НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Кузьменко Тетяна Сергіївна

УДК 517.9

МОНОГЕННІ ВІДОБРАЖЕННЯ В АЛГЕБРІ КОМПЛЕКСНИХ КВАТЕРНІОНІВ

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті математики НАН України.

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
ПЛАКСА Сергій Анатолійович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу комплексного аналізу і теорії потенціалу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ШЕВЧУК Ігор Олександрович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри математичного аналізу;

кандидат фізико-математичних наук
ТРОФИМЕНКО Ольга Дмитрівна,
Донецький національний університет імені Василя Стуса,
м. Вінниця, доцент кафедри математичного аналізу
і диференціальних рівнянь.

Захист відбудеться **16 жовтня 2018 р.** о 15^{00} годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий **12 вересня 2018 р.**

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради **РОМАНЮК А. С.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Вагомим надбанням математики є теорія аналітичних функцій, заданих в областях комплексної площини. Багатство цієї теорії та ефективність її застосувань у різних галузях науки спонукають математиків до розвитку подібних теорій у тривимірному просторі.

Так, ірландський математик і фізик У. Гамільтон, намагаючись описати рухи у просторі за допомогою алгебраїчних операцій у деякій числовій алгебрі, у 1843 році побудував некомутативну чотиривимірну алгебру кватерніонів. Кватерніони і кватерніонні функції використовуються для опису електромагнітних полів, для розв'язку задач орієнтації космічних апаратів, у задачах геофізики та сейсморозвідки, у механіці твердого деформовного тіла, у теорії фракталів та багатьох інших напрямках науки.

У. Гамільтон та його послідовники, зокрема, Ч. Джолі і П. Тайт розвивали теорію функцій кватерніонної змінної методами теорії функцій багатьох дійсних змінних.

У роботах Г. Мойсіла і Н. Теодореско, Р. Фуетера, А. Садбері, Г. Льойтвілера, В. Кравченка і М. Шапіро, К. Гьорлебека і В. Шпрьоссіга, Дж. Раяна, С. Бернштейна, Ф. Коломбо, І. Сабадіні і Д. Струппи та багатьох інших розроблялися різні напрямки кватерніонного аналізу як узагальнення результатів теорії функцій комплексної змінної у тривимірному просторі.

Разом із некомутативним аналізом у тривимірному просторі розроблялися також методи, що базуються на відображеннях у комутативних алгебрах. Так, наприклад, у роботах П. Кетчума, Д. Вагнера, Дж. Ворда, Е. Лорха, Е. Блюма, М. Рошкулєца, К. Кунц, І. П. Мельниченка, С. А. Плакси та інших розвинено теорію аналітичних функцій у комутативних алгебрах і застосовано такі функції для побудови розв'язків диференціальних рівнянь еліптичного типу (зокрема, тривимірного рівняння Лапласа).

Зазначимо, що можливості переносу класичних теорем комплексного аналізу у кватерніонний аналіз є обмеженими. Тому актуальною проблемою є виділення спеціальних класів диференційовних у певному сенсі функцій, заданих у некомутативній алгебрі кватерніонів, вивчення їх алгебраїчно-аналітичних властивостей та доведення для них аналогів класичних теорем теорії аналітичних функцій комплексної змінної. Крім того, з огляду на можливі змістовні застосування важливо, щоб класи таких функцій були достатньо широкими і мали прості конструктивні описи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України у рамках наукової теми "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин", номер державної реєстрації 0116U003060.

Мета і завдання дослідження. *Об'єктом дослідження* є так звані G-моногенні відображення, тобто неперервні і диференційовні за Гато відображення, задані у спеціально виділених підпросторах алгебри комплексних кватерніонів.

Предметом дослідження є алгебраїчно-аналітичні властивості G-моногенних відображень.

Метою дисертаційної роботи є встановлення конструктивного опису G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів і доведення для вказаних відображень аналогів класичних результатів комплексного аналізу (інтегральна теорема і формула Коші, теореми Морера, Тейлора, Лорана).

Завдання дослідження:

- ввести клас G-моногенних (неперервних і диференційовних за Гато) відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$;
- отримати конструктивний опис (за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної) G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$;
- встановити зв'язок G-моногенних відображень з диференціальними рівняннями у частинних похідних;
- довести аналоги класичних інтегральних теорем для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$;
- дослідити розклади G-моногенних відображень у ряди Тейлора і Лорана;
- довести теорему про еквівалентність різних означень G-моногенного відображення.

Методи дослідження. При розв'язанні завдань дисертаційної роботи застосовуються методи комплексного та гіперкомплексного аналізу.

