Міністерство освіти і науки України
Національний педагогічний університет
імені М.П. Драгоманова
Національна академія наук України
Інститут математики

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

БЕЗКРИЛА СВІТЛАНА ІВАНІВНА

УДК 517.5

ДИСЕРТАЦІЯ

ПРО МОДУЛІ НЕПЕРЕРВНОСТІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ТА p-МОНОТОННЕ НАБЛИЖЕННЯ

01.01.01 – Математичний аналіз
111 – Математика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело __________________С.І. Безкрила

Науковий керівник:
ШЕВЧУК Ігор Олександрович
доктор фізико-математичних наук,
професор

Київ – 2018

АНОТАЦІЯ

Безкрила С.І. *Про модулі неперервності вищих порядків та p-монотонне наближення. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.*

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – «Математичний аналіз» (111 – Математика). – Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертація присвячена дослідженню модулів неперервності вищих та дробових порядків, породжених півгрупою операторів, а також побудові контрприкладів для кусково p-монотонного $\left(p \geq 4\right)$ наближення алгебраїчними многочленами.

У вступі подається обґрунтування актуальності теми, мета і завдання дослідження, методи дослідження, наукова новизна отриманих результатів, особистий внесок здобувача, апробація матеріалів дисертації, структура та обсяг дисертації, зв'язок роботи з науковими темами.

У першому розділі зроблено огляд літератури за темою дисертації.

У другому розділі наведено означення модулів неперервності порядку α, породжених півгрупою операторів, у випадку, коли α не обов'язково є цілим числом, розглянуто частинний випадок цілого α, вміщено приклади модулів неперервності у конкретних просторах та елементарні властивості модулів неперервності порядку α, породжених півгрупою операторів, а також побудовано приклад нерівності для модулів неперервності порядку α, яка виконується при цілих α, але є хибною для не цілих α. Основним результатом другого розділу дисертації є доведення того , що не кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку при $k \geq 3$, а також поширення цього твердження на модулі неперервності дробового порядку. Цей результат є узагальненням відповідного твердження при $k = 2$, отриманого

С.В. Конягіним для рівномірних модулів неперервності у просторі рівномірно неперервних на осі функцій. Ключовим моментом для його доведення є встановлення допоміжної нерівності певного виду. У дисертації отримано таку допоміжну нерівність для модуля неперервності порядку α у випадку, коли α не обов'язково ціле. Встановлено також посилення цієї нерівності для k-го модуля неперервності у випадку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. В свою чергу, у випадках третього і четвертого рівномірних модулів неперервності у просторі рівномірно неперервних на осі функцій одержано уточнення загальної нерівності для k-го модуля неперервності. Доведення цих уточнених нерівностей використовують «класичне» означення рівномірного модуля неперервності, яке дається за допомогою скінченних різниць третього та четвертого порядків.

У третьому розділі побудовано новий контрприклад, який показує, що для кусково p-монотонного $\left(p \geq 4\right)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна з похідною $r \geq p$ є хибною, навіть якщо константа залежить від функції, яку наближають. Цей результат на порядок посилює відомий результат Л.П. Ющенко та узагальнює на випадок $p \geq 4$ відповідний результат з роботи Д. Левіатана та І.О. Шевчука, одержаний для випадку $p = 3$.

Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань математичного аналізу, функціонального аналізу, теорії наближень, теорії півгруп операторів тощо.

Ключові слова: модуль неперервності вищого порядку, модуль непере-рвності дробового порядку, півгрупа операторів, кусково p-монотонне наближення, нерівність типу Джексона-Стєчкіна.

Bezkryla S.I. On high orders moduli of continuity and p-monotonic approximation. – The Manuscript.

A thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics in speciality 01.01.01 – «Mathematical Analysis» (111 – Mathematics). – Institute of Mathematics of the National Academy of Scinces of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of some questions on the moduli of continuity of higher and fractional orders generated by a semigroup of operators, and also to construction of counterexamples for piecewise p-monotonic, $(p \geq 4)$ approximation by algebraic polynomials.

In the *introduction*, the substantiation of the relevance of the topic is given, the purpose and tasks of the research, the methods of research, the scientific novelty of the results obtained, the personal contribution of the applicant, the approbation of the thesis, the structure and volume of the dissertation, the connection of the work with scientific topics are formulated.

The *first section* reviews the literature on the topic of the dissertation.

In the *second section* we give the definition of moduli of continuity of fractional order, of the semigroups of operators, their examples and elementary properties, and an example of an inequality for moduli of continuity of order α that holds for integers α and does not hold for non-integers α. The main result of the second section of the thesis is the proof that not every k-majorant is a modulus of continuity of the k-th order for $k \geq 3$, but also the transfer of this assertion to moduli of continuity of fractional order. This result is a generalization of the corresponding statement for $k = 2$, obtained by S.V. Konyagin for uniform moduli of continuity. The key moment in its proof is the establishment of some auxiliary inequality of a special kind. In the thesis, an auxiliary inequality is obtained for the modulus of continuity of order α in the case when there is not necessarily an

integer α. The strengthening of this inequality is also established for the k-th modulus of continuity in the case $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. In turn, for the third and fourth uniform moduli of continuity, we obtain a refinement of the general inequality for the k-th modulus of continuity. The proofs of these refined inequalities use the «classical» definition of the uniform modulus of continuity, which is given by finite differences of the third and fourth orders.

In the *third section* a new counterexample is constructed showing that for a piece-wise p-monotonic, $(p \geq 4)$ approximation by algebraic polynomials an inequality of Jackson-Stechkin type with the derivative $r \geq p$ does not hold even with a constant depending on the approximated function. This result strengthens the well-known result of L.P. Yushchenko and generalizes for the case $p \geq 4$ the corresponding result of the paper by D. Leviathan and I.A. Shevchuk obtained for $p = 3$.

Key words: modulus of continuity of higher order, modulus of continuity of fractional order, semigroup of operators, piecewise p-monotonic approximation, inequality of Jackson-Stechkin type.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Безкрила С.І.* Про четвертий модуль неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ М.П. Драгоманова. – 2012. – № 13 (1). – С. 45 – 50.
2. *Безкрила С.І.* Про треті модулі неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 10. – С. 1412 – 1416. (English translation: Bezkryla S.I. On the third moduli of continuity / S.I. Bezkryla, O.N. Nesterenko, A.V. Chaikovs'kyi // Ukrainian Mathematical Journal – 2015. – V.66, № 10. – P. 1589 – 1594).
3. *Безкрила С.І.* Про оцінки типу Джексона-Стєчкіна для кусково q-опуклого наближення функцій / С.І. Безкрила // Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2016. – № 36. – С. 6 – 10.
4. *Bezkryla S.I.* On high orders moduli of continuity generated by semigroups of operators / S.I. Bezkryla, O.N. Nesterenko and A.V. Chaikovs'kyi // Jaen Journal on Approximation – 2016. – V.8, № 2. – P. 183 – 190.
5. *Безкрила С.І.* Про модулі неперервності дробового порядку, породжені півгрупою операторів / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2017. – № 1(37). – С. 6 – 9.
6. *Безкрила С.І.* Про k-мажоранту і модуль неперервності / С.І. Безкрила // Матеріали міжнародної конференції асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь з нагоди 80-річчя М.І. Шкіля 13-14 грудня 2012. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – С. 42 – 43.
7. *Безкрылая С.И.* О третьих модулях непрерывности / С.И. Безкрылая, А.Н. Нестеренко, А.В. Чайковский // Міжнародна математична конфе-

ренція «Боголюбівські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А. М. Самойленка: Тези доповідей. – Київ: Інститут математики НАН України, 2013. – С. 217 – 218.

8. *Безкрила С.І.* Про одну нерівність для третього модуля неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Матеріали XI міжнародної наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна» 18-22 березня 2013: Тези доповідей. – Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2013. – С. 101.

9. *Безкрила С.І.* Про четвертий модуль неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // XV міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука 15-17 травня 2014: Тези доповідей. – Київ: Національний технічний університет України КПІ, 2014. – С. 43 – 45.

10. *Безкрила С.І.* Про одну нерівність для четвертого модуля неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Матеріали XII міжнародної наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна» 25-28 березня 2014: Тези доповідей. – Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 2014. – С. 220 – 221.

11. *Безкрила С.І.* Про модулі неперервності старших порядків, породжених півгрупою операторів / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Міжнародна наукова конференція «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 75-річчя В.П. Моторного 8-11 жовтня 2015: Тези доповідей. – Дніпропетровськ:Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, 2015. – С. 13.

12. *Безкрила С.І.* Про оцінки типу Джексона-Стєчкіна для кусково q-опуклого наближення функцій / С.І. Безкрила // XVII міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука 19-20 травня 2016: Тези доповідей. – Київ: Національний технічний університет України КПІ, 2016. – С. 42 – 43.

13. *Безкрила С.І.* Про модулі неперервності дробового порядку, породжені півгрупою операторів / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Міжнарожна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця 28 травня – 3 червня 2017. – Тези доповідей. – Слов'янськ: Донбаський державний педагоггічний університет. – 2017. – С. 42.

14. *Безкрила С.І.* Про одну нерівність для модулів неперервності дробового порядку, породжених півгрупою операторів / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // XVIII міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-й річниці від дня народження М. Кравчука, 7-10 жовтня 2017: Тези доповідей. – Луцьк – Київ: Національний технічний університет України КПІ. – 2017. – С. 168 – 169.

Зміст

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел;

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел;

$\mathbb{C}$ – множина комплексних чисел;

$C[a,b]$ – простір дійсних неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій;

$C^r[a,b]$ – позначає простір дійсних r разів неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій;

$L_p(\mathbb{R})$ – простір дійсних вимірних інтегровних в p-тому степені функцій з нормою

$$\|f\| := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \ f \in L_p(\mathbb{R});$$

$\tilde{L}_p$ –простір дійсних вимірних 2π –періодичних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, інтегровних в p-тому степені на $[0,2\pi]$, з нормою

$$\|f\| := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \ f \in \tilde{L}_p, \ 1 \le p < +\infty;$$

$UC(\mathbb{R})$ – простір дійсних рівномірно неперервних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$;

$UC_b(\mathbb{R})$ – простір дійсних обмежених рівномірно неперервних на $\mathbb{R}$ функцій;

$\tilde{C}$ – простір дійсних неперервних 2π – періодичних функцій; у кожному з цих просторів розглядається рівномірна норма;

$W^r[a,b]$ – соболевський клас функцій $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, для яких на $[a,b]$ існує абсолютно неперервна $(r-1)$-ша похідна і таких що $\left\|f^{(r)}\right\|_{[a,b]}\le 1$, де $r\in\mathbb{N}$ і $\|g\|_{[a,b]} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]}|g(x)|$;

$\mathbf{P}_n$ – простір алгебраїчних многочленів степеня не вище n;

$\|f\|_{[a,b]} = \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$ – рівномірна норма функції $f\in C[a,b]$;

ВСТУП

Актуальність теми. Поняття модуля неперервності було введено А. Лебегом [93] у 1910 р., а С. Н. Бернштейном [15] у 1911 р. було введено поняття модулів неперервності старших порядків. З того часу ці поняття активно узагальнюються, вивчаються і використовуються.

Серед узагальнень поняття класичного модуля неперервності згадаємо інтегральні модулі неперервності, модулі неперервності Діціана-Тотіка, локальні модулі гладкості, усереднені модулі гладкості, односторонні модулі гладкості, модулі гладкості Гаусдорфа-Сендова, модулі неперервності, породжені півгрупою операторів, рівномірні та інтегральні модулі неперервності дробового порядку, спеціальні модулі неперервності функцій комплексної змінної та інші. Властивості класичних та узагальнених модулів неперервності наведено в монографіях О.П. Тімана [56], В.К. Дзядика [34], І.О. Шевчука [62] (див. також [82]), Б. Сендова і В. Попова [52], З. Діціана і В. Тотіка [81], Р.А. Де Вора і Ж.Ж. Лоренца [80], Г. Анастассіу і С. Гала [66] та інших.

Класичні модулі неперервності та їх численні узагальнення активно використовуються в різних розділах теорії функцій та чисельного аналізу: для опису класів і просторів функцій, прямих і обернених теорем теорії наближень, опису компактних множин у різних просторах функцій, теорії інтерполяційних просторів, для оцінки похибки при чисельному інтегруванні, наближеному розв’язку диференціальних та інтегральних рівнянь та інших. Зокрема, прямі та обернені теореми теорії наближень у випадку наближень алгебраїчними многочленами, тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу, підпросторами власних функцій крайових задач Штурма-Ліувілля та іншими агрегатами, які формулюються в термінах класичних модулів неперервності та їх узагальнень, вивчались в роботах Д. Джексона [87], С.Н. Бернштейна [15], Ш. де ла Валле – Пуссена [117], Е. Кваде [107], А. Зигмунда [122], Н.І. Ахієзера (див. [1]), С.Б. Стєчкіна [54], О.П. Тімана (див. [56]), В.К. Дзядика (див. [34]), Ю.А. Брудного [19, 20], Г. Фройда [83], С.М. Нікольського (див. [44]), І.І. Ібрагімова (див. [36]), М.П. Купцова [42], О.І. Степанця (див. [53]), І.О. Шевчука (див. [62], [82]), В.В. Жука [35], Г.В. Радзієвського [47 – 49], П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса [72], Р. Таберського [114], С.Б. Вакарчука [23 – 26] та багатьох інших математиків.

Важливими узагальненнями поняття модуля неперервності були поняття модуля неперервності, породженого півгрупою операторів, що з’явилось в роботі М.П. Купцова [42], а також модуля неперервності дробового порядку, яке вперше було введено в роботах П. Бутцера і Ю. Вестпхаля [73], П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса [72] і незалежно в роботі Р. Таберського [114] для періодичних та неперіодичних функцій, які є неперервними або належать просторам Лебега L_p.

Опис рівномірних модулів неперервності першого порядку було отримано А. Лебегом [93] і С.М. Нікольським [43]. Опис перших інтегральних модулів неперервності для функцій з простору L_2 у випадку однієї змінної було одержано О.В. Бєсовим і С.Б. Стєчкіним [16], а у випадку багатьох змінних – С.Б. Вакарчуком і М.Б. Вакарчуком [22]. Для функцій з простору L_2 опис інтегральних модулів неперервності порядку α у випадку $\alpha = m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, було одержано Л.В. Тайковим [55], а у випадку $\alpha \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ – С.Б. Вакарчуком [26]. Крім цих випадків, описи інших модулів неперервності, наскільки нам відомо, досі не отримані.

У зв’язку з цим С.В. Конягін у роботі [40] пише, що «є цікавими різні необхідні та достатні умови на функцію ω для того, щоб вона збігалась або була близькою до модуля неперервності другого порядку деякої функції».

Зауважимо, що сказане є актуальним не тільки стосовно рівномірних модулів другого порядку, а й усіх модулів неперервності, точний опис яких не відомий.

З точністю до порядкової еквівалентності опис рівномірних модулів неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, та інтегральних модулів неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$ отримано в роботах В.Е. Гейта [30, 31], І.О. Шевчука [63], В.І. Коляди [39] і Т.В. Радославової [108]. С. Тіхонов у роботі [115] поширив ці результати на випадок модуля неперервності дробового порядку. Згаданий опис отримано в термінах k-мажорант. Довгий час ні для рівномірних, ні для інтегральних модулів неперервності не було з'ясовано, чи кожна k-мажоранта є модулем неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, деякої функції. Для випадку рівномірних модулів неперервності другого порядку для рівномірно неперервних на дійсній осі функцій негативну відповідь на це питання дав С.В. Конягін [40].

Об'єднуючи ідеї з означень модулів неперервності, що розглядались в роботах М.П. Купцова [42] і П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса [72], у другому розділі дисертації ми визначаємо модуль неперервності довільного порядку $\alpha > 0$, породжений півгрупою операторів. Його частинними випадками є рівномірний та інтегральний модулі неперервності. Саме робота С.В. Конягіна [40] з одного боку, і роботи М.П. Купцова [42] і П Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса [72], з іншого, і були відправними пунктами при отриманні результатів другого розділу дисертації.

Теорія формозберігаючого наближення бере початок в роботах П.Л. Чебишова та С.Н. Бернштейна. Зокрема, П.Л. Чебишов побудував многочлен степеня n із старшим коефіцієнтом ±1, що має найменшу норму серед усіх монотонних многочленів із старшим коефіцієнтом ± 1. С.Н. Бернштейн поширив цей результат на многочлени, що мають невід'ємну k-у похідну.

Сучасна теорія формозберігаючого наближення починається з робіт Г. Г. Лоренца [99, 100] та К. Л. Целлера [120] (1968, 1969). Починаючи з цих робіт, досліджується питання чи є вірними класичні оцінки наближення без обмежень для формозберігаючого наближення. Цьому напрямку присвячені статті таких авторів: Р.К. Бітсон [67 – 69], Р.А. Де Вор [77 – 80], Г.А. Дзюбенко [див. 82], Я. Гілевич [33], Д. Левіатан [95 – 98], І.О. Шевчук [109 – 112], О.С. Шведов [58 – 61], Ю. Ху. [119], Ву. Х [118], А.В. Бондаренко [18, 71], А.В. Примак [17], З. Діціан [81], К.А. Копотун [90 – 92], та багатьох інших. За останні 20 років відбулось суттєве просування у цій тематиці, але залишився ряд відкритих конкретних питань, відповідь у яких є невідомою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Автор дисертації брала участь у розробці держбюджетної теми «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (номер державної реєстрації 0113U003005)

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є спростування відомої гіпотези про те, що кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку якоїсь функції, а також посилення на порядок контрприкладу про те, що при кусково p-монотонному, $p \geq 4$, наближенні алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, залежною від функції, яку наближають.

Об'єкт дослідження – модулі неперервності вищих порядків, а також величина найкращого кусково p-монотонного наближення алгебраїчними много-членами.

Предмет дослідження – нерівності для модулів неперервності вищих порядків, зв'язок між k-мажорантами та модулями неперервності k-го порядку, а також оцінки величини найкращого рівномірного кусково p-монотонного наближення алгебраїчними многочленами.

Задачі дослідження:

1) Довести, що не кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку при $k \geq 3$. Поширити це твердження на модулі неперервності дробового порядку;
2) Встановити нові нерівності для модулів неперервності k-го та дробового порядків, породжених півгрупою операторів;
3) Посилити твердження про те, що для кусково p-монотонного, $p \geq 4$, наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, залежною від функції, яку наближають.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи математичного аналізу та теорій функцій, зокрема, класичні та сучасні методи теорії наближення функцій.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати, одержані в дисертаційній роботі є новими і наведені з повним доведенням. Основними результатами, що виносяться на захист, є наступні:

1) Доведено, що не кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку при $k \geq 3$. Це твердження поширено на модулі неперервності дробового порядку;
2) Встановлено нові нерівності для модулів неперервності k-го та дробового порядків, породжених півгрупою операторів;
3) Посилено твердження про те, що для кусково p-монотонного, $p \geq 4$, наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, залежною від функції, яку наближають.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи та методика їх отримання можуть бути використані при дослідженні різноманітних питань математичного аналізу, теорії наближень тощо.

Особистий внесок здобувача. Визначення напрямку дослідження, а також постановка задач належить науковому керівникові І.О. Шевчуку. Результати робіт [2, 3, 6, 70] отримані спільно з О.Н. Нестеренком та А.В. Чайковським, внесок співавторів є рівноцінним. Результати роботи [5] отримано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на таких семінарах та наукових конференціях:
– семінар «Сучасний аналіз» (механіко-математичний факультет Київського національного університету імені Тараса Шевченка; керівники семінару – доктори фіз.-мат. наук, проф. І.О. Шевчук, проф. О.О. Курченко та проф. В.М. Радченко);
– семінар відділу теорії функцій (Інститут математики НАН України; керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. А.С. Романюк);
–семінар кафедри математичного аналізу (Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича; керівник семінару – доктор фіз.-мат. наук, проф. В.К. Маслюченко);
– науковий семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь (Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, керівник семінару – доктор фіз.-мат наук, проф. Г.М. Торбін);
– Міжнародній науковій конференції «Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь» з нагоди 80-річчя М.І. Шкіля, Київ, 13-14 грудня 2012р.;
– Міжнародній науковій конференції «Боголюбовські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування», з нагоди 75-

річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка, Севастополь, 23-30 червня 2013 р.;

– XI міжнародній науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна», Київ, 18-22 березня 2013 р.;

– XII міжнародній науковій конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна», Київ, 25-28 березня 2014 р.;

– XV міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 15-17 травня 2014 р.;

– Міжнародній науковій конференції «Теорія наближень і її застосування» з нагоди 75-річчя В.П. Моторного, Дніпропетровськ, 8-11 жовтня 2015 р.;

– XVII міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 19-20 травня 2016 р.;

– Міжнарожна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця, Слов'янськ, 28 травня – 3 червня 2017 р.;

– Workshop on approximation theory,dedicated to the 70th anniversary of professor Igor Shevchuk, Kyiv, 14 june, 2017 р.;

– XVIII міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-й річниці від дня народження М. Кравчука Луцьк – Київ, 7-10 жовтня 2017 р.

Публікації. Основні результати дисертації викладено в 14 наукових публікаціях, серед яких 9 тез доповідей на міжнародних конференціях [4, 7-14] і 5 статей [2, 3, 5, 6, 70] у фахових виданнях або/та журналах, що індексуються міжнародними наукометричними базами Scopus [2, 70] та Web of Science [2]. Роботи [2, 3, 6, 70] є спільними з О.Н. Нестеренком та А.В. Чайковським, внесок співавторів є рівноцінним.

Структура дисертації. Дисертаційне дослідження складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить

122 найменування. Повний обсяг дисертації складає 140 сторінок, з них список використаних джерел займає 14 сторінок.

Автор висловлює щиру вдячність науковому керівникові Ігорю Олександровичу Шевчуку за постановку задач, постійну увагу, корисні зауваження, підтримку та допомогу у роботі.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури

1.1. Модулі неперервності вищих та дробових порядків

Спочатку наведемо деякі необхідні позначення та означення.

Через $C[a, b]$ позначимо лінійний простір неперервних на відрізку $[a, b]$ дійснозначних або комплекснозначних функцій. Через $UC(\mathbb{R})$ позначимо простір рівномірно неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbf{K}$, де поле $\mathbf{K}=\mathbb{R}$ або $\mathbf{K}=\mathbb{C}$. Нехай також $\tilde{C}$ – це простір 2π-періодичних неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbf{K}$.

Модулем неперервності (або, більш точно, ***рівномірним модулем неперервності першого порядку***) функції f з простору $UC(\mathbb{R})$ чи $\tilde{C}$ називається функція

$$\omega(t)=\omega(f,t)=\sup_{h\in[0,t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x+h)-f(x)\right|,\ t\geq 0. \tag{1.1}$$

Якщо функція $f\in C[a, b]$, то її ***рівномірним модулем неперервності першого порядку*** називається функція

$$\omega(t)=\omega(f,t)=\sup_{h\in[0,t]}\sup_{x\in[a,\, b-h]}\left|f(x+h)-f(x)\right|,\ t\geq 0. \tag{1.2}$$

Дані поняття можна визначати й іншими еквівалентними способами.

