НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БЕЗКРИЛА Світлана Іванівна

УДК 517.5

ПРО МОДУЛІ НЕПЕРЕРВНОСТІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ТА Р-МОНОТОННЕ НАБЛИЖЕННЯ

01.01.01 – математичний аналіз

111 – математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор
ШЕВЧУК Ігор Олександрович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри математичного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
СЕРДЮК Анатолій Сергійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу теорії функцій;

кандидат фізико-математичних наук, професор
ХАРКЕВИЧ Юрій Іліодорович,
Східноєвропейський національний університет
імені Лесі Українки, м. Луцьк,
декан факультету інформаційних систем,
фізики та математики.

Захист дисертації відбудеться «16» жовтня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий «13» вересня 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Романюк А. С.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми. Поняття модуля неперервності було введено А. Лебегом у 1910 р., а С. Н. Бернштейном у 1911 р. було введено поняття модулів неперервності старших порядків. З того часу ці поняття активно узагальнюються, вивчаються і використовуються.

Серед узагальнень поняття класичного модуля неперервності згадаємо інтегральні модулі неперервності, модулі неперервності Діціана-Тотіка, локальні модулі гладкості, усереднені модулі гладкості, односторонні модулі гладкості, модулі гладкості Гаусдорфа-Сендова, модулі неперервності, породжені півгрупою операторів, рівномірні та інтегральні модулі неперервності дробового порядку, спеціальні модулі неперервності функцій комплексної змінної та інші. Властивості класичних та узагальнених модулів неперервності наведено у монографіях О. П. Тімана, В. К. Дзядика, І. О. Шевчука, Б. Сендова і В. Попова, З. Діціана і В. Тотіка, Р. А. де Вора і Ж. Ж. Лоренца, Г. Анастассіу і С. Гала та інших.

Класичні модулі неперервності та їх численні узагальнення активно використовуються у різних розділах теорії функцій та чисельного аналізу: для опису класів і просторів функцій, для отримання прямих і обернених теорем теорії наближень, опису компактних множин у різних просторах функцій, теорії інтерполяційних просторів, для оцінки похибки при чисельному інтегруванні, наближеному розв’язку диференціальних та інтегральних рівнянь та інших. Зокрема, прямі та обернені теореми теорії наближень у випадку наближень алгебраїчними многочленами, тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу, підпросторами власних функцій крайових задач Штурма-Ліувілля та іншими агрегатами, які формулюються у термінах класичних модулів неперервності та їх узагальнень, вивчались у роботах Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, Ш. де ла Валле-Пуссена, Е. Кваде, А. Зиг-мунда, Н. І. Ахієзера, С. Б. Стєчкіна, О. П. Тімана, В. К. Дзядика, Ю. А. Брудного, Г. Фройда, С. М. Нікольського, І. І. Ібрагімова, М. П. Купцова, О. І. Степанця, І. О. Шевчука, В. В. Жука, Г. В. Радзієвського, П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса, Р. Таберського, С. Б. Вакарчука та багатьох інших математиків.

Важливими узагальненнями поняття модуля неперервності були поняття модуля неперервності, породженого півгрупою операторів, що з’явилось у роботі М. П. Купцова, а також модуля неперервності дробового порядку, яке вперше було введено у роботах П. Бутцера і Ю. Вестпхаля, а також П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса і, незалежно, у роботі Р. Таберського для періодичних та неперіодичних функцій, які є неперервними або належать просторам Лебега L_p.

Опис рівномірних модулів неперервності першого порядку було отримано А. Лебегом і С. М. Нікольським. Опис перших інтегральних модулів неперервності для функцій з простору L_2 у випадку однієї змінної було одержано О. В. Бєсовим і С. Б. Стєчкіним, а у випадку багатьох змінних –

С. Б. Вакарчуком і М. Б. Вакарчуком. Для функцій з простору L_2 опис інтегральних модулів неперервності порядку α у випадку $\alpha = m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, було одержано Л. В. Тайковим, а у випадку $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ – С. Б. Вакарчуком. Крім цих випадків, описи інших модулів неперервності, наскільки нам відомо, досі не отримані.

У зв'язку з цим С. В. Конягін пише, що «є цікавими різні необхідні та достатні умови на функцію ω для того, щоб вона збігалась або була близькою до модуля неперервності другого порядку деякої функції». Зауважимо, що сказане є актуальним не тільки стосовно рівномірних модулів другого порядку, а й усіх модулів неперервності, точний опис яких не відомий.

З точністю до порядкової еквівалентності опис рівномірних модулів неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, та інтегральних модулів неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$ отримано у роботах В. Е. Гейта, І. О. Шевчука, В. І. Коляди і Т. В. Радославової. С. В. Тіхонов поширив ці результати на випадок модуля неперервності дробового порядку. Згаданий опис отримано у термінах k -мажорант. Довгий час ні для рівномірних, ні для інтегральних модулів неперервності не було з'ясовано, чи кожна k -мажоранта є модулем неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, деякої функції. Для випадку рівномірних модулів неперервності другого порядку для рівномірно неперервних на дійсній осі функцій негативну відповідь на це питання дав С. В. Конягін.