Наукова новизна. Усі отримані у роботі результати є новими, а саме:

- введено клас G-моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та встановлено конструктивний опис усіх цих відображень за допомогою чотирьох відповідних аналітичних функцій комплексної змінної;

- встановлено зв'язок G-моногенних відображень з просторовими рівняннями з частинними похідними (зокрема, наведено застосування G-моногенних відображень до побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа);
- доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого та криволінійного інтеграла від G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, а також аналоги теореми Морера та інтегральної формули Коші для цих відображень;
- доведено аналоги теорем Тейлора і Лорана для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та здійснено класифікацію їх особливостей;
- встановлено зв'язок між G-моногенними та H-моногенними (тобто неперервними і диференційовними за Хаусдорфом) відображеннями та доведено еквівалентність різних означень G-моногенного відображення.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер. Одержані результати та розвинені у ній методи можуть бути використані при розв'язанні диференціальних рівнянь з частинними похідними і крайових задач математичної фізики, що знаходять застосування у гідродинаміці, газодинаміці, теплофізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та загального плану досліджень належать науковому керівнику доктору фізико-математичних наук, професору С. А. Плаксі, постановка задач та формулювання робочих гіпотез — кандидату фізико-математичних наук В. С. Шпаківському. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, здійснені автором самостійно.

Апробація результатів. Результати роботи доповідались на XIII Міжнародній науково-практичній конференції "Шевченківська весна — 2015" (Київ, 2015), XI Літній школі "Алгебра, топологія, аналіз" (Одеса, 2016), VI Міжнародній конференції молодих вчених, присвяченій Я. Б. Лопатинському, "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Київ, 2016), конференції молодих учених "Підстригачівські читання — 2017" (Львів, 2017), Міжнародній науковій конференції "Алгебраїчні та геометричні методи аналізу" (Одеса, 2017), Міжнародній конференції молодих математиків до 100-річчя академіка НАН України, професора Ю. О. Митропольського (Київ, 2017), конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Векше, Швеція, 2017), XVIII Міжнародній науковій конференції ім. академіка Михайла Кравчука, присвяченій 125-й річниці від дня народження М. Кравчука (Луцьк — Київ, 2017), Міжнародній науковій конференції "(Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling: Topology in Physics of Dynamical Systems and Molecular Nanoengines" (Бендлево, Польща, 2017); на семінарах відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса) та на семінарах кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівники: доктор фіз.-мат. наук А. О. Погоруй, доктор фіз.-мат. наук Є. О. Севостьянов, канд. фіз.-мат. наук, доцент О. Ф. Герус).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у 6 роботах [1–6], серед яких 4 статті в українських фахових виданнях та 4 статті у журналах, що індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus. Частково вони також висвітлені у матеріалах міжнародних конференцій [7–14].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 120 найменувань. Повний обсяг роботи становить 130 сторінок друкованого тексту.

Подяки. Висловлюю щиру вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Плаксі Сергію Анатолійовичу за визначення напрямку досліджень, корисні поради і рекомендації, а також кандидату фізико-математичних наук Шпаківському Віталію Станіславовичу за постановку задач, постійну увагу і підтримку при роботі над дисертацією.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету досліджень, коротко викладено зміст основної частини роботи та показано наукову новизну одержаних результатів.

У **розділі 1** зроблено огляд літератури за темою і виділено напрямки досліджень дисертаційної роботи.

У **розділі 2** вивчаються алгебраїчно-аналітичні властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів.

Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватерніонів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої складається з одиниці алгебри 1 і елементів I, J, K, для яких виконуються наступні правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, таблиця множення в якому набуває вигляду

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

,

при цьому одиниця алгебри має розклад: $1 = e_1 + e_2$. Комутативна підалгебра з ідемпотентним базисом $\{e_1, e_2\}$ є алгеброю бікомплексних чисел (або алгеброю комутативних кватерніонів Сегре).

Алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ містить два праві максимальні ідеали:

$$\mathcal{I}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4 : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 : \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}.$$

Введемо у розгляд лінійні функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, задані рівностями

$$f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0,$$
$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0.$$

Ядрами функціоналів f_1 та f_2 є відповідно максимальні ідеали $\mathcal{I}_1$ та $\mathcal{I}_2$.

Нехай

$$i_1 = e_1 + e_2, \qquad i_2 = a_1 e_1 + a_2 e_2, \qquad i_3 = b_1 e_1 + b_2 e_2 \tag{1}$$

при $a_k, b_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2,$ — трійка лінійно незалежних векторів над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Це означає, що рівність

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ лінійну оболонку $E_3 := \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжену векторами i_1, i_2, i_3. Множині S тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність множину $S_\zeta := \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : (x, y, z) \in S\} \subset E_3$.

Позначимо $\xi_1 := f_1(\zeta) = x + a_1 y + b_1 z$, $\xi_2 := f_2(\zeta) = x + a_2 y + b_2 z$. Тоді елемент $\zeta \in E_3$ подається у вигляді $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$.