Якщо в (1.1) та (1.2) різницю $f(x+h)-f(x)$ замінити на k ***-ту скінченну різницю функції*** f ***в точці*** $x\in\mathbb{R}$ ***з кроком*** $h>0$, тобто на величину

$$\Delta_h^k(f,x):=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}C_k^j f(x+jh),$$

де $k\in\mathbb{N}$, то отримаємо означення рівномірного k-го модуля неперервності функції f. Більш точно, ***рівномірним модулем неперервності порядку*** $k\in\mathbb{N}$ (або, що те саме, ***рівномірним*** k ***-тим модулем неперервності***) для функції f з простору $UC(\mathbb{R})$ чи $\tilde{C}$ називається функція

$$\omega_k(t)=\omega_k(f,t)=\sup_{h\in[0,t]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Delta_h^k(f,x)\right|,\ t\geq 0, \tag{1.3}$$

а для функції $f\in C[a,\,b]$ – функція

$$\omega_k(t)=\omega_k(f,t)=\sup_{h\in[0,t]}\ \sup_{x\in[a,\,b-kh]}\left|\Delta_h^k(f,x)\right|,\ t\geq 0. \tag{1.4}$$

Поняття рівномірного модуля неперервності першого порядку (ще без вживання цього терміну) було введене А. Лебегом у 1910 р. у роботі [93] для функцій з класу $\tilde{C}$. Він пише [93, с. 190]: «Позначимо через $\omega(\delta)$ максимум коливання функції $f(x)$ на довільному проміжку довжини δ». У цитованій роботі це поняття використовувалось при дослідженні умов збіжності ряду Фур'є для функцій, що задовольняють різним узагальненням умов Ліпшиця, зокрема, для отримання оцінок коефіцієнтів Фур'є функції через її модуль неперервності. Відзначимо, що ще за рік до цього, у 1909 р. у роботі [94, с. 75, 97, 114] А. Лебег через $\omega(\varepsilon)$ позначав точну верхню межу коливань функції f на проміжках довжини 2ε. Поняття рівномірного модуля неперервності першого порядку активно використовує Д. Джексон у своїй дисертації 1911 р. [87] для формулювання історично перших прямих теорем теорії наближення, які дають оцінку величини найкращого наближення даної функції тригонометричними чи алгебраїчними многочленами через модуль неперервності самої функції або деякої її похідної (ці оцінки тепер прийнято називати першою і другою нерівностями Джексона). У роботі С.Н. Бернштейна «О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени» [15] серед інших результатів, як відомо, вперше було отримано обернені теореми теорії наближення. У цій же роботі С.Н. Бернштейн (див. [15, с. 37]) вводить поняття рівномірних модулів неперервності старших порядків для неперервних на відрізку функцій (знову-таки без відповідної назви, лише позначаючи їх $\delta_i(\varepsilon)$, тобто $\delta_i(\varepsilon)$– це $\omega_i(\varepsilon)$ у позначеннях (1.4)), визначає за їх допомогою поняття узагальненої умови Ліпшиця і в термінах величин найкращого рівномірного наближення алгебраїчними многочленами дає достатню умову того, що дана функція задовольняє узагальнену умову Ліпшиця. Зауважимо, що ця робота з'явилась друком у 1912 р. російською мовою і є перекладом мемуару, надісланого у 1911 р. у Бельгійську Королівську Академію, нагородженого премією цієї Академії і опублікованого французькою мовою в одному з її видань. Вперше термін «модуль неперервності» (як назва поняття, яке ми тепер більш повно називаємо «рівномірним модулем неперервності першого порядку») з'явився у роботі Ш. де ла Валле-Пуссена [117, с. 7] для функцій з класів $C[a, b]$та $\tilde{C}$. Там же міститься деяке обговорення того, яку краще назву дати цьому поняттю, і пояснення, чому автор зупиняється саме на терміні «модуль неперервності».

Для функцій з просторів L_p розглядаються інтегральні модулі неперервності. Нехай $L_p[a, b]$– простір вимірних за Лебегом інтегровних в p-тому степені на $[a, b]$ функцій $f:[a, b]\to\mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_{L_p[a, b]} := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \ f\in L_p[a, b],\ 1\le p<+\infty;$$

$L_p(\mathbb{R})$ – простір вимірних за Лебегом інтегровних на $\mathbb{R}$ в p-тому степені функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \ f\in L_p(\mathbb{R}),\ 1\le p<+\infty;$$

$\tilde{L}_p$ – простір вимірних за Лебегом 2π–періодичних функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, інтегровних в p-тому степені на $[0,2\pi]$, з нормою

$$\|f\|_{\tilde{L}_p} := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \ f\in \tilde{L}_p,\ 1\le p<+\infty.$$

Інтегральним модулем неперервності порядку $k\in\mathbb{N}$ (або, що те саме, ***інтегральним*** k***-тим модулем неперервності***) для функції f з простору $L_p(\mathbb{R})$ називається функція

$$\omega_k(t)_p = \omega_k(f,t)_p = \sup_{h\in[0,t]} \left\|\Delta_h^k(f,\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{R})},\ t\ge 0; \qquad (1.5)$$

для функції $f\in\tilde{L}_p$ – функція

$$\omega_k(t)_p = \omega_k(f,t)_p = \sup_{h\in[0,t]} \left\|\Delta_h^k(f,\cdot)\right\|_{\tilde{L}_p},\ t\ge 0; \qquad (1.6)$$

а для функції $f \in L_p[a, b]$ – функція

$$\omega_k(t)_p = \omega_k(f,t)_p = \sup_{h\in[0,t]} \left\| \Delta_h^k(f, \cdot) \right\|_{L_p[a,\, b-kh]}, \ t \ge 0. \qquad (1.7)$$

Інакше кажучи, означення (1.5) – (1.7) одержуються з означень (1.3) та (1.4) заміною в останніх рівномірних норм на відповідні інтегральні норми.

Модуль неперервності порядку k (рівномірний чи інтегральний) ще називають ***модулем гладкості*** порядку k.

Серед узагальнень поняття класичного модуля неперервності згадаємо інтегральні модулі неперервності, модулі неперервності Діціана-Тотіка, локальні модулі гладкості, усереднені модулі гладкості, односторонні модулі гладкості, модулі гладкості Гаусдорфа-Сендова, модулі неперервності, породжені півгрупою операторів, рівномірні та інтегральні модулі неперервності дробового порядку, спеціальні модулі неперервності функцій комплексної змінної та інші. Властивості класичних та узагальнених модулів неперервності наведено в монографіях О.П. Тімана [56], В.К. Дзядика [34], І.О. Шевчука [62] (див. також [82]), Б. Сендова і В. Попова [52], З. Діціана і В. Тотіка [81], Р.А. Де Вора і Ж.Ж. Лоренца [80], Г. Анастассіу і С. Гала [66] та інших. В монографії Г. Анастассіу і С. Гала [66] розглядаються різні види модулів неперервності, наводяться приклади їх знаходження для функцій із властивостями типу опуклості, а також вивчаються питання збереження гладкості функцій, коли на них діють різні класи лінійних неперервних операторів.

Класичні модулі неперервності та їх численні узагальнення активно використовуються в різних розділах теорії функцій та чисельного аналізу: для опису класів і просторів функцій, прямих і обернених теорем теорії наближень, опису компактних множин у різних просторах функцій, теорії інтерполяційних просторів, для оцінки похибки при чисельному інтегруванні, наближеному розв'язку диференціальних та інтегральних рівнянь та інших. Зокрема, прямі та обернені теореми теорії наближень у випадку наближень алгебраїчними многочленами, тригонометричними поліномами, цілими функціями експоненціального типу, підпросторами власних функцій крайових задач Штурма-Ліувілля та іншими агрегатами, які формулюються в термінах класичних модулів неперервності та їх узагальнень, вивчались в роботах Д. Джексона [87], С.Н. Бернштейна [15], Ш. де ла Валле – Пуссена [117], Е. Кваде [107], А. Зигмунда [122], Н.І. Ахієзера (див. [1]), С.Б. Стєчкіна [54], О.П. Тімана (див. [65]), В.К. Дзядика (див. [34]), Ю.А. Брудного [19, 20], Г. Фройда [83], С.М. Нікольського (див. [44]), І.І. Ібрагімова (див. [36]), М.П. Купцова [42], О.І. Степанця (див. [53]), В.В. Жука [35], Г.В. Радзієвського [47 – 49], П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса [72], Р. Таберського [114], С.Б. Вакарчука [23 – 26] та багатьох інших математиків.

Важливим узагальненням поняття модуля неперервності було поняття модуля неперервності, породженого півгрупою операторів, що з'явилось в роботі М.П. Купцова [42]. Нехай X – банахів простір, $\{T_h : h \geq 0\}$ – однопараметрична сім`я лінійних неперервних операторів $T_h : X \to X$, $h \geq 0$, яка утворює півгрупу, тобто $T_0 = I$ – одиничний оператор і $T_{h_1+h_2} = T_{h_1}T_{h_2}$ для довільних $h_1 \geq 0$ і $h_2 \geq 0$, причому для всіх $f \in X$ має місце співвідношення $\|T_h f - f\| \to 0$, $h \to 0$, а також для кожного $h \geq 0$ норма $\|T_h\| \leq 1$. Півгрупа $\{T_h : h \geq 0\}$, що задовольняє наведені припущення, називається ***стискуючою півгрупою класу*** (C_0) [38]. Для таких півгруп функція

$$\omega_k(t) := \omega_k(f,t) := \sup_{h\in[0,t]} \left\| (I - T_h)^k f \right\|, \; t \geq 0,$$

називається ***модулем неперервності елемента*** $f \in X$ ***порядку*** $k \in \mathbb{N}$***, породженим півгрупою*** $\{T_h : h \ge 0\}$. Частинними випадками цього поняття будуть модулі неперервності (1.1), (1.3), (1.5) і (1.6), бо якщо T_h – оператор зсуву на $h > 0$, визначений на функціях виду $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рівністю $(T_h f)(x) := f(x+h)$, $x \in \mathbb{R}$, то $\{T_h : h \ge 0\}$ – стискуюча півгрупа класу (C_0) у відповідних просторах (зокрема, $T_0 = I$, $T_{h_1+h_2} = T_{h_1} \cdot T_{h_2}$ для довільних $h_1 \ge 0$ і $h_2 \ge 0$), а також для всіх $k \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $x \in \mathbb{R}$ мають місце рівності

$$\left((T_h - I)^k f\right)(x) = \Delta_h^k(f, x), \qquad \left(T_h^{\,k} f\right)(x) = f(x + kh).$$

Відзначимо, що вперше поняття сильно неперервної півгрупи операторів для розв’язання деяких задач теорії наближень було використане П. Бутцером в роботах [74] і [75], в яких були знайдені класи насичення деяких сингулярних інтегралів у просторах L_p. Пізніше ця тематика розвивалась і в працях інших авторів.

Іншим важливим узагальненням поняття модуля неперервності стало поняття модуля неперервності дробового порядку, яке вперше було введено в роботах П. Бутцера і Ю. Вестпхаля [73], П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса [72] для функцій з просторів $\tilde{C}$ та $\tilde{L}_p$, $1 \le p < +\infty$, і незалежно в роботі Р. Таберського [114] для функцій з просторів $L_p(\mathbb{R})$ та $\tilde{L}_p$, $1 \le p \le +\infty$.

Для функції $f \in \tilde{C} \cup L_p(\mathbb{R}) \cup \tilde{L}_p$, $1 \le p < +\infty$, ***модулем неперервності порядку*** $\alpha > 0$ (де число α не обов’язково ціле), називається функція, що позначається $\omega_\alpha(\,\cdot\,) = \omega_\alpha(f, \cdot\,)$ і визначається правою частиною формул (1.3), (1.5) та (1.6) відповідно, якщо в них $\Delta_h^k(f, x)$ замінити на ***скінченну різницю***

порядку $\alpha > 0$ ***функції*** f ***в точці*** $x \in \mathbb{R}$ ***з кроком*** $h > 0$, яка визначається наступною рівністю

$$\Delta_h^\alpha f := \sum_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j f(x - jh),$$

де

$$C_\alpha^0 := 1,\ C_\alpha^j := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!},\ j \geq 1.$$

У роботі П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса [72] це поняття застосоване, зокрема, для отримання конструктивної характеристики класів Ліпшиця дробового порядку. У роботі Р. Таберського [114], окрім детального вивчення властивостей дробового модуля неперервності, встановлені й прямі та обернені теореми у випадку наближення функцій з класів $\tilde{L}_p$ тригонометричними поліномами, в яких він використовується. У подальшому дробові модулі неперервності для періодичних та неперіодичних функцій, заданих на всій дійсній осі, вивчались у роботах К.Г. Іванова [86], Я.С. Бугрова [21], В.Г. Пономаренка [45], С.Г. Самка і А.Я. Якубова [50], Г. Гаймназарова [27, 28] , С. Тіхонова [115], Е.С. Бхайя і З.А. Аль Муніма [76], С.Б. Вакарчука [24, 26] та багатьох інших авторів. Зауважимо, що при вивченні дробових модулів неперервності широко використовується поняття дробової похідної, якому присвячена фундаментальна монографія С.Г. Самка, А.О. Кілбаса та О.І. Маричева [51].

Опис рівномірних модулів неперервності першого порядку для неперервних функцій відомий ще з робіт А. Лебега [93] та С.М. Нікольського [43]. Обидва автори на цьому питанні у цитованих роботах зупиняються дуже коротко. А. Лебег пише: «$\omega(\delta)$ для неперервної функції $f(x)$, очевидно, має властивість бути неперервною, неспадною і такою, що

$$\omega(\delta_1+\delta_2)\le\omega(\delta_1)+\omega(\delta_2),$$

і, навпаки, кожна функція, що задовольняє ці умови, буде функцією $\omega(\delta)$ для безлічі неперервних функцій $f(x)$» [93, с. 193]. С.М. Нікольський пише так: «Нехай $f(x)$ – неперервна на деякому інтервалі функція. Її модуль неперервності

$$\omega(t)=\sup_{|x'-x''|\le t}\left|f(x')-f(x'')\right|$$

є функцією, визначеною для $t\ge 0$ і такою, що задовольняє умову: при $t=0$ $\omega(t)$ неперервна і рівна нулю і при $0\le t_1\le t_2$

$$0\le\omega(t_2)-\omega(t_1)\le\omega(t_2-t_1).$$

Навпаки, функція $\omega(t)$, що задовольняє цій умові, є модулем неперервності (самої себе)» [43].

Таким чином, для того, щоб дана функція $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ була рівномірним модулем неперервності першого порядку деякої функції $f\in UC(\mathbb{R})$, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови:

1) $\omega(0)=0$;

2) функція ω є неспадною на $[0,+\infty)$;

3) функція ω є неперервною на $[0,+\infty)$;

4) (півадитивність) $\omega(t_1+t_2)\le\omega(t_1)+\omega(t_2)$ для всіх $t_1\ge 0$ і $t_2\ge 0$;

при цьому (у доведенні достатності) можна взяти $f(x) := \omega(|x|)$, $x \in \mathbb{R}$. Це твердження залишиться справедливим і якщо простір $UC(\mathbb{R})$ замінити на простір $C[a, b]$ чи $\tilde{C}$, при цьому, однак, має виконуватись ще така умова: $\omega(t) = \omega(b-a)$, $t \ge b-a$, чи, відповідно, $\omega(t) = \omega(\pi)$, $t \ge \pi$, а функція f визначається за допомогою функції ω так: $f(x) := \omega(x-a)$, $x \in [a, b]$, (якщо розглядається простір $C[a, b]$) чи $f(x) := \omega(|x|)$, $x \in [-\pi, \pi]$, а потім f продовжується на $\mathbb{R}$ так, щоб вона була 2π -періодичною (якщо розглядається простір $\tilde{C}$).

Якщо $\omega(\cdot) = \omega_1(f, \cdot)_p$ – інтегральний модуль неперервності першого порядку, визначений формулами (1.5) – (1.7) (при $k = 1$), то функція ω також задовольняє умови 1) – 4) (див., наприклад, [80, гл. 2, §6]). У роботі О.В. Бєсова і С.Б. Стєчкіна [16] отримано опис інтегральних модулів неперервності першого порядку у просторах $L_2(\mathbb{R})$ і $\tilde{L}_2$. У цій роботі доведено, що функція $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ буде інтегральним модулем неперервності першого порядку для деякої функції $f \in L_2(\mathbb{R})$, визначеним формулою (1.5), тоді і тільки тоді, коли

$$\omega(t) = \sup_{0 \le h \le t} \sqrt{\varphi(0) - \varphi(h)}, \tag{1.8}$$

де $\varphi \in FL_1^+$ – множині функцій, які є перетвореннями Фур'є невід'ємних парних функцій з $L_1(\mathbb{R})$, а також доведено, що функція $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ буде інтегральним модулем неперервності першого порядку для деякої функції $f \in \tilde{L}_2$, визначеним формулою (1.6), тоді і тільки тоді, коли вона є функцією виду (1.8), де $\varphi(h)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cos kh$, $h\ge 0$, причому всі сталі $c_k \ge 0$ і ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ збігається. У цій же роботі О.В. Бєсова і С.Б. Стєчкіна [16] встановлено, що кожен з класів функцій, які є інтегральними модулями неперервності першого порядку у просторах $L_2(\mathbb{R})$ і $\tilde{L}_2$, строго включається у множину функцій, які задовольняють умови 1) – 4); для цього показано, що функція $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ така, що $\omega(t)=t$, $t\in\left[0, t_0\right]$, де $t_0>0$ – деяке число, не є інтегральним модулем неперервності першого порядку у просторах $L_2(\mathbb{R})$ і $\tilde{L}_2$. У роботі С.Б. Вакарчука і М.Б. Вакарчука [22] наведено опис модулів неперервності функцій з простору, який автори позначають $L_{2,\,2}$ і визначають як простір функцій від двох дійсних змінних, 2π-періодичних по кожній змінній, звуження яких на $[0, 2\pi]^2$ належить простору $L_2\left([0, 2\pi]^2\right)$, з нормою, індукованою нормою простору $L_2\left([0, 2\pi]^2\right)$, тобто поширено результат О.В. Бєсова і С.Б. Стєчкіна для $\tilde{L}_2$ на випадок функцій двох змінних. Для функцій з простору $L_2(\mathbb{R})$ опис інтегральних модулів неперервності порядку α у випадку $\alpha=m\in\mathbb{N}$, $m\ge 2$, було одержано Л.В. Тайковим [55], а у випадку $\alpha\in(0,+\infty)\setminus\mathbb{N}$ – С.Б. Вакарчуком [26].

Крім згаданих вище випадків рівномірного та інтегральних модулів неперервності в L_2, характеризація яких міститься у цитованих вище роботах [93, 43, 16, 22, 55, 26], описи інших модулів неперервності, наскільки нам відомо, досі не отримані (див. [62, с. 25], [40]). У зв’язку з цим С.В. Конягін у роботі «Про другі модулі неперервності» [40] пише, що «… є цікавими різні необхідні та достатні умови на функцію ω для того, щоб вона збігалась або була близька до модуля неперервності другого порядку деякої функції».

Зауважимо, що сказане є актуальним не тільки стосовно рівномірних модулів неперервності другого порядку, а й усіх модулів неперервності, точний опис яких не відомий.

Стосовно других рівномірних модулів неперервності слід відзначити таке. Якщо функція $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ задовольняє умови 1) – 4), то вона є рівномірним модулем неперервності другого порядку для функції $f(x):=\frac{1}{2}\omega(|x|)$, $x\in\mathbb{R}$, у просторі $UC(\mathbb{R})$ [40]. Якщо функція $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ задовольняє умови 1) – 4) і $\omega(t)=\omega(\pi)$, $t\geq\pi$, то вона є рівномірним модулем неперервності другого порядку у просторі $\tilde{C}$ для функції $f(x):=\frac{1}{2}\omega(|x|)$, $x\in[-\pi,\pi]$, причому f продовжується на $\mathbb{R}$ так, щоб вона була 2π-періодичною [29]. Іншими словами, усі перші рівномірні модулі неперервності є рівномірними модулями неперервності другого порядку. В.Е. Гейт у роботі [29] побудував широкий клас функцій, які є модулями неперервності другого порядку функцій з простору $\tilde{C}$.

З іншого боку, існує досить багато робіт, в яких дано опис різних модулів неперервності з точністю до порядкової еквівалентності. Щоб зробити огляд відомих нам таких робіт, наведемо необхідні означення і властивості старших модулів неперервності.

Невід’ємні функції f і g зі спільною множиною визначення називаються ***порядково еквівалентними***, якщо існують такі сталі $A>0$ і $B>0$, що $Af(x)\leq g(x)\leq Bf(x)$ для всіх x зі спільної області визначення функцій f і g.

Відомо (див., наприклад, [80, гл. 2, §7]; для рівномірних модулів неперервності функцій, неперервних на відрізку, див. ще [62, 82]; див. також більш загальну лему 2.1 у розділі 2), що якщо $\omega(\cdot)=\omega_k(f,\cdot)$ – рівномірний чи інтегральний модуль неперервності функції f порядку $k\in\mathbb{N}$, визначений однією з формул (1.3) – (1.7), то функція ω задовольняє умови 1) – 3), а також наступну умову

5) $\omega(nt)\le n^k\omega(t)$ для довільних $t\ge 0$ і $n\in\mathbb{N}$.

Зауважимо, що для $\alpha=k\in\mathbb{N}$ і невід'ємних функцій $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ умова 5) випливає з умови

6) функція $(0,+\infty)\ni\delta\mapsto\omega(\delta)/\delta^{\alpha}$ монотонно не зростає на $(0,+\infty)$.

Якщо $\alpha=1$ і функція $\omega:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, то з умови 6) випливає умова 4) [62, с. 21].

Функція $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, що задовольняє умови 1) – 3), називається ***мажорантою***. Якщо функція $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ задовольняє умови 1) – 3) і 6) при $\alpha=k\in\mathbb{N}$, то вона називається *k*-***мажорантою*** [62, с. 24]. Множина всіх k-мажорант позначається Φ_k. Більш загально, множина функцій $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, що задовольняють умови 1) – 3) і 6), позначається Φ_α, де $\alpha>0$.

Результати досліджень численного колективу авторів, які стосуються опису різних модулів неперервності з точністю до порядкової еквівалентності, зручно сформулювати у вигляді наступної схематичної теореми.

Теорема 1.1. *Для довільної функції $\varphi \in \Phi_\alpha$ існує така функція $f \in X$, що її модуль неперервності $\omega_\alpha(f, \cdot)$ порядково еквівалентний функції φ (принаймні в околі нуля).*

В.Е. Гейт довів цю теорему, якщо $X = \tilde{C}$ і $X = \tilde{L}_1$, а також $\alpha = k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$; порядкова еквівалентність буде на відрізку $[0, \pi]$ (див. [31, лема 5] у випадку простору $\tilde{C}$ та [30, властивості функцій f_1 і f_2] у випадку простору $\tilde{L}_1$). Випадок $X = C[a, b]$, $\alpha = k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, розглянув І.О. Шевчук у роботі [63] (див. також [62]); при цьому в [63] точно обчислено k-тий модуль неперервності побудованої функції f. Якщо $\alpha = 1$, $X = L_p[0, 1]$, $1 \leq p < +\infty$, цей результат отримав В.І. Коляда [39, теорема 3]. Т.В. Радославова у праці [108] розглянула випадок $\alpha = k \in \mathbb{N}$, $X = \tilde{L}_p$, $1 \leq p \leq +\infty$, і випадок $0 < p < 1$ (при цьому в теоремі 1.1 Φ_k слід замінити на $\Phi_{(k-1)p+1}$). С. Тіхонов у роботі [115] одержав теорему 1.1 для дробових модулів неперервності порядку $\alpha > 0$, коли $X = \tilde{C}$ і $X = \tilde{L}_p$, $1 \leq p < +\infty$.

У найважливіших випадках справджується і обернене твердження до теореми 1.1, точніше, якщо $\alpha = k \in \mathbb{N}$ і функція $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ задовольняє умови 1) – 3) і 5) (зокрема, є рівномірним чи інтегральним модулем неперервності порядку k), то існує функція $\omega^* \in \Phi_k$, порядково еквівалентна функції ω (див., наприклад, [62, с. 24]). С. Тіхонов у роботі [115] одержав і обернене твердження до теореми 1.1 для дробових модулів неперервності порядку $\alpha > 0$, коли $X = \tilde{C}$ і $X = \tilde{L}_p$, $1 \leq p < +\infty$. Таким чином, для рівномірного та інтегрального модулів неперервності довільного порядку $\alpha > 0$ отримано їх опис з точністю до порядкової еквівалентності.

Слід зауважити, що наведені вище умови, які характеризують модуль неперервності в L_2, є складними для перевірки. В.А. Юдін у роботі [64] отримав просту нерівність для модуля неперервності в $\tilde{L}_2$ (яка є необхідною умовою для того, щоб задана функція $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ була першим модулем неперервності деякої функції з $\tilde{L}_2$): якщо ω – перший модуль неперервності деякої функції $f\in\tilde{L}_2$, то

$$\omega^2(\pi)\le\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega^2(t)dt.$$

Пізніше вона узагальнювалась на випадок простору $\tilde{L}_p$ (див. роботи С.В. Конягіна [41] та В.І. Іванова [37]) та на випадок функцій двох змінних (див. роботу С.Б. Вакарчука і М.Б. Вакарчука [22]).

Довгий час ні для рівномірних, ні для інтегральних модулів неперервності не було з’ясовано, чи кожна k-мажоранта є модулем неперервності порядку $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$, деякої функції. Для випадку рівномірних модулів неперервності другого порядку для рівномірно неперервних на дійсній осі функцій негативну відповідь на це питання дав С.В. Конягін [40].

