НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Плакош Андріяна Іванівна

УДК 512.54+512.64+512.66

ДИСЕРТАЦІЯ

Застосування матричних задач в теорії груп

01.01.06 – алгебра та теорія чисел

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело ____________ А. І. Плакош

Науковий керівник
Дрозд Юрій Анатолійович,
професор,
доктор фізико-математичних наук,
член-кореспондент НАН України

Київ – 2018

АНОТАЦІЯ

Плакош А. І. Матричні задачі та їх застосування в теорії груп. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – “алгебра та теорія чисел”. – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних задач та обчисленню когомологій, пов’язаних з проблемою класифікації p-груп Чернікова. Нагадаємо, що *група Чернікова*, або *черніківська група*, — це скінченне розширення абелевої групи з умовою мінімальності M, тобто прямої суми квазіциклічних груп (“основи”). Ці групи, введені С.Черніковим, відіграють важливу роль у теорії нескінченних груп, особливо, розв’язних груп. Оскільки черніківська група розкладається у прямий добуток p-груп, достатньо розглядати саме черніківські p-групи.

Відомо, що кільце ендоморфізмів квазіциклічної p-групи — це кільце $\mathbb{Z}_p$ цілих p-адичних чисел. Тому з кожною черніківською p-групою G пов’язаний гомоморфізм скінченної групи H (“верхівки”) у групу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, тобто ціле p-адичне зображення групи H. Якщо таке зображення фіксоване, то група G визначається класом когомологій з $H^2(H, M)$. Зображення та клас когомологій визначаються при цьому з точністю до “слабкої еквівалентності”, тобто, крім ізоморфізмів зображень допускаються ще й автоморфізми верхівки H. Отже, задача класифікації p-груп Чернікова розпадається на дві задачі:

- Класифікація цілих p-адичних зображень заданої скінченної групи H з точністю до слабкої еквівалентності.
- Обчислення когомологій $H^2(H, M)$, де основа M визначається заданим цілим p-адичним зображенням.

У теорії зображень, починаючи з 70-х років XX сторіччя, важливе місце займає *теорія матричних задач*, винайдена та розроблена в роботах А.Ройтера, П.Ґабріеля, Л.Назарової, К.Рінгеля, В.Длаба, Ю.Дрозда, В.Бондаренка, В.Сергейчука та інших. Теорія матричних задач довела свою ефективність у багатьох розділах як самої теорії зображень, так і алгебраїчної геометрії, алгебраїчної топології та інших розділів сучасної математики. Теорія матричних задач складає підґрунтя й досліджень, які лягли в основу дисертації. Перший її розділ присвячений огляду відомих результатів та викладенню основ техніки, яка використовується у наступних розділах.

У розділі 2 розглянуто нільпотентні групи Чернікова. У цьому випадку дія верхівки на основі, тобто зображення верхівки, є тривіальним і залишається обчислити когомології й дію автоморфізмів верхівки на когомології. Якщо верхівка — елементарна абелева, то група когомологій $H^2(H, M)$ ототожнюється з набором (A_i) кососиметричних матриць над полем $\mathbb{F}_p$ з p елементів, а дія автоморфізмів верхівки зводиться до класифікації таких наборів з точністю до *узагальненої конгруентності*, тобто, крім звичайного перетворення конгруентності $A_i \mapsto SA_iS^\top$, дозволяється ще перетворення, яке заміняє A_i на $\sum_j c_{ij}A_j$, де (c_{ij}) — оборотна матриця над $\mathbb{F}_p$. Якщо кількість матриць у наборах більша за 2, то задача їх класифікації є *дикою* в розумінні теорії зображень. Ми даємо повну класифікацію пар кососиметричних матриць з точністю до узагальненої конгруентності (теореми 2.10 та 2.16) і, як наслідок, класифікацію p-груп

Чернікова з елементарною верхівкою і базою рангу 2 (теореми 2.11 та 2.17). Для таких груп визначено також їх представлення через твірні та співвідношення. При цьому доводиться використовувати різні засоби в залежності від числа p. При $p > 2$ ми користуємося результатами Сергейчука про зображення сагайдаків з інволюцією, а при $p = 2$, коли цей метод незастосовний, — результатами Уотерхауса про пари симетричних білінійних форм над полем характеристики 2. Втім, результуючий опис виявляється фактично однаковим.

Розділ 3 присвячений задачі про слабку еквівалентність цілих 2-адичних зображень четвірної групи Кляйна. Відомо, що це — єдина нециклічна p-група, для якої класифікація цілих p-адичних зображень не є дикою. Зображення групи Кляйна описала Л.Назарова, але її результат непристосований до розгляду слабкої еквівалентності, оскільки жорстко прив'язаний до вибору твірних. Ми даємо інший опис, який ґрунтується на теорії порядків Бакстрема й зображень сагайдаків. А саме, ми зводимо опис зображень групи Кляйна до опису зображень деякого сагайдака Q. При цьому відповідна дія автоморфізмів групи на зображеннях сагайдака Q збігається з дією деякої групи його симетрій. Тому питання про слабку еквівалентність стає цілком прозорим і ми даємо повну класифікацію нерозкладних зображень з точністю до слабкої еквівалентності.

Розділ 4 присвячений когомологіям груп, переважно, скінченних абелевих груп. Відомо, що для визначення та обчислення когомологій групи G існує стандартна вільна резольвента тривіального G-модуля $\mathbb{Z}$. Втім, ця резольвента дуже громіздка й не використовує ніякої специфічної інформації про групу, а тому її практичне використання навіть для "невеликих груп" (як та сама група Кляйна) є занадто складним. Ми пропонуємо, у випадку, коли G — скінченна абелева група, нову вільну резольвенту, яка є набагато простішою (теорема 4.1). Маючи на увазі можливі застосування до розширень груп, ми також даємо явний вигляд квазі-ізоморфізму між стандартною резольвентою й запропонованою нами (теорема 4.2). Надалі, ми вивчаємо когомології G-решіток та дуальних до них модулів, оскільки саме вони відіграють важливу роль у дослідженні груп Чернікова. Ми встановлюємо деякі співвідношення двоїстості для когомологій решіток (теорема 4.4) і обчислюємо когомології незвідних G-решіток та дуальних до них модулів (теорема 4.7, наслідок 4.8 та теорема 4.9). Зауважимо, що раніше ці результати були відомі лише для тривіальної решітки. Ми також встановлюємо явний вигляд першої та другої груп когомологій цих решіток (теорема 4.10). Далі ми застосовуємо ці результати до випадку четвірної групи Кляйна й обчислюємо у явному вигляді другу групу когомологій для модулів, дуальних до всіх неточних решіток над цією групою (підрозділи 4.1.1–4.1.4).

Отже, в роботі містяться наступні нові наукові результати:

- Описано черніківські p-групи з елементарною абелевою верхівкою та основою рангу 2.
- Дано класифікацію пар кососиметричних форм над полем з точністю до узагальненої конгруентності.
- Встановлено відповідність між цілочисельними зображеннями четвірної групи Кляйна та зображеннями сагайдака типу $\tilde{D}_4$.
- Дано класифікацію цілочисельних зображень четвірної групи Кляйна з точністю до слабкої еквівалентності.
- Побудовано нову резольвенту тривіальної решітки над скінченною абелевою групою, краще пристосовану до обчислення когомологій та встановлено її зв'язок із стандартною резольвентою.

- Встановлено нові співвідношення двоїстості для решіток над скінченними групами.
- Обчислено когомології незвідних решіток та дуальних до них модулів над скінченними абелевими групами.
- Обчислено когомології модулів, дуальних до неточних решіток над четвірною групою Кляйна.

Практичне значення отриманих результатів. Результати роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при вивченні груп Чернікова, зокрема, їх класифікації, при дослідженнях, у яких істотну роль відіграють когомології скінченних груп, у лінійній алгебрі.

Ключові слова: p-групи Чернікова, кососиметричні форми, зображення сагайдаків, розширення груп, когомології груп, вільна резольвента, четвірна група Кляйна.

Список публікацій за темою дисертації

1. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // Arch. Math. – 2014. – **103**. – P. 401–409.
2. Plakosh A. On weak equivalence of representationes of Klein four-group // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2016. – **28**, 1.– С. 114–117.
3. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov 2-groups with elementary tops // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, 2. – P. 201–208.
4. Плакош А. І., Шапочка І. В. Про когомології четверної групи Клейна // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2017. – **30**, 1. – С. 95–102.
5. Drozd Y., Plakosh A. Cohomologies of finite abelian groups // Algebra Discrete Math. – 2017. – **24**, 1. – P. 144–157.

6. Plakosh A. Weak equivalence of representations of Kleinian 4-group // Algebra Discrete Math. – 2018. – **25**, 1. – P. 130–136.

7. Плакош А. І. Про нільпотентні черніковські 3-групи // Студентська наукова конференція математичного факультету УжНУ: Ужгород, квітень 2013: Збірник праць. Серія “Математика і прикладна математика”. – Ужгород, 2013. – С. 218.

8. Дрозд Ю. А., Плакош А. І. Нільпотентні p-групи Чернікова з елементарними верхівками // Міжнародна конференція молодих математиків. Тези доповідей. – Київ, 2015 – С.30.

9. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd. Book of abstracts. -– Odessa, 2015. – P. 88.

10. Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // International mathematical conference Group and Actions dedicated to the memory of professor Vitaliy Sushchanskyy. Book of abstracts. – Kyiv, 2016. – P. 20.

11. Plakosh A. On cohomologies of Kleinian 4-group // International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko. Book of abstracts. – Kyiv, 2017. – P. 103.

ABSTRACT

Plakosh A. I. Application of matrix problems in group theory. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree in the speciality 01.01.06 — “algebra and number theory”. – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the study of matrix problems and the calculation of cohomology related to the problem of classification of Chernikov p-groups. We recall that a *Chernikov group* is a finite extension of an Abelian group with the minimality condition M, that is a direct sum of quasicyclic groups (“ bottomm ”). These groups, introduced by S. Chernikov, play an important role in the theory of infinite groups, especially of solvable groups. Since a Chernikov group is decomposed into a direct product of p-groups, it is sufficient to consider only Chernikov p-groups.

It is known that the ring of endomorphisms of the quasicyclic p-group is the ring $\mathbb{Z}_p$ of p-adic integers. Therefore, for each Chernikov p-group G there is a homomorphism of a finite group H (“top”) into the group $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, i.e. the integral p-adic representation related to G. If this representation is fixed, G is defined by a cohomology class from $H^2(H, M)$. The representation and the cohomology class are defined up to “weak equivalence”, that is, in addition to isomorphisms of representation, one can apply automorphisms of the top H. Consequently, the problem of classification of Chernikov p-groups is divided into two problems:

- Classification of p-adic integer representations of the given finite group H up to weak equivalence.
- Calculation of cohomologies $H^2(H, M)$, where the bottom M is defined by the given p-adic representation.

Since the 70s of the XX century, the theory of matrix problems plays an important role in the theory of representations. The theory of matrix problems was invented and developed in the works of A.Royter, P.Gabriel, L.Nazarova, K.Ringel, V.Dlab, Y.Drozd, V.Bondarenko, V.Sergichuk and other mathematicians. It proved its effectiveness in many sections of both the theory of representations and algebraic geometry, algebraic topology and other areas of the modern mathematics. The theory of matrix problems lies in the foundation of the investigations which form the basis of the thesis. The following tasks are considered in the thesis. Its first section is devoted to the review of well-known results and the presentation of the foundations of technology, which are used further.

In Section 2 nilpotent Chernikov groups are considered. In this case, the action of the tops on the bottoms, that is the representation of the top, is trivial. It remains to calculate the cohomology and the action of automorphisms of the top on cohomologies. If the top is elementary Abelian, then the cohomology group $H^2(H, M)$ is identified with the set of tuples (A_i) of skew-symmetric matrices over the field $\mathbb{F}_p$ with p elements. The action of the automorphisms of the top turns into the classification of such tuples up to the *weak congruence*, that is, in addition to the usual transformation of the congruence $A_i \mapsto SA_iS^\top$, one can use transformations that replace A_i by $\sum_j c_{ij}A_j$, where (c_{ij}) is an invertible matrix over $\mathbb{F}_p$. If the number of matrices in the tuples is greater than 2, then the ptoblem of their classification is *wild* in the sense of the theory of representations. We give a complete classification of pairs of skew-symmetric matrices up to the weak congruence (Theorems 2.10 and 2.16) and, as a consequence, the classification of Chernikov p-groups with elementary top and bottom of rank 2 (Theorems 2.11 and 2.17) For these groups, a presentaion in terms of generators and relations is given. Note that we have to use different tools depending on the prime p. For $p > 2$, we use the results of Sergeychuk about representations of quivers with involution. For $p = 2$, when this method is inapplicable, we use the results of Waterhouse for pairs of symmetric bilinear forms over a field of characteristic 2. However, the resulting description is actually the same.

Section 3 is devoted to the problem of weak equivalence of integer 2-adic representations of the Kleinian 4-group. It is known that it is a unique non-cyclic p-group for which the classification of integer p-adic representations is not wild. The representations of the Kleinian group were described by L. Nazarova, but her result is not adapted to the consideration of weak equivalence, since it is strictly tied to the choice of generators. We give another description, which is based on the theory of Backström orders and representations of quivers. Namely, we reduce the description of the representations of the Kleinian grop to the description of the representations of a certain quiver Q. In this case, the corresponding action of the automorphisms of the group on the representations of the quiver Q coincides with the action of a certain group of its symmetries. Therefore, the question about the weak equivalence becomes completely transparent and we give a complete classification of indecomposable representations up to weak equivalence.

Section 4 is devoted to the cohomologies of groups, mostly of finite Abelian groups. It is known that for determining and calculating cohomologies of a group G there exists a standard free resolution of the trivial G-module $\mathbb{Z}$. However, this resolution is very cumbersome and does not use any specific information about the group. So its practical use, even for "small groups" (as the Kleinian group itself) is too complicated. In the case when G is a finite Abelian group, we propose a new free resolution, which is much simpler (Theorem 4.1). In view of possible applications to group extensions, we also give an explicit formula for a quasi-isomorphism between the standard resolution and that proposed by us (Theorem 4.2). Further, we study the cohomology of G-lattices and their dual modules, because they are very important in the study of Chernikov groups. We establish some duality relations for cohomologies of lattices (Theorem 4.4) and calculate the cohomologies of irreducible G-lattices and their dual modules (Theorem 4.7, Corollary 4.8 and Theorem 4.9). Note that earlier these results were known only for the trivial lattice. We also establish an explicit form of the first and second cohomologies of groups with coefficients in these lattices (Theorem 4.10). Next, we apply these results to the case of the Kleinian 4-group and we explicitly calculate the second group of cohomologies for the modules dual to all inexact lattices over this group (Subsections 4.1.1–4.1.4).

Thus, the thesis contains the following new scientific results:

- The Chernikov p-groups with an elementary Abelian top and the basis of rank 2 are described.
- A classification of pairs of skew-symmetric forms over a field is given up to the weak congruence.
- A relation was found between the integral representations of the Kleinian 4-group and the representations of a quiver of type $\tilde{D}_4$.
- The classification of integer representations of the Kleinian 4-group is given up to the weak equivalence.
- A new resolution of the trivial lattice over a finite Abelian group is

constructed, which is better suited for the calculation of cohomology, and its connection with the standard resolution is established.

- New duality relations for lattices over finite groups are established.
- The cohomology of irreducible lattices and their dual modules over finite Abelian groups is calculated.
- The cohomology of modules dual to inexact lattices over the Kleinian 4-group is calculated.

The practical significance of the results. The results of the work are mainly theoretical. They can be used in the study of Chernikov groups, in particular, in their classification, in researches where the cohomologies of finite groups plays a significant role, as well as in linear algebra.

Keywords: Chernikov p-groups, skew-symmetric forms, representations of quivers, group extensions, cohomologies of groups, free resolution, Kleinian 4-group.

List of publications on the topic of the thesis

1. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // Arch. Math. – 2014. – **103**. – P. 401–409.
2. Plakosh A. On weak equivalence of representationes of Klein four-group // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2016. – **28**, 1.– С. 114–117.
3. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov 2-groups with elementary tops // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, 2. – P. 201–208.
4. Plakosh A. I., Shapochka I. V. On cohomologies of the Klein four-group // Nauk. visnyk Uzhgorod. univ. – 2017. – **30**, 1. – C. 95–102.

5. Drozd Y., Plakosh A. Cohomologies of finite Abelian groups // Algebra Discrete Math. – 2017. – **24**, 1. – P. 144–157.

6. Plakosh A. Weak equivalence of representations of Kleinian 4-group // Algebra Discrete Math. – 2018. – **25**, 1. – P. 130–136.

7. Plakosh A. I. On nilpotent Chernikov 3-groups // Student Scientific Conference of Mathematical Faculty of UzhNU: Uzhgorod, April 2013: Book of abstracts. Series “Mathematics and Applied Mathematics”. – Uzhgorod, 2013. – P. 218.

8. Drozd Y. A., Plakosh A. I. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // International Conference of Young Mathematicians. Book of abstracts. – Kyiv, 2015 – P.30.

9. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd. Book of abstracts. -– Odessa, 2015. – P. 88.

10. Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // International mathematical conference Group and Actions dedicated to the memory of professor Vitaliy Sushchanskyy. Book of abstracts. – Kyiv, 2016. – P. 20.

11. Plakosh A. On cohomologies of Kleinian 4-group // International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko. Book of abstracts. – Kyiv, 2017. – P. 103.

Зміст

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$H^n(G, M$ — n-ва група когомологій групи G у модулі H.

$H_n(G, M)$ — n-ва група гомологій групи G у модулі M.

$\hat{H}^n(G, M)$ — n-ва група когомологій Тейта.

$\mathbb{S}$ — стандартна резольвента.

$o(a)$ — порядок елемента a.

DM — дуальний модуль.

M^G — група G-інваріантів у модулі M.

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційна робота присвячена вивченню матричних задач та обчисленню когомологій, пов'язаних з проблемою класифікації p-груп Чернікова. Нагадаємо, що *група Чернікова*, або *черніківська група* — це скінченне розширення абелевої групи з умовою мінімальності M, тобто прямої суми квазіциклічних груп ("основи"). Еквівалентно, це — локально скінченна група з умовою мінімальності для підгруп. Ці групи, введені С.Черніковим, відіграють важливу роль у теорії нескінченних груп, особливо, розв'язних груп (дивись [22]). Оскільки черніківська група розкладається у прямий добуток p-груп, достатньо розглядати саме черніківські p-групи.

Відомо, що кільце ендоморфізмів квазіциклічної p-групи — це кільце $\mathbb{Z}_p$ цілих p-адичних чисел. Тому з кожною черніківською p-групою G пов'язаний гомоморфізм скінченної групи H ("верхівки") у групу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, тобто ціле p-адичне зображення групи H. Якщо таке зображення фіксоване, то група G визначається класом когомологій з $H^2(H, M)$. Зображення та клас когомологій визначаються при цьому з точністю до «слабкої еквівалентності», тобто, крім ізоморфізмів зображень допускаються ще й автоморфізми верхівки H. Отже, задача класифікації p-груп Чернікова розпадається на дві задачі:

- Класифікація цілих p-адичних зображень заданої скінченної групи H з точністю до слабкої еквівалентності.

- Обчислення когомологій $H^2(H, M)$, де основа M визначається заданим цілим p-адичним зображенням.

Такий підхід до вивчення черніківських груп був започаткований П. Гудивком, Ф. Ващуком і В. Дроботенком [9], а в подальшому розвинений П. Гудивком та І. Шапочкою [10, 23]. Звичайно, перш за все, він вимагає класифікації цілочисельних зображень груп. Тут перші результати були отримані С. Берманом і П. Гудивком, А. Хеллером і І. Райнером, А. Джонсом, які класифікували зобрадення циклічних груп порядків p та p^2 і довели, що лише ці p-групи мають скінченну кількість нерозкладних зображень [1, 2, 37, 38, 39]. Л. Назарова описала зображення четвірної групи Кляйна [16], А. Яковлев — циклічної групи порядку 8 [25]. У останніх роботах, інколи неявно, використовувались методи, які в 1970-і роки одержали назву *теорії матричних задач*.

Теорія матричних задач сформувалася, перш за все, під впливом робіт Л. Назарової, А. Ройтера, М. Клейнера про зображення частково впорядкованих множин [18, 12, 13] та П. Ґабріеля, І. Бернштейна, І. Гельфанда, В. Пономарьова [33, 3] про зображення сагайдаків. Надалі, у роботах цих авторів, а також В. Длаба, К. Рінгеля, Ю. Дрозда, В. Бондаренка, В. Сергейчука та інших вона оформилась у потужний метод досліджень не лише у теорії зображень, а й у алгебраїчній геометрії, алгебраїчній топології, теорії особливостей та інших розділах математики. Зокрема, у теорії груп вона була застосована до класифікації груп з абелевою підгрупою індексу p [19] та груп з комутатором індексу p [20].

Теорія когомологій груп була натхненна роботами В. Гуревича про когомології ациклічних просторів і розвинена у 1940-і роки С. Ейленбергом, С. Маклейном, В. Екманом, Х. Хопфом та іншими. Вони також були пов'язані з теорією розширень груп та проективними зображеннями, де когомології виникають як набори факторів.

Важливий внесок у дослідження когомологій груп внесли З. Боревич та Д. Фаддєєв [4, 5]. Вони, зокрема, гомологічними методами довели, що нециклічна p-група має нескінченно багато нерозкладних зображень на полем характеристики p. Ці роботи були одними з першоджерел гомологічної алгебри. Когомології груп широко використовуються в топології, теорії чисел, алгебраїчній геометрії та інших галузях математики. Саме тому, вони активно вивчаються багатьма математиками. Зокрема, є багато статтей, присвячених обчисленню когомологій конкретних груп та їх класів. В цих дослідження часто необхідні спеціальні типи резольвент, які простіші та зручніші, ніж стандартна. Наприклад, Ш. Такахаші [46] запропонував новий підхід до обчислення когомологій скінченних абелевих груп і запропонував застосування цього методу для обчислення когомологій тривіальних модулів та деяких груп Галуа.

Отже, дослідждення в цих напрямках є актуальними і перспективними й приводять до нових результатів у теорії зображень, теорії груп, гомологічний алгебрі та інших розділах математики.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертації безпосередньо пов'язана з дослідженнями, які виконуються у відділі алгебри і топології Інституту математики НАН України в рамках науково-дослідних тем: "Теорія зображень та її застосування в алгебрі, геометрії та топології" (номер державної реєстрації 0111U002096), "Розробка й застосування нових методів у теорії зображень, абстрактній алгебрі та алгебраїчній геометрії" (номер державної реєстрації 0116U003125).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дослідження є опис нових класів p-груп Чернікова, знаходження пов'язаних з ними цілочисельних зображень груп, впровадження і застосування нових методів у теорії когомологій скінченних груп. *Об'єктом дослідження* є p-групи Чернікова, зображення четвірної групи Кляйна та когомології решіток.

Предмет дослідження — матричні задачі та обчислення когомологій, які виникають при дослідженні р-груп Чернікова та їх застосування до класифікації цих груп.

Методи дослідження. *Основними методами*, що використовуються при дослідженнях, є методи теорії зображень та матричних задач, гомологічної алгебри та теорії груп.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано наступні нові наукові результати:

- Описано черніківські p-групи з елементарною абелевою верхівкою та основою рангу 2
- Дано класифікацію пар кососиметричних форм над полем з точністю до узагальненої конгруентності.
- Встановлено відповідність між цілочисельними зображеннями четвірної групи Кляйна та зображеннями сагайдака типу $\tilde{D}_4$.
- Дано класифікацію цілочисельних зображень четвірної групи Кляйна з точністю до слабкої еквівалентності.
- Побудовано нову резольвенту тривіальної решітки над скінченною абелевою групою, краще пристосовану до обчислення когомологій та встановлено її зв'язок із стандартною резольвентою.
- Встановлено нові співвідношення двоїстості для решіток над скінченними групами.
- Обчислено когомології незвідних решіток та дуальних до них модулів над скінченними абелевими групами.
- Обчислено когомології модулів, дуальних до неточних решіток над четвірною групою Кляйна.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані при вивченні груп Чернікова, зокрема, їх класифікації, при дослідженнях, у яких істотну роль відіграють когомології скінченних груп, у лінійній алгебрі.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. У статті [51] з І. А. Шапочкою та статтях [48, 50, 52] з науковим керівником останнім належать постановки задач і загальні ідеї щодо методів їх розв'язання, а практична реалізація та ряд конкретних ідей належать здобувачеві.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи оприлюднено на наукових конференціях та наукових семінарах:

— Студентській науковій конференції математичного факультету УжНУ (Ужгород, 18 квітня 2013 р.);

— Міжнародній конференції молодих математиків (м. Київ, 3–6 червня 2015 р.);

— X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20–27 серпня 2015 р.);

— Міжнародній математичній коференції "Group and Actions", присвяченій пам'яті професора Віталія Сущанського (м. Київ, 19–22 грудня 2016 р.);

— XI Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3–7 липня 2017 р.);

— семінарі під кінець року при механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, керівники — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, доктор фізико-математичних наук А. П. Петравчук, 24 грудня 2015 р.);

— семінарі кафедри алгебри Ужгородського національного університету (м. Ужгород, керівник — кандидат фізико-математичних наук, доцент І. В. Шапочка, 12 травня 2016 р.);

— алгебраїчних семінарах Інституту математики НАН України (м. Київ, керівник — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, 2014–2018 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 11 наукових працях, них 4 — у міжнародних журналах, які входять до міжнародних наукометричних баз [48, 50, 52, 53], 5 — у фахових виданнях з «Переліку», затвердженого Міністерством освіти і науки України [49, 50, 51, 52, 53], 1 — в матеріалах студентської конференції [54], 4 — у матеріалах міжнародних наукових конференцій [55, 56, 57, 58].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із анотації, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації — 126 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації — 102 сторінки. Список використаних джерел займає 4 сторінок (47 найменувань). Додатки займають 3 сторінки і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Зміст роботи. Дисертація складається із чотирьох розділів. У першому розділі ми нагадуємо деякі означення та наводимо огляд робіт, що пов'язані з тематикою роботи. Формулюємо твердження, що знадобляться нам у подальшій роботі.

Другий розділ присвячений класифікації одного класу нільпотентних p-груп Чернікова. Відомо, що p-група Чернікова є нільпотентною тоді і тільки тоді, коли верхівка діє на базі тривіально. Отже, структура модуля M відома й залишається класифікувати класи когомологій. Ми розглядаємо випадок, коли верхівка H є елементарною абелевою p-групою. Тоді $H^2(H,M)$ ототожнються з кососиметричними білінійними відображеннями $H\times H\to M$, або з наборами (A_i) кососиметричних матриць над полем лишків $\mathbb{F}_p$. При цьому такі набори треба класифікувати з точністю до *узагальненої конгруентності.* Це означає, що, крім перетворень конгруентності $(A_i)\mapsto(SA_iS^\top)$, набір (A_i) можна замінити на (A_i'), де $A_i'=\sum_j c_{ij}A_j$ для оборотної матриці (c_{ij}). Якщо $p>2$, ми користуємося методом В.Сергейчука [21], який зводить задачу про конгруентність таких наборів до зображень сагайдака. Якщо ранг m бази основи, тобто кількість матриць у наборі, більша за 2, відповідний сагайдак є *диким.* Тому розраховувати на більш-менщ прийнятну класифікацію не доводиться. При $m=2$ відповідний сагайдак — це відомий сагайдак Кронекера. Це дає можливість дати повну класифікацію пар кососиметричних матриць з точністю до узагальненої конгруентності (Теорема 2.10) і виводимо звідси класифікацію черніківських p-груп з елементарною верхівкою і базою рангу 2 (Теорема 2.11). Якщо $p=2$, цей метод не працює. Тут ми користуємося результатами У. Уотерхауса [47] про пари симетричних білінійних форм над полем характеристики 2 й одержуємо опис пар кососиметричних форм з точністю до узагальненої конгруенції (Теорема 2.16) і 2-груп Чернікова з елементарною верхівкою і базою рангу 2 (Теорема 2.17). Виявляється, що, попри відміну у методах, відповідь не залежить від p. Дано також опис відповідних груп у термінах твірних і співвідношень.