Означення 2.2.3. Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називаємо *право-G-моногенним* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3.$$

Означення 2.2.4. Неперервне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називаємо *ліво-G-моногенним* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\widehat{\Phi}(\zeta + \varepsilon h) - \widehat{\Phi}(\zeta)}{\varepsilon} = \widehat{\Phi}'(\zeta) h \quad \forall\, h \in E_3.$$

У підрозділі 2.2 доведено критерії право- і ліво-G-моногенності відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 2.2.1. *Для того, щоб відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=1}^{4} U_n(x, y, z) e_n, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω, було право-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = a_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = a_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial y} = a_1 \frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial y} = a_2 \frac{\partial U_4}{\partial x},$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = b_1 \frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = b_2 \frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial z} = b_1 \frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial z} = b_2 \frac{\partial U_4}{\partial x}.$$

Аналогічний критерій ліво-G-моногенності відображення встановлено у теоремі 2.2.2.

Відмітимо, що отримані умови є аналогами умов Коші–Рімана, які для право-G-моногенного відображення у згорнутому вигляді можуть бути записані співвідношеннями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = i_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = i_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{3}$$

Для ліво-G-моногенного відображення аналогічні умови мають вигляд

$$\frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x} i_2, \qquad \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x} i_3. \tag{4}$$

Точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 \in E_3$, утворюють дві прямі у тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$:

$$L^1 : \quad \begin{cases} x + y \operatorname{Re} a_1 + z \operatorname{Re} b_1 = 0, \\ y \operatorname{Im} a_1 + z \operatorname{Im} b_1 = 0, \end{cases} \qquad L^2 : \quad \begin{cases} x + y \operatorname{Re} a_2 + z \operatorname{Re} b_2 = 0, \\ y \operatorname{Im} a_2 + z \operatorname{Im} b_2 = 0\,. \end{cases}$$

Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ опукла у напрямку прямих L^1 і L^2 (область називають *опуклою в напрямку прямих L^1 та L^2*, якщо вона містить кожен відрізок, який паралельний хоча б одній з прямих L^1 та L^2 і з'єднує дві точки цієї області).

Лема 2.3.3. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла у напрямку прямих L^1_ζ, L^2_ζ і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, а відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним в області Ω_ζ. Якщо точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L^1\}$, то $\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_1$. Якщо ж точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L^2\}$, то $\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_2$.*

Аналогічне твердження доведено для ліво-G-моногенних відображень (лема 2.3.4).

У пункті 2.3.1 доведено, що G-моногенне в області Ω_ζ відображення є сумою G-моногенних відображень, які приймають значення у відповідних ідеалах.

Теорема 2.3.1. *Кожне право-G-моногенне в області Ω_ζ відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta),$$

де $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$, $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ — деякі право-G-моногенні в області Ω_ζ відображення зі значеннями відповідно у правих максимальних ідеалах $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$.

Аналогічне твердження доведено для ліво-G-моногенних відображень (теорема 2.3.2).

Позначимо через

$$D_1 := f_1(\Omega_\zeta) = \{\xi_1 = x + a_1 y + b_1 z : (x, y, z) \in \Omega\},$$

$$D_2 := f_2(\Omega_\zeta) = \{\xi_2 = x + a_2 y + b_2 z : (x, y, z) \in \Omega\}$$

області у комплексній площині $\mathbb{C}$, на які область Ω_ζ відображається відповідно функціоналами f_1, f_2.

У наступних теоремах пункту 2.3.1 отримано конструктивний опис усіх право-G-моногенних відображень, які визначені в області Ω_ζ і приймають значення в ідеалах $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$, за допомогою аналітичних функцій відповідних комплексних змінних.

Теорема 2.3.3. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла у напрямку прямої L^2_ζ і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$ подається у вигляді*

$$\Phi_1(\zeta) = F_2(\xi_2)e_2 + F_4(\xi_2)e_4 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{5}$$

де F_2, F_4 — деякі аналітичні в області D_2 функції змінної ξ_2.

Теорема 2.3.4. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла у напрямку прямої* L_ζ^1 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне право-*$G$*-моногенне відображення* $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ *подається у вигляді*

$$\Phi_2(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_3(\xi_1)e_3 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{6}$$

де F_1, F_3 *— деякі аналітичні в області* D_1 *функції змінної* ξ_1.

Встановлено також конструктивний опис за допомогою аналітичних функцій відповідних комплексних змінних усіх ліво-G-моногенних відображень, які визначені в області Ω_ζ і приймають значення в лівих максимальних ідеалах алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ (теореми 2.3.5 і 2.3.6).

