Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

Кузьменко Тетяна Сергіївна

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

Моногенні відображення в алгебрі комплексних кватерніонів

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико–математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

________________ Т. С. Кузьменко

Науковий керівник
Плакса Сергій Анатолійович
доктор фізико–математичних наук,
професор

Київ — 2018

АНОТАЦІЯ

Кузьменко Т. С. Моногенні відображення в алгебрі комплексних кватерніонів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.01 "Математичний аналіз" (111 — Математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

У роботі введено нові класи моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. В комутативній алгебрі бікомплексних чисел, яка є підалгеброю алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, виділено тривимірний дійсний підпростір і розглянуто неперервні відображення, які визначені в області цього підпростору та приймають значення в алгебрі комплексних кватерніонів і для яких існує права похідна Гато (право-G-моногенні відображення) чи ліва похідна Гато (ліво-G-моногенні відображення) в усіх точках області.

Досліджено основні алгебраїчно-аналітичні властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. Отримано аналоги умов Коші–Рімана та встановлено, що G-моногенними є не лише кватерніонні поліноми, а й кватерніонні степеневі ряди. Більше того, в роботі встановлено конструктивні описи усіх G-моногенних відображень за допомогою чотирьох відповідних аналітичних функцій комплексної змінної. Як наслідок таких описів доведено теореми про G-моногенне продовження відображень та про нескінченну диференційовність за Гато G-моногенних відображень.

Встановлено зв'язок G-моногенних відображень з просторовими диференціальними рівняннями в частинних похідних (зокрема, наведено застосування G-моногенних відображень до побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа).

Досліджено властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів, пов'язані з їх інтегральними представ-

ленням і представленнями у вигляді рядів. Встановлено, що для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ справедливі аналоги ряду класичних інтегральних теорем. Зокрема, доведено аналоги формул Остроградського–Гауса і Стокса. Доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого інтеграла і для криволінійного інтеграла від G-моногенного відображення, а також аналоги інтегральної формули Коші для цих відображень. Доведено також аналоги теорем Морера, Тейлора і Лорана для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та здійснено класифікацію особливостей цих відображень.

Досліджено основні алгебраїчно-аналітичні властивості H-моногенних (неперервних і диференційовних за Хаусдорфом) відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, встановлено їх зв'язок із G-моногенними відображеннями та доведено теорему про еквівалентність різних означень право-G-моногенних і ліво-G-моногенних відображень.

Ключові слова: алгебра комплексних кватерніонів, G-моногенні відображення, умови Коші–Рімана, теорема Коші, інтегральна формула Коші, теорема Морера, ряд Тейлора, ряд Лорана, H-моногенні відображення.

Kuzmenko T. S. Monogenic mappings in the algebra of complex quaternions. — Manuscript.

Candidate of Sciences thesis on Physics and Mathematics (PhD thsis), speciality 01.01.01 "Mathematical analysis" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

New classes of monogenic mappings are introduced in the algebra of complex quaternions $\mathbb{H}(\mathbb{C})$. In the commutative algebra of bicomplex numbers which is a subalgebra of the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, we select a three-dimensional real subspace and consider continuous mappings given in a domain of this subspace and taking values in the algebra of complex quaternions. Among such mappings we single out the right-G-monogenic mappings for which the right Gâteaux derivative exists and the left-G-monogenic mappings for which the left Gâteaux

derivative exists at all points of domain.

The principal algebraic-analytic properties of G-monogenic mappings taking values in the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ are investigated. Analogues of the Cauchy–Riemann conditions are obtained, and it is shown that not only quaternionic polynomials but also quaternionic power series are G-monogenic. Moreover, we have obtained constructive descriptions of all G-monogenic mappings by means of four corresponding analytic functions of complex variable. As consequences of such descriptions, the theorems about G-monogenic extensions of mappings and the infinite differentiability in the sense of Gâteaux of G-monogenic mappings are proved.

A relationship between G-monogenic mappings and spatial differential equations in the partial derivatives is established. In particular, we discuss several applications of G-monogenic mappings to the construction of solutions of the three-dimensional Laplace equation.

For G-monogenic mappings taking values in the algebra of complex quaternions, properties related with integral representations of mappings and their representation in the form of series are investigated. It is established for G-monogenic mappings that analogues of some classical integral theorems are true. In particular, analogues of the Ostrogradsky–Gauss formula and the Stokes formula are proved. Analogues of the Cauchy integral theorems for both a surface integral and a curvilinear integral of G-monogenic mappings as well as analogues of the Cauchy integral formula are proved for these mappings. Analogues of the Morera theorem and the Taylor theorem and the Laurent theorem for G-monogenic mappings taking values in the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ are also proved and singularities of these mappings are classified.

The principal algebraic-analytic properties of H-monogenic (i.e. continuous and differentiable in the sense of Hausdorff) mappings taking values in the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ are investigated. The relation between G-monogenic and H-monogenic mappings is established and a theorem about the equivalence of different definitions of right-G-monogenic and left-G-monogenic mappings is proved.

Key words: the algebra of complex quaternions, G-monogenic mapping, the Cauchy–Riemann conditions, the Cauchy theorem, the Cauchy integral formula, the Morera theorem, the Taylor series, the Laurent series, H-monogenic mapping.

Список публікацій

1. Кузьменко Т. С. Степеневі ряди та ряди Лорана в алгебрі комплексних кватерніонів / Т. С. Кузьменко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 3. — С. 164 – 174.

2. Шпаківський В. С. Про один клас кватерніонних відображень / В. С. Шпаківський, Т. С. Кузьменко // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 1. — С. 117 – 130.

3. Shpakivskyi V. S. Integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings / V. S. Shpakivskyi, T. S. Kuzmenko // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. — 2016. — Vol. 24, № 2. — 271 – 281.

4. Kuzmenko T. S. Curvilinear integral theorem for G-monogenic mappings in the algebra of complex quaternion / T. S. Kuzmenko // Int. J. Adv. Research Math. — 2016. — Vol. 6. — P. 21 – 25.

5. Шпаковский В. С. О моногенных отображениях кватернионной переменной / В. С. Шпаковский, Т. С. Кузьменко // Укр. мат. вестник. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 123 – 142.

6. Kuzmenko T. S. Generalized integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings / T. S. Kuzmenko, V. S. Shpakivskyi // Укр. мат. вісник. — 2016. — Vol. 13, № 4. — С. 499 – 513.

Тези доповідей на конференціях

1. Кузьменко Т. С. Конструктивний опис G-моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів / Т. С. Кузьменко // Матер. XIII міжнар. наук.-практич. конф. "Шевченківська весна — 2015", Київ, 1 – 3 квітня 2015 р. / КНУ ім. Т. Шевченка. — Київ, 2015. — С. 26 – 29.

2. Кузьменко Т. С. Про еквівалентність різних означень G-моногенних відображень / Т. С. Кузьменко // XI Літня школа "Алгебра, топологія,

аналіз" , 1 – 14 серпня 2016 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2016. — С. 58 – 60.

3. Kuzmenko T. S. The relation between G-monogenic mappings and partial differential equations / T. S. Kuzmenko // 5$^{\text{th}}$ International conference for young scientists on differential equations and applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine. — Vinnytsia, 2016. — P. 93 – 94.

4. Кузьменко Т. Інтегральні теореми в алгебрі комплексних кватеорніонів / Т. С. Кузьменко // Конфренеція молодих учених ”Підстригачівські читання — 2017”, 23 – 25 травня 2017 р., Львів, Україна. — http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Kuzmenko.pdf.

5. Kuzmenko T. Constructive description of G-monogenic mappings in the algebra of complex quaternions / T. Kuzmenko // International scientific conference ”Algebraic and geometric methods of analysis”, 31 May – 05 June, 2017, Odessa, Ukraine. — P. 67 – 68.

6. Kuzmenko T. S. Integral theorems in the algebra of complex quaternions / T. S. Kuzmenko // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100$^{\text{th}}$ Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008). June 7 – 10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017 — P. 35.

7. Kuzmenko T. G-monogenic mappings in the algebra of complex quaternions / T. Kuzmenko // Abstract of 12$^{\text{th}}$ ISAAC Congress. — Linnaeus University, Växjö, Sweden, August 14 – 18, 2017. — P. 43.

8. Kuzmenko T. On equvivalence of different definitions of G-monogenic mappings / T. Kuzmenko // Proceedings of XVIII International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, October 7 – 10, 2017, Kyiv: Vol. 1. — Kyiv: NTUU «KPI», 2017. — P. 162 – 165.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Вагомим надбанням математики є теорія аналітичних функцій, заданих в областях комплексної площини. Багатство цієї теорії та ефективність її застосувань в різних галузях науки спонукають математиків до розвитку подібних теорій в тривимірному просторі.

Так, ірландський математик і фізик У. Гамільтон, намагаючись описати рухи в просторі за допомогою алгебраїчних операцій в деякій числовій алгебрі, 16 жовтня 1843 року побудував некомутативну чотиривимірну алгебру кватерніонів (див., наприклад, [12, с. 223]). Кватерніони і кватерніонні функції використовуються для опису електромагнітних полів, для розв'язку задач орієнтації космічних апаратів, в задачах геофізики та сейсморозвідки, в механіці твердого деформовного тіла, в теорії фракталів та багатьох інших напрямках науки.

У. Гамільтон та його послідовники, зокрема, Ч. Джолі [66] і П. Тайт [117] розвивали теорію функцій кватерніонної змінної методами теорії функцій багатьох дійсних змінних.

Пізніше, в роботах Г. Мойсіла і Н. Теодореско [85], Р. Фуетера [56], А. Садбері [116], Г. Льойтвілера [64, 80], В. Кравченка і М. Шапіро [69], К. Гьорлебека і В. Шпрьоссіга [61], Дж. Раяна [104], С. Бернштейн [45], Ф. Коломбо, І. Сабадіні і Д. Струппи [53] та багатьох інших розроблялися різні напрямки кватерніонного аналізу як узагальнення результатів теорії функцій комплексної змінної у тривимірному просторі.

Разом із некомутативним аналізом у тривимірному просторі розроблялися також методи, що базуються на відображеннях в комутативних алгебрах. Так, наприклад, в роботах П. Кетчума [67, 68], Д. Вагнера [118], Дж. Ворда [120], Е. Лорха [82], Е. Блюма [46], М. Рошкулєца [102, 103], К. Кунца [71, 72], І. П. Мельниченка [19, 23], І. П. Мельниченка та С. А. Плакси [26], С. А. Плакси [30, 90] та інших розвинено теорію аналітичних функцій в комутативних алгебрах і застосовано такі функції для побудови розв'язків дмференціальних рівнянь еліптичного типу (зокрема, тривимірного рівняння Лапласа).

Зазначимо, що можливості переносу класичних теорем комплексного аналізу в кватерніонний аналіз є обмеженими. Тому актуальною проблемою є виділення спеціальних класів диференційовних у певному сенсі функцій, заданих в некомутативній алгебрі кватерніонів, вивчення їх алгебраїчно-аналітичних властивостей та доведення для них аналогів класичних теорем теорії аналітичних функцій комплексної змінної. Крім того, з огляду на можливі змістовні застосування важливо, щоб класи таких функцій були достатньо широкими і мали прості конструктивні описи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана у відділі комплексного аналізу і теорії потенціалу Інституту математики НАН України в рамках наукової теми "Метричні та геометричні задачі теорії аналітичних і субгармонічних функцій та множин", номер державної реєстрації 0116U003060.

Мета і завдання дослідження. *Об'єктом дослідження* є так звані G-моногенні відображення, тобто неперервні і диференційовні за Гато відображення, задані в спеціально виділених підпросторах алгебри комплексних кватерніонів.

Предметом дослідження є алгебраїчно-аналітичні властивості G-моногенних відображень.

Метою дисертаційної роботи є встановлення конструктивного опису G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів і доведення для вказаних відображень аналогів класичних результатів комплексного аналізу (інтегральна теорема і формула Коші, теореми Морера, Тейлора, Лорана).

Завдання дослідження:

- ввести клас G-моногенних (неперервних і диференційовних за Гато) відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$;
- отримати конструктивний опис (за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної) G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$;
- встановити зв'язок G-моногенних відображень з диференціальними рівняннями в частинних похідних;
- довести аналоги класичних інтегральних теорем для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$;
- дослідити розклади G-моногенних відображень в ряди Тейлора і Лорана;
- довести теорему про еквівалентність різних означень G-моногенного відображення.

Методи дослідження. При розв'язанні завдань дисертаційної роботи застосовуються методи комплексного та гіперкомплексного аналізу.

Наукова новизна. Усі отримані в роботі результати є новими, а саме:

- введено клас G-моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та встановлено конструктивний опис усіх цих відображень за допомогою чотирьох відповідних аналітичних функцій комплексної змінної;
- встановлено зв'язок G-моногенних відображень з просторовими рівняннями з частинними похідними (зокрема, наведено застосування G-моногенних відображень до побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа);

- доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого та криволінійного інтеграла від G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, а також аналоги теореми Морера та інтегральної формули Коші для цих відображень;

- доведено аналоги теорем Тейлора і Лорана для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та здійснено класифікацію їх особливостей;

- встановлено зв'язок між G-моногенними та H-моногенними (тобто неперервними і диференційовними за Хаусдорфом) відображеннями та доведено еквівалентність різних означень G-моногенного відображення.

Виклад основних результатів дисертації починається з **розділу 2**, в якому вивчаються алгебраїчно-аналітичні властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів.

Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватерніонів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої складається з одиниці алгебри 1 і елементів I, J, K, для яких виконуються наступні правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, розклад елементів якого в базисі $\{1, I, J, K\}$ має вигляд:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \quad e_3 = \frac{1}{2}(iJ - K), \quad e_4 = \frac{1}{2}(iJ + K),$$

де i — уявна комплексна одиниця. Таблиця множення в новому базисі набуває вигляду (див. [50])

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

,

при цьому одиниця алгебри має розклад: $1 = e_1 + e_2$.

Відмітимо, що комутативна підалгебра з ідемпотентним базисом $\{e_1, e_2\}$ є алгеброю бікомплексних чисел (або алгеброю комутативних кватерніонів Сегре [108]).

Підмножина $\mathcal{I} \subset \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називається *правим ідеалом*, якщо з умови $x \in \mathcal{I}$, $y \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ випливає, що $xy \in \mathcal{I}$, і *лівим ідеалом*, якщо з умови $x \in \mathcal{I}$, $y \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ випливає, що $yx \in \mathcal{I}$ (див., наприклад, [2, с. 64]).

Алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ містить два праві максимальні ідеали:

$$\mathcal{I}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4 : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 : \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}$$

і два ліві максимальні ідеали:

$$\widehat{\mathcal{I}}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 : \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}, \qquad \widehat{\mathcal{I}}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_4 e_4 : \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}.$$

Введемо в розгляд лінійні функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, задані рівностями

$$\begin{aligned} f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0, \\ f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ядрами функціоналів f_1 та f_2 є відповідно максимальні ідеали $\mathcal{I}_1$ та $\mathcal{I}_2$.

Означимо також лінійні функціонали $\widehat{f}_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $\widehat{f}_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, покладаючи

$$\begin{aligned} \widehat{f}_1(e_1) = \widehat{f}_1(e_4) = 1, \qquad \widehat{f}_1(e_2) = \widehat{f}_1(e_3) = 0, \\ \widehat{f}_2(e_2) = \widehat{f}_2(e_3) = 1, \qquad \widehat{f}_2(e_1) = \widehat{f}_2(e_4) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Максимальні ідеали $\widehat{\mathcal{I}}_1$ та $\widehat{\mathcal{I}}_2$ є відповідно ядрами функціоналів $\widehat{f}_1$ та $\widehat{f}_2$.

Нехай

$$i_1 = e_1 + e_2, \qquad i_2 = a_1e_1 + a_2e_2, \qquad i_3 = b_1e_1 + b_2e_2 \tag{3}$$

при $a_k, b_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2$, — трійка лінійно незалежних векторів над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ (див. [94, с. 223]). Це означає, що рівність

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ лінійну оболонку

$$E_3 := \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжену векторами i_1, i_2, i_3. Множині S тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність множину

$$S_\zeta := \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in S\} \subset E_3. \tag{4}$$

Істотним є припущення: $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, де $f_1(E_3)$, $f_2(E_3)$ — образи простору E_3 при відображенні функціоналами f_1, f_2. Очевидно, що воно має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Позначимо

$$\xi_1 := f_1(\zeta) = \widehat{f}_1(\zeta) = x + a_1y + b_1z,$$

$$\xi_2 := f_2(\zeta) = \widehat{f}_2(\zeta) = x + a_2y + b_2z.$$

Тоді елемент $\zeta \in E_3$ подається у вигляді $\zeta = \xi_1e_1 + \xi_2e_2$.

Означення 2.2.3. Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називаємо *право-G-моногенним* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3. \tag{5}$$

Означення 2.2.4. Неперервне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називаємо *ліво-G-моногенним* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо для кожного $\zeta \in \Omega_\zeta$ існує елемент $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\widehat{\Phi}(\zeta + \varepsilon h) - \widehat{\Phi}(\zeta)}{\varepsilon} = \widehat{\Phi}'(\zeta)h \quad \forall\, h \in E_3. \tag{6}$$

В підрозділі 2.2 доведено критерії право- і ліво-G-моногенності (аналоги умов Коші – Рімана) для відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 2.2.1. *Для того, щоб відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=1}^{4} U_n(x, y, z)e_n, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

де $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω, було право-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_3$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_4}{\partial x},\\
&\frac{\partial U_1}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_4}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Теорема 2.2.2. *Для того, щоб відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду* (7)*, де $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω, було ліво-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_3$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U_1}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_4}{\partial x},\\
&\frac{\partial U_1}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_4}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Відмітимо, що отримані умови є аналогами умов Коші–Рімана, які у згорнутому вигляді можуть бути записані співвідношеннями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = i_2\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = i_3\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{10}$$

для право-G-моногенного відображення, і у вигляді

$$\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial y} = \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\, i_2, \qquad \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\, i_3 \tag{11}$$

для ліво-G-моногенного відображення.

Точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in E_3$, утворюють дві прямі

$$L^1: \quad \begin{cases} x + y\,\mathrm{Re}\; a_1 + z\,\mathrm{Re}\; b_1 = 0, \\ y\,\mathrm{Im}\; a_1 + z\,\mathrm{Im}\; b_1 = 0, \end{cases}$$

$$L^2: \quad \begin{cases} x + y\,\mathrm{Re}\; a_2 + z\,\mathrm{Re}\; b_2 = 0, \\ y\,\mathrm{Im}\; a_2 + z\,\mathrm{Im}\; b_2 = 0 \end{cases}$$

в тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$.

В лемі 2.3.2 показано, що в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ прямі L^1 і L^2 співпадати не можуть.

Нехай область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ опукла в напрямку прямих L^1 і L^2 (область називають *опуклою в напрямку прямих* L^1 *та* L^2, якщо вона містить кожен відрізок, який паралельний хоча б одній з прямих L^1 та L^2 і з'єднує дві точки цієї області).

Лема 2.3.3. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямих L^1_ζ, L^2_ζ і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, а відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним в області Ω_ζ. Якщо точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L^1\}$, то*

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_1.$$

Якщо ж точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L^2\}$, то

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_2.$$

Лема 2.3.4. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямих L^1_ζ, L^2_ζ і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, а відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є ліво-G-моногенним в області Ω_ζ. Якщо точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1 - \zeta_2 \in$*

$\{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L^1\}$, *то*

$$\widehat{\Phi}(\zeta_1) - \widehat{\Phi}(\zeta_2) \in \widehat{\mathcal{I}}_1.$$

Якщо ж точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ *такі, що* $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L^2\}$, *то*

$$\widehat{\Phi}(\zeta_1) - \widehat{\Phi}(\zeta_2) \in \widehat{\mathcal{I}}_2.$$

В прикладі 2.3.1 показано, що умова опуклості області Ω_ζ в напрямку прямої L^1_ζ в лемі 2.3.3 є істотною, а саме: побудовано область Ω_ζ, яка не є опуклою в напрямку прямої L^1_ζ, і право-G-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, для якого $\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \notin \mathcal{I}_1$ при деяких $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ таких, що $\zeta_2 - \zeta_1 \in L^1_\zeta$.

В пункті 2.3.1 доведено, що G-моногенне в області Ω_ζ відображення є сумою G-моногенних відображень, які приймають значення у відповідних ідеалах.

Теорема 2.3.1. *Кожне право-G-моногенне в області Ω_ζ відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta),$$

де $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$, $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ — деякі право-G-моногенні в області Ω_ζ відображення зі значеннями відповідно в правих максимальних ідеалах $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$.

Теорема 2.3.2. *Кожне ліво-G-моногенне в області Ω_ζ відображення подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{\Phi}_1(\zeta) + \widehat{\Phi}_2(\zeta),$$

де $\widehat{\Phi}_1 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_1$, $\widehat{\Phi}_2 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_2$ — деякі ліво-G-моногенні в області Ω_ζ відображення зі значеннями відповідно в лівих максимальних ідеалах $\widehat{\mathcal{I}}_1, \widehat{\mathcal{I}}_2$.

Позначимо через

$$D_1 := f_1(\Omega_\zeta) = \{\xi_1 = x + a_1 y + b_1 z : (x, y, z) \in \Omega\},$$

$$D_2 := f_2(\Omega_\zeta) = \{\xi_2 = x + a_2 y + b_2 z : (x, y, z) \in \Omega\}$$

області в комплексній площині $\mathbb{C}$, на які область Ω_ζ відображається відповідно функціоналами f_1, f_2.

В наступних теоремах пункту 2.3.1 отримано конструктивний опис усіх право-G-моногенних відображень, які визначені в області Ω_ζ і приймають значення в ідеалах $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$, за допомогою аналітичних функцій відповідної комплексної змінної.

Теорема 2.3.3. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямої L_ζ^2 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$ подається у вигляді*

$$\Phi_1(\zeta) = F_2(\xi_2)e_2 + F_4(\xi_2)e_4 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{12}$$

де F_2, F_4 — деякі аналітичні в області D_2 функції змінної ξ_2.

Теорема 2.3.4. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямої L_ζ^1 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ подається у вигляді*

$$\Phi_2(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_3(\xi_1)e_3 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{13}$$

де F_1, F_3 — деякі аналітичні в області D_1 функції змінної ξ_1.

Далі встановлено конструктивний опис усіх ліво-G-моногенних відображень, які визначені в області Ω_ζ і приймають значення в ідеалах $\widehat{\mathcal{I}}_1, \widehat{\mathcal{I}}_2$, за допомогою аналітичних функцій відповідної комплексної змінної.

Теорема 2.3.5. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямої L_ζ^2 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне ліво-$G$-моногенне відображення $\widehat{\Phi}_1 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_1$ подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}_1(\zeta) = \widehat{F}_2(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3(\xi_2)e_3 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{14}$$

де $\widehat{F}_2, \widehat{F}_3$ — деякі аналітичні в області D_2 функції змінної ξ_2.

Теорема 2.3.6. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямої* L^1_ζ *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне ліво-*$G$*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi}_2 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_2$ *подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}_2(\zeta) = \widehat{F}_1(\xi_2)e_1 + \widehat{F}_4(\xi_1)e_4 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{15}$$

де $\widehat{F}_1, \widehat{F}_4$ *— деякі аналітичні в області* D_1 *функції змінної* ξ_1.

В пункті 2.3.2 наведено конструктивний опис усіх G-моногенних відображень, які визначені в області Ω_ζ і приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, за допомогою відповідних чотирьох аналітичних функцій комплексної змінної. Так, з урахуванням теореми 2.3.1 та рівностей (12), (13) випливає, що кожне право-G-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4, \tag{16}$$

а в силу теореми 2.3.2 і рівностей (14), (15) кожне ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{F}_1(\xi_1)e_1 + \widehat{F}_2(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3(\xi_2)e_3 + \widehat{F}_4(\xi_1)e_4. \tag{17}$$

Рівність (16) дає можливість явно побудувати усі право-G-моногенні відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, а рівність (17) вказує на спосіб явної побудови будь-якого ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою відповідних чотирьох аналітичних функцій комплексної змінної.

Наступне твердження випливає безпосередньо з рівностей (16) і (17), праві частини яких є відповідно право- і ліво-G-моногенними відображеннями в області $\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f_1(\zeta) \in D_1,\ f_2(\zeta) \in D_2\}$.

Теорема 2.3.9. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямих* L^1_ζ, L^2_ζ *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне право-*$G$*-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *продовжується до право-*G*-моногенного відображення в області* Π_ζ, *а ліво-*G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— до ліво-*G*-моногенного відображення в області* Π_ζ.

Принциповим наслідком рівностей (16) та (17) є наступне твердження, справедливе для G-моногенних відображень в довільній області Ω_ζ.

Теорема 2.3.10. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — *право-*G*-моногенне, а* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — *ліво-*G*-моногенне в області* Ω_ζ. *Тоді похідні Гато усіх порядків* $\Phi^{(s)}$ *є право-*G*-моногенними відображеннями, а* $\widehat{\Phi}^{(s)}$ — *ліво-*G*-моногенними відображеннями в області* Ω_ζ.

В підрозділі 2.4 досліджено зв'язок G-моногенних відображень з просторовими рівняннями з частинними похідними. Зокрема, наведено застосування G-моногенних відображень до побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа.

В **розділі 3** доводиться, що G-моногенні відображення, які визначені в областях з E_3 і приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, мають ряд властивостей, подібних до властивостей аналітичних функцій комплексної змінної, а саме: для них справедливі аналоги інтегральних теорем Коші і Морера, інтегральної формули Коші, теорем Тейлора і Лорана.

В підрозділі 3.1 спочатку встановлено аналог формули Гауса – Остроградського в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.1.1. *Нехай однозв'язна область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *має замкнену кусково-гладку межу* $\partial\Omega_\zeta$, *а неперервні відображення* $\varphi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\psi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *мають неперервні частинні похідні першого порядку в області* Ω_ζ, *які неперервно продовжуються на межу* $\partial\Omega_\zeta$. *Тоді*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \varphi(\zeta)\,\sigma\,\psi(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \left(\frac{\partial\,(\varphi\, i_1\, \psi)}{\partial x} + \frac{\partial\,(\varphi\, i_2\, \psi)}{\partial y} + \frac{\partial\,(\varphi\, i_3\, \psi)}{\partial z} \right) dxdydz\,, \tag{18}$$

де $\sigma := dydz + i_2 dzdx + i_3 dxdy$.

Наслідком теореми 3.1.1 і умов (10), (11) є наступний аналог інтегральної теореми Коші.

Теорема 3.1.2. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *має замкнену кусково-гладку межу* $\partial\Omega_\zeta$, *відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — *право-*G*-моногенне, а* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — *ліво-*G*-моногенне в* Ω_ζ, *і вони разом із своїми частинними похідними першого порядку неперервно продовжуються на межу* $\partial\Omega_\zeta$. *Тоді*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\,\sigma\,\Phi(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \Big[\widehat{\Phi}'(\zeta)(1+i_2^2+i_3^2)\Phi(\zeta) + \widehat{\Phi}(\zeta)(1+i_2^2+i_3^2)\Phi'(\zeta)\Big]dxdydz. \tag{19}$$

Наслідком теореми 3.1.2 є наступне твердження.

Наслідок 3.1.1. *При виконанні умов теореми* 3.1.2 *і додатковому припущенні* $1+i_2^2+i_3^2=0$ *рівність* (19) *набуває вигляду*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\,\sigma\,\Phi(\zeta) = 0.$$

Зауважимо, що при виконанні рівності $1+i_2^2+i_3^2=0$ відображення Φ і $\widehat{\Phi}$ задовольняють тривимірне рівняння Лапласа.

В підрозділі 3.2 спочатку встановлено аналог формули Стокса в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.2.1. *Нехай відображення* $\varphi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\psi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервні разом із частинними похідними першого порядку в області* Ω_ζ *і* Σ_ζ — *довільна кусково-гладка поверхня в* Ω_ζ *зі спрямлюваним жордановим краєм* γ_ζ. *Тоді*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta) = \int\limits_{\Sigma_\zeta} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,i_2\,\psi + \varphi\,i_2\,\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\psi - \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy +$$

$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,i_3\,\psi + \varphi\,i_3\,\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,i_2\,\psi - \varphi\,i_2\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dydz +$$

$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\psi + \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,i_3\,\psi - \varphi\,i_3\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dzdx. \tag{20}$$

При доведенні теореми 3.2.2 показано, що для G-моногенного відображення права частина рівності (20) дорівнює нулю.

Далі, у випадку довільної області Ω_ζ за схемою доведення теореми 3.2 з роботи Е. К. Блюма [46] доведено наступний аналог інтегральної теореми Коші (частинний випадок опуклої області Ω_ζ розглянуто в теоремі 3.2.3).

Теорема 3.2.4. *Нехай в області Ω_ζ визначені право-G-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$, гомотопної точці області Ω_ζ, справедлива рівність*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0. \tag{21}$$

В теоремі 3.2.5 встановлено достатні умови на криву γ_ζ, розміщену на межі області, при яких справедлива рівність (21) для G-моногенних відображень, неперервних в замиканні області Ω_ζ.

В підрозділі 3.3 доведено наступні аналоги теореми Морера для відображень, які задані в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.3.1. *Нехай $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Якщо відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ неперервне в області Ω_ζ і виконується рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle_\zeta} d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0 \tag{22}$$

для кожного трикутника $\triangle_\zeta$ такого, що $\overline{\triangle_\zeta} \subset \Omega_\zeta$, то відображення Φ є право-G-моногенним в області Ω_ζ.

Теорема 3.3.2. *Нехай $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Якщо відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ неперервне в області Ω_ζ і виконується рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta) d\zeta = 0 \tag{23}$$

для кожного трикутника $\triangle_\zeta$ такого, що $\overline{\triangle_\zeta} \subset \Omega_\zeta$, то відображення Φ є ліво-G-моногенним в області Ω_ζ.

Нехай $\zeta_0 = \xi_{10}e_1 + \xi_{20}e_2$ — фіксована точка області $\Omega_\zeta \subset E_3$. В околі ζ_0, який міститься в Ω_ζ, візьмемо коло $C(\zeta_0)$ з центром в точці ζ_0. Через $C_k \subset \mathbb{C}$ позначимо образ кола $C(\zeta_0)$ при відображенні функціоналом f_k, $k = 1, 2$.

Вважатимемо, що коло $C(\zeta_0)$ *охоплює множину* $\{\zeta_0+\zeta : \zeta \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$. Це означає, що C_k є межею деякої області D'_k і $\xi_{k0} \in D'_k$, $k = 1, 2$.

Будемо казати, що крива $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$ *охоплює один раз множину* $\{\zeta_0+\zeta : \zeta \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$, якщо існує коло $C(\zeta_0)$, яке охоплює вказану множину і гомотопне кривій γ_ζ в області $\Omega_\zeta \setminus \{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$.

В підрозділі 3.4 доведено наступні теореми, в яких встановлено аналоги інтегральної формули Коші для G-моногенних відображень в області Ω_ζ.

Теорема 3.4.1. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямих L_ζ^1, L_ζ^2 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, а відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним в області Ω_ζ. Тоді для довільної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ справедлива рівність*

$$\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} (\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta \, \Phi(\zeta),$$

де γ_ζ — довільна жорданова спрямлювана крива в Ω_ζ, яка охоплює один раз множину $\{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$.