Об'єднуючи ідеї з роботи М. П. Купцова і роботи П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса, у другому розділі дисертації ми визначаємо модуль неперервності довільного порядку $\alpha > 0$, породжений півгрупою операторів. Його частинними випадками є рівномірний та інтегральний модулі неперервності. Саме робота С. В. Конягіна з одного боку, і роботи М. П. Купцова, П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса з іншого, і були відправними пунктами при отриманні результатів другого розділу дисертації.

Теорія формозберігаючого наближення започаткована у роботах П. Л. Чебишова та С. Н. Бернштейна. Зокрема, П. Л. Чебишов побудував многочлен степеня n із старшим коефіцієнтом ± 1, що має найменшу норму серед усіх монотонних многочленів із старшим коефіцієнтом ± 1. С. Н. Бернштейн поширив цей результат на многочлени, що мають невід'ємну k -у похідну.

Сучасна теорія формозберігаючого наближення бере свої витоки з робіт Г. Г. Лоренца та К. Л. Целлера (1968, 1969). Починаючи з цих робіт, досліджується питання, чи є вірними класичні оцінки наближення без обмежень для формозберігаючого наближення. Цьому напрямку присвячені статті Р. К. Бітсона, Р. А. де Вора, Г. А. Дзюбенка, Я. Гілевича, Д. Левіатана, І. О. Шевчука, О. С. Шведова, Ю. Ху, Х. Ву, А. В. Бондаренка, А. В. Примака, З. Діціана, К. А. Копотуна та багатьох інших. За останні 20 років відбувся суттєвий просув у цій тематиці, але ще залишилася низка важливих питань, відповідь на які є невідомою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математичного аналізу та диференціальних рівнянь

Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова у рамках держбюджетної теми «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (номер державної реєстрації 0113U003005).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є спростування відомої гіпотези про те, що кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку якоїсь функції, а також посилення на порядок контрприкладу про те, що при кусково p-монотонному, $p \geq 4$, наближенні алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, залежною від функції, яку наближають.

Об'єкт дослідження – модулі неперервності вищих порядків, а також величина найкращого кусково p-монотонного наближення алгебраїчними многочленами.

Предмет дослідження – нерівності для модулів неперервності вищих порядків, зв'язок між k-мажорантами та модулями неперервності k-го порядку, а також оцінки величини найкращого рівномірного кусково p-монотонного наближення алгебраїчними многочленами.

Завдання дослідження:

1. Довести, що не кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку при $k \geq 3$. Поширити це твердження на модулі неперервності дробового порядку.

2. Встановити нові нерівності для модулів неперервності k-го та дробового порядків, породжених півгрупою операторів.

3. Посилити твердження про те, що для кусково p-монотонного, $p \geq 4$, наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, залежною від функції, яку наближають.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи математичного аналізу, функціонального аналізу та теорій функцій, зокрема, класичні та сучасні методи теорії наближення функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, одержані у дисертаційній роботі, є новими і наведені з повним доведенням. Основними результатами, що виносяться на захист, є наступні:

1. Доведено, що не кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку при $k \geq 3$. Це твердження поширено на модулі неперервності дробового порядку. При цьому розглядаються модулі неперервності, породжені півгрупою операторів.

2. Встановлено нові нерівності для модулів неперервності k-го та дробового порядків, породжених півгрупою операторів.

3. Посилено твердження про те, що для кусково p-монотонного, $p \geq 4$, наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, залежною від функції, яку наближають.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань математичного аналізу, теорії наближень тощо.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належить науковому керівникові – докторові фізико-математичних наук, професору І. О. Шевчуку. Результати, що наведені у розділі 2, отримані спільно з кандидатом фізико-математичних наук О. Н. Нестеренком та доктором фізико-математичних наук, доцентом А. В. Чайковським, внесок співавторів є рівноцінним. Результати розділу 3 отримано автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на семінарі відділу теорії функцій Інституту математики НАН України (керівник семінару – доктор фізико-математичних наук, професор А. С. Романюк); семінарі кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (керівник семінару – доктор фізико-математичних наук, професор В. К. Маслюченко); семінарі кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (керівник семінару – доктор фізико-математичних наук, професор Г. М. Торбін), семінарі «Сучасний аналіз» механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники семінару – доктори фізико-математичних наук, професори І. О. Шевчук, О. О. Курченко та В. М. Радченко), а також на таких міжнародних конференціях: «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь» з нагоди 80-річчя М. І. Шкіля (Київ, 13-14 грудня 2012 року); «Боголюбовські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка (Севастополь, 23-30 червня 2013 року); XI Міжнародній науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна» (Київ, 18-22 березня 2013 року); XII Міжнародній науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна» (Київ, 25-28 березня 2014 року); XV Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, (Київ, 15-17 травня 2014 року); «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 75-річчя В. П. Моторного (Дніпропетровськ, 8-11 жовтня 2015); XVII Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 19-20 травня 2016 року); «Теорія наближення функцій та її застосування», присвяченій 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 року); «Workshop on approximation theory, dedicated to the 70th anniversary of professor Igor Shevchuk» (Київ, 14 червня, 2017 року); XVIII Міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, присвяченій 125-й річниці від дня народження М. Кравчука (Луцьк-Київ, 7-10 жовтня 2017 року).