У пункті 2.3.2 наведено конструктивний опис усіх G-моногенних відображень, які визначені в області Ω_ζ і приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, за допомогою відповідних чотирьох аналітичних функцій комплексної змінної. Так, з теореми 2.3.1 та рівностей (5), (6) випливає, що кожне право-G-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4. \tag{7}$$

Аналогічно кожне ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{F}_1(\xi_1)e_1 + \widehat{F}_2(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3(\xi_2)e_3 + \widehat{F}_4(\xi_1)e_4, \tag{8}$$

де $\widehat{F}_1, \widehat{F}_4$ — деякі аналітичні в області D_1 функції змінної ξ_1, а $\widehat{F}_2, \widehat{F}_3$ — деякі аналітичні в області D_2 функції змінної ξ_2.

Наступне твердження випливає безпосередньо з рівностей (7) і (8), праві частини яких є відповідно право- і ліво-G-моногенними відображеннями в області $\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f_1(\zeta) \in D_1,\ f_2(\zeta) \in D_2\}$.

Теорема 2.3.9. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла у напрямку прямих* L_ζ^1, L_ζ^2 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне право-*$G$*-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *продовжується до право-*G*-моногенного відображення в області* Π_ζ, *а ліво-*G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— до ліво-*G*-моногенного відображення в області* Π_ζ.

Принциповим наслідком рівностей (7) та (8) є наступне твердження, справедливе для G-моногенних відображень у довільній області Ω_ζ.

Теорема 2.3.10. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— право-*G*-моногенне, а* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— ліво-*G*-моногенне в області* Ω_ζ. *Тоді похідні Гато усіх порядків* $\Phi^{(s)}$ *є право-*G*-моногенними відображеннями, а* $\widehat{\Phi}^{(s)}$ *— ліво-*G*-моногенними відображеннями в області* Ω_ζ.

У підрозділі 2.4 досліджено зв'язок G-моногенних відображень з просторовими рівняннями з частинними похідними. Зокрема, наведено застосування G-моногенних відображень до побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа.

У **розділі 3** доводиться, що G-моногенні відображення, які визначені в областях з E_3 і приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, мають ряд властивостей, подібних до властивостей аналітичних функцій комплексної змінної.

У підрозділі 3.1 спочатку встановлено аналог формули Гауса–Остроградського в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.1.1. *Нехай однозв'язна область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *має замкнену кусково-гладку межу* $\partial\Omega_\zeta$, *а неперервні відображення* $\varphi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\psi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *мають неперервні частинні похідні першого порядку в області* Ω_ζ, *які неперервно продовжуються на межу* $\partial\Omega_\zeta$. *Тоді*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \varphi(\zeta)\,\sigma\,\psi(\zeta) = \int\limits_{\Omega_\zeta} \left(\frac{\partial\,(\varphi\, i_1\, \psi)}{\partial x} + \frac{\partial\,(\varphi\, i_2\, \psi)}{\partial y} + \frac{\partial\,(\varphi\, i_3\, \psi)}{\partial z}\right) dxdydz,$$

де $\sigma := dydz + i_2 dzdx + i_3 dxdy\,.$

Наслідком теореми 3.1.1 і умов (3), (4) є наступний аналог інтегральної теореми Коші.

Теорема 3.1.2. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *має замкнену кусково-гладку межу* $\partial\Omega_\zeta$, *відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— право-*G*-моногенне, а* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— ліво-*G*-моногенне в* Ω_ζ, *і вони разом із своїми частинними похідними першого порядку неперервно продовжуються на межу* $\partial\Omega_\zeta$. *Тоді*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\,\sigma\,\Phi(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \Big[\widehat{\Phi}'(\zeta)(1 + i_2^2 + i_3^2)\Phi(\zeta) + \widehat{\Phi}(\zeta)(1 + i_2^2 + i_3^2)\Phi'(\zeta)\Big] dxdydz. \qquad (9)$$

Наслідком теореми 3.1.2 є наступне твердження.

Наслідок 3.1.1. *При виконанні умов теореми* 3.1.2 *і додатковому припущенні* $1 + i_2^2 + i_3^2 = 0$ *рівність* (9) *набуває вигляду*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\,\sigma\,\Phi(\zeta) = 0.$$

У підрозділі 3.2 спочатку встановлено аналог формули Стокса в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.2.1. *Нехай відображення* $\varphi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\psi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервні разом із частинними похідними першого порядку в області* Ω_ζ *і* Σ_ζ *— довільна кусково-гладка поверхня в* Ω_ζ *зі спрямлюваним жордановим краєм* γ_ζ. *Тоді*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) = \int\limits_{\Sigma_\zeta} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\, i_2\, \psi + \varphi\, i_2\, \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, \psi - \varphi\, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) dxdy +$$

$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\, i_3\, \psi + \varphi\, i_3\, \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\, i_2\, \psi - \varphi\, i_2\, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right) dydz +$$

$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\, \psi + \varphi\, \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\, i_3\, \psi - \varphi\, i_3\, \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) dzdx.$$

Далі, у випадку довільної області Ω_ζ доведено наступний аналог інтегральної теореми Коші (частинний випадок опуклої області Ω_ζ розглянуто у теоремі 3.2.3).