Теорема 3.4.2. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямих L_ζ^1, L_ζ^2 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, а відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є ліво-G-моногенним в області Ω_ζ. Тоді для довільної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ справедлива рівність*

$$\widehat{\Phi}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)(\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta,$$

де γ_ζ — довільна жорданова спрямлювана крива в Ω_ζ, яка охоплює один раз множину $\{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$.

В підрозділі 3.5 з використанням представлень (16) і (17) G-моногенних відображень $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ отримано їх розклад в ряд Тейлора.

Нехай $\zeta_0 = x_0 i_1 + y_0 i_2 + z_0 i_3$ — довільна фіксована точка області Ω_ζ. Поставимо їй у відповідність точки комплексної площини $\xi_{10} = f_1(\zeta_0) = x_0 + a_1 y_0 + b_1 z_0$ і $\xi_{20} = f_2(\zeta_0) = x_0 + a_2 y_0 + b_2 z_0$, де a_k, b_k — коефіцієнти розкладу (3) при $k = 1, 2$.

Позначимо $R_0 := \min\limits_{\zeta \in \partial\Omega_\zeta} \|\zeta - \zeta_0\|$. Розглянемо кулю $\Theta(\zeta_0, R_0) := \{\zeta \in E_3 : \|\zeta - \zeta_0\| < R_0\} \subset E_3$ радіуса R_0 з центром в точці ζ_0, а через G_1 і G_2 позначимо області в $\mathbb{C}$, на які куля $\Theta(\zeta_0, R_0)$ відображається функціоналами f_1 і f_2 відповідно.

Нехай $R := \min\Big\{R_0\,, \min\limits_{\tau_1 \in \partial G_1} |\tau_1 - \xi_{10}|\,, \min\limits_{\tau_2 \in \partial G_2} |\tau_2 - \xi_{20}|\Big\}$, де через ∂G_1 і ∂G_2 позначено відповідно межі областей G_1 і G_2. Через $U(\xi_{10}, R) := \{\xi_1 \in \mathbb{C} : |\xi_1 - \xi_{10}| < R\}$ і $U(\xi_{20}, R) := \{\xi_2 \in \mathbb{C} : |\xi_2 - \xi_{20}| < R\}$ позначимо круги радіуса R в комплексній площині з центрами в точках ξ_{10} і ξ_{20} відповідно.

Тепер введемо в розгляд область

$$B(\zeta_0, R) := \{\zeta \in E_3 : f_1(\zeta) \in U(\xi_{10}, R)\,, f_2(\zeta) \in U(\xi_{20}, R)\},$$

яка опукла в напрямку прямих L^1_ζ, L^2_ζ за побудовою.

Теорема 3.5.1. *Нехай $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним в області Ω_ζ і $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$. Тоді в області $B(\zeta_0, R)$ відображення Φ подається у вигляді суми абсолютно збіжного степеневого ряду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n, \tag{24}$$

в якому

$$p_n = a_n e_1 + b_n e_2 + c_n e_3 + d_n e_4 \tag{25}$$

і $a_n\,, b_n\,, c_n\,, d_n$ — коефіцієнти рядів Тейлора функцій

$$F_1(\xi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_2(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\xi_2 - \xi_{20})^n,$$

$$F_3(\xi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_4(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (\xi_2 - \xi_{20})^n,$$

які містяться у представленні (16) *відображення* Φ *при* $\zeta \in B(\zeta_0, R)$.

Теорема 3.5.2. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є ліво-*G*-моногенним в області* Ω_ζ *і* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$. *Тоді в області* $B(\zeta_0, R)$ *відображення* $\widehat{\Phi}$ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного степеневого ряду*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{p}_n (\zeta - \zeta_0)^n, \tag{26}$$

в якому

$$\widehat{p}_n = \widehat{a}_n e_1 + \widehat{b}_n e_2 + \widehat{c}_n e_3 + \widehat{d}_n e_4 \tag{27}$$

і $\widehat{a}_n, \widehat{b}_n, \widehat{c}_n, \widehat{d}_n$ *— коефіцієнти рядів Тейлора функцій*

$$\widehat{F}_1(\xi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{a}_n (\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad \widehat{F}_2(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{b}_n (\xi_2 - \xi_{20})^n,$$

$$\widehat{F}_3(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{c}_n (\xi_2 - \xi_{20})^n, \qquad \widehat{F}_4(\xi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{d}_n (\xi_1 - \xi_{10})^n,$$

які містяться у представленні (17) *відображення* $\widehat{\Phi}$ *при* $\zeta \in B(\zeta_0, R)$.

Справедлива також теорема єдиності для право-G-моногенних відображень (теорема 3.5.3) і ліво-G-моногенних відображень (теорема 3.5.4), які визначені в області $\Omega_\zeta \subset E_3$ і приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

В підрозділі 3.6 при розгляді питання про розклад G-моногенного відображення в ряд Лорана відносно точки $\zeta_0 = x_0 i_1 + y_0 i_2 + z_0 i_3$ з урахуванням теореми 2.3.9 припускається, що воно задане в необмеженій області

$$\mathcal{K}_\zeta := \{\zeta \in E_3 : 0 \le r < |\xi_1 - \xi_{10}| < R \le \infty \,, 0 \le r < |\xi_2 - \xi_{20}| < R \le \infty\}\,.$$

Теорема 3.6.1. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне право-*$G$*-моногенне відображення* $\Phi : \mathcal{K}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *в області* $\mathcal{K}_\zeta$ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n \,,$$

де $(\zeta-\zeta_0)^n := \left((\zeta-\zeta_0)^{-1}\right)^{-n}$ *при* $n=-1,-2,\ldots$ *і коефіцієнти* p_n *визначаються формулами* (25), *в яких* a_n, b_n, c_n, d_n *— коефіцієнти рядів Лорана функцій*

$$F_1(\xi_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\xi_1-\xi_{10})^n, \qquad F_2(\xi_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\xi_2-\xi_{20})^n,$$
$$F_3(\xi_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\xi_1-\xi_{10})^n, \qquad F_4(\xi_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(\xi_2-\xi_{20})^n,$$

які містяться в розкладі (16) *відображення* Φ *при* $\zeta\in\mathcal{K}_\zeta$.

Теорема 3.6.2. *Нехай* $f_1(E_3)=f_2(E_3)=\mathbb{C}$. *Тоді кожне ліво-*$G$*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi}:\mathcal{K}_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *в області* $\mathcal{K}_\zeta$ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$\widehat{\Phi}(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{p}_n(\zeta-\zeta_0)^n\,,$$

де $(\zeta-\zeta_0)^n := \left((\zeta-\zeta_0)^{-1}\right)^{-n}$ *при* $n=-1,-2,\ldots$ *і коефіцієнти* $\widehat{p}_n$ *визначаються формулами* (27), *в яких* $\widehat{a}_n, \widehat{b}_n, \widehat{c}_n, \widehat{d}_n$ *— коефіцієнти рядів Лорана функцій*

$$\widehat{F}_1(\xi_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{a}_n(\xi_1-\xi_{10})^n, \qquad \widehat{F}_2(\xi_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{b}_n(\xi_2-\xi_{20})^n,$$
$$\widehat{F}_3(\xi_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{c}_n(\xi_2-\xi_{20})^n, \qquad \widehat{F}_4(\xi_1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{d}_n(\xi_1-\xi_{10})^n,$$

які містяться в розкладі (17) *відображення* $\widehat{\Phi}$ *при* $\zeta\in\mathcal{K}_\zeta$.

Підрозділ 3.6 закінчується теоремою 3.6.3, в якій спираючись на теореми 3.6.1, 3.6.2 здійснено класифікацію особливих точок G-моногенних відображень на усувні точки, полюси та істотно особливі точки. При цьому показано, що ізольована особлива точка у G-моногенного відображення може бути лише усувною, а у випадку, коли відображення має неусувну особливість в точці ζ_0, особливими є всі точки хоча б однієї з множин $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0\cap\{\zeta_0+\zeta_1^*\ :\ \zeta_1^*\in L_\zeta^1\}$ або $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0\cap\{\zeta_0+\zeta_2^*\ :\ \zeta_2^*\in L_\zeta^2\}$, де $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 := \{\zeta\in E_3 : |\xi_1-\xi_{10}|<R\,, |\xi_2-\xi_{20}|<R\}$.

В **розділі 4** досліджуються властивості H-моногенних (неперервних і диференційовних за Хаусдорфом) відображень та їх зв'язок із G-моногенними відображеннями.

Означення 4.1.1. Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду (7) будемо називати H*-моногенним* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ диференційовне за Хаусдорфом в кожній точці $\zeta \in \Omega_\zeta$, тобто якщо компоненти цього відображення мають частинні похідні першого порядку за змінними x, y, z, і формальний диференціал відображення

$$d\Phi := \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} dx + \frac{\partial U_n}{\partial y} dy + \frac{\partial U_n}{\partial z} dz \right) e_n$$

є лінійним однорідним поліномом диференціала $d\zeta = dx + i_2 dy + i_3 dz$, тобто

$$d\Phi = \sum_{s=1}^{16} A_s \, d\zeta \, B_s \,, \tag{28}$$

де A_s, B_s — деякі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ – значні функції.

Значення $\Phi'_H(\zeta) := \sum\limits_{s=1}^{16} A_s B_s$ будемо називати *похідною Хаусдорфа* відображення $\Phi(\zeta)$ в точці ζ.

В підрозділі 4.1 доведено теорему про існування та єдиність похідної H-моногенного відображення, а також теорему про похідну добутку H-моногенних відображень.

Теорема 4.1.1. *Якщо відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є* H*-моногенним в області* Ω_ζ *, то його похідна* Φ'_H *існує і не залежить від вибору функцій* A_s, B_s *в рівності* (28)*, при цьому*

$$\Phi'_H(\zeta) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Теорема 4.1.2. *Якщо відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\Psi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є* H*-моногенними в області* Ω_ζ*, то добуток* $\Phi \cdot \Psi$ *також є* H*-моногенним відображенням в* Ω_ζ*, при цьому*

$$d(\Phi \cdot \Psi) = d\Phi \cdot \Psi + \Phi \cdot d\Psi.$$

В теоремі 4.2.1 встановлюється зв'язок між G-моногенними і H-моногенними відображеннями.

Теорема 4.2.1. *Кожне право-G-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і кожне ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в області Ω_ζ є H-моногенними відображеннями в цій області.*

Означення 4.2.2. H-моногенне відображення Φ, диференціал якого подається у вигляді

$$d\Phi = d\zeta\, \Phi'_H(\zeta)$$

будемо називати *право-H-моногенним* в області Ω_ζ.

Означення 4.2.3. H-моногенне відображення $\widehat{\Phi}$, диференціал якого подається у вигляді

$$d\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}'_H(\zeta) d\zeta$$

— *ліво-H-моногенним* в області Ω_ζ.

В наступній теоремі встановлено необхідні і достатні умови G-моногенності відображення.

Теорема 4.2.2. *Нехай компоненти $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ відображення* (7) *є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω. Відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли воно право-H-моногенне, а відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є ліво-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли воно ліво-H-моногенне в області Ω_ζ.*

Завершує розділ 4 теорема про еквівалентність різних означень G-моногенного відображення.

Теорема 4.2.3. *Відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ $\big($або $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})\big)$ є право-G-моногенним $\big($або ліво-G-моногенним$\big)$ в області $\Omega_\zeta \subset E_3$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *компоненти $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу* (7) *є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і виконуються умови* (10) $\big($*або* (11)$\big)$ *в кожній точці області Ω_ζ;*

2) *компоненти* $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *розкладу* (7) *є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* Ω *і відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *є право-*H*-моногенним* $\big($*або ліво-*H*-моногенним*$\big)$ *в області* Ω_ζ.

Якщо $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *то відображення* Φ *є право-*G*-моногенним* $\big($*або* $\widehat{\Phi}$ *— ліво-*G*-моногенним*$\big)$ *тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

3) *для кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ *знайдеться окіл, в якому відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *розкладається в степеневий ряд* (24) $\big($*або* (26)$\big)$;

4) *відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *неперервне і виконується рівність* (22) $\big($*або* (23)$\big)$ *для кожного трикутника* $\triangle_\zeta$ *такого, що* $\overline{\triangle}_\zeta \subset \Omega_\zeta$.

Якщо $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$ *і, крім того, область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямих* L^1_ζ, L^2_ζ, *то відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *є право-*G*-моногенним* $\big($*або* $\widehat{\Phi}$ *— ліво-*G*-моногенним*$\big)$ *тоді і тільки тоді, коли*

5) *існують єдина пара аналітичних в області* D_1 *функцій* F_1, F_3 $\big($*або* $\widehat{F}_1, \widehat{F}_4\big)$ *і єдина пара аналітичних в області* D_2 *функцій* F_2, F_4 $\big($*або* $\widehat{F}_2, \widehat{F}_3\big)$ *таких, що в області* Ω_ζ *відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *подається у вигляді* (16) $\big($*або* (17)$\big)$.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота містить математичні дослідження, що мають теоретичний характер. Одержані результати та розвинені в ній методи можуть бути використані при розв'язанні диференціальних рівнянь з частинними похідними і крайових задач математичної фізики, що знаходять застосування в гідродинаміці, газодинаміці, теплофізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку та загального плану досліджень належать науковому керівнику професору С. А. Плаксі, постановка задач та формулювання робочих гіпотез — В. С. Шпаківському. Доведення всіх основних результатів дисертації, які виносяться на захист, здійснені автором самостійно.

Апробація результатів. Результати роботи доповідались на таких конференціях:

- XIII міжнародній науково-практичній конференції ”Шевченківська весна — 2015” (Київ, 2015);
- XI Літній школі ”Алгебра, топологія, аналіз” (Одеса, 2016);
- VI міжнародній конференції молодих вчених, присвяченій Я. Б. Лопатинському ”Диференціальні рівняння та їх застосування” (Київ, 2016);
- конфренеції молодих учених ”Підстригачівські читання — 2017” (Львів, 2017);
- міжнародній науковій конференції ”Алгебраїчні та геометричні методи аналізу” (Одеса, 2017);
- міжнародній конференції молодих математиків до 100-річчя академіка НАН України, професора Ю. О. Митропольського (Київ, 2017);
- конгресі Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань і обчислень ISAAC (Векше, Швеція, 2017);
- XVIII міжнародній науковій конференції ім. академіка Михайла Кравчука, присвяченій 125-й річниці від дня народження М. Кравчука (Луцьк — Київ, 2017);
- міжнародній науковій конференції ”(Hyper)Complex and Harmonic Dynamical Modelling: Topology in Physics of Dynamical Systems and Molecular Nanoengines” (Бендлево, Польща, 2017);

на семінарах відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу Інституту математики НАН України (керівник: доктор фіз.-мат. наук, професор С. А. Плакса) та на семінарах кафедри математичного аналізу Житомирського державного університету імені Івана Франка (керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент О. Ф. Герус).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у роботах [17, 41, 43, 74, 76, 111] у наукових фахових виданнях. Частково вони також висвітлені у матеріалах міжнародних конференцій [14–16, 73, 75, 77–79].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, 4 розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 120 найменувань. Повний обсяг роботи становить 130 сторінок друкованого тексту.

Подяки. Висловлюю щиру вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Плаксі Сергію Анатолійовичу за визначення напрямку досліджень, корисні поради і рекомендації, а також кандидату фізико-математичних наук Шпаківському Віталію Станіславовичу за поставку задач, постійну увагу і підтримку при роботі над дисертацією.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ

Природнім і напрочуд ефективним засобом дослідження плоских потенціальних полів є аналітичні функції комплексної змінної.

З одного боку, потенціал $u(x,y)$ плоского усталеного потенціального соленоїдного поля і функція течії $v(x,y)$ задовольняють умови Коші – Рімана

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

і утворюють аналітичну функцію $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексної змінної $z = x + iy$. З іншого боку, кожна аналітична функція $F(z)$ задовольняє тотожності

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \equiv F''(z)(1^2 + i^2) \equiv 0$$

внаслідок рівності $1^2 + i^2 = 0$ для одиниці 1 і уявної одиниці i алгебри комплексних чисел $\mathbb{C}$, а тому задовольняє двовимірне рівняння Лапласа.

Ефективність дослідження плоских потенціальних полів методами теорії аналітичних функцій комплексної змінної спонукає математиків до пошуку аналогічного математичного апарату для просторових потенціальних полів, зокрема, до пошуку нових алгебр і заданих в них функцій, які б мали властивості, подібні до властивостей аналітичних функцій комплексної змінної.

Вперше спроби побудови алгебри, асоційованої з тривимірним рівнянням Лапласа

$$\Delta_3 u(x,y,z) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(x,y,z) = 0\,, \tag{1.1}$$

тобто такої, що диференційовні функції зі значеннями у цій алгебрі мають компоненти, які задовольняють рівняння (1.1), були зроблені У. Гамільтоном (див., наприклад, [12, с. 223]).

В 1833 році У. Гамільтон описав алгебру впорядкованих пар дійсних чисел, для яких визначив правила додавання, множення і показав, що ці пари утворюють комутативну асоціативну алгебру з діленням, яка співпадає з алгеброю комплексних чисел. Він працював також над узагальненням поняття комплексного числа і займався пошуком системи чисел, які моделюються трійками дійсних чисел. Але, встановивши в таких системах існування дільників нуля (див. [4, с. 408]), чого не було в алгебрі комплексних чисел, У. Гамільтон перейшов до розгляду четвірок дійсних чисел. В 1843 році він побудував некомутативну чотиривимірну без дільників нуля алгебру кватерніонів з базисом $\{1, i, j, k\}$, для елементів якого виконуються наступні правила множення:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = -ji = k, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j,$$

де i, j, k — кватерніонні одиниці — аналоги уявної одиниці в алгебрі комплексних чисел (див. [62]).

У. Гамільтон записав основні поняття векторного аналізу у кватерніонній формі за допомогою так званого набла-оператора

$$\nabla := i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

Так, градієнтом дійснозначної функції $u(x, y, z)$ є формальний вектор

$$\nabla u(x, y, z) = i\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial z},$$

а дія оператора ∇ на векторну функцію $f(x, y, z) := iu(x, y, z) + jv(x, y, z) + kw(x, y, z)$ пов'язана з дивергенцією і ротором, а саме:

$$\nabla f(x, y, z) = -\operatorname{div} f(x, y, z) + \operatorname{rot} f(x, y, z),$$

де

$$\operatorname{div} f(x, y, z) := \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} f(x, y, z) := \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) k.$$

За допомогою оператора ∇ виражається також тривимірний оператор Лапласа, який діє на дійснозначну функцію $u(x,y,z)$:

$$\Delta_3 u(x,y,z) = -\nabla^2 u(x,y,z)\,.$$

Проте, не зважаючи на зручність запису різних співвідношень теорії полів у кватерніонній формі, на початковому етапі розвитку теорії функцій кватерніонної змінної $xi+yj+zk$, що задовольняють систему рівнянь

$$\operatorname{div} f = 0\,, \qquad \operatorname{rot} f = 0, \tag{1.2}$$

виникли істотні труднощі, пов'язані з обмеженістю ефективних можливостей конструювання таких функцій у некомутативній алгебрі кватерніонів.

Зараз кватерніонний аналіз активно розвивається як окремий напрямок в математиці завдяки його численним застосуванням в різних галузях науки, переважно в математичній фізиці та теорії диференціальних рівнянь (див., наприклад, [61, 69]). Реалізація такого зв'язку вимагає введення спеціальних класів кватерніонних "диференційовних" функцій, компоненти яких задовольняють певні системи диференціальних рівнянь типу системи Коші – Рімана.

Початком кватерніонного аналізу у дійсному тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$ була робота Г. Мойсіла і Н. Теодореско [85], у якій вперше запропоновано тривимірний аналог системи рівнянь Коші – Рімана:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} 0 & + & \dfrac{\partial u}{\partial x} & + & \dfrac{\partial v}{\partial y} & + & \dfrac{\partial w}{\partial z} & = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial x} & + & 0 & - & \dfrac{\partial v}{\partial z} & + & \dfrac{\partial w}{\partial y} & = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial y} & + & \dfrac{\partial u}{\partial z} & + & 0 & - & \dfrac{\partial w}{\partial x} & = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial z} & - & \dfrac{\partial u}{\partial y} & + & \dfrac{\partial v}{\partial x} & + & 0 & = 0. \end{array}\right. \tag{1.3}$$

Розглядаючи кватерніоннозначну функцію

$$f(xi+yj+zk) = s(x,y,z) + i\,u(x,y,z) + j\,v(x,y,z) + k\,w(x,y,z),$$

де i, j, k — кватерніонні базисні одиниці, а x, y, z — дійсні числа, зауважимо, що система (1.3) може бути записана у вигляді рівності

$$\mathcal{D}[f] := \frac{\partial f}{\partial x}\, i + \frac{\partial f}{\partial y}\, j + \frac{\partial f}{\partial z}\, k = 0. \tag{1.4}$$

При цьому внаслідок факторизації оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} =$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \circ \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) =: -\mathcal{D} \circ \mathcal{D}'$$

кожен розв'язок рівняння (1.4) задовольняє рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Функції, які задовольняють умови, аналогічні до умов Коші – Рімана, в науковій літературі називають по-різному. Наприклад, в роботах Ф. Брекса і Р. Деланге [49], С. Бернштейн [45], Дж. Раяна [104] такі функції називають *моногенними*, в роботах А. Садбері [116], Ф. Коломбо, І. Сабадіні та Д. Струппи [53] вони називаються *регулярними*, а в монографії В. Кравченка і М. В. Шапіро [69] і в роботі В. Шпрьоссіга [112] — *гіперголоморфними*.

В роботі [85] введено поняття *голоморфного вектора* як кватерніоннозначної вектор-функції, компоненти якої неперервно диференційовні і задовольняють систему (1.3), що дістала назву системи Мойсіла – Теодореско. В тій же роботі [85] автори довели аналог теореми Морера, аналоги інтегральної теореми та інтегральної формули Коші. Започатковані в [85] дослідження були продовжені в роботі [1], де введено поняття інтеграла типу Коші та досліджено існування його граничних значень, а також знайдено його застосування до систем сингулярних інтегральних рівнянь. В статті Р. Абреу-Блая, Х. Борі-Рейєса та М. Шапіро [44] доведено аналоги формул Сохоцького (див., наприклад, [5]) для граничних значень аналога інтеграла типу Коші, який належить ядру оператора $\mathcal{D}$ в областях з ляпуновською межею.

Ряд математиків, зокрема, Дж. Раян [104] розглядають оператор Дірака

$$\widetilde{\mathcal{D}} := \sum_{r=1}^{n} e_r \frac{\partial}{\partial x_r}$$

в n-вимірній кліффордовій алгебрі Cl_n з базисом $\{e_r\}_{r=1}^{n}$. В роботі [104] для граничних значень деякого аналога інтеграла типу Коші, який належить ядру оператора $\widetilde{\mathcal{D}}$ в областях з ляпуновською межею, встановлено аналоги формул Сохоцького. В роботі Х. Борі–Рейєса та Р. Абреу–Блая [48] цей результат узагальнено на більш загальний клас областей.

В роботі [55] Р. Деланге, Р. Краусхар та Г. Мальонек отримали зв'язок між різними типами диференційовності в алгебрі кватерніонів та в кліффордових алгебрах.

Р. Фуетер [56] запропонував чотиривимірне узагальнення системи Мойсіла – Теодореско:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial s}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

і назвав функції, які задовольняють систему (1.5), — *регулярними*. Система (1.5) рівносильна рівнянню

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\, i + \frac{\partial f}{\partial y}\, j + \frac{\partial f}{\partial z}\, k = 0. \tag{1.6}$$

Для функцій, регулярних в областях спеціального вигляду, в роботі А. Садбері [116] доведено аналоги інтегральної теореми та інтегральної формули Коші, а також розглянуто *ліво-диференційовні* функції змінної $q = t + xi + yj + zk$, для яких існує границя

$$\frac{df}{dq} = \lim_{h \to 0} \Big(h^{-1} \big(f(q+h) - f(q) \big) \Big) \qquad \forall h \in \mathbb{H}$$

і доведено, що ліво-диференційовними функціями є лише лінійні функції $f(q) = a + qb$ при всіх $a, b \in \mathbb{H}$. Такий же результат раніше був встановлений в роботі А. Мейлихзона [18].

В статті А. Перотті [87] вивчаються властивості розв'язків рівняння (1.6), при цьому встановлено деякі критерії регулярності функцій у вигляді операторних рівностей і для регулярних функцій розв'язано задачу Неймана.

Згадані дослідження разом із застосуваннями у деяких моделях математичної фізики відображені в монографії В. Кравченка і М. Шапіро [69]. Слід також відмітити, що так звані α*-голоморфні* функції f, які визначаються в [69] рівністю

$$\alpha f + \frac{\partial f}{\partial x}\, i + \frac{\partial f}{\partial y}\, j + \frac{\partial f}{\partial z}\, k = 0,$$

де α — кватерніон, задовольняють тривимірне рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \alpha^2 f = 0.$$

В монографії [69] для α-голоморфних функцій отримано результати, подібні до класичних результатів теорії аналітичних функцій комплексної змінної: інтегральну теорему та інтегральну формулу Коші, встановлено аналоги формул Сохоцького та розв'язано деякі крайові задачі для α-голоморфних функцій.

Останні дослідження у цьому напрямку (див., наприклад, [6, 60, 106]) полягають в різного роду узагальненнях результатів роботи [69].

Іншим, порівняно новим, напрямком кватерніонного аналізу в $\mathbb{R}^3$ і $\mathbb{R}^4$ є так званий модифікований кватерніонний аналіз, започаткований Г. Льойтвілером на початку 90-х років XX ст. (див., наприклад, [54,64,80]).

Він вивчає розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{\partial s}{\partial t} - \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + v = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Двічі неперервно диференційовний розв'язок

$$f(t + xi + yj) = s(t, x, y) + iu(t, x, y) + jv(t, x, y) \tag{1.8}$$

цієї системи називається *гіперголоморфною* функцією.

У системі Г. Льойтвілера в $\mathbb{R}^3$ перші дві компоненти s, u гіперголоморфної функції (1.8), де i, j — базисні кватерніонні одиниці, задовольняють рівняння Лапласа – Бельтрамі

$$y\Delta_3 s - \frac{\partial s}{\partial y} = 0, \qquad \Delta_3 := \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а третя компонента v — рівняння

$$y^2\Delta_3 v - y\frac{\partial v}{\partial y} + v = 0.$$

На відміну від робіт [56, 69, 85, 116], в підході Г. Льойтвілера гіперголоморфною є степенева функція, а частинні похідні гіперголоморфної функції також гіперголоморфні. В той же час між описаними вище напрямками існує певний зв'язок (див. [54]).

В роботі [64] розвинуто аналогічний підхід в просторі $\mathbb{R}^4$. Основною метою робіт Г. Льойтвілера та його наступників є побудова розв'язків системи (1.7) (або аналогічної системи в $\mathbb{R}^4$) у вигляді поліномів та функціональних рядів. При цьому згадані ряди будуються за певною системою базисних кватерніонних поліномів. Такі результати є в роботах [54, 64, 80, 81].

Ще однією сучасною теорією в кватерніонному аналізі є теорія s-*регулярних* функцій, які введені Г. Джентілі та Д. Струппою в роботі [58] в результаті розвитку ідеї К. Кулліна [52], суть якої полягає в наступному.

Нехай $q = t+xi+yj+zk =: t+\text{Im } q$, де t, x, y, z — дійсні числа, а i, j, k — базисні кватерніонні одиниці. Кожен кватерніон $q = t+\text{Im } q$ при $q \neq t$ можна подати у вигляді "комплексного числа" з новою уявною одиницею I, а саме: $q = t+I\,|\,\text{Im } q|$, де $I := \frac{\text{Im } q}{|\,\text{Im } q|}$, а $|\cdot|$ — модуль кватерніона. Очевидно, що $I^2 = -1$. Тоді функція f називається s-*регулярною* (див. [58]), якщо її звуження в кожну "комплексну" площину $\mathbb{R} + I\mathbb{R}$ є "аналітичною" функцією. Очевидно, що s-регулярними є всі кватерніонні поліноми. Зараз теорія s-регулярних функцій продовжує інтенсивно розвиватися (див. монографії [53, 59]).

В 1892 році італійський математик К. Сегре [108] розглянув мультикомплексні алгебри. Елементи цих алгебр він назвав n-комплексними числами. Зокрема, він побудував алгебру бікомплексних чисел (або комутативних кватерніонів), яка є чотиривимірною алгеброю над полем дійсних чисел з таблицею множення:

$$i^2 = -1, \;\; j^2 = -1, \;\; k^2 = 1,$$

$$kj = jk = -i, \;\; ji = ij = k, \;\; ik = ki = -j.$$

Кожне бікомплексне число $\zeta = a + bi + cj + dk$, де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, подається у вигляді

$$\zeta = (a + bi) + (c + di)j =: z_1 + z_2 j,$$

де $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ і $j^2 = -1$. Тобто алгебра бікомплексних чисел є "алгеброю комплексних чисел" з базисом $\{1, j\}$ над полем $\mathbb{C}$.

Базис алгебри трикомплексних чисел Сегре складається з елементів i, j, k (квадрати яких рівні -1), а трикомплексне число подається у вигляді

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 k,$$

де ζ_1, ζ_2 — бікомплексні числа. Трикомплексну алгебру можна розглядати як 2^3-вимірну алгебру над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ або як 2^2-вимірну алгебру над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. К. Сегре показав також, що описану процедуру можна продовжити нескінченно.

З використанням вказаного зв'язку алгебри бікомплексних чисел з алгеброю комплексних чисел встановлено деякі аналоги результатів теорії аналітичних функцій комплексної змінної (див., наприклад, роботи М. Футагава [57], Дж. Скорца – Драгоні [107], У. Моріна [86], Д. Боккалетті та ін. [47], Ф. Катоні [51], С. Рьонна [101], Д. Пінотсіса [89], Дж. Райлі [97], А. Явтокаса [65], Д. Рошона та М. Шапіро [100], Р. Кумара та К. Сінга [70], Е. М. Луни-Алізаррарас та ін. [83, 84]).

Варто відмітити, що велика кількість робіт присвячена проблемі означення аналітичної функції в асоціативних (комутативних або некомутативних) алгебрах.

Зокрема, Е. Лорх [82] називає функцію $f(\zeta)$ диференційовною в точці ζ_0, якщо існує елемент $f'(\zeta_0)$ алгебри такий, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для усіх h, для яких $\|h\| < \delta$, виконується нерівність

$$\|f(\zeta_0 + h) - f(\zeta_0) - hf'(\zeta_0)\| \le \|h\|\varepsilon. \tag{1.9}$$

Для диференційовних у такому сенсі функцій, заданих в опуклих областях комутативної асоціативної банахової алгебри, Е. Лорхом встановлено ряд властивостей, аналогічних до властивостей аналітичних функцій комплексної змінної (зокрема, інтегральна теорема і формула Коші, розклад в степеневий ряд та теорема Морера). В роботі [46] Е. Блюм поширив результати Лорха на функції, які задані в довільних областях комутативної асоціативної банахової алгебри.

Дж. Ворд [119] описав матричний метод побудови умов Коші – Рімана в довільній скінченновимірній асоціативній алгебрі з одиницею. Уточнення результатів роботи [119] для випадку комутативної алгебри було зроблено Д. Вагнером в роботі [118]. Використовуючи результати роботи [118], Дж. Ворд [120] розробив метод знаходження розв'язків диференціальних рівнянь типу Коші – Рімана в довільній скінченновимірній комутативній алгебрі з одиницею за допомогою рядів з цієї алгебри.