У третьому розділі ми розглянули задачу про слабку еквівалентність цілих 2-адичних зображень четвірної групи Кляйна $G=\langle\, a,b \mid a^2=b^2=1,\ ab=ba\,\rangle$. Відомо, що це — єдина нециклічна p-група, для якої класифікація цілих p-адичних зображень не є дикою. Зображення цієї групи вперше описала Л. Назарова [16]. Але дана нею класифікація жорстко прив'язана до вибору твірних і, як наслідок, погано пристосована до вирішення того, які з цих зображень є слабо еквівалентними в розумінні підрозділу 1.2. Оскільки, як показує Теорема 1.5, це питання є важливим для вивчення черніківських груп, ми даємо на нього відповідь, користуючись іншим підходом до класифікації таких зображень. Ми зводимо опис зображень групи Кляйна до опису зображень деякого *порядку Бакстрема* (Твердження 3.1), а тому й деякого сагайдака Q. При цьому відповідна дія автоморфізмів групи на зображеннях сагайдака Q збігається з очевидною дією деякої групи його симетрій. Тому питання про слабку еквівалентність стає цілком прозорим і ми даємо повну класифікацію нерозкладних зображень з точністю до слабкої еквівалентності.

Четвертий розділ присвячений обчисленню когомологій груп. Обчислення когомологій є важливим для вивчення розширень груп, зокрема, для вивчення p-груп Чернікова. Для спрощення обчислень, ми визначаємо нову резольвеньту для тривіального модуля $\mathbb{Z}$ у випадку скінченних абелевих груп (Теорема 4.1). Наш підхід близький до підходу Такахаші [46], але здається більш явним і ефективним. Ми будуємо також явний квазі-ізоморфізм нової резольвенти зі стандартною (Теорема 4.2), що дає, зокрема, можливість «перекладу» обчислень, виконаних за допомогою нової резольвенти, на звичну мову систем факторів, які виникають у розширеннях груп. Далі вивчаються когомології решіток та дуальних до них модулів. Такі модулі виникають, наприклад, при розгляді груп Чернікова та кристалографічних груп. Ми встановлюємо теорему двоїстості для когомологій Тейта решіток (Теорема 4.4) і обчислюємо когомології незвідних решіток та дуальних до них модулів (Теорема 4.7, Наслідок 4.8 і Теорема 4.9). Ці результати були раніше відомі лише для тривіальної решітки. Ми також встановлюємо явний вигляд першої та другої груп когомологій цих решіток (Теорема 4.10). Далі ми застосовуємо ці результати до випадку четвірної групи Кляйна й обчислюємо у явному вигляді другу групу когомологій для модулів, дуальних до всіх неточних решіток над цією групою (підрозділи 4.1.1–4.1.4).

Автор щиро вдячний своєму науковому керівнику професору Ю.А. Дрозду за постановку задач, цінні поради та постійну увагу до роботи.

Розділ 1

ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі дається огляд робіт, пов'язаних з тематикою дисертації, а також наведено відомі результати, якими ми будемо користуватися надалі.

1.1. p-групи Чернікова

Група G називається черніківською групою, якщо вона є розширенням прямого добутку скінченного числа квазіциклічних p-груп, можливо по різних простих p, за допомогою скінченної групи. Нагадаємо, що квазіциклічна p-група — це пряма границя циклічних p-груп $\varinjlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ відносно природних занурень $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z}$ (множення на p). Вона ізоморфна мультиплікативній групі всіх коренів із одиниці (в полі комплексних чисел) степеня p^n, де p — фіксоване просте число, і $n = 1, 2, \dots$. Як абстрактна група, вона задається твірними елементами $a_0 = 0, a_1, a_2, a_3, \dots$, та співвідношеннями $pa_{n+1} = a_n$ для всіх n.

Група G називається такою, що задовольняє умові мінімальності, якщо не існує жодного нескінченного спадного ланцюга її підгруп. Такі групи вперше розглянув С. Черніков, який встановив наступні результати.

Теорема 1.1 ([22, Теорема 1.1])**.** *Нескінченна локально розв'язна група G задовольняє умову мінімальності тоді і тільки тоді, коли вона є скінченним розширенням прямого добутку скінченного числа квазіцик-*

лічних груп.

Теорема 1.2 ([22, Теорема 1.5]). *Нескінченна локально скінченна p-група задовольняє умову мінімальності тоді і тільки тоді, коли вона є черніківською p-групою.*

Теорема 1.3 ([22, Теорема 1.9]). *Нескінченна нільпотентна p-група G задовольняє умову мінімальності тоді і тільки тоді, коли вона має таку підгрупу скінченного індекса,що міститься в її центрі і є прямим добутком скінченного числа квазіциклічних груп.*

Теорема 1.4 ([22, Наслідок 1.7]). *Кожна квазіциклична підггрупа нільпотентної p-групи G міститься в її центрі.*

Відомо, що кожна черніківська група розкладається у прямий добуток p-груп. Тому при дослідженні черніківських груп можна обмежитись вивченнням черніківських p-груп. При цьому ми використовуємо підхід, започаткований в роботах [9, 10].

Нехай G — черніківська p-група. Тоді G містить нормальну підгрупу M, яка є прямою сумою скінченного числа квазіциклічних p-груп, а факторгрупа $H = G/M$ є скінченною p-групою. Тоді група M стає H-модулем, якщо визначити дію у такий спосіб:

$$h \circ v = hvh^{-1} \text{ для всіх } h \in H, v \in M. \tag{1.1}$$

Отже, задача класифікації черніківських груп розщеплюється на дві частини:

1. Знаходження усіх H-модулів M, де H — скінченна p-група, а адитивна група модуля M — пряма сума скінченного числа квазіциклічних p-груп.

2. Вивчення всіх неізоморфних розширень даної групи H за допомогою даного модуля M.

Відомо [15], що кільце ендоморфізмів квазіциклічної p-групи ізоморфне кільцю $\mathbb{Z}_p$ цілих p-адичних чисел. Тому, якщо M — пряма сума n екземплярів квазіциклічних p-груп, то $AutM \simeq GL(n, \mathbb{Z}_p)$.

Отже, перша задача — це, фактично, задача знаходження цілих p-адичних зображень даної p-групи H. Друга задача — вивчення розширень, як відомо, пов'язана з когомологіями.

1.2. Когомології

Розширенням групи H за допомогою групи M зветься коротка точна послідовність груп виду

$$1 \to M \to E \to H \to 1.$$

Інше розширення

$$1 \to M \to E' \to H \to 1$$

назвемо еквівалентним до попереднього, якщо існує гомоморфізм $E \to E'$, який робить комутативною діаграму

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & E & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 1 \end{array}.$$

Зауважимо, що таке відображення обов'язково є ізоморфізмом.

Головна проблема, пов'язана з груповими розширеннями, полягає в класифікації розширень групи H за допомогою M з точністю до еквівалентності. Як відомо, класи еквівалентності розширень з комутативним ядром M знаходяться у взаємно однозначній відповідності з елементами другої групи когомологій $H^2(H, M)$, де дія групи H на групі M визначена формулою (1.1).

Нехай R — кільце (асоціативне з одиницею) і M — (лівий) R-модуль. Резольвентою модуля M називається точна послідовність R-модулів виду

$$F: \ \ldots \xrightarrow{d_3} F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0. \tag{1.2}$$

Якщо всі модулі F_i вільні, то кажуть про вільну резольвенту. Вільні резольвенти існують у будь-якого модуля M і можуть бути побудовані очевидним індуктивним процесом: вибираємо епіморфізм $F_1 \to Ker\varepsilon$, де $\varepsilon : F_0 \to M$ із вільним F_1 і т.д. Зауважимо, що початковий відрізок $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ вільної резольвенти можна розглядати як задання модуля M твірними та співвідношеннями.

Нас цікавить випадок, коли $R = \mathbb{Z}G$ — цілочисельне групове кільце скінченної групи G. Нехай $\mathbb{Z}$ — тривіальний G-модуль. Тоді гомології й когомології $\mathbb{Z}G$-модуля M визначаються так:

$$H_n(G, M) = Tor_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M),$$

а

$$H^n(G, M) = Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M),$$

Інакше кажучи, ці гомології й когомології є, відповідно, гомологіями та когомологіями комплексів

$$F \otimes_{\mathbb{Z}G} M \ \text{ та } \ Hom_{\mathbb{Z}G}(F, M),$$

де F — вільна резольвента (1.2) модуля $\mathbb{Z}$. Відомо з гомологічної алгебри [28], що це не залежить від вибору резольвенти.

Нагадаємо, що для тривіального G-модуля $\mathbb{Z}$ визначена так звана *стандартна резольвента* [7, 28]:

$$\mathbb{S} : \ldots \longrightarrow \mathbb{S}_2 \longrightarrow \mathbb{S}_1 \longrightarrow \mathbb{S}_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

де $\mathbb{Z}G$-модуль $\mathbb{S}_n$ має базис $[g_1|g_2|\dots|g_n]$, де $g_i \in G\backslash\{1\}$ (ми покладемо $[g_1|g_2|\dots|g_n] = 0$, якщо деяке $g_i = 1$) і

$$d[g_1|g_2|\dots|g_n] = g_1[g_2|\dots|g_n] + \Sigma_{i=1}^{n-1}(-1)^i[g_1|g_2|\dots|g_i g_{i+1}|\dots|g_n]+ \\ + (-1)^n[g_1|g_2|\dots|g_n]$$

$\mathbb{S}$ — вільна резольвента тривіального G-модуля $\mathbb{Z}$. Отже

$$H_n(G,M) = Tor_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) = H_n(\mathbb{S}\otimes_{\mathbb{Z}G}M),$$

а

$$H^n(G,M) = Ext^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) = H^n(Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{S},M)).$$

Друга група когомологій при цьому одежує наступний вигляд.

- Розглядаються *коцикли* (або *системи факторів*), тобто відображення $\mu : G \times G \to M$, які задовольняють рівняння

$$a\mu(b,c) - \mu(ab,c) + \mu(a,bc) - \mu(a,b) = 0. \tag{1.3}$$

- У групі $C^2(G,M)$ всіх коциклів розглядається підгрупа *кограниць* $B^2(G,M)$, тобто відображень вигляду

$$d\gamma : \; d\gamma(a,b) = a\gamma(b) - \gamma(a),$$

  де $\gamma : G \to M$ — довільне відображення.

- Тоді $H^2(G,M) = C^2(G,M)/B^2(G,M)$.

При цьому можна обмежитись такими коциклами μ, що $\mu(a,b)$=0, якщо $a = 1$ або $b = 1$.

Кожен коцикл $\mu \in C^2(G,M)$ визначає розширення E_μ групи G за допомогою M у такий спосіб:

$$E_\mu = M \times G,$$

а операція задається формулою

$$(v, g)(v', g') = (v + gv' + \mu(g, g'), gg') \tag{1.4}$$

(ми записуємо операції в E_μ і G як множення, а в M — як додавання). При цьому розширення E_μ та $E_{\mu'}$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $\mu - \mu' \in B^2(G, M)$ [7, 28]. Позначимо $E_\mu = E(G, M, \mu)$.

Якщо не існує гомоморфізмів груп $M \to G$, можна сказати навіть більше. Нехай ψ — автоморфізм групи G. Для кожного G-модуля M визначений «підкручений» модуль M^ψ в якому $g \circ v = \psi(g)v$, де праворуч — операція в модулі M, а ліворуч — у M^ψ. Кажуть, що модулі M і M' *слабо еквівалентні*, якщо $M \simeq M'^\psi$ для деякого автоморфізму ψ.

Теорема 1.5. *Припустимо, що група G скінченна, а M і M' — два G-модулі такі, що $Hom(M, G) = 0$, $\mu \in H^2(G, M)$ і $\mu' \in H^2(G, M')$. $E(G, M, \mu) \simeq E(G, M', \mu)$ тоді і тільки тоді, коли існує автоморфізм ψ групи G та ізоморфізм G-модулів $\varphi : M \to M'^\psi$ такі, що $\mu = \varphi^{-1}\mu'\psi$.*

Зауваження 1.6. Цей результат, в різних його варіантах, є відомим, але, оскільки в літературі немає його доведення у загальному вигдяді, тому ми таке доведення наведемо. Насправді воно є досить простим узагальненням доведення з роботи [10], де розглянуто модулі, які виникають з черніківських p-group.

Доведення. Розглянемо ці розширення:

$$1 \to M \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} H \to 1$$

та

$$1 \to M' \xrightarrow{\alpha'} E' \xrightarrow{\beta'} H \to 1.$$

Нехай $f : E' \xrightarrow{\sim} E$. Оскільки $Hom(M,G) = 0$, $\beta' f(\operatorname{Im}\alpha) = 0$, тобто $\beta' f$ індукує гомоморфізми $\varphi : M \to M'$ та $\psi : G \to G$ такі, що діаграма

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \\
1 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow[\alpha']{} & E' & \xrightarrow[\beta']{} & G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

є комутативною. Оскільки f ізоморфізм, ψ — епіморфізм. Оскільки група G скінченна, ψ — ізоморфізм, а тоді й φ — ізоморфізм (груп). Якщо ототожнювати G і G' з добутками, відповідно, $M \times G$ і $M' \times G$ з множенням, яке задано правилом (1.4), це дає такі співвідношення

$$f(v,a) = (\varphi(v) + \gamma(a), \psi(a)) \text{ для деякої функції } \gamma : G \to M' \text{ з } \gamma(1) = 0;$$
$$(0,a)(v,1) = (av, a),$$

а для їхніх образів при дії f маємо:

$$(\gamma(a), \psi(a))(\varphi(v), 1) = (\gamma(a) + \psi(a)\varphi(v), \psi(a)),$$

звідки

$$\varphi(av) = a \circ \varphi(v), \text{ де } \circ \text{ — дія в модулі } {M'}^{\psi};$$
$$f(v,a)f(u,b) = (\varphi(v) + \gamma(a), \psi(a))(\varphi(u) + \gamma(b), \psi(b)) =$$
$$= (\varphi(v) + \gamma(a) + a \circ \varphi(u) + a \circ \gamma(b) + \mu'\psi(a,b), \psi(ab));$$
$$f(v + au + \mu(a,b), ab) = (\varphi(v) + a \circ \varphi(u) + \varphi\mu(a,b) + \gamma(ab), \psi(ab)),$$

звідки

$$\mu(a,b) = \mu'(a,b) + a \circ \gamma(b) - \gamma(ab) + \gamma(a)),$$

тобто $\varphi : M \xrightarrow{\sim} {M'}^{\psi}$ і клас коцикла $\varphi\mu$ в $H^2(G,M)$ дорівнює класу коцикла $\mu'\psi$. $\square$

У випадку, коли група G є скінченною, зручними є *когомології Тейта*, які ввів у розгляд Дж. Тейт і які визначаються в такий спосіб:

$$\hat{H}^i(G,M) = \begin{cases} H^n(G,M), & \text{n>0;} \\ H_{-n-1}(G,M), & \text{n<-1;} \\ M^G/trM, & \text{n=0;} \\ Ker_M tr/\{gu-u | g\in G, u\in M\}, & \text{n=-1.} \end{cases}$$

де $tr = \sum_{g\in G} g$ (елемент групової алгебри $\mathbb{Z}G$), а $Ker_M tr = \{u \in M \mid tru = 0\}$. «Поправка» для степенів 0 і -1 дісно є корисною. Наприклад, має місце такий важливий факт, який ми також будемо використовувати надалі.

Теорема 1.7 ([7, 28]). *Кожна коротка точна послідовність G-модулів*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

індукує нескінченну в обидва боки точну послідовність когомологій Тейта

$$\cdots \to \hat{H}^{n-1}(G,M_3) \to \hat{H}^n(G,M_1) \to \hat{H}^n(G,M_2) \to \\ \to \hat{H}^n(G,M_3) \to \hat{H}^{n+1}(G,M_1) \to \dots$$

Інше визначення когомологій Тейта пов'язане з використанням так званих *повних резольвент* [28, 7]. А саме, *повна резольвента* для групи G — це точна, нескінченна в обидві сторони послідовність вільних $\mathbb{Z}G$-модулів

$$\hat{F}: \ \dots \xrightarrow{\hat{d}_{n+1}} F_n \xrightarrow{\hat{d}_n} F_{n-1} \xrightarrow{\hat{d}_{n-1}} \dots,$$

у якій $\operatorname{coker} \hat{d}_0 \simeq \ker \hat{d}_{-1} \simeq \mathbb{Z}$. Якщо дана така резольвента, то когомології Тейта $\hat{H}^n(G,M)$ визначаються, як когомології комплексу $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\hat{F},M)$. Важлива властивість скінченних груп полягає в тому, що повну резольвенту можна отримати з вільної резольвенти (1.2) для модуля $\mathbb{Z}$ в такий спосіб.

- Розглядаємо *дуальну послідовність*

$$F^*:\ 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi^*} F_0^* \xrightarrow{d_1^*} F_1^* \xrightarrow{d_2^*} F_2^* \xrightarrow{d_3^*} \dots,$$

  де * позначає функтор $M \mapsto M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$, причому дія групи G на M^* визначається правилом

$$gf(x) = f(g^{-1}x), \ \text{ де } f : M \to \mathbb{Z},\ g \in G,\ x \in M.$$

- Зауважимо, що $\mathbb{Z}^* \simeq \mathbb{Z}$. Тому можна ототожнити ці модулі й визначити повну резольвенту, якщо покласти

$$\hat{F}_n = \begin{cases} F_n, & \text{якщо } n \geq 0, \\ F^*_{-n-1}, & \text{якщо } n < 0, \end{cases}$$

$$\hat{d}_n = \begin{cases} d_n, & \text{якщо } n > 0, \\ \pi^*\pi, & \text{якщо } n = 0,\ , \\ d^*_{-n}, & \text{якщо } n < 0. \end{cases}$$

Визначена в такий спосіб повна резольвента є *самодуальною* в тому розумінні, що $\hat{F}^* \simeq \hat{F}$ як комплекси $\mathbb{Z}G$-модулів. Це є важливим при вивченні вдастивостей двоїстості для когомологій (дивись [28, § XII.6], а також підрозділ 4.1.3).

У роботі [41] Р.Ліндон побудував *спектральну послідовність* [28], яка дозволяє вивчати когомології розширень груп. Саме, нехай N — нормальна підгрупа в G, $H = G/N$. Для кожного G-модуля M підгрупа $M^N = H^0(N, M)$ нерухомих відносно N елементів природним чином є H-модулем. Тоді й усі когомології $H^n(N, M)$ також є H-модулями й існує спектральна послідовність з другим членом

$$E_2^{pq} = H^p(H, H^q(N, M)),$$

яка збігається до $H^n(G, M)$. Інакше кажучи, у групі $H^n(G, M)$ є фільтрація

$$H^n(G, M) = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_n = 0$$

така, що $M_p/M_{p+1} \simeq E_\infty^{p,n-p}$, де E_∞^{pq} отримується з E_2^{pq} деякою послідовністю взяття когомологій (деталі дивись [28, Chaper XV]). Цей результат ми також використаємо у підрозділі 4.1.3.

1.3. Зображення сагайдаків

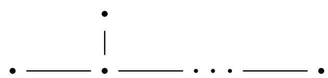
Багато задач лінійної алгебри можна сформулювати як задачі про класифікацію зображень сагайдака. Сагайдак — це орієнтований граф (можливо, з петлями та кратними стрілками). Кажуть, що задано зображення сагайдака, якщо кожній вершині відповідає векторний простір, а кожній стрілці — лінійне відображення відповідних векторних просторів.

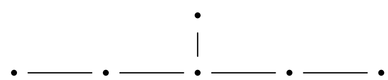
У роботах [33, 3, 31, 17, 32, 40] встановлено наступні властивості зображень сагайдаків. Надалі всі сагайдаки вважаються зв'язними, що не є істотним обмеженням.

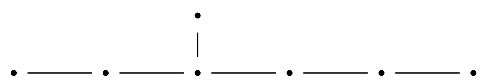
1. Сагайдак Γ має скінченну кількість неізоморфних нерозкладних зображень тоді і тільки тоді, коли підпорядкований неорієнтований граф

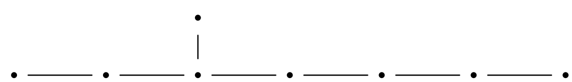
є *схемою Динкіна*, тобто одним з наступних графів

A_n :

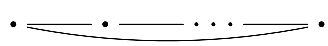
D_n : 

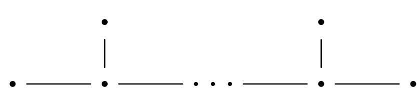
E_6 : 

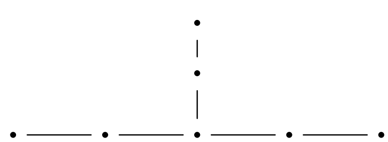
E_7 : 

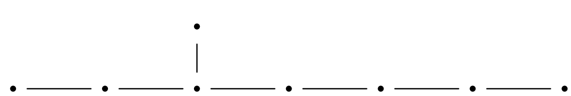
E_8 : 

2. Сагайдак Γ має ручний зображувальний тип тоді і тільки тоді, коли підпорядкований неорієнтований граф є *розширеною схемою Динкіна*, тобто одним з наступних графів

$\tilde{A}_n$: 

$\tilde{D}_n$: 

$\tilde{E}_6$: 

$\tilde{E}_7$: 

$\tilde{E}_8$:

3. Розмірності нерозкладних зображень сагайдака Γ є додатними ко-

ренями підпорядкованого неорієнтованого графа у розумінні роботи [40].

Категорію зображень $\operatorname{rep}\Gamma$ сагайдака Γ зручно розбити на три частини: *препроективні, преін'єктивні* і *регулярні.* Нагадаємо [42], що *сагайдак Ауслендера–Райтен* цiїє категорії — це сагайдак, вершинами якого є неізоморфні нерозкладні зображення, а стрілки відповідають базі простору *незвідних морфізмів*, тобто факторпростору простору всіх необоротних морфізмів по підпростору тих з них, які є лінийними комбінаціями добутків двох необоротних морфізмів. Для сагайдаків скіченного типу всі нерозкладні зображення є одночасно препроективними і преін'єктивними. В інших випадках препроективні зображення утворюють окрему компоненту сагайдака Ауслендера–Райтен, те саме стосується преін'єктивних зображень, а регулярні зображення утворюють кілька (нескінченно багато, якщо поле нескінченне) компонент. При цьому, між зображеннями з різних регулярних компонент немає морфізмів. Так само немає морфізмів з регулярних або преін'єктивних зображень у препроективні і з преін'єктивних у регулярні [42].

При вивченні пар кососиметричних форм ключову роль відіграють зображення *сагайдака Кронекера*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & 2 \end{tikzcd}$$

Зображення цього сагайдака будемо називати *модулями Кронекера.* Вони мають вигляд діаграм $(V_1, V_2, \gamma_1, \gamma_2)$, де V_1, V_2 — k-векторні простори, а $\gamma_1, \gamma_2 : V_1 \to V_2$ — k-лінійні відображення. Вибираючи бази у V_1 і V_2, ми бачимо, що маємо справу з парами (G_1, G_2) матриць однакового розміру, а ізоморфізм модулів Кронекера, у такому матричному розумінні, означає множення обох G_1 та G_2 зліва і справа одночасно на деякі невироджені матриці: $(G_1, G_2) \mapsto (SG_1T, SG_2T)$.

Зауважимо, що модулі Кронекера це модулі над алгеброю

$$A = \begin{bmatrix} k & k^2 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

У цьому випадку розмірності препроективних модулів дорівнюють $(n, n+1)$, преін'єктиних — $(n+1, n)$. Саме, препроективна компонента має наступний вигляд

$$\begin{tikzcd}
 & {[1,2]} \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & {[3,4]} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & {[5,6]} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & \arrow[l, dotted] \\
{[0,1]} \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & {[2,3]} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & {[4,5]} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & \cdots \arrow[ll, dotted]
\end{tikzcd}$$

(перші два модулі — це нерозкладні проективні).

Преін'єктивна компонента має наступний вигляд:

$$\begin{tikzcd}
 & & {[5,4]} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & {[3,2]} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & & {[1,0]} \arrow[ll, dotted] \\
\cdots \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & {[6,5]} \arrow[l, dotted] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & {[4,3]} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] & & {[2,1]} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur, shift left] \arrow[ur, shift right] &
\end{tikzcd}$$

(останніі два модулі — це нерозкладні ін'єктивні). Пунктирні стрілки показують дію так званого *перетворення Ауслендера–Райтен.*

Нарешті,регулярні модулі мають розмірності (n, n) і задаються парами (I, Φ) і (J, I), де I — одинична матриця, F — клітина Фробеніуса з характеристичним многочленом $f^k(x)$, де многочлен $f(x)$ незвідний, J — нільпотентна клітина Жордана. Отже, ці зображення знаходяться у взаємно однозначній відповідності з парами (f, k), де f — або незвідний многочлен, або символ ∞ (для модулів вигляду (J, I)).

1.4. Порядки Бакстрема

Нехай R — кільце дискретної оцінки з полем лишків $\Bbbk = R/\pi R$, де π — твірний максимального ідеалу кільця R і полем часток K. Нехай Λ —

R-порядок у деякій скінченновимірній напівпростій K-алгебрі A [29]. Це означає, що Λ є R-підалгеброю в A і є вільним R-модулем, ранг якого дорівнює $\dim_K A$. Через $\mathfrak{M}_\Lambda^0$ позначимо категорію лівих Λ-*решіток*, тобто Λ-модулів, які є скінченнопородженими й без скруту як R-модулі. Через $ind^0(\Lambda)$ позначимо множину класів ізоморфізму нерозкладних об'єктів в $\mathfrak{M}_\Lambda^0$, а також, дозволяючи вільність у позначеннях, деяку множину представників цих класів.

Нагадаємо, що кільце Λ зветься *спадковим*, якщо $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda \leq 1$, тобто кожен лівий ідеал у Λ є проективним Λ-модулем. Будова спадкових порядків описана в роботах [35, 27, 11] (дивись також [29, §26]). Кажуть, що Λ — *порядок Бакстрема*, якщо існує спадковий R-порядок Γ, такий, що

$$rad\Lambda = rad\Gamma \subset \Lambda \subset \Gamma,$$

де $rad(-)$ позначає радикал Джекобсона. Надалі нам буде важливий випадок, коли Γ — «стандартний» спадковий порядок, тобто $\Gamma/\operatorname{Rad}\Gamma \simeq \prod_{i=1}^t Mat(n_i, \Bbbk)$. У цьому випадку, як показано в роботі [43], Λ-решітки тісно пов'язані з зображеннями деякого сагайдака. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що порядок Бакстрема є базовим, тобто $\Lambda/\operatorname{Rad}\Lambda \simeq \Bbbk^s$, і нерозкладним (як кільце).

