, Corollary 4.8 and Theorem 4.9). Note that earlier these results were known only for the trivial lattice. We also establish an explicit form of the first and second cohomologies of groups with coefficients in these lattices (Theorem 4.10). Next, we apply these results to the case of the Kleinian 4-group and we explicitly calculate the second group of cohomologies for the modules dual to all inexact lattices over this group (Subsections 4.1.1–4.1.4).

Thus, in this thesis a description of pairs of skew-symmetric form up to weak equivalence, as well as a classification of nilpotent Chernikov p-groups is given. The integral representations of the Kleinian 4-group are classified up to weak equivalence. A new free resolution for the trivial lattice over a finite Abelian group is constructed and is used for calculation of cohomologies of irreducible lattices and their duals, as well as for calculation of cohomologies of modules dual to non-sincere lattices over the Kleinian 4-group. New duality theorems are obtained for the cohomologies of lattices over finite Abelian groups.

Key words: Chernikov p-groups, skew-symmetric forms, representations of quivers, group extensions, cohomologies of groups, free resolution, Kleinian 4-group.

Підписано до друку 29.08.2018. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,27. Умов. друк. арк. 1,18.
Наклад 100 пр. Зам. 37.

Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.