Відзначимо, що для модулів неперервності активно досліджувались й інші питання. Так, наприклад, дисертація Л.Л. Потьомкіної [46] присвячена вивченню умов аналітичності модулів неперервності дійсно-аналітичних та кусково-аналітичних функцій.

Об’єднуючи ідеї з означень модулів неперервності, що розглядались в роботах М.П. Купцова [42] і П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса [72], можна визначити модуль неперервності довільного порядку $\alpha>0$, породженого півгрупою операторів. Такий модуль неперервності розглядається в розділі 2 (див. означення 2.1 і 2.2 з підрозділу 2.1). Його частинними випадками будуть модулі неперервності (1.1), (1.3), (1.5) і (1.6), а також модуль неперервності порядку $\alpha > 0$ (де число α не обов'язково ціле) функції $f \in \tilde{C} \cup L_p(\mathbb{R}) \cup \tilde{L}_p$, $1 \leq p < +\infty$. Саме робота С.В. Конягіна [40] з одного боку, і роботи М.П. Купцова [42] і П. Бутцера, Х. Дікгоффа, І. Герлича, Р. Стенса [72] з іншого, і були відправними пунктами при отриманні результатів другого розділу дисертації.

1.2. Про оцінки типу Джексона-Стєчкіна для кусково p-монотонного наближення функцій

Монотонне (комонотонне) наближення – це частинний випадок формозберігаючого наближення, для якого наближення заданої монотонної (кусково-монотонної) функції здійснюється монотонними многочленами (відповідно, кусково-монотонними) многочленами, що мають ті ж самі проміжки і той же напрямок монотонності на цих проміжках, що і сама функція. Перші роботи стосувались саме рівномірного наближення алгебраїчними многочленами на відрізку.

У 1965 році О.Шиша [113] розглянув величину

$$E_n^{(1)}(f) := \inf \left\{ \| f - p_n \|_{C[-1,1]} \,\middle|\, p_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^{(1)} \right\}$$

найкращого рівномірного монотонного наближення функції $f \in \Delta^{(1)}$ алгебраїчними многочленами степеня не вище, ніж n, де $\Delta^{(1)}$ – множина неперервних неспадних на $[-1,1]$ функцій, а $\mathbf{P}_n$ – підпростір алгебраїчних многочленів степеня не вище, ніж n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

У тій роботі доведено, що справедлива нерівність $E_{n+1}^{(1)}(f) \le 2E_n(f')$ для довільної неперервно диференційовної функції $f \in \Delta^{(1)}$ де

$$E_n(g) := \inf \left\{ \| g - p_n \|_{C[-1,1]} \,\middle|\, p_n \in \mathbf{P}_n \right\}$$

– величина найкращого рівномірного наближення без обмежень функції $g \in C[-1,1]$ алгебраїчними многочленами $p_n \in \mathbf{P}_n$. Також очевидно, що

$E_n(f) \le E_n^{(1)}(f)$, $f \in \Delta^{(1)}$. У 1969 році Г.Г. Лоренц і К.Л. Целлер [100] показа-ли, що протилежна нерівність, взагалі кажучи, є хибною. Вони побудували функцію $f \in \Delta^{(1)}$, для якої

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{E_n^{(1)}(f)}{E_n(f)} = +\infty .$$

Тим не менше, вони ж довели, що при монотонному наближенні зберігається нерівність Джексона [99], а саме, вони довели нерівність

$$E_n^{(1)}(f) \le c\omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right), \; n \ge 1$$

для кожної функції $f \in \Delta^{(1)}$, де $c > 0$ – абсолютна стала.

З того часу в наукових центрах Болгарії, Ізраїлю, Канади, Китаю, Німеччини, Росії, Румунії, США, України, Франції досліджується можливість перенесення результатів класичної теорії наближення без обмежень на формозберігаюче наближення.

Тепер через

$$E_n^{(2)}(f) := \inf \left\{ \| f - p_n \|_{C[-1,1]} \;\middle|\; p_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^{(2)} \right\}$$

позначимо величину найкращого рівномірного опуклого наближення функції $f \in \Delta^{(2)}$ алгебраїчними многочленами степеня не вище, ніж n, де $\Delta^{(2)}$ – множина неперервних опуклих на $[-1,1]$ функцій. Нарешті, для натуральних $p > 2$ через

$$E_n^{(p)}(f) := \inf \left\{ \| f - p_n \| \;\middle|\; p_n \in \mathbf{P}_n \cap \Delta^{(p)} \right\}, \text{ де } \Delta^{(p)}$$

позначимо величину найкращого p -монотонного наближення функції $f \in \Delta^{(p)}$ алгебраїчними многочленами степеня не вище, ніж n , де $\Delta^{(p)}$ - множина неперервних на $\left[-1,1\right]$ функцій, що мають опуклу $\left(p-2\right)$ -гу похідну на $\left(-1,1\right)$.

Для функції $f \in \Delta^{(p)} \cap C^r\left[-1,1\right]$ розглянемо нерівність типу Джексона виду

$$E_n^{(p)}\left(f\right) \le \frac{c}{n^r}\omega_k\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right), \; n \ge k+r-1, \qquad (1.9)$$

Для випадків $p=1$ і $p=2$ справедливість або хибність цієї нерівності вичерпно досліджена в роботах R.K. Beatson [67, 68], R.K. Beatson, D. Leviatan [69], R.A. DeVore [78, 79, 77], А.С. Шведов [59, 60, 61, 58], I. Gavrea [84], I. Gavrea, H. Gonska, R. Paltanea, G. Tachev [85], Я. Гілевича і І.О. Шевчука [33], Y. Hu, D. Leviatan, [119], K.A. Kopotun [91, 92], M.G. Pleshakov, A.V. Shatalina [106], І.О. Шевчука [62, 109 – 112], D. Leviatan, I.A. Shevchuk [98], X. Wu і S.P. Zhou [118], K.L. Zeller [120], S.P. Zhou [121] та інших.

Зокрема, при $r \ge p$ нерівність (1.9) є вірною, а при $r < p$ і $k+r \ge p+3$ нерівність (1.9) є хибною навіть зі сталою c, залежною від f .

Якщо ж $p > 2$, то нерівність (1.9) є вірною для випадку $k+r \le 2$ (див. О.С. Шведов [61]) і є хибною для всіх інших випадків при $p > 3$ [89, 17].

Випадок $p = 3$ до кінця не досліджений. Цьому випадку присвячені ще роботи [71, 18].

Д.Ж Ньюмен заснував новий напрямок у формозберігаючому наближенні – конаближення, або, точніше, кусково p-монотонне наближення. Саме він отримав аналог нерівності Джексона (1.9) для $p=1$, $r=0$ і $k=1$ [101, 102]. У подальшому цей напрямок розвивався в роботах [103 – 105] та в роботах авторів, названих вище.

Нагадаємо, функція $f\in C[a,b]$ є p – монотонною, $p\geq 2$, якщо $f\in C^{(p-2)}(a,b)$ і $f^{(p-2)}$ є опуклою функцією на (a,b). Нехай $\mathbb{Y}_s:=\{Y_s\}$, де Y_s набір точок: $y_{s+1}:=a<y_s<...<y_1<b=:y_0$, $s\geq 1$.

Через $\Delta^p(Y_s;[a,b])$ позначимо множину кусково- p -монотонних функцій, які змінюють свою p -монотонність в точках y_i , а саме $(-1)^{i-1}f^{(p-2)}$ є опуклою на (y_i,y_{i-1}), $1\leq i\leq s+1$.

Якщо $p=1$, $\Delta^1(Y_s;[a,b])$ – множина функцій $f\in C[a,b]$ такі, що $(-1)^{i-1}f$ є неспадними на (y_i,y_{i-1}), $1\leq i\leq s+1$.

Позначимо

$$\Delta^p(Y_s):=\Delta^p(Y_s;[-1,1]).$$

Для $g\in C[-1,1]$ позначимо

$$E_n(g):=\inf_{P_n\in\mathcal{P}_n}\|g-\mathbf{P}_n\|$$

величину найкращого наближення многочленами степеня не вище, ніж n.

Для $g\in\Delta^p(Y_s)$ позначимо

$$E_n^p(g,Y_s):=\inf_{P_n\in\mathcal{P}_n\cap\Delta^p(Y_s)}\|g-\mathbf{P}_n\|$$

величину найкращого кусково p-монотонного наближення алгебраїчними многочленами степеня не вище, ніж n.

Для випадків $p=1$ і $p=2$ справедливість або хибність нерівності

$$E_n^{(p)}(f,Y_s) \le \frac{c(p,k,r,s)}{n^r}\omega_k\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right),\ n \ge N, \qquad (1.10)$$

вичерпно досліджена в роботах авторів, цитованих вище.

Стосовно випадку $p>2$ з'ясовано, що нерівність (1.10) є хибною навіть, якщо дозволити обом сталим c та N залежить від функції f [97].

Нехай $W^r[a,b]$ – соболевський клас функцій $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, для яких на $[a,b]$ існує абсолютно неперервна $(r-1)$-ша похідна і таких що $\left\|f^{(r)}\right\|_{[a,b]} \le 1$, де $r\in\mathbb{N}$ і $\|g\|_{[a,b]} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]}|g(x)|$. Якщо $g\in C[a,b]$, то $\|g\|_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|g(x)|$. Коли $[a,b]=[-1,1]$, позначаємо $Y_s := Y_s[-1,1]$ (також $\Delta^p(Y_s)=\Delta^p(Y_s[-1,1])$), $W^r := W^r[-1,1]$ і $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{[-1,1]}$. Нехай $Y_1^* = \{-1,0,1\}$.

У 2016 році в роботі D. Leviatan, I.A. Shevchuk [97] були доведені наступні контрприклади.

Теорема 1.2. ([97]) *Для будь-якого* $p\ge 3$, $r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{N}$ *і* $Y_s\in\mathbb{Y}_s$, *існує функція* $f\in\Delta^p(Y_s)\cap W^r$, *така що*

$$\varlimsup_{n\to\infty} n^r E_n^{(p)}(f,Y_s) = \infty$$

Теорема 1.3. ([97]) *Нехай* $p\ge 3$, $s\in\mathbb{N}$ *і* $Y_s\in\mathbb{Y}_s$, *існує функція* $f\in\Delta^p(Y_s)\cap W^{p-2}$, *така що*

$$E_n^{(p)}\left(f,Y_s\right)\ge C\left(p,Y_s\right),\ n\in\mathbb{N},$$

де $C(p,Y_s)>0$ *залежить лише від* p *і* Y_s.

Слід зазначити, що і для $r=p-2$ теореми типу Вейєрштрасса є хибними. В теоремі 1.3 взято функцію $f(x)=\dfrac{1}{(p-2)!}|x-y_1|(x-y_1)^{p-3}$. І насправді відзначено, що $2^{j+2-p}f\in\Delta^{(p)}\left(Y_s\right)\cap W^j$ для всіх $j=1,\ldots,p-2$.

Наслідок. 1.1 ([97]) *Нехай* $p\ge 3$, $j\le p-2$, $s\in\mathbb{N}$ *і* $Y_s\in\mathbb{Y}_s$. *Існує функція* $f\in\Delta^{(p)}(Y_s)\cap W^j$, *така що*

$$E_n^{(p)}\left(f,Y_s\right)\ge C\left(p,Y_s\right),\ n\in\mathbb{N},$$

де $C(p,Y_s)>0$ залежить лише від p і Y_s.

Теорема 1.4. ([97]) *Нехай* $p\ge 3$, $s\in\mathbb{N}$ *і* $Y_s\in\mathbb{Y}_s$. *Існує функція* $f\in\Delta^{(p)}(Y_s)\cap W^{p-1}$, *така що*

$$nE_n^{(p)}\left(f,Y_s\right)\ge C\left(p,Y_s\right),\ n\in\mathbb{N},$$

де $C(p,Y_s)>0$ залежить лише від p і Y_s.

Теорема 1.5. ([97]) Нехай $r\ge 3$, $s\in\mathbb{N}$ *і* $Y_s\in\mathbb{Y}_s$. Для довільного набору точок Y_s та кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n\ge 0$, такої, що $\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n=+\infty$, існує функція $f\in\Delta^{(3)}\left(Y_s\right)\cap W^r$ така, що

$$\limsup_{n\to\infty}\alpha_n E_n^{(3)}\left(f,Y_s\right)n^{r-1}=\infty.$$

Раніше Л. Ющенко довела теорему:

Теорема 1.6. ([65]). Для будь-яких $p \geq 4$, $r \geq p$, довільного набору точок Y_s та кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \geq 0$, такої, що $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\alpha_n = +\infty$, існує функція $f \in \Delta^p\left(Y_s\left[a,b\right]\right) \cap C^r\left[a,b\right]$ така, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n E_n^{(p)}\left(f, Y_s, \left[a,b\right]\right) n^{r-p+3} = +\infty.$$

Легко бачити, що при $p = 3$ твердження теореми 1.4 і 1.5 відрізняються множником n. Через це виникає питання чи можна посилити на порядок твердження теореми 1.6?

Зауважимо, що якщо відповідь на дане питання позитивна, то теореми 1.2-1.4 і 1.5 є наслідками «об’єднаної негативної» теореми 3.1 (див. розділ 3.1).

Висновки до розділу 1

У цьому розділі зроблено огляд літератури за тематикою дисертації.

Поняття рівномірного модуля неперервності першого порядку було введене А. Лебегом у 1910 р. для періодичних неперервних функцій. У 1911 р. С.Н. Бернштейн для неперервних на відрізку функцій ввів поняття рівномірних модулів неперервності старших порядків. У подальшому ці поняття широко узагальнювались, зокрема, були введені інтегральні модулі неперервності довільних порядків. Усі ці узагальнення знаходили широкі застосування у різних розділах математики. Опис рівномірних модулів неперервності першого порядку було отримано А. Лебегом і С.М. Нікольським. Опис перших інтегральних модулів неперервності для функцій з простору L_2 у випадку однієї змінної було одержано О.В. Бєсовим і С.Б. Стєчкіним, а у випадку багатьох змінних – С.Б. Вакарчуком і М.Б. Вакарчуком. Для функцій з простору L_2 опис інтегральних модулів неперервності порядку α у випадку $\alpha = m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, було одержано Л.В. Тайковим, а у випадку $\alpha \in (0,+\infty) \setminus \mathbb{N}$ – С.Б. Вакарчуком. Крім цих випадків, описи інших модулів неперервності, наскільки нам відомо, досі не отримані. У зв'язку з цим для тих модулів неперервності, опис яких досі не відомий, є актуальним знаходження різних необхідних або достатніх умов на функцію ω для того, щоб вона збігалась або була в якомусь сенсі близькою до такого модуля неперервності деякої функції. Існує досить багато робіт, присвячених цій тематиці. Зокрема, для рівномірних та інтегральних модулів неперервності порядку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, отримано їх опис з точністю до порядкової еквівалентності; цей опис отримано в термінах k-мажорант. Але ні для рівномірних, ні для інтегральних модулів неперервності не було з'ясовано, чи кожна k-мажоранта є модулем неперервності порядку k деякої функції при $k \geq 3$.

Питання монотонного та опуклого, а пізніше p-монотонного, ко-p-монотонного наближення активно вивчаються, починаючи з 60-х – 70-х років XX ст., і є в цілому досить добре досліджені. Зокрема, отримано багато результа-тів щодо встановлення істинності чи хибності різноманітних нерівностей ти-пу нерівностей Джексона, однак навіть у цьому випадку залишалися деякі відкриті питання.

РОЗДІЛ 2

Про модулі неперервності старших та дробових порядків, породжені півгрупою операторів

2.1. Означення та властивості модулів неперервності дробових порядків

Нехай X – лінійний простір над полем дійсних або комплексних чисел, $\{T_h : h \ge 0\}$ – однопараметрична сім'я лінійних операторів $T_h : X \to X$, $h \ge 0$, яка утворює півгрупу, тобто $T_0 = I$ – одиничний оператор і $T_{h_1+h_2} = T_{h_1}T_{h_2}$ для довільних $h_1 \ge 0$ і $h_2 \ge 0$. Нехай також існує лінійна множина $Y \subset X$, на якій введено норму $\|\cdot\|$, відносно якої простір Y є банаховим, причому для всіх $f \in X$ і $h \ge 0$ має місце включення $(T_h - I)f \in Y$ і $\|T_h f - f\| \to 0$, $h \to 0$. Тоді для всіх $h \ge 0$ і $f \in Y$ справедливе включення $T_h f \in Y$, тобто $T_h : Y \to Y$, бо Y – лінійна множина, елемент $g := (T_h - I)f \in Y$, тому $T_h f = g + f \in Y$. Припустимо також, що для кожного $h \ge 0$ звуження оператора T_h на простір Y, яке ми позначимо $\tilde{T}_h$, є неперервним оператором і його норма $\|\tilde{T}_h\| \le 1$.

У випадку, коли $X = Y$ – банахів простір, то півгрупа $\{T_h : h \ge 0\}$, що задовольняє наведені припущення, називається ***стискуючою півгрупою*** класу (C_0) [38]. Для півгруп класу (C_0) поняття k-го модуля неперервності для натуральних k розглядалось в [42]. Для таких півгруп аналогічно до [72] можна означити поняття модуля неперервності порядку $\alpha > 0$.

Означення 2.1. Якщо $X = Y$ – банахів простір, $\{T_h : h \ge 0\}$ – стискуюча півгрупа класу (C_0), число $\alpha > 0$, то функція

$$\omega_\alpha(t) := \omega_\alpha(f,t) := \sup_{h\in[0,t]} \left\| (I - T_h)^\alpha f \right\|, \ t \geq 0, \tag{2.1}$$

де

$$(I - T_h)^\alpha f := \sum_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j T_h^j f \tag{2.2}$$

і

$$C_\alpha^0 := 1, \ C_\alpha^j := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!}, \ j \geq 1,$$

називається ***модулем неперервності елемента*** $f \in Y$ ***порядку*** $\alpha > 0$***, породженим півгрупою*** $\{T_h : h \geq 0\}$.

Відомо [57, пункт 407], що при всіх $x \in [-1,1]$ і $\alpha > 0$ справедливий розклад $(1-x)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j x^j$, причому ряд справа збігається абсолютно, зокрема, ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \left| C_\alpha^j \right|$ збігається. Звідси випливає коректність означення 2.1, оскільки $\|T_h\| \leq 1$. Крім того, при $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ з рівності $(1-x)^{\alpha+\beta} = (1-x)^\alpha (1-x)^\beta, \ x \in [-1,1]$, випливає співвідношення $C_{\alpha+\beta}^j = \sum_{k=0}^{j} C_\alpha^k C_\beta^{j-k}$, $j \geq 0$, з якого отримуємо, що за умов означення 2.1

$$(I - T_h)^{\alpha+\beta} = (I - T_h)^\alpha (I - T_h)^\beta \tag{2.3}$$

Нехай тепер $X \neq Y$. Якщо $f \in X$, то за припущенням елемент $g := (I - T_h) f \in Y$. Якщо $\alpha > 1$ і в ряді (2.2) замінити α на $\alpha - 1$ та f на g, то отриманий ряд збігається в Y і рівність

$$(I - T_h)^\alpha f := (I - T_h)^{\alpha-1} g = (I - T_h)^{\alpha-1} (I - T_h) f$$

визначає елемент з Y . Зі співвідношення (2.3) випливає, що оператор $(I - T_h)^\alpha$, визначений на X за допомогою попередньої рівності, є розширенням оператора, визначеного на Y формулою (2.2). Тому для елемента $f \in Y$ його модуль неперервності порядку $\alpha \geq 1$, визначений за означенням 2.1, збігається з модулем неперервності порядку α, визначеним згідно з наступним означенням 2.2. У цьому розумінні означення 2.1 та 2.2 узгоджені.

Означення 2.2. У випадку $X \neq Y$ ***модулем неперервності елемента*** $f \in X$ ***порядку*** $\alpha \geq 1$ ***, породженим півгрупою*** $\{T_h : h \geq 0\}$, називається функція

$$\omega_\alpha(t) := \omega_\alpha(f, t) := \sup_{h \in [0,t]} \left\| (I - T_h)^\alpha f \right\|, \; t \geq 0.$$

Якщо $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то модуль неперервності елемента $f \in X$ порядку $\alpha = k$ називається k ***-тим модулем неперервності елемента*** $f \in X$, при цьому і у випадку $X = Y$, і у випадку $X \neq Y$ справджується рівність

$$(I - T_h)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^j T_h^j ,$$

тобто ряд (2.2) перетворюється в скінченну суму.

Для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і числа $k \in \mathbb{N}$ розглядатимемо k -ту скінченну різницю в точці $x \in \mathbb{R}$ з кроком $h > 0$ [62, 82]:

$$\Delta_h^k(f, x) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j f(x + jh).$$

У наступних прикладах T_h – оператор зсуву на $h > 0$, визначений на функціях виду $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рівністю

$$(T_h f)(x) := f(x + h), \; x \in \mathbb{R}.$$

Тоді очевидно, що

$$T_0 = I\,,\ T_{h_1+h_2} = T_{h_1} \cdot T_{h_2}$$

для довільних $h_1 \ge 0$ і $h_2 \ge 0$, а також для всіх $k \in \mathbb{N}$ мають місце рівності

$$\left(T_h^k f\right)(x) = f\left(x + kh\right),$$

$$\left(\left(T_h - I\right)^k f\right)(x) = \Delta_h^k\left(f, x\right).$$

Приклад 1. Нехай $X = Y$ – це або $UC_b\left(\mathbb{R}\right)$ – простір обмежених рівномірно неперервних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, або $\tilde{C}$ – простір неперервних 2π -періодичних функцій; у кожному з цих просторів розглядається рівномірна норма:

$$\| f \| := \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f\left(x\right)\right|,\ f \in X\,;$$

при цьому якщо $f \in \widetilde{C}$, то

$$\| f \| = \max_{x\in[0,2\pi]} \left| f\left(x\right)\right| = \max_{x\in\mathbb{R}} \left| f\left(x\right)\right|.$$

Кожна функція $f \in X$ є рівномірно неперервною на $\mathbb{R}$. Звідси випливає, що

$$\left\| T_h f - f \right\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f\left(x+h\right) - f\left(x\right)\right| \to 0,\ h \to 0+\,.$$

З рівності

$$\left\| T_h f \right\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f\left(x+h\right)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f\left(u\right)\right| = \| f \|$$

випливає, що $\left\| T_h \right\| = 1$. Тому $\left\{T_h : h \ge 0\right\}$ – стискуюча півгрупа класу $\left(C_0\right)$ у просторі X. Якщо $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то k -тий модуль неперервності, породжений цією півгрупою,

$$\omega_k(f,t) = \sup_{h\in[0,t]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\Delta_h^k(f,x)\right|,\ t \ge 0,$$

є рівномірним k-тим модулем неперервності функції $f \in X$. Якщо $X = \tilde{C}$, то модуль неперервності порядку $\alpha > 1$, породжений цією півгрупою, розглядався в роботі [72].

Приклад 2. Нехай $X = Y$ – це або $L_p(\mathbb{R})$ – простір вимірних за Лебегом інтегровних на $\mathbb{R}$ в p-тому степені функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\| f \| := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},\ f \in L_p(\mathbb{R}),$$

або $\tilde{L}_p$ – простір вимірних за Лебегом 2π–періодичних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, інтегровних в p-тому степені на $[0, 2\pi]$, з нормою

$$\| f \| := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p},\ f \in \tilde{L}_p,\ 1 \le p < +\infty.$$

Тоді $\{T_h : h \ge 0\}$ – також стискуюча півгрупа класу (C_0) у просторі X [38]. Якщо $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то k-тий модуль неперервності, породжений цією півгрупою, є інтегральним k-тим модулем гладкості функції $f \in X$ [56]. Якщо $X = \tilde{L}_p$, то модуль неперервності порядку $\alpha > 1$, породжений цією півгрупою, розглядався в роботі [72].