Публікації. Основні результати дисертації викладено у 14 наукових публікаціях, серед яких 9 тез доповідей на міжнародних конференціях [6-14] і 5 статей [1-5] у фахових виданнях та журналах, що індексуються міжнародними наукометричними базами Scopus [2, 4] та Web of Science [2].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційне дослідження складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить

122 найменування. Повний обсяг дисертації складає 140 сторінок, з них список використаних джерел займає 14 сторінок.

Автор висловлює щиру вдячність своєму науковому керівникові – доктору фізико-математичних наук Ігорю Олександровичу Шевчуку за постановку задач, постійну увагу, корисні зауваження, підтримку та допомогу у роботі.

Основний зміст дисертації

У *вступі* подається обґрунтування актуальності теми, висвітлюються мета і завдання дослідження, методи дослідження, наукова новизна отриманих результатів, особистий внесок здобувача, апробація матеріалів дисертації, структура та обсяг дисертації, зв'язок роботи з науковими темами.

У *першому розділі* зроблено огляд літератури за темою дисертації.

У *другому розділі* доведено, що не кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку, а також отримано узагальнення цього твердження на випадок модулів неперервності порядку α при не цілих α; при цьому розглядаються модулі неперервності, породжені півгрупою операторів, і для них встановлюються нові нерівності.

У підрозділі 2.1 наведено означення модулів неперервності дробового порядку, породжених півгрупою операторів, їх приклади та елементарні властивості, а також приклад нерівності для модулів неперервності порядку α, яка виконується при цілих α, але є хибною для не цілих α.

Нехай X – лінійний простір, $\{T_h : h \ge 0\}$ – однопараметрична сім'я лінійних операторів $T_h : X \to X$, $h \ge 0$, яка утворює півгрупу, тобто $T_0 = I$ – одиничний оператор і $T_{h_1+h_2} = T_{h_1}T_{h_2}$ для довільних $h_1 \ge 0$ і $h_2 \ge 0$. Нехай також існує лінійна множина $Y \subset X$, на якій введено норму $\|\cdot\|$, відносно якої простір Y є банаховим, причому для всіх $f \in X$ і $h \ge 0$ має місце включення $(T_h - I) f \in Y$ і $\|T_h f - f\| \to 0,\ h \to 0$. Тоді $T_h f \in Y$ для всіх $h \ge 0$ і $f \in Y$, тобто $T_h : Y \to Y$. Припустимо також, що для кожного $h \ge 0$ звуження оператора T_h на простір Y, яке ми позначимо $\tilde{T}_h$, є неперервним оператором і його норма $\|\tilde{T}_h\| \le 1$.

Якщо $X = Y$ – банахів простір, то півгрупа $\{T_h : h \ge 0\}$, що задовольняє наведені припущення, називається ***стискуючою півгрупою*** класу (C_0). Для півгруп класу (C_0) поняття k-го модуля неперервності для натуральних k розглядалось у роботі М. П. Купцова. Для таких півгруп аналогічно до роботи П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса можна означити поняття модуля неперервності порядку $\alpha > 0$, враховуючи, що $C_\alpha^0 := 1$,

$$C_\alpha^j := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!},\ j \ge 1.$$

Означення 2.1. Якщо $X = Y$ – банахів простір, $\{T_h : h \ge 0\}$ – стискуюча півгрупа класу (C_0), число $\alpha > 0$, то функція

$$\omega_\alpha(t) := \omega_\alpha(f, t) := \sup_{h \in [0,t]} \left\| (I - T_h)^\alpha f \right\|, \ t \ge 0, \tag{1}$$

де

$$(I - T_h)^\alpha f := \sum_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j T_h^j f, \tag{2}$$

називається ***модулем неперервності елемента*** $f \in Y$ ***порядку*** $\alpha > 0$ ***, породженим півгрупою*** $\{T_h : h \ge 0\}$.

За умов означення 2.1 ряд (2) збігається в Y, отже, це означення коректне. При цьому для $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ справджується рівність

$$(I - T_h)^{\alpha+\beta} = (I - T_h)^\alpha (I - T_h)^\beta. \tag{3}$$

Нехай тепер $X \ne Y$. Якщо $f \in X$, то за припущенням елемент $g := (I - T_h) f \in Y$. Якщо $\alpha > 1$ і у ряді (2) замінити α на $\alpha - 1$ та f на g, то отриманий ряд збігається в Y і рівність

$$(I - T_h)^\alpha f := (I - T_h)^{\alpha-1} g = (I - T_h)^{\alpha-1} (I - T_h) f \tag{4}$$

визначає елемент з Y. При цьому ***модулем неперервності елемента*** $f \in X$ ***порядку*** $\alpha \ge 1$ ***, породженим півгрупою*** $\{T_h : h \ge 0\}$, називається функція, визначена формулою (1) (означення 2.2).

Зі співвідношення (3) випливає, що оператор $(I - T_h)^\alpha$, визначений на X рівністю (4), є розширенням оператора, визначеного на Y формулою (2). Тому для елемента $f \in Y$ його модуль неперервності порядку $\alpha \ge 1$, визначений за означенням 2.1, збігається з модулем неперервності порядку α, визначеним згідно з означенням 2.2.

Якщо $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то модуль неперервності елемента $f \in X$ порядку $\alpha = k$ називається **k-тим модулем неперервності елемента** $f \in X$, при цьому і у випадку $X = Y$, і у випадку $X \ne Y$ справджується рівність

$$(I - T_h)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j T_h^j,$$

тобто ряд (2) перетворюється у скінченну суму.