Теорема 3.2.4. *Нехай в області* Ω_ζ *визначені право-*G*-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і ліво-*G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$. *Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої* $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$, *гомотопної точці області* Ω_ζ, *справедлива рівність*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0. \tag{10}$$

У теоремі 3.2.5 встановлено достатні умови на криву γ_ζ, розміщену на межі області, при яких справедлива рівність (10) для G-моногенних відображень, неперервних у замиканні області Ω_ζ.

У підрозділі 3.3 доведено аналоги теореми Морера для відображень, які задані в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.3.1. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Якщо відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервне в області* Ω_ζ *і виконується рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle_\zeta} d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0 \tag{11}$$

для кожного трикутника $\triangle_\zeta$ *такого, що* $\overline{\triangle_\zeta} \subset \Omega_\zeta$, *то відображення* Φ *є право-*G*-моногенним в області* Ω_ζ.

Аналогічне твердження доведено для ліво-G-моногенних відображень (теорема 3.3.2).

У підрозділі 3.4 доведено аналоги інтегральної формули Коші для G-моногенних відображень в області Ω_ζ.

Нехай $\zeta_0 = \xi_{10}e_1 + \xi_{20}e_2$ — фіксована точка області $\Omega_\zeta \subset E_3$. В околі ζ_0, який міститься в Ω_ζ, візьмемо коло $C(\zeta_0)$ з центром у точці ζ_0. Через $C_k \subset \mathbb{C}$ позначимо образ кола $C(\zeta_0)$ при відображенні функціоналом f_k, $k = 1, 2$.

Вважатимемо, що коло $C(\zeta_0)$ *охоплює множину* $\{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L^1_\zeta \cup L^2_\zeta\}$. Це означає, що C_k є межею деякої області D'_k і $\xi_{k0} \in D'_k$, $k = 1, 2$.

Будемо казати, що крива $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$ *охоплює один раз множину* $\{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L^1_\zeta \cup L^2_\zeta\}$, якщо існує коло $C(\zeta_0)$, яке охоплює вказану множину і гомотопне кривій γ_ζ в області $\Omega_\zeta \setminus \{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L^1_\zeta \cup L^2_\zeta\}$.

Теорема 3.4.1. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла у напрямку прямих L^1_ζ, L^2_ζ і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, а відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним в області Ω_ζ. Тоді для довільної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ справедлива рівність*

$$\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} (\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta \, \Phi(\zeta),$$

де γ_ζ — довільна жорданова спрямлювана крива в Ω_ζ, яка охоплює один раз множину $\{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L^1_\zeta \cup L^2_\zeta\}$.

Аналогічне твердження доведено для ліво-G-моногенних відображень (теорема 3.4.2).

У підрозділі 3.5 з використанням представлень (7) і (8) G-моногенних відображень $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ отримано їх розклад у ряд Тейлора.

Нехай $\zeta_0 = x_0 i_1 + y_0 i_2 + z_0 i_3$ — довільна фіксована точка області Ω_ζ. Поставимо їй у відповідність точки комплексної площини $\xi_{10} = f_1(\zeta_0) = x_0 + a_1 y_0 + b_1 z_0$ і $\xi_{20} = f_2(\zeta_0) = x_0 + a_2 y_0 + b_2 z_0$, де a_k, b_k — коефіцієнти розкладу (1) при $k = 1, 2$.

Розглянемо кулю $\Theta(\zeta_0, R_0) := \{\zeta \in E_3 : \|\zeta - \zeta_0\| < R_0\} \subset E_3$ радіуса $R_0 := \min\limits_{\zeta \in \partial\Omega_\zeta} \|\zeta - \zeta_0\|$ з центром у точці ζ_0. Через G_1 і G_2 позначимо області у $\mathbb{C}$, на які куля $\Theta(\zeta_0, R_0)$ відображається відповідно функціоналами f_1 і f_2.

Нехай $R := \min\Big\{R_0\,, \min\limits_{\tau_1 \in \partial G_1} |\tau_1 - \xi_{10}|\,, \min\limits_{\tau_2 \in \partial G_2} |\tau_2 - \xi_{20}|\Big\}$. Через $U(\xi_{10}, R)$ і $U(\xi_{20}, R)$ позначимо круги радіуса R в комплексній площині з центрами відповідно у точках ξ_{10} і ξ_{20}.

Введемо у розгляд область $B(\zeta_0, R) := \{\zeta \in E_3 : f_1(\zeta) \in U(\xi_{10}, R)$, $f_2(\zeta) \in U(\xi_{20}, R)\}$, яка опукла у напрямку прямих L^1_ζ, L^2_ζ за побудовою.