Приклад 3. Нехай $X = UC(\mathbb{R})$ – лінійний простір рівномірно неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Y = UC_b(\mathbb{R})$ з рівномірною нормою. Покажемо, що якщо $f \in X$, то $(T_h - I) f \in Y$ для кожного $h > 0$. Дійсно, якщо $h > 0$ – довільне фіксоване число, то з рівномірної неперервності функції f

випливає, що для числа $\varepsilon = 1$ існує число $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ та для всіх $u \in (0, \delta)$ виконується нерівність

$$\left| f(x+u) - f(x) \right| < 1.$$

Виберемо число $N \in \mathbb{N}$ так, щоб $\frac{h}{N} < \delta$. Тоді для всіх $x \in \mathbb{R}$ маємо, що

$$\left| \left((T_h - I) f \right)(x) \right| = \left| f(x+h) - f(x) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left(f\left(x + k\frac{h}{N} + \frac{h}{N} \right) - f\left(x + k\frac{h}{N} \right) \right) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N-1} \left| f\left(x + k\frac{h}{N} + \frac{h}{N} \right) - f\left(x + k\frac{h}{N} \right) \right| < N.$$

(остання нерівність виконується, бо кожен доданок в сумі зліва менший 1, оскільки модуль різниці між аргументами функції f менше δ). Отримана нерівність означає, що функція $(T_h - I) f$ обмежена. Звідси, враховуючи, що різниця рівномірно неперервних на $\mathbb{R}$ функцій є рівномірно неперервною на $\mathbb{R}$ функцією випливає, що $(T_h - I) f \in Y = UC_b(\mathbb{R})$. Далі, аналогічно до прикладу 1, отримаємо, що $\{T_h : h \geq 0\}$ – півгрупа операторів, що задовольняє вимоги, наведені на початку роботи, а k -тий модуль неперервності, породжений цією півгрупою, при $k = 2, 3, 4$ є модулем неперервності, який розглядався в роботах [40, 2, 3] відповідно.

Приклад 3 узагальнює приклад 1, якщо в останньому $X = UC_b(\mathbb{R})$, бо має місце включення $UC_b(\mathbb{R}) \subset UC(\mathbb{R})$, причому обернене включення хибне.

Крім того, простір $UC(\mathbb{R})$ не можна розглядати як лінійний нормований простір з рівномірною нормою.

Лема 2.1. *Нехай виконується одна з умов: i) $X = Y$ – банахів простір, $\{T_h : h \ge 0\}$ – стискуюча півгрупа класу (C_0), $\alpha > 0$; ii) $X \ne Y$, $\{T_h : h \ge 0\}$ – півгрупа операторів в X, яка є стискуючою півгрупою класу (C_0) в Y, $\alpha \ge 1$. Нехай також $f \in X$, $\omega(\cdot) = \omega_\alpha(f, \cdot)$ – модуль неперервності елемента $f \in X$ порядку α, породжений півгрупою $\{T_h : h \ge 0\}$. Тоді мають місце такі властивості:*

1) $\omega(0) = 0$

2) функція ω є неспадною на $[0, +\infty)$;

3) функція ω є неперервною на $[0, +\infty)$;

4) якщо $\alpha = k \in \mathbb{N}$, то $\omega(n\delta) \le n^k \omega(\delta)$ для довільних $\delta \ge 0$ і $n \in \mathbb{N}$.

Зауваження. Поряд з умовами 1) – 4) для довільних невід’ємних функцій $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ розглядається ще така умова:

5) функція $(0, +\infty) \ni \delta \mapsto \omega(\delta) / \delta^\alpha$ монотонно не зростає на $(0, +\infty)$.

Дана лема для випадку модулів неперервності, розглянутих у прикладах 1 – 3, при $\alpha = k \in \mathbb{N}$ добре відома. Для рівномірних модулів неперервності функцій, заданих на відрізку, про аналогічні властивості див. в [62, 82]. Для модулів неперервності, породжених півгрупою операторів, при $\alpha = k \in \mathbb{N}$ за дещо інших припущень подібні властивості див. в [42]. Якщо $X = \tilde{C}$ або $X = \tilde{L}_p$, то для модуля неперервності порядку $\alpha > 1$, породженого півгрупою операторів зсуву, дані властивості розглядались в роботі [72]. Для повноти викладу наведемо вичерпне доведення леми 2.1, причому для п.3) дамо окреме доведення у випадку $\alpha = k \in \mathbb{N}$, бо у цьому випадку загальні міркування значно спрощуються.

Однак перед доведенням леми 2.1 відзначимо наступну елементарну властивість операторів півгрупи, якою ми широко користуватимемось далі без додаткових посилань. Якщо $\{T_h : h \geq 0\}$ – півгрупа операторів, то $T_{h_1}T_{h_2} = T_{h_2}T_{h_1}$ для довільних $h_1 \geq 0$ і $h_2 \geq 0$, бо $T_{h_1}T_{h_2} = T_{h_1+h_2} = T_{h_2+h_1} = T_{h_2}T_{h_1}$.

Доведення. Умова 1) виконується, бо $T_0 = I$ і $\omega_\alpha(0) = \|\bar{0}\| = 0$, де $\bar{0}$ – нульовий елемент лінійного нормованого простору Y.

Умова 2) виконується, бо якщо $0 \leq t_1 < t_2$, то $[0, t_1] \subset [0, t_2]$ і за означенням точної верхньої межі супремум по підмножині даної множини не перевищує супремума по всій даній множині.

Доведемо виконання умови 3). Нехай спочатку $\alpha = k \in \mathbb{N}$. Якщо $k = 1$, то

$$\omega_1(0+) = 0, \tag{2.4}$$

тому що

$$T_h f \to f, \; h \to 0+.$$

Нехай $k \geq 1$. Доведемо, що якщо $0 < t_1 \leq t_2$, то

$$\left|\omega_k(t_2) - \omega_k(t_1)\right| \leq k2^{k-1}\omega_1(t_2 - t_1) \tag{2.5}$$

Спрямувавши у нерівності (2.5) t_2 до t_1 справа і врахувавши співвідношення (2.4), отримаємо, що функція ω_k неперервна справа в довільній точці $t_1 \geq 0$. Аналогічно, спрямувавши у нерівності (2.5) t_1 до t_2 зліва і врахувавши співвідношення (2.4), отримаємо, що функція ω_k неперервна зліва в довільній точці $t_2 > 0$. Отже, умова 3) виконується.

Доведемо (2.5). Якщо $0 < t_1 \le t_2$, h_1 пробігає весь відрізок $\left[0, t_1\right]$, h_2 пробігає весь відрізок $\left[0, t_2 - t_1\right]$, то $h_1 + h_2$ пробігає весь відрізок $\left[0, t_2\right]$. Маємо, що (коментарі див. нижче).

$$\left|\left\|\left(T_{h_1+h_2} - I\right)^k f\right\| - \left\|\left(T_{h_1} - I\right)^k f\right\|\right| \le$$

$$\le \left\|\left(\left(T_{h_1+h_2} - I\right)^k - \left(T_{h_1} - I\right)^k\right) f\right\| =$$

$$= \left\|\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(T_{h_1+h_2} - I\right)^{k-1-j}\left(T_{h_1} - I\right)^j\right)\left(T_{h_1+h_2} - I - T_{h_1} + I\right) f\right\| \le$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^{k-1}\left\|\left(\widetilde{T}_{h_1+h_2} - \widetilde{I}\right)\right\|^{k-1-j}\left\|\left(\widetilde{T}_{h_1} - \widetilde{I}\right)\right\|^j\right)\left\|\widetilde{T}_{h_1}\right\|\left\|\left(\widetilde{T}_{h_2} - \widetilde{I}\right) f\right\| \le$$

$$\le k 2^{k-1} \omega_1\left(t_2 - t_1\right), \tag{2.6}$$

де I – одиничний оператор в Y. У першій нерівності ми використали нерівність $\left|\|x\| - \|y\|\right| \le \|x - y\|$, яка виконується для всіх елементів x, $y \in Y$ і випливає з означення норми. У першій рівності використано формулу для різниці k-тих степенів. У другій нерівності використано те, що норма суми не перевищує суми норм, норма добутку не перевищує добутку норм. а також рівність

$$\left(T_{h_1+h_2} - I - T_{h_1} + I\right) f = \left(T_{h_1+h_2} - T_{h_1}\right) f = T_{h_1}\left(T_{h_2} - I\right) f\ .$$

В останній нерівності ми скористались оцінками

$$\left\|\widetilde{T}_h\right\| \le 1,\ \left\|\tilde{I}\right\| = 1$$

і

$$\left\|\widetilde{T}_h - \tilde{I}\right\| \le \left\|\widetilde{T}_h\right\| + \left\|\tilde{I}\right\| \le 2$$

для $h \ge 0$.

Враховуючи нерівність (2.6) (в останній нерівності з наступного ланцюжка), отримуємо, що

$$\left|\omega_k\left(f, t_2\right) - \omega_k\left(f, t_1\right)\right| =$$

$$= \left| \sup_{\substack{h_1 \in [0, t_1] \\ h_2 \in [0, t_2 - t_1]}} \left\|\left(T_{h_1+h_2} - I\right)^k f\right\| - \sup_{h_1 \in [0, t_1]} \left\|\left(T_{h_1} - I\right)^k f\right\| \right| \le$$

$$\le \sup_{\substack{h_1 \in [0, t_1] \\ h_2 \in [0, t_2 - t_1]}} \left| \left\|\left(T_{h_1+h_2} - I\right)^k f\right\| - \left\|\left(T_{h_1} - I\right)^k f\right\| \right| \le$$

$$\le k 2^{k-1} \omega_1\left(t_2 - t_1\right).$$

Таким чином, нерівність (2.5), а отже, й виконання умови 3) у випадку $\alpha = k \in \mathbb{N}$ доведене.

Розглянемо тепер випадок, коли число α не обов'язково ціле. Нехай спочатку виконується умова *i)* і $\alpha > 0$.

Виберемо і зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Оскільки ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \left|C_\alpha^j\right|$ збігається абсолютно, то існує таке число $N \in \mathbb{N}$, що $\sum_{j=N+1}^{\infty} \left|C_\alpha^j\right| < \dfrac{\varepsilon}{3\left(\|f\| + 1\right)}$.

Оскільки за припущенням $\|T_h f - f\| \to 0$, $h \to 0$, то існує $\delta > 0$ таке, що $\|T_h f - f\| < \varepsilon \left(3\sum_{j=0}^{\infty} \left|C_\alpha^j\right| \right)^{-1}$ для всіх $h \in (0,\delta)$. Якщо $h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$ і $h_2 < \delta N^{-1}$, то з урахуванням нерівності $\|T_h\| \leq 1,\ h \geq 0$, маємо оцінку

$$\left| \left\| \left(I - T_{h_1+h_2}\right)^\alpha f \right\| - \left\| \left(I - T_{h_1}\right)^\alpha f \right\| \right| \leq$$

$$\leq \left\| \left(I - T_{h_1+h_2}\right)^\alpha f - \left(I - T_{h_1}\right)^\alpha f \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{j=0}^{N} C_\alpha^j (-1)^j \left(T_{h_1+h_2}^j - T_{h_1}^j\right) f + \sum_{j=N+1}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j T_{h_1+h_2}^j f - \sum_{j=N+1}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j T_{h_1}^j f \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N} \left|C_\alpha^j\right| \cdot \left\|T_{jh_1}\right\| \cdot \left\|T_{jh_2} f - f\right\| + 2 \sum_{j=N+1}^{\infty} \left|C_\alpha^j\right| \|f\| <$$

$$< \left(\sum_{j=0}^{N} \left|C_\alpha^j\right| \right) \cdot \varepsilon \left(3\sum_{j=0}^{\infty} \left|C_\alpha^j\right| \right)^{-1} + \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon. \qquad (2.7)$$

Якщо $t_0 \geq 0$, $t \geq t_0$, $|t - t_0| < \delta N^{-1}$, h_1 пробігає відрізок $[0,t_0]$, h_2 пробігає відрізок $[0,t-t_0]$, то $h_1 + h_2$ пробігає відрізок $[0,t]$ і з оцінки (2.7) випливає нерівність $0 \leq \omega(t) - \omega(t_0) \leq \varepsilon$.

Якщо $t_0 > 0$, $0 \leq t < t_0$, $|t - t_0| < \delta N^{-1}$, h_1 пробігає відрізок $[0,t]$, h_2 пробігає відрізок $[0,t_0 - t]$, то $h_1 + h_2$ пробігає відрізок $[0,t_0]$ і з оцінки (2.7) випливає нерівність $0 \leq \omega(t_0) - \omega(t) \leq \varepsilon$.

Таким чином, неперервність функції ω, якщо виконується умова *i)*, доведено.

У випадку, коли виконується умова *ii)*, то при $\alpha = 1$ неперервність функції ω одержується аналогічними міркуваннями з оцінки

$$\left| \left\| \left(I - T_{h_1+h_2} \right) f \right\| - \left\| \left(I - T_{h_1} \right) f \right\| \right| \le$$

$$\le \left\| \left(I - T_{h_1} T_{h_2} \right) f - \left(I - T_{h_1} \right) f \right\| \le$$

$$\le \left\| \tilde{T}_{h_1} \right\| \cdot \left\| T_{h_2} f - f \right\| \le \left\| T_{h_2} f - f \right\|, \; h_1 \ge 0, \; h_2 \ge 0 .$$

Нехай далі $\alpha > 1$.

Спершу доведемо, що для кожного $a > 0$ функція $\varphi(h) := \left\| \left(I - T_h \right) f \right\|$, $h \ge 0$, обмежена на відрізку $[0, a]$. За припущенням $\varphi(h) \to 0$, $h \to 0+$, тому існує таке число $h_0 > 0$, що $0 \le \varphi(h) \le 1$ для всіх $h \in [0, h_0]$. Зауважимо, що для всіх $h_1 \ge 0$ і $h_2 \ge 0$ справджується нерівність

$$\varphi(h_1 + h_2) = \left\| \left(I - T_{h_1} T_{h_2} \right) f \right\| = \left\| f - T_{h_1} f + T_{h_1} f - T_{h_1} T_{h_2} f \right\| \le$$

$$\le \left\| \left(I - T_{h_1} \right) f \right\| + \left\| \tilde{T}_{h_1} \right\| \cdot \left\| \left(I - T_{h_2} \right) f \right\| \le \varphi(h_1) + \varphi(h_2) .$$

Звідси методом математичної індукції отримуємо, що $\varphi(nh) \le n\varphi(h)$ для всіх $h \ge 0$ і $n \in \mathbb{N}$. Виберемо число $N \in \mathbb{N}$ так, щоб $\frac{a}{N} \in [0, h_0]$. Тоді для довільного $h \in [0, a]$ має місце включення $\frac{h}{N} \in [0, h_0]$, а отже,

$$0 \le \varphi(h) = \varphi\left(N \frac{h}{N} \right) \le N \varphi\left(\frac{h}{N} \right) \le N .$$

Таким чином, обмеженість функції φ на довільному відрізку $[0,a]$, де $a>0$, доведена.

Нехай $a>0$ – довільне фіксоване число. Покладемо $C:=\sup\limits_{h\in[0,a+1]}\varphi(h)$. Тоді $0\le C<+\infty$.

Для довільного фіксованого $\varepsilon>0$ виберемо число $N\in\mathbb{N}$ так, щоб $\sum\limits_{j=N+1}^{\infty}\left|C_{\alpha-1}^{j}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3C+1}$. Оскільки $\|T_h f-f\|\to 0$, $h\to 0+$, то існує таке $\delta>0$, що $\|T_h f-f\|<\varepsilon\left(6\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left|C_{\alpha-1}^{j}\right|\right)^{-1}$ для всіх $h\in(0,\delta)$. Якщо $h_1\in[0,a]$ і $0\le h_2<\min\left\{1,\delta(N+1)^{-1}\right\}$, то поклавши $g_1:=\left(I-T_{h_1}\right)f$, $g_2:=\left(I-T_{h_1+h_2}\right)f$, отримаємо оцінки $\|g_1\|\le C$, $\|g_2\|\le C$, а також для всіх $j\in\{0,1,\dots,N\}$

$$\left\|T_{jh_2}g_2-g_1\right\|=\left\|T_{jh_2}\left(I-T_{h_1+h_2}\right)f-\left(I-T_{h_1}\right)f\right\|\le$$

$$\le\left\|T_{jh_2}f-f\right\|+\left\|\tilde{T}_{h_1}\right\|\cdot\left\|T_{(j+1)h_2}-f\right\|\le\varepsilon\left(3\sum_{j=0}^{\infty}\left|C_{\alpha-1}^{j}\right|\right)^{-1},$$

використовуючи які одержимо нерівність

$$\left\|\left(I-T_{h_1+h_2}\right)^{\alpha}f-\left(I-T_{h_1}\right)^{\alpha}f\right\|=\left\|\left(I-T_{h_1+h_2}\right)^{\alpha-1}g_2-\left(I-T_{h_1}\right)^{\alpha-1}g_1\right\|=$$

$$=\left\|\left(\sum_{j=0}^{N}C_{\alpha-1}^{j}(-1)^{j}T_{h_1+h_2}^{j}\right)g_2+\left(\sum_{j=N+1}^{\infty}C_{\alpha-1}^{j}(-1)^{j}T_{h_1+h_2}^{j}\right)g_2-\right.$$

$$\left.-\left(\sum_{j=0}^{N}C_{\alpha-1}^{j}(-1)^{j}T_{h_1}^{j}\right)g_1-\left(\sum_{j=N+1}^{\infty}C_{\alpha-1}^{j}(-1)^{j}T_{h_1}^{j}\right)g_1\right\|\le$$

$$\le \sum_{j=0}^{N} \left| C_{\alpha-1}^{j} \right| \cdot \left\| T_{jh_1+jh_2} g_2 - T_{jh_1} g_1 \right\| + \sum_{j=N+1}^{\infty} \left| C_{\alpha-1}^{j} \right| \cdot \left\| \tilde{T}_{h_1+h_2}^{j} \right\| \cdot \left\| g_2 \right\| +$$

$$+ \sum_{j=N+1}^{\infty} \left| C_{\alpha-1}^{j} \right| \cdot \left\| \tilde{T}_{h_1}^{j} \right\| \cdot \left\| g_1 \right\| <$$

$$< \sum_{j=0}^{N} \left| C_{\alpha-1}^{j} \right| \cdot \left\| \tilde{T}_{jh_1} \right\| \cdot \left\| T_{jh_2} g_2 - g_1 \right\| + \frac{\varepsilon}{3C+1} C +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{3C+1} C < \varepsilon \left(3 \sum_{j=0}^{\infty} \left| C_{\alpha-1}^{j} \right| \right)^{-1} \sum_{j=0}^{N} \left| C_{\alpha-1}^{j} \right| + \frac{2}{3} \varepsilon < \varepsilon .$$

З отриманої нерівності, аналогічно до випадку *i)*, отримуємо, що для всіх $t_0 \in [0,a]$, $t \in [0,a]$, $|t - t_0| < \min\left\{1, \delta(N+1)^{-1}\right\}$ виконується нерівність $|\omega(t) - \omega(t_0)| \le \varepsilon$.

Звідси випливає неперервність функції ω на відрізку $[0,a]$. Оскільки число $a > 0$ довільне, то отримуємо, що функція ω неперервна на $[0,+\infty)$. Таким чином, виконання умови 3) доведене повністю.

Доведемо тепер виконання умови 4). Маємо, що для всіх $h \in [0,\delta]$

$$\left\| (T_{nh} - I)^k f \right\| = \left\| (T_h^n - I)^k f \right\| =$$

$$= \left\| (T_h^{n-1} + .. + I)^k (T_h - I)^k f \right\| \le$$

$$\le \left(\left\| \tilde{T}_h \right\|^{n-1} + ... + \left\| \tilde{I} \right\| \right)^k \left\| (T_h - I)^k f \right\| \le n^k \omega_k(\delta).$$

Якщо h пробігає весь відрізок $\left[0,\delta\right]$, то nh пробігає весь відрізок $\left[0,n\delta\right]$, тому

$$\omega_k\left(n\delta\right)=\sup_{h\in\left[0,\delta\right]}\left\|\left(T_{nh}-I\right)^k f\right\|\le n^k\omega_k\left(\delta\right).$$

Лема 2.1 доведена.

Зауваження. Уважний аналіз доведення леми 2.1 показує, що у випадку *i)* насправді доведена рівномірна неперервність функції ω на проміжку $[0,+\infty)$, а у випадку *ii)* – рівномірна неперервність цієї функції на кожному відрізку $\left[0,a\right]$, де $a>0$.

Зауваження. Для $\alpha=k\in\mathbb{N}$ і невід'ємних функцій $\omega:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ з умови 5) випливає виконання умови 4). Дійсно, зафіксуємо довільні $\delta>0$ та $n\in\mathbb{N}$ і застосуємо означення незростаючої функції до функції $\left(0,+\infty\right)\ni\delta\mapsto\omega\left(\delta\right)/\delta^k$ та точок $\delta_1:=\delta$ і $\delta_2:=n\delta$, для яких $\delta_1<\delta_2$. В силу умови 5) отримаємо, що

$$\frac{\omega\left(\delta_1\right)}{\delta_1^k}=\frac{\omega\left(\delta\right)}{\delta^k}\ge\frac{\omega\left(n\delta\right)}{\left(n\delta\right)^k}=\frac{\omega\left(\delta_2\right)}{\delta_2^k},$$

звідки і випливає нерівність з умови 4). При $\delta=0$ нерівність з умови 4) правильна, бо дійсне число $\omega\left(0\right)\ge 0$ і $1\le n^k$.

Наступний приклад показує, що нерівність з умови 4), тобто нерівність

$$\omega_\alpha\left(f,nt\right)\le n^\alpha\omega_\alpha\left(f,t\right),\ n\in\mathbb{N},\ t>0, \tag{2.8}$$

для не цілих α, взагалі кажучи, хибна.

Приклад 4. Нехай $X=Y$ – банахів простір обмежених рівномірно неперервних на $[0,+\infty)$ функцій $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ з рівномірною нормою,

$(T_h f)(x) = f(x+h)$, $x \ge 0$, $h \ge 0$. Тоді $\{T_h : h \ge 0\}$ є стискуючою півгрупою в X класу (C_0). Однак якщо $\alpha = \frac{1}{2}$ і $f(x) = 1 - \frac{1}{3}x$, $x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x$, $x \in (1,2]$, $f(x) = 0$, $x > 2$, то для породженого півгрупою $\{T_h : h \ge 0\}$ модуля неперервності при $n = 2$ і $t = 1$ нерівність (2.8) хибна, тобто

$$\omega_{\frac{1}{2}}(f,2) > \sqrt{2}\,\omega_{\frac{1}{2}}(f,1). \tag{2.9}$$

Доведемо нерівність (2.9). Позначимо

$$g(x,h) := \left((I - T_h)^{1/2} f\right)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{j} (-1)^j \left(T_h^j f\right)(x)$$
$$= f(x) - \frac{1}{2} f(x+h) - \frac{1}{8} f(x+2h) - \ldots,\ x \ge 0,\ h \ge 0.$$

Зауважимо, що $C_{\frac{1}{2}}^{j} (-1)^j < 0$, $j \ge 1$. З розкладу

$$(1-x)^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{\alpha}^{j} (-1)^j x^j$$

при $x = 1$ отримаємо, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| C_{\frac{1}{2}}^{j} \right| = -\sum_{j=1}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{j} (-1)^j = -\left(\sum_{j=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{j} (-1)^j - 1 \right) = -\left((1-1)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) = 1.$$

Звідси, враховуючи невід'ємність функції f, випливає, що $0 \le g(x,h) \le f(x)$. З цієї нерівності та формули (2.1) отримуємо

$$\omega_{\frac{1}{2}}(f,t) = \sup_{h \in [0,t],\, x \ge 0} |g(x,h)| = \sup_{h \in [0,t],\, x \ge 0} g(x,h).$$

Маємо, що $\omega_{\frac{1}{2}}(f,2)=\sup\limits_{h\in[0,2],\,x\geq 0} g(x,h)=1$, бо $g(x,h)\leq f(x)\leq 1$, причому рівність в цій нерівності досягається, наприклад, при $x=0$, $h=2$. Враховуючи, що функція g є неспадною за h, маємо, що якщо $h\in[0,1]$, то $g(x,h)\leq g(x,1)=f(x)-\frac{1}{2}f(x+1)=1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}(x+1)\right)=\frac{2}{3}$ при $x\in[0,1]$ і $g(x,h)\leq f(x)-\frac{1}{2}f(x+1)\leq f(1)$ при $x>1$. Тому $\omega_{\frac{1}{2}}(f,1)=\sup\limits_{h\in[0,1],x\geq 0} g(x,h)=\frac{2}{3}$.

Оскільки $1>\sqrt{2}\,\frac{2}{3}$, то нерівність (2.9) доведено.

2.2. Постановка задачі та формулювання основного результату

Означення 2.3. ([62, 82]) Функції, що задовольняють умови 1) – 3) і 5) (див. лему 2.1 і зауваження після неї), називаються k***-мажорантами.***

І.О. Шевчук звернув увагу на таке питання. Чи правильно, що кожна k-мажоранта на деякому відрізку $[0,\delta_0]$, $\delta_0>0$, є рівномірним модулем неперервності k-го порядку якоїсь функції?