У **прикладах 1 – 3** T_h–оператор зсуву на $h > 0$, визначений на функціях виду $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рівністю $(T_h f)(x) := f(x + h)$, $x \in \mathbb{R}$. При цьому для всіх $k \in \mathbb{N}$

$$(T_h^k f)(x) = f(x + kh), \ \left((T_h - I)^k f\right)(x) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j f(x + jh) =: \Delta_h^k(f, x),$$

де $\Delta_h^k(f, x)$ – k-та скінченна різниця функції f у точці $x \in \mathbb{R}$ з кроком $h > 0$.

Приклад 1. Нехай $X = Y$ – це або $UC_b(\mathbb{R})$ – простір обмежених рівномірно неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, або $\tilde{C}$ – простір неперервних 2π-

періодичних функцій; у кожному з цих просторів розглядається рівномірна норма. Тому $\{T_h : h \geq 0\}$ – стискуюча півгрупа класу (C_0) у просторі X. Якщо $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то k-тий модуль неперервності, породжений цією півгрупою, є рівномірним k-тим модулем неперервності функції $f \in X$.

Приклад 2. Нехай $X = Y$ – це або $L_p(\mathbb{R})$ – простір вимірних за Лебегом інтегровних у p-тому степені функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з нормою $\|f\| := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$, $f \in L_p(\mathbb{R})$, або $\tilde{L}_p$ – простір вимірних за Лебегом 2π-періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, інтегровних у p-тому степені на $[0, 2\pi]$, з нормою $\|f\| := \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$, $f \in \tilde{L}_p$, $1 \leq p < +\infty$. Тоді $\{T_h : h \geq 0\}$ – також стискуюча півгрупа класу (C_0) у просторі X. Якщо $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то k-тий модуль неперервності, породжений цією півгрупою, є інтегральним k-тим модулем гладкості функції $f \in X$.

Якщо $X = \tilde{C}$ (у прикладі 1) або $X = \tilde{L}_p$ (у прикладі 2), то модуль неперервності порядку $\alpha > 1$, породжений цією півгрупою, розглядався у роботі П. Л. Бутцера, Г. Дикгофа, Е. Герліча, Р .Л. Стенса.

Приклад 3. Нехай $X = UC(\mathbb{R})$ – лінійний простір рівномірно неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Y = UC_b(\mathbb{R})$ з рівномірною нормою. Тоді $X \neq Y$, але $\{T_h : h \geq 0\}$ – півгрупа операторів, що задовольняє вимоги, наведені на початку цього підрозділу, а k-тий модуль неперервності, породжений цією півгрупою, при $k = 2, 3, 4$ є модулем неперервності, який розглядався у роботі С. В. Конягіна та роботах автора [2, 1] відповідно.

Наступна лема 2.1 у частинних випадках добре відома, однак у загальному випадку у літературі нами знайдена не була, тому для повноти викладу наводиться з повним доведенням.

Лема 2.1. *Нехай виконується одна з умов: i) $X = Y$ – банахів простір, $\{T_h : h \geq 0\}$ – стискуюча півгрупа класу (C_0), $\alpha > 0$; ii) $X \neq Y$, $\{T_h : h \geq 0\}$ – півгрупа операторів в X, яка є стискуючою півгрупою класу (C_0) в Y, $\alpha \geq 1$. Нехай також $f \in X$, $\omega(\cdot) = \omega_\alpha(f, \cdot)$ – модуль неперервності елемента $f \in X$ порядку α, породжений півгрупою $\{T_h : h \geq 0\}$. Тоді мають місце такі властивості:*

1) $\omega(0) = 0$;

2) функція ω є неспадною на $[0, +\infty)$;

3) функція ω є неперервною на $[0, +\infty)$;

4) якщо $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то $\omega(n\delta) \leq n^k \omega(\delta)$ для довільних $\delta \geq 0$ і $n \in \mathbb{N}$.

Зауваження. Для $\alpha = k \in \mathbb{N}$ і невід'ємних функцій $\omega:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ умова 4) випливає з наступної умови 5):

5) функція $(0,+\infty) \ni \delta \mapsto \omega(\delta)/\delta^{\alpha}$ *монотонно не зростає на* $(0,+\infty)$.

Приклад 4 показує, що нерівність з умови 4) для не цілих α, взагалі кажучи, хибна. Дійсно, нехай $X = Y$ – банахів простір обмежених рівномірно неперервних на $[0,+\infty)$ функцій $f:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ з рівномірною нормою, $(T_h f)(x) = f(x+h), x \geq 0$, $h \geq 0$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$ і $f(x) = 1 - \dfrac{1}{3}x$, $x \in [0,1]$, $f(x) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}x$, $x \in (1,2]$, $f(x) = 0$, $x > 2$.Тоді для породженого півгрупою $\{T_h : h \geq 0\}$ модуля неперервності при $n = 2$ і $t = 1$ нерівність $\omega_\alpha(f, nt) \leq n^\alpha \omega_\alpha(f,t)$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, хибна, тобто

$$\omega_{\frac{1}{2}}(f,2) > \sqrt{2}\,\omega_{\frac{1}{2}}(f,1).$$

У підрозділі 2.2 наводяться постановка задачі, що розв'язується у розділі 2, та формулювання основного результату.