Позначимо через P_j $(1 \leq j \leq t)$ попарно неізоморфні нерозкладні проективні Γ-модулі, і покладемо $S_j = P_j/\operatorname{Rad} P_j$. Тоді S_j $(1 \leq j \leq t)$ — це всі неізоморфні прості Γ-модулі. Розглянутий як Λ-модуль, модуль S_j розкладається по компонентах $\Lambda/\operatorname{Rad}\Lambda$: $S_i = \oplus_{i=1}^s {}_iS_j$. Нехай $d_{ij} = \dim_\Bbbk {}_iS_j$. Поставимо у відповідність порядку Бакстрема Λ сагайдак $Q = Q(\Lambda)$ з множиною вершин $\{1, 2, \ldots, s\} \cup \{1', 2', \ldots, t'\}$ і d_{ij} стрілок з вершини i до вершини j'. У роботі [43] доведений наступний результат.

Визначимо зв'язки Λ-решіток і зображень сагайдака $Q = Q(\Lambda)$. Нехай $J = \operatorname{Rad}\Lambda = \operatorname{Rad}\Gamma$, $\Bbbk_i$ $(1 \leq i \leq s)$ — простий Λ-модуль, який відповідає

i-й компоненті $\Lambda/\operatorname{Rad}\Lambda$. Зауважимо, що ${}_iS_j \simeq \operatorname{Hom}_\Lambda(\Bbbk_i, S_j)$ і ми будемо ототожнювати ці простори. Позначимо також через Π_j нерозкладний проективний Γ-модуль, для якого $\Pi_j/J\Pi_j \simeq S_j$.

Означення 1.8. 1. Для кожної Λ-решітки M, нехай

$$\bar{M} = M/JM = \oplus_{i=1}^s k_i(M)\Bbbk_i,$$
$$\tilde{M} = \Gamma M/JM = \oplus_{j=1}^t l_j(M)S_j.$$

Зауважимо, що $l_j(M)S_j$ можна ототожнити з $S_j \otimes_\Bbbk U_j(M)$, де $U_j(M) \simeq \Bbbk^{l_j(M)}$. При цьому $\operatorname{Hom}_\Lambda(\Bbbk_i, S_j)$ ототожнюється з $\operatorname{Hom}_\Bbbk(\Bbbk_i, U_j)$.

Визначимо зображення $V = \rho(M)$ сагайдака Q, поклавши $V(i) = k_i(M)\Bbbk_i$, $V(j') = U_j(M)$, а якщо $a : i \to j$ — стрілка, яка відповідає гомоморфізму $\alpha : \Bbbk_i \to S_j$, то $V(\alpha)$ — відображення, задане обмеженнями занурення $\bar{M} \to \tilde{M}$ на i-ту компоненту модуля $\bar{M}$ і j-ту компоненту модуля $\tilde{M}$.

2. Якщо V — зображення сагайдака Q, визначимо Λ-решітку $M = \lambda(V)$ у таки спосіб.

   (a) Ототожнимо $V(i)$ з $k_i\Bbbk_i$, де $k_i = \dim V(i)$.

   (b) Покладемо $N = \oplus_{j=1}^t l_j\Pi_j$, де $l_j = \dim V(j')$. Тоді $N/JN \simeq \oplus_{j=1}^t S_j \otimes_\Bbbk V(j')$.

   (c) Розглянемо гомоморфізм Λ-модулів $f_V : \oplus_{i=1}^s V(i) \to N/JN$, індукований відображенням $\oplus_{i=1}^s V_i \to \oplus_{j=1}^t V(j')$.

   (d) Покладемо $M = \pi^{-1}(\operatorname{Im} f_V)$, де π — природна сюр'єкція $N \to N/JN$.

Теорема 1.9 ([43])**.** *Відображення $M \mapsto V(M)$ та $V \mapsto M(V)$ індукують взаємно однозначну відповідність між класами ізоморфізму*

Λ-*решіток і класами ізоморфізму зображень сагайдака* $Q(\Lambda)$, *які не мають тривіальних прямих доданків.*

Нагадаємо, що *тривіальне зображення* сагайдака — це таке, що одній якійсь вершині відповідає одновимірний простір, а всім іншим вершинам — нульові простори.

Більш того, у роботі [44] описаний зв'язок між сагайдаками Ауслендера–Райтен категорій $rep\,Q$ і $\mathfrak{M}^0_\Lambda$, який буде використано у розділі 3.

Теорема 1.10. *Щоб отримати сагайдак Ауслендера–Райтен категорії* $\mathfrak{M}^0_\Lambda$ *з сагайдака Ауслендера–Райтен категорії* $rep\,Q$ *треба для кожної вершини* j' *ототожнити відповідне проективне зображення* Π_j *з ін'єктивним зображенням* $\mathbf{I}_{\sigma(j)}$, *яке відповідає вершині* $\sigma(j)'$, *де* $P_{\sigma(j)} \simeq \mathrm{Rad}\,P_j$.

Нагадаємо, що зображення Π_j в даному випадку — це тривіальне зображення у вершині j', а зображення $\mathbf{I}_j$ має одновмірний простір у вершині j' і d_{ij}-вимірний простір у вершині i.

Розділ 2

НІЛЬПОТЕНТНІ p-ГРУПИ ЧЕРНІКОВА

Цей розділ присвячений класифікації одного класу p-груп Чернікова. Нагадаємо, що p-група Чернікова G, тобто розв'язна p-група з умовою мінімальності для підгруп — це розширення скінченної прямої суми M квазіциклічних p-груп, або, що те саме, груп типу p^∞, за допомогою скінченної p-групи H. Ми називаємо H та M, відповідно, *верхівкою* та *основою* G. Кількість квазіциклічних прямих доданків у основі M назвемо *рангом основи*. Наша мета — дати класифікацію (з точністю до ізоморфізму) p-груп Чернікова, у яких верхівка — елементарна абелева p-група, а ранг основи дорівнює 2. Ми також покажемо, що, в деякому розумінні, це — найбільший клас черніківських p-груп з елементарною верхівкою, який допускає прийнятний опис. Техніка, яку ми застосовуємо, істотно різниться в залежності від того, чи число p є непарним, чи $p = 2$. Тому ми розглядаємо ці випадки окремо, хоча результуючий опис фактично від числа p не залежить.

2.1. Структурні теореми

Матеріал цього пункту не залежить від числа p. Позначимо через $M^{(n)}$ пряму суму n екземплярів M_i квазіциклічних p-груп і зафіксуємо елементи $a_i \in M_i$ порядку p. p-група Чернікова визначається за допомогою дії скінченної p-групи H на групу $M^{(n)}$ і елемента з групи когомологій другого порядку $H^2(H, M^{(n)})$ відносно цієї дії. Такий елемент задається за допомогою 2-коциклу $\mu : H \times H \to M^{(n)}$, який визначається з точністю до 2-границі. Надалі зручно позначити операції в групах G, H, M через $+$, так, що їхні одиничні елементи позначаться через 0.

Відомо, що p-група Чернікова G нільпотентна тоді і тільки тоді, коли дія H на $M^{(n)}$ тривіальна. У цьому випадку коцикл — це відображення $\mu : H{\times}H \to M^{(n)}$ таке, що $\mu(y,z){+}\mu(x,y{+}z) = \mu(x{+}y,z){+}\mu(x,y)$ для всіх $x, y, z \in H$. Ми також можемо припустити, що μ нормалізований, тобто $\mu(0,x) = \mu(x,0) = 0$ для всіх $x \in H$. Кограниця функції $\gamma : H \to M^{(n)}$ це функція $\partial\gamma(x,y) = \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(x+y)$.

Нехай H_m — елементарна абелева p-група із m твірними,

$$H_m = \langle h_1, h_2, \ldots, h_m \mid ph_i = 0,\ h_i + h_j = h_j + h_i \text{ для всіх } i, j \rangle.$$

Нехай також ${M_p}^{(n)} = \{a \in M^{(n)} \,|\, pa = 0\} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. Ми позначимо через $S(n,m)$ групу всіх кососиметричних відображень $\tau : H_m \times H_m \to {M_p}^{(n)}$, тобто таких білінійних відображень, що $\tau(x,x) = 0$ для всіх x (отже $\tau(x,y) = -\tau(y,x)$ для всіх x, y).

Теорема 2.1 (Шапочка, [23])**.** *Якщо дія H_m тривіальна на $M^{(n)}$, то $H^2(H_m, M^{(n)}) \simeq S(n,m)$.*

Доведення. Нехай G розширення $M^{(m)}$ за допомогою H_m з тривіальною дією H_m відноско коциклу μ. Тоді для кожного $x \in H$ існує представник $\bar{x} \in G$ такий, що $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y} + \mu(x,y)$. Покладемо

$$t(x,y) = [\bar{x}, \bar{y}] = (\overline{x+y} + \mu(x,y)) - (\overline{y+x} + \mu(y,x)) = \mu(x,y) - \mu(y,x),$$

оскільки значення $\mu(x,y)$ містяться в центрі G. Очевидно, що ця функція кососиметрична. Оскільки всі комутатори знходяться в центрі G, ми отримуємо

$$
\begin{aligned}
[\overline{x+y}, \bar{z}] &= (\bar{x} + \bar{y} - \mu(x,y) + \bar{z}) - (\bar{z} + \bar{x} + \bar{y} - \mu(x,y)) \\
&= (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) - (\bar{z} + \bar{x} + \bar{y}) \\
&= \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} - \bar{y} - \bar{x} - \bar{z} \\
&= \bar{x} + \bar{y} + \bar{z} - \bar{y} - \bar{z} + \bar{z} - \bar{x} - \bar{z} \\
&= \bar{x} + [\bar{y}, \bar{z}] + \bar{z} - \bar{x} - \bar{z} \\
&= [\bar{x}, \bar{z}] + [\bar{y}, \bar{z}].
\end{aligned}
$$

Отже, функція t білінійна. Більше того, $pt(x,y) = t(px,y) = t(0,y) = 0$, отже $t(x,y) \in M_p^{(m)}$. Ми позначимо цю функцію через $\tau(\mu)$, тож визначимо відображення $\tau : Z^2(H_m, M^{(m)}) \to S(n,m)$, де Z^2 позначає групу коциклів.

Якщо $\mu = \partial\gamma$, то через очевидну симетрію цього означення, отримуємо, що $\mu(x,y) = \mu(y,x)$, а тоді $\tau(\mu) = 0$. Навпаки, нехай $\tau(\mu) = 0$. Тоді група G комутативна. Тому її подільна підгрупа $M^{(m)}$ є прямим доданком в G [34, Theorem 13.3.1], тобто $G = M^{(m)} \oplus H_m$, отже клас μ в $H^2(H_m, M^{(m)})$ нульовий. Це означає, що μ кограниця. Таким чином, $\ker\tau = B^2(H_m, M^{(m)})$ група кограниць.

Залишилось довести, що τ сюр'єктивне. Нехай $t : H_m \times H_m \to M_p^{(m)}$ якась кососиметрична функція. Покладемо $t_{ij} = t(h_i, h_j)$ і, для будь-якого елемента $x = \sum_{i=1}^m \alpha_i h_i$, $y = \sum_{j=1}^m \beta_j h_j$ визначимо $\mu(x,y) = \sum_{i<j} \alpha_i\beta_j t_{ij}$. Якщо $z = \sum_{k=1}^m \gamma_k h_k$, то

$$\mu(y,z) + \mu(x, y+z) = \sum_{i<j} \beta_i\gamma_j t_{ij} + \sum_{i<j} \alpha_i(\beta_i + \gamma_j) t_{ij},$$

$$\mu(x+y, z) + \mu(x,y) = \sum_{i<j} (\alpha_i + \beta_i)\gamma_j t_{ij} + \sum_{i<j} \alpha_i\beta_i t_{ij},$$

отже, обидві суми рівні $\sum_{i<j}(\alpha_i\beta_j + \alpha_i\gamma_j + \beta_i\gamma_j)t_{ij}$, тобто μ є коциклом.

Більше того,

$$\mu(h_i, h_j) - \mu(h_j, h_i) = \begin{cases} t_{ij}, & \text{якщо } i < j, \\ -t_{ji} = t_{ij}, & \text{якщо } i > j, \end{cases}$$

звідки $\tau(\mu) = t$. □

Тепер ми можемо пов'язати класифікацію (з точністю до ізоморфізму) нільпотентних p-групи Чернікова, які є розширеннями $M^{(n)}$ за допомогою H_m, з задачею лінійної алгебри, точніще, теорії кососиметричних білінійних форм. Як ми вже бачили, такі групи утворюються за допомогою підгрупи $M^{(n)}$ і елементів $(\overline{h_1}, \overline{h_2}, \ldots, \overline{h_m})$ з визначальними співвідношеннями

$$\begin{aligned} \bar{h}_i + a &= a + \bar{h}_i, \\ p\bar{h}_i &= 0, \\ [\bar{h}_i, \bar{h}_j] &= t_{ij}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

для всіх $a \in M^{(n)}$ і всіх $i, j \in 1, 2, \ldots, m$, де t_{ij} — це кососиметрична $m \times m$ матриця з елементами з $M_p{}^{(n)}$. Оскільки $M_p{}^{(n)} \simeq \mathbb{F}_p^n$, де $\mathbb{F}_p$ — це поле лишків за модулем p, матриця t_{ij} може бути розглянута як набір із n кососиметричних матриць $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ розміру $m \times m$ з елементами із $\mathbb{F}_p$. Нагадаємо, що і $M^{(n)}$, і H_m однозначно визначаються групою G.

Теорема 2.2 (Шапочка, [23]). *Нехай G і F — дві нільпотентні p-групи Чернікова з верхівками H_m і основами $M^{(m)}$, t і f відповідні кососиметричні функції $H_m \times H_m \to M_p^{(m)}$. Групи G і F ізоморфні тоді і тільки тоді, коли існують автоморфізми σ групи $M^{(m)}$ і θ групи H_m такі, що $f(\theta(x), \theta(y)) = \sigma(t(x, y))$ для всіх $x, y \in H_m$.*

Доведення. Так як $M^{(m)}$ найбільша подільна абелева підгрупа в G або F, будь-який ізоморфізм $\phi : G \to F$ відображає $M^{(m)}$ у себе, тому визначає автоморфізми $\sigma = \phi|_{M^{(m)}}$ для $M^{(m)}$ та θ для $H_m = G/M^{(m)} = F/M^{(m)}$. Зазначимо, що функції t і f не залежать від вибору представників елементів з H у групах G та F. Якщо $\bar{x}$ є прообразом для $x \in H_m$ у групі G, то $\bar{x}' = \phi(\bar{x})$ є прообразом для $\theta(x)$ у групі F. Внаслідок цього $f(\theta(x), \theta(y)) = [\bar{x}', \bar{y}'] = \phi([\bar{x}, \bar{y}]) = \sigma(t(x, y))$.

З іншого боку, якщо σ і θ автоморфізми, що задовольняють умову теореми, то відображення $\phi : G \to F$ таке, що $\phi(a) = \sigma(a)$ для $a \in M^{(m)}$ і $\phi(\bar{x}) = \overline{\theta(x)}$ визначає ізоморфізм між G та F. □

Якщо ми ототожнимо такі кососиметричні функції з наборами з n кососиметричних матриць над полем $\mathbb{F}_p$, цю теорему можна переформулювати на матричній мові.

Для будь-якого набору $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ кососиметричних матриць розміру $m \times m$ і будь-якої оборотної матриці $Q = (q_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ ми покладемо $\mathbf{A} \circ Q = (A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$, де $A'_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} A_i$. Для будь-якої оборотної матриці $P \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{F})$ ми також покладемо $P \circ \mathbf{A} = (PA_1P^\top, PA_2P^\top, \ldots, PA_nP^\top)$, де $P^\top$ позначає транспоновану матрицю. Очевидно, що ці дві операції комутують: $(P \circ A) \circ Q = P \circ (A \circ Q)$. Набори $\mathbf{A}$ і $P \circ \mathbf{A}$ називають *конгруентними*, а набори $\mathbf{A}$ і $P \circ \mathbf{A} \circ Q$ називають *узагальнено конгруентними.*

Наслідок 2.3. *Два n-набори $\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}'$ кососиметричних матриць розміру $m \times m$ над полем $\mathbb{F}_p$ визначають ізоморфні нільпотентні p-групи Чернікова з верхівками H_m і основами $M^{(m)}$ тоді і тільки тоді, коли вони узагальнено конгруентні.*

Доведення. Перетворення $A \mapsto P \circ \mathbf{A}$ відповідає автоморфізму $H_m \simeq \mathbb{F}_p^m$, що задається матрицею P. З іншого боку, автоморфізми $M^{(m)}$ задаються оборотними матрицями Q з $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$, де $\mathbb{Z}_p$ кільце p-адичних цілих чисел, що розглядається як кільце ендоморфізмів групи типу p^∞ [15, § 21]. Такий автоморфізм перетворює послідовність матриць $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}\circ Q$. Більше того, результат залежить лише від значення Q за модулем p. Оскільки кожну оборотну матрицю над $\mathbb{F}_p$ можна підняти до оборотної матриці над $\mathbb{Z}_p$, це завершує доведення. $\square$

Надалі черніківську p-групу, яка відповідає набору $\mathbf{A}$ кососиметричних матриць на полем $\mathbb{F}_p$, ми позначатимемо через $G(\mathbf{A})$.

2.2. Випадок $\mathbf{p \neq 2}$

2.2.1. Зв'язок із зображеннями сагайдаків. Теорема 2.2 та Наслідок 2.3 зводять класифікацію нільпотентних p-груп Чернікова з верхівками H_m та основами $M^{(m)}$ з точністю до ізоморфізму до задачі лінійної алгебри, а саме, до класифікації наборів з n кососиметричних форм над полем лишків $\mathbb{F}_p$. Якщо $p \neq 2$, В.В.Сергейчук [21] показав, що ця проблема пов'язана з вивченням зображень так званого *узагальненого сагайдака Кронекера*

$$K_n = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left=40, "a_1"] \arrow[r, bend left=15, "a_2"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, bend right=40, "a_n"'] & 2 \end{tikzcd}\,.$$

Нагадаємо цей зв'язок. Визначимо на сагайдаку K_n інволюцію *, поклавши $1^* = 2$, $2^* = 1$ і $a_i^* = -a_i$ для всіх $1 \leq i \leq n$.

Зображення R сагайдака K_n над полем $\Bbbk$ складається з двох скінченновимірних векторних просторів $R(1)$ і $R(2)$ та n лінійних відображень $R(a_i) : R(1) \to R(2)$ $(1 \leq i \leq n)$. Визначимо спряжене зображення R^* поклавши $R^*(k) = R(k^*)^*$, де V^* позначає спряжений векторний простір до V, і $R^*(a_i) = R(a^*)^* = -R(a_i)^*$, де $L^* : W^* \to V^*$ позначає спряжене лінійне відображення до $L : V \to W$. Зображення R називається самоспряженим якщо $R^* = R$. Тоді $R(a_i) : R(1) \to R(1)^*$ ототожнюється з білінійною формою на $R(1)$ і ця форма кососиметрична, оскільки $R(a_i)^* = -R(a_i)$. Ми зазвичай ототожнюємо зображення R з набором n матриць, які відповідають відображенням $R(a_i)$.

Нехай R — нерозкладне зображення K_n, яке не ізоморфне самоспряженому. Тоді $R \oplus R^*$ ізоморфне до самоспряженого зображення R^+, яке не може бути розкладене в пряму суму ненульових самоспряжених зображень. А саме, R^+ задається набором з n кососиметричних матриць

$$R^+(a_i) = \begin{pmatrix} 0 & R(a_i) \\ -R(a_i)^\top & 0 \end{pmatrix}.$$

У роботі [21] встановлено наступний результат.

Теорема 2.4. *Якщо* $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$*, то кожне самоспряжене зображення розкладається в пряму суму нерозкладних самоспряжених зображень і зображень вигляду* R^+*, де* R *— нерозкладне зображення, яке не ізоморфне жодному самоспряженому. Більше того, прямі доданки вигляду* R^+ *визначаються однозначно з точністю до перестановки, ізоморфізмів відповідних нерозкладних зображень і заміни* R *на* R^**.*

Очевидно, що якщо $n = 1$, то немає нерозкладних самоспряжених зображень. Далі ми побачимо, що те ж саме відбувається для $n = 2$. Навпаки, якщо $n = 3$, зображення R таке, що $R(1) = R(2) = \Bbbk^3$ і

$$R(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; R(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; R(a_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

нерозкладне і самоспряжене.

Насправді, класифікація зображень сагайдака K_n для $n > 2$ — це так звана *дика задача*. Це означає, що вона містить класифікацію зображень кожної скінченно породженої алгебри над полем $\Bbbk$. Те саме вірно і для зображень, що не ізоморфні самоспряженим. А саме, нехай $n = 3$, $R(1) =$

$\Bbbk^d$, $R(2) = \Bbbk^{2d}$,

$$R(a_1) = \begin{pmatrix} I_d \\ 0 \end{pmatrix},\ R(a_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ I_d \end{pmatrix},\ R(a_3) = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

де I_d це одинична $d \times d$ матриця, X, Y довільна квадратна $d \times d$ матриця. Очевидно, що R не самоспряжене.

Можна легко перевірити, що два таких зображення (X, Y) і (X', Y') ізоморфні тоді і тільки тоді, коли пари (X, Y) і (X', Y') подібні, тобто $X' = SXS^{-1}$, $Y' = SYS^{-1}$ для деякої оборотної матриці S. Задача класифікації пар квадратних матриць з точністю до подібності — це "стандартна» дика задача [32]. Таким чином, не можна сподіватися на отримання більш-менш прийнятної класифікації трійок кососиметричних форм, а тому й p-груп Чернікова з елементарною верхівкою й базою рангу 3. Зауважимо, що це не залежить від характеристики поля, тобто стосується і 2-груп Чернікова. З іншого боку, при $n = 2$ задача є *ручною*, а тому існує порівняно простий опис відповідних груп.

Зауваження 2.5. Якщо $\operatorname{char} \Bbbk = 2$, визначення кососиметричної білінійної форми не може бути лінеаризоване, оскільки умова $B(x, x) = 0$ вже не є наслідком із умови $B(x, y) = -B(y, x)$. Отже ми не можемо ототожнити набір з n кососиметричних форм із самоспряженими зображеннями сагайдака K_n. Крім того, результати В.В.Сергейчука також дійсні тільки, якщо $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$. Тож для вивчення 2-груп Чернікова ми повинні використовувати зовсім інші методи.

2.2.2. Випадок n = 2. Якщо $n = 1$, то G описується за допомогою однієї кососиметричної матриці A. Ця матриця конгруентна прямій сумі k матриць $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ і l матриць (0), де $m = 2k + l$. Це дає просте описання.

Твердження 2.6. *Нільпотентна p-група Чернікова G з елементарною верхівкою і квазіциклічною основою M розкладається як $G_k \times H_l$,* *де G_k породжується M і $2k$ елементами $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_{2k}$ порядку p, які комутують з усіма елементами з M, а їх комутатори $[\bar{h}_i, \bar{h}_j]$ для $i < j$ задані за правилом*

$$[\bar{h}_i, \bar{h}_j] = \begin{cases} a_1, & \text{якщо } j = k + i, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases}$$

де a_1 — фіксований елемент порядку p з групи M.

Зараз розглянемо випадок, коли $n = 2$.

Спочатку ми класифікуємо пари кососиметричних білінійних форм над полем $\Bbbk$ ($\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$), або, що те саме, самоспряжені зображення сагайдака Кронекера K_2 з інволюцією $1^* = 2$, $2^* = 1$, $a_i^* = -a_i$. Нагадаємо, що нерозкладні зображення K_2 ("*пучки матриць*") задаються наступними парами матриць:

$$R_f: \qquad R_f(a_1) = I_d,\ R_f(a_2) = F(f), \tag{2.2}$$

$$R_{\infty,d}: \qquad R_{\infty,d}(a_1) = F(x^d),\ R_{\infty,d}(a_2) = I_d, \tag{2.3}$$

$$R_{-,d}: \qquad R_{-,d}(a_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$R_{-,d}(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$R_{+,d}: \qquad R_{+,d}(a_i) = R_{-,d}(a_i)^\top. \tag{2.6}$$

Тут $f = f(x)$ многочлен степеня d із $\Bbbk[x]$, що є степенем незвідного многочлена, а $F(f)$ — це матриця Фробеніуса з характеристичним многочленом

$f(x)$. Розмір матриць в $R_{-,d}$ це $(d-1)\times d$; відповідно, розмір матриць в $R_{+,d}$ це $d\times(d-1)$.

Очевидно, $R_{+,d} = (R_{-,d})^*$, $R_f^* \simeq R_f$ і $R_{\infty,d}^* \simeq R_{\infty,d}$. У той же час неважко переконатися, що самоспряжених зображень у цьому випадку немає.

Твердження 2.7. *Жодне з нерозкладних зображень із попереднього переліку не ізоморфне до самоспряженого.*

Доведення. Це очевидно для $R_{\pm,d}$. Зображення R_f^* задається парою матриць $(-I_d, -F(f)^\top)$. Якби воно було ізоморфне до самоспряженого, то існувала б оборотна $d\times d$ матриця P така, що $PI_d = -I_dP^*$ і $PF(f) = -F(f)^\top P^*$. Отже, $P^* = -P$, тому P кососиметрична, і $PF(f) = F(f)^\top P$. Можна легко перевірити, що це неможливо. Те саме стосується і $R_{\infty,d}$. □

Комбінуючи цей результат зі згаданим результатом роботи [21], ми отримуємо класифікацію пар кососиметричних білінійних форм. Саме, позначимо через $\mathfrak{A}$ множину всіх пар R^+, де $R\in\{R_f, R_{\infty,d}, R_{-,d}\}$, і через $\mathfrak{F}$ множину функцій $\kappa:\mathfrak{A}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ таких, що $\kappa(\mathbf{A})=0$ для майже всіх $\mathbf{A}$. Для будь-якої функції $\kappa\in\mathfrak{F}$ ми покладемо $\mathfrak{A}^\kappa = \bigoplus_{\mathbf{A}\in\mathfrak{A}} \mathbf{A}^{\kappa(\mathbf{A})}$.

Теорема 2.8. *Будь-яка пара кососиметричних матриць конгруентна прямій сумі $\mathfrak{A}^\kappa$ для однозначно визначеної функції $\kappa\in\mathfrak{F}$.*

Доведення. Це випливає з наведеного опису нерозкладних зображень, їхньої несамосрпряженості та теореми 2.4. □

Щоб отримати класифікацію p-груп Чернікова з елементарними верхівками і основою $M^{(2)}$, ми також повинні відповісти на запитання:

Задані дві функції зі скінченними носіями $\kappa,\kappa':\mathfrak{A}\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Коли пари $\mathfrak{A}^\kappa$ і $\mathfrak{A}^{\kappa'}$ узагальнено конгруентні?