Розглядатимемо також більш загальне питання. Чи правильно, що кожна k-мажоранта на деякому відрізку $[0,\delta_0]$, $\delta_0>0$, є модулем неперервності k-го порядку, породженим півгрупою операторів, для якогось елемента $f\in X$?

При $k=1$ для рівномірного модуля неперервності (зокрема, за умов прикладу 1 чи прикладу 3) позитивна відповідь на це питання помічена ще С.М. Нікольським [43, 82, 40]. За умов прикладу 3 негативну відповідь на це питання при $k=2$ дав С.В. Конягін [40], а при $k=3$ і $k=4$ – автори [2, 3]. Для цього в роботі [40] було встановлено нерівність

$$2\omega_2(f,T)\le\omega_2(f,T+t)+\omega_2(f,T-t)+2\omega_2(f,t), \tag{2.10}$$

де $0\le t\le T$, $f\in UC(\mathbb{R})$, а в роботах [4] і [5] отримано нерівності:

$$2\omega_3(f,nt)\le\omega_3(f,(n+1)t)+\omega_3(f,(n-1)t)+6n\omega_3(f,t), \tag{2.11}$$

$$2\omega_4(f,nt)\le\omega_4(f,(n+1)t)+\omega_4(f,(n-1)t)+\left(12n^2+2\right)\omega_4(f,t), \tag{2.12}$$

де $t>0$, $n\in\mathbb{N}$, $f\in UC(\mathbb{R})$, доведення яких наводяться у підрозділі 2.6.

У цьому розділі ми даємо негативну відповідь на поставлене питання для всіх $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, та довільного лінійного простору, що задовольняє умови, наведені на початку пункту 2.1, зокрема, за умов усіх прикладів $1-3$. При цьому отриманий результат узагальнюється на випадок не цілих α. Наведемо основний результат цього розділу.

Теорема 2.1. ([70] – випадок $\alpha = k \in \mathbb{N}$; [8]– випадок не цілих α). *Нехай виконується одна з умов:*

i) $X = Y$ *– банахів простір,* $\{T_h : h \geq 0\}$ *– стискуюча півгрупа класу* (C_0),

$$\alpha \in \{2\} \bigcup [3, +\infty), \ \gamma(\alpha) = \begin{cases} \alpha - 1, \ \alpha \in \mathbb{N}, \ \alpha \geq 2, \\ \alpha - \dfrac{1}{2}, \ \alpha \in [3, +\infty) \setminus \mathbb{N}; \end{cases}$$

ii) $X \neq Y$, $\{T_h : h \geq 0\}$ *– півгрупа операторів в* X*, яка є стискуючою півгрупою класу* (C_0) *в* Y, $\alpha \in \{2; 3\} \bigcup [4, +\infty)$, $\gamma(\alpha) = \begin{cases} \alpha - 1, \ \alpha \in \mathbb{N}, \ \alpha \geq 2, \\ \alpha - \dfrac{1}{2}, \ \alpha \in [4, +\infty) \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$

Тоді для довільного числа $\beta > \gamma(\alpha)$ *існує така функція* $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, *не тотожно рівна нулю, що задовольняє умови 1) – 3) леми 2.1, причому функція* $(0, +\infty) \ni \delta \mapsto \omega(\delta) / \delta^{\beta}$ *є незростаючою на* $(0, +\infty)$ *і ні для якого елемента* $f \in X$ *не виконується рівність*

$$\lim_{\delta \to 0+} \omega_{\alpha}(f, \delta) / \omega(\delta) = 1.$$

Для отримання цього результату ми в цілому повторюємо міркування з робіт [40, 2, 3, 70, 6], але при цьому застосовуємо нову техніку для отримання допоміжних нерівностей: теореми 2.2, яка встановлює допоміжну нерівність для k -го модуля неперервності у випадку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, і теореми 2.3, яка встановлює допоміжну нерівність при не цілих α.

Разом з тим зауважимо, що для рівномірних модулів неперервності функцій, заданих на відрізку, відповідь на дане питання залишається невідомою навіть при $k = 2$.

2.3. Допоміжна нерівність для k-го модуля неперервності у випадку $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

Теорема 2.2. ([70]) *Нехай* $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $f \in X$, $\omega_k(f,\cdot)$ – k*-тий модуль неперервності, породжений півгрупою* $\{T_h : h \geq 0\}$. *Тоді*

$$2\omega_k(f,nt) \leq \omega_k(f,(n+1)t) + \omega_k(f,(n-1)t) + 2(2^k-1)n^{k-2}\omega_k(f,t),\ t>0. \quad (2.13)$$

Доведення. Для $n=1$ нерівність (2.13) є тривіальною, тому вважаємо, що $n \geq 2$. Нехай $t>0$ і $h \in (0,t]$ – довільні фіксовані числа. За припущенням звуження $\tilde{T}_h$ оператора T_h на простір Y є лінійним неперервним оператором на Y і $\|\tilde{T}_h\| \leq 1$. Тому для оператора

$$S := T_h^{n-1} + T_h^{n-2} + \ldots + T_h + I$$

його звуження на Y – це лінійний неперервний оператор

$$\tilde{S} = \tilde{T}_h^{n-1} + \tilde{T}_h^{n-2} + \ldots + \tilde{T}_h + \tilde{I},$$

де $\tilde{I}$ – одиничний оператор в Y, причому

$$\|\tilde{S}\| = \left\|\tilde{T}_h^{n-1} + \tilde{T}_h^{n-2} + \ldots + \tilde{T}_h + \tilde{I}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\tilde{T}_h^{n-1}\right\| + \left\|\tilde{T}_h^{n-2}\right\| + \ldots + \left\|\tilde{T}_h\right\| + \left\|\tilde{I}\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\tilde{T}_h\right\|^{n-1} + \left\|\tilde{T}_h\right\|^{n-2} + \ldots + \left\|\tilde{T}_h\right\| + \left\|\tilde{I}\right\| \leq n.$$

Враховуючи, що

$$T_h^n - I = \left(T_h^{n-1} + T_h^{n-2} + \ldots + T + I\right)\left(T_h - I\right) = S\left(T_h - I\right),$$

аналогічні рівності для $T_h^{n+1} - I$ та $T_h^{n-1} - I$, а також співвідношення

$$T_h^n + T_h^{n-1} + T_h^{n-2} + \ldots + T_h + I = S + T_h^n,$$

$$T_h^{n-2} + T_h^{n-3} + T_h^{n-4} + \ldots + T_h + I = S - T_h^{n-1},$$

одержуємо, що для кожного елемента $f \in X$ має місце тотожність

$$\left(\left(T_h^{n+1} - I\right)^k + \left(T_h^{n-1} - I\right)^k - 2\left(T_h^n - I\right)^k\right) f =$$

$$= \left(\left(S + T_h^n\right)^k + \left(S - T_h^{n-1}\right)^k - 2S^k\right)\left(T_h - I\right)^k f =$$

$$= \left(\left(\tilde{S} + \tilde{T}_h^n\right)^k + \left(\tilde{S} - \tilde{T}_h^{n-1}\right)^k - 2\tilde{S}^k\right)\left(T_h - I\right)^k f,$$

причому (коментарі див. нижче)

$$\left\|\left(\tilde{S} + \tilde{T}_h^n\right)^k + \left(\tilde{S} - \tilde{T}_h^{n-1}\right)^k - 2\tilde{S}^k\right\| =$$

$$= \left\|\left(\tilde{S}^k + k\tilde{S}^{k-1}\tilde{T}_h^n + \sum_{j=0}^{k-2} C_k^j \tilde{S}^j \tilde{T}_h^{n(k-j)}\right) + \left(\tilde{S}^k - k\tilde{S}^{k-1}\tilde{T}_h^{n-1} + \sum_{j=0}^{k-2} C_k^j \tilde{S}^j \left(-\tilde{T}_h^{n-1}\right)^{k-j}\right) - 2\tilde{S}^k\right\| \le$$

$$\le \left\|k\tilde{T}_h^{n-1}\tilde{S}^{k-1}\left(\tilde{T}_h - \tilde{I}\right)\right\| + \sum_{j=0}^{k-2} C_k^j \left\|\tilde{S}^j \tilde{T}_h^{n(k-j)}\right\| +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-2} C_k^j \left\|\tilde{S}^j \left(-\tilde{T}_h^{n-1}\right)^{k-j}\right\| \le \left\|k\tilde{T}_h^{n-1}\tilde{S}^{k-2}\left(\tilde{T}_h^n - \tilde{I}\right)\right\| +$$

$$+ 2\sum_{j=0}^{k-2} C_k^j n^j \le 2kn^{k-2} + 2n^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2} C_k^j =$$

$$= 2\left(k + 2^k - 1 - k\right)n^{k-2} = 2\left(2^k - 1\right)n^{k-2};$$

у першій та передостанній рівностях ми скористались формулою бінома Ньютона; у першій нерівності після взаємного знищення однакових доданків ми скористалися тим, що норма суми операторів не перевищує суми їх норм, а в другій і третій нерівностях – тим, що норма добутку операторів не перевищує добутку їх норм, а також оцінками $\|\widetilde{T_h}\| \le 1$, $\|\widetilde{S}\| \le n$ і $\|\widetilde{I}\| = 1$.

Отже, справедлива оцінка

$$\left\|\left(T_h^{n+1}-I\right)^k f+\left(T_h^{n-1}-I\right)^k f-2\left(T_h^n-I\right)^k f\right\| \le$$

$$\le 2\left(2^k-1\right)n^{k-2}\left\|\left(T_h-I\right)^k f\right\| \le$$

$$\le 2\left(2^k-1\right)n^{k-2}\omega_k\left(f,t\right), \tag{2.14}$$

звідки випливає, що

$$2\left\|\left(T_h^n-I\right)^k f\right\| \le$$

$$\le \left\|\left(T_h^{n+1}-I\right)^k f+\left(T_h^{n-1}-I\right)^k f-\left(\left(T_h^{n+1}-I\right)^k f+\left(T_h^{n-1}-I\right)^k f-2\left(T_h^n-I\right)^k f\right)\right\| \le$$

$$\le \left\|\left(T_h^{n+1}-I\right)^k f\right\|+\left\|\left(T_h^{n-1}-I\right)^k f\right\|+$$

$$+\left\|\left(T_h^{n+1}-I\right)^k f+\left(T_h^{n-1}-I\right)^k f-2\left(T_h^n-I\right)^k f\right\| \le$$

$$\left\|\left(T_h^{n+1}-I\right)^k f\right\|+\left\|\left(T_h^{n-1}-I\right)^k f\right\|+2\left(2^k-1\right)n^{k-2}\omega_k\left(f,t\right) \le$$

$$\le \omega_k\left(f,(n+1)t\right)+\omega_k\left(f,(n-1)t\right)+2\left(2^k-1\right)n^{k-2}\omega_k\left(f,t\right).$$

Якщо h пробігає весь проміжок $(0,t]$, то nh пробігає весь проміжок $(0,nt]$, тому з останньої нерівності та означення точної верхньої межі й одержуємо нерівність (2.13).

Теорему 2.2 доведено.

Коефіцієнт при $\omega_k(f,t)$ в останньому доданку правої частини нерівності (2.13) при $k=2,3,4$ є дещо більшим, ніж в нерівності С.В. Конягіна (2.10) для другого і нерівностях (2.11) і (2.12) для третього і четвертого рівномірних модулів неперервності. Це пояснюється, взагалі кажучи, тим, що оператор зсуву має обернений, а оператор з півгрупи не обов'язково.

Наслідок 2.1. *Нехай* $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$, $\omega(\cdot):=\omega_k(f,\cdot)$ k *-тий модуль неперервності, породжений півгрупою* $\{T_h : h\geq 0\}$, $\omega(t)/t^{k-1}\to 0$ *при* $t\to 0+$, *а також в точці* $t_0>0$ *функція* ω *має односторонні похідні* $\omega'_-(t_0)$ *і* $\omega'_+(t_0)$. *Тоді* $\omega'_-(t_0)\leq\omega'_+(t_0)$.

Доведення. Запишемо нерівність (2.13) для функції ω, довільного числа $n\in\mathbb{N}$ і $t=t_0/n$ в такій формі

$$\frac{\omega\left(t_0-\dfrac{t_0}{n}\right)-\omega(t_0)}{-\dfrac{t_0}{n}}\leq$$

$$\leq\frac{\omega\left(t_0+\dfrac{t_0}{n}\right)-\omega(t_0)}{\dfrac{t_0}{n}}+2\left(2^k-1\right)\frac{\omega\left(\dfrac{t_0}{n}\right)}{\dfrac{t_0^{k-1}}{n^{k-1}}}t_0^{k-2}.$$

Спрямувавши в цій нерівності $n\to\infty$, одержимо, що $\omega'_-(t_0)\leq\omega'_+(t_0)$.

Наслідок 2.2. *Для довільного* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, *функція* $\varphi(t) = t^k$, $t \in [0,1/2]$, $\varphi(t) = 1/2^k$, $t > 1/2$, *задовольняє умови 1) – 3) і 5) (див. лему 2.1 і зауваження після неї), але не є модулем неперервності* k*-го порядку жодного з елементів* $f \in X$.

Доведення випливає з наслідку 2.1, оскільки $\varphi(t)/t^{k-1} = t \to 0+$ при $t \to 0+$, але $\omega'_{-}(1/2) = k/2^{k-1} > \omega'_{+}(0) = 0$.

Наслідок 2.2 значно посилює теорема 2.1, доведення якої наводиться у підрозділі 2.5.

2.4. Допоміжна нерівність для модуля неперервності дробового порядку

Теорема 2.3. *Нехай виконується одна з умов: i)* $X = Y$ *– банахів простір,* $\{T_h : h \geq 0\}$ *– стискуюча півгрупа класу* (C_0), $\alpha \geq 3$*; ii)* $X \neq Y$, $\{T_h : h \geq 0\}$ *– півгрупа операторів в* X*, яка є стискуючою півгрупою класу* (C_0) *в* Y, $\alpha \geq 4$*. Нехай також* $f \in X$, $\omega_\alpha(f, \cdot)$ *– модуль неперервності порядку* α*, породжений півгрупою* $\{T_h : h \geq 0\}$, $n \in \mathbb{N}$*. Тоді*

$$2\omega_\alpha(f, nt) \leq \omega_\alpha(f, (n+1)t) + \omega_\alpha(f, (n-1)t) + C_n \omega_\alpha(f, t), \; t > 0, \qquad (2.15)$$

де C_n *– стала, що залежить лише від* α *і* n*, причому* $C_n = O\left(n^{\alpha - \frac{3}{2}}\right)$, $n \to \infty$.

Доведення. Доведемо нерівність

$$\left\| \left(\left(I - T_h^{n+1}\right)^\alpha - 2\left(I - T_h^n\right)^\alpha + \left(I - T_h^{n-1}\right)^\alpha \right) f \right\| \leq C_n \left\| \left(I - T_h\right)^\alpha f \right\|, \qquad (2.16)$$

де $h > 0$ і C_n – стала, що залежить лише від α і n, причому $C_n = O\left(n^{\alpha - \frac{3}{2}}\right)$, $n \to \infty$. Досить розглянути випадок, коли виконується умова *i)* та $\alpha \geq 3$. Дійсно, нехай у цьому випадку нерівність (2.16) доведена. Тоді, якщо виконується умова *ii)* та $\alpha \geq 4$, то можемо застосувати цю нерівність до числа $\alpha - 1$ (замість α), елемента $g := (I - T_h) f \in Y$ (замість f) та простору Y (для них виконується умова *i)*) і таким чином отримаємо нерівність (2.16) у випадку, коли виконується умова *ii)*.

Далі вважаємо, що виконується умова *i)* та $\alpha \ge 3$. Для спрощення записів зафіксуємо число $h > 0$ і позначимо $T := T_h$. Щоб довести нерівність (2.16), отримаємо оцінку

$$\left\| \left(\left(I - \varepsilon^{n+1} T^{n+1} \right)^{\alpha} - 2\left(I - \varepsilon^{n} T^{n} \right)^{\alpha} + \left(I - \varepsilon^{n-1} T^{n-1} \right)^{\alpha} \right) f \right\| \le C_n \left\| \left(I - \varepsilon T \right)^{\alpha} f \right\|, \qquad (2.17)$$

де $\varepsilon \in \left(\frac{1}{4}, 1 \right)$ – довільне фіксоване число.

Відомо [57, пункт 407], що при всіх $x \in (-1, 1)$ і $\beta \in \mathbb{R}$ справедливий розклад

$$(1 - x)^{\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{\beta}^{j} (-1)^{j} x^{j}, \qquad (2.18)$$

причому ряд справа збігається абсолютно. Тому рівність

$$\left(I - \varepsilon T \right)^{-\beta} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{-\beta}^{j} (-1)^{j} \varepsilon^{j} T^{j}, \qquad (2.19)$$

де $\varepsilon \in (0, 1)$, в якій ряд справа збігається абсолютно у просторі $L(X)$ лінійних неперервних операторів, що діють з X в X, коректно визначає оператор $\left(I - \varepsilon T \right)^{-\beta} \in L(X)$. Аналогічно до доведення рівності (2.3), отримуємо, що

$$\left(I - \varepsilon T \right)^{-\beta} \left(I - \varepsilon T \right)^{\beta} = I. \qquad (2.20)$$

Щоб довести нерівність (2.17), досить встановити нерівність

$$\left\| \left(\left(I - \varepsilon^{n+1} T^{n+1} \right)^{\alpha} - 2\left(I - \varepsilon^{n} T^{n} \right)^{\alpha} + \left(I - \varepsilon^{n-1} T^{n-1} \right)^{\alpha} \right) \left(I - \varepsilon T \right)^{-\alpha} \right\| \le C_n. \qquad (2.21)$$

Дійсно, якщо нерівність (2.21) доведено, то скориставшись рівністю (2.20), асоціативністю множення операторів, означенням норми оператора і нерівністю (2.21), отримаємо

$$\left\| \left(\left(I-\varepsilon^{n+1}T^{n+1}\right)^{\alpha} - 2\left(I-\varepsilon^{n}T^{n}\right)^{\alpha} + \left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\right)^{\alpha} \right) f \right\| =$$

$$= \left\| \left(\left(I-\varepsilon^{n+1}T^{n+1}\right)^{\alpha} - 2\left(I-\varepsilon^{n}T^{n}\right)^{\alpha} + \left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\right)^{\alpha} \right) \left(I-\varepsilon T\right)^{-\alpha} \left(I-\varepsilon T\right)^{\alpha} f \right\| \le$$

$$\le C_n \left\| \left(I-\varepsilon T\right)^{\alpha} f \right\|,$$

тобто одержимо нерівність (2.17).

Розглянемо допоміжну операторнозначну функцію

$$f\left(s_1,s_2\right) = s_1 s_2 \varepsilon^2 T^2 + \left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right) I + \left(s_1\left(1-s_2\right) + s_2\left(1-s_1\right)\right)\varepsilon T,\ s_1,s_2 \in \left[0,1\right].$$

Оскільки $s_1,s_2 \in \left[0,1\right]$, то $s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right) \ge 0$, тому

$$\left\| f\left(s_1,s_2\right) \right\| \le s_1 s_2 \varepsilon^2 \left\|T\right\|^2 + \left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right) +$$

$$+\left(s_1+s_2-2s_1s_2\right)\varepsilon\left\|T\right\| \le s_1s_2 + \left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right) + \left(s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right) = 1, \quad (2.22)$$

звідки

$$\left\| \varepsilon^{n-1}T^{n-1} f\left(s_1,s_2\right) \right\| \le \varepsilon^{n-1} \left\|T\right\|^{n-1} \le \varepsilon^{n-1} < 1, \quad (2.23)$$

отже, є коректним означення наступної допоміжної функції

$$F\left(s_1,s_2\right) = \left(I - \varepsilon^{n-1}T^{n-1} f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha} := \sum_{j=0}^{\infty} C_{\alpha}^{j} \left(-1\right)^j \varepsilon^{j(n-1)} T^{j(n-1)} f^{j}\left(s_1,s_2\right), \quad (2.24)$$

$s_1,s_2 \in \left[0,1\right]$. Відзначимо, що

$$f(0,0)=I;\ f(1,0)=f(0,1)=\varepsilon T;\ f(1,1)=\varepsilon^2T^2;$$

$$F(0,0)=\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\right)^{\alpha};\ F(1,0)=F(0,1)=\left(I-\varepsilon^{n}T^{n}\right)^{\alpha};\ F(1,1)=\left(I-\varepsilon^{n+1}T^{n+1}\right)^{\alpha}.$$

Тому

$$\left(I-\varepsilon^{n+1}T^{n+1}\right)^{\alpha}-2\left(I-\varepsilon^{n}T^{n}\right)^{\alpha}+\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\right)^{\alpha}=$$

$$=F(1,1)-F(0,1)-F(1,0)+F(0,0)=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^1 F''_{s_1s_2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2\right)d\tau_1. \tag{2.25}$$

Оскільки сума степеневого ряду є нескінченно диференційовною на інтервалі збіжності і її похідну можна знайти почленним диференціюванням ряду, а також функція f є нескінченно диференційовною як операторнозначний многочлен, то похідна $F''_{s_1s_2}(s_1,\, s_2)$ існує для всіх $s_1, s_2\in[0,1]$ і її можна знайти почленним диференціюванням ряду (2.24). Оскільки для всіх $x\in(-1,1)$ справедливі рівності

$$\left((1-x)^{\alpha}\right)'=\left(\sum_{j=0}^{\infty}C_{\alpha}^{j}(-1)^{j}x^{j}\right)'=\sum_{j=1}^{\infty}jC_{\alpha}^{j}(-1)^{j}x^{j-1}=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha C_{\alpha-1}^{j-1}(-1)^{j}x^{j-1}=-\alpha\sum_{j=0}^{\infty}C_{\alpha-1}^{j}(-1)^{j}x^{j}=-\alpha(1-x)^{\alpha-1},$$

$$\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)C_{\alpha}^{j}(-1)^{j}x^{j-2}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}C_{\alpha}^{j}(-1)^{j}x^{j}\right)''=\left((1-x)^{\alpha}\right)''=$$

$$\left(-\alpha(1-x)^{\alpha-1}\right)'=\alpha(\alpha-1)(1-x)^{\alpha-2},$$

то з зображення (2.24) маємо, що

$$F''_{s_1s_2}\left(s_1,\, s_2\right)=\sum_{j=0}^{\infty}C_{\alpha}^{j}\left(-1\right)^{j}\varepsilon^{(n-1)j}T^{(n-1)j}\Big(j\, f^{\,j-1}\left(s_1,s_2\right)f''_{s_1s_2}\left(s_1,s_2\right)+$$

$$+j\left(j-1\right)f^{\,j-2}\left(s_1,s_2\right)f'_{s_1}\left(s_1,s_2\right)f'_{s_2}\left(s_1,s_2\right)\Big)=$$

$$=-\alpha\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha-1}f''_{s_1s_2}\left(s_1,s_2\right)+$$

$$+\alpha\left(\alpha-1\right)\varepsilon^{2(n-1)}T^{2(n-1)}\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha-2}f'_{s_1}\left(s_1,s_2\right)f'_{s_2}\left(s_1,s_2\right),$$

де

$$f''_{s_1s_2}\left(s_1,\, s_2\right)=\varepsilon^2T^2+I-2\varepsilon T=\left(I-\varepsilon T\right)^2,$$

$$f'_{s_1}\left(s_1,\, s_2\right)=s_2\varepsilon^2T^2-\left(1-s_2\right)I+\left(1-2s_2\right)\varepsilon T=$$

$$=s_2\left(I-\varepsilon T\right)^2-\left(I-\varepsilon T\right)=\left(I-\varepsilon T\right)\left(s_2\left(I-\varepsilon T\right)-I\right),$$

$$f'_{s_2}\left(s_1,\, s_2\right)=s_1\varepsilon^2T^2-\left(1-s_1\right)I+\left(1-2s_1\right)\varepsilon T=$$

$$=s_1\left(I-\varepsilon T\right)^2-\left(I-\varepsilon T\right)=\left(I-\varepsilon T\right)\left(s_1\left(I-\varepsilon T\right)-I\right).$$

Тому

$$F''_{s_1s_2}\left(s_1,s_2\right)=-\alpha\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha-1}\left(I-\varepsilon T\right)^2+$$

$$+\alpha\left(\alpha-1\right)\varepsilon^{2(n-1)}T^{2(n-1)}\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha-2}\cdot$$

$$\cdot\left(s_2\left(I-\varepsilon T\right)^2-\left(I-\varepsilon T\right)\right)\left(s_1\left(I-\varepsilon T\right)^2-\left(I-\varepsilon T\right)\right)=$$

$$=-\alpha\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha-1}\left(I-\varepsilon T\right)^2+$$

$$+\alpha\left(\alpha-1\right)\varepsilon^{2n-2}T^{2n-2}\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha-2}\left(I-\varepsilon T\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left(s_2\left(I-\varepsilon T\right)-I\right)\left(s_1\left(I-\varepsilon T\right)-I\right). \qquad (2.26)$$

Щоб отримати оцінку (2.21), досить, враховуючи рівність (2.25), одержати оцінку норми оператора $F''_{s_1s_2}\left(s_1,s_2\right)\left(I-\varepsilon T\right)^{-\alpha}$. Враховуючи рівність (2.26), для цього достатньо оцінити норму оператора

$$\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha-2}\left(I-\varepsilon T\right)^{2-\alpha}. \qquad (2.27)$$

Дійсно, якщо доведено, що норма оператора (2.27) не перевищує деякої сталої C_n', тобто

$$\left\|\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha-2}\left(I-\varepsilon T\right)^{2-\alpha}\right\|\le C_n', \qquad (2.28)$$

де C_n' – стала, що залежить лише від α і n, то, враховуючи рівність (2.26) та оцінку (2.23), отримаємо, що

$$\left\|F''_{s_1s_2}\left(s_1,s_2\right)\left(I-\varepsilon T\right)^{-\alpha}\right\|\le$$

$$\le\left\|-\alpha\varepsilon^{n-1}T^{n-1}\right\|\left\|I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right\|\left\|\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha-2}\left(I-\varepsilon T\right)^{2-\alpha}\right\|+$$

$$+\left\|\alpha\left(\alpha-1\right)\varepsilon^{2n-2}T^{2n-2}\right\|\left\|\left(I-\varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1,s_2\right)\right)^{\alpha-2}\left(I-\varepsilon T\right)^{2-\alpha}\right\|\cdot$$

$$\cdot\left\|s_2\left(I-\varepsilon T\right)-I\right\|\cdot\left\|s_1\left(I-\varepsilon T\right)-I\right\|\le$$

$$\le\alpha C_n'+\alpha\left(\alpha-1\right)C_n'\left(s_2\left(\|I\|+\|\varepsilon T\|\right)+\|I\|\right)\left(s_1\left(\|I\|+\|\varepsilon T\|\right)+\|I\|\right)\le$$

$$\leq \left(\alpha + 9\alpha\left(\alpha - 1\right)\right)C_n{}' =: C_n, \qquad (2.29)$$

причому $O\left(C_n\right) = O\left(C_n'\right)$ при $n \to \infty$.