Означення. Функції, що задовольняють умови 1) – 3) і 5) (див. лему 2.1 і зауваження після неї), називаються k***-мажорантами.***

Професор І. О. Шевчук звернув увагу на таке питання: чи правильно, що кожна k-мажоранта на деякому відрізку $[0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$, є рівномірним модулем неперервності k-го порядку якоїсь функції?

Розглядатимемо також більш загальне питання: чи правильно, що кожна k-мажоранта на деякому відрізку $[0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$, є модулем неперервності k-го порядку, породженим півгрупою операторів, для якогось елемента $f \in X$?

При $k = 1$ для рівномірного модуля неперервності (зокрема, за умов прикладу 1 чи прикладу 3) позитивна відповідь на це питання помічена ще С. М. Нікольським. За умов прикладу 3 негативну відповідь на це питання при $k = 2$ дав С. В. Конягін, а при $k = 3$ і $k = 4$ – автор [2, 1]. У роботі [4] дано негативну відповідь на поставлене питання для всіх $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, та довільного лінійного простору, що задовольняє умови, наведені на початку пункту 2.1 (зокрема, за умов усіх прикладів $1-3$). У статті [5] цей результат узагальнюється на випадок не цілих α.

Наведемо основний результат другого розділу.

Теорема 2.1. *Нехай виконується одна з умов:*

i) $X = Y$ *– банахів простір,* $\{T_h : h \geq 0\}$ *– стискуюча півгрупа класу* (C_0),

$$\alpha \in \{2\} \cup [3,+\infty),\ \gamma(\alpha) = \begin{cases} \alpha - 1, \ \alpha \in \mathbb{N}, \ \alpha \geq 2, \\ \alpha - \dfrac{1}{2}, \ \alpha \in [3,+\infty) \setminus \mathbb{N}; \end{cases}$$

ii) $X \ne Y$, $\{T_h : h \ge 0\}$ – *півгрупа операторів в* X , *яка є стискуючою півгрупою класу* (C_0) *в* Y , $\alpha \in \{2; 3\} \cup [4, +\infty)$, $\gamma(\alpha) = \begin{cases} \alpha - 1, \ \alpha \in \mathbb{N}, \ \alpha \ge 2, \\ \alpha - \dfrac{1}{2}, \ \alpha \in [4, +\infty) \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$

Тоді для довільного числа $\beta > \gamma(\alpha)$ *існує така функція* $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *не тотожно рівна нулю, що задовольняє умови 1) – 3) леми 2.1, причому функція* $(0, +\infty) \ni \delta \mapsto \omega(\delta) / \delta^{\beta}$ *є незростаючою на* $(0, +\infty)$ *і для жодного елемента* $f \in X$ *не виконується рівність*

$$\lim_{\delta \to 0+} \omega_\alpha(f, \delta) / \omega(\delta) = 1.$$

Для отримання цього результату ми у цілому повторюємо міркування з роботи С. В. Конягіна, але при цьому застосовуємо нову техніку для отримання допоміжних нерівностей: теореми 2.2, яка встановлює допоміжну нерівність для k -го модуля неперервності у випадку $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, і теореми 2.3, яка встановлює допоміжну нерівність у випадку, коли α не обов'язково ціле.

У підрозділі 2.3 встановлюється допоміжна нерівність для k -го модуля неперервності у випадку $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$.

Теорема 2.2. *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $f \in X$, $\omega_k(f, \cdot)$ – k *-тий модуль неперервності, породжений півгрупою* $\{T_h : h \ge 0\}$. *Тоді*

$$2\omega_k(f, nt) \le \omega_k(f, (n+1)t) + \omega_k(f, (n-1)t) + 2(2^k - 1)n^{k-2}\omega_k(f, t), \, t > 0.$$

Наслідок 2.1. *Нехай* $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $\omega := \omega_k(f, \cdot)$ *-тий модуль неперервності, породжений півгрупою* $\{T_h : h \ge 0\}$, $\omega(t) / t^{k-1} \to 0$ *при* $t \to 0+$, *а також у точці* $t_0 > 0$ *функція* ω *має односторонні похідні* $\omega'_-(t_0)$ *і* $\omega'_+(t_0)$. *Тоді* $\omega'_-(t_0) \le \omega'_+(t_0)$.

Наслідок 2.2. *Для довільного* $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, *функція* $\varphi(t) = t^k$, $t \in [0, 1/2]$, $\varphi(t) = 1/2^k$, $t > 1/2$, *задовольняє умови 1) – 3) і 5) (див. лему 2.1 і зауваження після неї), але не є модулем неперервності* k *-го порядку жодного з елементів* $f \in X$.

У підрозділі 2.4 встановлюється допоміжна нерівність для модуля неперервності порядку α у випадку, коли α не обов'язково ціле. При цьому для цілих α вона є менш точною, ніж нерівність з теореми 2.2.