Очевидно, $(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2)\circ Q = (\mathbf{A}_1 \circ Q) \oplus (\mathbf{A}_2 \circ Q)$, отже пари $\mathbf{A}$ і $\mathbf{A}\circ Q$ нерозкладні однозначно. Для кожної пари $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$ ми позначимо через $\mathbf{A}{*}Q$ єдину пару із $\mathfrak{A}$, яка конгруентна до $\mathbf{A}\circ Q$. Відображення $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}{*}Q$ визначає дію групи $\mathfrak{g} = \mathrm{GL}(2,\Bbbk)$ на набір $\mathfrak{A}$, отже на набір $\mathfrak{F}$ функцій $\kappa : \mathfrak{A} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $(Q*\kappa)(\mathbf{A}) = \kappa(A*Q)$. Теорема 2.8 приводить до наступного результату.

Наслідок 2.9. *Пари $\mathfrak{A}^\kappa$ і $\mathfrak{A}^{\kappa'}$ узагальнено конгруентні тоді і тільки тоді, коли функції κ і κ' належать одній орбіті групи $\mathfrak{g}$.*

Очевидно, $R^+\circ Q = (R\circ Q)^+$ для кожного зображення R сагайдака K_2. Таким чином, ми повинні знати, коли $R\circ Q \simeq R'$ для нерозкладних зображень з переліку (2.2). Оскільки $R_{-,d}$ — єдине (з точністю до ізоморфізму) нерозкладне зображення R таке, що $\dim R(1) = d-1$, $\dim R(2) = d$, ми лише маємо розглянути зображення з набору $\{R_f, R_{\infty,d}\}$. З загальної теорії пучків матриць [8, Глава XII] випливає, що пара $R = (R_1, R_2)$ із цього набору повністю визначається своїм *однорідним характеристичним многочленом* $\chi_R(x_1,x_2) = \det(x_1R_1 - x_2R_2)$.

При цьому $\chi_{R_f} = x_2^d f(x_1/x_2)$, де $d = \deg f$, а $\chi_{R_{\infty,d}} = x_2^d$.

Група $\mathfrak{g}$ природно діє на кільці $\Bbbk[x_1,x_2]$: $Q\circ f = f(q_{11}x_1 + q_{12}x_2, q_{21}x_1 + q_{22}x_2)$, де $Q = (q_{ij})$, і

$$\begin{aligned}\chi_{R\circ Q} &= \det\big((q_{11}R_1 + q_{21}R_2)x + (q_{12}R_1 + q_{22}R_2)\big) = \\ &= \det\big((q_{11}x + q_{12})R_1 + (q_{21}x + q_{22})R_2\big) = Q\circ\chi_R.\end{aligned}$$

Ми кажемо, що незвідний однорідний многочлен $g \in \Bbbk[x_1,x_2]$ є унітальним, якщо або $g = x_2$, або його старший коефіцієнт по відношенню до x_1 рівний 1. Множина $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Bbbk)$ унітальних однорідних незвідних многочленів з $\Bbbk[x_1,x_2]$ ототожнюється з множиною замкнених точок проективної прямої $\mathbb{P}^1_{\Bbbk} = \operatorname{Proj}\Bbbk[x_1,x_2]$ [36]. Додамо додатковий елемент ε, який відповідає зображенням $R_{-,d}$ і покладемо $\tilde{\mathbb{P}} = \tilde{\mathbb{P}}(\Bbbk) = \mathbb{P} \cup \{\varepsilon\}$. Для $g \in \mathbb{P}$ і $Q \in \mathfrak{g}$, нехай $Q * g$ буде єдиний многочлен $g' \in \mathbb{P}$ такий, що $Q \circ g = \lambda g'$ для деякого ненульового $\lambda \in \Bbbk$. (Це — природна дія $\mathfrak{g}$ на $\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$.) Ми також покладемо $Q * \varepsilon = \varepsilon$ для будь-якого Q. Це визначає дію $\mathfrak{g}$ на $\tilde{\mathbb{P}}$.

Позначимо через $\tilde{\mathfrak{F}} = \tilde{\mathfrak{F}}(\Bbbk)$ набір всіх функцій $\rho : \tilde{\mathbb{P}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ таких, що $\rho(g,d) = 0$ для майже всіх пар (g,d). Визначимо дію групи $\mathfrak{g}$ на $\tilde{\mathfrak{F}}$ поклавши $(\rho * Q)(g,d) = \rho(Q * g, d)$. Для будь-якої пари $(g,d) \in \tilde{\mathbb{P}} \times \mathbb{N}$ ми визначимо пару кососиметричних форм $R(g,d)$

$$R(g,d) = \begin{cases} R^+_{-,d} & \text{якщо } g = \varepsilon, \\ R^+_{\infty,d} & \text{якщо } g = x_2, \\ R^+_{g(x,1)^d} & \text{інакше.} \end{cases}$$

Нехай $\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{A}}(\Bbbk) = \{R(g,d) \,|\, (g,d) \in \tilde{\mathbb{P}} \times \mathbb{N}\}$. Для кожної функції $\rho \in \tilde{\mathfrak{F}}$ ми покладемо $\tilde{\mathfrak{A}}^\rho = \bigoplus_{(g,d) \in \tilde{\mathbb{P}} \times \mathbb{N}} R(g,d)^{\rho(g,d)}$. З цих міркувань випливає наступна теорема.

Теорема 2.10. *Нехай* $\Bbbk$ *поле і* $\operatorname{char} \Bbbk \neq 2$.

1. *Кожна пара кососиметричних форм над полем* $\Bbbk$ *узагальнено конгруентна до* $\tilde{\mathfrak{A}}^\rho$ *для деякої функції* $\rho \in \tilde{\mathfrak{F}}(\Bbbk)$.
2. *Пари* $\tilde{\mathfrak{A}}^\rho$ *і* $\tilde{\mathfrak{A}}^{\rho'}$ *узагальнено конгруентні тоді і тільки тоді, коли функції* ρ *і* ρ' *належать одній і тій самій орбіті групи* $\mathfrak{g}$.

З Теореми 2.10 і Наслідку 2.3 ми одразу отримуємо класифікацію нільпотентних p-груп Чернікова з елементарними верхівками і основою $M^{(2)}$. А саме, для кожної функції $\rho \in \tilde{\mathfrak{F}}(\mathbb{F}_p)$ покладемо $G(\rho) = G(\tilde{\mathfrak{A}}^\rho)$.

Теорема 2.11. *Нехай* $\mathfrak{R}$ *набір представників орбіт групи* $\mathfrak{g} = \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$, *що діють на множині функцій* $\tilde{\mathfrak{F}}(\mathbb{F}_p)$. *Тоді кожна нільпотентна* p*-група Чернікова з елементарною верхівкою і основою* $M^{(2)}$ *ізоморфна групі* $G(\rho)$ *для однозначно визначеної функції* $\rho \in \mathfrak{R}$.

Користуючись формулами (2.1), ми можемо явно описати ці групи за допомогою твірних і співвідношень. Всі з них мають вигляд $G(\mathbf{A})$, де $\mathbf{A} = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathbf{A}_k$ і всі $\mathbf{A}_k$ належать набору $\{R^+_{-,d}, R^+_{\infty,d}, R^+_f\}$. Тому $G(\mathbf{A})$ породжується підгрупою $M^{(2)}$ і елементами $\bar{h}_{ki}$, де $1 \le k \le s$, $1 \le i \le d_k$, $d_k = 2\deg f$, якщо $\mathbf{A}_k = R^+_f$, $d_k = 2d$, якщо $\mathbf{A}_k = R^+_{\infty,d}$ і $d_k = 2d-1$, якщо $\mathbf{A} = R^+_{-,d}$. Всі елементи $\bar{h}_{ki}$ — порядку p, комутують з елементами із $M^{(2)}$, $[\bar{h}_{ki}, \bar{h}_{lj}] = 0$ якщо $k \ne l$, а значення комутаторів $[\bar{h}_{ki}, \bar{h}_{kj}]$ для $i < j$ задані в таблиці, що наведена далі. В цій таблиці a_1 і a_2 — деякі фіксовані твірні підгрупи $M_p^{(2)}$.

тип $\mathbf{A}_k$	i, j	$[\bar{h}_{ki}, \bar{h}_{kj}]$
$R^+_{-,d}$	$j = d + i$	a_1
	$j = d + i - 1$	a_2
	в іншому випадку	0
$R^+_{\infty,d}$	$j = d + i$	a_2,
	$j = d + i - 1$	a_1,
	в іншому випадку	0
R^+_f	$j = d + i < 2d$	a_1
	$j = d + i - 1$	a_2
	$i < d,\ j = 2d$	$-\lambda_{d-i+1} a_2$
	$i = d,\ j = 2d$	$a_1 - \lambda_1 a_2$
	в іншому випадку	0

де $f(x) = x^d + \lambda_1 x^{d-1} + \cdots + \lambda_d$.

З цього опису безпосередньо випливає, зокрема, критерій розкладності групи $G(\mathbf{A})$.

Наслідок 2.12. *Нехай* $G = G(\mathbf{A})$.

1. G *має скінченний прямий фактор тоді і тільки тоді, коли* $\mathbf{A} \simeq (R_{-,1})^k \oplus \mathbf{A}'$; *тоді* $G \simeq H_k \times G(\mathbf{A}')$.

2. *Припустимо, що* G *не має скінченних прямих факторів. Тоді* G

розкладна тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{A} \simeq (R_x^+)^k \oplus (R_{\infty,1}^+)^l$. *Тоді* $G \simeq G_k \times G_l$, *де групи* G_k *були означені у твердженні 2.6..*

Доведення очевидне. □

2.3. Випадок p = 2

2.3.1. Основні поняття Ми вже бачили, що при $n > 2$ класифікація наборів з n кососиметричних матриць, а тому й класифі кація p-груп Чернікова з елементарною верхівкою й основою рангу $n > 2$ є *дикою задачею* в розумінні теорії̈ї зображень. Ми розглянемо випадок $n = 2$, користуючись результатами роботи [47] про пари симетричних (зокрема, кососиметрчних) білінійних форм над полем характеристики 2. Зауважимо, що при $\operatorname{char} \Bbbk = 2$ кососиметрична форма B є симетричними, з додатковою умовою $B(v, v) = 0$.

2.3.2. Кососиметричні пари Нехай $\Bbbk$ – поле характеристики 2. Розглянемо пари (A, B) кососиметричних білінійних форм у скінченновимірному векторному просторі V над $\Bbbk$ або, що те саме, пари кососиметричних матриць над $\Bbbk$. Назвемо їх *кососиметричними парами.* Нехай $\mathbf{R} = \Bbbk[t]$ — кільце многочленів, $\mathbf{E} = \Bbbk(t)/\Bbbk[t]$ і $res = res_\infty : \mathbf{E} \to \Bbbk$ — лишок на нескінченності. Нагадаємо, що $\operatorname{res}_\infty f(t) = -\operatorname{co}_1(z^-2f(1/z))$, де $\operatorname{co}_1(g(t))$ — коефіціент при $1/z$ у розкладі функції $g(t)$ у ряд Лорана. Зокрема, $res_\infty f(t) = 0$, якщо $f(t)$ — многочлен.

Нагадаємо, що Нехай M скінченновимірний (над $\Bbbk$) $\mathbf{R}$-модуль і $F : M \times M \to \mathbf{E}$ $\mathbf{R}$-білінійне відображення. Ми назвемо F *строго кососиметричним*, якщо $F(u, u) = F(tu, u) = 0$ для всіх $u \in M$. Тоді $F(u, v) = F(v, u)$ і $F(tu, v) = F(tv, u)$. Задаючи строго кососиметричне відображення F ми покладемо $A_F(u, v) = resF(u, v)$ і $B_F(u, v) = resF(tu, v)$, де res — лишок на нескінченності. Очевидно, що (A_F, B_F) пара кососиметричних форм на просторі M. Ми використовуємо наступні факти з [47].

Факт 1. Зображення $F \mapsto (A_F, B_F)$ індукує взаємнооднозначну відповідність між класами ізоморфізмів невироджених строго кососиметричних відображень і класами ізоморфізмів пар кососиметричних форм (A, B) таких, що A невироджена.

Факт 2. Класи ізоморфізмів нерозкладних невироджених строго кососиметричних відображень $F : M \times M \to E$ знаходяться у взаємнооднозначній відповідності зі степенями $f^n(t)$ незвідних многочленів $f(t) \in \Bbbk[t]$. А саме, $f^n(t)$ відповідає строгому кососиметричному відображенню $F_{f,n} : M_{f,n} \to E$, де $M_{f,n} = (\mathbf{R}/f^n\mathbf{R})^2$ задається твірними й співвідношеннями, як $\langle u, v \mid f^n u = f^n v = 0 \rangle$, а $F_{f,n}$ визначається формулами

$$F_{f,n}(u, v) = F_{f,n}(v, u) = 1/f^n \pmod{\Bbbk[t]},$$
$$F_{f,n}(u, u) = F_{f,n}(v, v) = 0.$$

Через $(A_{f,n}, B_{f,n})$ ми позначимо кососиметричну пару, що відповідає відображенню $F_{f,n}$. Зі сказаного вище випливає, що пари $(A_{f,n}, B_{f,n})$ — це всі нерозкладні пари з невиродженою формою A.

Розглянемо також матриці розміру $n \times (n-1)$

$$I_{n,a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_{n,b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

і кососиметричні пари

$$(A_{\infty,n}, B_{\infty,n}) \ \text{ та } \ (A_{-,n}, B_{-,n}),$$

де

$$A_{\infty,n} = \begin{pmatrix} 0 & J_n \\ J_n^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{\infty,n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{-,n} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n,a} \\ I_{n,a}^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{-,n} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n,b} \\ I_{n,b}^\top & 0 \end{pmatrix},$$

де I_n — одинична $n \times n$ матриця, а J_n — $n \times n$ нільпотентний блок Жордана.

Факт3. Кожна нерозкладна кососиметрична пара (A, B) з виродженою формою A ізоморфна одній з пар $(A_{\infty,n}, B_{\infty,n}), (A_{-,n}, B_{-,n})$.

Факт 4. Кожна кососиметрична пара розкладається в пряму суму нерозкладних пар. Цей розклад є однозначним з точністю до ізоморфізму та перестановки доданків.

Лема 2.13. *У модулі $M_{f,n}$ є такий $\Bbbk$-базис, що форми $A_{f,n}$ і $B_{f,n}$ задаються матрицями*

$$A_{f,n} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B_{f,n} = \begin{pmatrix} 0 & F \\ F^T & 0 \end{pmatrix},$$

де F матриця Фробеніуса з характеристичним многочленом $f^n(t)$.

Зауважимо, що $(A_{\infty,n}, B_{\infty,n}) = (B_{t,n}, A_{t,n})$.

Доведення. Ми включаємо $\Bbbk[t]$ у кільце $\Bbbk[[t]]$ формальних степеневих рядів і в поле $\Bbbk((t))$ рядів Лорана. Якщо $\deg g = d$ і $g(0) \neq 0$, ми покладемо $g^*(t) = t^d g(1/t)$ і виберемо многочлен $\tilde{g}(t)$ степеня d такий, що $g^*(t)\tilde{g}(t) \equiv 1 \pmod{t^{d+1}}$. Він існує і єдиний, оскільки елемент $g^*(t)$ оборотний у кільці $\Bbbk[[t]]$.

Нехай $f(t) \neq t$, $g(t) = f^n(t)$, $d = \deg g(t)$ і $g(t) = t^d + \alpha_1 t^{d-1} + \ldots + \alpha_d$. Тоді $g^*(t) = 1 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_d t^d$ і $\tilde{g}(t) = 1 + \beta_1 t + \ldots + \beta_d t^d$, де, для всіх $m \leq d$,

$$\alpha_m + \alpha_{m-1}\beta_1 + \alpha_{m-2}\beta_2 + \ldots + \alpha_1\beta_{m-1} + \beta_m = 0. \tag{2.7}$$

Ми покладемо $\alpha_0 = \beta_0 = 1$. Розглянемо базис $\{\, u_k, v_k \mid 0 \leq k < d \,\}$ простору $M_{f,n}$, де $v_k = t^k v, u_k = t^{d-k-1}u$. Тоді $F_{f,n}(u_k, u_l) = F_{f,n}(v_k, v_l) = 0$ для всіх k, l, а $F_{f,n}(u_l, v_k) = h_{k,l} = t^{d+k-l+1}/g(t) \pmod{\Bbbk[[t]]}$. Тоді

$$A_{f,n}(v_k, u_k) = \mathrm{co}_1\, t^{-2} h_{k,l}(1/t) = \mathrm{co}_1\, \frac{t^{l-k-1}}{t^d g(1/t)} =$$

$$= \mathrm{co}_1\, t^{l-k-1}\tilde{g}(t) = \begin{cases} \beta_{k-l}, & \text{якщо } k \geq l, \\ 0, & \text{якщо } k < l; \end{cases}$$

$$B_{f,n}(v_k, u_k) = \mathrm{co}_1\, t^{-3} h_{k,l}(1/t) = \mathrm{co}_1\, \frac{t^{l-k-2}}{t^d g(1/t)} =$$

$$= \mathrm{co}_1\, t^{l-k}\tilde{g}(t) = \begin{cases} \beta_{k-l+1}, & \text{якщо } k \geq l-1, \\ 0, & \text{якщо } k < l-1. \end{cases}$$

Отже матриці $A_{f,n}$ і $B_{f,n}$ у цьому базисі мають вигляд

$$A_{f,n} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^\top & 0 \end{pmatrix} \quad \text{а} \quad B_{f,n} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{d-1} \\ 0 & 1 & \beta_1 & \dots & \beta_{d-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \beta_{d-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_{d-1} & \beta_d \\ 1 & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_{d-2} & \beta_{d-1} \\ 0 & 1 & \beta_1 & \dots & \beta_{d-3} & \beta_{d-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \beta_1 \end{pmatrix}.$$

Співвідношення (2.7) показують, що

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{d-1} \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{d-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \alpha_{d-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

і $A^{-1}B = \Phi$, Фробеніусова матриця з характеристичним многочленом $g(t) = f^n(t)$. Таки чином, домноживши матриці білінійних форм $A_{f,n}$ і $B_{f,n}$ з (2.8) на матрицю

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

зліва та на транспоновану до неї справа, ми завершуємо доведення леми в цьому випадку.

Якщо $f(t) = t$, ми отримуємо необхідну форму матриць безпосередньо в базисі $\{u_k, v_k\}$. $\square$

З зазначених фактів та леми 2.13 випливає наступний результат.

Теорема 2.14. *Кожна нерозкладна кососиметрична пара ізоморфна одній із пар*

$$\boldsymbol{A}_{f,n} = (A_{f,n}, B_{f,n}),\ \boldsymbol{A}_{\infty,n} = (A_{\infty,n}, B_{\infty,n}),\ \boldsymbol{A}_{+,n} = (A_{+,n}, B_{+,n}).$$

Кожна кососиметрична пара розкладається однозначно (з точністю до перестановкик доданків) в ортогональну суму нерозкладних строго кососиметричних пар з цього списку.

2.3.3. Слабка еквівалентність і 2-групи Чернікова Маючи теорему 2.14, ми можемо завершити опис 2-груп Чернікова з елементарною верхівкою й базою рангу 2 аналогічно тому, як це було зроблено у попередньому пункті для випадку непарного p. Оскільки доведення цілком аналогічні, ми їх опускаємо, крім тих деталей, які специфічні для $p = 2$.

Позначимо через $\mathfrak{A}$ множину всіх пар

$$\mathfrak{A} = \{(A_{f,n}, B_{f,n}), (A_{\infty,n}, B_{\infty,n}), (A_{-,n}, B_{-,n})\},$$

а через $\mathfrak{F}$ множину таких функцій $\kappa : \mathfrak{A} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, що $\kappa(\mathbf{A}) = 0$ для майже всіх $\mathbf{A}$. Для будь-якої функції $\kappa \in \mathfrak{F}$ ми покладемо $\mathfrak{A}^\kappa = \bigoplus_{\mathbf{A}\in\mathfrak{A}} \mathbf{A}^{\mathfrak{A}(\mathbf{A})}$.

Для кожної пари $\mathbf{A} \in \mathfrak{A}$ ми позначимо через $\mathbf{A} * Q$ єдину пару із $\mathfrak{A}$, яка конгруентна до $\mathbf{A} \circ Q$. Відображення $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A} * Q$ визначає дію групи $\mathfrak{g} = GL(2, \Bbbk)$ на множині $\mathfrak{A}$, отже і на набір $\mathbf{F}$ функцій $\kappa : \mathfrak{A} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $(Q * \kappa)(\mathbf{A}) = \kappa(\mathbf{A} * Q)$.

Наслідок 2.15. *Пари $\mathfrak{A}^\kappa$ і $\mathfrak{A}^{\kappa'}$ слабо еквівалентні тоді і тільки тоді, коли функції κ і κ' належать одній і тій самій орбіті групи $\mathfrak{g}$.*

$(A_{-,n}, B_{-,n})$ єдина нерозкладна пара розмірності $2n-1$. Для будь-якої пари (A, B) многочлен $\det(xA + yB)$ є квадратом: $\det(xA+yB) = \Delta_{A,B}(x,y)^2$ для деякого $\Delta_{A,B}$ ($\Delta_{A,B}$ — це так званий *пфаффіан* матриці $xA + yB$ [14]). Якщо $(A', B') = (A, B) \circ Q$, де $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$, то $\Delta_{(A',B')}(x,y) = \Delta_{(A,B)}(q_{11}x + q_{12}y, q_{21}x + q_{22}y)$. Отже, міркування, пов'язані з дією групи $\mathfrak{g}$ на многочленах, теж залишаються вірними.

Ми кажемо, що незвідний однорідний многочлен $g \in \Bbbk[x_1, x_2]$ називається *унітальним*, якщо, або $g = x_2$, або його старший коефіцієнт при x_1 дорівнює 1. Нехай $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Bbbk)$ — множина унітальних однорідних незвідних многочленів із $\Bbbk[x_1, x_2]$ і $\tilde{\mathbb{P}} = \tilde{\mathbb{P}}(\Bbbk) = \mathbb{P} \cup \{\varepsilon\}$. Нагадаємо, що $\mathbb{P}$ фактично співпадає з множиною замкнених точок прективної прямої $\mathbb{P}^1_{\Bbbk} = \operatorname{Proj} \Bbbk[x_1, x_2]$ [36]. Для $g \in \mathbb{P}$ і $Q \in \mathfrak{g}$, нехай $Q * g$ існує єдиний такий многочлен $g' \in \mathbb{P}$, що $Q \circ g = \lambda g'$ для деякого ненульового $\lambda \in \Bbbk$. (Це природна дія $\mathfrak{g}$ на $\mathbb{P}^1_{\Bbbk}$.) Також покладемо $Q * \varepsilon = \varepsilon$ для будь-якого Q. Це визначає дію $\mathfrak{g}$ на $\tilde{\mathbb{P}}$. Позначимо через $\tilde{\mathfrak{F}} = \tilde{\mathfrak{F}}(\Bbbk)$ множину всіх таких функцій $\rho : \tilde{\mathbb{P}} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, що $\rho(g, n) = 0$ для майже всіх пар (g, n). Визначимо дію групи $\mathfrak{g}$ на $\tilde{\mathfrak{F}}$ поклавши $(\rho * Q)(g, n) = \rho(Q * g, n)$. Для кожної пари $(g, n) \in \tilde{\mathfrak{F}}$ ми визначимо пару кососиметричних форм $\boldsymbol{A}(g, n)$:

$$\boldsymbol{A}(g,n) = \begin{cases} (A_{\infty,n}, B_{\infty,n}), & \text{якщо } g = x_2, \\ (A_{-,n}, B_{-,n}), & \text{якщо } g = \varepsilon, \\ (A_{f,n}, B_{f,n}), & \text{де } f = g(x,1) \text{ інакше.} \end{cases}$$

Нехай $\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{A}}(\Bbbk) = \{\boldsymbol{A}(g,n) \mid (g,n) \in \tilde{\mathbb{P}} \times \mathbb{N}\}$. Для будь-якої функції $\rho \in \tilde{\mathfrak{F}}$ покладемо $\tilde{\mathfrak{A}}^{\rho} = \bigoplus_{(g,n) \in \tilde{\mathbb{P}} \times \mathbb{N}} \boldsymbol{A}(g,n)^{\rho(g,n)}$. Із попередніх міркувань випливає наступна теорема.

Теорема 2.16. *1. Кожна пара кососиметричних білінійних форм над полем $\Bbbk$ слабо еквівалентна $\tilde{\mathfrak{A}}^{\rho}$ для деякої функції $\rho \in \tilde{\mathfrak{F}}(\Bbbk)$.*

2. Пари $\tilde{\mathfrak{A}}^\rho$ і $\tilde{\mathfrak{A}}^{\rho'}$ слабо еквівалентні тоді і тільки тоді, коли функції ρ і ρ' належать одній і тій самій орбіті групи $\mathfrak{g} = GL(2, \Bbbk)$.

Для будь-якої функції $\rho \in \tilde{\mathfrak{F}}(\mathbb{F}_2)$ покладемо $G(\rho) = G(\tilde{\mathfrak{A}}^\rho)$.

Теорема 2.17. *Нехай $\mathfrak{R}$ набір представників орбіт групи $\mathfrak{g} = GL(2, \mathbb{F}_2)$, що діють на множині функцій $\tilde{\mathfrak{F}}(\mathbb{F}_2)$. Тоді кожна нільпотентна 2-група Чернікова із елементарною верхівкою та базою $M^{(2)}$ ізоморфна групі $G(\rho)$ для однозначно визначеної функції $\rho \in \mathfrak{R}$.*

Знов-таки, ці групи можна описати через твірні та співвідношення. Якщо $\boldsymbol{A} = \bigoplus_{k=1}^{s} \boldsymbol{A}_k$ і всі $\boldsymbol{A}_k$ належать множині $\mathfrak{A}$, то група $G(\boldsymbol{A})$ породжена своєю підгрупою $M^{(2)}$ та елементами $\bar{h}_{ki}$, де $1 \le k \le s$, $1 \le i \le d_k$, $d_k = 2 \deg f$, якщо $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{f,n}$, $d_k = 2d$, якщо $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{\infty,n}$ і $d_k = 2d - 1$, якщо $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{-,n}$. Всі елементи $\bar{h}_{ki}$ — порядку p, комутують з елементами із $M^{(2)}$, $[\bar{h}_{ki}, \bar{h}_{lj}] = 0$ якщо $k \neq l$, а значення комутаторів $[\bar{h}_{ki}, \bar{h}_{kj}]$ для $i < j$ задані в таблиці, що наведена далі. В цій таблиці a_1 і a_2 — деякі фіксовані твірні підгрупи $M_2^{(2)}$.

$\boldsymbol{A}_k$	i, j	$[\bar{h}_{ki}, \bar{h}_{kj}]$
$(A_{-,n}, B_{-,n})$	$j = d + i$	a_1
	$j = d + i - 1$	a_2
	інакше	0
$(A_{\infty,n}, B_{\infty,n})$	$j = d + i$	a_2,
	$j = d + i - 1$	a_1,
	інакше	0
$(A_{f,n}, B_{f,n})$	$j = d + i < 2d$	a_1
	$j = d + i - 1$	a_2
	$i < d$, $j = 2d$	$-\lambda_{d-i+1} a_2$
	$i = d$, $j = 2d$	$a_1 - \lambda_1 a_2$
	інакше	0

де $f^n(x) = x^d + \lambda_1 x^{d-1} + \cdots + \lambda_d$.