Оцінимо норму оператора (2.27). Зафіксуємо $s_1, s_2 \in \left[0,1\right]$ в цьому виразі. Враховуючи рівності (2.24) та (2.19) (в останній рівності β треба замінити на $2-\alpha$) і розглядаючи вираз для оператора (2.27) як добуток рядів за Коші, кожен з яких абсолютно збігається, отримаємо, що

$$\left(I - \varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1, s_2\right)\right)^{\alpha-2}\left(I - \varepsilon T\right)^{2-\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j T^j \qquad (2.30)$$

причому даний ряд теж абсолютно збігається. З (2.30) випливає

$$\left\|\left(I - \varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\left(s_1, s_2\right)\right)^{\alpha-2}\left(I - \varepsilon T\right)^{2-\alpha}\right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|c_j\right|, \qquad (2.31)$$

при цьому ряд $\sum_{j=0}^{\infty}\left|c_j\right|$ збігається як ряд – добуток за Коші абсолютно збіжних рядів з коефіцієнтів при степенях T рядів, якими задаються оператори $\left(I - \varepsilon^{n-1}T^{n-1}f\right)^{\alpha-2}$ та $\left(I - \varepsilon T\right)^{2-\alpha}$. Таким чином, можна покласти

$$C_n' := \sum_{j=0}^{\infty}\left|c_j\right|. \qquad (2.32)$$

Рівність (2.30) справедлива, якщо замість оператора T підставити довільний оператор з нормою, що не перевищує 1, в будь-якому банаховому просторі, зокрема, якщо замість оператора T взяти оператор множення на число $e^{i\varphi}$, де $\varphi \in \left[-\pi, \pi\right]$, у банаховому просторі $\mathbb{C}$. При цьому для функції

$$g\left(\varphi\right) := \left(1 - \varepsilon^{n-1}e^{i\varphi\left(n-1\right)}\left(s_1 s_2 \varepsilon^2 e^{2i\varphi} + \left(1 - s_1\right)\left(1 - s_2\right) + \right.\right.$$

$$+\left(s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)\varepsilon e^{i\varphi}\right)\Big)^{\alpha-2}\cdot\left(1-\varepsilon e^{i\varphi}\right)^{2-\alpha},\ \varphi\in\left[-\pi,\ \pi\right],$$

рівність (2.30) перетвориться у рівність

$$g\left(\varphi\right)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j e^{ji\varphi} \tag{2.33}$$

і буде розкладом в ряд Фур'є за ортонормованою системою функцій $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ij\varphi} : j\in\mathbb{Z}\right\}$, бо рівномірно збіжний на $\mathbb{R}$ тригонометричний ряд є рядом Фур'є своєї суми [57, пункт 678].

Розклавши функцію $\left(-1,1\right)\ni t\mapsto\left(1-t\right)^{\beta}$ в степеневий ряд, послідовно підставивши в цей розклад

$$\left(\beta,t\right)=\Big(\alpha-2,\ \varepsilon^{n-1}e^{i\varphi(n-1)}\cdot$$

$$\cdot\left(s_1 s_2\varepsilon^2 e^{2i\varphi}+\left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right)+\left(s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)\varepsilon e^{i\varphi}\right)\Big)$$

та

$$\left(\beta,t\right)=\left(-\alpha+2,\ \varepsilon e^{i\varphi}\right)$$

і перемноживши за Коші ці два розклади, отримаємо, що вільний член утвореного ряду функції g рівний 1, а всі інші члени ряду мають вигляд $const\cdot e^{ji\varphi}$, де $j\in\mathbb{N}$. Звідси, використовуючи (2.33), нерівність Коші-Буняковського для рядів, рівність $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\frac{\pi^2}{6}$, рівність Парсеваля, а також те, що якщо $\{c'_j : j \in \mathbb{Z}\}$ – коефіцієнти Фур'є функції g' за системою функцій $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ij\varphi} : j \in \mathbb{Z}\right\}$, то $c'_j = 0$ при $j \le 0$ та $c'_j = ijc_j$ при $j \ge 1$, маємо, що

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} |jc_j| \le$$

$$\le 1 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |jc_j|^2\right)^{1/2} = 1 + \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|g'\|_2 , \qquad (2.34)$$

де $\|g'\|_2$ – норма функції g' у просторі $L_2[0, 2\pi]$.

Щоб отримати оцінку для $\|g'\|_2$ розглянемо допоміжну функцію

$$f(s_1, s_2, z) := s_1 s_2 z^2 + (1 - s_1)(1 - s_2) + \big(s_1(1 - s_2) + s_2(1 - s_1)\big) z , \ s_1, s_2 \in [0,1], \ z \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$g(\varphi) = \left(1 - z^{n-1} f(s_1, s_2, z)\right)^{\alpha - 2} (1 - z)^{2-\alpha}, \text{ де } z = \varepsilon e^{i\varphi}, \ \varepsilon \in \left(\frac{1}{4}, 1\right), \ \varphi \in [-\pi, \pi],$$

а також

$$g'(\varphi) = iz\Big((\alpha - 2)\left(1 - z^{n-1} f(s_1, s_2, z)\right)^{\alpha-3} \left(-(n-1) z^{n-2} f(s_1, s_2, z) -\right.$$

$$\left.- z^{n-1} \frac{\partial f}{\partial z}(s_1, s_2, z)\right)(1 - z)^{2-\alpha} - \left(1 - z^{n-1} f(s_1, s_2, z)\right)^{\alpha-2} (2 - \alpha)(1 - z)^{1-\alpha}\Big) =$$

$$= iz(\alpha - 2)\left(1 - z^{n-1} f(s_1, s_2, z)\right)^{\alpha-3} (1 - z)^{1-\alpha} \cdot$$

$$\cdot \left((1 - z)\left(-(n-1) z^{n-2} f(s_1, s_2, z) - z^{n-1} \frac{\partial f}{\partial z}(s_1, s_2, z)\right) + 1 - z^{n-1} f(s_1, s_2, z)\right) =$$

$$=iz(\alpha-2)\left(1-z^{n-1}f(s_1,s_2,z)\right)^{\alpha-3}(1-z)^{1-\alpha}\cdot$$

$$\cdot\left((z-1)\left((n-1)z^{n-2}f(s_1,s_2,z)+z^{n-1}\frac{\partial f}{\partial z}(s_1,s_2,z)\right)+1-z^{n-1}f(s_1,s_2,z)\right)=$$

$$=iz(\alpha-2)\left(1-z^{n-1}f(s_1,s_2,z)\right)^{\alpha-3}(1-z)^{1-\alpha}\cdot h(s_1,s_2,z), \qquad (2.35)$$

де

$$h(s_1,s_2,z):=(z-1)\left((n-1)z^{n-2}f(s_1,s_2,z)+z^{n-1}\frac{\partial f}{\partial z}(s_1,s_2,z)\right)+$$

$$+1-z^{n-1}f(s_1,s_2,z),\ s_1,s_2\in[0,1],\ z\in\mathbb{C}.$$

Враховуючи рівність

$$1=s_1s_2+(1-s_1)(1-s_2)+s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1),$$

означення функції f, а також те, що

$$\frac{\partial f}{\partial z}=2s_1s_2z+s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)$$

маємо, що

$$h(s_1,s_2,z)=f(s_1,s_2,z)\left((z-1)(n-1)z^{n-2}-z^{n-1}\right)-$$

$$-z^{n-1}(1-z)\frac{\partial f}{\partial z}(s_1,s_2,z)+1=$$

$$=f(s_1,s_2,z)\left((z-1)(n-1)z^{n-2}-z^{n-1}\right)-z^{n-1}(1-z)\frac{\partial f}{\partial z}(s_1,s_2,z)+$$

$$+s_1s_2+(1-s_1)(1-s_2)+s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)=$$

$$=\left(s_1 s_2 z^2+\left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right)+\left(s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)z\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\left(z-1\right)\left(n-1\right)z^{n-2}-z^{n-1}\right)-z^{n-1}\left(1-z\right)\left(2s_1 s_2 z+s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)+$$

$$+s_1 s_2+\left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right)+s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)=$$

$$=s_1 s_2\left(\left(z-1\right)\left(n-1\right)z^{n}-z^{n+1}-2z^{n}\left(1-z\right)+1\right)+$$

$$+\left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right)\left(\left(z-1\right)\left(n-1\right)z^{n-2}-z^{n-1}+1\right)+$$

$$+\left(s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)\left(\left(z-1\right)\left(n-1\right)z^{n-1}-z^{n}-z^{n-1}\left(1-z\right)+1\right). \quad (2.36)$$

Використовуючи зображення (2.36), для функції h отримаємо таку оцінку при $\left|z\right|\le 1$ і $s_1, s_2\in\left[0,1\right]$:

$$\left|h\left(s_1, s_2, z\right)\right|\le s_1 s_2\left(\left(n-1\right)\left|z-1\right|+2\left|z-1\right|+2\right)+$$

$$+\left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right)\left(\left(n-1\right)\left|z-1\right|+2\right)+$$

$$+\left(s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)\left(\left(n-1\right)\left|z-1\right|+\left|z-1\right|+2\right)\le$$

$$\le\left(\left(n+1\right)\left|z-1\right|+2\right)\left(s_1 s_2+\left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right)+s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)=$$

$$=\left(n+1\right)\left|z-1\right|+2. \quad (2.37)$$

Використовуючи формулу (2.36), можна отримати й інше зображення для функції h при $\left|z\right|<1$ і $s_1, s_2\in\left[0,1\right]$:

$$h\left(s_1,\, s_2,\, z\right)=s_1 s_2\left(\left(z-1\right)\left(n-1\right)z^{n}-z^{n+1}-2z^{n}\left(1-z\right)+1\right)+$$

$$+\left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right)\left(\left(z-1\right)\left(n-1\right)z^{n-2}-z^{n-1}+1\right)+$$

$$+\left(s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)\left(\left(z-1\right)\left(n-1\right)z^{n-1}-z^n-z^{n-1}\left(1-z\right)+1\right)=$$

$$=s_1s_2\left(z-1\right)\left(\left(n-1\right)z^n+2z^n-z^n-z^{n-1}-\ldots-1\right)+$$

$$+\left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right)\left(z-1\right)\left(\left(n-1\right)z^{n-2}-z^{n-2}-z^{n-3}-\ldots-1\right)+$$

$$+\left(s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)\left(z-1\right)\left(\left(n-1\right)z^{n-1}+z^{n-1}-z^{n-1}-z^{n-2}-\ldots-1\right)=$$

$$=s_1s_2\left(z-1\right)\left(nz^n-z^{n-1}-z^{n-2}-\ldots-1\right)+$$

$$+\left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right)\left(z-1\right)\left(\left(n-2\right)z^{n-2}-z^{n-3}-z^{n-4}-\ldots-1\right)+$$

$$+\left(s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)\left(z-1\right)\left(\left(n-1\right)z^{n-1}-z^{n-2}-z^{n-3}-\ldots-1\right)=$$

$$=s_1s_2\left(z-1\right)^2\left(\frac{z^n-z^{n-1}}{z-1}+\frac{z^n-z^{n-2}}{z-1}+\ \ldots\ +\frac{z^n-1}{z-1}\right)+$$

$$+\left(1-s_1\right)\left(1-s_2\right)\left(z-1\right)^2\left(\frac{z^{n-2}-z^{n-3}}{z-1}+\frac{z^{n-2}-z^{n-4}}{z-1}+\ldots+\frac{z^{n-2}-1}{z-1}\right)+$$

$$+\left(s_1\left(1-s_2\right)+s_2\left(1-s_1\right)\right)\left(z-1\right)^2\cdot\left(\frac{z^{n-1}-z^{n-2}}{z-1}+\frac{z^{n-1}-z^{n-3}}{z-1}+\ldots+\frac{z^{n-1}-1}{z-1}\right)\quad(2.38)$$

Враховуючи, що якщо $m\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}$, $|z|<1$, то

$$\left|\frac{z^{m+p}-z^m}{z-1}\right|=\left|z^m\left(z^{p-1}+z^{p-2}+\ldots+1\right)\right|\le|z|^m\left(|z|^{p-1}+|z|^{p-2}+\ldots+1\right)\le p,\quad(2.39)$$

з рівності (2.38) маємо таку оцінку функції h при $|z|<1$ і $s_1,s_2\in[0,1]$:

$$\left|h\left(s_1,\,s_2,\,z\right)\right|\le s_1s_2\left|z-1\right|^2\left(1+2+3+\ldots+n\right)+$$

$$+(1-s_1)(1-s_2)|z-1|^2\big(1+2+...+(n-2)\big)+$$

$$+\big(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\big)|z-1|^2\big(1+2+...+(n-1)\big)\le$$

$$\le(1+2+...+n)\big(s_1s_2+(1-s_1)(1-s_2)+s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\big)|z-1|^2=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}|z-1|^2 \qquad (2.40)$$

Враховуючи нерівність (2.39), маємо оцінку

$$\left|1-z^n f(s_1,s_2,z)\right|=\big|s_1s_2+(1-s_1)(1-s_2)+s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)-$$

$$-z^{n-1}\big(s_1s_2z^2+(1-s_1)(1-s_2)+\big(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\big)z\big)\big|\le$$

$$\le s_1s_2\left|1-z^{n+1}\right|+(1-s_1)(1-s_2)\left|1-z^{n-1}\right|+$$

$$+\big(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\big)\left|1-z^n\right|\le$$

$$\le(n+1)s_1s_2|z-1|+(n-1)(1-s_1)(1-s_2)|z-1|+n\big(s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\big)|z-1|\le$$

$$\le(n+1)|z-1|\big(s_1s_2+(1-s_1)(1-s_2)+s_1(1-s_2)+s_2(1-s_1)\big)=$$

$$=(n+1)|z-1|,\ |z|\le1,\ s_1,\,s_2\in[0,1]. \qquad (2.41)$$

Аналогічно до (2.22), отримаємо оцінку

$$\left|1-z^n f(s_1,s_2,z)\right|\le1+\left|f(s_1,\,s_2,z)\right|\le2,\ |z|\le1,\ s_1,\,s_2\in[0,1]. \qquad (2.42)$$

Використовуючи рівність (2.35), оцінки (2.40) і (2.41), маємо при $|z|<1$ нерівність

$$\left|g'(\varphi)\right| = |z|(\alpha-2)\left|1-z^n f\right|^{\alpha-3}|1-z|^{-\alpha+1}\left|h(s_1,s_2,z)\right| \le$$

$$\le (\alpha-2)(n+1)^{\alpha-3}|1-z|^{\alpha-3}|1-z|^{-\alpha+1}|1-z|^2\frac{n(n+1)}{2} \le \frac{\alpha-2}{2}(n+1)^{\alpha-1} \quad (2.43)$$

Оцінимо тепер $\left|g'(\varphi)\right|$ іншим способом. Якщо $z=\varepsilon e^{i\varphi}$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$, $\varepsilon\in\left(\frac{1}{4},1\right)$, то враховуючи нерівність $\sin t \ge \frac{2}{\pi}t$, $t\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ (див. напр. [34, с. 101]), маємо оцінку

$$|z-1|^2 = \left|\varepsilon e^{i\varphi}-1\right|^2 = |\varepsilon\cos\varphi - 1 + i\varepsilon\sin\varphi|^2 =$$

$$= (\varepsilon\cos\varphi-1)^2 + \varepsilon^2\sin^2\varphi = \varepsilon^2+1-2\varepsilon\cos\varphi =$$

$$= (1-\varepsilon)^2 + 2\varepsilon(1-\cos\varphi) = (1-\varepsilon)^2 + 4\varepsilon\sin^2\frac{\varphi}{2} \ge$$

$$\ge 4\varepsilon\sin^2\frac{\varphi}{2} \ge 4\varepsilon\left(\frac{2}{\pi}\frac{\varphi}{2}\right)^2 \ge \frac{\varphi^2}{\pi^2},$$

а отже,

$$|z-1| \ge \frac{|\varphi|}{\pi} \quad (2.44)$$

Тому, використовуючи (2.35), (2.42), (2.37) і (2.44), при $z=\varepsilon e^{i\varphi}$, $\varepsilon\in\left(\frac{1}{4},1\right)$, $\varphi\in[-\pi,\ \pi]\setminus\{0\}$ маємо

$$\left|g'(\varphi)\right| = |z|(\alpha-2)\left|1-z^n f(s_1,s_2,z)\right|^{\alpha-3}|z-1|^{1-\alpha}\left|h(s_1,s_2,z)\right| \le$$

$$\le (\alpha-2)2^{\alpha-3}|z-1|^{1-\alpha}\left((n+1)|z-1|+2\right) \le$$

$$\leq (\alpha-2)2^{\alpha-3}\left(\frac{n+1}{|z-1|^{\alpha-2}}+\frac{2}{|z-1|^{\alpha-1}}\right)\leq$$

$$\leq (\alpha-2)2^{\alpha-3}\left(\frac{(n+1)\pi^{\alpha-2}}{|\varphi|^{\alpha-2}}+\frac{2\pi^{\alpha-1}}{|\varphi|^{\alpha-1}}\right)\leq$$

$$\leq (\alpha-2)2^{\alpha-2}\pi^{\alpha-1}\left(\frac{n+1}{|\varphi|^{\alpha-2}}+\frac{1}{|\varphi|^{\alpha-1}}\right) \tag{2.45}$$

Враховуючи (2.43) і (2.45), отримаємо оцінку для норми функції g' у просторі $L_2[-\pi,\pi]$:

$$\|g'\|_2^2=\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}|g'(\varphi)|^2\,d\varphi+\int_{[-\pi,\pi]\setminus\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]}|g'(\varphi)|^2\,d\varphi\leq$$

$$\leq\frac{2}{n}\left(\frac{\alpha-2}{2}(n+1)^{\alpha-1}\right)^2+2\left((\alpha-2)2^{\alpha-2}\pi^{\alpha-1}\right)^2\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{\varphi^{\alpha-2}}+\frac{1}{\varphi^{\alpha-1}}\right)^2 d\varphi, \tag{2.46}$$

причому

$$\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{\varphi^{\alpha-2}}+\frac{1}{\varphi^{\alpha-1}}\right)^2 d\varphi=(n+1)^2\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{d\varphi}{\varphi^{2\alpha-4}}+2(n+1)\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{d\varphi}{\varphi^{2\alpha-3}}+$$

$$+\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty}\frac{d\varphi}{\varphi^{2\alpha-2}}=(n+1)^2\left.\frac{\varphi^{5-2\alpha}}{5-2\alpha}\right|_{\frac{1}{n}}^{+\infty}+2(n+1)\left.\frac{\varphi^{4-2\alpha}}{4-2\alpha}\right|_{\frac{1}{n}}^{+\infty}+\left.\frac{\varphi^{3-2\alpha}}{3-2\alpha}\right|_{\frac{1}{n}}^{+\infty}=$$

$$=\frac{(n+1)^2}{2\alpha-5}\frac{1}{n^{5-2\alpha}}+\frac{2(n+1)}{2\alpha-4}\frac{1}{n^{4-2\alpha}}+\frac{1}{2\alpha-3}\frac{1}{n^{3-2\alpha}}=$$

$$= \left(\frac{1}{2\alpha - 5} + \frac{2}{2\alpha - 4} + \frac{1}{2\alpha - 3} \right) n^{2\alpha - 3} + o\left(n^{2\alpha - 3}\right).$$

Звідси і (2.46) отримаємо, що

$$\|g'\|_2^2 = C(\alpha) n^{2\alpha - 3} + o\left(n^{2\alpha - 3}\right),\ n \to \infty,$$

де $C(\alpha) > 0$ – стала, що залежить лише від α. Тому існує стала $C_n'' > 0$, що залежить лише від α і n, така, що $\|g'\|_2 \le C_n''$, причому $C_n'' = O\left(n^{\alpha - \frac{3}{2}}\right)$ при $n \to \infty$. Звідси, враховуючи (2.34), (2.31), (2.32), (2.28), (2.29) та (2.25), одержимо, що стала C_n, яка фігурує в нерівностях (2.17) і (2.21), існує та залежить лише від α і n, причому $C_n = O\left(n^{\alpha - \frac{3}{2}}\right)$ при $n \to \infty$. Таким чином, нерівність (2.17) доведено.

Відомо [57, п. 407], що при $\beta > 0$ ряд (2.18) збігається при всіх $x \in [-1, 1]$, і його сума є неперервною функцією на цьому відрізку, тому оператори, які фігурують у формулі (2.17), при $m = n+1$, $m = n$, $m = n-1$ та $m = 1$ задаються у вигляді степеневого ряду з операторів

$$\left(I - \varepsilon^m T^m\right)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j (-1)^j \varepsilon^{jm} T^{jm}$$

і є неперервними функціями від ε, коли $\varepsilon \in [-1, 1]$. Врахувавши цей факт та неперервність норми, перейдемо у нерівності (2.17) до границі при $\varepsilon \to 1-$ та отримаємо нерівність (2.16). Таким чином, нерівність (2.16) доведено і коли виконується умова *i)*, і коли виконується умова *ii)*.