Теорема 2.3. *Нехай виконується одна з умов: i)* $X = Y$ – *банахів простір,* $\{T_h : h \ge 0\}$ – *стискуюча півгрупа класу* (C_0), $\alpha \ge 3$ *; ii)* $X \ne Y$, $\{T_h : h \ge 0\}$ – *півгрупа операторів в* X , *яка є стискуючою півгрупою класу* (C_0) *в* Y , $\alpha \ge 4$. *Нехай також* $f \in X$, $\omega_\alpha(f, \cdot)$ – *модуль неперервності порядку* α , *породжений півгрупою* $\{T_h : h \ge 0\}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді*

$$2\omega_\alpha(f, nt) \le \omega_\alpha(f, (n+1)t) + \omega_\alpha(f, (n-1)t) + C_n\omega_\alpha(f, t), \ t > 0, \qquad (2.15)$$

де C_n – стала, що залежить лише від α і n, причому $C_n = O\left(n^{\alpha-\frac{3}{2}}\right)$, $n \to \infty$.

У підрозділі 2.5 наводиться доведення теореми 2.1.

У підрозділі 2.6 наводяться доведення нерівностей, які уточнюють допоміжну нерівність з теореми 2.2 для третього і четвертого рівномірних модулів неперервності (тобто за умов прикладу 3 з підрозділу 2.1). Ці доведення використовують «класичне» означення рівномірного модуля неперервності, яке дається за допомогою скінченних різниць третього та четвертого порядків.

Теорема 2.3. *Для функції $f \in UC(\mathbb{R})$ її рівномірний модуль неперервності третього порядку $\omega_3(f,\cdot)$ для всіх $t>0$ і $n \in \mathbb{N}$ задовольняє нерівність*

$$2\omega_3(f,nt) \le \omega_3(f,(n+1)t) + \omega_3(f,(n-1)t) + 6n\omega_3(f,t).$$

Теорема 2.4. *Для функції $f \in UC(\mathbb{R})$ її рівномірний модуль неперервності четвертого порядку $\omega_4(f,\cdot)$ для всіх $t>0$ і $n \in \mathbb{N}$ задовольняє нерівність*

$$2\omega_4(f,nt) \le \omega_4(f,(n+1)t) + \omega_4(f,(n-1)t) + \left(12n^2+2\right)\omega_4(f,t).$$

У *третьому розділі* на порядок посилено контрприклад, який показує, що для кускового p -монотонного $(p \ge 4)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, залежною від функції, яку наближають.

Нехай $C[a,b]$ – простір неперервних на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функцій з рівномірною нормою, $C^r[a,b]$ позначає простір r разів неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій.

Нехай Y_s , $s \in \mathbb{N}$, – набір з $(s+2)$ -ох точок $y_i \in [-1,1]$, $-1 = y_{s+1} < \ldots < y_1 < y_0 = 1$. Якщо $p \in \mathbb{N}$, то $\Delta^p(Y_s)$ є множиною функцій $f \in C[-1,1]$ таких, що $f^{(p)}(x) \ge 0$, $x \in (y_{i+1}, y_i)$, для парних i та $f^{(p)}(x) \le 0$, $x \in (y_{i+1}, y_i)$, для непарних i . Функції $f \in \Delta^p(Y_s)$ називаються ***кусково p -монотонними***.

Нехай W^r – соболевський клас функцій $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$, для яких на $[-1,1]$ існує абсолютно неперервна $(r-1)$-ша похідна і таких, що $\left\|f^{(r)}\right\| \le 1$, де $r \in \mathbb{N}$ і $\|g\| := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in [-1,1]} |g(x)|$. Якщо $g \in C[-1,1]$, то $\|g\| = \max_{x \in [-1,1]} |g(x)|$.

Нехай $\mathcal{P}_n$ – простір алгебраїчних многочленів степеня $\le n$. Для $f \in \Delta^p(Y_s)$ позначимо

$$E_n^p(f,Y_s) := \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n \cap \Delta^p(Y_s)} \|f - P_n\|$$

величину найкращого кусково p -монотонного наближення алгебраїчними многочленами степеня не вище n, $n \in \mathbb{N}$.

У роботі Л. П. Ющенко побудовано контрприклад, який показує, що для кусково p -монотонного $\left(p \geq 4\right)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна з похідною $r \geq p$ є хибною, навіть якщо константа залежить від функції, яку наближають. У цьому розділі побудовано новий контрприклад, який на порядок посилює результат Л. П. Ющенко та узагальнює на випадок $p \geq 4$ відповідний результат з роботи Д. Левіатана та І. О. Шевчука, одержаний для випадку $p = 3$. Основним результатом третього розділу є

Теорема 3.1. *Для будь-яких* $p \geq 3$, $r \geq p$, *довільного набору точок* Y_s *та кожної послідовності* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \geq 0$, *такої, що* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,\alpha_n = +\infty$, *існує функція* $f \in \Delta^p\left(Y_s\right) \cap W^r$ *така, що*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\alpha_n\,E_n^{(p)}\left(f, Y_s\right) n^{r-p+2} = +\infty.$$

Доведення, цієї теореми отримане методами роботи Д. Левіатана та І. О. Шевчука, наводиться у підрозділі 3.2.

Висновки

У дисертаційній роботі проведено дослідження модулів неперервності вищих та дробових порядків, породжених півгрупою операторів, а також побудовано контрприклад для кусково p -монотонного $\left(p \geq 4\right)$ наближення алгебраїчними многочленами.

1. Доведено, що не кожна k -мажоранта є модулем неперервності k -го порядку при $k \geq 3$. Це твердження поширене на модулі неперервності дробового порядку. При цьому розглядаються модулі неперервності, породжені півгрупою операторів.