Висновки до розділу 2.

У цьому розділі дано повну класифікацію p-груп Чернікова з основою рангу 2 і едлементарною абелевою верхівкою. Для цих груп також обчислено їх задання твірними та співвідношеннями.

Розділ 3

СЛАБКА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ЗОБРАЖЕНЬ ГРУПИ КЛЯЙНА

У цьому розділі ми розглянемо цілі 2-адичні зображення четвірної групи Кляйна $G = \langle\, a, b \mid a^2 = b^2 = 1,\ ab = ba \,\rangle$. Зображення цієї групи вперше описала Л. Назарова [16]. Але дана нею класифікація жорстко прив'язана до вибору твірних і, як наслідок, погано пристосована до вирішення того, які з цих зображень є слабо еквівалентними в розумінні підрозділу 1.2. Оскільки, як показує Теорема 1.5, це питання є важливим для вивчення черніківських груп, ми дамо на нього відповідь, користуючись іншим підходом до класифікації таких зображень. Саме, ми скористаємося зв'язком з зображенням сагайдака, яке випливає з техніки, описаної у підрозділі 1.4.

3.1. Зв'язок із сагайдаком

Розглядемо групове кільце $\mathbb{Z}_2G$ четвірної групи Кляйна G над кільцем $\mathbb{Z}_2$ цілих 2-адичних чисел. Воно є $\mathbb{Z}_2$-порядком у алгебрі $\mathbb{Q}_2G \simeq \mathbb{Q}_2^4$, де $\mathbb{Q}_2$ — поле p-адичних чисел. Відомо [29, §37], що групове кільце завжди є *горенштейновим*, тобто має ін'єктивну розмірність 1 (як модуль над собою). Крім того, p-адичне групове кільце p-групи є локальним. Тому воно має єдине мінімальне надкільце $\boldsymbol{A}$ і кожна нерозкладна G-решітка M, окрім $\mathbb{Z}_2G$, є насправді $\boldsymbol{A}$-решіткою [26]. Саме, $\boldsymbol{A}$ — це *кільце множ-*

ників радикалу, тобто $\boldsymbol{A} = \{q \in \mathbb{Q}_2 G \mid q \operatorname{Rad}(\mathbb{Z}_2 G) \subseteq \operatorname{Rad}(\mathbb{Z}_2 G)\}$.

В нашому випадку $\operatorname{Rad}(\mathbb{Z}_2 G) = \langle\, x, y \,\rangle$, де $x = a - 1$, $y = b - 1$. Покладемо $z = (1 + a + b + ab)/2$. $z \notin \mathbb{Z}_2 G$, але $z\langle\, x, y \,\rangle \subseteq \langle\, x, y \,\rangle$. Тому $\boldsymbol{A} = \mathbb{Z}_2 G + \mathbb{Z}_2 z$. Більш того, $z \in \operatorname{Rad} \boldsymbol{A}$, звідки $\operatorname{Rad} \boldsymbol{A} = \langle\, x, y, z \,\rangle$.

Твердження 3.1. *$\boldsymbol{A}$ є порядком Бакстрема. Саме,* $\operatorname{Rad} \boldsymbol{A} = \operatorname{Rad} \boldsymbol{R}$, *де $\boldsymbol{R}$ — максимальне надкільце $\boldsymbol{A}$, тобто порядок, породжений* 4 *базовими ідемпотентами алгебри $\mathbb{Q}_2 G$:*

$$
\begin{aligned}
e_{++} &= \frac{1 + a + b + ab}{4}, \\
e_{+-} &= \frac{1 + a - b - ab}{4}, \\
e_{-+} &= \frac{1 - a + b - ab}{4}, \\
e_{--} &= \frac{1 - a - b + ab}{4}.
\end{aligned}
$$

Доведення. Позначимо $J = \operatorname{Rad} \boldsymbol{A}$, $\mathbf{I} = \{++, +-, -+, --\}$. Легко бачити, що $e_i J \subseteq J$ для всіх $i \in \mathbf{I}$, отже $\boldsymbol{R}$ — кільце множників J. З іншого боку, $J = 2\boldsymbol{R}$, тому $J \subseteq \operatorname{Rad} \boldsymbol{R}$, а $\boldsymbol{R}/J \simeq \mathbb{F}_2^4$ — напівпроста алгебра, тому $\operatorname{Rad} \boldsymbol{R} \subseteq J$. □

Отже, до порядку $\boldsymbol{A}$ застосована техніка з підрозділу 1.4.

Покладемо $\boldsymbol{R}_i = e_i \boldsymbol{R}$, де $i \in \mathbf{I}$. Це — всі попарно неізоморфні нерозкладні проективні $\boldsymbol{R}$-модулі. Відповідно, $S_i = \boldsymbol{R}_i / J\boldsymbol{R}_i$ — всі прості $\boldsymbol{R}/J$-модулі, причому, якщо $\bar{e}_i$ — клас ідемпотента e_i, то $\bar{e}_i$ $(i \in \mathbf{I})$ складають базу алгебри $\boldsymbol{R}/J$, яка ізоморфна $\mathbb{F}_2^4$. Оскільки, $\boldsymbol{A}/J \simeq \Bbbk$, а $S_i \simeq \Bbbk$ як

$\boldsymbol{A}$-модуль, сагайдак $Q = Q(\boldsymbol{R})$ — це сагайдак типу $\tilde{D}_4$,

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & V_{++} \\
 & & V_{+-} \\
Q: & V \arrow[uur, "\alpha_{++}"] \arrow[ur, "\alpha_{+-}"'] \arrow[dr, "\alpha_{-+}"] \arrow[ddr, "\alpha_{--}"'] & \\
 & & V_{-+} \\
 & & V_{--}
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Зображення V цього сагайдака не має тривіальних доданків тоді і тільки тоді, коли всі відображення α_i $(i \in \mathbf{I})$ сюр'єктивні, а індуковане відображення $\iota(V) : V(0) \to \oplus_{i \in \mathbf{I}} V(i)$ ін'єктивне. Зокрема, $\boldsymbol{A}$-решітці M відповідає зображенню $V = V(M)$ з $V(0) = M/JM$, $V(i) = e_i(\boldsymbol{R}M/JM)$ $(i \in \mathbf{I})$, а $V(\alpha_i)$ індуковані природною проекцією $V(0) \subseteq \boldsymbol{R}M/JM$ на компоненти $V(i)$. Навпаки, якщо задане зображення V сагайдака Q, причому $\dim V(i) = d_i$, покладемо $N = \oplus_{i \in \mathbf{I}} d_i \boldsymbol{R}_i$, ототожнимо N/JN з $\oplus i \in \mathbf{I} V(i)$ і визначимо $\boldsymbol{A}$-решітку $M = M(V)$, як прообраз у N образу гомоморфізму $\iota(V)$. З теореми 1.9 випливає

Наслідок 3.2. *Відображення $M \mapsto V(M)$ та $V \mapsto M(V)$ встановлюють взаємно однозначну відповідність між класами ізоморфізму $\boldsymbol{R}$-модулів без вільних доданків та та зображень сагайдака Q без тривіальних доданків.*

Розмірність зображення V — це вектор $(d_0, d_{++}, d_{+-}, d_{-+}, d_{--})$, де $d_i = \dim V(i)$ $(i \in \mathbf{I} \cup \{0\})$. Ми будемо записувати її у вигляді $\boxed{\begin{smallmatrix} & d_{++} \\ & d_{+-} \\ d_0 & \\ & d_{-+} \\ & d_{--} \end{smallmatrix}}$.

3.2. Опис зображень

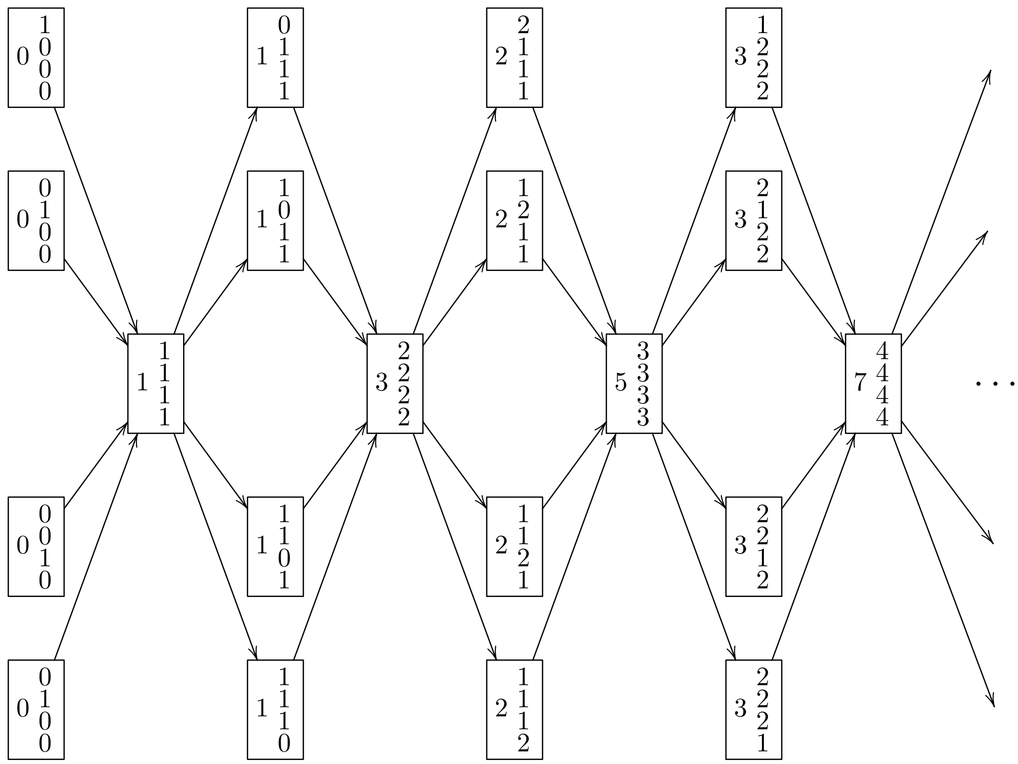
Нагадаємо (дивись підрозділ 1.3), що нерозкладні зображення сагайдака Q утворюють *сагайдак Ауслендер–Райтен* [42]. Його вершини позначають зображення, а стрілки позначають *незвідні відображення*, тобто, необоротні морфізми зображень, що не можуть бути представлені у вигляді суми композицій таких морфізмів. Структура таких зображень описана в [32] та [42, Sec. 3.6]. Вона містить три частини:

$$\boxed{\text{препроективна}} \dashrightarrow \boxed{\text{регулярна}} \dashrightarrow \boxed{\text{преін'єктивна}}$$

з морфізмами, що діють «зліва направо», що й позначено стрілками. Препроективна і преін'єктивна частини є окремими компонентами сагайдака Ауслендера–Райтен. В цих частинах нерозкладні зображення однозначно визначаться своїми розмірностями, які є додатними дійсними коренями форми Тітса

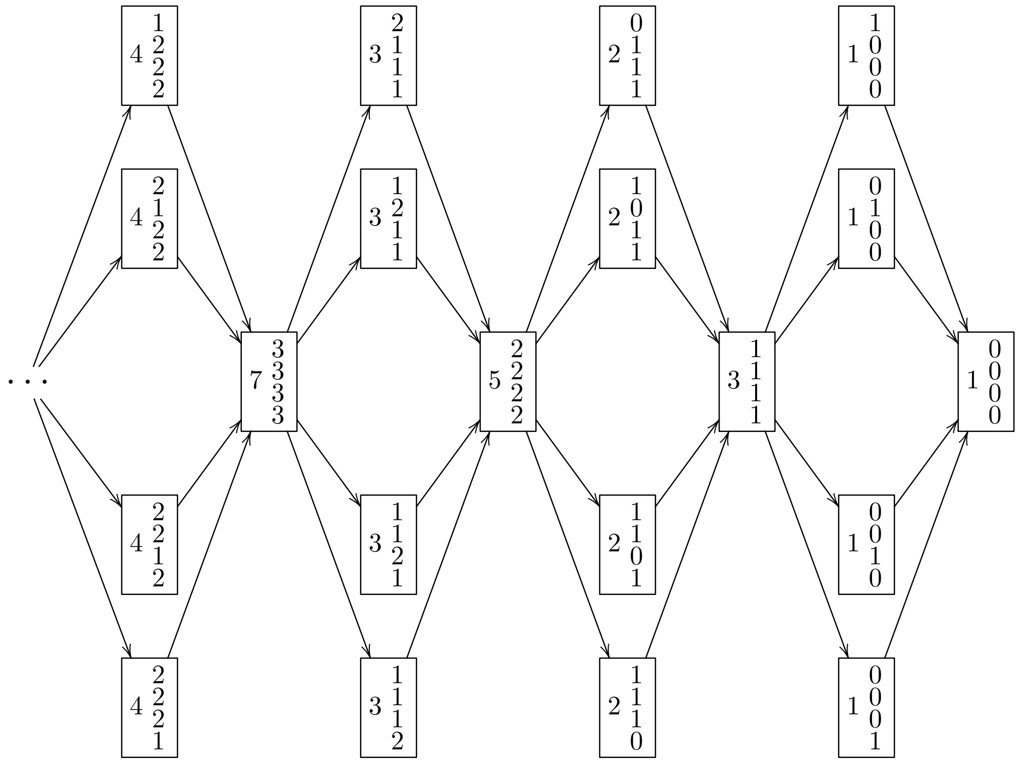
$$\Phi(x_0, x_{++}, x_{+-}, x_{-+}, x_{--}) = \sum_{i \in \mathbf{I} \cup \{0\}} x_i^2 - \sum_{i \in \mathbf{I}} x_0 x_i.$$

Зокрема, препроективна компонента має вигляд



Ми позначимо через A_n «центральні» члени цієї діаграми, тобто зображення розмірності $\boxed{\begin{smallmatrix} & n \\ 2n{-}1 & n \\ & n \\ & n \end{smallmatrix}}$, через $A^+_{n,i}$ $(i \in \mathbf{I})$ — зображення з $\dim V_0 = 2n,\ \dim V_i = n+1,\ \dim V_j = n$ при $j \in \mathbf{I} \setminus \{i\}$, а через $A^-_{n,i}$ — зображення з $\dim V_0 = 2n-1,\ \dim V_i = n-1,\ \dim V_j = n$ при $j \in \mathbf{I} \setminus \{i\}$. Ці зображення і складають препроективну компоненту.

Преін'єктивна компонента виглядає наступним чином



Ми знову позначимо через B_n «центральні» члени цієї діаграми, тобто зображення розмірності $\boxed{\begin{smallmatrix} & n \\ 2n{+}1 & n \\ & n \\ & n \end{smallmatrix}}$, через $B^+_{n,i}$ $(i \in \mathbf{I})$ — зображення з $\dim V_0 = 2n+1,\ \dim V_i = n+1,\ \dim V_j = n$ при $j \in \mathbf{I} \setminus \{i\}$, а через $B^-_{n,i}$ — зображення з $\dim V_0 = 2n,\ \dim V_i = n-1,\ \dim V_j = n$ при $j \in \mathbf{I} \setminus \{i\}$. Ці зображення складають преін'єктивну компоненту.

Регулярна частина складається з багатьох компонент, які є *трубами*. Більшість з цих труб *однорідні*, тобто виглядають, як сагайдак Ауслендера–Райтен категорії скінченновимірних модулів нал алгеброю степеневих рядів $\mathbb{K}[[t]]$, де $\mathbb{K} = \Bbbk[\lambda]$ — скінченне розширення поля $\Bbbk$, а λ — корінь незвідного многочлена $f(t)$ на полем $\Bbbk$, причому $f(t) \notin \{t, t-1\}$. Кожному такому многочлену відповідає одна однорідна труба. Розмірності зображень в ній дорівнюють $\boxed{\begin{smallmatrix} & nd \\ 2nd & nd \\ & nd \\ & nd \end{smallmatrix}}$, де $d = \deg f(t)$, а відповідне зображення T_f^n має вигляд

$$\begin{tikzcd}
& V \\
& V \\
V^2 \arrow[ruu, "{\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}}"] \arrow[ru, "{\begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}}"'] \arrow[rd, "{\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}}"] \arrow[rdd, "{\begin{pmatrix} I & F_{f^n} \end{pmatrix}}"'] & \\
& V \\
& V
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

де F_{f^n} — клітина Фробеніуса з характеристичним многочленом $f^n(t)$. Цю трубу ми позначимо T_f.

Крім того, є 3 особливі труби T_k ($2 \leq k \leq 4$) періоду 2. Труба T_2 має вигляд

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1\ \begin{smallmatrix}1\\1\\0\\0\end{smallmatrix}} \arrow[r] & \boxed{2\ \begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}} \arrow[r] \arrow[dl] & \boxed{3\ \begin{smallmatrix}2\\2\\1\\1\end{smallmatrix}} \arrow[r] \arrow[dl] & \boxed{4\ \begin{smallmatrix}2\\2\\2\\2\end{smallmatrix}} \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[dl] \\
\boxed{1\ \begin{smallmatrix}0\\0\\1\\1\end{smallmatrix}} \arrow[r] & \boxed{2\ \begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}} \arrow[r] \arrow[ul] & \boxed{3\ \begin{smallmatrix}1\\1\\2\\2\end{smallmatrix}} \arrow[r] \arrow[ul] & \boxed{4\ \begin{smallmatrix}2\\2\\2\\2\end{smallmatrix}} \arrow[r] \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul]
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

де зображення $T_{2,+}^n$ ($T_{2,-}^n$) розмірності $\boxed{2n\ \begin{smallmatrix}n\\n\\n\end{smallmatrix}}$ в першому та, відповідно, в другому рядку мають вигляд

$$
\begin{tikzcd}
& V \\
& V \\
V^2 \arrow[uur, "{\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}}"] \arrow[ur, "{\begin{pmatrix} I & J_n \end{pmatrix}}"'] \arrow[dr, "{\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}}"] \arrow[ddr, "{\begin{pmatrix} I & J_n \end{pmatrix}}"'] & \\
& V \\
& V
\end{tikzcd}
$$

та, відповідно,

$$
\begin{tikzcd}
& V \\
& V \\
V^2 \arrow[uur, "{\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}}"] \arrow[ur, "{\begin{pmatrix} I & J_n \end{pmatrix}}"'] \arrow[dr, "{\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}}"] \arrow[ddr, "{\begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}}"'] & \\
& V \\
& V
\end{tikzcd}
$$

де $V = \Bbbk^n$, а J_n — нільпотентна Жорданова $n \times n$ матриця. Позначимо також через $T_{2,+}^{n*}$ та $T_{2,-}^{n*}$ зображення, відповідно, з першого і другого рядка, в якому $\dim V_0 = 2n - 1$ (воно повністю визначається розмірністю). Труби T_3 і T_4 можна отримати з труби T_4, переставивши V_{+-} з, відповідно, V_{-+} або V_{--} і внісши відповідні зміни у відображення $V(\alpha)$.

3.3. Слабка еквівалентність

Група автоморфізмів G ототожнюється з групою перестановок S_3. Саме, елементи з G переставляють елемненти другого порядку групи G, тобто елементи a, b і $c = ab$. Тому, якщо розглядати її дію на G-решітки, то вона не рухає компоненту $++$ і переставляє компоненти $+-$, $-+$ і $--$. Так само вона діє й на зображення сагайдака $Q(\boldsymbol{A})$, переставляючи простори $V(i)$, де $i \in \{+-, -+, --\}$. Точніше, транспозиція $\tau_b : a \leftrightarrow b$ переставляє простори V_{+-} і V_{-+}, а транспозиція $\tau_c : a \leftrightarrow c$ переставляє простори V_{+-} і V_{--}. Якщо брати до уваги вигляд препроективної й преін'єктивної компонент, то, очевидно, під дією групи S_3 центральний рядок зберігається, а другий, третій і четвертий переставляються. Так само очевидно, що група S_3 переставляє особливі труби T_k ($k \in \{2, 3, 4\}$, переводячи перший рядок відповідної діаграми вигляду (3.3) у перший і другий — у другий.

Залишається обчислити дію групи автоморфізмів на однорідні труби T_f. Транспозиція τ_b переводить зображення (3.2) у зображення

$$\begin{tikzcd}
 & V \\
 & V \\
V^2 \arrow[uur, "{\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}}"] \arrow[ur, "{\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}}"'] \arrow[dr, "{\begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}}"] \arrow[ddr, "{\begin{pmatrix} I & F_{fn} \end{pmatrix}}"'] & \\
 & V \\
 & V
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Заміни базисів у просторах $V_i (i \in \mathbf{I} \cup \{0\}$ з матрицями, відповідно, C_i, перетворюють матрицю $V(\alpha_i)$ ($i \in \mathbf{I}$) у матрицю $C_0 V(i) C_i^{-1}$. Легко бачити, що такими перетвореннями зображення (3.4) зводиться до вигляду

$$\begin{tikzcd}
 & V, \\
 & V \\
V^2 \arrow[uur, "\begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}"] \arrow[ur, "\begin{pmatrix} 0 & I \end{pmatrix}"'] \arrow[dr, "\begin{pmatrix} I & I \end{pmatrix}"] \arrow[ddr, "\begin{pmatrix} I & F_b \end{pmatrix}"'] & \\
 & V \\
 & V
\end{tikzcd}$$

де $F_b = F_{f^n}(F_{f^n} - I)^{-1}$. Оскільки $F = F_b(F_b - I)^{-1}$, матриця F_b подібна клітині Фробеніуса з характеристичним многочленом f_b^n, де $f_b(t) = f(1)^{-1}(t-1)^d f(t/(t-1))$ при $d = \deg f(t)$.[1] Отже, τ_b переводить трубу T_f у трубу T_{f_b}.

Аналогічно перевіряється, що перестановка τ_c переводить трубу F_f у трубу F_{f_c}, де $f_c(t) = (-1)^d f(1-t)$.

Зауважимо, що перетворення $f \mapsto f_b$ і $f \mapsto f_c$ — це звичайна дія групи S_3 на многочлени за допомогою дробово-лінійних перетворень:

$$f(t) \mapsto \kappa^{-1}(\gamma t + \delta)^d f\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right),$$

де κ — старший коефіцієнт многочлена $(\gamma t + \delta)^d f\left(\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta}\right)$, тобто

$$\kappa = \begin{cases} \gamma^d f(\alpha/\gamma), & \text{якщо } \gamma \neq 0, \\ \alpha^d, & \text{якщо } \gamma = 0. \end{cases}$$

Саме, транспозиції τ_b відповідає дробово-лінійна функція $t/(t-1)$, а τ_c — функція $1 - t$.

Цим завершується класифікація нерозкладних зображень четвірної групи Кляйна з точністю до слабкої еквівалентності. Її можна підсумува-

[1] Множник $f(1)^{-d}$ потрібен, щоб старший коефіцієнт многочлена f_b був рівний 1.

ти аналогічно до того, як це було зроблено у попередньому розділі для пар кососиметричних майтриць. Позначимо через $\mathfrak{R}$ множину, яка складається з усіх зображень $A_n, A^{\pm}_{n,i}, B_n, B^{\pm}_{n,i}, T^n_f, T^n_{k,\pm}$ та $T^{n*}_{k,\pm}$ $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{2, 3, 4\}$, крім A^+0, i та B_0. Група S_3 діє на $\mathfrak{R}$, як описано вище.

Теорема 3.3. *Нехай* $\tilde{\mathfrak{R}}$ *— множина функцій зі скінченим носієм* $\mathfrak{R} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ *і група* S_3 *діє на* $\mathfrak{R}$ *за правилом* $g\varphi(x) = \varphi(g^{-1}x)$. *Класи слабкої еквівалентності* G*-решіток знаходяться у взаємно однозначній відповідності з орбітами групи* S_3 *на множині* $\tilde{\mathfrak{R}}$. *Саме, функції* φ *відповідає решітка* $M(V_\varphi)$, *де* $V_\varphi = \oplus_{R\in\mathfrak{R}}\varphi(R)R$, *причому* $M(V_\varphi) \simeq M(V_\psi)$ *тоді і тільки тоді, коли функції* φ *і* ψ *належать одній орбіті.*

Висновки до розділу 3.

У цьому розділі дано нову класифікацію цілих 2-адичних зображень четвірної групи Кляйна на основі теорії порядків Бакстрема та зображень сагайдаків. За її допомогою дано класифікацію таких зображень з точністю до слабкої еквівалентності, що є важливим для вивчення груп Чернікова.

Розділ 4

КОГОМОЛОГІЇ

Цей розділ присвячений обчисленню когомологій груп. Як вказано у підрозділі 1.2, обчислення когомологій є важливим для вивчення розширень груп, зокрема, для вивчення p-груп Чернікова. Для спрощення обчислень, ми визначаємо нову резольвеньту для тривіального модуля $\mathbb{Z}$ у випадку скінченниї абелевих груп. Наш підхід близький до підходу Такахаші, але здається більш явним і ефективним. Ми порівнюємо нашу резольвенту із стандартною (підрозділ 4.1.2). і доводимо деякі факти, що стосуються дуальності для когомологій G-решіток (підрозділ 4.1.3). Зокрема, це дає змогу обчислити когомології всіх незвідних решіток (досі це було зроблено лише для тривіального зображення). Ми також даємо явні формули для одно- і двовимірних когомологій. Для четвірної групи Кляйна ми обчислюємо когомології всіх неточних зображень та їх дуальних модулів (останні й з'являються у групах Чернікова).

4.1. Когомології скінченних абелевих груп

4.1.1. Резольвента. Стандартна резольвента є «універсальною», тобто застосовною для всіх груп. Проте вона є занадто складною для обчислень. Тому для випадку скіченної абелевої групи G ми визначимо нову, спрощену резольвенту.

Для періодичного елемента a групи G позначимо через $o(a)$ порядок

a, тобто найменше натуральне число, для якого $a^{o(a)} = 1$, і покладемо $s_a = \sum_{i=0}^{o(a)-1} a^i$. Нехай $G = \prod_{i=1}^{s} G_i$ — прямий добуток скінченних циклічних груп $G_i = \langle\, a_i \mid a_i^{o_i} = 1 \,\rangle$ порядків $o_i = o(a_i)$, $\boldsymbol{R} = \mathbb{Z}G$, $\mathbb{P} = \boldsymbol{R}[x_1, x_2, \dots, x_s]$ — кільце многочленів від s змінних над кільцем $\boldsymbol{R}$ і $\mathbb{P}_n$ — $\boldsymbol{R}$-модуль однорідних многочленів з $\mathbb{P}$ степеня n (включаючи 0). Ми визначаємо диференціал $d : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n-1}$ за правилом

$$d_n(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_s^{k_s}) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{K_i} C_i x_1^{k_1} \dots x_i^{k_i-1} \dots x_s^{k_s},$$

де $K_i = \sum_{j=1}^{i-1} k_j$, а

$$C_i = \begin{cases} a_i - 1, & \text{якщо } k_i \text{ — напарне,} \\ s_{a_i}, & \text{якщо } k_i > 0 \text{ і парне,} \\ 0, & \text{якщо } k_i = 0. \end{cases}$$

Говорячи про G-модуль $\mathbb{Z}$, ми завжди припускаємо, що елементи G діють тривіально.