Нехай числа $t > 0$ і $h \in [0, t]$ – довільні фіксовані. З нерівності (2.16) за означенням модуля неперервності отримуємо оцінку

$$\left\| \left(\left(I - T_h^{n+1}\right)^{\alpha} - 2\left(I - T_h^{n}\right)^{\alpha} + \left(I - T_h^{n-1}\right)^{\alpha} \right) f \right\| \le C_n \omega_{\alpha}(f, t),$$

з якої одержуємо, що

$$2\left\| \left(I - T_h^{n}\right)^{\alpha} f \right\| \le$$

$$\le \left\| \left(I - T_h^{n+1}\right)^{\alpha} f + \left(I - T_h^{n-1}\right)^{\alpha} f - \left(\left(I - T_h^{n+1}\right)^{\alpha} f + \left(I - T_h^{n-1}\right)^{\alpha} f - 2\left(I - T_h^{n}\right)^{\alpha} f \right) \right\| \le$$

$$\le \left\| \left(I - T_h^{n+1}\right)^{\alpha} f \right\| + \left\| \left(I - T_h^{n-1}\right)^{\alpha} f \right\| +$$

$$+ \left\| \left(I - T_h^{n+1}\right)^{\alpha} f + \left(I - T_h^{n-1}\right)^{\alpha} f - 2\left(I - T_h^{n}\right)^{\alpha} f \right\| \le$$

$$\left\| \left(I - T_h^{n+1}\right)^{\alpha} f \right\| + \left\| \left(I - T_h^{n-1}\right)^{\alpha} f \right\| + C_n \omega_{\alpha}(f, t) \le$$

$$\le \omega_{\alpha}\left(f, (n+1)t\right) + \omega_{\alpha}\left(f, (n-1)t\right) + C_n \omega_{\alpha}(f, t).$$

Якщо h пробігає весь проміжок $(0,t]$, то nh пробігає весь проміжок $(0,nt]$, тому з останньої нерівності та означення точної верхньої межі й одержуємо нерівність (2.15).

Теорему 2.3 доведено.

2.5. Доведення теореми 2.1

У позначеннях теореми 2.1. нерівності (2.13) і (2.15) можна записати однаково

$$2\omega_\alpha(f,nt) \le \omega_\alpha\big(f,(n+1)t\big) + \omega_\alpha\big(f,(n-1)t\big) + C_n\omega_\alpha(f,t),\ t>0, \quad (2.47)$$

де $C_n = O\left(n^{\gamma(\alpha)-1}\right),\ n\to\infty$, бо якщо $\alpha = k \in \mathbb{N},\ k\ge 2$, то

$$C_n = 2\left(2^k - 1\right)n^{k-2} = O\left(n^{k-2}\right) = O\left(n^{\gamma(\alpha)-1}\right),\ n\to\infty.$$

Нехай далі $\beta > \gamma(\alpha)$ – довільне фіксоване число. Розглянемо функцію

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^\beta, & \text{якщо } t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right], \\ (1/2)^\beta, & \text{якщо } t\in\left(\dfrac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

Маємо, що

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) - 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) +$$

$$+C_n\varphi\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2^\beta} - \frac{2}{2^\beta} +$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)^\beta + C_n\frac{1}{2^\beta n^\beta} =$$

$$= \varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^\beta}\cdot\frac{C_n}{n^\beta} =$$

$$= -\frac{\beta}{2^{\beta} n} + o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty, \tag{2.48}$$

бо за умовою $\beta > \gamma(\alpha)$, тому $\gamma(\alpha) - 1 - \beta < -1$, а отже

$C_n n^{-\beta} = O\left(n^{\gamma(\alpha)-1-\beta}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty$ а також за означенням лівої похідної

$$\varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi'_{-}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2n}\right) +$$

$$+ o\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{\beta}{2^{\beta-1}}\left(-\frac{1}{2n}\right) +$$

$$+ o\left(\frac{1}{2n}\right) = -\frac{\beta}{2^{\beta} n} + o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty.$$

З формули (2.48) випливає існування таких чисел $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$ і $\eta > 0$, що

$$\varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n_0}\right) - 2\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n_0}\right) + C_{n_0}\varphi\left(\frac{1}{2n_0}\right) = -\eta\,. \tag{2.49}$$

Позначимо

$$S := \frac{1}{2n_0},\ R := (2S)^{\beta}.$$

Визначимо тепер функцію ω. Нехай $\omega(0) := 0$, а якщо $\delta \in [S^{j+1}, S^{j})$ при деякому $j \in \mathbb{Z}$, то покладемо

$$\omega(\delta) := R^{j} \varphi\left(\delta / S^{j}\right).$$

Отримаємо функцію ω, коректно визначену на $[0,+\infty)$, яка задовольняє умови 1) – 3) леми 2.1 і таку, що функція $(0,+\infty) \ni \delta \to \omega(\delta)/\delta^{\beta}$ монотонно не зростає на $(0,+\infty)$. Дійсно, функція φ неперервна на $[0,1]$, тому функція ω неперервна на кожному інтервалі (S^{j+1}, S^j) а також для всіх $j \in \mathbb{Z}$

$$\omega(S^j +) = \omega(S^j) = R^{j-1}\varphi(S^j / S^{j-1}) = \frac{1}{2^{\beta} n_0^{\beta j}},$$

$$\omega(S^j -) = \lim_{\delta \to S^j -} R^j \varphi(\delta / S^j) = \frac{1}{2^{\beta} n_0^{\beta j}},$$

тому функція ω неперервна в усіх точках S^j. Отже, ω неперервна на проміжку $(0,+\infty)$. Крім того,

$$|\omega(\delta)| \le R^j \le \left(\frac{1}{2}\right)^j, \ \delta \in [0, S^j),$$

тому

$$\omega(0+) = 0 = \omega(0).$$

Оскільки φ неспадна, то ω неспадна на кожному проміжку $[S^{j+1}, S^j)$, тому, з огляду на її неперервність на $[0,+\infty)$, є неспадною на $[0,+\infty)$. Оскільки

$$\frac{\varphi(t)}{t^{\beta}} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \ t \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{1}{2^{\beta} t^{\beta}}, & \text{якщо } \ t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

то функція $\left(0,+\infty\right)\ni t\mapsto\dfrac{\varphi\left(t\right)}{t^{\beta}}$ є незростаючою на $(0,1]$, тому функція $\delta\mapsto\dfrac{\omega\left(\delta\right)}{\delta^{\beta}}$ є незростаючою на кожному проміжку $[S^{j+1},S^{j})$, а отже, з огляду на її неперервність на $\left(0,+\infty\right)$, є незростаючою на $\left(0,+\infty\right)$.

Оскільки $0<S\le\dfrac{1}{4}$, то при всіх $j>0$

$$\{S^{j}\left(S+\frac{1}{2}\right),\frac{S^{j}}{2},\,S^{j}\left(-S+\frac{1}{2}\right),\;S^{j+1}\}\subset[S^{j+1},\,S^{j}),$$

тому, враховуючи співвідношення (2.49) та нерівність $\varphi\left(S+\dfrac{1}{2}\right)<1$, яка випливає з означення функції φ, маємо

$$\omega\left(S^{j}\left(S+\frac{1}{2}\right)\right)-2\omega\left(\frac{S^{j}}{2}\right)+\omega\left(S^{j}\left(-S+\frac{1}{2}\right)\right)+$$

$$+C_{n_0}\omega\left(S^{j+1}\right)=R^{j}\left(\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n_0}\right)-2\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n_0}\right)+C_{n_0}\varphi\left(\frac{1}{2n_0}\right)\right)=$$

$$=-R^{j}\eta<-R^{j}\varphi\left(S+\frac{1}{2}\right)\eta=-\omega\left(S^{j}\left(S+\frac{1}{2}\right)\right)\eta. \tag{2.50}$$

Якщо функція $\tilde{\omega}:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ така, що $\lim\limits_{\delta\to0+}\dfrac{\tilde{\omega}\left(\delta\right)}{\omega\left(\delta\right)}=1$, то за означенням границі функції існує таке $j\in\mathbb{N}$, що для всіх $\delta\in(0,S^{j})$ виконується нерівність

$$\left|\frac{\tilde{\omega}(\delta)}{\omega(\delta)}-1\right|<\frac{\eta}{C_{n_0}+4},$$

з якої випливає співвідношення

$$\left|\tilde{\omega}(\delta)-\omega(\delta)\right|<\frac{\eta\omega(\delta)}{C_{n_0}+4}.$$

Враховуючи отриману нерівність, співвідношення (2.50) і те, що функція ω неспадна, одержимо оцінку

$$\tilde{\omega}\left(S^j\left(S+\frac{1}{2}\right)\right)-2\tilde{\omega}\left(\frac{S^j}{2}\right)+\tilde{\omega}\left(S^j\left(-S+\frac{1}{2}\right)\right)+C_{n_0}\tilde{\omega}\left(S^{j+1}\right)=$$

$$=\tilde{\omega}\left(S^j\left(S+\frac{1}{2}\right)\right)-2\tilde{\omega}\left(\frac{S^j}{2}\right)+\tilde{\omega}\left(S^j\left(-S+\frac{1}{2}\right)\right)+C_{n_0}\tilde{\omega}\left(S^{j+1}\right)-$$

$$-\omega\left(S^j\left(S+\frac{1}{2}\right)\right)-2\omega\left(\frac{S^j}{2}\right)+\omega\left(S^j\left(-S+\frac{1}{2}\right)\right)+C_{n_0}\omega\left(S^{j+1}\right)+$$

$$+\omega\left(S^j\left(S+\frac{1}{2}\right)\right)+2\omega\left(\frac{S^j}{2}\right)-\omega\left(S^j\left(-S+\frac{1}{2}\right)\right)-C_{n_0}\omega\left(S^{j+1}\right)=$$

$$=\left(\tilde{\omega}\left(S^j\left(S+\frac{1}{2}\right)\right)-\omega\left(S^j\left(S+\frac{1}{2}\right)\right)\right)+\left(-2\tilde{\omega}\left(\frac{S^j}{2}\right)+2\omega\left(\frac{S^j}{2}\right)\right)+$$
$$+\left(\tilde{\omega}\left(S^j\left(-S+\frac{1}{2}\right)\right)-\omega\left(S^j\left(-S+\frac{1}{2}\right)\right)\right)+$$

$$+C_{n_0}\left(\tilde{\omega}\left(S^{j+1}\right)-\omega\left(S^{j+1}\right)\right)+$$

$$+\omega\left(S^j\left(S+\frac{1}{2}\right)\right)+2\omega\left(\frac{S^j}{2}\right)-\omega\left(S^j\left(-S+\frac{1}{2}\right)\right)-C_{n_0}\omega\left(S^{j+1}\right)<$$

$$< \left(\tilde{\omega}\left(S^{j}\left(S+\frac{1}{2} \right) \right) - \omega\left(S^{j}\left(S+\frac{1}{2} \right) \right) \right) + \left(-2\tilde{\omega}\left(\frac{S^{j}}{2} \right) + 2\omega\left(\frac{S^{j}}{2} \right) \right) +$$

$$+ \left(\tilde{\omega}\left(S^{j}\left(-S+\frac{1}{2} \right) \right) - \omega\left(S^{j}\left(-S+\frac{1}{2} \right) \right) \right) +$$

$$+ C_{n_0} \left(\tilde{\omega}\left(S^{j+1} \right) - \omega\left(S^{j+1} \right) \right) -$$

$$-\omega\left(S^{j}\left(S+\frac{1}{2} \right) \right)\eta < \frac{\eta\omega\left(S^{j}\left(S+\frac{1}{2} \right) \right)}{C_{n_0}+4} + 2\frac{\eta\omega\left(\frac{S^{j}}{2} \right)}{C_{n_0}+4} +$$

$$+ \frac{\eta\omega\left(S^{j}\left(-S+\frac{1}{2} \right) \right)}{C_{n_0}+4} + \frac{C_{n_0}\eta\omega\left(S^{j+1} \right)}{C_{n_0}+4} - \omega\left(S^{j}\left(S+\frac{1}{2} \right) \right)\eta <$$

$$< -\omega\left(S^{j}\left(S+\frac{1}{2} \right) \right)\eta + \left(C_{n_0}+4 \right)\frac{\eta\omega\left(S^{j}\left(S+\frac{1}{2} \right) \right)}{C_{n_0}+4} = 0,$$

що суперечить нерівності (2.47), якщо в ній покласти $t = S^{j+1}$ і $n = n_0$. Таким чином, функція $\tilde{\omega}$ не може бути модулем неперервності порядку α, породженим півгрупою $\{T_h : h \ge 0\}$, для жодного елемента $f \in X$.

Теорему 2.1 доведено.

2.6. Уточнення допоміжної нерівності у випадку k-го рівномірного модуля неперервності для $k=3$ і $k=4$

У цьому підрозділі наводяться доведення нерівностей (2.11) і (2.12), які уточнюють допоміжну нерівність (2.13) для третього і четвертого рівномірних модулів неперервності. Ці доведення використовують «класичне» означення рівномірного модуля неперервності, яке дається за допомогою скінченних різниць третього та четвертого порядків.

Теорема 2.3. *Для функції $f\in UC(\mathbb{R})$ її рівномірний модуль неперервності третього порядку $\omega_3(f,\cdot)$ для всіх $t>0$ і $n\in\mathbb{N}$ задовольняє нерівність (2.11).*

Доведення. Для $n=1$ доводжувана нерівність тривіальна, тому вважаємо, що $n\geq 2$. Нехай $h\in(0,t]$ – довільне фіксоване число, $H=nh$. Враховуючи означення третьої скінченної різниці

$$\Delta_h^3(f,x)=f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x).$$

та вираз для другої скінченної різниці з кроком $2h$ через таку ж різницю з кроком h за формулою (1.31) з [62]

$$\Delta_{hp}^m(f,x_0)=\sum_{i_1=0}^{p-1}\dots\sum_{i_m=0}^{p-1}\Delta_h^m\left(f,x_0+h(i_1+\dots+i_m)\right)$$

при $p=m=2$, для всіх $x\in\mathbb{R}$ маємо

$$\Delta_{H+h}^3(f,x-h)+\Delta_{H-h}^3(f,x+h)-2\Delta_H^3(f,x)=$$

$$=f(x+3H+2h)-3f(x+2H+h)+3f(x+H)-f(x-h)+$$

$$+f(x+3H-2h)-3f(x+2H-h)+3f(x+H)-f(x+h)-$$

$$-2f\left(x+3H\right)+6f\left(x+2H\right)-6f\left(x+H\right)+2f\left(x\right)=$$

$$=\Delta_{2h}^{2}\left(f,x+3H-2h\right)-3\Delta_{h}^{2}\left(f,x+2H-h\right)-\Delta_{h}^{2}\left(f,x-h\right)=$$

$$=\Delta_{h}^{2}\left(f,x+3H\right)+2\Delta_{h}^{2}\left(f,x+3H-h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(f,x+3H-2h\right)-$$

$$-3\Delta_{h}^{2}\left(f,x+2H-h\right)-\Delta_{h}^{2}\left(f,x-h\right)=\Delta_{h}^{2}\left(f,x+3nh\right)-$$

$$-\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(2n-1\right)h\right)+2\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(3n-1\right)h\right)-$$

$$-2\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(2n-1\right)h\right)+\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(3n-2\right)h\right)-\Delta_{h}^{2}\left(f,x-h\right)=:E\,.$$

Розглядаючи третю скінченну різницю як різницю других скінченних різниць, для довільних $l\in\mathbb{Z}$ і $m\in\mathbb{N}$ маємо

$$\left|\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(l+m\right)h\right)-\Delta_{h}^{2}\left(f,x+lh\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{m-1}\left(\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(l+k+1\right)h\right)-\Delta_{h}^{2}\left(f,x+\left(l+k\right)h\right)\right)\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{m-1}\Delta_{h}^{3}\left(f,x+\left(l+k\right)h\right)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{m-1}\left|\Delta_{h}^{3}\left(f,x+\left(l+k\right)h\right)\right|\leq\omega_{3}\left(f,t\right)m.$$

Враховуючи отриману оцінку, одержуємо, що

$$\left|E\right|\leq\omega_{3}\left(f,t\right)\left(n+1+2n+3n-1\right)=6n\omega_{3}\left(f,t\right).$$

Отже,

$$\left|\Delta_{H+h}^{3}\left(f,x-h\right)+\Delta_{H-h}^{3}\left(f,x+h\right)-2\Delta_{H}^{3}\left(f,x\right)\right|\leq6n\omega_{3}\left(f,t\right).$$

Звідси випливає, що

$$2\left|\Delta_H^3(f,x)\right| \le$$

$$\le \left|\Delta_{H+h}^3(f,x-h) + \Delta_{H-h}^3(f,x+h) -\right.$$

$$\left.-\left(\Delta_{H+h}^3(f,x-h) + \Delta_{H-h}^3(f,x+h) - 2\Delta_H^3(f,x)\right)\right| \le$$

$$\le \left|\Delta_{H+h}^3(f,x-h)\right| + \left|\Delta_{H-h}^3(f,x+h)\right| +$$

$$+\left|\Delta_{H+h}^3(f,x-h) + \Delta_{H-h}^3(f,x+h) - 2\Delta_H^3(f,x)\right| \le$$

$$\le \left|\Delta_{H+h}^3(f,x-h)\right| + \left|\Delta_{H-h}^3(f,x+h)\right| + 6n\omega_3(f,t) \le$$

$$\le \omega_3(f,(n+1)t) + \omega_3(f,(n-1)t) + 6n\omega_3(f,t).$$

Якщо h пробігає весь проміжок $(0,t]$, то H пробігає весь проміжок $(0,nt]$, тому з останньої нерівності та означення точної верхньої межі й одержуємо нерівність (2.5).

Теорему 2.3 доведено.

Теорема 2.4. *Для функції* $f \in UC(\mathbb{R})$ *її рівномірний модуль неперервності четвертого порядку* $\omega_4(f,\cdot)$ *для всіх* $t > 0$ *і* $n \in \mathbb{N}$ *задовольняє нерівність (2.12).*

Доведення. Для $n = 1$ доводжувана нерівність тривіальна, тому вважаємо, що $n \ge 2$. Нехай $h \in (0,t]$ — довільне фіксоване число, $H = nh$.

Врахуємо означення четвертої скінченної різниці

$$\Delta_h^4(f,x) = f(x+4h) - 4f(x+3h) + 6f(x+2h) - 4f(x+h) + f(x)$$

та другої скінченної різниці

$$\Delta_h^2(f,x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x).$$

Маємо

$$\Delta_{H+h}^4(f,x-2h)+\Delta_{H-h}^4(f,x+2h)-2\Delta_H^4(f,x)=$$

$$=f(x+4H+2h)-4f(x+3H+h)+6f(x+2H)-$$

$$-4f(x+H-h)+f(x-2h)+f(x+4H-2h)-$$

$$-4f(x+3H-h)+6f(x+2H)-4f(x+H+h)+f(x+2h)-$$

$$-2\big[f(x+4H)-4f(x+3H)+6f(x+2H)-4f(x+H)+f(x)\big]=$$

$$=\Delta_{2h}^2(f,x+4H-2h)-4\Delta_h^2(f,x+3H-h)-$$

$$-4\Delta_h^2(f,x+H-h)+\Delta_{2h}^2(f,x-2h)=$$

$$=\Delta_h^2(f,x+4H)+2\Delta_h^2(f,x+4H-h)+\Delta_h^2(f,x+4H-2h)-$$

$$-4\Delta_h^2(f,x+3H-h)-4\Delta_h^2(f,x+H-h)+$$

$$+\Delta_h^2(f,x)+2\Delta_h^2(f,x-h)+\Delta_h^2(f,x-2h)=$$

$$=\Delta_h^2(f,x+4nh)+2\Delta_h^2(f,x+(4n-1)h)+$$

$$+\Delta_h^2(f,x+(4n-2)h)-4\Delta_h^2(f,x+(3n-1)h)-$$

$$-4\Delta_h^2(f,x+(n-1)h)+\Delta_h^2(f,x)+2\Delta_h^2(f,x-h)+$$

$$+\Delta_h^2(f,x-2h)=\Delta_h^2(f,x+4nh)-2\Delta_h^2(f,x+(4n-1)h)+$$

$$+\Delta_h^2\left(f,x+\left(4n-2\right)h\right)+\left[4\Delta_h^2\left(f,x+\left(4n-1\right)h\right)-\right.$$

$$-4\Delta_h^2\left(f,x+\left(3n-1\right)h\right)-4\Delta_h^2\left(f,x+\left(n-1\right)h\right)+$$

$$\left.+4\Delta_h^2\left(f,x-h\right)\right]+\Delta_h^2\left(f,x\right)-2\Delta_h^2\left(f,x-h\right)+\Delta_h^2\left(f,x-2h\right)=$$

$$=\Delta_h^4\left(f,x+\left(4n-2\right)h\right)+\left[4\Delta_h^2\left(f,x+\left(4n-1\right)h\right)-\right.$$

$$-4\Delta_h^2\left(f,x+\left(3n-1\right)h\right)-4\Delta_h^2\left(f,x+\left(n-1\right)h\right)+$$

$$\left.+4\Delta_h^2\left(f,x-h\right)\right]+\Delta_h^4\left(f,x-2h\right) \qquad (2.51)$$

Вираз у квадратних дужках перетворимо, використовуючи вираз для скінченних різниць старших порядків через скінченні різниці нижчих порядків, формулу

$$\Delta_{3nh}^1\left(g,x\right)=\Delta_{nh}^1\left(g,x+2nh\right)+\Delta_{nh}^1\left(g,x+nh\right)+\Delta_{nh}^1\left(g,x\right)$$

та вираз для другої скінченної різниці з кроком nh через таку ж різницю з кроком h:

$$\Delta_{nh}^2\left(g,x\right)=\Delta_h^2\left(g,x\right)+2\Delta_h^2\left(g,x+h\right)+...+\left(n-1\right)\Delta_h^2\left(g,x+\left(n-2\right)h\right)+$$

$$+n\Delta_h^2\left(g,x+\left(n-1\right)h\right)+\left(n-1\right)\Delta_h^2\left(g,x+nh\right)+...+$$

$$+\Delta_h^2\left(g,x+\left(2n-3\right)h\right)+\Delta_h^2\left(g,x+\left(2n-2\right)h\right),$$

де $g\in UC\left(\mathbb{R}\right)$, $x\in\mathbb{R}$, $h>0$, $n\geq 2$; останню формулу можна отримати, записавши формулу $\left(1.31\right)$ з [62] при $m=2$ і звівши в ній подібні.

Маємо, що

$$4\Delta_h^2\left(f,x+\left(4n-1\right)h\right)-4\Delta_h^2\left(f,x+\left(3n-1\right)h\right)-4\Delta_h^2\left(f,x+\left(n-1\right)h\right)+$$

$$+4\Delta_h^2\left(f,x-h\right)=4\Delta_{nh}^1\left(\Delta_h^2\left(f,\cdot\right),x+\left(3n-1\right)h\right)-4\Delta_{nh}^1\left(\Delta_h^2\left(f,\cdot\right),x-h\right)=$$

$$=4\Delta_{3nh}^1\left(\Delta_{nh}^1\left(\Delta_h^2\left(f,\cdot\right),\cdot\right),x-h\right)=$$

$$=4\Delta_{nh}^2\left(\Delta_h^2\left(f,\cdot\right),x-h\right)+4\Delta_{nh}^2\left(\Delta_h^2\left(f,\cdot\right),x+\left(n-1\right)h\right)+$$

$$+4\Delta_{nh}^2\left(\Delta_h^2\left(f,\cdot\right),x+\left(2n-1\right)h\right)=$$

$$=4[\Delta_h^4\left(f,x-h\right)+\ldots+n\Delta_h^4\left(f,x+\left(n-2\right)h\right)+\ldots+$$

$$+\Delta_h^4\left(f,x+\left(2n-3\right)h\right)]+4[\Delta_h^4\left(f,x+\left(n-1\right)h\right)+\ldots+$$

$$+n\Delta_h^4\left(f,x+\left(2n-2\right)h\right)+\ldots+\Delta_h^4\left(f,x+\left(3n-3\right)h\right)]+$$

$$=4[\Delta_h^4\left(f,x+\left(2n-1\right)h\right)+\ldots+n\Delta_h^4\left(f,x+\left(3n-2\right)h\right)+\ldots+$$

$$+\Delta_h^4\left(f,x+\left(4n-3\right)h\right)] \qquad (2.52)$$

Підставимо вираз (2.52) у формулу (2.51) і врахуємо, що сума коефіцієнтів при четвертих скінченних різницях не перевищує

$$12\left(1+2+\ldots+\left(n-1\right)+n+\left(n-1\right)+\ldots+2+1\right)+2=12n^2+2\,.$$

Таким чином,

$$\left|\Delta_{H+h}^4\left(f,x-2h\right)+\Delta_{H-h}^4\left(f,x+2h\right)-2\Delta_H^4\left(f,x\right)\right|\le\left(12N^2+2\right)\omega_4\left(f,t\right).$$

Звідси випливає, що

$$\left|2\Delta_H^4\left(f,x\right)\right|\le$$

$$\le\left|\Delta_{H+h}^4\left(f,x-2h\right)+\Delta_{H-h}^4\left(f,x+2h\right)-\right.$$

$$-\left(\Delta^4_{H+h}\left(f,x-2h\right)+\Delta^4_{H-h}\left(f,x+2h\right)-2\Delta^4_{H}\left(f,x\right)\right)\Big|\le$$

$$\le\left|\Delta^4_{H+h}\left(f,x-2h\right)\right|+\left|\Delta^4_{H-h}\left(f,x+2h\right)\right|+$$

$$+\left|\Delta^4_{H+h}\left(f,x-2h\right)+\Delta^4_{H-h}\left(f,x+2h\right)-2\Delta^4_{H}\left(f,x\right)\right|\le$$

$$\le\left|\Delta^4_{H+h}\left(f,x-2h\right)\right|+\left|\Delta^4_{H-h}\left(f,x+2h\right)\right|+\left(12n^2+2\right)\omega_4\left(f,t\right)\le$$

$$\le\omega_4\left(f,(n+1)t\right)+\omega_4\left(f,(n-1)t\right)+\left(12n^2+2\right)\omega_4\left(f,t\right).$$

Якщо h пробігає весь проміжок $(0,t]$, то nh пробігає весь проміжок $(0,nt]$, тому з останньої нерівності та означення точної верхньої межі й одержуємо нерівність (2.6).