Теорема 3.5.1. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є право-*G*-моногенним в області* Ω_ζ *і* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$. *Тоді в області* $B(\zeta_0, R)$ *відображення* Φ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного степеневого ряду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n, \tag{12}$$

в якому

$$p_n = a_n e_1 + b_n e_2 + c_n e_3 + d_n e_4 \tag{13}$$

і $a_n\,, b_n\,, c_n\,, d_n$ *— коефіцієнти рядів Тейлора функцій*

$$F_1(\xi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_2(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n,$$

$$F_3(\xi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_4(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n,$$

які містяться у представленні (7) *відображення* Φ *при* $\zeta \in B(\zeta_0, R)$.

Аналогічне твердження доведено для ліво-G-моногенних відображень (теорема 3.5.2).

Доведено також теореми єдиності для право-G-моногенних відображень (теорема 3.5.3) і ліво-G-моногенних відображень (теорема 3.5.4), що визначені в області $\Omega_\zeta \subset E_3$ і приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

У підрозділі 3.6 при розгляді питання про розклад G-моногенного відображення у ряд Лорана відносно точки $\zeta_0 = x_0 i_1 + y_0 i_2 + z_0 i_3$ з урахуванням теореми 2.3.9 припускається, що воно задане у необмеженій області

$$\mathcal{K}_\zeta := \{\zeta \in E_3 : 0 \le r < |\xi_1 - \xi_{10}| < R \le \infty\,, 0 \le r < |\xi_2 - \xi_{20}| < R \le \infty\}\,.$$

Теорема 3.6.1. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне право-*$G$*-моногенне відображення* $\Phi : \mathcal{K}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *в області* $\mathcal{K}_\zeta$ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n\,,$$

де $(\zeta - \zeta_0)^n := \left((\zeta - \zeta_0)^{-1}\right)^{-n}$ *при* $n = -1, -2, \ldots$ *і коефіцієнти* p_n *визначаються формулами* (13), *в яких* a_n, b_n, c_n, d_n *— коефіцієнти рядів Лорана* *функцій*

$$F_1(\xi_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_2(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n,$$

$$F_3(\xi_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_4(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n,$$

які містяться у розкладі (7) *відображення* Φ *при* $\zeta \in \mathcal{K}_\zeta$.

Аналогічне твердження доведено для ліво-G-моногенних відображень (теорема 3.6.2).

Підрозділ 3.6 закінчується теоремою 3.6.3, в якій, спираючись на теореми 3.6.1, 3.6.2, здійснено класифікацію особливих точок G-моногенних відображень на усувні точки, полюси та істотно особливі точки.

У **розділі 4** досліджуються властивості H-моногенних відображень та їх зв'язок із G-моногенними відображеннями.

Означення 4.1.1. Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду (2) будемо називати *H-моногенним* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ диференційовне за Хаусдорфом у кожній точці $\zeta \in \Omega_\zeta$, тобто якщо компоненти цього відображення мають частинні похідні першого порядку за змінними x, y, z, і формальний диференціал відображення

$$d\Phi := \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} dx + \frac{\partial U_n}{\partial y} dy + \frac{\partial U_n}{\partial z} dz \right) e_n$$

є лінійним однорідним поліномом диференціала $d\zeta = dx + i_2 dy + i_3 dz$, тобто

$$d\Phi = \sum_{s=1}^{16} A_s \, d\zeta \, B_s \, ,$$

де A_s, B_s — деякі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ – значні функції.

Значення $\Phi'_H(\zeta) := \sum\limits_{s=1}^{16} A_s B_s$ називають *похідною Хаусдорфа* відображення $\Phi(\zeta)$ у точці ζ.

У підрозділі 4.1 доведено теорему 4.1.1 про існування та єдиність похідної H-моногенного відображення, а також теорему 4.1.2 про похідну добутку H-моногенних відображень.

Зв'язок між G-моногенними і H-моногенними відображеннями встановлено у наступній теоремі.

Теорема 4.2.1. *Кожне право-G-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і кожне ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в області Ω_ζ є H-моногенними відображеннями у цій області.*

Означення 4.2.2. H-моногенне відображення Φ, диференціал якого подається у вигляді $d\Phi = d\zeta\,\Phi'_H(\zeta)$, називаємо *право-$H$-моногенним* в області Ω_ζ.

Означення 4.2.3. H-моногенне відображення $\widehat{\Phi}$, диференціал якого подається у вигляді $d\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}'_H(\zeta)d\zeta$, називаємо *ліво-$H$-моногенним* в області Ω_ζ.

У наступній теоремі встановлено необхідні і достатні умови G-моногенності відображення.