Теорема 4.1. $\mathbb{P} = (\mathbb{P}_n, d_n)$ *— вільна резольвента G-модуля $\mathbb{Z}$.*

Доведення. За означенням, всі $\boldsymbol{R}$-модулі $\mathbb{P}_n$ є вільними. Треба перевірити точність комплексу $\mathbb{P}$. Якщо $s = 1$, це добре відомо. Якщо $\boldsymbol{R}_i = \mathbb{Z}G_i$ і $\mathbb{P}^i$ позначає таку резольвенту для групи G_i, то $\boldsymbol{R} = \bigotimes_{i=1}^{s} \boldsymbol{R}_i$, а $\mathbb{P}$ це тензорний добуток комплексів $\bigotimes_{i=1}^{s} \mathbb{P}^i$. Оскільки всі групи циклів та границь в комплексах $\mathbb{P}^i$ є вільними абелевими, а когомології цих комплексів тривиальні, точність $\mathbb{P}$ випливає із співвідношень Кюннета [28, Теорема VI.3.1]. □

4.1.2. Зв'язок зі стандартною резольвентою Щоб застосувати Теорему 4.1, наприклад, до розширень груп, ми повинні співставити її зі стандартною резольвентою, яка зазвичай і дає явні формули для коциклів [7, 28]. Отже, надалі $\mathbb{S}$ позначатиме нормалізовану стандартну резольвенту для $\mathbb{Z}$ як $\boldsymbol{R}$-модуля (дивись підрозділ 1.2). Нехай $\{\,[g_1, g_2, \dots, g_n] \mid g_i \in G \setminus \{1\}\,\}$ — звичайний базис $\mathbb{S}_n$ такий, що стандартний диференціал d^{s} визначається наступним чином

$$d^{\mathrm{s}}_n[g_1, g_2, \dots, g_n] = g_1[g_2, \dots, g_n] + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i[g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n] + \\ + (-1)^n[g_1, g_2, \dots, g_{n-1}],$$

(ми вважаємо, що $[g_1, g_2, \dots, g_n] = 0$, якщо деякий елемент $g_i = 1$). Зазначимо, що $\mathbb{P}_0 = \mathbb{S}_0 = \boldsymbol{R}$.

Ми позначимо $a^{\{i\}} = 1 + a + a^2 + \dots a^{i-1}$. Тоді $s_a = a^{\{o(a)\}}$,

$$a^{\{i+k\}} = a^{\{i\}} + a^i a^{\{k\}}, \tag{4.1}$$

зокрема,

$$a^{\{m+o(a)\}} = a^{\{m\}} + a^m s_a.$$

Теорема 4.2. *Існує квазі-ізоморфізм $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{P}$ такий, що*

$$\sigma_0 = \mathrm{id},$$

$$\sigma_1[a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_s^{k_s}] = \sum_{i=1}^{s} \Big(\prod_{j=1}^{i-1} a_j^{k_j}\Big) a_i^{\{k_i\}} x_i,$$

$$\sigma_2[a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_s^{k_s}, a_1^{l_1} a_2^{l_2} \dots a_s^{l_s}] = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{i} \left(\prod_{q=1}^{i-1} a_q^{k_q} \prod_{r=1}^{j-1} a_r^{l_r}\right) \sigma_2[a_i^{k_i}, a_j^{l_j}], \tag{4.2}$$

$$\text{де} \quad \sigma_2[a_i^k, a_j^l] = \begin{cases} [(k+l)/o_i] x_i^2, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i < j, \\ a_j^{\{l\}} a_i^{\{k\}} x_j x_i, & \text{якщо } i > j \end{cases}$$

Оскільки $\mathbb{S}$ та $\mathbb{P}$ — вільні резольвенти $\boldsymbol{R}$-модуля $\mathbb{Z}$, σ індукує ізоморфізми когомологій $H^n(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathbb{S}, M)) \to H^n(\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathbb{P}, M))$. Зокрема, поєднуючи σ_2 з коциклами із $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathbb{P}_2, M)$, ми отримаємо «звичайні» зображення коциклів з $H^2(G, M)$, які беруть участь у побудові відповідних розширень (дивись підрозділ 1.2).

Доведення. Насправді, нам потрібно показати, що діаграма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}_2 \arrow[r, "d_2^{\mathrm{s}}"] \arrow[d, "\sigma_2"'] & \mathbb{S}_1 \arrow[r, "d_1^{\mathrm{s}}"] \arrow[d, "\sigma_1"'] & \mathbb{S}_0 \arrow[d] \\ \mathbb{P}_2 \arrow[r, "d_2"] & \mathbb{P}_1 \arrow[r, "d_1"] & \mathbb{P}_0. \end{tikzcd}$$

комутативна. Тоді набір гомоморфізмів $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ розширюється до квазіізоморфізму $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{P}$. Це випливає, наприклад, з результатів підрозділу V.1 книги [28].

Зазначимо, що $gh-1 = (g-1)+g(h-1)$ і $a^k-1 = a^{\{k\}}(a-1)$. Внаслідок цього,

$$d_1^{\mathrm{s}}[a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_s^{k_s}] = a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_s^{k_s} - 1 = \sum_{i=1}^{s}\Big(\prod_{j=1}^{i-1} a_j^{k_j}\Big)(a_i^{k_i}-1) =$$
$$= \sum_{i=1}^{s}\Big(\prod_{j=1}^{i-1} a_j^{k_j}\Big)a_i^{\{k_i\}}(a_i-1) = \sum_{i=1}^{s}\Big(\prod_{j=1}^{i-1} a_j^{k_j}\Big)a_i^{\{k_i\}}d_1x_i,$$

отже $d_1\sigma_1 = d_1^{\mathrm{s}}$.

Покладемо $(r)_i = \mathrm{res}(r, o_i)$, лишок r за модулем o_i. Тоді, для $0 \le k < o_i$, $0 \le l < o_i$,

$$d_2^s[a_i^k, a_i^l] = a_i^k[a_i^l] - [a_i^{k+l}] + [a_i^k],$$

звідки

$$\begin{aligned} \sigma_1 d_2^{\mathrm{s}}[a_i^k, a_i^l] &= (a_i^k a_i^{\{l\}} - a_i^{\{(k+l)_i\}} + a_i^{\{l\}})x_i = \\ &= (a_i^k a_i^{\{l\}} - a_i^{\{k+l\}} + a_i^{\{l\}} + [(k+l)/o_i]s_{a_i})x_i = \\ &= [(k+l)/o_i]s_{a_i}x_i = \\ &= d_2([(k+l)/o_i]x_i^2), \end{aligned}$$

отже, якщо покласти

$$\sigma_2[a_i^k, a_i^l] = [(k+l)/o_i]x_i^2,$$

отримаємо

$$d_2\sigma_2[a_i^k,\, a_i^l] = \sigma_1 d_2^{\mathrm{s}}[a_i^k, a_i^l].$$

Аналогічно,

$$d_2^{\mathrm{s}}[a_i^k, a_j^l] = \; a_i^k[a_j^l] - [a_i^k a_j^l] + [a_i^k],$$

тому, якщо $i < j$,

$$\sigma_1 d_2^{\mathrm{s}}[a_i^k, a_j^l] = a_i^k a_j^{\{l\}} x_j - a_i^{\{k\}} x_i - a_i^k a_j^{\{l\}} x_j + a_i^{\{k\}} x_i = 0,$$

а якщо $i > j$, то

$$\begin{aligned} \sigma_1 d_2^{\mathrm{s}}[a_i^k, a_j^l] &= a_i^k a_j^{\{l\}} x_j - a_j^{\{l\}} x_j - a_j^l a_i^{\{k\}} x_i + a_i^{\{k\}} x_i = \\ &= (a_i^k - 1) a_j^{\{l\}} x_j - (a_j^l - 1) a_i^{\{k\}} x_i = \\ &= -d_2(a_j^{\{l\}} a_i^{\{k\}} x_j x_i). \end{aligned}$$

Отже, якщо покласти

$$\sigma_2[a_i^k, a_j^l] = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i < j, \\ a_j^{\{l\}} a_i^{\{k\}} x_j x_i, & \text{якщо } i > j, \end{cases}$$

то отримаємо

$$d_2\sigma_2[a_i^k,\, a_j^l] = \sigma_1 d_2^{\mathrm{s}}[a_i^k, a_j^l]$$

для $i \neq j$.

Нехай тепер σ_2 визначається за правилом (4.2). Ми перевіряємо, що $d_2\sigma_2 = \sigma_1 d_2^{\mathrm{s}}$ для $s = 3$. Загальний випадок аналогічний, хоча трохи громіздкий. Ми напишемо a, b, c замість a_1, a_2, a_3 і x, y, z замість x_1, x_2, x_3. Тоді

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1 d_2^{\mathrm{s}}[a^ib^jc^r, a^kb^lc^s] = \\
&\quad = \sigma_1(a^ib^jc^r[a^kb^lc^s] - [a^{i+k}b^{j+l}c^{r+s}] + [a^ib^jc^r]) = \\
&\quad = a^ib^jc^r(a^{\{k\}}x + a^kb^{\{l\}}y + a^kb^lc^{\{s\}}z) - \\
&\quad - a^{\{i+k\}}x - a^{i+k}b^{\{j+l\}}y - a^{i+k}b^{j+l}c^{\{r+s\}}z + \\
&\quad + [(i+k)/o_a]s_ax + a^{i+k}[(j+l)/o_b]s_by + a^{i+k}b^{j+l}[(r+s)/o_c]s_cx + \\
&\quad + a^{\{i\}}x + a^ib^{\{j\}}y + a^ib^jc^{\{r\}}z = \\
&\quad = (a^ib^jc^ra^{\{k\}} - a^{\{i+k\}} + a^{\{i\}} + [(i+k)/o_a]s_a)x + \\
&\quad + a^i(a^kb^jc^rb^{\{l\}} - a^kb^{\{j+l\}} + b^{\{j\}} + a^k[(j+l)/o_b]s_b)y + \\
&\quad + a^ib^j(a^kb^lc^rc^{\{s\}} - a^kb^lc^{\{r+s\}} + c^{\{r\}} + a^kb^l[(r+s)/o_c]s_c)z,
\end{aligned}
$$

тоді як

$$
\begin{aligned}
&d_2\sigma_2[a^ib^jc^r, a^kb^lc^s] = \\
&\quad = d_2\big(-a^ia^{\{k\}}b^{\{j\}}xy - a^ib^ja^{\{k\}}c^{\{s\}}xz - a^{i+k}b^jb^{\{l\}}c^{\{r\}}yz + \\
&\quad + [(i+k)/o_a]x^2 + a^{i+k}[(j+l)/o_b]y^2 + a^{i+k}b^{j+l}[(r+s)/o_c]z^2\big) = \\
&\quad = -a^i(a^k-1)b^{\{j\}}y + a^i(b^j-1)a^{\{k\}}x - a^i(a^k-1)b^jc^{\{r\}}z + \\
&\quad + a^ib^j(c^r-1)a^{\{k\}}x - a^{i+k}b^j(b^l-1)c^{\{r\}}z + a^{i+k}b^j(c^r-1)b^{k\}}y, \\
&\quad + [(i+k)/o_a]s_ax + a^{i+k}[(j+l)/o_b]s_by + a^{i+k}b^{j+l}[(r+s)/o_c]s_cx = \\
&\quad (-a^ia^{\{k\}} + a^ib^jc^ra^{\{k\}} + [(i+k)/o_a]s_a)x + \\
&\quad + a^i(-a^kb^{\{j\}} + b^{\{j\}} + a^kb^jc^rb^{\{l\}} - a^kb^jb^{\{l\}} + a^k[(j+l)/o_b]s_b)y + \\
&\quad + a^ib^j(c^{\{r\}} - a^kb^lc^{\{r\}} + a^kb^l[(r+s)/o_c]s_c)z.
\end{aligned}
$$

З рівностей (4.1) одразу випдиває, що обидва результати рівні. $\square$

4.1.3. Когомології G-решіток В цьому розділі G позначає скінченну групу, $\boldsymbol{R} = \mathbb{Z}G$ — її групове кільце. Нагадаємо, що G-*решітка* (або *цілочисельне зображення* G) це такий G-модуль M, що його абелева група — вільна скінченного рангу. Також кажуть, що M — це *решітка в* $\mathbb{Q}G$-*модулі* $\tilde{M} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$. Про дві G-решітки M, N кажуть, що вони *одного роду*, якщо $M_p \simeq N_p$ для кожного простого числа p, де $M_p = \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M$ (тут $\mathbb{Z}_p = \{\, r/z \mid r \in \mathbb{Z},\ s \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}\,\}$). Це позначається $M \vee N$. Ми також покладемо $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$, де G діє за правилом $gf(u) = f(g^{-1}u)$.

Позначимо через $\hat{H}^n(G, M)$ *когомології Тейта* групи G з коефіцієнтами в M [7, 28]. Нагадаємо спосіб їх обчислення. Нехай

$$\mathbb{F} : \cdots \to \mathbb{F}_n \xrightarrow{d_n} \mathbb{F}_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} \mathbb{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathbb{F}_0 \to 0$$

вільна резольвента $\mathbb{Z}$, де всі модулі $\mathbb{F}_n$ скінченно породжені,

$$\mathbb{F}^* : 0 \to \mathbb{F}_0^* \xrightarrow{d_1^*} \mathbb{F}_1^* \xrightarrow{d_2^*} \ldots \xrightarrow{d_{n-1}^*} \mathbb{F}_{n-1}^* \xrightarrow{d_n^*} \mathbb{F}_n^* \to \ldots$$

дуальний комплекс, $d_0 : \mathbb{F}_0 \to \mathbb{F}_0^*$ — композиція відображень $\mathbb{F}_0 \to \operatorname{coker} d_1 \simeq \mathbb{Z} \simeq \ker d_1^* \to \mathbb{F}_0^*$. Покладемо $\mathbb{F}_{-n} = \mathbb{F}_{n-1}^*$, $d_{-n} = d_n^*$. Послідовність

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^+ : \ldots \to \mathbb{F}_n \xrightarrow{d_n} \mathbb{F}_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \ldots \xrightarrow{d_2} \mathbb{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathbb{F}_0 \xrightarrow{d_0} \\ \xrightarrow{d_0} \mathbb{F}_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \mathbb{F}_{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \ldots \xrightarrow{d_{-n}} \mathbb{F}_{-n}^* \xrightarrow{d_{-n}} \mathbb{F}_{-n-1} \to \ldots \end{aligned}$$

називається *повною резольвентою* для групи G. Тоді $\hat{H}^n(G, M)$ — просто когомології комплексу $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(\mathbb{F}^+, M)$. Якщо $\mathbb{F}_0 = \boldsymbol{R}$ і сюр'єкція $\mathbb{F}_0 \to \mathbb{Z}$ відображає кожен елемент $g \in G$ в 1, тоді $\mathbb{F}_{-1} \simeq \boldsymbol{R}$ і d_0 — це просто *слід*, тобто множення на $\mathrm{tr}_G = \sum_{x \in G} x$. Це стосується резольвент $\mathbb{F}$ та $\mathbb{S}$.

Твердження 4.3. *Нехай G — скінченна група, M, N — G-решітки такі, що $M \vee N$. Тоді $\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^n(G, N)$, для всіх n.*

Доведення. Добре відомо [28, Твердження XII.2.5], що всі групи $\hat{H}^n(G, M)$ $(n > 0)$ періодичні з періодом $\#(G)$, звідси, $\hat{H}^n(G, M) \simeq \bigoplus_{p|\#(G)} \hat{H}^n(G, M)_p$. Більше того, оскільки $\mathbb{Z}_p$ — плоский $\mathbb{Z}$-модуль, то $\hat{H}^n(G, M)_p \simeq \hat{H}^n(G, M_p)$. Звідси очевидно випливає потрібне твердження. □

Ми позначимо через DM *дуальний* G*-модуль*: $DM = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{T})$, де $\mathbb{T} = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Теорема 4.4. *Нехай* M *— це* G*-решітка. Тоді*

$$\hat{H}^{n-1}(G, DM) \simeq D\hat{H}^{-n}(G, M), \tag{4.3}$$

$$\hat{H}^n(G, DM) \simeq \hat{H}^{n+1}(G, M^*), \tag{4.4}$$

$$\hat{H}^n(G, M^*) \simeq D\hat{H}^{-n}(G, M). \tag{4.5}$$

Якщо $M = \mathbb{Z}$, твердження (4.5) фактично збігається з результатом [28, Theorem XII.6.6].

Доведення. (4.3) збігається з результатом [28, Наслідок XII.6.5].

Розглянемо точну послідовність $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{T} \to 0$. Оскільки група M — вільна абелева, застосувавши точний функтор $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \_)$, ми отимаємо точну послідовність G-модулів

$$0 \to M^* \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}) \to DM \to 0.$$

$\hat{H}^n(G, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q})) = 0$ для всіх n, оскільки множення на $\#(G)$, яке анулює всі когомології Тейта, — це автоморфізм групи $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q})$. Звідси ми отримуємо формулу (4.4).

(4.5) безпосередньо випливає з (4.3) і (4.4). □

Нам також потрібна деяка інформація про когомології прямих добутків груп.

Твердження 4.5. *Нехай N — нормальна підгрупа G, $F = G/N$ і* $\gcd(\#(N), \#(F)) = 1$. *Для кожного G-модуля M і всіх n*

$$\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^n(N, M)^F \oplus \hat{H}^n(F, M^N). \tag{4.6}$$

Доведення. Оскільки $\#(G)$ знищує всі $H^n(G, M)$, якщо $n > 0$ і те саме справджується для N і F, у спектральній послідовності Хохшильда-Серра

$$H^p(F, H^q(N, M)) \Longrightarrow H^n(G, M)$$

усі члени, в яких $p > 0$ і $q > 0$ будуть нулями, а члени $H^0(F, \hat{H}^n(N, M))$ і $\hat{H}^n(F, H^0(N, M))$ — взаємно простих порядків. Отже, якщо $n > 0$, у групи $H^n(G, M)$ є фільтрація з факторами $H^0(F, \hat{H}^n(N, M))$ і $\hat{H}^n(F, H^0(N, M))$, а тому, оскільки їх порядки взаємно прості, то

$$\begin{aligned} \hat{H}^n(G, M) \simeq H^0(F, \hat{H}^n(N, M)) \oplus \hat{H}^n(F, H^0(N, M)) = \\ = \hat{H}^n(N, M)^F \oplus \hat{H}^n(F, M^N). \end{aligned}$$

Припустимо, що тепер умова виконується для $\hat{H}^n$. Виберемо точну послідовність $0 \to L \to P \to M \to 0$, де P — вільний $\mathbb{Z}G$-модуль. Тоді

$$\hat{H}^{n-1}(G, M) \simeq \hat{H}^n(G, L) \simeq \hat{H}^n(N, L)^F \oplus \hat{H}^n(F, L^N).$$

Оскільки P також є вільним як $\mathbb{Z}N$-модуль, то $\hat{H}^n(N, L) \simeq \hat{H}^{n-1}(N, M)$. З іншого боку, існують точні послідовності

$$0 \to L^N \to P^N \to M' \to 0$$

і

$$0 \to M' \to M^N \to M^N/M' \to 0,$$

де M' — це образ відображення $P^N \to M^N$. Очевидно, $M' \supseteq \operatorname{tr}_N M$, звідки випливає, що $\#(N)(M^N/M') = 0$, а тоді $\hat{H}^n(F, M^N/M') = 0$. Тому

$$\hat{H}^{n-1}(F, M^N) \simeq \hat{H}^{n-1}(F, M') \simeq \hat{H}^n(F, L^N),$$

оскільки P^N вільний $\mathbb{Z}F$-модуль. Отже, ізоморфізм (4.6) має місце для $\hat{H}^{n-1}$, а тоді, за зворотньою індукцією, і для всіх значень n. $\square$

Наслідок 4.6. *Нехай* $G = G_1 \times G_2$ *і* $\gcd(\#(G_1), \#(G_2)) = 1$, $M = M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} M_2$, *де* M_i *це* G_i*-решітка* $(i = 1, 2)$. *Тоді*

$$\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^n(G_1, M_1) \otimes_{\mathbb{Z}} M_2^{G_2} \oplus M_1^{G_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{H}^n(G_2, M_2).$$

Доведення. Оскільки M_i — вільна абелева група, $\_ \otimes_{\mathbb{Z}} M_i$ — точний функтор і $M^{G_i} = M_i^{G_i} \otimes_{\mathbb{Z}} M_j$ $(j \neq i)$. Отже, $\hat{H}^n(G_i, M) \simeq \hat{H}^n(G_i, M_i) \otimes_{\mathbb{Z}} M_j$, де $j \neq i$. Виходить, що наша умова — це лише перефразування твердження Наслідок 4.5 для конкретно цього випадку. $\square$

4.1.4. Когомології незвідних G-решіток G-решітка M називається *незвідною*, якщо немає підмодулів $0 \neq N \subset M$ таких, що M/N — група без скруту (тобто знову G-решітка). Еківалентно, це означає, що $\tilde{M} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ — простий $\mathbb{Q}G$-модуль. Якщо G — скінченна абелева група, то будь-який простий $\mathbb{Q}G$-модуль визначається груповим гомоморфізмом $\rho : G \to \boldsymbol{K}^\times$, де $\boldsymbol{K}$ — поле поділу кола, і образ ρ породжується кільцем цілих цисел із $\boldsymbol{K}$. Звідси випливає, що будь-які дві G-решітки в $\boldsymbol{K}$ будуть одного роду [29], отже матимуть однакові когомології внаслідок твердження 4.3. Зокрема, якщо M — це G-решітка в $\boldsymbol{K}$, то й M^* також є решіткою в $\boldsymbol{K}$, отже $M^* \vee M$ і

$$\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^n(G, M^*) \simeq D\hat{H}^{-n}(G, M) \simeq D\hat{H}^{n-1}(G, DM). \qquad (4.7)$$

Підгрупа періодичних елементів із $\boldsymbol{K}$ циклічна і породжена первісним коренем з одиниці ζ. Отже, існує елемент $a \in G$ такий, що $\rho(a) = \zeta$. Нехай $G = \prod_{i=1}^{s} C_i$, де $C_i = \langle\, a_i \mid a_i^{o_i} = 1 \,\rangle$ циклічні групи. Ми можемо припустити, що $a_1 = a$. Покладемо $o = o_1$. Змінюючи твірні a_i, ми можемо зробити $\rho(a_i) = 1$ для $i \neq 1$. Нехай $G' = \langle\, a_2, a_3, \ldots, a_s \,\rangle$, таким чином

$G = C_1 \times G'$. Тоді $M \simeq M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$, де M_1— це M, що розглядається, як C_1-модуль, а $\mathbb{Z}$ — тривіальний G'-модуль. Зазначимо, що $M^G = 0$, бо $\zeta v = v$ означає, що $v = 0$. Звідси $\hat{H}^0(G, M) = 0$. Розглянемо слід $T = \sum_{g \in G} g = (\sum_{k=0}^{o-1} a^k)(\sum_{g \in G'} g)$. Очевидно, $\sum_{k=0}^{o-1} \zeta^k = 0$, отже $TM = 0$. Із цього випливає, що $\hat{H}^{-1}(G, M) = H_0(G, M) = M/(\zeta - 1)M$. Якщо $o = p^m$ для деякого m, тоді також $o(\zeta) = p^k$ для деякого k, звідки випливає, що $N_{\boldsymbol{K}/\mathbb{Q}}(1 - \zeta) = p$ [6] і $\hat{H}^{-1}(G, M) = H_0(G, M) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Якщо $o(\zeta)$ не є степенем простого числа, то $N_{\boldsymbol{K}/\mathbb{Q}}(1-\zeta) = 1$ і $\hat{H}^{-1}(G, M) = H_0(G, M) = 0$ (це також випливає з наслідку 4.6).

Нехай скінченна абелева група G — це прямий добуток $G_1 \times G_2$ і порядки G_1 і G_2 взаємно прості. Якщо $\boldsymbol{K}_i$ $(i = 1, 2)$ — кругове поле, породжене простим $\mathbb{Q}G_i$-модулем, тоді $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \otimes_{\mathbb{Q}} \boldsymbol{K}_2$ є знову полем, отже, простим $\mathbb{Q}G$-модулем, і всі прості $\mathbb{Q}G$-модулі отримуються в такий спосіб. Якщо M_i $(i = 1, 2)$ — це G_i-решітка в $\boldsymbol{K}_i$, то $M = M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} M_2$ — G-решітка в $\boldsymbol{K}$, єдина з точністю до роду. Наслідок 4.6 показує, що $\hat{H}^n(G, M) = 0$, якщо ані M_1, ані M_2 не є тривіальними. Якщо M_1 нетривіальний, а M_2 тривіальний, тоді $\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^n(G_1, M_1)$, а якщо обидва M_1 і M_2 тривіальні, то $\hat{H}^n(G, M) \simeq \hat{H}^n(G_1, \mathbb{Z}) \oplus \hat{H}^n(G_2, \mathbb{Z})$. Це означає, що нам потрібно лише розглянути випадок p-груп. Зазначимо також, що $\mathbb{T} = \bigoplus_p \mathbb{T}_p$ і $\mathbb{T}_p$ — *квазіциклічна p-група*, тобто пряма границя $\varinjlim_m \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ по відношенню до природних занурень $\mathbb{Z}/p^m Z \to \mathbb{Z}/p^{m+1}\mathbb{Z}$. Отже, якщо M скінченно породжений, то $DM \simeq \bigoplus_p DM_p$, де $D_pM = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{T}_p)$. Якщо M є решіткою, адитивна група D_pM — це пряма сума декількох екземплярів $\mathbb{T}_p$. Більше того, якщо G — це p-група, то $\hat{H}^n(G, D_qM) = 0$ і $D_q\hat{H}^n(G, M) = 0$ для $q \neq p$, тому ми можемо замінити D на D_p в усіх формулах з твердження 4.4.

Тож нехай $G = \prod_{k=1}^s G_k$, де G_k — циклічна група порядку p^{m_k}. Ми обчислюємо когомології нетривіальних незвідних G-решіток. Насправді, тут легше обчислити гомології, після чого скористатися формулою (4.5) і тим, що M і M^* мають однакові когомології.