2. Встановлено нові нерівності для модулів неперервності k -го та дробового порядків, породжених півгрупою операторів.

3. Посилено твердження про те, що для кусково p -монотонного $p \geq 4$, наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, залежною від функції, яку наближають.

Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань математичного аналізу, теорії наближень тощо.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. *Безкрила С. І.* Про четвертий модуль неперервності / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. – 2012. – № 13 (1). – С. 45 – 50.

2. *Безкрила С. І.* Про треті модулі неперервності / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, 10. – С. 1412 – 1416. (English translation: *Bezkryla S. I.* On the third moduli of continuity / S. I. Bezkryla, O. N. Nesterenko and A. V. Chaikovs'kyi // Ukrainian Mathematical Journal – 2015. – **66**, 10. – P. 1589 – 1594).
3. *Безкрила С. І.* Про оцінки типу Джексона-Стєчкіна для кусково q-опуклого наближення функцій / С. І. Безкрила // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 2016. – № 36. – С. 6 – 10.
4. *Bezkryla S. I.* On high orders moduli of continuity generated by semigroups of operators / S. I. Bezkryla, O. N. Nesterenko and A. V. Chaikovs'kyi // Jaen Journal on Approximation – 2016. – **8**, 2. – P. 183 – 190.
5. *Безкрила С. І.* Про модулі неперервності дробового порядку, породжені півгрупою операторів / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 2017. – № 1(37). – С. 6 – 9.
6. *Безкрила С. І.* Про k-мажоранту і модуль неперервності / С. І. Безкрила // Матеріали міжнародної конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь», з нагоди 80-річчя М. І. Шкіля 13-14 грудня 2012. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. – С. 42 – 43.
7. *Бескрылая С. И.* О третьих модулях непрерывности / С. И. Безкрылая, А. Н. Нестеренко, А. В. Чайковский // Міжнародна математична конференція «Боголюбівські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2013. – С. 217 – 218.
8. *Безкрила С. І.* Про одну нерівність для третього модуля неперервності / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // Матеріали XI Міжнародної наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна», 18-22 березня 2013: Тези доповідей. – Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2013. – С. 101.
9. *Безкрила С. І.* Про четвертий модуль неперервності / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // XV Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 15-17 травня 2014: Тези доповідей. – Київ: Національний технічний університет України КПІ, імені Ігоря Сікорського, 2014. – С. 43 – 45.
10. *Безкрила С. І.* Про одну нерівність для четвертого модуля неперервності / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // Матеріали XII Міжнародної наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна», 25-28 березня 2014: Тези доповідей. – Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. – С. 220 – 221.
11. *Безкрила С. І.* Про модулі неперервності старших порядків, породжених півгрупою операторів / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // Міжнародна наукова конференція «Теорія

наближень і її застосування» з нагоди 75-річчя В. П. Моторного, 8-11 жовтня 2015: Тези доповідей. – Дніпропетровськ: Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, 2015. – С. 13.

12. *Безкрила С. І.* Про оцінки типу Джексона-Стєчкіна для кусково q-опуклого наближення функцій / С. І. Безкрила // XVII Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, 19-20 травня 2016: Тези доповідей. – Київ: Національний технічний університет України КПІ, імені Ігоря Сікорського, 2016. – С. 42 – 43.
13. *Безкрила С. І.* Про модулі неперервності дробового порядку, породжені півгрупою операторів / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця, 28 травня – 3 червня 2017: Тези доповідей. – Слов'янськ: Донбаський державний педагогічний університет, 2017. – С. 42.
14. *Безкрила С. І.* Про одну нерівність для модулів неперервності дробового порядку, породжених півгрупою операторів / С. І. Безкрила, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський // XVIII Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-й річниці від дня народження М. Кравчука, 7-10 жовтня 2017: Тези доповідей. – Луцьк-Київ: Національний технічний університет України КПІ. імені Ігоря Сікорського, 2017. – С. 168 – 169.

Анотації

Безкрила С.І. ***Про модулі неперервності вищих порядків та р-монотонне наближення.*** *– Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.*

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – «Математичний аналіз» (111 – математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена дослідженню модулів неперервності вищих та дробових порядків, породжених півгрупою операторів, а також побудові контрприкладів для кусково p-монотонного $(p \ge 4)$ наближення алгебраїчними многочленами.

Введено означення модулів неперервності дробового порядку, породжених півгрупою операторів, їх приклади та елементарні властивості, а також побудовано приклад нерівності для модулів неперервності порядку α, яка виконується при цілих α, але є хибною для не цілих α. Доведено , що не кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку при $k \ge 3$, а також поширено це твердження на модулі неперервності дробового порядку. Цей результат є узагальненням відповідного твердження при $k = 2$, отриманого для рівномірних модулів неперервності С. В. Конягіним. Ключовим моментом для його доведення є встановлення допоміжної нерівності певного виду. У дисертації отримано таку допоміжну нерівність для модуля неперервності

порядку α у випадку, коли α не обов'язково ціле. Встановлено також посилення цієї нерівності для k-го модуля неперервності у випадку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. У свою чергу, у випадках третього і четвертого рівномірних модулів неперервності одержано уточнення загальної нерівності для k-го модуля неперервності.