Теорема 4.2.2. *Нехай компоненти $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ відображення* (2) *є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω. Відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли воно право-H-моногенне, а відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є ліво-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли воно ліво-H-моногенне в області Ω_ζ.*

Завершує розділ 4 теорема про еквівалентність різних означень G-моногенних відображень, яку сформулюємо тут для право-G-моногенного відображення.

Теорема 4.2.3. *Відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_3$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *компоненти $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу* (2) *є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і виконуються умови* (3) *у кожній точці області Ω_ζ;*

2) *компоненти $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу* (2) *є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і відображення Φ є право-H-моногенним в області Ω_ζ.*

Якщо $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, то відображення Φ є право-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

3) *для кожної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ знайдеться окіл, в якому відображення Φ розкладається у степеневий ряд* (12)*;*

4) *відображення Φ неперервне і виконується рівність* (11) *для кожного трикутника $\triangle_\zeta$ такого, що $\overline{\triangle}_\zeta \subset \Omega_\zeta$.*

Якщо $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$ і, крім того, область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла у напрямку прямих L^1_ζ, L^2_ζ, то відображення Φ є право-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли

5) *існують єдина пара аналітичних в області D_1 функцій F_1, F_3 і єдина пара аналітичних в області D_2 функцій F_2, F_4 таких, що в області Ω_ζ відображення Φ подається у вигляді* (7) .

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вивчаються алгебраїчно-аналітичні властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Основні результати дисертації такі:

1. Введено класи G-моногенних відображень (для яких існує права чи ліва похідна Гато) в алгебрі комплексних кватерніонів та встановлено конструктивний опис цих відображень за допомогою чотирьох аналітичних функцій комплексної змінної.

2. Доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого та криволінійного інтеграла від G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, аналоги теореми Морера, а також інтегральної формули Коші для цих відображень.

3. Доведено аналоги теорем Тейлора і Лорана для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів та здійснено класифікацію особливостей цих відображень.

4. Досліджено основні властивості H-моногенних (неперервних і диференційовних за Хаусдорфом) відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та доведено теорему про еквівалентність різних означень G-моногенного відображення.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Кузьменко Т. С. Степеневі ряди та ряди Лорана в алгебрі комплексних кватерніонів // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — **12** (3). — С. 164 – 174.

2. Шпаківський В. С., Кузьменко Т. С. Про один клас кватерніонних відображень // Укр. мат. журн. — 2016. — **68** (1). — С. 117 – 130.

3. Shpakivskyi V. S., Kuzmenko T. S. Integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. — 2016. — **24** (2). — P. 271 – 281.

4. Kuzmenko T. S. Curvilinear integral theorem for G-monogenic mappings in the algebra of complex quaternion // Int. J. Adv. Research Math. — 2016. — **6**. — P. 21 – 25.

5. Шпаковский В. С., Кузьменко Т. С. О моногенных отображениях кватернионной переменной // Укр. мат. вісник. — 2016. — **13** (2). — С. 123 – 142.

6. Kuzmenko T. S., Shpakivskyi V. S. Generalized integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings // Укр. мат. вісник. — 2016. — **13** (4). — С. 499 – 513.

7. Кузьменко Т. С. Конструктивний опис G-моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів // Матер. XIII Міжнар. наук.-практич. конф. ”Шевченківська весна — 2015”, Київ, 1 – 3 квітня 2015 р. / КНУ ім. Т. Шевченка. — Київ, 2015. — С. 26 – 29.

8. Кузьменко Т. С. Про еквівалентність різних означень G-моногенних відображень // XI Літня школа "Алгебра, топологія, аналіз" , 1 – 14 серпня 2016 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2016. — С. 58 – 60.

9. Kuzmenko T. S. The relation between G-monogenic mappings and partial differential equations // 5$^{\text{th}}$ International conference for young scientists on differential equations and applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine. — Vinnytsia, 2016. — P. 93 – 94.

10. Кузьменко Т. Інтегральні теореми в алгебрі комплексних кватерніонів // Конференція молодих учених ”Підстригачівські читання — 2017”, 23 – 25 травня 2017 р., Львів, Україна. — http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Kuzmenko.pdf.

11. Kuzmenko T. Constructive description of G-monogenic mappings in the algebra of complex quaternions // International scientific conference ”Algebraic and geometric methods of analysis”, 31 May – 05 June, 2017, Odessa, Ukraine. — P. 67 – 68.

12. Kuzmenko T. S. Integral theorems in the algebra of complex quaternions // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100$^{\text{th}}$ Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008). June 7 – 10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017 — P. 35.

13. Kuzmenko T. G-monogenic mappings in the algebra of complex quaternions // Abstract of 12$^{\text{th}}$ ISAAC Congress. — Linnaeus University, Växjö, Sweden, August 14 – 18, 2017. — P. 43.

14. Kuzmenko T. On equvivalence of different definitions of G-monogenic mappings // Proceedings of XVIII International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, October 7 – 10, 2017, Kyiv: Vol. 1. — Kyiv: NTUU «KPI», 2017. — P. 162 – 165.