Ф. Хаусдорф [63] запропонував означення аналітичної функції в довільній асоціативній (комутативній або некомутативній) алгебрі $\mathbb{A}$ над полем $\mathbb{C}$ з одиницею, яке може бути сформульовано у наступному вигляді. Функція

$$f(\eta) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\eta_1, \ldots, \eta_n) e_k \,, \tag{1.10}$$

де e_k — базисні елементи алгебри $\mathbb{A}$, називається H-*аналітичною* функцією змінної $\eta := \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e_k$, якщо компоненти f_k розкладу (1.10) є аналітичними функціями комплексних змінних $\eta_1, \ldots, \eta_n$ і диференціал

$$df := \sum_{k=1}^{n} df_k(\eta_1, \ldots, \eta_n) e_k = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \eta_j} \, d\eta_j \, e_k \tag{1.11}$$

є лінійним однорідним поліномом диференціала $d\eta := \sum\limits_{k=1}^{n} d\eta_k \, e_k$, тобто

$$df = \sum_{s=1}^{n^2} A_s \, d\eta \, B_s \,, \tag{1.12}$$

де A_s і B_s — деякі $\mathbb{A}$–значні функції.

При цьому значення $f'(\eta) := \sum\limits_{s=1}^{n^2} A_s \, B_s$ називають похідною Хаусдорфа функції $f(\eta)$.

Відмітимо, що в роботі [99] при означенні H-аналітичної функції в асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{R}$, припускається аналітичність дійснозначних компонент f_k із розкладу (1.10), а в роботі [98] розглядаються асоціативні алгебри над полями $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ і припускається лише існування частинних похідних $\frac{\partial f_k}{\partial \eta_j}$ для всіх $j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Ф. Рінглеб в роботі [99] розвиває теорію H-аналітичних функцій в довільній скінченновимірній напівпростій (такій, що є прямою сумою простих алгебр) алгебрі над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. При цьому він розглядає функції, які визначені і приймають значення в усій алгебрі.

Розвиваючи ідеї Хаусдорфа, С. Воловельська в роботі [3] означає H-аналітичні функції в області алгебри з деякого класу скінченновимірних ненапівпростих алгебр над полем $\mathbb{R}$ і описує загальний вигляд таких функцій.

В роботі М. Дегтерьової [11] показано, що в комутативній алгебрі над $\mathbb{R}$ диференційовність за Хаусдорфом співпадає із диференційовністю за Шеферсом (див. [105]).

В. Портман [95] визначає похідну від H-аналітичної функції в асоціативних алгебрах над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ і досліджує питання про її співвідношення з деякими іншими означеннями похідної.

В роботі Р. Рінехарта і Дж. Вілсона [98] вводиться клас диференційовних в деякому сенсі функцій в довільній асоціативній алгебрі над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, і вивчається питання про співвідношення між цими функціями і H-аналітичними функціями на різних класах алгебр.

І. П. Мельниченко [19–21, 23, 26] запропонував алгебраїчно-аналітичний підхід до еліптичних рівнянь математичної фізики, основна ідея якого полягає в побудові комутативних асоціативних банахових алгебр таких, що моногенні (неперервні і диференційовні за Гато) функції зі значеннями в цих алгебрах мають компоненти, які задовольняють задані рівняння з частинними похідними.

Такий підхід [19, 26] до побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа є узагальненням підходу П. Кетчума [67].

І. П. Мельниченко помітив, що двічі диференційовні за Гато функції $\Phi(\zeta)$ змінної $\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3$, де $x, y, z \in \mathbb{R}$, утворюють найширший клас функцій, які задані в комутативній асоціативній банаховій алгебрі $\mathbb{A}$ розмірності $n \geq 3$ (над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$) і задовольняють рівності

$$\Delta_3\Phi(\zeta) \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \equiv \Phi''(\zeta)\left(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2\right) = 0 \tag{1.13}$$

за умови, що базисні елементи e_1, e_2, e_3 задовольняють співвідношення

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 0. \tag{1.14}$$

Функція $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{A}$ називається диференційовною за Гато в точці ζ області $\Omega_\zeta \subset E_3 := \{\zeta = xe_1 + ye_2 + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, якщо існує елемент

$\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{A}$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\Phi(\zeta+\varepsilon h)-\Phi(\zeta)\right)\varepsilon^{-1}=h\Phi'(\zeta)\quad \forall h\in E_3. \tag{1.15}$$

Послідовно вибираючи замість вектора h в рівностях вигляду (1.15) базисні елементи e_1, e_2, e_3, одержуємо рівності

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=e_1^2\,\Phi''(\zeta),\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=e_2^2\,\Phi''(\zeta),\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=e_3^2\,\Phi''(\zeta),$$

наслідком яких і співвідношення (1.14) є рівності вигляду (1.13) для функції Φ.

Трійку векторів e_1, e_2, e_3, яка задовольняє співвідношення (1.14) і нерівності $e_k^2\neq 0$ при $k=1,2,3$ І. П. Мельниченко назвав гармонічною, а алгебру $\mathbb{A}$, яка містить гармонічну трійку, — гармонічною.

Зауважимо, що умова $e_k^2\neq 0$ при $k=1,2,3$ виключає з розгляду тривіальний випадок гармонічної трійки, яка завжди існує в алгебрі з нетривіальним радикалом над полем комплексних чисел, а саме: $e_1=1$, $e_2=i$, e_3 – нільпотентний елемент, що задовольняє умову $e_3^2=0$. Такий приклад алгебри і гармонічної трійки був наведений у роботі П. Кетчума [67].

Відмітимо, що І. П. Мельниченко повністю розв'язав задачу про виділення в комутативній асоціативній тривимірній алгебрі гармонічної трійки векторів. Так, в роботі [19] доведено, що гармонічних алгебр третього рангу над полем дійсних чисел не існує, але вперше побудовано тривимірну гармонічну алгебру над полем комплексних чисел. В роботі [23] доведено, що серед існуючих чотирьох тривимірних алгебр над полем $\mathbb{C}$ гармонічними є лише три з них, а в роботі [26] здійснено конструктивний опис усіх гармонічних базисів в цих алгебрах.

В роботі В. Ф. Ковальова та І. П. Мельниченка [13] побудовано двовимірну асоціативну комутативну алгебру $\mathbb{B}$ з одиницею над полем $\mathbb{C}$, базисні елементи e_1, e_2 якої задовольняють співвідношення

$$(e_1^2+e_2^2)^2=0,\qquad e_1^2+e_2^2\neq 0. \tag{1.16}$$

Алгебру $\mathbb{B}$, в якій існує базис $\{e_1, e_2\}$, що задовольняє умови (1.16), в роботі [13] названо бігармонічною, і такий базис названо також бігармонічним. Відмітимо, що алгебра $\mathbb{B}$ ізоморфна асоціативній комутативній над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ алгебрі четвертого рангу з одиницею 1, що складається з елементів виду $a + jb + j^2c + j^3d$, де елемент алгебри j задовольняє співвідношення $(1 + j^2)^2 = 0$, а компоненти a, b, c, d є дійсними числами (див. роботи Л. Собреро [113, 114]).

В роботі І. П. Мельниченка [21] доведено, що усі бігармонічні базиси містяться в алгебрі з базисом $\{1, \rho\}$, де $\rho^2 = 0$, яка співпадає з алгеброю $\mathbb{B}$, введеною в [13] і описано усі бігармонічні базиси цієї алгебри.

С. В. Грищук та С. А. Плакса [8] показали, що кожна бігармонічна функція є першою компонентою $U_1(x, y)$ деякої моногенної функції бігармонічної змінної.

В роботі С. А. Плакси [30] (див. також монографію [26]) доведено, що кожна сферична функція є першою компонентою розкладу за базисом деякої диференційовної за Гато функції зі значеннями в нескінченновимірній комутативній гармонічній банаховій алгебрі $\mathbb{F}$.

І. П. Мельниченко [20] розглянув підалгебру $\mathbb{H}$ вище згаданої алгебри $\mathbb{F}$ і показав спосіб побудови в меридіанній площині xOy осесиметричних потенціалів (розв'язків тривимірного рівняння Лапласа, які симетричні відносно осі Ox) і функцій течії Стокса за компонентами степеневих функцій певного виду.

В роботах І. П. Мельниченка і С. А. Плакси [22, 26] розглянуто комплексифікацію $\mathbb{H}_{\mathbb{C}} := \mathbb{H} \oplus i\mathbb{H} = \{a + ib : \ a, b \in \mathbb{H}\}$ алгебри $\mathbb{H}$ і досліджено основні алгебраїчно-аналітичні властивості моногенних функцій, що приймають значення в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

Розроблена в роботах [22, 26] схема дослідження була істотно доповнена в роботах С. В. Грищука і С. А. Плакси у процесі дослідження моногенних функцій, що приймають значення в бігармонічній алгебрі $\mathbb{B}$. Так, в роботах [8–10] для моногенних функцій, які задані в областях бігармонічної площини і приймають значення в бігармонічній алгебрі $\mathbb{B}$, одержано конструктивний опис цих функцій за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної, встановлено ізоморфізм між алгебрами моногенних функцій, заданими в різних бігармонічних площинах, а також доведено ряд теорем про аналітичні властивості моногенних функцій в бігармонічній площині, подібні до властивостей аналітичних функцій комплексної змінної (інтегральну теорему і інтегральну формулу Коші, теорему Морера, теорему єдиності, одержано тейлорівські і лоранівські розклади).

Подібні аналоги теорем класичного комплексного аналізу отримані: в роботах С. А. Плакси і В. С. Шпаківського [31, 33, 42, 91] — для моногенних функцій зі значеннями в тривимірній комутативній гармонічній алгебрі $\mathbb{A}_3$ з двовимірним радикалом; в роботах С. А. Плакси і Р. П. Пухтаєвича [32, 35] — для моногенних функцій в тривимірній комутативній алгебрі $\mathbb{A}_2$ з одновимірним радикалом; а також в роботах [94, 96] — для моногенних функцій в тривимірній та скінченновимірній напівпростих алгебрах.

Нарешті, описаний вище підхід до побудови теорії моногенних (неперервних і диференційовних за Гато) функцій в роботах В. С. Шпаківського [109,110] було істотно розвинено і розповсюджено на випадок моногенних функцій, що приймають значення в довільній комутативній асоціативній скінченновимірній алгебрі.

В наших роботах [17, 41, 43, 74, 76, 111] аналогічні результати встановлено для G-моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, що є основним змістом цієї дисертації.

Висновки

Отже, теорія функцій, заданих в банахових алгебрах (як комутативних, так і некомутативних), дає ефективні методи дослідження задач математичної фізики, що є аналогічними до методів теорії аналітичних функцій комплексної змінної.

При цьому актуальною залишається проблема виділення спеціальних класів диференційовних у певному сенсі функцій (заданих, зокрема, в некомутативній алгебрі кватерніонів), які б мали властивості, подібні до властивостей аналітичних функцій комплексної змінної і, крім того, утворювали достатньо широкий набір з огляду на можливі змістовні застосування. Певні труднощі, що виникають на шляху реалізації такого підходу, пов'язані, насамперед, з обмеженістю можливостей переносу класичних теорем теорії аналітичних функцій комплексної змінної в аналіз на некомутативних алгебрах.

РОЗДІЛ 2

АЛГЕБРАЇЧНО-АНАЛІТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ G-МОНОГЕННИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

У цьому розділі вивчаються алгебаїчно-аналітичні властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів.

2.1. Алгебра комплексних кватерніонів

Нехай $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватерніонів над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$, базис якої складається з одиниці алгебри 1 і елементів I, J, K, для яких виконуються наступні правила множення:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$

$$IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

Розглянемо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ інший базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, розклад елементів якого в базисі $\{1, I, J, K\}$ має вигляд:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \quad e_3 = \frac{1}{2}(iJ - K), \quad e_4 = \frac{1}{2}(iJ + K),$$

де i — уявна комплексна одиниця. Таблиця множення в новому базисі набуває вигляду (див. [50])

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

, (2.1)

при цьому одиниця алгебри має розклад: $1 = e_1 + e_2$.

Відмітимо, що комутативна підалгебра з ідемпотентним базисом $\{e_1, e_2\}$ є алгеброю бікомплексних чисел (або алгеброю комутативних кватерніонів Сегре [108]).

Підмножина $\mathcal{I} \subset \mathbb{H}(\mathbb{C})$ називається *правим ідеалом*, якщо з умови $x \in \mathcal{I}$, $y \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ випливає, що $xy \in \mathcal{I}$, і *лівим ідеалом*, якщо з умови $x \in \mathcal{I}$, $y \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ випливає, що $yx \in \mathcal{I}$ (див., наприклад, [2, с. 64]).

Алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ містить два праві максимальні ідеали:

$$\mathcal{I}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4 : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 : \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}$$

і два ліві максимальні ідеали:

$$\widehat{\mathcal{I}}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 : \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}, \qquad \widehat{\mathcal{I}}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_4 e_4 : \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}.$$

Оскільки радикал алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ містить тільки нульовий елемент, то алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ є напівпростою алгеброю (див., наприклад, [39, с. 146]).

Наслідком очевидних рівностей

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \cap \widehat{\mathcal{I}}_2 = 0, \qquad \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \cup \widehat{\mathcal{I}}_2 = \mathbb{H}(\mathbb{C})$$

є розклад в пряму суму:

$$\mathbb{H}(\mathbb{C}) = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \oplus \widehat{\mathcal{I}}_2.$$

Введемо в розгляд лінійні функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, задані рівностями

$$\begin{aligned} f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0, \\ f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ядрами функціоналів f_1 та f_2 є відповідно максимальні ідеали $\mathcal{I}_1$ та $\mathcal{I}_2$.

Означимо також лінійні функціонали $\widehat{f}_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $\widehat{f}_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, покладаючи

$$\begin{aligned} \widehat{f}_1(e_1) = \widehat{f}_1(e_4) = 1, \qquad \widehat{f}_1(e_2) = \widehat{f}_1(e_3) = 0, \\ \widehat{f}_2(e_2) = \widehat{f}_2(e_3) = 1, \qquad \widehat{f}_2(e_1) = \widehat{f}_2(e_4) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Максимальні ідеали $\widehat{\mathcal{I}}_1$ та $\widehat{\mathcal{I}}_2$ є відповідно ядрами функціоналів $\widehat{f}_1$ та $\widehat{f}_2$.

2.2. G-моногенні відображення

Нехай

$$i_1 = e_1 + e_2, \qquad i_2 = a_1 e_1 + a_2 e_2, \qquad i_3 = b_1 e_1 + b_2 e_2 \tag{2.4}$$

при $a_k, b_k \in \mathbb{C},\ k = 1, 2$, — трійка лінійно незалежних векторів над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$ (див. [94, с. 223]). Це означає, що рівність

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Виділимо в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ лінійну оболонку

$$E_3 := \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, породжену векторами i_1, i_2, i_3. Множині S тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ поставимо у відповідність множину

$$S_\zeta := \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : (x, y, z) \in S\} \subset E_3. \tag{2.5}$$

Відмітимо, що топологічні властивості множини S_ζ простору E_3 будемо розуміти як відповідні властивості множини S евклідового простору $\mathbb{R}^3$.

Домовимося, що надалі $x, y, z \in \mathbb{R}$, а також дійсними числами є значення змінних, які містять нижні індекси, наприклад, x_0, x_1 і т. д. Крім того, векторні відображення $\overrightarrow{\Phi}(\zeta)$ векторного аргументу $\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 \in E_3$, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, будемо називати просто відображеннями, опускаючи при цьому символ вектора над літерою Φ, як це, зазвичай, прийнято в гіперкомплексному аналізі (див., наприклад, [69,82,97]).

Наслідком рівностей (2.2), (2.3) і (2.4) є наступні співвідношення

$$\xi_1 := f_1(\zeta) = \widehat{f_1}(\zeta) = x + a_1 y + b_1 z,$$

$$\xi_2 := f_2(\zeta) = \widehat{f_2}(\zeta) = x + a_2 y + b_2 z.$$

Тепер елемент $\zeta \in E_3$ можна подати у вигляді $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$.

Відмітимо, що образи множин з простору E_3 при відображенні функціоналами f_1 і $\widehat{f_1}$, а також f_2 і $\widehat{f_2}$, — тотожні.

Істотним є припущення, що кожен функціонал f_1, f_2 відображає простір E_3 на всю площину комплексних чисел, тобто виконується рівність $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, де $f_1(E_3), f_2(E_3)$ — образи простору E_3 при відображенні функціоналами f_1, f_2. Очевидно, що воно має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Визначимо норму кватерніона $x = \sum\limits_{n=1}^{4} x_n e_n, x_n \in \mathbb{C}$ рівністю

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{n=1}^{4} |x_n|^2}.$$

Означення 2.2.1. Якщо для довільних $x \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $y \in E_3$ виконується рівність $f(yx) = f(y) \cdot f(x)$, то функціонал $f : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ будемо називати *правомультиплікативним* в просторі E_3.

Означення 2.2.2. Якщо для довільних $x \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $y \in E_3$ виконується рівність $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$, то функціонал $f : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ будемо називати *лівомультиплікативним* в просторі E_3.

Лема 2.2.1. *Функціонали $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ неперервні і правомультиплікативні, а функціонали $\widehat{f_1} : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ та $\widehat{f_2} : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ неперервні і лівомультиплікативні.*

Доведення. Покажемо, що функціонал $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ є правомультиплікативним, тобто $f_1(yx) = f_1(y) \cdot f_1(x)$. Нехай

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in \mathbb{H}(\mathbb{C}),$$

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 \in E_3.$$

Тоді

$$f_1(yx) = f_1\big((y_1e_1 + y_2e_2)(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4)\big) =$$

$$= f_1(y_1x_1e_1 + y_2x_2e_2 + y_1x_3e_3 + y_2x_4e_4) = y_1x_1 + y_1x_3,$$

$$f_1(y)\cdot f_1(x)=f_1(y_1e_1+y_2e_2)\cdot f_1(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)=$$

$$=y_1(x_1+x_3)=y_1x_1+y_1x_3.$$

Отже, $f_1(yx)=f_1(y)\cdot f_1(x)$.

Неперервність функціоналу $f_1:\mathbb{H}(\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ випливає із його обмеженості. А саме

$$\frac{|f_1(x)|}{\|x\|}\le\frac{|x_1|+|x_3|}{\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2+|x_4|^2}}\le 2.$$

Аналогічно доводиться відповідна мультиплікативність і неперервність інших функціоналів. Лему доведено.

Нехай Ω_ζ — область в просторі E_3.

Означення 2.2.3. Неперервне відображення $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ називаємо *право-G-моногенним* в області $\Omega_\zeta\subset E_3$, якщо для кожного $\zeta\in\Omega_\zeta$ існує елемент $\Phi'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{\Phi(\zeta+\varepsilon h)-\Phi(\zeta)}{\varepsilon}=h\Phi'(\zeta)\quad\forall\, h\in E_3. \tag{2.6}$$

При цьому $\Phi'(\zeta)$ назвемо *правою похідною Гато* відображення Φ в точці ζ.

Означення 2.2.4. Неперервне відображення $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ називаємо *ліво-G-моногенним* в області $\Omega_\zeta\subset E_3$, якщо для кожного $\zeta\in\Omega_\zeta$ існує елемент $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такий, що виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon\to0+0}\frac{\widehat{\Phi}(\zeta+\varepsilon h)-\widehat{\Phi}(\zeta)}{\varepsilon}=\widehat{\Phi}'(\zeta)h\quad\forall\, h\in E_3. \tag{2.7}$$

При цьому $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ назвемо *лівою похідною Гато* відображення Φ в точці ζ.

Розглянемо розклад відображення $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за базисом $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$:

$$\Phi(\zeta)=\sum_{n=1}^{4}U_n(x,y,z)e_n,\quad x,y,z\in\mathbb{R}. \tag{2.8}$$

У припущенні, що функції $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n = 1,2,3,4$, є $\mathbb{R}$-диференційовними в області Ω, тобто задовольняють співвідношення

$$U_n(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_n(x, y, z) =$$
$$= \frac{\partial U_n}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U_n}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U_n}{\partial z}\Delta z + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right),$$
$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0,$$

в наступних теоремах встановлено необхідні і достатні умови право-G-моногенності відображення $\Phi(\zeta)$ і ліво-G-моногенності відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$.

Теорема 2.2.1. *Для того, щоб відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *вигляду* (2.8), *де* $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *є* $\mathbb{R}$*-диференційовними функціями в області* Ω, *було право-*G*-моногенним в області* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:*

$$\begin{gathered}\frac{\partial U_1}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_4}{\partial x}, \\ \frac{\partial U_1}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_4}{\partial x}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо відображення (2.8) право-G-моногенне в області Ω_ζ, то при $h = i_1$ рівність (2.6) набуває вигляду

$$\Phi'(\zeta) = \sum_{n=1}^{4} \frac{\partial U_n(x,y,z)}{\partial x}\, e_n \qquad \forall \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta.$$

Тепер, покладаючи в рівності (2.6) спочатку $h = i_2$, а потім $h = i_3$, та з урахуванням правил множення (2.1), отримуємо умови (2.9) для компонент право-G-моногенного відображення (2.8).

Достатність. Нехай $h := h_1 i_1 + h_2 i_2 + h_3 i_3$, де $h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R}$, і додатне число ε таке, що $\zeta + \varepsilon h \in \Omega_\zeta$. Враховуючи умови (2.9), маємо

$$\frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} - h\sum_{n=1}^{4} \frac{\partial U_n(x,y,z)}{\partial x}\, e_n =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{4}\Big(U_n(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_n(x,y,z)\Big)e_n -$$

$$-\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}h_1 + a_1\frac{\partial U_1}{\partial x}h_2 + b_1\frac{\partial U_1}{\partial x}h_3\right)e_1 - \left(\frac{\partial U_2}{\partial x}h_1 + a_2\frac{\partial U_2}{\partial x}h_2 + b_2\frac{\partial U_2}{\partial x}h_3\right)e_2 -$$

$$-\left(\frac{\partial U_3}{\partial x}h_1 + a_1\frac{\partial U_3}{\partial x}h_2 + b_1\frac{\partial U_3}{\partial x}h_3\right)e_3 - \left(\frac{\partial U_4}{\partial x}h_1 + a_2\frac{\partial U_4}{\partial x}h_2 + b_2\frac{\partial U_4}{\partial x}h_3\right)e_4 =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{n=1}^{4}\Bigg(U_n(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_n(x,y,z) -$$

$$-\frac{\partial U_n(x,y,z)}{\partial x}\varepsilon h_1 - \frac{\partial U_n(x,y,z)}{\partial y}\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_n(x,y,z)}{\partial z}\varepsilon h_3\Bigg)e_n. \qquad (2.10)$$

Внаслідок диференційовності функцій U_n в області Ω справедливі співвідношення

$$U_n(x+\varepsilon h_1, y+\varepsilon h_2, z+\varepsilon h_3) - U_n(x,y,z) -$$
$$-\frac{\partial U_n(x,y,z)}{\partial x}\varepsilon h_1 - \frac{\partial U_n(x,y,z)}{\partial y}\varepsilon h_2 - \frac{\partial U_n(x,y,z)}{\partial z}\varepsilon h_3 = o(\varepsilon),$$
$$\varepsilon \to 0,\ \ n = 1,2,3,4.$$

Тому, перейшовши до границі в рівності (2.10) при $\varepsilon \to 0$, отримуємо рівність (2.6). Теорему доведено.

Аналогічно доводиться критерій ліво-G-моногенності відображень.

Теорема 2.2.2. *Для того, щоб відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду (2.8), де $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω, було ліво-G-моногенним в області $\Omega_\zeta \subset E_3$ необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:*

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial y} = a_2\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial y} = a_1\frac{\partial U_4}{\partial x},$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_3}{\partial z} = b_2\frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_4}{\partial z} = b_1\frac{\partial U_4}{\partial x}. \qquad (2.11)$$

Відмітимо, що отримані умови (2.9) і (2.11) є аналогами умов Коші–Рімана, які у згорнутому вигляді можуть бути записані співвідношеннями

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = i_2\,\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = i_3\,\frac{\partial\Phi}{\partial x} \tag{2.12}$$

для право- G -моногенного відображення, і у вигляді

$$\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial y} = \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\,i_2, \qquad \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\,i_3 \tag{2.13}$$

для ліво- G -моногенного відображення.

Шляхом перевірки умов (2.12), (2.13) з урахуванням подання елемента ζ у вигляді $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ і таблиці множення (2.1), легко переконатися, що відображення $\Phi(\zeta) = \zeta^n$ є одночасно право- і ліво- G -моногенним у всьому просторі E_3. Аналогічно перевіряється, що відображення

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \zeta^k\, c_k, \quad c_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C}) \tag{2.14}$$

є право- G -моногенним в E_3, а відображення

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} c_k\, \zeta^k, \quad c_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$$

— ліво- G -моногенним в E_3.

2.3. Конструктивний опис G -моногенних відображень

Лема 2.3.1. *Розклад резольвенти має вигляд*

$$(t-\zeta)^{-1} = \frac{1}{t-\xi_1}\,e_1 + \frac{1}{t-\xi_2}\,e_2 \tag{2.15}$$

$$\forall\, t \in \mathbb{C} :\, t \neq \xi_1,\;\; t \neq \xi_2, \qquad \forall\, \zeta \in E_3.$$

Доведення. Встановимо, при яких $t \in \mathbb{C}$ в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ існує елемент $(t-\zeta)^{-1}$ і знайдемо коефіцієнти A_n його розкладу за базисом:

$$(t-\zeta)^{-1} = \sum_{n=1}^{4} A_n\, e_n.$$

Враховуючи розклад (2.4) елементів i_1, i_2, i_3 за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ і таблицю множення алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, маємо

$$1 = (t-\zeta)(t-\zeta)^{-1} = \Big((t-\xi_1)e_1 + (t-\xi_2)e_2\Big)\sum_{n=1}^{4} A_n\, e_n =$$

$$= (t-\xi_1)A_1e_1 + (t-\xi_1)A_3e_3 + (t-\xi_2)A_2e_2 + (t-\xi_2)A_4e_4 = e_1 + e_2.$$

Тепер, прирівнюючи коефіцієнти при відповідних базисних одиницях, отримуємо розклад (2.15). Лему доведено.

Із розкладу (2.15) випливає, що точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, які відповідають необоротним елементам $\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in E_3$, утворюють дві прямі

$$\begin{aligned} L^1 :\quad &\begin{cases} x + y\,\mathrm{Re}\;a_1 + z\,\mathrm{Re}\;b_1 = 0, \\ y\,\mathrm{Im}\;a_1 + z\,\mathrm{Im}\;b_1 = 0, \end{cases} \\ L^2 :\quad &\begin{cases} x + y\,\mathrm{Re}\;a_2 + z\,\mathrm{Re}\;b_2 = 0, \\ y\,\mathrm{Im}\;a_2 + z\,\mathrm{Im}\;b_2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.16}$$

в тривимірному просторі $\mathbb{R}^3$.

В наступній лемі показано, що в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ прямі L^1 і L^2 співпадати не можуть.

Лема 2.3.2. *В алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ прямі L^1 і L^2 не співпадають.*

Доведення. Напрямний вектор e_k^* прямої L^k належить ідеалу $\mathcal{I}_k$ при $k = 1, 2$. Припустимо супротивне, що прямі (2.16) співпадають. Тоді справедлива рівність

$$e_1^* = pe_2^*, \quad p \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

з якої випливає, що елементи e_1^*, e_2^* належать одночасно ідеалам $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$. Отже, e_1^*, e_2^* належать радикалу алгебри, який складається тільки з нульового елемента, а це суперечить тому, що e_k^* — напрямний вектор прямої L^k при $k = 1, 2$. Лему доведено.

Область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ називають *опуклою в напрямку прямих* L^1 *та* L^2, якщо вона містить кожен відрізок, який паралельний хоча б одній з прямих L^1 та L^2 і з'єднує дві точки цієї області.

Зазначимо, що тут і далі до об'єктів з E_3 застосовуються геометричні поняття (паралельність, перпендикулярність, опуклість тощо), які строго кажучи, насправді мають сенс по відношенню до конгруентних прообразів цих об'єктів в $\mathbb{R}^3$ (див. відповідність (2.5)).

Доведення наступного твердження здійснюється за схемою доведення леми 1 з роботи С. А. Плакси і В. С. Шпаківського [33].

Лема 2.3.3. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямих* L_ζ^1, L_ζ^2 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *а відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є право-*G*-моногенним в області* Ω_ζ. *Якщо точки* $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ *такі, що* $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L^1\}$, *то*

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_1. \tag{2.17}$$

Якщо ж точки $\zeta_1, \zeta_2 \in \Omega_\zeta$ *такі, що* $\zeta_1 - \zeta_2 \in \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in L^2\}$, *то*

$$\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2) \in \mathcal{I}_2.$$

Доведення. Зафіксуємо $k = 1, 2$. Нехай (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) — точки області Ω такі, що відрізок, який їх з'єднує, паралельний прямій L^k.

В області Ω побудуємо дві поверхні зі спільним краєм: поверхню Q^k, яка містить точку (x_1, y_1, z_1), і поверхню Σ^k, яка містить точку (x_2, y_2, z_2), такі, що звуження на них функціонала f_k на відповідні їм підмножини Q_ζ^k, Σ_ζ^k області Ω_ζ є взаємно однозначними відображеннями цих підмножин на одну й ту ж область D_k комплексної площини і, крім того, в кожній точці $\zeta_0 \in Q_\zeta^k$ (а також $\zeta_0 \in \Sigma_\zeta^k$) виконується рівність

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{\Phi(\zeta_0 + \varepsilon(\zeta - \zeta_0)) - \Phi(\zeta_0)}{\varepsilon} = (\zeta - \zeta_0)\Phi'(\zeta_0) \tag{2.18}$$

при всіх $\zeta \in Q_\zeta^k$ таких, що $\zeta_0 + \varepsilon(\zeta - \zeta_0) \in Q_\zeta^k$ (або, відповідно, при всіх $\zeta \in \Sigma_\zeta^k$ таких, що $\zeta_0 + \varepsilon(\zeta - \zeta_0) \in \Sigma_\zeta^k$) для довільного $\varepsilon \in (0, 1)$.

В якості поверхні Q^k розглянемо в області Ω фіксований рівносторонній трикутник з вершинами A_1, A_2, A_3 і центром в точці (x_1, y_1, z_1), площина якого перпендикулярна прямій L^k, і продовжимо побудову поверхні Σ^k.

Розглянемо трикутник з вершинами A_1', A_2', A_3' і центром в точці (x_2, y_2, z_2), який лежить в області Ω, такий, що його сторони $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$, $A_1'A_3'$ паралельні відрізкам A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 відповідно і мають меншу довжину, ніж сторони трикутника $A_1A_2A_3$. Оскільки область Ω опукла в напрямку прямої L^k, то призма з вершинами $A_1', A_2', A_3', A_1'', A_2'', A_3''$, для якої точки A_1'', A_2'', A_3'' лежать в площині трикутника $A_1A_2A_3$ і її ребра $A_m'A_m''$ при $m = 1, 2, 3$ паралельні прямій L^k, повністю міститься в Ω.

Зафіксуємо тепер трикутник з вершинами B_1, B_2, B_3 такий, що точка B_m належить відрізку $A_m'A_m''$ при $m = 1, 2, 3$ і зрізана піраміда з вершинами $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ і бічними ребрами A_mB_m, $m = 1, 2, 3$, повністю міститься в області Ω.