Теорема 4.7. *Нехай M — нетривіальна незвідна G-решітка. Тоді*

$$H_n(G,M) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\nu(n,s)},$$

де

$$\nu(n,s) = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{-s}{i}. \tag{4.8}$$

Зазначимо, що для фіксованого n ця формула визначає $\nu(n,s)$, як многочлен степеня n від змінної s зі старшим коефіцієнтом $(n!)^{-1}$. Наприклад,

$$\begin{aligned}
\nu(0,s) &= 1,\\
\nu(1,s) &= s-1,\\
\nu(2,s) &= \frac{s^2+s+2}{2},\\
\nu(3,s) &= \frac{s^3+5s-6}{6}.
\end{aligned}$$

Доведення. Ми розглядаємо G, як прямий добуток $G' \times G_s$, де $G' = \prod_{i=1}^{s-1} G_i$, і припускаємо, що G_s діє тривіально на M. Тоді M можна розглядати як зовнішній тензорний добуток $M' \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$, де $M' = M$ розглядається як G'-модуль, а $\mathbb{Z}$ — як тривіальний G_s-модуль. Тепер ми можемо використати формулу Кюннета [7, Corollary V.5.8]:

$$\begin{aligned}
H_n(G,M) \simeq \Big(\bigoplus_{i=0}^{n} H_i(G',M') \otimes_{\mathbb{Z}} H_{n-i}(G_s,\mathbb{Z})\Big) \oplus \\
\oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{n-1} \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_i(G',M'), H_{n-i-1}(G_s,\mathbb{Z}))\Big).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Нагадаємо, що для циклічної групи $C = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$,

$$H_0(C, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z};$$
$$H_n(C, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}, & \text{якщо } n \text{ непарне,} \\ 0, & \text{якщо } n \text{ парне;} \end{cases}$$

а для нетривіальної решітки M

$$H_n(C, M) = \begin{cases} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } n \text{ непарне,} \end{cases}$$

тобто

$$\nu(n, 1) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \text{ парне,} \\ 0, & \text{якщо } n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Більше того,

$$H_0(G, M) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

тобто

$$\nu(0, s) = 1.$$

Таки чином теорема виконується для $n = 0$ і для $s = 1$, мінімальних значень n та s. Тоді з формули Кюннета випливає, що $H^n(G, M) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\nu(n,s)}$ для деякого $\nu(n, s)$. Більше того, з неї випливає, що

$$\nu(n, s) = \sum_{k=0}^{n} \nu(n, s-1) = \nu(n, s-1) + \nu(n-1, s)$$

Тому, ми можемо довести формулу (4.8) використовуючи метод математичної індукції, припустивши, що вона виконується для $\nu(n, s-1)$ та

$\nu(n-1,s)$. Тоді ми отримаємо

$$\begin{aligned}\nu(n,s) &= \nu(n,s-1)+\nu(n-1,s) = \\ &= (-1)^n\sum_{i=0}^{n}\binom{-s+1}{i} - (-1)^n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{-s}{i} = \\ &= (-1)^n\sum_{i=0}^{n}\left(\binom{-s+1}{i}-\binom{-s}{i-1}\right) = \\ &= (-1)^n\sum_{i=0}^{n}\binom{-s}{i}.\end{aligned}$$ □

Зазначимо, крім того, що у цьому випадку $\hat{H}^{-1}(G,M) = H_0(G,M)$ і $\hat{H}^0(G,M) = 0$.

Формули (4.8) і (4.5) разом дають наступний результат.

Наслідок 4.8. *Якщо M — нетривіальна незвідна G-решітка, то*

$$\hat{H}^n(G,M) \simeq \hat{H}^{n-1}(G,DM) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\nu(|n|-1,s)}.$$

Зауважимо, що ця формула є спільною для всіх нетривіальних незвідних G-решіток.

Аналогічні обчислення дають відомий результат для тривіального G-модуля $\mathbb{Z}$ [41, 46].

Теорема 4.9. *Якщо $n \neq 0$ і $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$, то*

$$\hat{H}^n(G,\mathbb{Z}) \simeq \textstyle\bigoplus_{k=1}^{s}(\mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z})^{\nu(|n|-1,k)}). \tag{4.10}$$

Нагадаємо, що $\hat{H}^0(G,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, де $m = \sum_{k=1}^{s} m_k$.

Доведення. Перш за все, із формули Кюннета (4.9) випливає, що $H_n(G,\mathbb{Z})$ є прямою сумою $\mu(n,s)$ циклічних груп, причому

$$\mu(n,s) = \sum_{i=1}^{n}\mu(i,s-1)+\varepsilon,$$

де

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \text{ непарне,} \\ 0, & \text{якщо } n \text{ парне,} \end{cases}$$

звідки

$$\mu(n,s) = \mu(n,s-1) + \mu(n-1,s) + (-1)^{n-1}.$$

Використовуючи індукцію по s, ми отримаємо, що

$$\mu(n,s) = \nu(n,s) + (-1)^n,$$

отже

$$\mu(n,s) = \mu(n,s-1) + \nu(n-1,s).$$

Зазанчимо, що всі групи $H^i(G_s,\mathbb{Z})$ — періоду p^{m_s}. Тому з (4.9) випливає, що

$$H_n(G,\mathbb{Z}) \simeq H_n(G',\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^{m_s}\mathbb{Z})^r$$

для деякого r. Разом з формулою для $\mu(n,s)$, це дає нам, що

$$H_n(G,\mathbb{Z}) \simeq H_n(G',\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/p^{m_s}\mathbb{Z})^{\nu(n-1,s)}.$$

За індукцією, ми отримуємо, що

$$H_n(G,\mathbb{Z}) \simeq \bigoplus\nolimits_{k=1}^{s} (\mathbb{Z}/p^{m_k}\mathbb{Z})^{\nu(n-1,k)}.$$

Враховуючи (4.5), отримуємо формулу (4.10). $\square$

4.2. Явні формули

В цьому розділі ми знайдемо явні формули схрещених гомоморфізмів (елементів із $H^1(G,M)$) та коциклів (елементів із $H^2(G,M)$) для незвідних решіток та дуальних до них (останні важливі, наприклад, у вивченні груп Чернікова [9]). Ми використовуємо резольвенту, визначену у підрозділі 4.1.1.

Нехай $G = \prod_{i=1}^{s} G_i$, де $G_i = \langle\, a_i \mid a_i^{p^{m_i}} = 1 \,\rangle$ є циклічною групою порядку $o_i = p^{m_i}$. Ми покладемо $s_i = s_{a_i}$. Для коланцюга $\mu : \mathbb{P}_n \to M$ ми позначимо через $\partial\mu$ його когряницю, що є композицією $\mu d_{n+1} : \mathbb{P}_{n+1} \to M$. Тоді, якщо $\xi : \mathbb{P}_1 \to M$, $i < j$,

$$\begin{aligned} &\partial\xi(x_i^2) = s_i\xi(x_i), \\ &\partial\xi(x_ix_j) = (a_i-1)\xi(x_j) - (a_j-1)\xi(x_i). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Таким чином ξ буде коциклом тоді і тільки тоді, коли , коли

$$\begin{aligned} &s_i\xi(x_i) = 0 \quad \text{для всіх } i, \\ &(a_i-1)\xi(x_j) = (a_j-1)\xi(x_i) \quad \text{для всіх } i \neq j. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Якщо $\gamma : \mathbb{P}_2 \to M$, $i < j < k$, то

$$\begin{aligned} &\partial\gamma(x_i^3) = (a_i-1)\gamma(x^2) = 0, \\ &\partial\gamma((x_i^2x_j) = s_i\gamma(x_ix_j) + (a_j-1)\gamma(x_i^2), \\ &\partial\gamma(x_ix_j^2) = (a_i-1)\gamma(x_j^2) - s_j\gamma(x_ix_j), \\ &\partial\gamma(x_ix_jx_k) = (a_i-1)\gamma(x_jx_k) - (a_j-1)\gamma(x_ix_k) + (a_k-1)\gamma(x_ix_j). \end{aligned}$$

Отже, γ буде коциклом тоді і тільки тоді, коли коли для всіх таких значень індексів i, j, k виконуються рівності

$$\begin{aligned}
&(a_i - 1)\gamma(x_i^2) = 0,\\
&s_i\gamma(x_ix_j) = -(a_j - 1)\gamma(x_i^2),\\
&s_j\gamma(x_jx_i) = (a_i - 1)\gamma(x_j^2),\\
&(a_j - 1)\gamma(x_ix_k) = (a_i - 1)\gamma(x_jx_k) + (a_k - 1)\gamma(x_ix_j).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Нарешті, якщо ототожнити елемент $u \in M$ з гомоморфізмом $\mathbb{P}_0 \to M$, що відображає a в au, то $\partial u(x_i) = (a_i - 1)u$.

Спочатку припустимо, що $M = \mathbb{Z}$. Тоді елемент s_i діє на M як p^{m_i} і формули (4.12) показують, що $H^1(G, \mathbb{Z}) = 0$. Оскільки $a_i - 1$ діє як 0, то формули (4.13) означають, що γ буде коциклом тоді і тільки тоді, коли $\gamma(x_ix_j) = 0$. Формули (4.11) показують, що, додавши кограницю, ми зможемо звести $\gamma(x_i^2)$ за модулем p^{m_i}. Отже, $H^2(G, \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}$ і твірні цієї групи можуть бути вибрані як когомології класів коциклів $\gamma_k : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{Z}$ таких, що $\gamma_k(x_ix_j) = 0$ для всіх i, j і $\gamma_k(x_i^2) = \delta_{ik}$.

Для дуального модуля $D_p\mathbb{Z} = \mathbb{T}_p$, формули (4.12) означають, що ξ є коциклом тоді і тільки тоді, коли $p^{m_i}\xi(x_i) = 0$. Звідки $H^1(G, \mathbb{T}_p) \simeq \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{T}_{m_i}$, де $\mathbb{T}_{m_i} = \{\, u \in \mathbb{T}_p \mid p^{m_i}u = 0 \,\}$ (це циклічна група порядку p^{m_i}). Оскільки група $\mathbb{T}_p$ подільна, формули (4.11) показують, що, додавши кограницю до 2-вимірного коциклу γ, можна зробити $\gamma(x_i^2) = 0$. Далі, формули (4.13) означають, що $p^{m_{ij}}\gamma_{x_ix_j} = 0$, де $m_{ij} = \min\{m_i, m_j\}$. Звідси $H^2(G, \mathbb{T}_p) \simeq \bigoplus_{i<j} \mathbb{T}_{m_{ij}} \simeq \bigoplus_{i<j} \mathbb{Z}/p^{m_{ij}}\mathbb{Z}$ і твірні цієї групи — це класи коциклів γ_{kl} $(1 \le k < l \le s)$ таких, що $\gamma_{kl}(x_i^2) = 0$ для всіх i, тоді як $\gamma_{kl}(x_ix_j) = \delta_{ki}\delta_{lj}u_{kl}$, де u_{kl} — фіксований елемент із $\mathbb{T}_p$ порядку $p^{m_{kl}}$.

Нехай тепер M — решітка в круговому полі $\boldsymbol{K}$ порядку p^m така, що a_1 діє, як множення на первісний корінь ζ з одиниці степеня p^m, а всі a_i $(i > 1)$ діють тривіально. Оскільки ми можемо вибрати будь-яку решітку з даного роду, можна припустити, що $M = \mathbb{Z}[\zeta]$. Тож, формули

(4.12) показують, що ξ — коцикл тоді і тільки тоді, коли , коли $\xi(x_i) = 0$ для $i > 1$. Оскільки $\zeta - 1$ — первинний елемент у $\mathbb{Z}[\zeta]$ з нормою p [6], $M/(\zeta - 1)M \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Тому, додавши кограницю ∂u до ξ, можна отримати $\xi(x_1) = \lambda$, де $\lambda \in \mathbb{Z}$ визначений за модулем p. Таким чином, $H^1(G, M) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Формули (4.13) показують, що γ буде коциклом тоді і тільки тоді, коли , коли $\gamma(x_1^2) = 0$, $\gamma(x_i x_j) = 0$, якщо $1 < i < j$ і $p^{m_i}\gamma(x_1 x_i) = (\zeta - 1)\gamma(x_i^2)$. Формули (4.11) означають, що, додавши когураницю, можна зробити $\gamma(x_1 x_i) = \lambda_i$, де $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ визначене за модулем p. Тоді $\gamma(x_i^2)$ визначається однозначно. Отже, $H^2(G, M) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{s-1}$. Твірні цієї групи — це класи коциклів γ_k $(1 < k \leq s)$ таких, що $\gamma_k(x_1^2) = \gamma_(x_i x_j) = 0$ для всіх $1 < i < j$, $\gamma_k(x_1 x_i) = \delta_{ik}$, $\gamma_k(x_i)^2 = 0$, якщо $i \neq k$ і $(1 - \zeta)\gamma_k(x_k) = p^{m_k}$.

Розглянемо дуальний модуль $D_p M$. Оскільки множення на $\zeta - 1$ є ін'єктивним на M, то воно сюр'єктивне на $D_p M$. З іншого боку, підгрупа $\{\, u \in D_p M \mid (\zeta - 1)u = 0 \,\}$ дуальна до $M/(\zeta - 1)M$, отже, породжується одним елементом u_0 періоду p. Таким чином, додавши когураницю ∂u до 1-коциклу ξ, можна зробити $\xi(x_1) = 0$. Тоді $(\zeta - 1)\xi(x_i) = 0$, якщо $i > 1$, звідки $\xi(x_i) = \lambda_i u_0$, де $\lambda_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Отже, $H^1(G, D_p M) \simeq \boldsymbol{P}_1^{s-1} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{s-1}$. Таким же чином, додавши когураницю до 2-коциклу γ, можна зробити $\gamma(x_1 x_i) = 0$ для $i > 1$. Тоді умови (4.13) дають $(\zeta - 1)\gamma(x_i^2) = 0$ для всіх i, звідки $\gamma(x_i^2) = \lambda_i u_0$ $(\lambda_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, і $(\zeta - 1)\gamma(x_i x_j) = 0$ для $1 < i < j$, і ще $\gamma(x_i x_j) = \lambda_{ij} u_0$ $(\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Тому $H^2(G, D_p M) \simeq \mathbb{T}_1^{(s^2-s+2)/2} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{(s^2-s+2)/2}$. Твірними цієї групи є коцикли γ_k $(1 \leq k \leq s)$ і γ_{kl} $(1 < k < l \leq s)$ такі, що $\gamma_k(x_1 x_i) = \gamma_{kl}(x_1 x_i)$ для $i > 1$, $\gamma_k(x_i^2) = \delta_{ik} u_0$, $\gamma_k(x_i x_j) = 0$ для $i \neq j$, $\gamma_{kl}(x_i^2) = 0$ для всіх i and $\gamma_{kl}(x_i x_j) = \delta_{ik}\delta_{jl} u_0$.

Підведемо підсумок цих обчислень.

Теорема 4.10. *Нехай* $G = \langle a_1, a_2, \dots, a_s \mid a_i^{p^{m_i}} = 1,\, a_i a_j = a_j a_i \rangle$ — *скінченна p-група.*

1. $H^1(G,\mathbb{Z}) = 0$ *а* $H^2(G,\mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{Z}/p^{m_i}\mathbb{Z}$ *з твірними* $\gamma_k : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{Z}$ *такими, що* $\gamma_k(x_i x_j) = 0$ *при* $i < j$, *а* $\gamma_k(x_i)^2 = \delta_{ik}$.

2. $H^1(G,\mathbb{T}_p) \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{T}_{m_i}$, *де* $\mathbb{T}_{m_i} = \{u \in \mathbb{T}_p \mid p^{m_i} u = 0\}$, *а* $H^2(G,\mathbb{T}_p) \simeq \bigoplus_{i<j} \mathbb{Z}/p^{m_{ij}}$, *де* $m_{ij} = \min\{m_i, m_j\}$ *з твірними* $\gamma_{kl} : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{T}_p$ $(1 \le k < l \le s)$ *такими, що*
$$\gamma_{kl}(x_i^2) = 0 \ \text{ для всіх } i,$$
$$\gamma_{kl}(x_i x_j) = \delta_{ik}\delta_{jl} u_{ij} \ \text{ при } i < j,$$
де u_{ij} — *фіксований елемент групи* $\mathbb{T}_p$ *порядку* $p^{m_{ij}}$.

3. *У цьому та наступному пунктах, нехай* M — G*-решітка у полі* $\mathbb{Q}[\zeta]$, *де* ζ — *первісний корінь степеня* p^r *з* 1. *Ми вважаємо, без зменшення загальності, що* a_1 *діє множенням на* ζ, *а всі* a_i *при* $i > 1$ *діють тривіально. Тоді* $H^1(G,M) = \mathbb{Z}[\zeta]/(\zeta - 1) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, *а* $H^2(G,M) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{s-1}$ *з твірними* $\gamma_k : \mathbb{P}_2 \to M$ $(1 < k \le s)$ *такими, що*
$$\gamma_k(x_i)^2 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i \ne k,\\ (1-\zeta)^{-1} p^{m_k}, & \text{якщо } i = k; \end{cases}$$
$$\gamma_k(x_i x_j) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 1 < i < j,\\ \delta_{jk}, & \text{якщо } i = 1 < j. \end{cases}$$

4. $H^1(G, D_p M) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{s-1}$ *з твірними* $\xi_k : \mathbb{P}_1 \to D_p M (1 < k \le s)$ *такими, що* $\delta_k(x_i^2) = \delta_{ik} u_0$, *де* u_0 — *твірний групи* $(D_p M/(\zeta - 1) D_p M \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, *а* $H^2(G, D_p M) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{(s^2 - s + 2)/2}$ *з твірними* γ_k $(1 \le k \le s)$

та γ_{kl} $(1 < k < l \le s)$ *такими, що*

$$\begin{aligned}
&\gamma_k(x_i)^2 = \delta_{ik}u_0,\\
&\gamma_k(x_ix_j) = 0 \quad \textit{при } i < j,\\
&\gamma_{kl}(x_i^2) = 0,\\
&\gamma_{kl}(x_ix_j) = \delta_{ik}\delta_{jl}u_0.
\end{aligned}$$

4.3. Когомології четвірної групи Клейна

4.3.1. Спрощена резольвента. Застосуємо попередні результати до четвірної групи Кляйна $G = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1,\, ab = ba\rangle$. Нехай $\boldsymbol{R} = \mathbb{Z}G$. У спрощеній резольвенті $\mathbb{P}$, визначеній у підрозділі 4.1.1, $\mathbb{P}_n$ — модуль однорідних многочленів степеня n з кільця многочленів $\boldsymbol{R}[x, y]$, а диференціал $d_n : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n-1}$ при $n > 1$ має вигляд

$$d_n(x^iy^j) = (a + (-1)^i)x^{i-1}y_j + (-1)^i(b + (-1)^j)x^iy^{j-1}$$

(якщо якийсь показник стає від'ємним, відповідний член вважається нульовим). Інакше кажучи, d_n задається матрицею

$$\begin{pmatrix}
a+1 & 1-b & 0 & 0 & \dots\\
0 & a-1 & b+1 & 0 & \dots\\
0 & 0 & a+1 & 1-b & \dots\\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill}
\end{pmatrix},$$

якщо n парне і матрицею

$$\begin{pmatrix}
a-1 & -(b+1) & 0 & 0 & \dots\\
0 & a+1 & b-1 & 0 & \dots\\
0 & 0 & a-1 & -(b+1) & \dots\\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill}
\end{pmatrix},$$

якщо n непарне. Зауважимо, що $\mathbb{P}_0 = \boldsymbol{R}$ і $d_1 x = a - 1$, $d_1 y = b - 1$. Для випадку, коли $n = 2$, цей результат був отриманий І. Шапочкою [24].

Квазі-ізоморфізм $\sigma : \mathbb{S} \to \mathbb{P}$, де $\mathbb{S}$ — нормалізована стандартна резольвента, має вигляд

$$\begin{aligned}
&\sigma_1[a] = x,\\
&\sigma_1[b] = y,\\
&\sigma_1[ab] = x + ay,\\
&\sigma_2[a|a] = x^2,\\
&\sigma_2[b|b] = y^2,\\
&\sigma_2[a|b] = 0,\\
&\sigma_2[b|a] = -xy,\\
&\sigma_2[ab|ab] = bx^2 - xy + y^2,\\
&\sigma_2[ab|b] = ay^2,\\
&\sigma_2[ab|a] = bx^2 + xy,\\
&\sigma_2[a|ab] = x^2,\\
&\sigma_2[b|ab] = -xy + ay^2
\end{aligned} \tag{4.14}$$

(Теорема 4.2).

Якщо $\phi : \mathbb{P}_n \to M$ — n-вимірний коланцюг, то його когранниця $\partial_n \phi = \phi d_{n+1}$ визначається формулою

$$\partial\phi(x^i y^j) = (a + (-1)^i)\phi(x^{i-1}y^j) + (-1)^i(b + (-1)^j)\phi(x^i y^{j-1}).$$

Зокрема, для двовимірного коланцюга $\gamma : \mathbb{P}_2 \to M$ маємо

$$\begin{aligned}
&\partial\gamma(x^3) = (a-1)\gamma(x^2),\\
&\partial\gamma(y^3) = (b-1)\gamma(y^2),\\
&\partial\gamma(x^2y) = (a+1)\gamma(xy) + (b-1)\gamma(x^2),\\
&\partial\gamma(xy^2) = (a-1)\gamma(y^2) - (b+1)\gamma(xy),
\end{aligned}$$

а для $\xi : \mathbb{P}_1 \to M$

$$\begin{aligned}
&\partial\xi(x^2) = (a+1)\xi(x),\\
&\partial\xi(y^2) = (b+1)\xi(y),\\
&\partial\xi(xy) = (a-1)\xi(y) - (b-1)\xi(x).
\end{aligned}$$

Ми застосуємо ці формули для обчислення других когомологій таких G-модулів M, що адитивна група M має вигляд $m\mathbb{T}$, де $\mathbb{T} = \mathbb{T}_2$ — квазіциклічна 2-група, а дія G на M визначається *неточним* 2*-адичним зображенням* групи G. Якщо користуватися класифікацією зображень, даною у розділі 3, неточність означає, що принаймні одній вершині сагайдака Q у відповідному зображенні відповідає нульовий простір. Крім того, слабо еквівалентні зображення, очевидно, мають ізоморфні групи когомологій. Тому достатньо розглядати по одному представнику з кожного класу слабкої еквівалентності. Зауважимо також, що з опису нерозкладних зображень (підрозділ 3.2) видно, що неточне зображення має щонайбільше 3 незвідні компоненти, причому всі вони неізоморфні. Крім того, таке зображення повністю визначається своєю розмірністю $\boxed{d_0 \begin{smallmatrix} d_{++} \\ d_{+-} \\ d_{-+} \\ d_{--} \end{smallmatrix}}$. Відповідний модуль M ми позначатимемо $M\boxed{d_0 \begin{smallmatrix} d_{++} \\ d_{+-} \\ d_{-+} \\ d_{--} \end{smallmatrix}}$. Отже нам потрібно розглянути такі модулі:

незвідні: $M\boxed{1 \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}}$ і $M\boxed{1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}}$;

2-компонентні: $M\boxed{1 \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}}$ і $M\boxed{1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}}$;

3-компонентні: $M\boxed{1 \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}}$, $M\boxed{1 \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}}$, $M\boxed{2 \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}}$ і $M\boxed{2 \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}}$ (тут перші два зображення відповідають циклічним решіткам, а останні два — нециклічним).

4.3.2. Незвідні зображення. У незвідному зображенні $M_{++} = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\0\end{smallmatrix}}$ елементи a і b діють тривіально, тому $a+1=b+1=2,\ a-1=b-1=0$. Отже

$$\begin{aligned}
\partial\gamma(x^3) &= \partial\gamma(y^3) = 0,\\
\partial\gamma(x^2y) &= \partial\gamma(xy^2) = 2\gamma(xy),
\end{aligned}$$

тобто γ є коциклом тоді і тільки тоді, коли $2\gamma(xy)=2$.

З іншого боку, $\partial\xi(x^2)=2\xi(x),\ \partial\xi(y^2)=2\xi(y),\ \partial\xi(xy)=0$. Оскільки M — подільна група, вибравши належним чином $\xi(x)$ і $\xi(y)$, можна замінити коцикл γ на такий, в якому $\xi(x^2)=\xi(y^2)=0$. Це дає такий результат.

Твердження 4.11. *$H^2(G,M_{++})=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ і ненульовий елемент задається коциклом γ таким, що $\xi(x^2)=\xi(y^2)=0$, а $\gamma(xy)=\varepsilon$, де ε — єдиний елемент з групи $\mathbb{T}$, для якого $2\varepsilon=0$.*

У зображенні $M_{--} = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}}$ обидва елементи a і b діють, як -1, тобто $a+1=b+1=0,\ a-1=b-1=-2$. Отже

$$\begin{aligned}
\partial\gamma(x^3) &= -2\gamma(x^2),\\
\partial\gamma(y^3) &= -2\gamma(y^2),\\
\partial\gamma(x^2y) &= -2\gamma(x^2),\\
\partial\gamma(xy^2) &= -2\gamma(y^2),
\end{aligned}$$

тобто у коциклі $\gamma(x^2)$ і $\gamma(y^2)$ — елементи порядку 2.

Оскільки $\partial\xi(x^2)=\partial\xi(y^2)=0$, а $\partial\xi(xy)=-2\xi(y)+2\xi(x)$, цього разу можна зробити нульовим значення $\gamma(xy)$, що дає наступний результат.

Твердження 4.12. *$H^2(G,M_{--})=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ і ненульові елементи задаються коциклами γ такими, що $\xi(xy)=0$, а $\gamma(x^2)$ і $\gamma(y^2)$ належать $\{0,\varepsilon\}$ і не є одночасно нулями.*

Такі самі значення мають групи $H^2(G, M_{+-})$ і $H^2(G, M_{-+})$, де $M_{+-} = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\0\end{smallmatrix}}$, а $M_{-+} = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\0\end{smallmatrix}}$.

Зауваження 4.13. Згідно з формулами , при перестановці a і ab елементи спрощеної резольвенти треба перетворити в такий спосіб, щоб зберігти побудований квазі-ізоморфізм спрощеної й стандартної резольвент:

$$
\begin{aligned}
&x \mapsto x + ay,\\
&y \mapsto y,\\
&x^2 \mapsto bx^2 - xy + y^2,\\
&y^2 \mapsto y^2,\\
&xy \mapsto -xy + ay^2.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Тому твірними групи $H^2(G, M_{+-})$ є такі коцикли γ, що $\gamma(x^2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\gamma(y^2) = \varepsilon_2$, $\gamma(xy) = -\varepsilon_2$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ належать $\{0, \varepsilon\}$ і не є одночасно нулями.

Аналогічно, при перестановці b і ab треба перетворити елементи спрощеної резольвенти в такий спосіб:

$$
\begin{aligned}
&x \mapsto x,\\
&y \mapsto x + ay,\\
&x^2 \mapsto x^2,\\
&y^2 \mapsto bx^2 - xy + y^2,\\
&xy \mapsto bx^2 + xy.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Тому твірними групи $H^2(G, M_{-+})$ є такі коцикли γ, що $\gamma(x^2) = \varepsilon_1$, $\gamma(y^2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, $\gamma(xy) = -\varepsilon_1$, де $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ належать $\{0, \varepsilon\}$ і не є одночасно нулями.

4.3.3. 2-компонентні зображення. Нехай $M = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}}$. Тоді в M є підмодуль, ізоморфний M_{+-}, а фактормодуль за ним ізоморфний M_{-+}.

Отже M відповідає зображенню групи G такому, що

$$a \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$a - 1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b - 1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$a + 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b + 1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і ці оператори діють на групі $2\mathbb{T}$.

Нехай $\gamma : \mathbb{P}_2 \to M$ — двовимірний коцикл,

$$\gamma(x^2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(y^2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(xy) = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\partial\gamma(x^3) = (a-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_1 + v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(y^3) = (b-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ -2v_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(x^2y) = (a+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} + (b-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 - v_1 \\ 2v_3 - 2v_1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(xy^2) = (a-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} - (b+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_2 + v_2 - 2u_3 + v_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Отже, ми маємо $v_1 = v_3 = 2u_1 = 2u_2 + 2u_3$, $v_2 = 0$.