Побудовано новий контрприклад, який показує, що для кусково p-монотонного $(p \geq 4)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна з похідною $r \geq p$ є хибною, навіть якщо константа залежить від функції, яку наближають. Цей результат посилює відомий результат Л. П. Ющенко та узагальнює на випадок $p \geq 4$ відповідний результат з роботи Д. Левіатана та І. О. Шевчука, одержаний для випадку $p = 3$.

Ключові слова: модуль неперервності вищого порядку, модуль неперервності дробового порядку, півгрупа операторів, кусково p-монотонне наближення, нерівність типу Джексона-Стєчкіна.

Бескрылая С.И. ***О модулях непрерывности высших порядков и p-монотонном приближении.*** *– Квалификационная научная работа на правах рукописи.*

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «Математический анализ» (111 – математика). – Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена исследованию модулей непрерывности высших и дробных порядков, порожденных полугруппой операторов, а также построению контрпримеров для кусочно p-монотонного $(p \geq 4)$ приближения алгебраическими многочленами.

Приведено определение модулей непрерывности дробного порядка, породженных полугруппой операторов, их примеры и элементарные свойства, а также построен пример неравенства для модулей непрерывности порядка α, которое выполняется при целых α и не выполняется для не целых α. Основной результат второго раздела диссертации – доказательство того, что не каждая k-мажоранта является модулем непрерывности k-го порядка при $k \geq 3$, а также перенесение этого утверждения на модули непрерывности дробного порядка. Этот результат представляет собой обобщение соответствующего утверждения при $k = 2$, полученного для равномерных модулей непрерывности С. В. Конягиным. Ключевым моментом при его доказательстве является установление некоторого вспомогательного неравенства специального вида. В диссертации получено такое вспомогательное неравенство для модуля непрерывности порядка α в случае, когда α не обязательно целое. Установлено также усиление этого неравенства для k-го модуля непрерывности в случае $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. В свою очередь, для третьего и четвертого равномерных модулей непрерывности получено уточнение общего неравенства для k-го модуля непрерывности. Доказательства этих уточненных неравенств используют «классическое» определение равномерного модуля

непрерывности, которое дается с помощью конечных разностей третьего и четвертого порядков.

Построен новый контрпример, показывающий, что для кусочно p-монотонного $(p \ge 4)$ приближения алгебраическими многочленами неравенство типа Джексона-Стечкина с производной $r \ge p$ не имеет места даже с константой, зависящей от приближаемой функции. Этот результат усиливает известный результат Л. П. Ющенко и обобщает на случай $p \ge 4$ соответствующий результат работы Д. Левиатана и И. А. Шевчука, полученный для $p = 3$.

Ключевые слова: модуль непрерывности высшего порядка, модуль непрерывности дробного порядка, полугруппа операторов, кусочно p-монотонное приближение, неравенство типа Джексона-Стечкина.

Bezkryla S. I. On high orders moduli of continuity and p-monotonic approximation. – The Manuscript.

A thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.01.01 – «Mathematical Analysis» (111 – Mathematics). – Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of some questions on the moduli of continuity of higher and fractional orders generated by a semigroup of operators, and also to construction of counterexamples for piecewise p-monotonic, $(p \ge 4)$ approximation by algebraic polynomials.

We give the definition of moduli of continuity of fractional order, of the semigroups of operators, their examples and elementary properties, and an example of an inequality for moduli of continuity of order α that holds for integers α and does not hold for non-integers α. The main result of the second section of the thesis is the proof that not every k-majorant is a modulus of continuity of the k-th order for $k \ge 3$, but also the transfer of this assertion to moduli of continuity of fractional order. This result is a generalization of the corresponding statement for $k = 2$, obtained by S. V. Konyagin for uniform moduli of continuity. The key moment in its proof is the establishment of some auxiliary inequality of a special kind. In the thesis, an auxiliary inequality is obtained for the modulus of continuity of order α in the case when there is not necessarily an integer α. The strengthening of this inequality is also established for the k-th modulus of continuity in the case $k \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$. In turn, for the third and fourth uniform moduli of continuity, we obtain a refinement of the general inequality for the k-th modulus of continuity. The proofs of these refined inequalities use the «classical» definition of the uniform modulus of continuity, which is given by finite differences of the third and fourth orders.

A new counterexample is constructed showing that for a piece-wise p-monotonic, $(p \ge 4)$ approximation by algebraic polynomials an inequality of Jackson-Stechkin type with the derivative $r \ge p$ does not hold even with a constant depending on the approximated function. This result strengthens the well-known result of L. P. Yushchenko and generalizes for the case $p \geq 4$ the corresponding result of the paper by D. Leviathan and I. A. Shevchuk obtained for $p = 3$.

Key words: modulus of continuity of higher order, modulus of continuity of fractional order, semigroup of operators, piecewise p-monotonic approximation, inequality of Jackson-Stechkin type.

Підписано до друку 06.09.2018. Формат 60 × 84/ 16.
Папір офсетний. Гарнітура Times.
Наклад 100 прим. Зам. № 252
Віддруковано з оригіналів

Видавництво Національного педагогічного університету
імені М.П. Драгоманова. 01601, м. Київ-30, вул. Пирогова, 9
Свідоцтво про реєстрацію № 1101 від 29.10.2002.
(044)239-30-26