Нарешті, в площині трикутника $A_1'A_2'A_3'$ зафіксуємо трикутник T^k з вершинами C_1, C_2, C_3 такий, що його сторони C_1C_2, C_2C_3, C_1C_3 паралельні відрізкам $A_1'A_2'$, $A_2'A_3'$, $A_1'A_3'$ відповідно і мають меншу довжину, ніж сторони трикутника $A_1'A_2'A_3'$. За побудовою зрізана піраміда з вершинами $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ і бічними ребрами B_mC_m, $m = 1, 2, 3$, повністю міститься в області Ω.

Позначимо через Σ^k поверхню, утворену трикутником T^k і бічними поверхнями зрізаних пірамід $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ і $B_1B_2B_3C_1C_2C_3$.

Оскільки поверхні Q^k і Σ^k мають спільний край, то функціонал f_k відображає множини Q_ζ^k і Σ_ζ^k на одну й ту ж область D_k комплексної площини. В області D_k визначимо дві комплекснозначні функції H_1 і H_2 так, що при кожному $\xi_k \in D_k$

$$H_1(\xi_k) := f_k(\Phi(\zeta)), \ \text{де } \xi_k = f_k(\zeta) \text{ і } \zeta \in Q_\zeta^k,$$

$$H_2(\xi_k) := f_k(\Phi(\zeta)), \ \text{де } \xi_k = f_k(\zeta) \text{ і } \zeta \in \Sigma_\zeta^k.$$

Покажемо, що H_1 і H_2 — аналітичні в D_k функції комплексної змінної ξ_k. Для цього зауважимо, що, діючи на рівність (2.18) функціоналом

f_k, з урахуванням його лінійності, неперервності і відповідної мультиплікативності отримуємо рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{f_k(\Phi(\zeta_0+\varepsilon(\zeta-\zeta_0)))-f_k(\Phi(\zeta))}{\varepsilon} = (f_k(\zeta)-f_k(\zeta_0))f_k(\Phi'(\zeta_0)),$$

з якої для функцій H_1, H_2 випливає існування похідних в точці $f_k(\zeta_0)\in D_k$ за усіма напрямками, причому для кожної з функцій H_1, H_2 вказані похідні рівні. Тоді за теоремою 21 з монографії Ю.Ю. Трохимчука [36] функції H_1, H_2 є аналітичними в області D_k.

Оскільки з визначення функцій H_1 і H_2 випливає, що $H_1(\xi_k)\equiv H_2(\xi_k)$ на межі області D_k, то в силу аналітичності функцій H_1 і H_2 в області D_k тотожність $H_1(\xi_k)\equiv H_2(\xi_k)$ виконується скрізь в D_k. Тобто справедливі рівності

$$f_k(\Phi(\zeta_2)-\Phi(\zeta_1)) = f_k(\Phi(\zeta_2))-f_k(\Phi(\zeta_1)) = H_2(\xi_k)-H_1(\xi_k)=0.$$

Отже, $\Phi(\zeta_2)-\Phi(\zeta_1)$ належить ядру $\mathcal{I}_k$ функціонала f_k. Лему доведено.

Повністю аналогічно доводиться наступне твердження.

Лема 2.3.4. *Нехай область $\Omega_\zeta\subset E_3$ опукла в напрямку прямих L_ζ^1, L_ζ^2 і $f_1(E_3)=f_2(E_3)=\mathbb{C}$, а відображення $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ є ліво-G-моногенним в області Ω_ζ. Якщо точки $\zeta_1,\zeta_2\in\Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1-\zeta_2\in\{\zeta=xi_1+yi_2+zi_3:(x,y,z)\in L^1\}$, то*

$$\widehat{\Phi}(\zeta_1)-\widehat{\Phi}(\zeta_2)\in\widehat{\mathcal{I}}_1.$$

Якщо ж точки $\zeta_1,\zeta_2\in\Omega_\zeta$ такі, що $\zeta_1-\zeta_2\in\{\zeta=xi_1+yi_2+zi_3:(x,y,z)\in L^2\}$, то

$$\widehat{\Phi}(\zeta_1)-\widehat{\Phi}(\zeta_2)\in\widehat{\mathcal{I}}_2.$$

Відзначимо, що умова опуклості області Ω_ζ в напрямку прямих L_ζ^1, L_ζ^2 в лемах 2.3.3 і 2.3.4 є істотною. Для цього побудуємо приклад області Ω_ζ, яка не є опуклою в напрямку прямої L_ζ^1, і право-G-моногенного відображення $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$, для якого $\Phi(\zeta_1)-\Phi(\zeta_2)\mathcal{I}_1$ не виконується при деяких $\zeta_1,\zeta_2\in\Omega_\zeta$ таких, що $\zeta_2-\zeta_1\in L_\zeta^1$.

Приклад 2.3.1. Розглянемо гармонічну трійку векторів

$$i_1 = 1,$$

$$i_2 = ie_1 + e_2,$$

$$i_3 = i\sqrt{2}e_2$$

(тобто в розкладі (2.4) $a_1 = i$, $a_2 = 1$, $b_1 = 0$, $b_2 = i\sqrt{2}$), при цьому пряма L^1 співпадає з віссю Oz.

Нехай область Ω_ζ є об'єднанням множин

$$\Omega_\zeta^1 := \{xi_1 + yi_2 + zi_3 \in E_3 : |\xi_1| < 2, 0 < z < 2, -\tfrac{\pi}{4} < \arg\xi_1 < \tfrac{3}{2}\pi\},$$

$$\Omega_\zeta^2 := \{xi_1 + yi_2 + zi_3 \in E_3 : |\xi_1| < 2,\ 2 \le z \le 4,\ \tfrac{\pi}{2} < \arg\xi_1 < \tfrac{3}{2}\pi\},$$

$$\Omega_\zeta^3 := \{xi_1 + yi_2 + zi_3 \in E_3 : |\xi_1| < 2,\ 4 < z < 6,\ \tfrac{\pi}{2} < \arg\xi_1 < \tfrac{9}{4}\pi\}$$

і будується так, як і область Ω_ζ з подібного прикладу роботи [33]. Очевидно, що конгруентна їй область Ω простору $\mathbb{R}^3$ не є опуклою в напрямку прямої L^1.

В області $\{\xi_1 \in \mathbb{C} : |\xi_1| < 2, -\frac{\pi}{4} < \arg\xi_1 < \frac{3}{2}\pi\}$ комплексної площини розглянемо голоморфну вітку $H_1(\xi_1) := \ln|\xi_1| + i\arg\xi_1$ аналітичної функції $\mathrm{Ln}\,\xi_1$, для якої $H_1(1) = 0$. В області $\{\xi_1 \in \mathbb{C} : |\xi_1| < 2, \frac{\pi}{2} < \arg\xi_1 < \frac{9}{4}\pi\}$ розглянемо голоморфну вітку $H_2(\xi_1) := \ln|\xi_1| + i\arg\xi_1$ функції $\mathrm{Ln}\,\xi_1$, для якої $H_2(1) = 2\pi i$. І розглянемо довільні тотожні в цих областях функції $G_1(\xi_1) \equiv G_2(\xi_1)$.

Побудуємо продовження Φ_1 функції H_1 на множину $\Omega_\zeta^1 \cup \Omega_\zeta^2$ і продовження Φ_2 функції H_2 на множину $\Omega_\zeta^2 \cup \Omega_\zeta^3$ за формулами:

$$\Phi_1(\zeta) = H_1(\xi_1)e_1 + G_1(\xi_1)e_3\,, \quad \Phi_2(\zeta) = H_2(\xi_1)e_1 + G_2(\xi_1)e_3\,,$$

де $\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3$.

Оскільки $\Phi_1(\zeta) \equiv \Phi_2(\zeta)$ скрізь в Ω_ζ^2, то відображення

$$\Phi(\zeta) := \begin{cases} \Phi_1(\zeta) & \text{для } \zeta \in \Omega_\zeta^1 \cup \Omega_\zeta^2, \\ \Phi_2(\zeta) & \text{для } \zeta \in \Omega_\zeta^3 \end{cases}$$

право-G-моногенне в області Ω_ζ. При цьому, для точок $\zeta_1 = i_1 + i_3$ і $\zeta_2 = i_1 + 5\, i_3$ маємо $\zeta_2 - \zeta_1 \in L^1_\zeta$, але

$$\Phi(\zeta_2) - \Phi(\zeta_1) = (H_2(1) - H_1(1))e_1 = 2\pi i e_1 \notin \mathcal{I}_1\,,$$

тобто співвідношення (2.17) не виконуються. Побудову прикладу завершено.

2.3.1. Конструктивний опис G-моногенних відображень зі значеннями в ідеалах алгебри

Теорема 2.3.1. *Кожне право-G-моногенне в області Ω_ζ відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = \Phi_1(\zeta) + \Phi_2(\zeta),$$

де $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$, $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ — деякі право-G-моногенні в області Ω_ζ відображення зі значеннями відповідно в правих максимальних ідеалах $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$.

Доведення. Із розкладу одиниці $1 = e_1 + e_2$ випливає, що довільне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді

$$\Phi = e_1\Phi + e_2\Phi,$$

при цьому $e_1\Phi \in \mathcal{I}_2$, а $e_2\Phi \in \mathcal{I}_1$.

Введемо позначення $\Phi_1 := e_2\Phi$, $\Phi_2 := e_1\Phi$. Покажемо, що відображення Φ_1, Φ_2 — право-G-моногенні в області Ω_ζ. Для цього рівність (2.6) помножимо зліва на e_1:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} e_1 \frac{\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)}{\varepsilon} = e_1 h \Phi'(\zeta). \tag{2.19}$$

Оскільки елементи e_1 та h належать комутативній підалгебрі з базисом $\{e_1, e_2\}$, то $e_1 h = h e_1$ і тому з рівності (2.19) випливає рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{e_1\Phi(\zeta + \varepsilon h) - e_1\Phi(\zeta)}{\varepsilon} = h e_1 \Phi'(\zeta),$$

яка і доводить, що відображення Φ_2 — право-G-моногенне в області Ω_ζ. Аналогічно доводиться, що відображення Φ_1 також право-G-моногенне. Лему доведено.

Повністю аналогічно доводиться наступне твердження.

Теорема 2.3.2. *Кожне ліво-G-моногенне в області Ω_ζ відображення подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{\Phi}_1(\zeta) + \widehat{\Phi}_2(\zeta), \tag{2.20}$$

де $\widehat{\Phi}_1 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_1$, $\widehat{\Phi}_2 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_2$ — деякі ліво-G-моногенні в області Ω_ζ відображення зі значеннями відповідно в лівих максимальних ідеалах $\widehat{\mathcal{I}}_1, \widehat{\mathcal{I}}_2$.

Позначимо через

$$D_1 := f_1(\Omega_\zeta) = \{\xi_1 = x + a_1 y + b_1 z : (x, y, z) \in \Omega\},$$

$$D_2 := f_2(\Omega_\zeta) = \{\xi_2 = x + a_2 y + b_2 z : (x, y, z) \in \Omega\}$$

області в комплексній площині $\mathbb{C}$, на які область Ω_ζ відображається відповідно функціоналами f_1, f_2.

В наступних теоремах описано усі право-G-моногенні відображення зі значеннями в ідеалах $\mathcal{I}_1$ та $\mathcal{I}_2$ за допомогою аналітичних функцій відповідної комплексної змінної.

Теорема 2.3.3. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямої L_ζ^2 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_1$ подається у вигляді*

$$\Phi_1(\zeta) = F_2(\xi_2)e_2 + F_4(\xi_2)e_4 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{2.21}$$

де F_2, F_4 — деякі аналітичні в області D_2 функції змінної ξ_2.

Доведення. Оскільки Φ_1 приймає значення в ідеалі $\mathcal{I}_1$, то справедлива рівність

$$\Phi_1(\zeta) = V_2(x, y, z)e_2 + V_4(x, y, z)e_4, \tag{2.22}$$

де $V_2 : \Omega \to \mathbb{C}$ і $V_4 : \Omega \to \mathbb{C}$. Для відображення Φ_1 виконуються умови право-G-моногенності (2.13) при $\Phi = \Phi_1$, з яких після підстановки в них виразів (2.4), (2.22) з урахуванням однозначності розкладу елементів алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ отримаємо систему для знаходження функцій V_2, V_4 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_2}{\partial y} &= a_2 \frac{\partial V_2}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial V_4}{\partial y} &= a_2 \frac{\partial V_4}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial V_2}{\partial z} &= b_2 \frac{\partial V_2}{\partial x}\,, \\ \frac{\partial V_4}{\partial z} &= b_2 \frac{\partial V_4}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

З першого і третього рівняння системи (2.23) знайдемо функцію V_2. Для цього виділимо дійсну і уявну частини змінної ξ_2:

$$\xi_2 = (x + y \operatorname{Re} a_2 + z \operatorname{Re} b_2) + i(y \operatorname{Im} a_2 + z \operatorname{Im} b_2) := \tau_2 + i\eta_2 \tag{2.24}$$

і перепишемо перше і третє рівняння системи (2.23) у вигляді

$$\frac{\partial V_2}{\partial \eta_2} \operatorname{Im} a_2 = i \frac{\partial V_2}{\partial \tau_2} \operatorname{Im} a_2, \qquad \frac{\partial V_2}{\partial \eta_2} \operatorname{Im} b_2 = i \frac{\partial V_2}{\partial \tau_2} \operatorname{Im} b_2. \tag{2.25}$$

Оскільки з умови $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$ випливає, що хоча б одне з чисел $\operatorname{Im} a_2$ або $\operatorname{Im} b_2$ відмінне від нуля, то з (2.25) отримуємо рівність

$$\frac{\partial V_2}{\partial \eta_2} = i \frac{\partial V_2}{\partial \tau_2}. \tag{2.26}$$

Доведемо, що $V_2(x_1, y_1, z_1) = V_2(x_2, y_2, z_2)$ для точок (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in \Omega$ таких, що відрізок, який з'єднує ці точки, паралельний прямій L^2. З цією метою розглянемо в області Ω поверхні Q^2, Σ^2 і область D_2 на площині $\mathbb{C}$, визначені в доведенні леми 2.3.3, а також визначимо в D_2 дві комплекснозначні функції H_1, H_2 рівностями

$$H_1(\xi_2) := V_2(x, y, z) \ \text{ при } (x, y, z) \in Q^2,$$

$$H_2(\xi_2) := V_2(x, y, z) \ \text{ при } (x, y, z) \in \Sigma^2,$$

в яких відповідність між точками (x, y, z) і $\xi_2 \in D_2$ встановлено співвідношеннями (2.24).

Внаслідок рівності (2.26) і теореми 6 з роботи Г. П. Толстова [37] функції H_1, H_2 аналітичні в області D_2. Далі тотожність $H_1(\xi_2) \equiv H_2(\xi_2)$ в D_2 доводиться так само, як при доведенні леми 2.3.3. Отже, рівність $V_2(x_1, y_1, z_1) = V_2(x_2, y_2, z_2)$ доведено.

Звідси випливає, що функція V_2 вигляду $V_2(x, y, z) := F_2(\xi_2)$, де $F_2(\xi_2)$ — довільна аналітична в області D_2 функція, є загальним розв'язком системи

$$\frac{\partial V_2}{\partial y} = a_2 \frac{\partial V_2}{\partial x}\,,$$
$$\frac{\partial V_2}{\partial z} = b_2 \frac{\partial V_2}{\partial x}\,,$$

яка складається з першого і третього рівнянь системи (2.23).

Тепер з другого і четвертого рівнянь системи (2.23) аналогічно встановлюємо, що функція V_4 має вигляд $V_4(x, y, z) := F_4(\xi_2)$, де F_4 — довільна аналітична в області D_2 функція змінної ξ_2. Теорему доведено.

Теорема 2.3.4. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямої L_ζ^1 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathcal{I}_2$ подається у вигляді*

$$\Phi_2(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_3(\xi_1)e_3 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{2.27}$$

де F_1, F_3 — деякі аналітичні в області D_1 функції змінної ξ_1.

В наступних теоремах, які доводяться повністю аналогічно до теореми 2.3.3, описано усі ліво-G-моногенні відображення зі значеннями в ідеалах $\widehat{\mathcal{I}}_1$ та $\widehat{\mathcal{I}}_2$ алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою аналітичних функцій відповідної комплексної змінної.

Теорема 2.3.5. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямої L_ζ^2 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне ліво-$G$-моногенне відображення $\widehat{\Phi}_1 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_1$ подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}_1(\zeta) = \widehat{F}_2(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3(\xi_2)e_3 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{2.28}$$

де $\widehat{F}_2, \widehat{F}_3$ *— деякі аналітичні в області* D_2 *функції змінної* ξ_2.

Теорема 2.3.6. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямої* L_ζ^1 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне ліво-*$G$*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi}_2 : \Omega_\zeta \to \widehat{\mathcal{I}}_2$ *подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}_2(\zeta) = \widehat{F}_1(\xi_2)e_1 + \widehat{F}_4(\xi_1)e_4 \qquad \forall\, \zeta \in \Omega_\zeta, \tag{2.29}$$

де $\widehat{F}_1, \widehat{F}_4$ *— деякі аналітичні в області* D_1 *функції змінної* ξ_1.

2.3.2. Конструктивний опис G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та його наслідки

В силу теорем 2.3.1, 2.3.3 і 2.3.4 всі право-G-моногенні відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ у випадку, коли область Ω_ζ опукла в напрямку прямих L_ζ^1, L_ζ^2, можуть бути побудовані за допомогою чотирьох довільних комплекснозначних аналітичних функцій $F_1(\xi_1)$, $F_2(\xi_2)$, $F_3(\xi_1)$, $F_4(\xi_2)$.

Теорема 2.3.7. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямих* L_ζ^1, L_ζ^2 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне право-*$G$*-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *подається у вигляді*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4 \tag{2.30}$$

$$\forall\, \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta,$$

де F_1 *і* F_3 *— деякі аналітичні в області* D_1 *функції змінної* ξ_1, *а* F_2 *і* F_4 *— деякі аналітичні в області* D_2 *функції змінної* ξ_2.

Відмітимо, що розглянуте вище відображення (2.14) буде право-G-моногенним в Ω_ζ, оскільки для нього функції F_1, F_2, F_3, F_4 будуть поліномами. Більше того, право-G-моногенним відображенням у відповідній області буде не тільки поліном вигляду (2.14), а й ряд

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k c_k, \qquad c_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C}), \tag{2.31}$$

для якого комплексні степеневі ряди, що виступають в ролі аналітичних функцій F_1, F_2, F_3, F_4, є збіжними.

Тепер, з урахуванням теорем 2.3.2, 2.3.5 і 2.3.6 справедливе твердження для ліво-G-моногенного відображення.

Теорема 2.3.8. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямих L^1_ζ, L^2_ζ і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне ліво-$G$-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{F}_1(\xi_1)e_1 + \widehat{F}_2(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3(\xi_2)e_3 + \widehat{F}_4(\xi_1)e_4 \tag{2.32}$$

$$\forall\, \zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta,$$

де $\widehat{F}_1$ і $\widehat{F}_4$ — деякі аналітичні в області D_1 функції змінної ξ_1, а $\widehat{F}_2$ і $\widehat{F}_3$ — деякі аналітичні в області D_2 функції змінної ξ_2.

Аналогічно до (2.31) відображення

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\, \zeta^k, \qquad c_k \in \mathbb{H}(\mathbb{C}), \tag{2.33}$$

є ліво-G-моногенним.

Рівність (2.30) дає можливість явно побудувати усі право-G-моногенні відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, а рівність (2.32) вказує на спосіб явної побудови будь-якого ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою відповідних чотирьох аналітичних функцій комплексної змінної.

Порівнюючи праві частини рівностей (2.30) і (2.32), приходимо до висновку, що відображення $\Psi(\zeta)$ буде одночасно право- і ліво-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд

$$\Psi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + c_3e_3 + c_4e_4, \qquad c_3, c_4 \in \mathbb{C}.$$

З урахуванням розкладу (2.15) і правил множення (2.1) отримуємо наступне інтегральне представлення право-G-моногенного відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою чотирьох комплекснозначних аналітичних функцій F_1, F_2, F_3, F_4:

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}(t-\zeta)^{-1}\Big(F_1(t)e_1+F_3(t)e_3\Big)dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}(t-\zeta)^{-1}\Big(F_2(t)e_2+F_4(t)e_4\Big)dt \tag{2.34}$$

і ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою чотирьох комплекснозначних аналітичних функцій $\widehat{F}_1$, $\widehat{F}_2$, $\widehat{F}_3$, $\widehat{F}_4$:

$$\widehat{\Phi}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\Big(\widehat{F}_1(t)e_1+\widehat{F}_4(t)e_4\Big)(t-\zeta)^{-1}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\Big(\widehat{F}_2(t)e_2+\widehat{F}_3(t)e_3\Big)(t-\zeta)^{-1}dt, \tag{2.35}$$

де замкнені жорданові спрямлювані криві Γ_k лежать у відповідних областях D_k, охоплюють відповідну точку ξ_k і не містять точку ξ_q, $k,q=1,2$ при $k\neq q$.

Відмітимо також, що права похідна Гато відображення $\Phi(\zeta)$ виражається формулою

$$\Phi'(\zeta)=F_1'(\xi_1)e_1+F_2'(\xi_2)e_2+F_3'(\xi_1)e_3+F_4'(\xi_2)e_4, \tag{2.36}$$

а ліва похідна Гато відображення $\Phi(\zeta)$ — формулою

$$\widehat{\Phi}'(\zeta)=\widehat{F}_1'(\xi_1)e_1+\widehat{F}_2'(\xi_2)e_2+\widehat{F}_3'(\xi_2)e_3+\widehat{F}_4'(\xi_1)e_4. \tag{2.37}$$

Наслідок 2.3.1. *Якщо відображення $\Phi(\zeta)$ право-G-моногенне, то*

$$\Phi'(\zeta)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,, \tag{2.38}$$

і якщо відображення $\widehat{\Phi}(\zeta)$ ліво-G-моногенне, то

$$\widehat{\Phi}'(\zeta)=\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\,. \tag{2.39}$$

Наступне твердження випливає безпосередньо з рівностей (2.30) і (2.32), праві частини яких є відповідно право- і ліво-G-моногенними відображеннями в області $\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f_1(\zeta) \in D_1,\ f_2(\zeta) \in D_2\}$.

Теорема 2.3.9. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямих* L_ζ^1, L_ζ^2 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *продовжується до право-G-моногенного відображення в області* Π_ζ, *а ліво-G-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— до ліво-G-моногенного відображення в області* Π_ζ.

Теорема 2.3.9 дає можливість легко знайти область право-G-моногенності відображення (2.30) і ліво-G-моногенності відображення (2.32).

Принциповим наслідком рівностей (2.30) і (2.32) є наступне твердження, справедливе для G-моногенних відображень в довільній області Ω_ζ.

Теорема 2.3.10. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— право-G-моногенне, а* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— ліво-G-моногенне в області* Ω_ζ. *Тоді похідні Гато усіх порядків* $\Phi^{(s)}$ *є право-G-моногенними відображеннями, а* $\widehat{\Phi}^{(s)}$ *— ліво-G-моногенними відображеннями в області* Ω_ζ.

Доведення. Оскільки куля Θ (яка повністю міститься в області Ω) з центром в довільній точці $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ є опуклою множиною в напрямку прямих L^1 і L^2, то в околі $\Theta_\zeta := \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in \Theta\}$ точки $\zeta_0 = x_0 i_1 + y_0 i_2 + z_0 i_3$ справедливі рівності вигляду (2.30) і (2.36). При цьому компоненти розкладу (2.36) є аналітичними функціями відповідних комплексних змінних, тобто вираз для $\Phi'(\zeta)$ подається у вигляді рівності (2.30).

Аналогічно вираз для $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ має вигляд рівності (2.32). Це і означає, що відображення $\Phi'(\zeta)$ є право-G-моногенним, а $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ — ліво-G-моногенним в Ω_ζ. Теорему доведено.

Використовуючи інтегральне представлення (2.34) право-G-

моногенного відображення Φ і представлення (2.35) ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}$, легко отримуємо наступні інтегральні представлення похідної Гато порядку s цих відображень:

$$\Phi^{(s)}(\zeta)=\frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\Big((t-\zeta)^{-1}\Big)^{s+1}\Big(F_1(t)e_1+F_3(t)e_3\Big)dt+$$

$$+\frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\Big((t-\zeta)^{-1}\Big)^{s+1}\Big(F_2(t)e_2+F_4(t)e_4\Big)dt$$

і

$$\widehat{\Phi}^{(s)}(\zeta)=\frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\Big(\widehat{F}_1(t)e_1+\widehat{F}_4(t)e_4\Big)\Big((t-\zeta)^{-1}\Big)^{s+1}dt+$$

$$+\frac{s!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\Big(\widehat{F}_2(t)e_2+\widehat{F}_3(t)e_3\Big)\Big((t-\zeta)^{-1}\Big)^{s+1}dt.$$

2.4. Зв'язок G-моногенних відображень з рівняннями в частинних похідних

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами:

$$\mathcal{L}_nU(x,y,z):=\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n}C_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\partial^nU}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma}=0,\qquad C_{\alpha,\beta,\gamma}\in\mathbb{R}. \tag{2.40}$$

Якщо відображення Φ має праву похідну Гато n-го порядку, а відображення $\widehat{\Phi}$ — ліву похідну Гато n-го порядку, то наслідком рівностей (2.6) і (2.7) є відповідно рівності

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\Phi}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma}=i_1^\alpha\,i_2^\beta\,i_3^\gamma\,\Phi^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta)=i_2^\beta\,i_3^\gamma\,\Phi^{(n)}(\zeta)$$

і

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma}\widehat{\Phi}}{\partial x^\alpha\partial y^\beta\partial z^\gamma}=\widehat{\Phi}^{(\alpha+\beta+\gamma)}(\zeta)\,i_1^\alpha\,i_2^\beta\,i_3^\gamma=\widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta)\,i_2^\beta\,i_3^\gamma.$$

Тому внаслідок рівності

$$\mathcal{L}_n\Phi(\zeta)=\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n}C_{\alpha,\beta,\gamma}\,i_2^\beta\,i_3^\gamma\;\Phi^{(n)}(\zeta) \tag{2.41}$$

кожне відображення Φ, яке має праву похідну Гато n-го порядку при виконанні умови

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, i_2^{\beta}\, i_3^{\gamma} = 0 \tag{2.42}$$

задовольняє рівняння $\mathcal{L}_n\Phi(\zeta) = 0$. Аналогічно внаслідок рівності

$$\mathcal{L}_n\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta) \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, i_2^{\beta}\, i_3^{\gamma} \tag{2.43}$$

кожне відображення $\widehat{\Phi}$, яке має ліву похідну Гато n-го порядку, при виконанні умови (2.42) задовольняє рівняння $\mathcal{L}_n\widehat{\Phi}(\zeta) = 0$.

Відповідно, усі дійснозначні компоненти розкладу відображень Φ і $\widehat{\Phi}$ за базисом $\{e_n, ie_n\}_{n=1}^{4}$ є розв'язками рівняння (2.40).

Таким чином, задача про побудову розв'язків рівняння (2.40) у вигляді компонент право- або ліво-G-моногенних відображень зводиться до відшукання в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ трійки лінійно незалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів (2.4), які задовольняють характеристичне рівняння (2.42).

Якщо обидва функціонали f_1, f_2 приймають значення в $\mathbb{C}$, то згідно з теоремою 2.3.10 кожне право-G-моногенне відображення задовольняє рівність (2.41), а ліво-G-моногенне відображення — рівність (2.43).

Як зазначалося вище, співвідношення

$$f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C} \tag{2.44}$$

має місце тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) належить $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Якщо рівняння (2.40) має особливий вигляд, то можна вказати достатні умови для виконання співвідношень (2.44). Для цього введемо позначення

$$P(a, b) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a^{\beta}\, b^{\gamma}.$$

Теорема 2.4.1. *Нехай в алгебрі* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *існує трійка лінійно незалежних над полем* $\mathbb{R}$ *векторів вигляду* (2.4), *які задовольняють рівність*

(2.42). *Тоді якщо* $P(a,b)\neq 0$ *при всіх дійсних значеннях* a,b, *то виконуються співвідношення* (2.44).

Доведення. Використовуючи таблицю множення (2.1) алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, маємо рівності

$$i_2^\beta = a_1^\beta e_1 + a_2^\beta e_2, \qquad i_3^\gamma = b_1^\gamma e_1 + b_2^\gamma e_2.$$

Тепер рівність (2.42) набуває вигляду

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\left(a_1^\beta\, b_1^\gamma\, e_1 + a_2^\beta\, b_2^\gamma\, e_2\right) = 0$$

або в рівносильній формі

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} C_{\alpha,\beta,\gamma}\, a_k^\beta\, b_k^\gamma = 0, \qquad k=1,2. \tag{2.45}$$

Оскільки розв'язок системи (2.45) існує (за умовою теореми) і $P(a,b)\neq 0$ при всіх дійсних a,b, то рівності (2.45) можуть виконуватися лише тоді, коли хоча б одне з чисел у кожній з пар (a_1,b_1), (a_2,b_2) належить множині $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Теорему доведено.

Тепер зауважимо, що з умови теореми $P(a,b)\neq 0$ випливає, що завжди $C_{n,0,0}\neq 0$, оскільки в іншому випадку при $a=b=0$ було б $P(a,b)=0$. А також оскільки функція $P(a,b)$ неперервна на $\mathbb{R}^2$, то умова $P(a,b)\neq 0$ по суті означає одне з двох $P(a,b)>0$ або $P(a,b)<0$ при всіх $a,b\in\mathbb{R}$.

Очевидно також, що рівняння вигляду (2.40) еліптичного типу завжди задовольняє умову $P(a,b)\neq 0$ при всіх $a,b\in\mathbb{R}$. Але в той же час існують рівняння вигляду (2.40), для яких $P(a,b)>0$, і які не є еліптичними. Таким, наприклад, є рівняння

$$\frac{\partial^5 U}{\partial x^5} + \frac{\partial^5 U}{\partial x\partial y^2\partial z^2} + \frac{\partial^5 U}{\partial x\partial z^4} = 0.$$

Приклад 2.4.1. Покажемо зв'язок G-моногенних відображень з тривимірним рівнянням Лапласа:

$$\Delta_3 U(x,y,z) := \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{2.46}$$

Для рівняння (2.46) характеристичне рівняння (2.42) набуває вигляду

$$1 + i_2^2 + i_3^2 = 0. \tag{2.47}$$

Трійку лінійно назалежних над полем $\mathbb{R}$ векторів i_1, i_2, i_3 назвемо *гармонічною трійкою*, якщо має місце рівність (2.47) і виконуються умови $i_2^2 \neq 0$, $i_3^2 \neq 0$ (див. [67]).

Після підстановки рівностей (2.4) в умови (2.47) приходимо до наступного твердження.

Теорема 2.4.2. *Гармонічними трійками в алгебрі* $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є вектори* i_1, i_2, i_3, *розклад яких за базисом* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *має вигляд* (2.4) *і комплексні числа* a_k, b_k, $k = 1, 2$, *задовольняють систему рівнянь*

$$1 + a_1^2 + b_1^2 = 0, \qquad 1 + a_2^2 + b_2^2 = 0. \tag{2.48}$$

Систему (2.48) задовольняють, зокрема, вирази

$$a_1 = i \sin t, \quad b_1 = i \cos t, \quad a_2 = i \sin \tau, \quad b_2 = i \cos \tau,$$

яким відповідають змінні

$$\xi_1 = x + iy \sin t + iz \cos t, \quad \xi_2 = x + iy \sin \tau + iz \cos \tau, \tag{2.49}$$

де $t, \tau \in \mathbb{C}$.