Нехай

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \quad \xi(y) = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\partial\xi(x^2) = (a+1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 2d_1 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(y^2) = (b+1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 - d_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(xy) = (a-1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} - (b-1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 + d_2 + d_1 \\ 2d_1 \end{pmatrix}.$$

Отже, замінивши γ на $\gamma + \partial\xi$, ми можемо зробити $u_1 = u_2 = 0$, звідки також $v_1 = v_3 = 0$, $2u_3 = 0$. Це дає такий результат.

Твердження 4.14. *Якщо* $M = M_{\boxed{1\,\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\0\end{smallmatrix}}}$, *то* $H^2(G, M) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *і ненульовий елемент* γ *цієї групи — це клас коциклу* γ *такий, що* $\gamma(x^2) =$

$\gamma(y^2) = 0,\ \gamma(xy) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}.$

Таке саме значення має $H^2(G, M)$, *якщо* $M = M\boxed{\begin{smallmatrix} & 0 \\ 1 & 1 \\ & 0 \\ & 1 \end{smallmatrix}}$ *або* $M = M\boxed{\begin{smallmatrix} & 0 \\ 1 & 0 \\ & 1 \\ & 1 \end{smallmatrix}}$.

Зауваження 4.15. Беручи до уваги формули перетворення (4.15) і (4.16), ми бачимо що для $M = M\boxed{\begin{smallmatrix} & 0 \\ 1 & 0 \\ & 1 \\ & 1 \end{smallmatrix}}$ ненульовий елемент групи $H^2(G, M)$ — це клас такого коциклу γ, що

$$\gamma(x^2) = \gamma(xy) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma(y^2) = 0,$$

а для $M = M\boxed{\begin{smallmatrix} & 0 \\ 1 & 1 \\ & 0 \\ & 1 \end{smallmatrix}}$ це клас такого коциклу γ, що

$$\gamma(y^2) = \gamma(xy) = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma(x^2) = 0.$$

Нехай тепер $M = M\boxed{\begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & 0 \\ & 0 \\ & 1 \end{smallmatrix}}$, тобто в M є підмодуль, ізоморфний M_{--}, а фактормодуль за ним ізоморфний M_{++}. Тоді M відповідає зображенню групи G такому, що

$$a \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$b \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто

$$a - 1 = b - 1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a + 1 = b + 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нехай

$$\gamma(x^2) = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(y^2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma(xy) = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\partial\gamma(x^3) = (a-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_1 + v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(y^3) = (b-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_2 + v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(x^2y) = (a+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} + (b-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 - 2u_1 + v_1 \\ 2v_3 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\partial\gamma(xy^2) = (a-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} - (b+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_2 + v_2 - v_3 \\ -2v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Отже, ми маємо $v_3 = 0, 2u_1 = v_1, 2u_2 = v_2$.

Нехай

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \quad \xi(y) = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\partial\xi(x^2) = (a+1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 2d_1 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(y^2) = (b+1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 \\ 2d_2 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(xy) = (a-1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} - (b-1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2+d_2-2c_1+d_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, замінивши γ на $\gamma+\partial\xi$, ми можемо зробити $u_1 = u_2 = 0$, а також, оскільки M подільна, й $u_3 = 0$. Отримуємо такий результат.

Твердження 4.16. *Якщо M має вигляд $M = M\boxed{1\,\substack{1\\0\\0\\1}}$, або $M = M\boxed{1\,\substack{1\\1\\0\\0}}$, або $M = M\boxed{1\,\substack{1\\0\\1\\0}}$, то $H^2(G,M) = 0$.*

4.3.4. 3-компонентні циклічні зображення. Нехай $M = M\boxed{1\,\substack{1\\1\\1\\0}}$. Тоді в ньому є ланцюг підмодулів

$$M \supset M_1 \supset M_2 \supset 0,$$

в якому

$$M_2 \simeq M_{-+},\ M_1/M_2 \simeq M_{+-},\ M/M_1 \simeq M_{++}.$$

Враховуючи, що M циклічний, бачимо, що відповідне зображення має вигляд

$$a \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$a-1=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b-1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a+1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b+1=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нехай $\gamma(x^2)=\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$, $\gamma(y^2)=\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$, $\gamma(xy)=\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

Тоді

$$\partial\gamma(x^3)=(a-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2u_1+w_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0,$$

$$\partial\gamma(y^3)=(b-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -2v_2+w_2 \\ 0 \end{pmatrix}=0,$$

$$\partial\gamma(x^2y)=(a+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}+(b-1)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_3 \\ 2v_3-2v_1+w_1 \\ 2w_3 \end{pmatrix}=0,$$

$$\partial\gamma(xy^2) = (a-1)\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix} - (b+1)\begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_2 + w_2 - 2u_3 \\ -w_3 \\ -2w_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Отже, ми маємо $w_3 = 0, w_1 = 2u_1, w_2 = 2v_2$.

Нехай $\xi(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \\ f_1 \end{pmatrix}$, $\xi(y) = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \\ f_2 \end{pmatrix}$.

Тоді

$$\partial\xi(x^2) = (a+1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 2d_1 \\ 2f_1 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(y^2) = (b+1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_2 \\ f_2 \\ 2f_2 \end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(xy) = (a-1)\begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \\ f_2 \end{pmatrix} - (b-1)\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_2 + f_2 \\ 2d_1 - f_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Отже, ми можемо зробити $u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = 0$, звідки отримуємо наступний результат.

Твердження 4.17. *Якщо* $M = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\0\end{smallmatrix}}$, *то* $H^2(M) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ *і складається із класів коциклів* γ *таких, що* $\gamma(x^2) = \gamma(y^2) = 0$, *тоді як* $\gamma(xy) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$, *де* $u, v \in \{0, \varepsilon\}$.

Такий самий результат має місце, коли $M = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\1\end{smallmatrix}}$ *або* $M = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\1\end{smallmatrix}}$.

Зауваження 4.18. Знов-таки, формули (4.15) і (4.16) показують, що при $M = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\1\end{smallmatrix}}$ група $H^2(G, M)$ складається з класів таких коциклів γ, що

$$\gamma(x^2) = \gamma(xy) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(y^2) = 0,$$

а при $M = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\1\end{smallmatrix}}$ ця група складається з класів таких коциклів γ, що

$$\gamma(y^2) = \gamma(xy) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(x^2) = 0,$$

Нехай $M = M\boxed{1\,\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\1\end{smallmatrix}}$.

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$a-1=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$b-1=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$a+1=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$b+1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Нехай $\gamma(x^2)=\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\w_1\end{pmatrix}$, $\gamma(y^2)=\begin{pmatrix}u_2\\v_2\\w_2\end{pmatrix}$, $\gamma(xy)=\begin{pmatrix}u_3\\v_3\\w_3\end{pmatrix}$.

Тоді

$$\partial\gamma(x^3)=(a-1)\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\w_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2u_1+w_1\\0\\0\end{pmatrix}=0,$$

$$\partial\gamma(y^3)=(b-1)\begin{pmatrix}u_2\\v_2\\w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2v_2+w_2\\0\end{pmatrix}=0,$$

$$\partial\gamma(x^2y)=(a+1)\begin{pmatrix}u_3\\v_3\\w_3\end{pmatrix}+(b-1)\begin{pmatrix}u_1\\v_1\\w_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w_3\\2v_3-2v_1+w_1\\2w_3\end{pmatrix}=0,$$

$$\partial\gamma(xy^2)=(a-1)\begin{pmatrix}u_2\\ v_2\\ w_2\end{pmatrix}-(b+1)\begin{pmatrix}u_3\\ v_3\\ w_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2u_2+w_2-2u_3\\ -w_3\\ -2w_3\end{pmatrix}=0.$$

Отже, ми маємо $w_3=0, w_1=2u_1, w_2=2v_2$.

Нехай $\xi(x)=\begin{pmatrix}c_1\\ d_1\\ f_1\end{pmatrix}$, $\xi(y)=\begin{pmatrix}c_2\\ d_2\\ f_2\end{pmatrix}$.

Тоді

$$\partial\xi(x^2)=(a+1)\begin{pmatrix}c_1\\ d_1\\ f_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_1+f_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(y^2)=(b+1)\begin{pmatrix}c_2\\ d_2\\ f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2d_2+f_2\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\partial\xi(xy)=(a-1)\begin{pmatrix}c_2\\ d_2\\ f_2\end{pmatrix}-(b-1)\begin{pmatrix}c_1\\ d_1\\ f_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_2+2c_1\\ -2d_2-f_1\\ -2f_2\end{pmatrix},$$

Отже, ми можемо зробити рівним нулю все, крім u_3, звідки отримуємо наступний результат.

Твердження 4.19. *Якщо* $M=M\boxed{\begin{smallmatrix} & 0\\ 1 & 1\\ & 1\\ & 1\end{smallmatrix}}$ *то* $H^2(G,M)=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *і ненульовий елемент цієї групи є класом коциклу* γ, *де* $\gamma(x^2)=\gamma(y^2)=0$, *а* $\gamma(xy)=\begin{pmatrix}\varepsilon\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

4.3.5. 3-компонентні нециклічні зображення. Оскільки обчислення тут дуже схожі на обчислення попереднього пункту, ми дамо лише їхній начерк.

Модуль $M=M\boxed{\begin{smallmatrix} & 1\\ 2 & 1\\ & 1\\ & 0\end{smallmatrix}}$ відповідає зображенню

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$a-1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$b-1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a+1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b+1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для функції $\gamma : \mathbb{P}_1 \to M$ такої, що

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad \gamma(y) = \begin{pmatrix} c_2 \\ d_2 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

маємо

$$\partial\gamma(x^2) = \begin{pmatrix} 2c_1 + f_1 \\ 2d_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \partial\gamma(y^2) = \begin{pmatrix} 2c_2 + d_2 \\ 0 \\ 2f_2 \end{pmatrix}, \ \partial\gamma(xy) = \begin{pmatrix} f_2 - d_1 \\ 2d_1 \\ -2f_2 \end{pmatrix}.$$

Тоді, замінивши коцикл $\xi : \mathbb{P}_2 \to M$ на $\xi + \partial\gamma$, ми можемо зробити

$$\xi(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix},\ \xi(y^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi(xy) = \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Із умови $\partial\xi = 0$ випливає, що $w = v = 0$, $v_3 = w_3 = 2u_3$ і $2v_3 = 0$. Отже, u_3 — елемент порядку 4, причому його можна замінити на $u_3 + \varepsilon$, поклавши $f_2 = \varepsilon$, $d_2 = 0$. Це дає таке значення для когомологій.

Твердження 4.20. *Якщо* $M = M_{\boxed{2\,\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\0\end{smallmatrix}}}$ *то* $H^2(G, M) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *і ненульовий елемент цієї групи задається коциклом* ξ *таким, що* $\xi(x^2) = \xi(y^2) = 0$, *а* $\xi(xy) = \begin{pmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}$, *де* ε' *це елемент порядку* 4 *з групи* $\mathbb{T}$, *причому клас когомологій не залежить від вибору такого елемента.*

Таке саме значення має $H^2(G, M)$, *якщо* $M = M_{\boxed{2\,\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\1\end{smallmatrix}}}$ *або* $M = M_{\boxed{2\,\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\1\end{smallmatrix}}}$.

Зауваження 4.21. З формул(4.15) та (4.16) випливає, що твірними групи $H^2(G, M)$ при $M = M_{\boxed{2\,\begin{smallmatrix}1\\0\\1\\1\end{smallmatrix}}}$ є коцикл ξ такий, що

$$\xi(x^2) = \begin{pmatrix} -\varepsilon' \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

$$\xi(y^2) = 0,$$

$$\xi(xy) = \begin{pmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

а при $M = M\boxed{2\,\begin{smallmatrix}1\\1\\0\\1\end{smallmatrix}}$ — такий коцикл ξ, що

$$\xi(x^2) = 0,$$
$$\xi(y^2) = \begin{pmatrix} -\varepsilon' \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$
$$\xi(xy) = \begin{pmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Модуль $M = M\boxed{2\,\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\1\end{smallmatrix}}$ відповідає зображенню

$$a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$a-1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

$$b-1=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix},$$

$$a+1=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$b+1=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Для функції $\gamma : \mathbb{P}_1 \to M$ такої, що

$$\gamma(x)=\begin{pmatrix}c_1\\ d_1\\ f_1\end{pmatrix}, \quad \gamma(y)=\begin{pmatrix}c_2\\ d_2\\ f_2\end{pmatrix},$$

маємо

$$\partial\gamma(x^2)=\begin{pmatrix}2c_1+d_1+f_2\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\ \partial\gamma(y^2)=\begin{pmatrix}-d_1\\ 2d_1\\ 0\end{pmatrix},\ \partial\gamma(xy)=\begin{pmatrix}d_2+f_2+2c_1+d_1\\ -2d_2\\ -2f_2+2f_1\end{pmatrix}.$$

Тоді, замінивши коцикл $\xi : \mathbb{P}_2 \to M$ на $\xi + \partial\gamma$, ми можемо зробити

$$\xi(x^2)=\begin{pmatrix}0\\ v\\ v\end{pmatrix},\ \xi(y^2)=\begin{pmatrix}0\\ o\\ w\end{pmatrix},\ \xi(xy)=\begin{pmatrix}0\\ v\\ v+w\end{pmatrix}.$$

Твердження 4.22. *Якщо* $M = M\boxed{2\,\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\1\end{smallmatrix}}$ *то* $H^2(G, M) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ *і складається з класів коциклів* ξ *таких, що*

$$\xi(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ v \end{pmatrix}, \text{‘}\xi(y^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}, \ \xi(xy) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ v+w \end{pmatrix},$$

де $v, w \in \{0, \varepsilon\}$.

Зауважимо, що використовуючи формули (4.13), ми можемо знайти коцикли в “стандартному” вигляді, тобто системи факторів для розширень. Наприклад, у випадку модуля $M\boxed{2\,\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\1\end{smallmatrix}}$, позначивши $\tilde{\xi} = \xi\sigma_2$, ми отримуємо системи факторів

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}(a, a) = \tilde{\xi}(a, ab) &= \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ v \end{pmatrix}, \\
\tilde{\xi}(a, b) &= 0, \\
\tilde{\xi}(b, b) = \tilde{\xi}(ab, b) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}, \\
\tilde{\xi}(b, a) &= \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ v+w \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\tilde{\xi}(b, ab) = \begin{pmatrix} w \\ v \\ v + w \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\xi}(ab, a) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ v + w \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\xi}(ab, ab) = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ w \end{pmatrix}.$$

4.4. Приклади розширень.

Знаючи значення і конкретний вигляд груп когомологій, можна відтворювати відповідні p-групи Чернікова та їх задання твірними та співвідношеннями (дивись підрозділ , зокрема, формулу (1.4)). Наведемо приклади. В усіх прикладах верхівка 2-групи Чернікова $\mathbf{G}$ — це четвірна група Кляйна G. Через M ми позначаємо базу групи $\mathbf{G}$, розглянуту як G-модуль.

Приклад 4.23. Нехай база M 2-групи Чернікова $\mathbf{G}$ — це G-модуль $M = M\boxed{\begin{smallmatrix} & 1 \\ 1 & 1 \\ & 1 \\ & 0 \end{smallmatrix}}$, а відповідний елемент групи когомологій — це клас коциклу $\gamma = \gamma(u, v)$, описаного в теоремі 4.17. Тоді $\mathbf{G}$ породжується 2-підгрупою $M \simeq 3C$, де C — квазіциклічна 2-група та елементами a, b зі співвідношеннями

$$
\begin{aligned}
&a\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1+c_3\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} a,\\
&b\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\\ -c_2+c_3\\ c_3\end{pmatrix} b,\\
&a^2=b^2=1,\\
&aba^{-1}b^{-1} = \begin{pmatrix} u\\ v\\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Приклад 4.24. Нехай база M 2-групи Чернікова $\mathbf{G}$ — це G-модуль $M = M\boxed{\begin{smallmatrix} & 0\\ 2 & 1\\ & 1\\ & 1\end{smallmatrix}}$, а відповідний елемент групи когомологій — це клас коциклу $\gamma = \gamma(u, v)$, описаного в теоремі 4.17. Тоді $\mathbf{G}$ породжується 2-підгрупою $M \simeq 3C$, де C — квазіциклічна 2-група та елементами a, b зі співвідношеннями

$$
\begin{aligned}
&a\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1+c_3\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} a,\\
&b\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1\\ -c_2+c_3\\ c_3\end{pmatrix} b,\\
&a^2=b^2=1,\\
&aba^{-1}b^{-1} = \begin{pmatrix} u\\ v\\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Приклад 4.25. Нехай база M 2-групи Чернікова $\mathbf{G}$ — це G-модуль $M = M\boxed{1\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\1\end{smallmatrix}} \oplus M\boxed{2\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\1\end{smallmatrix}}$, а відповідний елемент групи когомологій — $\gamma + \xi$, де γ це клас коциклу, описаний у зауваженні (4.15), а $\xi = \xi(v, w)$ — клас коциклу, описаного у твердженні (4.22). Тоді група $\mathbf{G}$ породжується підгрупою $M \simeq 5C$ і елементами a, b зі співвідношеннями

$$a\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ c_3 + c_4 + c_5 \\ -c_4 \\ -c_5 \end{pmatrix} a,$$

$$b\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ -c_2 \\ -c_3 - c_4 \\ c_4 \\ -c_5 \end{pmatrix} b,$$

$$a^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ v \\ v \end{pmatrix},$$

$$b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix},$$

$$aba^{-1}b^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ 0 \\ 0 \\ v \\ v+w \end{pmatrix}.$$

Висновки до розділу 4.

У цьому розділі побудовано нову, спрощену резольвенту, яка дає можливість обчислювати когомології скінченних абелевих груп. Установлено її зв'язок зі стандартною резольвентою, що є особливо важливим для розгляду розширень груп. Встановлено нові формули двоїстості для когомологій G-решіток. Обчислено когомології незвідних G-решіток та другі когомології модулів, дуальних до неточних решіток над четвірною групою Кляйна.

ВИСНОВКИ

Отже, у дисертаційній роботі одержано наступні нові наукові результати.

1. Описано черніківські p-групи з елементарною абелевою верхівкою та основою рангу 2.
2. Дано класифікацію пар кососиметричних форм над полем з точністю до узагальненої конгруентності.
3. Встановлено відповідність між цілочисельними зображеннями четвірної групи Кляйна та зображеннями сагайдака типу $\tilde{D}_4$.
4. Дано класифікацію цілочисельними зображеннями четвірної групи Кляйна з точністю до слабкої еквівалентності.
5. Побудовано нову резольвенту тривіальної решітки над скінченною абелевою групою, краще пристосовану до обчислення когомологій та встановлено її зв'язок зі стандартною резольвентою.
6. Встановлено нові співвідношення двоїстості для решіток над скінченними групами.
7. Обчислено когомології незвідних решіток над скінченними абелевими групами.
8. Обчислено когомології модулів, дуальних до неточних решіток над четвірною групою Кляйна.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Берман С. Д., Гудивок П. М. Целочисленные представления конечных групп // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**. – С. 1199–1201
2. Берман С. Д., Гудивок П. М. Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1964. – **28**. – С. 875–910.
3. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. П. Функторы Кокстера и теорема Габриеля // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, 2. – С. 19–33.
4. Боревич З. И., Фаддеев Д. К. Теория гомологий в группах I Вестник ЛГУ. Сер. математики, механики и астрономии. – 1956. – **7**, 2. – С. 3–39.
5. Боревич З. И., Фаддеев Д. К. Теория гомологий в группах II. Вестник ЛГУ. Сер. математики, механики и астрономии. – 1959. – **14**, 2. – С. 72–87.
6. Боревич З. И., Шафаревич И. П. Теория чисел. – Москва: Наука, 1985. – 504 с.
7. Браун К. С. Когомологии групп. – Москва: Наука, 1987. – 384 с.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – Москва: Физматлит, 2004. – 560 с.

9. Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. В. Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, 6. – С. 742–753.

10. Гудивок П. М., Шапочка И. В. О черниковских p-группах // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, 3. – С. 291–304.

11. Дрозд Ю. А., Кириченко В. В. Наследственные порядки // Укр. мат. жур. – 1968. – **20**. – Р. 246–248.

12. Клейнер М. М. Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.

13. Клейнер М. М. О точных представлениях частично упорядоченных множеств конечного типа // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 42–59.

14. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. – Москва: Наука, 1986. – 302 с.

15. Курош А. Г. Теория групп. – Москва: Наука, 1967. – 648 с.

16. Назарова Л. А. Целочисленные представления четверной группы // Докл. Акад. Наук СССР. – 1961. – **140**. – С. 1101–1014.

17. Назарова Л. А. Предстваления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – **37**. – С. 752–791.

18. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.

19. Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М. Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп,

обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.

20. Сергейчук В. В. Конечно порождённые группы с коммутантом простого порядка // Укр. мат. жур. – 1978. – **30**, 6. – С. 789–796.

21. Сергейчук В. В. Классификационные задачи для систем форм и линейных отображений // Изв. Акад. Наук СССР, Сер. Мат. – 198. – **51**. – С. 1170–1190.

22. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами систем подгрупп. – Москва: Наука, 1980. – 382 с.

23. Шапочка I. В. Про класифікацію нільпотентних черніковських p-груп // Наук. Вісн. Ужгород. унів., сер. мат. – 2005. – **10–11**. – С. 147–151.

24. Шапочка I. В. Друга група когомологій четверної групи Клейна // Наук. Вісн. Ужгород. унів., сер. мат. і шнформ. – 2014. – **25**, 2. – С. 208-215.

25. Яковлев А. В. Классификация 2-адических представлений циклической группы восьмого порядка // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 93–129.

26. Bass H. On the ubiquity of Gorenstein rings // Math. Z. – 1963. – **82**. – P. 8–28.

27. Brumer A. Structure of hereditary orders // Bull. Am. Math. Soc. – 1963. – **69**. – P. 721–724.

28. Cartan H.,Eilenberg S. Homological Algebra. – Princeton University Press. – 1956. – 390 p.

29. Curtis Ch. W., Reiner I. Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders, vol. 1. – Wiley Interscience Publications. – 1981. – 951 p.

30. Dlab V., Ringel C. M. Indecomposable representations of graphs and algebras. – Mem. Amer. Math. Soc, vol. . 6. – 1976. – 57 p.

31. Donovan P., Freislich M. R. The representation theory of finite graphs and associated algebras. – Carleton Mathematical Lecture Notes No.5, 1973. – 83 p.

32. Drozd Y. Reduction algorithm and representations of boxes and algebras // Comtes Rendue Math. Acad. Sci. Canada. – 2001. – **23**. – P. 97–125.

33. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen. I // Manuscr. Math. – 1972. – **6**. – P. 71–103.

34. Hall M. The Theory of Groups. – New York: The Macmillan Company, 1959. – 420 p.

35. Harada M. Structure of hereditary orders over local rings // J. Math. Osaka City Univ. – 1963. – **14**. – P. 1–22.

36. Hartshorne R. Algebraic Geometry. – New York: Springer, 1977. – 496 p.

37. Heller A., Reiner I. Representations of cyclic groups in rings of integers I // Ann. Math. – 1962. – **76**. – P. 73–92.

38. Heller A., Reiner I. Representations of cyclic groups in rings of integers II // Ann. Math. – 1963. – **77**. – P. 318–328.

39. Jones A. Groups with a finite number of indecomposable integral representations // Michigan Math. J. – 1963. – **10**. – P. 257–261.

40. Kac V. Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory // Invent. Math. – 1980. –**56**. –P. 57–92.

41. Lyndon R. C. The cohomology theory of group extensions // Duke Math. J. – 1948. – **15**, 1. – P. 271–292.

42. Ringel C. M. Tame algebras and integral quadratic forms. Lecture Notes in Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 1099 p.

43. Ringel C. M., Roggenkamp K. W. Diagrammatic methods in the representation theory of orders // J. Algebra. – 1979. – **60**. – P. 11–42.

44. Roggenkamp K. W. Auslander–Reiten Species of Backstrom Orders // J. Algebra. – 1983. – **85**. – P. 440-476.

45. Scharlau R. Paare alternierender Formen // Math. Z. – 1976. – **147**. – P. 13–19.

46. Takahashi Sh. Cohomology groups of finite abelian groups // Tohoku Math. J. – 1952. – **4**, 3. – P. 294–302.

47. Waterhouse W. C. Pairs of symmetric bilinear forms in characteristic 2 // Pacific J. Math. – 1977. – **69**. – P. 275-283.

ДОДАТКИ

Список публікацій за темою дисертації

48. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // Arch. Math. – 2014. – **103**. – P. 401–409.

49. Plakosh A. On weak equivalence of representationes of Klein four-group // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2016. – **28**, 1.– С. 114–117.

50. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov 2-groups with elementary tops // Algebra Discrete Math. – 2016. – **22**, 2. – P. 201–208.

51. Плакош А. І., Шапочка І. В. Про когомології четверної групи Клейна // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2017. – **30**, 1. – С. 95–102.

52. Drozd Y., Plakosh A. Cohomologies of finite abelian groups // Algebra Discrete Math. – 2017. – **24**, 1. – P. 144–157.

53. Plakosh A. Weak equivalence of representations of Kleinian 4-group // Algebra Discrete Math. – 2018. – **25**, 1. – P. 130–136.

54. Плакош А. І. Про нільпотентні черніковські 3-групи // Студентська наукова конференція математичного факультету УжНУ: Ужгород, квітень 2013: Збірник праць. Серія "Математика і прикладна математика". – Ужгород, 2013. – С. 218.

55. Дрозд Ю. А., Плакош А. І. Нільпотентні p-групи Чернікова з елементарними верхівками // Міжнародна конференція молодих математиків. Тези доповідей. – Київ, 2015 – С.30.

56. Drozd Y., Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd. Book of abstracts. -– Odessa, 2015. – P. 88.

57. Plakosh A. On nilpotent Chernikov p-groups with elementary tops // International mathematical conference Group and Actions dedicated to the memory of professor Vitaliy Sushchanskyy. Book of abstracts. – Kyiv, 2016. – P. 20.

58. Plakosh A. On cohomologies of Kleinian 4-group // International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 75th anniversary of V. V. Kirichenko. Book of abstracts. – Kyiv, 2017. – P. 103.

Відомості про апробацію результатів дисертації

1. Студентська наукова конференція математичного факультету УжНУ (Ужгород, 18 квітня 2013 р.);
2. Міжнародна конференція молодих математиків (м. Київ, 3–6 червня 2015 р.);
3. X Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, 20–27 серпня 2015 р.);
4. Міжнародна математична коференцыя "Group and Actions", присвячена пам'яті професора Віталія Сущанського (м. Київ, 19–22 грудня 2016 р.);
5. XI Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні, присвячена 75-річчю В. В. Кириченка (м. Київ, 3–7 липня 2017 р.);
6. Семінар під кінець року при механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, керівники — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, доктор фізико-математичних наук А. П. Петравчук, 24 грудня 2015 р.);
7. Семінар кафедри алгебри Ужгородського національного університету (м. Ужгород, керівник — кандидат фізико-математичних наук, доцент І. В. Шапочка, 12 травня 2016 р.);
8. Алгебраїчні семінари Інституту математики НАН України (м. Київ, керівник — доктор фізико-математичних наук, член-кореспондент НАН України Ю. А. Дрозд, 2014–2018 рр.).