АНОТАЦІЇ

Кузьменко Т. С. Моногенні відображення в алгебрі комплексних кватерніонів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз" (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

У дисертації досліджуються алгебраїчно-аналітичні властивості G-моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Встановлено конструктивний опис усіх G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної. Доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого і криволінійного інтегралів від G-моногенних відображень, одержано аналог інтегральної формули Коші, а також аналоги теорем Морера, Тейлора і Лорана для цих відображень. Досліджено основні властивості H-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, встановлено їх зв'язок із G-моногенними відображеннями та доведено теорему про еквівалентність різних означень G-моногенних відображень.

Ключові слова: алгебра комплексних кватерніонів, G-моногенні відображення, умови Коші–Рімана, теорема Коші, інтегральна формула Коші, теорема Морера, ряд Тейлора, ряд Лорана, H-моногенні відображення.

Кузьменко Т. С. Моногенные отображения в алгебре комплексных кватернионов. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (доктора философии) по специальности 01.01.01 "Математический анализ" (111 — математика). — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

В диссертации исследуются алгебраично-аналитические свойства G-моногенных отображений в алгебре комплексных кватернионов $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Получены конструктивные описания G-моногенных отображений со значениями в алгебре $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ с помощью аналитических функций комплексной пере-

менной. Доказаны аналоги интегральных теорем Коши для поверхностного и криволинейного интегралов от G-моногенных отображений, получен аналог интегральной формулы Коши, а также аналоги теорем Морера, Тейлора и Лорана для этих отображений. Исследованы основные свойства H-моногенных отображений со значениями в алгебре $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, установлена их связь с G-моногенными отображениями и доказана теорема об эквивалентности разных определений G-моногенных отображений.

Ключевые слова: алгебра комплексных кватернионов, G-моногенные отображения, условия Коши–Римана, теорема Коши, интегральная формула Коши, теорема Морера, ряд Тейлора, ряд Лорана, H-моногенные отображения.

Kuzmenko T. S. Monogenic mappings in the algebra of complex quaternions. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Candidate of Sciences thesis on Physics and Mathematics (PhD thesis) by speciality 01.01.01 "Mathematical analysis" (111 – mathematics). – Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

New classes of monogenic mappings are introduced in the algebra of complex quaternions $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. In the commutative algebra of bicomplex numbers, which is a subalgebra of the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, we select a three-dimensional real subspace and consider continuous mappings given in a domain of this subspace and taking values in the algebra of complex quaternions. Among such mappings we single out the right-G-monogenic mappings for which the right Gâteaux derivative exists and the left-G-monogenic mappings for which the left Gâteaux derivative exists at all points of domain.

The principal algebraic-analytic properties of G-monogenic mappings taking values in the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ are investigated. Analogues of the Cauchy–Riemann conditions are obtained, and it is shown that not only quaternionic polynomials but also quaternionic power series are G-monogenic. Moreover, we have obtained constructive descriptions of all G-monogenic mappings by means of four corresponding analytic functions of complex variable. As consequences of such descriptions, the theorems about G-monogenic extensions of mappings and the infinite differentiability in the sense of Gâteaux of G-monogenic mappings are proved.

A relationship between G-monogenic mappings and spatial differential equations in the partial derivatives is established. In particular, we discuss several applications of G-monogenic mappings to the construction of solutions of the three-dimensional Laplace equation.

For G-monogenic mappings taking values in the algebra of complex quaternions, properties related with integral representations of mappings and their representation in the form of series are investigated. It is established for G-monogenic mappings that analogues of some classical integral theorems are true. In particular, analogues of the Ostrogradsky–Gauss formula and the Stokes formula are proved. Analogues of the Cauchy integral theorems for both a surface integral and a curvilinear integral of G-monogenic mappings as well as analogues of the Cauchy integral formula are proved for these mappings. Analogues of the Morera theorem and the Taylor theorem and the Laurent theorem for G-monogenic mappings taking values in the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ are also proved and singularities of these mappings are classified.

The principal algebraic-analytic properties of H-monogenic (i. e. continuous and differentiable in the sense of Hausdorff) mappings taking values in the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ are investigated. The relation between G-monogenic and H-monogenic mappings is established and a theorem about the equivalence of different definitions of right-G-monogenic and left-G-monogenic mappings is proved.

Key words: the algebra of complex quaternions, G-monogenic mapping, the Cauchy–Riemann conditions, the Cauchy theorem, the Cauchy integral formula, the Morera theorem, the Taylor series, the Laurent series, H-monogenic mapping.

Підписано до друку 05.07.2018. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк.
Фіз. друк. арк. 1,5. Умов. друк. арк. 1,4. Тираж 100 пр. Зам. 35.
Інститут математики НАН України,
01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.