Представлення (2.30) і (2.32), в яких ξ_1, ξ_2 визначені рівностями (2.49), визначають G-моногенні відображення в $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, пов'язані з рівнянням (2.46). Звідси випливає, що розв'язками рівняння (2.46) є дійсна і уявна частини функції $U(x, y, z) = F(x + iy \sin t + iz \cos t)$, де $t \in \mathbb{C}$ і F — довільна аналітична функція.

В силу теореми 2.3.10 і внаслідок рівності

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = (1 + i_2^2 + i_3^2)\Phi''(\zeta)$$

при виконанні співвідношення (2.47) між елементами гармонічної трійки, кожне право-G-моногенне в області Ω_ζ відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є право-G-моногенним потенціалом в цій області, тобто задовольняє тривимірне рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0\,.$$

Аналогічно кожне ліво-G-моногенне в області Ω_ζ відображення $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ з урахуванням теореми 2.3.10 і внаслідок рівності

$$\frac{\partial^2\widehat{\Phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widehat{\Phi}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\widehat{\Phi}}{\partial z^2}=\widehat{\Phi}''(\zeta)(1+i_2^2+i_3^2)$$

при виконанні співвідношення (2.47), є ліво-G-моногенним потенціалом в цій області.

Висновки

В розділі 2 досліджено алгебраїчно-аналітичні властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, а саме:

1. Встановлено конструктивний опис усіх G-моногенних відображень зі значеннями в ідеалах $\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2$ і $\widehat{\mathcal{I}}_1,\widehat{\mathcal{I}}_2$ (теореми 2.3.3, 2.3.4 і 2.3.5, 2.3.6 відповідно).

2. В теоремі 2.3.7 отримано конструктивний опис усіх право-G-моногенних відображень, а в теоремі 2.3.8 — опис усіх ліво-G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за допомогою чотирьох аналітичних функцій комплексної змінної. Внаслідок цього доведено теорему 2.3.9 про G-моногенне продовження відображень та теорему 2.3.10 про нескінченну диференційовність за Гато G-моногенних відображень.

3. В параграфі 2.4 досліджено зв'язок G-моногенних відображень з диференціальними рівняннями в частинних похідних. Зокрема, наведено застосування G-моногенних відображень до побудови розв'язків тривимірного рівняння Лапласа.

РОЗДІЛ 3

ІНТЕГРАЛЬНІ ТЕОРЕМИ І РЯДИ ДЛЯ G-МОНОГЕННИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

У цьому розділі досліджуються властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів, пов'язані з їх інтегральними представленнями і представленнями у вигляді рядів.

3.1. Теорема Коші для поверхневого інтеграла

Нехай Ω_ζ — обмежена замкнена область в E_3. Для неперервного відображення $\varphi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} U_k(x,y,z)e_k + i\sum_{k=1}^{4} V_k(x,y,z)e_k,$$

де $(x,y,z) \in \Omega$ і $U_k : \Omega \to \mathbb{R}, V_k : \Omega \to \mathbb{R}$, визначимо *об'ємний інтеграл* по Ω_ζ рівністю

$$\int\limits_{\Omega_\zeta} \varphi(\zeta)dxdydz :=$$

$$= \sum_{k=1}^{4} e_k \int\limits_{\Omega} U_k(x,y,z)dxdydz + i\sum_{k=1}^{4} e_k \int\limits_{\Omega} V_k(x,y,z)dxdydz.$$

Нехай Σ_ζ — кусково-гладка поверхня в E_3. Для неперервних відображень $\varphi : \Sigma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\psi : \Sigma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} U_k(x,y,z)e_k + i\sum_{k=1}^{4} V_k(x,y,z)e_k, \tag{3.1}$$

$$\psi(\zeta)=\sum_{m=1}^{4}P_m(x,y,z)e_m+i\sum_{m=1}^{4}Q_m(x,y,z)e_m, \tag{3.2}$$

де $(x,y,z)\in\Sigma$, $U_k:\Sigma\to\mathbb{R}$, $V_k:\Sigma\to\mathbb{R}$ і $P_m:\Sigma\to\mathbb{R}$, $Q_m:\Sigma\to\mathbb{R}$, визначимо *поверхневий інтеграл* по Σ_ζ з диференціальною формою $\sigma:=dydz+i_2dzdx+i_3dxdy$ рівністю

$$\int\limits_{\Sigma_\zeta}\varphi(\zeta)\,\sigma\,\psi(\zeta):=$$

$$=\sum_{k,m=1}^{4}e_ke_m\int\limits_{\Sigma}\big(U_k\,P_m-V_k\,Q_m\big)dydz+\sum_{k,m=1}^{4}e_ki_2e_m\int\limits_{\Sigma}\big(U_k\,P_m-V_k\,Q_m\big)dzdx+$$

$$+\sum_{k,m=1}^{4}e_ki_3e_m\int\limits_{\Sigma}\big(U_k\,P_m-V_k\,Q_m\big)dxdy+i\sum_{k,m=1}^{4}e_ke_m\int\limits_{\Sigma}\big(V_k\,P_m+U_k\,Q_m\big)dydz+$$

$$+i\sum_{k,m=1}^{4}e_ki_2e_m\int\limits_{\Sigma}\big(V_k\,P_m+U_k\,Q_m\big)dzdx+i\sum_{k,m=1}^{4}e_ki_3e_m\int\limits_{\Sigma}\big(V_k\,P_m+U_k\,Q_m\big)dxdy. \tag{3.3}$$

Для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ справедливі аналоги ряду класичних інтегральних теорем, зокрема, інтегральні теореми Коші для поверхневого і криволінійного інтегралів.

Принциповою для отримання цих результатів є теорема 2.3.10, з якої випливає, що G-моногенне відображення є G-моногенним нескінченну кількість разів. Тому до G-моногенних відображень в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ можуть бути застосовані певні аналоги класичних формул Гауса – Остроградського та Стокса.

Через $\partial\Omega_\zeta$ будемо позначати межу області Ω_ζ. В наступній теоремі доведено аналог формули Гауса – Остроградського в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.1.1. *Нехай однозв'язна область $\Omega_\zeta\subset E_3$ має замкнену кусково-гладку межу $\partial\Omega_\zeta$, а неперервні відображення $\varphi:\overline{\Omega}_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\psi:\overline{\Omega}_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ мають неперервні частинні похідні першого порядку в* *області* Ω_ζ *, які неперервно продовжуються на межу* $\partial\Omega_\zeta$ *. Тоді*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \varphi(\zeta)\,\sigma\,\psi(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \left(\frac{\partial\,(\varphi\,i_1\,\psi)}{\partial x} + \frac{\partial\,(\varphi\,i_2\,\psi)}{\partial y} + \frac{\partial\,(\varphi\,i_3\,\psi)}{\partial z}\right) dxdydz\,, \tag{3.4}$$

де $\sigma := dydz + i_2 dzdx + i_3 dxdy$.

Доведення. Застосуємо до кожного з інтегралів у правій частині рівності (3.3) формулу Гауса – Остроградського [38, с. 378]:

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \varphi(\zeta)\,\sigma\,\psi(\zeta) =$$

$$= \sum_{k,m=1}^{4} e_k e_m \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x} P_m + U_k \frac{\partial P_m}{\partial x} - \frac{\partial V_k}{\partial x} Q_m - V_k \frac{\partial Q_m}{\partial x}\right) dxdydz +$$

$$+ \sum_{k,m=1}^{4} e_k i_2 e_m \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial U_k}{\partial y} P_m + U_k \frac{\partial P_m}{\partial y} - \frac{\partial V_k}{\partial y} Q_m - V_k \frac{\partial Q_m}{\partial y}\right) dxdydz +$$

$$+ \sum_{k,m=1}^{4} e_k i_3 e_m \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial U_k}{\partial z} P_m + U_k \frac{\partial P_m}{\partial z} - \frac{\partial V_k}{\partial z} Q_m - V_k \frac{\partial Q_m}{\partial z}\right) dxdydz +$$

$$+ i \sum_{k,m=1}^{4} e_k e_m \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x} P_m + V_k \frac{\partial P_m}{\partial x} + \frac{\partial U_k}{\partial x} Q_m + U_k \frac{\partial Q_m}{\partial x}\right) dxdydz +$$

$$+ i \sum_{k,m=1}^{4} e_k i_2 e_m \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial V_k}{\partial y} P_m + V_k \frac{\partial P_m}{\partial y} + \frac{\partial U_k}{\partial y} Q_m + U_k \frac{\partial Q_m}{\partial y}\right) dxdydz +$$

$$+ i \sum_{k,m=1}^{4} e_k i_3 e_m \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial V_k}{\partial z} P_m + V_k \frac{\partial P_m}{\partial z} + \frac{\partial U_k}{\partial z} Q_m + U_k \frac{\partial Q_m}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \psi + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, i_2\, \psi + \varphi\, i_2\, \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, i_3\, \psi + \varphi\, i_3\, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi i_1 \psi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi i_2 \psi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varphi i_3 \psi \right) \right) dxdydz.$$

Теорему доведено.

Тепер наслідком теореми 3.1.1 і умов (2.12), (2.13) є наступне твердження.

Теорема 3.1.2. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *має замкнену кусково-гладку межу* $\partial\Omega_\zeta$ *, відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— право-*G*-моногенне, а* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *— ліво-*G*-моногенне в* Ω_ζ *, і вони разом із своїми частинними похідними першого порядку неперервно продовжуються на межу* $\partial\Omega_\zeta$ *. Тоді*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, \sigma\, \Phi(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \Big[\widehat{\Phi}'(\zeta)(1 + i_2^2 + i_3^2)\Phi(\zeta) + \widehat{\Phi}(\zeta)(1 + i_2^2 + i_3^2)\Phi'(\zeta) \Big] dxdydz. \qquad (3.5)$$

Доведення. Рівність (3.5) є наслідком формули (3.4) з використанням співвідношень (2.38), (2.39) і аналогів умов Коші – Рімана (2.12), (2.13):

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, \sigma\, \Phi(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \Big(\widehat{\Phi}'\, \Phi + \widehat{\Phi}\, \Phi' + \widehat{\Phi}'\, i_2^2\, \Phi + \widehat{\Phi}\, i_2^2\, \Phi' + \widehat{\Phi}'\, i_3^2\, \Phi + \widehat{\Phi}\, i_3^2\, \Phi' \Big) dxdydz =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \Big[(\widehat{\Phi}' + \widehat{\Phi}'\, i_2^2 + \widehat{\Phi}'\, i_3^2)\, \Phi + \widehat{\Phi}(\Phi' + i_2^2\, \Phi' + i_3^2\, \Phi' \Big] dxdydz =$$

$$= \int\limits_{\Omega_\zeta} \Big[\widehat{\Phi}'\, (1 + i_2^2 + i_3^2)\, \Phi + \widehat{\Phi}(1 + i_2^2 + i_3^2)\, \Phi' \Big] dxdydz.$$

Теорему доведено.

Наслідок 3.1.1. *При виконанні умов теореми* 3.1.2 *і додатковому припущенні* $1+i_2^2+i_3^2=0$ *рівність* (19) *набуває вигляду*

$$\int\limits_{\partial\Omega_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\,\sigma\,\Phi(\zeta)=0.$$

3.2. Теорема Коші для криволінійного інтеграла

Встановимо аналог інтегральної теореми Коші для криволінійного інтеграла від право-G-відображення $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ і ліво-G-відображення $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ в області Ω_ζ.

Нехай γ_ζ — жорданова спрямлювана крива в E_3. Визначимо *інтеграл по кривій* γ_ζ від неперервних відображень $\varphi:\gamma_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\psi:\gamma_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду (3.1) і (3.2), відповідно, де $(x,y,z)\in\gamma$, $U_k:\gamma\to\mathbb{R}, V_k:\gamma\to\mathbb{R}$ і $P_m:\gamma\to\mathbb{R}, Q_m:\gamma\to\mathbb{R}$, рівністю

$$\int\limits_{\gamma_\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta):=$$

$$=\sum_{k,m=1}^{4}e_ke_m\int\limits_{\gamma}\big(U_k\,P_m-V_k\,Q_m\big)dx+\sum_{k,m=1}^{4}e_ki_2e_m\int\limits_{\gamma}\big(U_k\,P_m-V_k\,Q_m\big)dy+$$
$$+\sum_{k,m=1}^{4}e_ki_3e_m\int\limits_{\gamma}\big(U_k\,P_m-V_k\,Q_m\big)dz+\,i\sum_{k,m=1}^{4}e_ke_m\int\limits_{\gamma}\big(V_k\,P_m-U_k\,Q_m\big)dx+$$
$$+i\sum_{k,m=1}^{4}e_ki_2e_m\int\limits_{\gamma}\big(V_k\,P_m-U_k\,Q_m\big)dy+\,i\sum_{k,m=1}^{4}e_ki_3e_m\int\limits_{\gamma}\big(V_k\,P_m-U_k\,Q_m\big)dz, \tag{3.6}$$

де $d\zeta:=dx+i_2dy+i_3dz$.

В наступній теоремі доведено аналог формули Стокса в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.2.1. *Нехай відображення* $\varphi:\gamma_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\psi:\gamma_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервні разом із частинними похідними першого порядку в області* Ω_ζ

і Σ_ζ — довільна кусково-гладка поверхня в Ω_ζ зі спрямлюваним жордановим краєм γ_ζ. Тоді

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta) = \int\limits_{\Sigma_\zeta} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,i_2\,\psi + \varphi\,i_2\,\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\psi - \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dxdy+$$

$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,i_3\,\psi + \varphi\,i_3\,\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,i_2\,\psi - \varphi\,i_2\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dydz+$$

$$+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\psi + \varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,i_3\,\psi - \varphi\,i_3\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dzdx. \tag{3.7}$$

Доведення. Застосовуючи до кожного з інтегралів в правій частині рівності (3.6) формулу Стокса [38, с. 338], отримуємо

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta) =$$

$$= \sum_{k,m=1}^{4} e_k e_m \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial U_k}{\partial z}P_m + U_k\frac{\partial P_m}{\partial z} - \frac{\partial V_k}{\partial z}Q_m - V_k\frac{\partial Q_m}{\partial z}\right)dxdz-$$

$$-\left(\frac{\partial U_k}{\partial y}P_m + U_k\frac{\partial P_m}{\partial y} - \frac{\partial V_k}{\partial y}Q_m - V_k\frac{\partial Q_m}{\partial y}\right)dxdy+$$

$$+\sum_{k,m=1}^{4} e_k i_2 e_m \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x}P_m + U_k\frac{\partial P_m}{\partial x} - \frac{\partial V_k}{\partial x}Q_m - V_k\frac{\partial Q_m}{\partial x}\right)dxdy-$$

$$-\left(\frac{\partial U_k}{\partial z}P_m + U_k\frac{\partial P_m}{\partial z} - \frac{\partial V_k}{\partial z}Q_m - V_k\frac{\partial Q_m}{\partial z}\right)dydz+$$

$$+\sum_{k,m=1}^{4} e_k i_3 e_m \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial U_k}{\partial y}P_m + U_k\frac{\partial P_m}{\partial y} - \frac{\partial V_k}{\partial y}Q_m - V_k\frac{\partial Q_m}{\partial y}\right)dydz-$$

$$-\left(\frac{\partial U_k}{\partial x}P_m + U_k\frac{\partial P_m}{\partial x} - \frac{\partial V_k}{\partial x}Q_m - V_k\frac{\partial Q_m}{\partial x}\right)dzdx+$$

$$+i\sum_{k,m=1}^{4} e_k e_m \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_k}{\partial z}P_m + V_k\frac{\partial P_m}{\partial z} - \frac{\partial U_k}{\partial z}Q_m - U_k\frac{\partial Q_m}{\partial z}\right) dxdz-$$

$$-\left(\frac{\partial U_k}{\partial y}P_m + U_k\frac{\partial P_m}{\partial y} - \frac{\partial V_k}{\partial y}Q_m - V_k\frac{\partial Q_m}{\partial y}\right) dxdy+$$

$$+\sum_{k,m=1}^{4} e_k i_2 e_m \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x}P_m + V_k\frac{\partial P_m}{\partial x} - \frac{\partial U_k}{\partial x}Q_m - U_k\frac{\partial Q_m}{\partial x}\right) dxdy-$$

$$-\left(\frac{\partial V_k}{\partial z}P_m + V_k\frac{\partial P_m}{\partial z} - \frac{\partial U_k}{\partial z}Q_m - U_k\frac{\partial Q_m}{\partial z}\right) dydz+$$

$$+\sum_{k,m=1}^{4} e_k i_3 e_m \int\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_k}{\partial y}P_m + V_k\frac{\partial P_m}{\partial y} - \frac{\partial U_k}{\partial y}Q_m - U_k\frac{\partial Q_m}{\partial y}\right) dydz-$$

$$-\left(\frac{\partial V_k}{\partial x}P_m + V_k\frac{\partial P_m}{\partial x} - \frac{\partial U_k}{\partial x}Q_m - U_k\frac{\partial Q_m}{\partial x}\right) dzdx =$$

$$=\int\limits_{\Sigma_\zeta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, i_2\, \psi + \varphi\, i_2\, \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, \psi - \varphi\, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dxdy+$$

$$+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\, i_3\, \psi + \varphi\, i_3\, \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, i_2\, \psi - \varphi\, i_2\, \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dydz+$$

$$+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\, \psi + \varphi\, \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, i_3\, \psi - \varphi\, i_3\, \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dzdx.$$

Теорему доведено.

В наступній теоремі показано, що у випадку G-моногенності відображень, права частина рівності (3.7) рівна нулю.

Теорема 3.2.2. *Нехай в області* Ω_ζ *визначене право-*G*-моногенне відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і ліво-*G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to$

$\mathbb{H}(\mathbb{C})$, а γ_ζ — спрямлювана жорданова межа деякої кусково-гладкої поверхні в Ω_ζ. Тоді

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0. \tag{3.8}$$

Доведення. Використовуючи формулу (3.7) і умови (2.12), (2.13), отримуємо:

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = \int\limits_{\Sigma_\zeta} \left(\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\, i_2\, \Phi + \widehat{\Phi}\; i_2\, \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial y}\, \Phi - \widehat{\Phi}\, \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dxdy +$$

$$+ \left(\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial y}\, i_3\, \Phi + \widehat{\Phi}\, i_3\, \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}\, i_2\, \Phi - \widehat{\Phi}\; i_2\, \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) dydz +$$

$$+ \left(\frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z}\, \Phi + \widehat{\Phi}\, \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial x}\, i_3\, \Phi - \widehat{\Phi}\; i_3\, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) dzdx =$$

$$= \int\limits_{\Sigma_\zeta} \Big(\widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_2\, \Phi(\zeta) + \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_2\, \Phi'(\zeta) - \widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_2\, \Phi(\zeta) - \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_2\, \Phi'(\zeta)\Big) dxdy +$$

$$+ \Big(\widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_2 i_3\, \Phi(\zeta) + \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_3 i_2\, \Phi'(\zeta) - \widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_3 i_2\, \Phi(\zeta) - \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_2 i_3\, \Phi'(\zeta)\Big) dydz +$$

$$+ \Big(\widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_3\, \Phi(\zeta) + \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_3\, \Phi'(\zeta) - \widehat{\Phi}'(\zeta)\, i_3\, \Phi(\zeta) - \widehat{\Phi}(\zeta)\, i_3\, \Phi'(\zeta)\Big) dzdx = 0.$$

Теорему доведено.

Будемо розуміти трикутник $\triangle_\zeta$ як плоску фігуру, яка обмежена трьома відрізками, що з'єднують три його вершини. Позначимо через $\partial\triangle_\zeta$ границю трикутника $\triangle_\zeta$ у відносній топології площини цього трикутника.

Оскільки кожен трикутник $\triangle_\zeta \subset \Omega_\zeta$ може бути включений в опуклу підмножину області Ω_ζ, то наслідком теореми 3.2.2 є наступне твердження.

Наслідок 3.2.1. *Якщо область Ω_ζ опукла в E_3, відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ право-G-моногенне, а $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — ліво-G-моногенне в Ω_ζ, то для довільного трикутника $\triangle_\zeta$, замикання якого міститься в області Ω_ζ, справедлива рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0,$$

де $\partial\triangle_\zeta$ *— межа трикутника* $\triangle_\zeta$.

Для узагальнення аналога теореми Коші на випадок спрямлюваної кривої, яка не є межею кусково-гладкої поверхні, доведемо допоміжні леми. Для цього зробимо попередні зауваження.

Розглянемо алгебру $\widetilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ з базисом $\{e_n, ie_n\}_{n=1}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$, яка ізоморфна алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Очевидно, що в алгебрі $\widetilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ існує базис $\{i_n\}_{n=1}^8$, де вектори i_1, i_2, i_3 ті ж, що і в співвідношеннях (2.4).

Для елемента $a := \sum\limits_{n=1}^{8} a_n i_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, визначимо евклідову норму

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{n=1}^{8} a_n^2}\,.$$

Відповідно, $\|\zeta\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ і $\|i_1\| = \|i_2\| = \|i_3\| = 1$.

В силу теореми про еквівалентність норм (див., наприклад, [39, с. 60]), для довільного елемента $b := \sum\limits_{n=1}^{4} (b_{1n} + ib_{2n})e_n$, $b_{1n}, b_{2n} \in \mathbb{R}$, виконуються нерівності

$$|b_{1n} + ib_{2n}| \le \sqrt{\sum_{n=1}^{4} (b_{1n}^2 + b_{2n}^2)} \le c\|b\|, \tag{3.9}$$

де c — додатна стала, яка не залежить від b.

Лема 3.2.1. *Якщо* γ_ζ *— замкнена жорданова спрямлювана крива, а відображення* $\varphi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\psi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервні, то*

$$\left\| \int_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) \right\| \le c \int_{\gamma_\zeta} \|\varphi(\zeta)\| \|d\zeta\| \|\psi(\zeta)\|, \tag{3.10}$$

де c *— абсолютна додатна стала.*

Доведення. Використовуючи представлення відображень φ і ψ у вигляді (3.1) і (3.2) відповідно, отримуємо оцінку

$$\left\| \int_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) \right\| \le$$

$$\leq \sum_{k,m=1}^{4} \|e_k e_m\| \int\limits_{\gamma} |U_k(x,y,z)+iV_k(x,y,z)| \cdot |P_m(x,y,z)+iQ_m(x,y,z)|\, dx+$$

$$+\sum_{k,m=1}^{4} \|e_k i_2 e_m\| \int\limits_{\gamma} |U_k(x,y,z)+iV_k(x,y,z)| \cdot |P_m(x,y,z)+iQ_m(x,y,z)|\, dy+$$

$$+\sum_{k,m=1}^{4} \|e_k i_3 e_m\| \int\limits_{\gamma} |U_k(x,y,z)+iV_k(x,y,z)| \cdot |P_m(x,y,z)+iQ_m(x,y,z)|\, dz.$$

Враховуючи нерівність (3.9) і нерівності $\|e_k i_s e_m\| \leq c_s,\ s=1,2,3$, де c_s — абсолютні додатні сталі, отримуємо оцінку (3.10). Лему доведено.

За схемою доведення відповідної леми для функції, яка задана в комплексній площині (див., наприклад, [34]), доводиться наступне твердження.

Лема 3.2.2. *Нехай в однозв'язній області Ω_ζ визначені неперервні відображення $\varphi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\psi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, а γ_ζ — спрямлювана крива в Ω_ζ. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує ламана $\Lambda_\zeta \subset \Omega_\zeta$, вершини якої лежать на кривій γ_ζ, така, що*

$$\left\| \int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - \int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) \right\| < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Доведення. Розглянемо замкнену область $\overline{\Delta}_\zeta \subset \Omega_\zeta$, яка містить всередині криву γ_ζ. Оскільки відображення φ і ψ неперервні в кожній точці області $\overline{\Delta}_\zeta$, то вони рівномірно неперервні в цій області. Крім того, їх добуток також є відображенням рівномірно неперервним в цій області. Тобто, для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon)$ таке, що

$$\|\varphi(\zeta')\,\psi(\zeta') - \varphi(\zeta'')\,\psi(\zeta'')\| < \varepsilon_1, \tag{3.12}$$

якщо $\|\zeta' - \zeta''\| < \delta(\varepsilon)$, причому ζ', ζ'' — довільні точки області $\overline{\Delta}_\zeta$. Більше того, за тих же припущень, справедливі і наступні нерівності:

$$\|\varphi(\zeta')\, i_2\, \psi(\zeta') - \varphi(\zeta'')\, i_2\, \psi(\zeta'')\| < \varepsilon_2, \tag{3.13}$$

$$\|\varphi(\zeta')\, i_3\, \psi(\zeta') - \varphi(\zeta'')\, i_3\, \psi(\zeta'')\| < \varepsilon_3. \tag{3.14}$$

Розіб'ємо криву γ_ζ на n дуг Q_ζ^0, $Q_\zeta^1, \ldots, Q_\zeta^{n-1}$ так, щоб довжина кожної з них була меншою за δ і впишемо в криву γ_ζ ламану Λ_ζ так, щоб її ланки $L_\zeta^0, L_\zeta^1, \ldots, L_\zeta^{n-1}$ стягували ці дуги. Вершини ламаної Λ_ζ позначимо через $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}, \zeta_n$. Оскільки довжина кожної дуги Q_ζ^k менша за δ, то відстань між довільними двома точками однієї і тієї ж дуги тим паче менша за δ. Те ж саме справедливо для ланок L_ζ^k.

Порівняємо тепер значення інтеграла по кривій γ_ζ зі значенням того ж інтеграла вздовж ламаної Λ_ζ. З цією метою розглянемо суму, що є наближеним значенням інтеграла $\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta)$:

$$S := \varphi(\zeta_0)\, \Delta\zeta_0\, \psi(\zeta_0) + \varphi(\zeta_1)\, \Delta\zeta_1\, \psi(\zeta_1) + \cdots + \varphi(\zeta_{n-1})\, \Delta\, \zeta_{n-1} \psi(\zeta_{n-1})\,. \quad (3.15)$$

Оскільки $\Delta\zeta_k = \int\limits_{Q_\zeta^k} d\zeta$, то рівність (3.15) подається у вигляді

$$S := \int\limits_{Q_\zeta^0} \varphi(\zeta_0)\, d\zeta\, \psi(\zeta_0) + \int\limits_{Q_\zeta^1} \varphi(\zeta_1)\, d\zeta\, \psi(\zeta_1) + \cdots + \int\limits_{Q_\zeta^{n-1}} \varphi(\zeta_{n-1})\, d\zeta\, \psi(\zeta_{n-1}). \quad (3.16)$$

З іншого боку, інтеграл $\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta)$ можна подати у вигляді суми інтегралів, взятих по дугах Q_ζ^k:

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) = \int\limits_{Q_\zeta^0} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) +$$

$$+ \int\limits_{Q_\zeta^1} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) + \cdots + \int\limits_{Q_\zeta^{n-1}} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta). \quad (3.17)$$

Розглянемо різницю рівностей (3.17) і (3.16):

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - S = \int\limits_{Q_\zeta^0} \Big(\varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\, d\zeta\, \psi(\zeta_0)\Big) +$$

$$+ \int\limits_{Q_\zeta^1} \Big(\varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - \varphi(\zeta_1)\, d\zeta\, \psi(\zeta_1)\Big) + \cdots + \int\limits_{Q_\zeta^{n-1}} \Big(\varphi(\zeta)\, d\zeta\, \psi(\zeta) - \varphi(\zeta_{n-1})\, d\zeta\, \psi(\zeta_{n-1})\Big) =$$

$$= \int\limits_{Q^0} \Big(\varphi(\zeta)\,\psi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\,\psi(\zeta_0)\Big)dx + \int\limits_{Q^0} \Big(\varphi(\zeta)\,i_2\,\psi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\,i_2\,\psi(\zeta_0)\Big)dy +$$

$$+ \int\limits_{Q^0} \Big(\varphi(\zeta)\,i_3\,\psi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\,i_3\,\psi(\zeta_0)\Big)dz + \dots + \int\limits_{Q^{n-1}} \Big(\varphi(\zeta)\,\psi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\,\psi(\zeta_0)\Big)dx +$$

$$+ \int\limits_{Q^{n-1}} \Big(\varphi(\zeta)\,i_2\,\psi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\,i_2\,\psi(\zeta_0)\Big)dy + \int\limits_{Q^{n-1}} \Big(\varphi(\zeta)\,i_3\,\psi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\,i_3\,\psi(\zeta_0)\Big)dz.$$

Оскільки на кожній дузі Q_ζ^k справедливі нерівності (3.12) – (3.14), то маємо

$$\Bigg\|\int\limits_{\gamma_\zeta} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta) - S\Bigg\| < \big(\varepsilon_1\,Q_x^0 + \varepsilon_2\,Q_y^0 + \varepsilon_3\,Q_z^0\big) + \dots$$

$$\dots + \big(\varepsilon_1 \cdot Q_x^{n-1} + \varepsilon_2\,Q_y^{n-1} + \varepsilon_3\,Q_z^{n-1}\big) < \varepsilon\,Q^0 + \dots + \varepsilon\,Q^{n-1} < \varepsilon\,L, \quad (3.18)$$

де Q_x^j, Q_y^j, Q_z^j — довжини проекцій дуги Q^j на осі Ox, Oy, Oz відповідно, $\varepsilon := \max\{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2,\,\varepsilon_3\}$ і L — довжина кривої γ_ζ.

Аналогічно оцінимо різницю $\int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta) - S$. Оскільки $\Delta\zeta_k = \int\limits_{L_\zeta^k} d\zeta$, то рівність (3.15) подається у вигляді

$$S := \int\limits_{L_\zeta^0} \varphi(\zeta_0)\,d\zeta\,\psi(\zeta_0) + \int\limits_{L_\zeta^1} \varphi(\zeta_1)\,d\zeta\,\psi(\zeta_1) + \dots + \int\limits_{L_\zeta^{n-1}} \varphi(\zeta_{n-1})\,d\zeta\,\psi(\zeta_{n-1}). \quad (3.19)$$

З іншого боку, інтеграл $\int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)$ можна подати у вигляді суми інтегралів, взятих по ланках L_ζ^k:

$$\int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{L_\zeta^0} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta) + \int\limits_{L_\zeta^1} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta) + \dots + \int\limits_{L_\zeta^{n-1}} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta). \quad (3.20)$$

Розглянемо різницю рівностей (3.20) і (3.19):

$$\int\limits_{\Lambda_\zeta} \varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta) - S = \int\limits_{L_\zeta^0} \Big(\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta) - \varphi(\zeta_0)\,d\zeta\,\psi(\zeta_0)\Big) +$$

$$+\int\limits_{L_\zeta^1}\Big(\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)-\varphi(\zeta_1)\,d\zeta\,\psi(\zeta_1)\Big)+\dots+\int\limits_{L_\zeta^{n-1}}\Big(\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)-\varphi(\zeta_{n-1})\,d\zeta\,\psi(\zeta_{n-1})\Big)=$$

$$=\int\limits_{L^0}\Big(\varphi(\zeta)\,\psi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)\,\psi(\zeta_0)\Big)dx+\int\limits_{L^0}\Big(\varphi(\zeta)\,i_2\,\psi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)\,i_2\,\psi(\zeta_0)\Big)dy+$$

$$+\int\limits_{L^0}\Big(\varphi(\zeta)\,i_3\,\psi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)\,i_3\,\psi(\zeta_0)\Big)dz+\dots+\int\limits_{L^{n-1}}\Big(\varphi(\zeta)\,\psi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)\,\psi(\zeta_0)\Big)dx+$$

$$+\int\limits_{L^{n-1}}\Big(\varphi(\zeta)\,i_2\,\psi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)\,i_2\,\psi(\zeta_0)\Big)dy+\int\limits_{L^{n-1}}\Big(\varphi(\zeta)\,i_3\,\psi(\zeta)-\varphi(\zeta_0)\,i_3\,\psi(\zeta_0)\Big)dz.$$

Оскільки на кожній ланці L_ζ^k справедливі нерівності (3.12) – (3.14), то маємо

$$\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)-S\right\|<\big(\varepsilon_1\,L_x^0+\varepsilon_2\,L_y^0+\varepsilon_3\,L_z^0\big)+\dots$$

$$\dots+\big(\varepsilon_1\cdot\,L_x^{n-1}+\varepsilon_2\,L_y^{n-1}+\varepsilon_3\,L_z^{n-1}\big)<\varepsilon\,L^0+\dots+\varepsilon\,L^{n-1}<\varepsilon\,L, \qquad (3.21)$$

де L_x^j, L_y^j, L_z^j — довжини проекцій ламаної L^j на осі Ox, Oy, Oz відповідно, $\varepsilon:=\max\{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2,\,\varepsilon_3\}$ і L — довжина кривої γ_ζ.

З нерівностей (3.18) і (3.21) отримуємо

$$\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)-\int\limits_{\Lambda_\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)\right\|\le\left\|\int\limits_{\gamma_\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)-S\right\|+$$

$$+\left\|S-\int\limits_{\Lambda_\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\,\psi(\zeta)\right\|<2\varepsilon L.$$

Лему доведено.

Тепер, з використанням наслідку 3.2.1 і леми 3.2.2, доводиться наступний аналог теореми Коші для довільної спрямлюваної кривої в опуклій області.

Теорема 3.2.3. *Нехай в опуклій області* Ω_ζ *визначене право-*G*-моногенне відображення* $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і ліво-*G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$. *Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої* $\gamma_\zeta\subset\Omega_\zeta$ *справедлива рівність* (3.8).

Доведення. На підставі леми 3.2.2 впишемо в криву γ_ζ ламану Λ_ζ так, щоб виконувалась нерівність (3.11). Тоді ламану Λ_ζ розіб'ємо діагоналями на трикутники. Оскільки область Ω_ζ опукла, то всі отримані трикутники повністю містяться в області Ω_ζ. За наслідком 3.2.1 інтеграл по кожному трикутнику рівний нулю. Тоді і інтеграл по ламаній рівний нулю:

$$\int\limits_{\Lambda_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0. \tag{3.22}$$

Тепер наслідком співвідношень (3.11) і (3.22) є рівність (3.8). Теорему доведено.

У випадку довільної області Ω_ζ аналог інтегральної теореми Коші доводиться за схемою теореми 3.2 з роботи Е. К. Блюма [46].

Теорема 3.2.4. *Нехай в області Ω_ζ визначені право-G-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$. Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$, гомотопної точці області Ω_ζ, справедлива рівність* (3.8).

Доведення. Нехай крива γ_ζ визначена рівністю $\zeta = \phi(t)$, $0 \le t \le 1$, при цьому $\phi(0) = \phi(1) = \zeta_0$, і нехай γ_ζ гомотопна точці ζ_0. Тоді існує неперервне на квадраті $Q := [0,1] \times [0,1]$ відображення $H(s,t)$ двох дійсних змінних s і t зі значеннями в області Ω_ζ таке, що

$$H(0,t) = \phi(t), \qquad H(1,t) \equiv \zeta_0 \qquad \forall\, t \in [0,1],$$

$$H(s,0) = H(s,1) = \zeta_0 \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

Оскільки відображення H неперервне на компактній множині Q, то її образ $K := \{H(s,t) : (s,t) \in Q\}$ є компактною множиною в Ω_ζ.

Позначимо через $\rho := \min\limits_{\zeta' \in K,\, \zeta'' \in \partial\Omega_\zeta} \|\zeta' - \zeta''\|$.

Відображення H є також рівномірно неперервним на множині Q. Це означає, що існує $\delta > 0$ таке, що

$$\forall\, (s,t), (s',t') : |s'-s| < \delta,\ |t'-t| < \delta \Rightarrow \|H(s',t') - H(s,t)\| < \frac{\rho}{2}. \tag{3.23}$$

Виберемо набір чисел $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, які задовольняють нерівності $t_j - t_{j-1} < \delta$, $j = 1, 2, \ldots, n$, і покладемо $s_1 = t_1$. При $j = 1, 2, \ldots, n-1$ позначимо через $\zeta_{0,j} := H(0, t_j)$, $\zeta_{1,j} := H(s_1, t_j)$ і через L_ζ^j відрізок з початком в точці $\zeta_{0,j}$ і кінцем в точці $\zeta_{1,j}$. Крім того, введемо в розгляд криву $\gamma_\zeta^{[1]} := \{H(s_1, t) : 0 \leq t \leq 1\}$.

Позначимо через $\gamma_\zeta[\zeta_1, \zeta_2]$ дугу жорданової орієнтованої кривої γ_ζ з початком в точці ζ_1 і кінцем в точці ζ_2.

Внаслідок нерівності (3.23) дуги $\gamma_\zeta[\zeta_0, \zeta_{0,1}]$, $\gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_0, \zeta_{1,1}]$ і відрізок L_ζ^1 містяться в кулі $S(\zeta_0) := \{\zeta \in E_3 : ||\zeta - \zeta_0|| < \rho\}$. Оскільки $S(\zeta_0)$ є опуклою множиною і міститься в Ω_ζ, то з теореми 3.8 випливає рівність

$$\int\limits_{\gamma_\zeta[\zeta_0, \zeta_{0,1}]} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) + \int\limits_{L_\zeta^1} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = \int\limits_{\gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_0, \zeta_{1,1}]} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta). \qquad (3.24)$$

При $j = 1, 2, \ldots, n-2$ з нерівності (3.23) випливають наступні нерівності

$$||\zeta - \zeta_{0,j}|| < \frac{\rho}{2} \qquad \forall\, \zeta \in \gamma_\zeta[\zeta_{0,j}, \zeta_{0,j+1}],$$

$$||\zeta - \zeta_{1,j}|| < \frac{\rho}{2} \qquad \forall\, \zeta \in \gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_{1,j}, \zeta_{1,j+1}], \qquad ||\zeta_{1,j} - \zeta_{0,j}|| < \frac{\rho}{2},$$

внаслідок яких дуги $\gamma_\zeta[\zeta_{0,j}, \zeta_{0,j+1}]$, $\gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_{1,j}, \zeta_{1,j+1}]$, а також відрізки L_ζ^1, L_ζ^{j+1} містяться в кулі $S(\zeta_{0,j}) := \{\zeta \in E_3 : ||\zeta - \zeta_{0,j}|| < \rho\}$ при $j = 1, 2, \ldots, n-2$. Оскільки $S(\zeta_{0,j})$ є опуклою множиною і міститься в Ω_ζ, то з теореми 3.2.3 випливають рівності

$$-\int\limits_{L_\zeta^j} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) + \int\limits_{\gamma_\zeta[\zeta_{0,j}, \zeta_{0,j+1}]} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) +$$

$$+ \int\limits_{L_\zeta^{j+1}} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = \int\limits_{\gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_{1,j}, \zeta_{1,j+1}]} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) \qquad (3.25)$$

при $j = 1, 2, \ldots, n-2$.

Нарешті, аналогічно до рівності (3.24) отримуємо рівність

$$-\int\limits_{L_\zeta^{n-1}} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) + \int\limits_{\gamma_\zeta[\zeta_{0,n-1}, \zeta_0]} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = \int\limits_{\gamma_\zeta^{[1]}[\zeta_{1,n-1}, \zeta_0]} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta). \quad (3.26)$$

Додавши усі рівності (3.24) — (3.26), отримаємо рівність

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = \int\limits_{\gamma_\zeta^{[1]}} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) \tag{3.27}$$

Далі покладемо $s_j = t_j$ і введемо в розгляд криву $\gamma_\zeta^{[j]} := \{H(s_j, t) : 0 \le t \le 1\}$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Аналогічно до рівності (3.27), отримаємо рівності

$$\int\limits_{\gamma_\zeta^{[1]}} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = \int\limits_{\gamma_\zeta^{[2]}} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = \ldots = \int\limits_{\gamma_\zeta^{[n]}} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta).$$

Отже, справедлива рівність

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = \int\limits_{\gamma_\zeta^{[n]}} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta),$$

де крива $\gamma_\zeta^{[n]}$ вироджується в точку, оскільки $H(1, t) \equiv \zeta_0$. Тепер очевидною рівністю

$$\int\limits_{\gamma_\zeta^{[n]}} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0$$

завершується доведення теореми. Теорему доведено.

Встановимо достатні умови на криву γ_ζ, розміщену на межі області, при яких справедлива рівність (3.8). Для цього скористаємося схемою доведення теореми 4 роботи [31] для G-моногенних відображень.

Нехай на межі $\partial\Omega_\zeta$ задано замкнену жорданову спрямлювану криву $\gamma_\zeta \equiv \gamma_\zeta(t)$, де $0 \le t \le 1$, яка гомотопна внутрішній точці ζ_0 цієї області. Це означає, що існує відображення $H(s, t)$, неперервне на квадраті $[0, 1] \times [0, 1]$, таке, що $H(0, t) = \gamma_\zeta(t), H(1, t) \equiv \zeta_0$ і всі криві $\gamma_\zeta^s \equiv \gamma_\zeta^s(t) := \{\zeta = H(s, t) : 0 \le t \le 1\}$ при $0 < s < 1$ розміщені в області Ω_ζ.

Введемо також в розгляд криві $\Gamma_\zeta^t \equiv \Gamma_\zeta^t(s) := \{\zeta = H(s, t) : 0 \le s \le 1\}$ і позначимо через mes лінійну міру Лебега на спрямлюваній кривій.

Теорема 3.2.5. *Нехай відображення* $\Phi : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервне в замиканні* $\overline{\Omega}_\zeta$ *і право-*G*-моногенне, а* $\widehat{\Phi} : \overline{\Omega}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервне в замиканні* $\overline{\Omega}_\zeta$ *і ліво-*G*-моногенне в* Ω_ζ. *Тоді для довільної замкненої жорданової спрямлюваної кривої* γ_ζ, *розміщеної на межі* $\partial\Omega_\zeta$ *і гомотопної внутрішній точці* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$, *для якої криві сімейства* $\{\Gamma^t_\zeta : 0 \le t \le 1\}$ *спрямлювані і множина* $\{\mathrm{mes}\, \gamma^s_\zeta : 0 \le s \le 1\}$ *обмежена, справедлива рівність* (3.8).

Доведення. Нехай $\varepsilon_1 > 0$ і $\varepsilon_2 > 0$. Зафіксуємо число $\rho \in \left(0, \frac{1}{2}\,\mathrm{mes}\, \gamma_\zeta\right)$ таке, що для довільних $\zeta_1, \zeta_2 \in \overline{\Omega}_\zeta$ із умови $\|\zeta_1 - \zeta_2\| < 2\rho$ випливають нерівності

$$\Big\|\Phi(\zeta_1) - \Phi(\zeta_2)\Big\| < \varepsilon_1\,, \tag{3.28}$$

$$\Big\|\widehat{\Phi}(\zeta_1) - \widehat{\Phi}(\zeta_2)\Big\| < \varepsilon_2\,. \tag{3.29}$$

Оскільки функція $H(s,t)$ рівномірно неперервна на квадраті $[0,1] \times [0,1]$, то існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $s \in (0,\delta)$ і $t, t' \in [0,1] : |t - t'| < \delta$ виконується нерівність $|H(0,t) - H(s,t')| < \rho$.

Нехай числа $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < 1$ такі, що для відповідних точок $\zeta_{0,k} := H(0,t_k)$ кривої γ_ζ виконуються співвідношення

$$\mathrm{mes}\, \gamma_\zeta[\zeta_{0,k}, \zeta_{0,k+1}] = \rho \quad \text{при} \quad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

$$\mathrm{mes}\, \gamma_\zeta[\zeta_{0,n}, \zeta_{0,0}] \le \rho.$$

Очевидно, що $2 \le n \le \left[\frac{\mathrm{mes}\, \gamma_\zeta}{\rho}\right] + 1$.

Введемо в розгляд точки $\zeta_{s,k} := H(s,t_k)$ кривої γ^s_ζ і криві

$$\Upsilon^s_{[k]} := \gamma_\zeta[\zeta_{0,k}, \zeta_{0,k+1}] \cup \Gamma^{t_{k+1}}_\zeta[\zeta_{0,k+1}, \zeta_{s,k+1}] \cup \gamma^s_\zeta[\zeta_{s,k+1}, \zeta_{s,k}] \cup \Gamma^{t_k}_\zeta[\zeta_{s,k}, \zeta_{0,k}]$$

при $k = 0,1,\ldots,n$, де $\zeta_{s,n+1} := \zeta_{s,0}$ при $0 \le s < 1$, покладаючи при цьому, що орієнтація кривих $\Upsilon^s_{[k]}$ індукована орієнтацією кривої γ_ζ.

Нехай $s \in (0,\delta)$. Оскільки при всіх $\zeta \in \Upsilon^s_{[k]}$ виконується нерівність $\|\zeta - \zeta_{0,k}\| \le 2\rho$, то, враховуючи теорему 3.2.4, лему 3.2.1 і нерівності (3.28), (3.29), отримуємо

$$\left\| \int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\Upsilon^s_{[k]}} \Big(\widehat{\Phi}(\zeta) - \widehat{\Phi}(\zeta_{0,k}) \Big)\, d\zeta\, \Big(\Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_{0,k}) \Big) \right\| \le$$

$$\le c \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\Upsilon^s_{[k]}} \left\| \widehat{\Phi}(\zeta) - \widehat{\Phi}(\zeta_{0,k}) \right\| ||d\zeta|| \left\| \Phi(\zeta) - \Phi(\zeta_{0,k}) \right\| \le c\varepsilon_1\varepsilon_2 \sum_{k=0}^{n} \operatorname{mes} \Upsilon^s_{[k]} \le$$

$$\le c\varepsilon_1\varepsilon_2 \Big(\operatorname{mes} \gamma_\zeta + \operatorname{mes} \gamma^s_\zeta + 2(n+1) \max_{k=\overline{0,n}} \operatorname{mes} \Gamma^{t_k}_\zeta [\zeta_{s,k}, \zeta_{0,k}] \Big) \le$$

$$\le M\varepsilon_1\varepsilon_2 \left(1 + \frac{1}{\rho} \max_{k=\overline{0,n}} \operatorname{mes} \Gamma^{t_k}_\zeta [\zeta_{s,k}, \zeta_{0,k}] \right), \qquad (3.30)$$

де стала c не залежить від ε_1, ε_2 і ρ.

Перейшовши до границі в нерівності (3.30) при $s \to 0$, отримуємо нерівність

$$\left\| \int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta\, \Phi(\zeta) \right\| \le M\varepsilon_1\varepsilon_2,$$

перейшовши в якій, у свою чергу, до границі при ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$, переконуємося в справедливості рівності (3.8). Теорему доведено.

3.3. Теорема Морера

Позначимо через $s[\zeta_1, \zeta_2]$ відрізок з початком в точці ζ_1 і кінцем в точці ζ_2.

Наступні твердження є аналогами теореми Морера для відображень, що приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.3.1. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Якщо відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервне в області* Ω_ζ *і виконується рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle_\zeta} d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0 \qquad (3.31)$$

для кожного трикутника $\triangle_\zeta$ *такого, що* $\overline{\triangle}_\zeta \subset \Omega_\zeta$, *то відображення* Φ *є право-*G*-моногенним в області* Ω_ζ.

Доведення. Зафіксуємо в області Ω_ζ деяку точку a. Розглянемо відображення

$$\Psi(\zeta) := \int\limits_{s[a,\zeta]} d\tau\, \Phi(\tau)$$

і покажемо, що воно право-G-моногенне в Ω_ζ, причому

$$\Psi'(\zeta) = \Phi(\zeta). \tag{3.32}$$

Нехай $h \in E_3$ і $\varepsilon > 0$ таке, що трикутник $\triangle_\zeta$ з вершинами $a, \zeta, \zeta+\varepsilon h$ міститься в області Ω_ζ.

Розглянемо різницю

$$\Psi(\zeta+\varepsilon h) - \Psi(\zeta) = \int\limits_{s[a,\zeta+\varepsilon h]} d\tau\, \Phi(\tau) - \int\limits_{s[a,\zeta]} d\tau\, \Phi(\tau) =$$

$$= \int\limits_{s[a,\zeta+\varepsilon h]} d\tau\, \Phi(\tau) + \int\limits_{s[\zeta,a]} d\tau\, \Phi(\tau) + \int\limits_{s[\zeta+\varepsilon h,\zeta]} d\tau\, \Phi(\tau) - \int\limits_{s[\zeta+\varepsilon h,\zeta]} d\tau\, \Phi(\tau) =$$

$$= \int\limits_{\partial\triangle_\zeta} d\tau\, \Phi(\tau) + \int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]} d\tau\, \Phi(\tau) = \int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]} d\tau\, \Phi(\tau). \tag{3.33}$$

Тепер, враховуючи рівність (3.33), лему 3.2.1 і неперервність відображення Φ, отримуємо співвідношення

$$\left\| \frac{\Psi(\zeta+\varepsilon h) - \Psi(\zeta)}{\varepsilon} - h\Phi(\zeta) \right\| = \left\| \frac{\int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]} d\tau\, \Phi(\tau)}{\varepsilon} - h\Phi(\zeta) \right\| =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \left\| \int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]} d\tau \Big(\Phi(\tau) - \Phi(\zeta)\Big) \right\| \le \frac{c}{\varepsilon} \int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]} \|\Phi(\tau) - \Phi(\zeta)\| \|d\tau\| \le$$

$$\le \frac{c}{\varepsilon} \sup_{\tau,\zeta\in\Omega_\zeta,\, \|\tau-\zeta\|\le\varepsilon} \|\Phi(\tau) - \Phi(\zeta)\| \int\limits_{s[\zeta,\zeta+\varepsilon h]} \|d\tau\| \le$$

$$\le c\,\|h\| \sup_{\tau,\zeta\in\Omega_\zeta,\, \|\tau-\zeta\|\le\varepsilon} \|\Phi(\tau) - \Phi(\zeta)\| \to 0, \qquad \varepsilon \to 0. \tag{3.34}$$

Із співвідношення (3.34) випливає рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0+0}\frac{\Psi(\zeta+\varepsilon h)-\Psi(\zeta)}{\varepsilon}=h\Phi(\zeta),$$

наслідком якої є рівність (3.32).

Оскільки в довільному околі точки ζ відображення Φ є правою похідною Гато відображення $\Psi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$, то в силу теореми 2.3.10, відображення Φ є право-G-моногенним в області Ω_ζ. Теорему доведено.

Теорема 3.3.2. *Нехай* $f_1(E_3)=f_2(E_3)=\mathbb{C}$. *Якщо відображення* $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ *неперервне в області* Ω_ζ *і виконується рівність*

$$\int\limits_{\partial\triangle_\zeta}\widehat{\Phi}(\zeta)\,d\zeta=0 \tag{3.35}$$

для кожного трикутника $\triangle_\zeta$ *такого, що* $\overline{\triangle}_\zeta\subset\Omega_\zeta$, *то відображення* $\widehat{\Phi}$ *є ліво-*G*-моногенним в області* Ω_ζ.

3.4. Інтегральна формула Коші

Для встановлення інтегральної формули Коші розглянемо допоміжні твердження.

Наслідком представлення (2.30) і правил множення (2.1) є наступне твердження.

Лема 3.4.1. *Нехай область* $\Omega_\zeta\subset E_3$ *опукла в напрямку прямих* L^1_ζ, L^2_ζ *і* $f_1(E_3)=f_2(E_3)=\mathbb{C}$. *Нехай також в області* Ω_ζ *визначене право-*G*-моногенне відображення* $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$, *а* $\gamma_\zeta\subset\Omega_\zeta$ *— довільна спрямлювана крива. Тоді*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta}d\zeta\,\Phi(\zeta)=e_1\int\limits_{\gamma_1}F_1(\xi_1)d\xi_1+e_2\int\limits_{\gamma_2}F_2(\xi_2)d\xi_2+$$

$$+e_3\int\limits_{\gamma_1}F_3(\xi_1)d\xi_1+e_4\int\limits_{\gamma_2}F_4(\xi_2)d\xi_2\,, \tag{3.36}$$

де γ_1, γ_2 *— образи кривої* γ_ζ *при відображенні функціоналами* f_1, f_2, *а* F_1, F_2, F_3, F_4 *— функції, визначені в рівності* (2.30).

Аналогічно наслідком представлення (2.32) і правил множення (2.1) є наступне твердження.

Лема 3.4.2. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямих* L_ζ^1, L_ζ^2 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Нехай також в області* Ω_ζ *визначене ліво-*G*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, *а* $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$ *— довільна спрямлювана крива. Тоді*

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)d\zeta = e_1 \int\limits_{\gamma_1} \widehat{F}_1(\xi_1)d\xi_1 + e_2 \int\limits_{\gamma_2} \widehat{F}_2(\xi_2)d\xi_2 +$$

$$+ e_3 \int\limits_{\gamma_2} \widehat{F}_3(\xi_2)d\xi_2 + e_4 \int\limits_{\gamma_1} \widehat{F}_4(\xi_1)d\xi_1 \,, \qquad (3.37)$$

де γ_1, γ_2 *— образи кривої* γ_ζ *при відображенні функціоналами* f_1, f_2, *а* $\widehat{F}_1, \widehat{F}_2, \widehat{F}_3, \widehat{F}_4$ *— функції, визначені в рівності* (2.32).

Нехай $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \in E_3$. Обернений елемент ζ^{-1} має вигляд

$$\zeta^{-1} = \frac{1}{\xi_1}e_1 + \frac{1}{\xi_2}e_2 \qquad (3.38)$$

і існує тоді і тільки тоді, коли $\xi_1 \neq 0$ і $\xi_2 \neq 0$.

Нехай $\zeta_0 = \xi_{10}e_1 + \xi_{20}e_2$ — фіксована точка області $\Omega_\zeta \subset E_3$. В околі ζ_0, який міститься в Ω_ζ, візьмемо коло $C(\zeta_0)$ з центром в точці ζ_0. Через $C_k \subset \mathbb{C}$ позначимо образ кола $C(\zeta_0)$ при відображенні функціоналом f_k, $k = 1, 2$.

Вважатимемо, що коло $C(\zeta_0)$ *охоплює множину* $\{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$. Це означає, що C_k є межею деякої області D'_k і $\xi_{k0} \in D'_k$, $\quad k = 1, 2$.

Будемо казати, що крива $\gamma_\zeta \subset \Omega_\zeta$ *охоплює один раз множину* $\{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$, якщо існує коло $C(\zeta_0)$, яке охоплює вказану множину і гомотопне кривій γ_ζ в області $\Omega_\zeta \setminus \{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$.

В наступних теоремах встановлено аналоги інтегральної формули Коші для G-моногенних відображень в області Ω_ζ.

Теорема 3.4.1. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямих* L_ζ^1, L_ζ^2 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *а відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є право-*G*-моногенним в області* Ω_ζ. *Тоді для довільної точки* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ *справедлива рівність*

$$\Phi(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} (\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta\, \Phi(\zeta),$$

де γ_ζ *— довільна жорданова спрямлювана крива в* Ω_ζ, *яка охоплює один раз множину* $\{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$.

Доведення. Оскільки крива γ_ζ гомотопна колу $C(\zeta_0)$ в області $\Omega_\zeta \setminus \{\zeta_0 + \zeta : \zeta \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$, то з теореми 3.2.4 випливає, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} (\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta\, \Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(\zeta_0)} (\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta\, \Phi(\zeta).$$

Крім того, використовуючи представлення (3.38), лему 3.4.1 та інтегральну формулу Коші для аналітичних функцій $F_n, n = 1, 2, 3, 4$, отримуємо такі рівності:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(\zeta_0)} (\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta\, \Phi(\zeta) =$$

$$= e_1 \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{F_1(\xi_1)}{\xi_1 - \xi_{10}} d\xi_1 + e_2 \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \frac{F_2(\xi_2)}{\xi_2 - \xi_{20}} d\xi_2 +$$

$$+ e_3 \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{F_3(\xi_1)}{\xi_1 - \xi_{10}} d\xi_1 + e_4 \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \frac{F_4(\xi_2)}{\xi_2 - \xi_{20}} d\xi_2 =$$

$$= F_1\big(\xi_{10}\big) e_1 + F_2\big(\xi_{20}\big) e_2 + F_3\big(\xi_{10}\big) e_3 + F_4\big(\xi_{20}\big) e_4 = \Phi(\zeta_0),$$

де $\zeta_0 = \xi_{10} e_1 + \xi_{20} e_2$. Теорему доведено.

Теорема 3.4.2. *Нехай область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямих* L_ζ^1, L_ζ^2 *і* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *а відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є ліво-*G*-моногенним в області* Ω_ζ. *Тоді для довільної точки* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ *справедлива рівність*

$$\widehat{\Phi}(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta) (\zeta - \zeta_0)^{-1} d\zeta,$$

де γ_ζ — *довільна жорданова спрямлювана крива в* Ω_ζ, *яка охоплює один раз множину* $\{\zeta_0+\zeta : \zeta\in L^1_\zeta\cup L^2_\zeta\}$.

3.5. Степеневі ряди для G-моногенних відображень

Розглядаючи питання про розклад G-моногенного відображення в степеневий ряд (ряд Тейлора), будемо вважати область $\Omega_\zeta\subset E_3$ обмеженою.

Нехай $\zeta_0=x_0i_1+y_0i_2+z_0i_3$ — довільна фіксована точка області Ω_ζ. Поставимо їй у відповідність точки комплексної площини $\xi_{10}=f_1(\zeta_0)=x_0+a_1y_0+b_1z_0$ і $\xi_{20}=f_2(\zeta_0)=x_0+a_2y_0+b_2z_0$, де a_k, b_k — коефіцієнти розкладу (2.4) при $k=1,2$.

Позначимо $R_0:=\min\limits_{\zeta\in\partial\Omega_\zeta}\|\zeta-\zeta_0\|$, де через $\partial\Omega_\zeta$ позначено межу області $\Omega_\zeta\subset E_3$. Розглянемо кулю $\Theta(\zeta_0,R_0):=\{\zeta\in E_3 : \|\zeta-\zeta_0\|<R_0\}\subset E_3$ радіуса R_0 з центром в точці ζ_0, а через G_1 і G_2 позначимо області в $\mathbb{C}$, на які куля $\Theta(\zeta_0,R_0)$ відображається функціоналами f_1 і f_2 відповідно.

Нехай $R:=\min\Big\{R_0\,,\min\limits_{\tau_1\in\partial G_1}|\tau_1-\xi_{10}|\,,\min\limits_{\tau_2\in\partial G_2}|\tau_2-\xi_{20}|\Big\}$, де через ∂G_1 і ∂G_2 позначено межі областей G_1 і G_2 відповідно. Через $U(\xi_{10},R):=\{\xi_1\in\mathbb{C} : |\xi_1-\xi_{10}|<R\}$, $U(\xi_{20},R):=\{\xi_2\in\mathbb{C} : |\xi_2-\xi_{20}|<R\}$ позначимо круги радіуса R в комплексній площині з центрами в точках ξ_{10} і ξ_{20} відповідно.

Безпосереднє застосування способу розкладу аналітичної функції, що базується на розкладі ядра Коші в ряд (див., наприклад, [40, с. 94]), до право-G-моногенного відображення $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$, дозволяє отримати його розклад в степеневий ряд

$$\Phi(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n p_n, \tag{3.39}$$

а до ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — розклад в степеневий ряд

$$\widehat{\Phi}(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\widehat{p}_n(\zeta-\zeta_0)^n \tag{3.40}$$

в кулі з центром у фіксованій точці $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ радіуса меншого, ніж відстань від точки ζ_0 до межі $\partial\Omega_\zeta$. Тут

$$p_n = \frac{\Phi^{(n)}(\zeta_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\zeta}\Big((\tau-\zeta_0)^{-1}\Big)^{n+1} d\tau\,\Phi(\tau);$$

$$\widehat{p}_n = \frac{\widehat{\Phi}^{(n)}(\zeta_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\zeta}\widehat{\Phi}(\tau)\Big((\tau-\zeta_0)^{-1}\Big)^{n+1} d\tau,$$

а γ_ζ — довільна жорданова спрямлювана крива в Ω_ζ, яка охоплює один раз множину $\{\zeta_0+\zeta : \zeta \in L^1_\zeta \cup L^2_\zeta\}$ і лежить в кулі, яка повністю міститься в області Ω_ζ. Це пов'язано з тим, що в нерівності $\|ab\| \le c\,\|a\|\|b\|$ константа c не може бути замінена одиницею.

Далі покажемо, що представлення (2.30) дозволяє отримати розклад право-G-моногенного відображення в степеневий ряд (3.39), а представлення (2.32) — розклад ліво-G-моногенного відображення в степеневий ряд (3.40) в області

$$B(\zeta_0, R) := \{\zeta \in E_3 : f_1(\zeta) \in U(\xi_{10}, R)\,, f_2(\zeta) \in U(\xi_{20}, R)\}.$$

Оскільки за побудовою область $B(\zeta_0, R)$ опукла в напрямку прямих L^1_ζ і L^2_ζ, то право-G-моногенне в $B(\zeta_0, R)$ відображення Φ подається у вигляді (2.30), а ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi}$ — у вигляді (2.32).

Теорема 3.5.1. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є право-*G*-моногенним в області* Ω_ζ *і* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$. *Тоді в області* $B(\zeta_0, R)$ *відображення* Φ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного степеневого ряду* (3.39), *в якому*

$$p_n = a_n e_1 + b_n e_2 + c_n e_3 + d_n e_4 \qquad (3.41)$$

і a_n, b_n, c_n, d_n *— коефіцієнти рядів Тейлора функцій*

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi_1-\xi_{10})^n, \qquad F_2(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\xi_2-\xi_{20})^n, \\ F_3(\xi_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi_1-\xi_{10})^n, \qquad F_4(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\xi_2-\xi_{20})^n, \end{aligned} \qquad (3.42)$$

які містяться у представленні (2.30) *відображення* Φ *при* $\zeta \in B(\zeta_0, R)$.

Доведення. Оскільки у представленні (2.30) функції F_1, F_3 аналітичні в крузі $U(\xi_{10}, R)$, а функції F_2, F_4 аналітичні в крузі $U(\xi_{20}, R)$, то у відповідних кругах ряди (3.42) абсолютно збіжні. Тоді при всіх $\zeta \in B(\zeta_0, R)$ рівність (2.30) набуває вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n e_1 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n e_2 +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n e_3 + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n e_4.$$

Тепер, враховуючи співвідношення

$$\begin{aligned} &(\zeta - \zeta_0)^n e_1 = (\xi_1 - \xi_{10})^n e_1, \quad (\zeta - \zeta_0)^n e_2 = (\xi_2 - \xi_{20})^n e_2, \\ &(\zeta - \zeta_0)^n e_3 = (\xi_1 - \xi_{10})^n e_3, \quad (\zeta - \zeta_0)^n e_4 = (\xi_2 - \xi_{20})^n e_4 \end{aligned} \tag{3.43}$$

для всіх $\zeta \in E_3$ і $n = 0, 1, \ldots$, приходимо до розкладу (3.39), коефіцієнти якого визначаються рівністю (3.41), при цьому ряд (3.39) абсолютно збігається в області $B(\zeta_0, R)$. Теорему доведено.

Повністю аналогічно доводиться наступна теорема.

Теорема 3.5.2. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, *відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є ліво-*G*-моногенним в області* Ω_ζ *і* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$. *Тоді в області* $B(\zeta_0, R)$ *відображення* $\widehat{\Phi}$ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного степеневого ряду* (3.40), *в якому*

$$\widehat{p}_n = \widehat{a}_n e_1 + \widehat{b}_n e_2 + \widehat{c}_n e_3 + \widehat{d}_n e_4 \tag{3.44}$$

і $\widehat{a}_n$, $\widehat{b}_n$, $\widehat{c}_n$, $\widehat{d}_n$ *— коефіцієнти рядів Тейлора функцій*

$$\widehat{F}_1(\xi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{a}_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad \widehat{F}_2(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{b}_n(\xi_2 - \xi_{20})^n,$$

$$\widehat{F}_3(\xi_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{c}_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \qquad \widehat{F}_4(\xi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{d}_n(\xi_1 - \xi_{10})^n,$$

які містяться у представленні (2.32) *відображення* $\widehat{\Phi}$ *при* $\zeta \in B(\zeta_0, R)$.

Наступна теорема є аналогом теореми єдиності для право-G-моногенних відображень, які визначені в області $\Omega_\zeta \subset E_3$ і приймають значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.5.3. *Нехай $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Якщо два право-$G$-моногенні відображення $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в довільній області $\Omega_\zeta \subset E_3$ співпадають в деякому околі довільної внутрішньої точки області Ω_ζ, то вони тотожно рівні у всій області Ω_ζ.*

Доведення. Нехай в околі $\omega(\zeta_0, R) := \{\zeta \in E_3 : \|\zeta - \zeta_0\| < R\}$ довільної точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ справедливе співвідношення

$$\Phi_1(\zeta) \equiv \Phi_2(\zeta). \tag{3.45}$$

Оскільки куля $\omega(\zeta_0, R)$ є опуклою множиною, то для відображень Φ_1, Φ_2 справедливі подання вигляду (2.30):

$$\Phi_1(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4\,,$$

$$\Phi_2(\zeta) = H_1(\xi_1)e_1 + H_2(\xi_2)e_2 + H_3(\xi_1)e_3 + H_4(\xi_2)e_4\,.$$

Із співвідношення (3.45) випливають наступні співвідношення

$$F_1 \equiv H_1, \quad F_3 \equiv H_3 \quad \text{в області} \quad f_1\big(\omega(\zeta_0, R)\big), \tag{3.46}$$

$$F_2 \equiv H_2, \quad F_4 \equiv H_4 \quad \text{в області} \quad f_2\big(\omega(\zeta_0, R)\big). \tag{3.47}$$

За теоремою єдиності для аналітичних функцій комплексної змінної (див., наприклад, [40, с. 104]), рівності (3.46) справедливі всюди в області $f_1(\Omega_\zeta)$, а рівності (3.47) — всюди в області $f_2(\Omega_\zeta)$. Це і означає, враховуючи єдиність розкладу за базисом, що співвідношення (3.45) справедливе всюди в області Ω_ζ. Теорему доведено.

Аналогічна теорема справедлива і для ліво-G-моногенних відображень.

Теорема 3.5.4. *Нехай $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Якщо два ліво-$G$-моногенні відображення $\widehat{\Phi}_1 : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\widehat{\Phi}_2 : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в довільній області $\Omega_\zeta \subset E_3$ співпадають в деякому околі довільної внутрішньої точки області Ω_ζ, то вони тотожно рівні у всій області Ω_ζ.*

Зазначимо, що співпадання відображень $\Phi_1 : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і $\Phi_2 : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ на множині точок, яка містить хоча б одну граничну точку області Ω_ζ , є недостатнім для тотожної рівності цих відображень у всій області Ω_ζ . Так, наприклад, значення G-моногенних в E_3 відображень $\Phi_1(\zeta) = \zeta e_3$ і $\Phi_2(\zeta) = 0$ співпадають для всіх $\zeta \in L^2_\zeta$, проте не співпадають тотожно.

3.6. Ряди Лорана і класифікація особливих точок

В теоремі 2.3.9 встановлено, що у випадку, коли область Ω_ζ опукла в напрямку прямих L^1_ζ і L^2_ζ, G-моногенне в області Ω_ζ відображення продовжується до відображення, G-моногенного в області $\Pi_\zeta := \{\zeta \in E_3 : f_1(\zeta) \in D_1,\ f_2(\zeta) \in D_2\}$. Тому, розглядаючи питання про розклад G-моногенного відображення в ряд Лорана відносно точки $\zeta_0 = x_0 i_1 + y_0 i_2 + z_0 i_3$, будемо вважати, що воно задане в необмеженій області

$$\mathcal{K}_\zeta := \{\zeta \in E_3 : 0 \le r < |\xi_1 - \xi_{10}| < R \le \infty\,, 0 \le r < |\xi_2 - \xi_{20}| < R \le \infty\}\,.$$

Теорема 3.6.1. *Нехай $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді кожне право-$G$-моногенне відображення $\Phi : \mathcal{K}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в області $\mathcal{K}_\zeta$ подається у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n\,, \tag{3.48}$$

де $(\zeta - \zeta_0)^n := \left((\zeta - \zeta_0)^{-1}\right)^{-n}$ при $n = -1, -2, \ldots$, і коефіцієнти p_n визначаються формулами (3.41), *в яких a_n, b_n, c_n, d_n — коефіцієнти рядів Лорана функцій*

$$\begin{aligned} F_1(\xi_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_2(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \\ F_3(\xi_1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad F_4(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \end{aligned} \tag{3.49}$$

які містяться в розкладі (2.30) *відображення Φ при $\zeta \in \mathcal{K}_\zeta$.*

Доведення. Оскільки в поданні (2.30) функції F_1, F_3 аналітичні в кільці $\{\xi_1 \in \mathbb{C} : r < |\xi_1 - \xi_{10}| < R\}$, а функції F_2, F_4 аналітичні в кільці $\{\xi_2 \in \mathbb{C} : r < |\xi_2 - \xi_{20}| < R\}$, то ряди (3.49) у відповідних кільцях абсолютно збіжні. Використовуючи розклади (3.49), рівність (2.30) набуває вигляду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\xi_1 - \xi_{10})^n e_1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(\xi_2 - \xi_{20})^n e_2 +$$

$$+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\xi_1 - \xi_{10})^n e_3 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n(\xi_2 - \xi_{20})^n e_4.$$

Тепер, враховуючи співвідношення (3.43), які виконуються при всіх цілих значеннях n, отримуємо розклад відображення Φ в абсолютно збіжний в області $\mathcal{K}_\zeta$ ряд (3.48), коефіцієнти якого визначаються рівностями (3.41). Теорему доведено.

Повністю аналогічно доводиться розклад у ряд Лорана ліво-G-моногенного відображення $\widehat{\Phi}$.

Теорема 3.6.2. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Тоді кожне ліво-*$G$*-моногенне відображення* $\widehat{\Phi} : \mathcal{K}_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *в області* $\mathcal{K}_\zeta$ *подається у вигляді суми абсолютно збіжного ряду*

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{p}_n(\zeta - \zeta_0)^n\,, \tag{3.50}$$

де $(\zeta - \zeta_0)^n := \big((\zeta - \zeta_0)^{-1}\big)^{-n}$ *при* $n = -1, -2, \ldots$ *і коефіцієнти* $\widehat{p}_n$ *визначаються формулами* (3.44), *в яких* $\widehat{a}_n, \widehat{b}_n, \widehat{c}_n, \widehat{d}_n$ *— коефіцієнти рядів Лорана функцій*

$$\widehat{F}_1(\xi_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{a}_n(\xi_1 - \xi_{10})^n, \qquad \widehat{F}_2(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{b}_n(\xi_2 - \xi_{20})^n,$$

$$\widehat{F}_3(\xi_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{c}_n(\xi_2 - \xi_{20})^n, \qquad \widehat{F}_4(\xi_1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{d}_n(\xi_1 - \xi_{10})^n,$$

які містяться в розкладі (2.32) *відображення* $\widehat{\Phi}$ *при* $\zeta \in \mathcal{K}_\zeta$.

Сукупність членів ряду Лорана (3.48) або (3.50) з невід'ємними степенями називають його *правильною частиною*, а сукупність членів цього ряду з від'ємними степенями — *головною частиною* ряду Лорана.

Компактифікуємо алгебру $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, додаючи до неї нескінченно віддалену точку ∞, до якої прямує кожна послідовність $w_n := \tau_{1,n}e_1 + \tau_{2,n}e_2 + \tau_{3,n}e_3 + \tau_{4,n}e_4$, де $\tau_{1,n}, \tau_{2,n}, \tau_{3,n}, \tau_{4,n} \in \mathbb{C}$, у випадку коли хоча б одна з послідовностей $\tau_{1,n}$, $\tau_{2,n}$, $\tau_{3,n}$, $\tau_{4,n}$ збігається до нескінченно віддаленої точки розширеної комплексної площини.

Спираючись на теореми 3.6.1, 3.6.2 здійснимо класифікацію особливих точок G-моногенних відображень.

Припустимо, що право-G-моногенне відображення $\Phi : \mathcal{K}_\zeta^0 \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \mathcal{K}_\zeta^0 \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ задані в області

$$\mathcal{K}_\zeta^0 := \{\zeta \in E_3 : 0 < |\xi_1 - \xi_{10}| < R \leq \infty \,, 0 < |\xi_2 - \xi_{20}| < R \leq \infty\}\,.$$

Позначимо через $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 := \{\zeta \in E_3 : |\xi_1 - \xi_{10}| < R \,, |\xi_2 - \xi_{20}| < R\}$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.6.3. *Нехай* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Якщо розклад* (3.48) *відображення* $\Phi : \mathcal{K}_\zeta^0 \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$*:*

1) *не містить головної частини, то відображення* Φ *має скінченні границі*

$$\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0 + \zeta^*, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + \zeta^* : \zeta^* \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}}} \Phi(\zeta) \tag{3.51}$$

2) *містить лише скінченне число доданків у головній частині, то хоча б при одному значенні* $k = 1, 2$ *відображення* Φ *має нескінченні границі*

$$\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0 + \zeta_k^*, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + \zeta_k^* : \zeta_k^* \in L_\zeta^k\}}} \Phi(\zeta) \tag{3.52}$$

в усіх точках $\zeta_0 + \zeta_k^* \in \widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + \zeta_k^* :\ \zeta_k^* \in L_\zeta^k\}$*;*

3) *містить нескінченне число доданків у головній частині, то хоча б при одному значенні* $k = 1, 2$ *відображення* Φ *або має нескінченну*

границю, або не має ні скінченної, ні нескінченної границі в усіх точках $\zeta_0+\zeta_k^*\in\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0\cap\{\zeta_0+\zeta_k^*:\ \zeta_k^*\in L_\zeta^k\}$.

Доведення. Відображення Φ в області $\mathcal{K}_\zeta^0$ подається у вигляді (2.30), де функції F_1, F_3 аналітичні в проколотому околі $U(\xi_{10},R)\setminus\{\xi_{10}\}$ точки ξ_{10}, а функції F_2, F_4 аналітичні в проколотому околі $U(\xi_{20},R)\setminus\{\xi_{20}\}$ точки ξ_{20}.

Розглянемо випадок, коли розклад (3.48) не містить головної частини, тобто має вигляд (3.39). При цьому коефіцієнти рядів Лорана (3.49) пов'язані з коефіцієнтами ряду (3.39) співвідношеннями (3.41), з яких, в силу рівностей $p_n=0$ при $n=-1,-2,\ldots$, слідують рівності $a_n=b_n=c_n=d_n=0$ при всіх від'ємних індексах n. Отже, ряди Лорана (3.49) в околах відповідних точок ξ_{10}, ξ_{20} є рядами Тейлора своїх сум і тому функції F_1, F_2, F_3, F_4 з рівності (2.30) є аналітичними у відповідних областях $U(\xi_{10},R)$ чи $U(\xi_{20},R)$. Тому відображення (2.30) має скінченні границі (3.51) в усіх точках множини $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0\cap\left\{\zeta_0+\zeta^*:\zeta^*\in L_\zeta^1\cup L_\zeta^2\right\}$.

Розглянемо тепер випадок, коли головна частина розкладу (3.48) містить лише скінченне число доданків, тобто в (3.48) тільки скінченне число відмінних від нуля коефіцієнтів p_n при від'ємних n. Тоді із співвідношень (3.41), які пов'язують коефіцієнти рядів Лорана (3.49) з коефіцієнтами ряду (3.48), випливає, що всі головні частини рядів (3.49) не містять нескінченної кількості доданків і головна частина хоча б одного з них відмінна від тотожного нуля. Тому точка ξ_{10} не є істотно особливою точкою для функцій F_1, F_3, а точка ξ_{20} — для функцій F_2 і F_4, але хоча б одна з функцій F_1, F_2, F_3, F_4 має полюс у відповідній точці. Звідси випливає, що хоча б одна з функцій F_1, F_2, F_3, F_4 має нескінченну границю при $\xi_1\to\xi_{10}$ чи при $\xi_2\to\xi_{20}$, тобто границя (3.52) є також нескінченною при $k=1$ або $k=2$.

Розглянемо, нарешті, випадок, коли головна частина розкладу (3.48) містить нескінченно багато відмінних від нуля членів, тобто існує нескінченно багато відмінних від нуля коефіцієнтів p_n при від'ємних n. Тоді із співвідношень (3.41) випливає, що головна частина хоча б одного з рядів (3.49) містить нескінченно багато доданків, а це, в свою чергу, означає, що або точка ξ_{10} є істотно особливою для функцій F_1 чи F_3, або точка ξ_{20} є істотно особливою, принаймні, для однієї з функцій: F_2 чи F_4. Тому відображення Φ не може мати скінченної границі в усіх точках множини $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + \zeta^* : \zeta^* \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$, але воно може мати в цих точках нескінченну границю. Теорему доведено.

Наприклад, якщо ξ_{10} — полюс функції F_1 і істотно особлива точка функції F_3, а ξ_{20} — істотно особлива точка функцій F_2, F_4, то функція F_1 має нескінченну границю в точці ξ_{10}, а отже, границя (3.52) є нескінченною в усіх точках $\zeta_0 + \zeta_1^* \in \widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + \zeta_1^* : \zeta_1^* \in L_\zeta^1\}$.

У випадку, коли, наприклад, $F_2 \equiv 0$, $F_3 \equiv 0$, $F_4 \equiv 0$ і точка ξ_{10} є істотно особливою для функції F_1, відображення Φ не має ні скінченної, ні нескінченної границі (3.52) в усіх точках $\zeta_0 + \zeta_1^* \in \widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + \zeta_1^* : \zeta_1^* \in L_\zeta^1\}$.

Аналогічні твердження справедливі для ліво-G-моногенних відображень.

Поняття усувної особливої точки, полюса або істотно особливої точки для G-моногенного в області $\mathcal{K}_\zeta^0$ відображення $\Phi : \mathcal{K}_\zeta^0 \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вводяться так, як і відповідні поняття для аналітичних функцій в комплексній площині (див., наприклад, [40, с. 119]). А саме, точка ζ_0 називається:

1) *усувною особливою точкою* відображення Φ, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + \zeta^* : \zeta^* \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}}} \Phi(\zeta) = A;$$

2) *полюсом* відображення Φ, якщо існує нескінченна границя

$$\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0, \\ \zeta \notin \{\zeta_0 + \zeta^* : \zeta^* \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}}} \Phi(\zeta) = \infty;$$

3) *істотно особливою точкою* відображення Φ, якщо відображення Φ не має ні скінченної, ні нескінченної границі при $\zeta \to \zeta_0$ і $\zeta \notin \{\zeta_0 + \zeta^* :$

$\zeta^* \in L_\zeta^1 \cup L_\zeta^2\}$.

Повністю аналогічно вводяться поняття усувної точки, полюса та істотно особливої точки для ліво-G-моногенних відображень $\widehat{\Phi} : \mathcal{K}_\zeta^0 \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$.

З теореми 3.6.3 випливає, що ізольована особлива точка у G-моногенного відображення може бути лише усувною, а у випадку, коли відображення має неусувну особливість в точці ζ_0, особливими є всі точки хоча б однієї з множин $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + \zeta_1^* : \ \zeta_1^* \in L_\zeta^1\}$ або $\widetilde{\mathcal{K}}_\zeta^0 \cap \{\zeta_0 + \zeta_2^* : \ \zeta_2^* \in L_\zeta^2\}$.

Висновки

В розділі 3 досліджено властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, пов'язані з їх інтегральними представленнями і представленням у вигляді рядів, а саме:

1. Доведено аналоги формул Гауса – Остроградського і Стокса для відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

2. Доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого інтеграла від G-моногенного відображення, що приймає значення в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

3. Доведено аналоги інтегральних теорем Коші для криволінійного інтеграла від G-моногенного відображення зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, теореми Морера, а також аналог інтегральної формули Коші для цих відображень.

4. Доведено аналоги теорем Тейлора і Лорана для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та здійснено класифікацію особливостей цих функцій.

РОЗДІЛ 4

H-МОНОГЕННІ ВІДОБРАЖЕННЯ

У цьому розділі введено клас кватерніонних H-моногенних (неперервних і диференційовних за Хаусдорфом) відображень і встановлено зв'язок між G-моногенними і H-моногенними відображеннями. Доведено теорему про еквівалентність різних означень G-моногенного відо- браження.

4.1. Властивості H-моногенних відображень

Означення 4.1.1. Неперервне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вигляду (2.8) будемо називати H-*моногенним* в області $\Omega_\zeta \subset E_3$, якщо Φ диференційовне за Хаусдорфом в кожній точці $\zeta \in \Omega_\zeta$, тобто якщо компоненти відображення мають частинні похідні першого порядку за змінними x, y, z, і формальний диференціал відображення

$$d\Phi := \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} dx + \frac{\partial U_n}{\partial y} dy + \frac{\partial U_n}{\partial z} dz \right) e_n \tag{4.1}$$

є лінійним однорідним поліномом диференціала $d\zeta = dx + i_2 dy + i_3 dz$, тобто

$$d\Phi = \sum_{s=1}^{16} A_s \, d\zeta \, B_s \,, \tag{4.2}$$

де A_s, B_s — деякі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ – значні функції.

Відмітимо, якщо частинні похідні першого порядку функцій U_n при $n = 1, 2, 3, 4$ існують і неперервні, то формальний диференціал (4.1) є повним диференціалом відображення Φ, тобто головною частиною приросту цього відображення.

Значення $\Phi'_H(\zeta) := \sum\limits_{s=1}^{16} A_s B_s$ будемо називати *похідною Хаусдорфа* відображення $\Phi(\zeta)$ в точці ζ.

Покажемо, що означення похідної Φ'_H коректне.

Теорема 4.1.1. *Якщо відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ є H-моногенним в області Ω_ζ, то його похідна Φ'_H існує і не залежить від вибору функцій A_s, B_s в рівності* (4.2), *при цьому*

$$\Phi'_H(\zeta) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{4.3}$$

Доведення. Внаслідок H-моногенності відображення Φ виконується рівність

$$\sum_{s=1}^{16} A_s d\zeta B_s = \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} dx + \frac{\partial U_n}{\partial y} dy + \frac{\partial U_n}{\partial z} dz \right) e_n\,. \tag{4.4}$$

Нехай

$$\begin{aligned} A_s &= a_{s1}e_1 + a_{s2}e_2 + a_{s3}e_3 + a_{s4}e_4\,, \\ B_s &= b_{s1}e_1 + b_{s2}e_2 + b_{s3}e_3 + b_{s4}e_4 \end{aligned} \tag{4.5}$$

для $s = 1, 2, \ldots, 16$. Враховуючи рівність $d\zeta = (dx + a_1dy + b_1dz)e_1 + (dx + a_2dy + b_2dz)e_2$ і (4.5), отримуємо:

$$\begin{aligned} A_s d\zeta B_s = (a_{s1}e_1 + a_{s2}e_2 + a_{s3}e_3 + a_{s4}e_4)\Big((dx + a_1dy + b_1dz)e_1 + \\ +(dx + a_2dy + b_2dz)e_2\Big)(b_{s1}e_1 + b_{s2}e_2 + b_{s3}e_3 + b_{s4}e_4) = \\ = \Big(a_{s1}b_{s1}(dx + a_1dy + b_1dz) + a_{s3}b_{s4}(dx + a_2dy + b_2dz)\Big)e_1 + \\ +\Big(a_{s2}b_{s2}(dx + a_2dy + b_2dz) + a_{s4}b_{s3}(dx + a_1dy + b_1dz)\Big)e_2 + \\ +\Big(a_{s1}b_{s3}(dx + a_1dy + b_1dz) + a_{s3}b_{s2}(dx + a_2dy + b_2dz)\Big)e_3 + \\ +\Big(a_{s2}b_{s4}(dx + a_2dy + b_2dz) + a_{s4}b_{s1}(dx + a_1dy + b_1dz)\Big)e_4\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Наслідком рівностей (4.4) і (4.6) є співвідношення

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \sum_{s=1}^{16} a_{s1}b_{s1} + a_{s3}b_{s4}\,, \qquad \frac{\partial U_2}{\partial x} = \sum_{s=1}^{16} a_{s2}b_{s2} + a_{s4}b_{s3}\,,$$
$$\frac{\partial U_3}{\partial x} = \sum_{s=1}^{16} a_{s1}b_{s3} + a_{s3}b_{s2}\,, \qquad \frac{\partial U_4}{\partial x} = \sum_{s=1}^{16} a_{s2}b_{s4} + a_{s4}b_{s1}\,. \tag{4.7}$$

З урахуванням рівностей (4.5), маємо

$$\Phi'_H(\zeta) := \sum_{s=1}^{16} A_s B_s = \sum_{s=1}^{16} \Big((a_{s1}b_{s1} + a_{s3}b_{s4})e_1 +$$
$$+ (a_{s2}b_{s2} + a_{s4}b_{s3})e_2 + (a_{s1}b_{s3} + a_{s3}b_{s2})e_3 + (a_{s2}b_{s4} + a_{s4}b_{s1})e_4 \Big),$$

звідки, враховуючи співвідношення (4.7), отримуємо

$$\Phi'_H(\zeta) = \frac{\partial U_1}{\partial x}e_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x}e_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x}e_3 + \frac{\partial U_4}{\partial x}e_4 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Теорему доведено.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 4.1.2. *Якщо відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *і* $\Psi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є* H*-моногенними в області* Ω_ζ*, то добуток* $\Phi \cdot \Psi$ *також є* H*-моногенним відображенням в* Ω_ζ*, при цьому*

$$d(\Phi \cdot \Psi) = d\Phi \cdot \Psi + \Phi \cdot d\Psi.$$

Доведення. Нехай

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=1}^{4} U_n(x,y,z)e_n\,, \quad \Psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{4} V_n(x,y,z)e_n\,.$$

Тоді

$$d\Phi = \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{\partial U_n}{\partial x}dx + \frac{\partial U_n}{\partial y}dy + \frac{\partial U_n}{\partial z}dz \right) e_n\,,$$

$$d\Psi = \sum_{n=1}^{4} \left(\frac{\partial V_n}{\partial x}dx + \frac{\partial V_n}{\partial y}dy + \frac{\partial V_n}{\partial z}dz \right) e_n$$

і

$$d(\Phi \cdot \Psi) = d\Big(U_1V_1 + U_3V_4\Big)e_1 + d\Big(U_2V_2 + U_4V_3\Big)e_2 +$$

$$+ d\Big(U_1V_3 + U_3V_2\Big)e_3 + d\Big(U_2V_4 + U_4V_1\Big)e_4 =$$

$$= \Bigg[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x}U_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x}V_4 + \frac{\partial V_4}{\partial x}U_3\right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y}U_1 + \frac{\partial U_3}{\partial y}V_4 + \frac{\partial V_4}{\partial y}U_3\right) dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial z}U_1 + \frac{\partial U_3}{\partial z}V_4 + \frac{\partial V_4}{\partial z}U_3\right) dz \Bigg] e_1 +$$

$$+ \Bigg[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial x}U_2 + \frac{\partial U_4}{\partial x}V_3 + \frac{\partial V_3}{\partial x}U_4\right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial U_2}{\partial y}V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y}U_2 + \frac{\partial U_4}{\partial y}V_3 + \frac{\partial V_3}{\partial y}U_4\right) dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial U_2}{\partial z}V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial z}U_2 + \frac{\partial U_4}{\partial z}V_3 + \frac{\partial V_3}{\partial z}U_4\right) dz \Bigg] e_2 +$$

$$+ \Bigg[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}V_3 + \frac{\partial V_3}{\partial x}U_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x}V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial x}U_3\right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}V_3 + \frac{\partial V_3}{\partial y}U_1 + \frac{\partial U_3}{\partial y}V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial y}U_3\right) dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial U_1}{\partial z}V_3 + \frac{\partial V_3}{\partial z}U_1 + \frac{\partial U_3}{\partial z}V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial z}U_3\right) dz \Bigg] e_3 +$$

$$+ \Bigg[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}V_4 + \frac{\partial V_4}{\partial x}U_2 + \frac{\partial U_4}{\partial x}V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x}U_4\right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial U_2}{\partial y}V_4 + \frac{\partial V_4}{\partial y}U_2 + \frac{\partial U_4}{\partial y}V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y}U_4\right) dy +$$

$$+ \left(\frac{\partial U_2}{\partial z}V_4 + \frac{\partial V_4}{\partial z}U_2 + \frac{\partial U_4}{\partial z}V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial z}U_4\right) dz \Bigg] e_4.$$

Перетворимо отриманий вираз до наступного вигляду:

$$\left(V_1\frac{\partial U_1}{\partial x}dx+V_1\frac{\partial U_1}{\partial y}dy+V_1\frac{\partial U_1}{\partial z}dz+V_4\frac{\partial U_3}{\partial x}dx+V_4\frac{\partial U_3}{\partial y}dy+V_4\frac{\partial U_3}{\partial z}dz\right)e_1+$$

$$+\left(V_2\frac{\partial U_2}{\partial x}dx+V_2\frac{\partial U_2}{\partial y}dy+V_2\frac{\partial U_2}{\partial z}dz+V_3\frac{\partial U_4}{\partial x}dx+V_3\frac{\partial U_4}{\partial y}dy+V_3\frac{\partial U_4}{\partial z}dz\right)e_2+$$

$$+\left(V_3\frac{\partial U_1}{\partial x}dx+V_3\frac{\partial U_1}{\partial y}dy+V_3\frac{\partial U_1}{\partial z}dz+V_2\frac{\partial U_3}{\partial x}dx+V_2\frac{\partial U_3}{\partial y}dy+V_2\frac{\partial U_3}{\partial z}dz\right)e_3+$$

$$+\left(V_4\frac{\partial U_2}{\partial x}dx+V_4\frac{\partial U_2}{\partial y}dy+V_4\frac{\partial U_2}{\partial z}dz+V_1\frac{\partial U_4}{\partial x}dx+V_1\frac{\partial U_4}{\partial y}dy+V_1\frac{\partial U_4}{\partial z}dz\right)e_4+$$

$$+\left(U_1\frac{\partial V_1}{\partial x}dx+U_1\frac{\partial V_1}{\partial y}dy+U_1\frac{\partial V_1}{\partial z}dz+U_4\frac{\partial V_3}{\partial x}dx+U_4\frac{\partial V_3}{\partial y}dy+U_4\frac{\partial V_3}{\partial z}dz\right)e_1+$$

$$+\left(U_2\frac{\partial V_2}{\partial x}dx+U_2\frac{\partial V_2}{\partial y}dy+U_2\frac{\partial V_2}{\partial z}dz+U_3\frac{\partial V_4}{\partial x}dx+U_3\frac{\partial V_4}{\partial y}dy+U_3\frac{\partial V_4}{\partial z}dz\right)e_2+$$

$$+\left(U_3\frac{\partial V_1}{\partial x}dx+U_3\frac{\partial V_1}{\partial y}dy+U_3\frac{\partial V_1}{\partial z}dz+U_2\frac{\partial V_3}{\partial x}dx+U_2\frac{\partial V_3}{\partial y}dy+U_2\frac{\partial V_3}{\partial z}dz\right)e_3+$$

$$+\left(U_4\frac{\partial V_2}{\partial x}dx+U_4\frac{\partial V_2}{\partial y}dy+U_4\frac{\partial V_2}{\partial z}dz+U_1\frac{\partial V_4}{\partial x}dx+U_1\frac{\partial V_4}{\partial y}dy+U_1\frac{\partial V_4}{\partial z}dz\right)e_4\,,$$

звідки будемо мати

$$\Big(V_1dU_1+V_4dU_3\Big)e_1+\Big(V_2dU_2+V_3dU_4\Big)e_2+\Big(V_3dU_1+V_2dU_3\Big)e_3+$$
$$+\Big(V_4dU_2+V_1dU_4\Big)e_4+\Big(U_1dV_1+U_3dV_4\Big)e_1+\Big(U_2dV_2+U_4dV_3\Big)e_2+$$
$$+\Big(U_1dV_3+U_3dV_2\Big)e_3+\Big(U_2dV_4+U_4dV_1\Big)e_4=d\Phi\cdot\Psi+\Phi\cdot d\Psi.$$

Теорему доведено.

В силу теореми 4.1.2 множина H-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ утворює функціональну алгебру, оскільки добуток двох H-моногенних відображень також є H-моногенним відображенням.

4.2. Теорема про еквівалентні означення G-моногенних відображень

В наступній теоремі встановлюється зв'язок між G-моногенними і H-моногенними відображеннями.

Теорема 4.2.1. *Кожне право-G-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ і кожне ліво-G-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ в області Ω_ζ є H-моногенним відображенням в цій області.*

Доведення. Нехай Φ — право-G-моногенне відображення. Тоді існування частинних похідних першого порядку від компонент відображення Φ випливає з існування похідної Гато (рівність (2.6)). Покажемо тепер, що диференціал

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz \tag{4.8}$$

подається у вигляді (4.2).

Для цього відмітимо, що наслідком рівності (4.8) і умов (2.12) є рівність

$$d\Phi = \big(dx + i_2 dy + i_3 dz\big)\frac{\partial \Phi}{\partial x} = d\zeta\, \Phi'(\zeta),$$

тобто представлення вигляду (4.2), в якому $A_1 = 1, B_1 = \Phi'(\zeta)$.

Аналогічно встановлюється, що наслідком рівності (4.8) при $\Phi = \widehat{\Phi}$ і умов (2.13) є рівність

$$d\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}'(\zeta)d\zeta,$$

тобто знову представлення вигляду (4.2), в якому $A_1 = \widehat{\Phi}'(\zeta), B_1 = 1$. Теорему доведено.

Оскільки право- і ліво-G-моногенні відображення є H-моногенними, то їх добутки також H-моногенні відображення. Тому наслідком теорем 4.1.2, 4.2.1 і представлень (2.30), (2.32) є наступне твердження.

Наслідок 4.2.1. *Нехай область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямих L_ζ^1, L_ζ^2 і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тоді H-моногенними в області Ω_ζ є* *відображення*

$$\Phi(\zeta)\cdot\widehat{\Phi}(\zeta)=$$
$$=\Big(F_1(\xi_1)\widehat{F}_1(\xi_1)+F_3(\xi_1)\widehat{F}_4(\xi_1)\Big)e_1+\Big(F_2(\xi_2)\widehat{F}_2(\xi_2)+F_4(\xi_2)\widehat{F}_3(\xi_2)\Big)e_2+$$
$$+\Big(F_1(\xi_1)\widehat{F}_3(\xi_2)+F_3(\xi_1)\widehat{F}_2(\xi_2)\Big)e_3+\Big(F_2(\xi_2)\widehat{F}_4(\xi_1)+F_4(\xi_2)\widehat{F}_1(\xi_1)\Big)e_4,$$

$$\widehat{\Phi}(\zeta)\cdot\Phi(\zeta)=$$
$$=\Big(\widehat{F}_1(\xi_1)F_1(\xi_1)+\widehat{F}_3(\xi_2)F_4(\xi_2)\Big)e_1+\Big(\widehat{F}_2(\xi_2)F_2(\xi_2)+\widehat{F}_4(\xi_1)F_3(\xi_1)\Big)e_2+$$
$$+\Big(\widehat{F}_1(\xi_1)F_3(\xi_1)+\widehat{F}_3(\xi_2)F_2(\xi_2)\Big)e_3+\Big(\widehat{F}_2(\xi_2)F_4(\xi_2)+\widehat{F}_4(\xi_1)F_1(\xi_1)\Big)e_4,$$

де аналітичні функції $F_n, \widehat{F}_n$ *при* $n = 1,2,3,4$ *визначені в рівностях* (2.30), (2.32)*відповідно.*

Означення 4.2.2. H-моногенне відображення Φ, диференціал якого подається у вигляді

$$d\Phi = d\zeta\,\Phi'_H(\zeta) \tag{4.9}$$

будемо називати *право-H-моногенним* в області Ω_ζ.

Означення 4.2.3. H-моногенне відображення $\widehat{\Phi}$, диференціал якого подається у вигляді

$$d\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}'_H(\zeta)d\zeta \tag{4.10}$$

— *ліво-H-моногенним* в області Ω_ζ.

Встановимо необхідні і достатні умови G-моногенності відображення.

Теорема 4.2.2. *Нехай компоненти* $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *відображення* (2.8) *є* $\mathbb{R}$*-диференційовними в області* Ω*. Відображення* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є право-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли воно право-H-моногенне, а відображення* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *є ліво-G-моногенним тоді і тільки тоді, коли воно ліво-H-моногенне в області* Ω_ζ*.*

Доведення. Необхідність доведена при доведенні теореми 4.2.1. Доведемо достатність. Нехай відображення Φ — право-H-моногенне, тобто виконується рівність (4.9). Наслідком рівностей (4.8) і (4.9) є рівність

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = d\zeta \Phi'_H(\zeta).$$

З урахуванням рівностей (4.3) і $d\zeta = dx + i_2 dy + i_3 dz$ маємо тотожність

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + i_2\frac{\partial \Phi}{\partial x}dy + i_3\frac{\partial \Phi}{\partial x}dz,$$

наслідком якої є умови Коші – Рімана (2.12). Тоді за теоремою 2.2.1 відображення Φ — право-G-моногенне.

Аналогічно доводиться випадок ліво-H-моногенного відображення. Теорему доведено.

З теорем 2.3.7 і 4.2.2 випливає

Наслідок 4.2.2. *Якщо область $\Omega_\zeta \subset E_3$ опукла в напрямку прямих L^1_ζ, L^2_ζ і $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, то кожне право-$H$-моногенне відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді* (2.30), *а кожне ліво-H-моногенне відображення $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ подається у вигляді* (2.32).

Наступна теорема містить критерій право-G-моногенності і ліво-G-моногенності відображень.

Теорема 4.2.3. *Відображення $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ $\big($або $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})\big)$ є право-G-моногенним $\big($або ліво-G-моногенним$\big)$ в області $\Omega_\zeta \subset E_3$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:*

1) *компоненти $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу* (7) *є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і виконуються умови* (10) $\big($*або* (11)$\big)$ *в кожній точці області Ω_ζ;*

2) *компоненти $U_n : \Omega \to \mathbb{C}$ розкладу* (7) *є $\mathbb{R}$-диференційовними функціями в області Ω і відображення Φ $\big($або $\widehat{\Phi}\big)$ є право-H-моногенним $\big($або ліво-H-моногенним$\big)$ в області Ω_ζ.*

Якщо $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, то відображення Φ є право-G-моногенним $\big($або $\widehat{\Phi}$ — ліво-G-моногенним$\big)$ тоді і тільки тоді, коли виконується одна з наступних умов:

3) *для кожної точки* $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ *знайдеться окіл, в якому відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *розкладається в степеневий ряд* (24) $\big($*або* (26)$\big)$*;*

4) *відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *неперервне і виконується рівність* (22) $\big($*або* (23)$\big)$ *для кожного трикутника* $\triangle_\zeta$ *такого, що* $\overline{\triangle}_\zeta \subset \Omega_\zeta$ *.*

Якщо $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$ *і, крім того, область* $\Omega_\zeta \subset E_3$ *опукла в напрямку прямих* L^1_ζ*,* L^2_ζ*, то відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *є право-*G*-моногенним* $\big($*або* $\widehat{\Phi}$ *— ліво-*G*-моногенним*$\big)$ *тоді і тільки тоді, коли*

5) *існують єдина пара аналітичних в області* D_1 *функцій* F_1, F_3 $\big($*або* $\widehat{F}_1, \widehat{F}_4\big)$ *і єдина пара аналітичних в області* D_2 *функцій* F_2, F_4 $\big($*або* $\widehat{F}_2, \widehat{F}_3\big)$ *таких, що в області* Ω_ζ *відображення* Φ $\big($*або* $\widehat{\Phi}\big)$ *подається у вигляді* (16) $\big($*або* (17)$\big)$*.*

Доведення. В теоремі 2.3.7 встановлено, що відображення Φ буде право-G-моногенним в області Ω_ζ тоді і тільки тоді, коли виконується умова (I). Еквівалентність умови (II) і властивість право-G-моногенності відображення Φ встановлено в теоремі 4.2.2. Доведення еквівалентності умови (III) і право-G-моногенності відображення Φ випливає з теореми 3.5.1 і властивості збіжного ряду (3.39) визначати відображення, право-G-моногенне в області збіжності. Еквівалентність умови (IV) і властивість право-G-моногенності випливає з теореми 3.3.1 і теореми 3.2.4. Нарешті, для доведення еквівалентності умови (V) і право-G-моногенності відображення Φ досить відмітити, що відображення (2.30) право-G-моногенне в області Ω_ζ, а єдиність функцій F_1, F_2, F_3, F_4 з (2.30) випливає з єдиності розкладу елемента алгебри $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ за базисом $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Критерій ліво-G-моногенності відображення $\widehat{\Phi}$ доводиться аналогічно. Теорему доведено.

Висновки

В розділі 4 введено клас H-моногенних відображень, досліджено їх властивості і зв'язок з G-моногенними відображеннями, а саме:

1. В теоремі 4.1.1 доведено існування і єдиність похідної H-моногенного відображення, а в теоремі 4.1.2 — властивість похідної добутку H-моногенних відображень.

2. Встановлено зв'язок між G-моногенними і H-моногенними відображеннями (теорема 4.2.1 і теорема 4.2.2).

3. Доведено теорему про еквівалентність різних означень G-моногенного відображення.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вивчаються алгебраїчно-аналітичні властивості G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів $\mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Основні результати дисертації такі:

1. Введено нові класи моногенних відображень (для яких існує права похідна Гато чи ліва похідна Гато) в алгебрі комплексних кватерніонів та встановлено конструктивний опис цих відображень за допомогою чотирьох аналітичних функцій комплексної змінної.

2. Досліджено зв'язок G-моногенних відображень з просторовими рівняннями з частинними похідними.

3. Доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого та криволінійного інтеграла від G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, теореми Морера, а також інтегральної формули Коші для цих відображень.

4. Доведено аналоги теорем Тейлора і Лорана для G-моногенних відображень зі значеннями в алгебрі комплексних кватерніонів та здійснено класифікацію особливостей цих відображень.

5. Досліджено основні властивості H-моногенних (неперервних і диференційовних за Хаусдорфом) відображень зі значеннями в алгебрі $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ та доведено теорему про еквівалентність різних означень G-моногенного відображення.

Одержані в роботі результати та розвинені в ній методи можуть бути використані в гіперкомплексному аналізі, в крайових задачах для розв'язків диференціальних рівнянь, а також в їх застосуваннях у математичній фізиці, гідродинаміці, газодинаміці, теплофізиці, механіці та інших прикладних дисциплінах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / Бицадзе А. В. — М.: Наука, 1966. — 202 с.

2. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра / Б. Л. Ван дер Варден — М.: Мир, 1976. — 648 с.

3. Воловельская С. Н. Аналитические функции в неполупростых ассоциативных линейных алгебрах / С. Н. Воловельская // Записки Научно-исслед. ин-та математики и механики и Харьков. мат. общ. — 1948. — Т. 19, № 4. — С. 153 – 159.

4. Гамильтон У. Р. Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы / под ред. Л. С. Полака. — М.: Наука, 1994. — 560 с. — (Классики науки).

5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. — М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963. – 640 с.

6. Герус О. Ф. Про гіперголоморфні функції просторової змінної / О. Ф. Герус // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 63, № 4. — С. 459 – 465.

7. Грищук С. В. Вирази розв'язків рівняння Ейлера–Пуассона–Дарбу через компоненти гіперкомплексних аналітичних функцій / С. В. Грищук, С. А. Плакса // Доповіді НАН України. — 2006. — № 8. — С. 18 – 24.

8. Грищук С. В. Интегральные представления обобщенных осесимметричных потенциалов в односвязной области / С. В. Грищук, С. А. Плакса // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 2. — С. 616—628.

9. Грищук С. В. Моногенные функции в бигармонической алгебре / С. В. Грищук, С. А. Плакса // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 12. — С. 1587—1596.

10. Грищук С. В. Моногенные функции в бигармонической плоскости / С. В. Грищук, С. А. Плакса // Доп. НАН України. — 2009. — № 12. — С. 13 – 20.

11. Дегтерева М. К вопросу построения теории аналитических функций в линейных алгебрах / М. Дегтерева // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 61, № 1. — С. 13 – 15.

12. Клейн Ф. Лекции о развитии математикив XIX столетии / Ф. Клейн. — М.–Л.: ОНТИ, 1937. — Ч. 1. — 432 с.

13. Ковалев В. Ф. Бигармонические функции на бигармонической плоскости / В. Ф. Ковалев, И. П. Мельниченко // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1981. — № 8. — С. 25 – 27.

14. Кузьменко Т. Інтегральні теореми в алгебрі комплексних кватеорніонів / Т. С. Кузьменко // Конфренеція молодих учених "Підстригачівські читання — 2017", 23 – 25 травня 2017 р., Львів, Україна. — http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2017/abstracts/Kuzmenko.pdf.

15. Кузьменко Т. С. Конструктивний опис G-моногенних відображень в алгебрі комплексних кватерніонів / Т. С. Кузьменко // Матер. XIII міжнар. наук.-практич. конф. "Шевченківська весна — 2015", Київ, 1 – 3 квітня 2015 р. / КНУ ім. Т. Шевченка. — Київ, 2015. — С. 26 – 29.

16. Кузьменко Т. С. Про еквівалентність різних означень G-моногенних відображень / Т. С. Кузьменко // XI Літня школа "Алгебра, топологія, аналіз" , 1 – 14 серпня 2016 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2016. — С. 58 – 60.

17. Кузьменко Т. С. Степеневі ряди та ряди Лорана в алгебрі комплексних кватерніонів / Т. С. Кузьменко // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 3. — С. 164 – 174.

18. Мейлихзон А. С. По поводу моногенности кватернионов / А. С. Мейлихзон // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 59, № 3. — С. 431 – 434.

19. Мельниченко И. П. О представлении моногенными функциями гармонических отображений / И. П. Мельниченко // Укр. мат. журн. — 1975. — Т. 27, № 5. — С. 606 – 613.

20. Мельниченко И. П. Об одном методе описания потенциальных полей с осевой симметрией / И. П. Мельниченко // Современные вопросы вещественного и комплексного анализа / Сборник трудов Ин-та матем. АН УССР. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. — С. 98 – 102.

21. Мельниченко И. П. Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга / И. П. Мельниченко // Укр. мат. журн. — 1986. — Т. 38, № 2. — С. 252 – 254.

22. Мельниченко И. П. Потенциальные поля с осевой симметрией и алгебры моногенных функций векторного аргумента. III / И. П. Мельниченко, С. А. Плакса // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, № 2. — С. 228 – 243.

23. Мельниченко И. П. Алгебры функционально-инвариантных решений трехмерного уравнения Лапласа / И. П. Мельниченко // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 9. — С. 1284 – 1290.

24. Мельниченко И. П. Приложение аналитических функций к задачам обтекания осесимметричных тел идеальной жидкостью / И. П. Мельниченко, С. А. Плакса // Доп. НАН України. — 2003. — № 10. — С. 22—29.

25. Мельниченко І. П. Комутативні алгебри гіперкомплексних аналітичних функцій та розв'язки рівнянь еліптичного типу з виродженням на осі / І. П. Мельниченко, С. А. Плакса // Доп. НАН України. — 2005. — № 12. — С. 28 – 35.

26. Мельниченко И. П. Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля / И. П. Мельниченко, С. А. Плакса. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2008. — 230 с.

27. Плакса С. А. Задача Дирихле для осесимметричного потенциала в односвязной области меридианной плоскости / С. А. Плакса // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 12. — С. 1623—1640.

28. Плакса С. А. Об интегральных представлениях осесимметричного потенциала и функции тока Стокса в областях меридианной плоскости. I / С. А. Плакса // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53, № 5. — С. 631—646.

29. Плакса С. А. Задача Дирихле для функции тока Стокса в односвязной области меридианной плоскости / С. А. Плакса // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 2. — С. 197—231.

30. Плакса С. А. Условия Коши-Римана для пространственных гармонических функций / С. А. Плакса // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. — К.: Ін-т матем. НАН України, 2006. — Т. 3, № 4. — С. 396—403.

31. Плакса С. А. Интегральные теоремы для дифференцируемых функций в трехмерной гармонической алгебре / С. А. Плакса, В. С. Шпаковский // Доповіді НАН України. — 2010. — № 5. — С. 23 – 30.

32. Плакса С. А. Конструктивное описание моногенных функций в трехмерной гармонической алгебре с одномерным радикалом / С. А. Плакса, Р. П. Пухтаевич // Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65, № 5. — С. 670—680.

33. Плакса С. А. Конструктивное описание моногенных функций в гармонической алгебре третьего ранга / С. А. Плакса, В. С. Шпаковский // Укр. мат. журн. — 2010. — Т. 62, № 8. — С. 1078 – 1091.

34. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. — М.: Наука, 1984. — 432 с.

35. Пухтаевич Р. П. Степенные ряды и ряды Лорана в трехмерной гармонической алгебре с одномерным радикалом / Р. П. Пухтаевич // Аналіз і застосування / Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2012. — Т. 9, № 2. — С. 311–326.

36. Трохимчук Ю. Ю. Непрерывные отображения и условия моногенности / Ю. Ю. Трохимчук. — М.: Физматиз, 1963. — 212 с.

37. Толстов Г. П. О криволинейном и повторном интеграле / Г. П. Толстов // Труды Мат. ин-та В. А. Стеклова. — 1950. — Т. 35. — С. 3 – 101.

38. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — Т. 3. — 662 с.

39. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М.: Из-во иностр. лит., 1962. — 829 с.

40. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат — М.: Наука, 1969. — 576 с.

41. Шпаківський В. С. Про один клас кватерніонних відображень / В. С. Шпаківський, Т. С. Кузьменко // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 68, № 1. — С. 117 – 130.

42. Шпаковский В. С. Степенные ряды и ряды Лорана в трехмерной гармонической алгебре / В. С. Шпаковский // Комплексний аналіз і течії з вільними границями / Збірник праць Ін-ту матем. НАН України. — К.: Ін-т матем. НАН України, 2010. — Т. 7, № 2 — С. 314 – 321.

43. Шпаковский В. С. О моногенных отображениях кватернионной переменной / В. С. Шпаковский, Т. С. Кузьменко // Укр. мат. вестник. — Т. 13, № 2. — С. 123 – 142.

44. Abreu-Blaya R. On the Laplacian vector fields theory in domains with rectifiable boundary / R. Abreu-Blaya, J. Bory-Reyes, M. Shapiro // Math. Meth. Appl. Sci. — 2006. — Vol. 29. — P. 1861 – 1881.

45. Bernstein S. Factorization of the nonlinear Schrödinger equation and applications / S. Bernstein // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2006. — Vol. 51, № 5 – 6. — P. 429 – 452.

46. Blum E. K. A theory of analytic functions in banach algebras / E. K. Blum // Trans. Amer. Math. Soc. — 1955. — Vol. 78. — P. 343 – 370.

47. Boccaletti D. The Mathematics of Minkowski Space-Time and an Introduction to Commutative Hypercomplex Numbers / D. Boccaletti, F. Catoni, R. Cannatay, V. Catoniz, E. Nichelattix, P. Zampetti. — Springer, 2006. — 185 p.

48. Bory-Reyes J. Cauchy transform and rectifiability in Clifford analysis / J. Bory-Reyes, R. Abreu-Blaya // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 2005. — Vol. 24, № 1. — P. 167 – 178.

49. Brackx F. Duality in Hypercomplex Functions Theory / F. Brackx, R. Delanghe // J. Funct. Anal. — 1980. — Vol. 37. — P. 164 – 181.

50. Cartan E. Les groupes bilinéares et les systèmes de nombres complexes / E. Cartan // Annales de la faculté des sciences de Toulouse. — 1898. — Vol. 12, № 1. — P. 1 – 64.

51. Catoni F. Commutative (Segre's) quaternion fields and relation with Maxwell equations / F. Catoni // Advances in applied Clifford algebras. — 2008. — Vol. 18, № 1. — P. 9 – 28.

52. Cullen C. G. An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions / C. G. Cullen // Duke Math. J. — 1965. — Vol. 32. — P. 139 – 148.

53. Colombo F. Noncommutative functional calculus: theory and applications of slice hyperholomorphic functions / F. Colombo, S. Sabadini, D. C. Struppa. — Progress in Mathematics, 2011. — Vol. 289. — 222 p.

54. Eriksson-Bique S.-L. A correspondence of hyperholomorphic and monogenic functions in $\mathbb{R}^4$ / S.-L. Eriksson-Bique // Clifford analysis and its applications, NATO Science Series. — 2001. — Vol. 25. — P. 71 – 80.

55. Delanghe R. Differentiability of functions with values in some real associative algebras: approaches to an old problem / R. Delanghe, R. S. Kraußhar, H. R. Malönek // Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège. — 2001. — Vol. 70, № 4-5-6. — P. 231 – 249.

56. Fueter R. Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$ und $\Delta\Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen / R. Fueter // Comment. math. helv. — 1935. — Vol. 7. — P. 307 – 330.

57. Futagawa M. On the theory of functions of a quaternary variable / M. Futagawa // Tohoku Math. Journal. — 1928. — Vol. 29. — P. 175 – 222.

58. Gentili G. A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable / G. Gentili, D. C. Struppa // Comptes Rendus Mathematique. — 2006. — Vol. 342, № 10. — P. 741 – 744.

59. Gentili G. Regular Functions of a Quaternionic Variable / G. Gentili, C. Stoppato, D. Struppa. — Springer Monographs in Mathematics, 2013. — 185 p.

60. Gerus O. F. On the boundary values of a quaternionic generalization of the Cauchy-type integral in $\mathbb{R}^2$ for rectifiable curves / O. F. Gerus, M. Shapiro // J. Natural Geometry. — 2003. — Vol. 24, № 1–2. — P. 121 – 136.

61. Gürlebeck K. Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers / K. Gürlebeck, W. Sprössig . — John Wiley and Sons, 1997 — 363 p.

62. Hamilton W. R. On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions / W. R. Hamilton // Proceedings of the Royal Irish Academy. — 1844. — Vol. 2. — P. 424—434.

63. Hausdorff F. Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen / F. Hausdorff // Leipziger Berichte. — 1900. — Vol. 52. — P. 43 – 61.

64. Hempfling Th. Modified quaternionic analysis in $\mathbb{R}^4$ / Th. Hempfling, H. Leutwiler // Clifford algebras and their appl. in math. physics. — Aachen: Kluwer, Dordrecht. — 1998. — P. 227 – 238.

65. Javtokas A. A bicomplex Hurwitz zeta-function / A. Javtokas // Šiauliai Mathematical Seminar. — 2006. — Vol. 1, № 9. — P. 23 – 31.

66. Joly C. J. A manual of quaternions / C. J. Joly. — London, Macmillan, 1905 — 320 p.

67. Ketchum P. W. Analytic functions of hypercomplex variables / P. W. Ketchum // Trans. Amer. Math. Soc. — 1928. — Vol. 30, № 4. — P. 641 – 667.

68. Ketchum P. W. A complete solution of Laplace's equation by an infinite hypervariable / P. W. Ketchum // Amer. J. Math. — 1929. — Vol. 51. — P. 179 – 188.

69. Kravchenko V. V. Integral representations for spetial models of mathematical physics / V. V. Kravchenko, M. V. Shapiro // Pitman

Research Notos in Mathematics Series 351. — Addison Wesley Longman, 1996. — 247 p.

70. Kumar R. Bicomplex linear operators on bicomplex Hilbert spaces and Littlewood's subordination theorem / R. Kumar, K. Singh // Adv. Appl. Clifford Algebras, Springer Basel. — 2015.

71. Kunz K. S. An algebraic technique for the solution of Laplace's equation in three dimensions / K. S. Kunz // Proc. Camb. Phil. Soc. — 1970. — Vol. 67. — P. 383 – 389.

72. Kunz K. S. Application of an algebraic technique to the solution of Laplace's equation in three dimensions / K. S. Kunz // Siam. J. Appl. Math. — 1971. — Vol. 21, № 3. — P. 425 – 441.

73. Kuzmenko T. Constructive description of G-monogenic mappings in the algebra of complex quaternions / T. Kuzmenko // International scientific conference "Algebraic and geometric methods of analysis", 31 May – 05 June, 2017, Odessa, Ukraine. — P. 67 – 68.

74. Kuzmenko T. S. Curvilinear integral theorem for G-monogenic mappings in the algebra of complex quaternion / T. S. Kuzmenko // Int. J. Adv. Research Math. — Vol. 6. — P. 21 – 25.

75. Kuzmenko T. S. Integral theorems in the algebra of complex quaternions / T. S. Kuzmenko // International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100^{th} Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu. O. Mitropolskiy (1917–2008). June 7 – 10, 2017, Kyiv, Ukraine. Abstracts. — Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2017 — P. 35.

76. Kuzmenko T. S. Generalized integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings / T. S. Kuzmenko, V. S. Shpakivskyi // Ukr. Math. Bull. — 2016. — Vol. 13, № 4. — P. 499 – 513.

77. Kuzmenko T. G-monogenic mappings in the algebra of complex quaternions / T. Kuzmenko // Abstract of 12th ISAAC Congress. — Linnaeus University, Växjö, Sweden, August 14 – 18, 2017. — P. 43.

78. Kuzmenko T. On equvivalence of different definitions of G-monogenic mappings / T. Kuzmenko // Proceedings of XVIII International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, October 7 – 10, 2017, Kyiv: Vol. 1. — Kyiv: NTUU «KPI», 2017. — P. 162 – 165.

79. Kuzmenko T. S. The relation between G-monogenic mappings and partial differential equations / T. S. Kuzmenko // 5th International conference for young scientists on differential equations and applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky, 9 – 11 November, 2016, Kyiv, Ukraine. — Vinnytsia, 2016. — P. 93 – 94.

80. Leutwiler H. Modified quaternionic analysis in $\mathbb{R}^3$ / H. Leutwiler // Complex variables theory appl. — 1992. — Vol. 20. — P. 19 – 51.

81. Leutwiler H. Quaternionic analysis in $\mathbb{R}^3$ versus its hyperbolic modification/ H. Leutwiler // In: "Clifford Analysis and Its Applications" (Eds.: F. Bracks and al.). Kluwer Acad. Pub., 2001. — P. 193 – 211.

82. Lorch E. R. The theory of analytic runction in normed abelin vector rings / E. R. Lorch // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 54. – P. 414 – 425.

83. Luna-Elizarrarás M. E. Bicomplex Numbers and their Elementary Functions / M. E. Luna- Elizarraras, M. Shapiro, D. C. Struppa, A. Vajiac // CUBO A Mathematical Journal. — 2012. — Vol. 14, № 2. — P. 61 – 80.

84. Luna-Elizarrarás M. E. Complex Laplacian and Derivatives of Bicomplex Functions / M. E. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, D. C. Struppa, A. Vajiac // Complex Anal. Oper. Theory. — 2013. — Vol. 7, № 5. — P. 1675 – 1711.

85. Moisil Gr. Functions holomorphes dans l'espace / Gr. Moisil, N. Théodoresco // Mathematica (Cluj). — 1931. — Vol. 5. — P. 142 – 159.

86. Morin U. Bicomplex algebra / U. Morin // Memorie Accademia d'Italia. — 1935. — Vol. 6. — P. 1241 – 1250.

87. Perotti A. Quaternionic regularity and the $\bar{\partial}$-Neumann problem in $\mathbb{C}^2$ / A. Perotti // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2007. — Vol. 52, № 5. — P. 439 – 453.

88. Peirce B. Linear Associative Algebra / B. Peirce // American Journal of Mathematics. — 1881. — Vol. 4, № 1. — P. 97 – 229.

89. Pinotsis D. A. Quaternionic Analysis, Elliptic Problems and a Physical Application of the Dbar Formalism / D. A. Pinotsis // Adv. Appl. Clifford Alg. — 2010. — Vol. 20. — P. 819 – 836.

90. Plaksa S. An infinite-dimensional commutative Banach algebra and spatial potential fields / S. Plaksa // Further progress in analysis: Proc. of 6th International ISAAC Congress, Ankara, 13—18 August, 2007. — World Scientific, 2009. — P. 268—277.

91. Plaksa S. A. Cauchy theorem for a surface integral in commutative algebras / S.A. Plaksa, V.S. Shpakivskyi // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2014. — Vol. 59, № 1. — P. 110–119.

92. Plaksa S. A. Commutative algebras associated with classic equations of mathematical physics / S. Plaksa // Advances in Applied Analysis, Trends in Mathematics, Springer, Basel. — 2012. — P. 177 – 223.

93. Plaksa S. A. Commutative algebras of monogenic functions associated with classic equations of mathematical physic / S. A. Plaksa, S. V. Gryshchuk, V. S. Shpakivskyi // Complex Analysis and Dynamical Systems IV, Contemporary Mathematics. — 2011. — Vol. 553. — P. 245 – 258.

94. Plaksa S. A. Monogenic functions in a finite-dimensional semi-simple commutative algebra / S. A. Plaksa, R. P. Pukhtaevich // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. — 2014. — Vol. 22, № 1. — P. 221 – 235.

95. Portman W. O. A derivative for Hausdorff-analytic functions / W. O. Portman // Proc. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. V, № 10. — P. 101 – 105.

96. Pukhtaievych R.P. Monogenic functions in a three-dimensional harmonic semi-simple algebra / R. P. Pukhtaievych // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування / Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2013. — Т. 10, № 4-5. — С. 352 – 361.

97. Riley J. D. Contributions to the theory of functions of a bicomplex variable / J. D. Riley // Tohoku Math J. — 1953. — Vol. 5, № 2. — P. 132 – 165.

98. Rinehart R. F. Two types of differentiability of functions on algebras / R. F. Rinehart, J. C. Wilson // Rend. Circ. Matem. Palermo. — 1962. — Vol. II, № 11. — P. 204 – 216.

99. Ringleb F. Beiträge zur funktionentheorie in hyperkomplexen systemen, I. / F. Ringleb // Rendiconti del Circolo Materratico di Palermo. — 1933. — Vol. 57, № 1. — P. 311 – 340.

100. Rochon D. On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers / D. Rochon, M. Shapiro // An. Univ. Oradea Fasc. Mat. — 2004. — Vol. 11. — P. 71 – 110.

101. Rönn S. Bicomplex algebra and function theory / S. Rönn // arXiv: math/0101200v1 [math.CV] 24 Jan 2001.

102. Roşculeţ M. N. Algebre infinite associate la ecuaţii cu derivate parţiale, omogene, cu coeficienţi constanţi de ordin oarecare / M. N. Roşculeţ //

Studii şi Cercetări Matematice. — 1955. — Vol. 6, № 3 – 4. — P. 567 – 643. (in Romanian)

103. Roşculeţ M. N. Funcţii monogene pe algebre comutative / M. N. Roşculeţ. — Bucuresti: Acad. Rep. Soc. Romania, 1975. — 339 p. (in Romanian)

104. Ryan J. Dirac operators, conformal transformations and aspects of classical harmonic analysis / J. Ryan // J. of Lie Theory. — 1998. — Vol. 8. — P. 67 – 82.

105. Scheffers G. Verallgemeinerung der Grundlagen der gewohnlich complexen Funktionen / G. Scheffers // Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Mat.–Phys. Kl. — 1983. — Vol. 45. — P. 828 – 848.

106. Schneider B. Some properties of a Cauchy-type integral for the Moisil-Theodoresco system of partial differential equations / B. Schneier // Ukr. Math. J. — 2006. — Vol. 58, № 1. — P. 105 – 112.

107. Scorza-Dragoni G. The analytic functions of a bicomplex variable / G. Scorza-Dragoni // Memorie Accademia d'Italia. — 1934. — Vol. 5. — P. 597 – 607.

108. Segre C. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici / C. Segre // Math. Ann. — 1892. — Vol. 40. — P. 413 – 467. (in Italian)

109. Shpakivskyi V. S. Constructive description of monogenic functions in a finite-dimensional commutative associative algebra / V. S. Shpakivskyi // Adv. Pure Appl. Math. — Vol. 7, № 1. — P. 63 – 74.

110. Shpakivskyi V. S. Curvilinear integral theorems for monogenic functions in commutative associative algebras / V. S. Shpakivskyi // Adv. Appl. Clifford Algebras — Vol. 26, № 1. — P. 417 – 434.

111. Shpakivskyi V. S. Integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings / V. S. Shpakivskyi, T. S. Kuzmenko // An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa. — Vol. 24, № 2. — P. 271 – 281.

112. Sprössig W. Quaternionic analysis and Maxwell's equations / W. Sprößig // CUBO A Math. J. — 2005. — Vol. 7, № 2. — P. 57—67.

113. Sobrero L. Nuovo metodo per lo studio dei problemi di elasticità, con applicazione al problema della piastra forata / L. Sobrero // Ric. Ingegn. — 1934. — Vol. 13, № 2. — P. 255 – 264.

114. Sobrero L. Alcuni teoremi della teoria delle funzioni ipercomplesse / L. Sobrero // Rend. Accad. d. L. Roma. — 1934. — Vol. 6, № 19. — P. 135 – 140.

115. Study E. Uber Systeme complexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen / E. Study // Monatsth. f. Math. u. Physik. — 1890. — Vol. 1. — P. 283 – 354.

116. Sudbery A. Quaternionic analysis / A. Sudbery // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1979. — Vol. 85. — P. 199 – 225.

117. Tait P. G. An elementary treatise on quaternions / P. G. Tait. — Cambridge University Press, 1867. — 422 p.

118. Wagner R. D. The generalized Laplace equations in a function theory for commutative algebras / R. D. Wagner // Duke Math. J. — 1948. — Vol. 15. — P. 455 – 461.

119. Ward J. A. A theory of analytic functions in linear associative algebras / J. A. Ward // Duke Math. J. — 1940. — Vol. 7. — P. 233 – 248.

120. Ward J. A. From generalized Cauchy – Riemann equations to linear algebras / J. A. Ward // Proc. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 4. — P. 456 – 461.