Теорему 2.4 доведено.

Висновки до розділу 2

У цьому розділі доведено, що не кожна k -мажоранта є модулем неперервності k-го порядку; при цьому розглядаються модулі неперервності, породжені півгрупою операторів, зокрема, k -ті модулі неперервності функцій, рівномірно неперервних на дійсній осі. Також отримано узагальнення цього твердження на випадок модулів неперервності порядку α при не цілих α. Для побудови відповідного контрприкладу одержано нову нерівність для модуля неперервності порядку α, породженого півгрупою операторів. У випадку k-ого модуля неперервності, породженого півгрупою операторів, а також у випадках третього і четвертого рівномірного модуля неперервності наводяться уточнення цієї нерівності. Наведено також приклад нерівності для модулів неперервності порядку α, яка виконується при цілих α, але є хибною для не цілих α.

Основні результати, які висвітлені в даному розділі, опубліковані у роботах [2, 3, 6, 70].

РОЗДІЛ 3

Про оцінки типу Джексона-Стєчкіна для кусково p-монотонного наближення функції

3.1 Постановка задачі та формулювання основного результату

У цьому розділі посилено контрприклад, який показує, що для кускового p-монотонного $(p \geq 4)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, яка залежить від функції, що наближують.

Нехай $C[a,b]$ – простір неперервних на відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$ функцій f з рівномірною нормою

$$\|f\|_{[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|,$$

$C^r[a,b]$ позначає простір r разів неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій.

Нехай $Y_s[a,b]$, $s \in \mathbb{N}$, – набір з $(s+2)$-ох точок $y_i \in [a,b]$, $a = y_{s+1} < \ldots < y_1 < y_0 = b$.

Якщо $p \in \mathbb{N}$, то $\Delta^p(Y_s[a,b])$ – це множина функцій $f \in C[a,b]$ таких, що $f^{(p)}(x) \geq 0$, $x \in (y_{i+1}, y_i)$, для парних i та $f^{(p)}(x) \leq 0$, $x \in (y_{i+1}, y_i)$, для непарних i. Функції $f \in \Delta^p(Y_s[a,b])$ називаються ***кусково p-монотонними***.

Нехай $W^r[a,b]$ – соболевський клас функцій $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, для яких на $[a,b]$ існує абсолютно неперервна $(r-1)$-ша похідна і таких що $\left\|f^{(r)}\right\|_{[a,b]} \leq 1$, де $r\in\mathbb{N}$ і $\|g\|_{[a,b]}:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]}|g(x)|$. Якщо $g\in C[a,b]$, то $\|g\|_{[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|g(x)|$. Коли $[a,b]=[-1,1]$, позначаємо $Y_s:=Y_s[-1,1]$ (також $\Delta^p(Y_s)=\Delta^p(Y_s[-1,1])$), $W^r:=W^r[-1,1]$ і $\|\cdot\|:=\|\cdot\|_{[-1,1]}$. Нехай $Y_1^*=\{-1,0,1\}$.

Нехай $\mathbf{P}_n$ – простір алгебраїчних многочленів степеня $\le n$. Для $f\in\Delta^p(Y_s[a,b])$ позначимо

$$E_n^p(f,Y_s,[a,b]):=\inf_{P_n\in\mathcal{P}_n\cap\Delta^p(Y_s[a,b])}\|f-\mathbf{P}_n\|_{[a,b]}$$

величину найкращого кусково p-монотонного наближення алгебраїчними многочленами степеня не вище n, $n\in\mathbb{N}$.

У роботі [65] побудовано контрприклад, який показує, що для кусково p-монотонного $(p\ge 4)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна з похідною $r\ge p$ є хибною, навіть якщо константа залежить від функції, яку наближають.

У цьому розділі побудовано новий контрприклад, який на порядок посилює теорему 1.5 ([65]) та узагальнює на випадок $p\ge 4$ теорему 1.4 ([97]). Основним результатом роботи є

Теорема 3.1. Для будь-яких $p\ge 3$, $r\ge p$, довільного набору точок Y_s та кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n\ge 0$, такої, що $\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n=+\infty$, існує функція $f\in\Delta^p(Y_s)\cap W^r$ така, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n E_n^{(p)}(f,Y_s)n^{r-p+2}=+\infty. \tag{3.1}$$

Контрприклади для інших пар (p,r), $p\ge 3$, побудовані в роботі [97].

Доведення, отримане методами роботи Д. Левіатана і І.О. Шевчука [97], де аналогічна задача розв’язана для випадку $p=3$, наводиться у наступному підрозділі.

3.2. Доведення основного результату

Нехай надалі $r,\ p\in\mathbb{N}$, $r\ge p\ge 3$. Зауважимо, що скрізь надалі додатні сталі $c_*, c_i, \widetilde{c_i}$ залежать лише від p, r і s.

Лема 3.1 ([97, лема 3.2.]). Для функції $F_{p+1}(x)=\dfrac{|x|x^{p-2}}{(p-1)!}$ існує стала $c_3\in(0,1)$ така, що

$$nE_n^{(p)}\left(F_{p+1},Y_1^*\right)\ge c_3,\ n\in\mathbb{N}.$$

Позначимо через S функцію, яка має властивості:

a) $S\in C^\infty(\mathbb{R})$;

b) $S-\dfrac{1}{2}$ – монотонна непарна функція;

c) $S(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\ge 1,\\ 0, & \text{якщо } x\le -1.\end{cases}$

Покажемо, що така функція S існує. У [99, гл. 3, п. 12] побудовано приклад нескінченно диференційовної на $\mathbb{R}$ функції f, рівної 1 на $[1,+\infty)$, рівної 0 на $(-\infty,0]$ і строго монотонної на $[0,1]$:

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left[-\dfrac{1}{x^2}\exp\left(-\dfrac{1}{(1-x)^2}\right)\right],\ 0<x<1,\\ 0,\ x\le 0,\\ 1,\ x\ge 1.\end{cases}$$

Тоді функція

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}f(x),\ x\ge 0,\\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}f(-x), x<0,\end{cases}$$

задовольняє умови a)-c).

Покладемо

$$s_0 := 1,\ s_j := \left\| S^{(j)} \right\|,\ j \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що умови c) випливає рівність

$$s_j = \max_{x \in \mathbb{R}} \left| S^{(j)}(x) \right|,\ j \in \mathbb{N}.$$

Покажемо, що з b) випливає, що

$$\int_{-1}^{1} S(x)\,dx = 1. \tag{3.2}$$

Дійсно, відомо, що інтеграл від непарної функції по симетричному відносно нуля відрізку рівний нулю, тому

$$\int_{-1}^{1} \left(S(x) - \frac{1}{2} \right) dx = 0,$$

звідки за лінійністю інтеграла, маємо, що

$$\int_{-1}^{1} S(x)\,dx = 1.$$

Помітимо, що для функції

$$S_\lambda(x) := S\left(\frac{x}{\lambda} \right),\ \lambda > 0,$$

виконується рівність

$$\left\| S_\lambda^{(j)} \right\|_{[-\lambda,\lambda]} = \lambda^{-j} s_j,\ j \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Дійсно,

$$\left\| S_\lambda^{(j)} \right\|_{[-\lambda,\lambda]} = \max_{x \in [-\lambda,\lambda]} \left| S_\lambda^{(j)}(x) \right| = \max_{x \in [-\lambda,\lambda]} \left| \frac{1}{\lambda^j} S_\lambda^{(j)}\left(\frac{x}{\lambda} \right) \right| =$$

$$= \frac{1}{\lambda^j} \max_{x \in [-\lambda,\lambda]} \left| \frac{1}{\lambda^j} S_\lambda^{(j)}\left(\frac{x}{\lambda} \right) \right| = \lambda^{-j} s_j,\ j \in \mathbb{N},$$

остання рівність випливає з означення величини s_j, бо коли x пробігає весь відрізок $[-\lambda,\lambda]$, то частка $\frac{x}{\lambda}$ пробігає весь відрізок $[-1,1]$.

Позначимо

$$f_n^{(p-1)}(x):=S_{\lambda_n}(x-2\lambda_n),\lambda_n:=\frac{c_3}{8n},$$

тоді

$$f_n(x):=\frac{1}{(p-2)!}\int_0^x (x-t)^{p-2}\ f_n^{(p-1)}(t)\,dt\,. \tag{3.4}$$

Означення функції f_n коректне в силу формули Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі [57, п. 318], яка дає вираз для функції через її $(p-1)$-шу похідну.

Лема 3.2. Справедливі співвідношення для довільного $n\in\mathbb{N}$

$$f_n\in\Delta^{(p)}(Y_1^*),$$

$$nE_n^{(p)}(f_n,Y_1^*)\geq c_5, \tag{3.5}$$

$$\left\|f_n^{(j)}\right\|=(c_6 n)^{j-p+1}s_{j-p+1},\ j\geq p-1, \tag{3.6}$$

$$\left\|f_n^{(p-2)}\right\|<1, \tag{3.7}$$

$$\|f_n\|<1. \tag{3.8}$$

Доведення. Оскільки за побудовою функції f_n, S_{λ_n} і властивістю c) функції S

$$f_n^{(p-1)}(x)=S_{\lambda_n}(x-2\lambda_n)=S\left(\frac{x-2\lambda_n}{\lambda_n}\right)=S\left(\frac{x}{\lambda_n}-2\right)=$$

$$=\begin{cases} S\left(\dfrac{x}{\lambda_n}-2\right), \text{якщо } x>\lambda_n, \\ 0, \text{ якщо } x\leq\lambda_n, \end{cases} \tag{3.9}$$

то з умов a)-c) на функцію S випливає, що $f_n \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, функція S неспадна на $\mathbb{R}$, а отже, $f^{(p)}(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, а також $f^{(p)}(x) \leq 0$ при $x \leq 0$, тому $f_n \in \Delta^{(p)}(Y_1^*)$.

Доведемо (3.5). Для цього позначимо

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0, \end{cases}$$

і

$$G(x) := \frac{1}{(p-2)!} \int_0^x (x-t)^{p-2} g(t) dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}}{(p-1)!}, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x \leq 0. \end{cases}$$

З умов b) і c) на функцію S випливає, що $S(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, тому з формули (3.9) отримуємо, що $0 \leq 1 - f_n^{(p-1)}(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, причому $1 - f_n^{(p-1)}(x) = 0$ при $x \geq 3\lambda_n$ (бо при цих x справедлива рівність $S\left(\frac{x}{\lambda_n} - 2\right) = 1$ в силу умови c)). Тому, враховуючи, що $0 \leq (x-t)^{p-2} \leq 1$ при $t \in [0, x]$ і $x \in [0,1]$, маємо, що для всіх $x \in [0,1]$

$$0 \leq G(x) - f_n(x) = \frac{1}{(p-2)!} \int_0^x (x-t)^{p-2} \left(1 - f_n^{(p-1)}(t)\right) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{(p-2)!} \int_0^x \left(1 - f_n^{(p-1)}(t)\right) dt \leq \frac{1}{(p-2)!} \int_0^{3\lambda_n} \left(1 - f_n^{(p-1)}(t)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{(p-2)!} \left(3\lambda_n - \int_0^{3\lambda n} f_n^{(p-1)}(t) dt\right).$$

Враховуючи співвідношення (3.9) і (3.2), за допомогою заміни змінних отримуємо, що

$$\int_0^{3\lambda_n} f_n^{(p-1)}(t)\,dt = \int_0^{3\lambda_n} S\left(\frac{x}{\lambda_n}-2\right)dx = \lambda_n \int_{-1}^{1} S(u)\,du = \lambda_n .$$

Звідси і з попередньої рівності маємо, що

$$0 \le G(x) - f_n(x) \le \frac{3\lambda_n}{(p-2)!},\ x \in [0,1].$$

Враховуючи отриману оцінку і рівності $f_n(x) = G(x) = 0$ при $x \le 0$, одержуємо нерівність

$$\| f_n - G \| \le \frac{2\lambda_n}{(p-2)!},$$

тому за властивостями величини найкращого кусково p-монотонного наближення

$$\begin{aligned} E_n^{(p)}\left(G, Y_1^*\right) &\le E_n^{(p)}\left(G - f_n, Y_1^*\right) + E_n^{(p)}\left(f_n, Y_1^*\right) \le \\ &\le \|G - f_n\| + E_n^{(p)}\left(f_n, Y_1^*\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Оскільки

$$2G(x) = \frac{x^{p-2}|x|}{(p-1)!} + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} = F_{p+1}(x) + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!},$$

тобто функції $2G$ і F_{p+1} відрізняються на многочлен степеня $p-1$, то

$$E_n^{(p)}\left(F_{p+1}, Y_1^*\right) = E_n^{(p)}\left(2G, Y_1^*\right) = 2E_n^{(p)}\left(G, Y_1^*\right)$$

при $n \ge p-1$, тому, враховуючи (3.10), лему 3.1, означення λ_n і нерівність $p \ge 3$, маємо, що

$$\begin{aligned} nE_n^{(p)}\left(f_n, Y_1^*\right) &\ge nE_n^{(p)}\left(G, Y_1^*\right) - n\| f_n - G\| \ge \\ &\ge \frac{c_3}{2} - \frac{2\lambda_n n}{(p-2)!} = \frac{c_3}{2} - \frac{2c_3}{8(p-2)!} \ge \end{aligned}$$

$$\geq \frac{c_3}{2} - \frac{2c_3}{4} = \frac{c_3}{4} =: \widetilde{c_5}, \; n \geq p-1.$$

З властивостей функції S випливає, що f_n не є алгебраїчним многочленом, тому можна взяти

$$c_5 := \min\{\widetilde{c_5}, nE_n^{(p)}\left(f_n, Y_1^*\right) | 1 \leq n \leq p-2\},$$

бо при цьому $c_5 > 0$.

Нерівність (3.5) доведена.

Доведемо (3.6). З формули (3.9) і означення чисел λ_n випливає, що

$$f_n^{(j)}(x) = \left(S\left(\frac{x}{\lambda_n} - 2 \right) \right)^{(j-p+1)} = \frac{1}{\lambda_n^{j-p+1}} S^{(j-p+1)}\left(\frac{x}{\lambda_n} - 2 \right) =$$

$$= \left(\frac{8n}{c_3} \right)^{j-p+1} S^{(j-p+1)}\left(\frac{x}{\lambda_n} - 2 \right).$$

Враховуючи, що $S\left(\frac{x}{\lambda_n} - 2 \right) = 1$ при $x \geq 3\lambda_n$ за властивістю с) функції S, а також нерівність $3\lambda_n = \frac{3c_3}{8n} < 1$ (бо $c_3 < 1$ в лемі 3.1), за означенням чисел s_j маємо, що

$$\left\| f_n^{(j)} \right\| = \left(\frac{8n}{c_3} \right)^{j-p+1} s_{j-p+1}, \; j \geq p-1,$$

тобто нерівність (3.6) виконується зі сталою $c_6 := \frac{8}{c_3}$.

Для доведення співвідношення (3.7) і (3.8) зауважимо, що з властивостей b) і с) функції S та означення функції S_{λ_n} випливає, що

$$0 \leq S_{\lambda_n}(x) \leq 1, \; x \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

З означення функції f_n випливає, що $f_n^{(p-2)}(0) = 0$, тому за формулою Ньютона-Лейбніца

$$f_n^{(p-2)}(x)=\int_0^x f_n^{(p-1)}(t)\,dt=\int_0^x S_{\lambda_n}(t-2\lambda_n)\,dt. \tag{3.12}$$

З формул (3.11) і (3.12) випливає нерівність

$$0\le f_n^{(p-2)}(x)\le 1,\ x\in[0,1].$$

Більше того,

$$0\le f_n^{(p-2)}(x)<1,\ x\in[0,1]. \tag{3.13}$$

Дійсно, з (3.9) випливає, що

$$S_{\lambda_n}(t-2\lambda_n)=0,\ t\in[0,\lambda_n],$$

тому звідси, з (3.11) і (3.12) отримуємо, що

$$f_n^{(p-2)}(x)<x\le 1,\ x\in[0,1].$$

Якщо $x\in[-1,0]$, то з (3.9) маємо, що $f_n^{(p-1)}(x)=0$, тому з (3.12) отримуємо, що

$$f_n^{(p-2)}(x)=0,\ x\in[-1,0]. \tag{3.14}$$

З (3.13) і (3.14) випливає (3.7).

Цілком аналогічно, користуючись (3.9) і (3.11) з інтегрального зображення з означення функції f_n отримуємо нерівність (3.8).

Лему 3.2 доведено.

Наслідок. 3.1. Для будь-яких $r\ge p\ge 3$ і $n\in\mathbb{N}$ існує функція $f\in\Delta^p(Y_1^*)\cap W^r$ така, що

$$n^{r-1}E_n^{(p)}(f,Y_1^*)\ge c(r),$$

де $c(r)>0$ – стала, яка залежить лише від r.

Доведення. Для функції $f_n\in\Delta^{(p)}(Y_1^*)$ за побудовою $f_n\in C^\infty(\mathbb{R})$ і за (3.6) при $j=r$ маємо

$$\left\|f_n^{(r)}\right\|=(c_6 n)^{r-p+1}s_{r-p+1}.$$

Покладемо

$$f := \frac{(c_6 n)^{p-r-1}}{s_{p-r-1}} f_n$$

покажемо, що функція f є шуканою.

За побудовою $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, $\left\| f^{(r)} \right\| = 1$, отже, $f \in \Delta^p\left(Y_1^*\right) \cap W^r$. Використовуючи однорідність величини найкращого кусково p-монотонного наближення, нерівність $p \geq 3$ та співвідношення (3.5), отримуємо

$$n^{r-1} E_n^{(p)}\left(f, Y_1^*\right) =$$

$$= n^{r-1} n^{p-r-1} c_6^{p-r-1} \frac{1}{s_{r-p-1}} E_n^{(p)}\left(f, Y_1^*\right) =$$

$$= \frac{c_6^{p-r-1}}{s_{r-p-1}} n^{p-3} n E_n^{(p)}\left(f, Y_1^*\right) \geq \frac{c_6^{p-r-1} c_5}{s_{r-p+1}}.$$

З доведення леми 3.2 випливає, що сталі c_5 і c_6 залежать лише від p, тобто $c_5 = c_5(p)$ і $c_6 = c_6(p)$, тому шукану сталу $c(r)$ можна визначити так:

$$c(r) := \min\left\{ \frac{c_5(p) c_6^{p-r-1}(p)}{s_{r-p+1}} : 3 \leq p \leq r \right\};$$

при цьому, очевидно, $c(r) > 0$.

Наслідок 3.1 доведено.

Нехай $r \geq p \geq 3$, і для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $b \in (0,1]$ позначимо $\lambda_{n,b} := b\lambda_n$, та

$$f_{n,b}(x) := A f_n\left(\frac{x}{b}\right), \text{ де } A := b^r \left\| f_n^{(r)} \right\|^{-1}.$$

Зауважимо, що з рівності (3.6) випливає, що

$$A = \frac{c_6^{p-r-1} b^r}{s_{r-p+1} n^{r-p+1}}. \tag{3.15}$$

Лема 3.3. *Для функції* $f_{n,b}$ *справедливі співвідношення*

$$f_{n,b}\in\Delta^{(p)}\left(Y_1^*\right),$$

$$f_{n,b}\left(x\right)=0\,,\ x\le\lambda_{n,b}\,, \tag{3.16}$$

$$f_{n,b}^{(p)}\left(x\right)=0\,,\ x\ge 3\lambda_{n,b}\,, \tag{3.17}$$

для кожного многочлена $P_n\in\mathcal{P}_n\cap\Delta^{(p)}\left(Y_1^*\right)$ *має місце оцінка*

$$\left\| f_{n,b}-P_n\right\|_{[-b,b]}\ge\frac{c_7 b^r}{n^{r-p+2}}\,, \tag{3.18}$$

$$\left\| f_{n,b}^{(j)}\right\|=\left(\frac{b}{c_6 n}\right)^{r-j}\frac{s_{j-p+1}}{s_{r-p+1}}\ j\ge p-1, \tag{3.19}$$

зокрема,

$$\left\| f_{n,b}^{(r)}\right\|=1, \tag{3.20}$$

і для довільного $\lambda>0$

$$\left\| f_{n,b}^{(j)}\right\|_{[-\lambda,\lambda]}\le\frac{c_8 b^{r-p+1}}{n^{r-p+1}}\lambda^{p-1-j},\ j=0,...,p-2. \tag{3.21}$$

Доведення. Включення $f_{n,b}\in\Delta^{(p)}\left(Y_1^*\right)$ справедливе, бо за лемою 3.2 $f_n\in\Delta^{(p)}\left(Y_1^*\right)$ і з означення функції $f_{n,b}$ випливає, що

$$f_{n,b}^{(p)}\left(x\right)=\frac{A}{b^p}\,f_n^{(p)}\left(\frac{x}{b}\right),\ x\in\mathbb{R},$$

а отже,

$$f_{n,b}^{(p)}\left(x\right)\ge 0\,,\ x\in\left(0,1\right),\text{ і }\ f_{n,b}^{(p)}\left(x\right)\le 0\,,\ x\in\left(-1,0\right).$$

З формули (3.9) і властивості с) функції S випливає, що

$$f_n^{(p-1)}\left(x\right)=\begin{cases}1,\ x\ge 3\lambda_n,\\ 0,\ x\le\lambda_n.\end{cases} \tag{3.22}$$

Звідси за означенням функції f_n отримуємо, що $f_n(x)=0$ при $x\le\lambda_n$, а отже, за означенням функції $f_{n,b}$ маємо, що $f_{n,b}(x)=0$ при $x\le b\lambda_n=\lambda_{n,b}$, тобто рівність (3.16) виконується.

З (3.22) маємо, що $f_n^{(p)}(x)=0$ при $x\ge 3\lambda_n$, тому за означенням функції $f_{n,b}$ одержуємо, що $f_n^{(p)}(x)=0$ при $x\ge 3b\lambda_n=3b\lambda_{n,b}$, тобто рівність (3.17) також виконується.

Доведемо (3.18). Якщо $P_n\in\mathbf{P}_n\cap\Delta^{(p)}(Y_1^*)$, то многочлен $u\mapsto\frac{1}{A}P_n(bu)$ теж належить множині $\mathbf{P}_n\cap\Delta^{(p)}(Y_1^*)$, тому, враховуючи означення величини найкращого p-монотонного наближення, нерівність (3.5) та рівність (3.15), маємо, що

$$\left\|f_{n,b}-P_n\right\|_{[-b,b]}=\max_{x\in[-b,b]}\left|Af_n\left(\frac{x}{b}\right)-P_n(x)\right|=$$

$$=\max_{u\in[-1,1]}\left|Af_n(u)-P_n(bu)\right|\ge$$

$$\ge AE_n^{(p)}\left(f_n,Y_1^*\right)\ge\frac{Ac_5}{n}=\frac{c_6^{p-r-1}b^r}{s_{r-p+1}n^{r-p+1}},$$

тобто виконується (3.18), де $c_7:=\frac{c_6^{p-r-1}c_5}{s_{r-p+1}}$.

Доведемо (3.19). За означенням функції $f_{n,b}$ маємо, що

$$f_{n,b}^{(j)}(x)=\frac{A}{b^j}f_n^{(j)}\left(\frac{x}{b}\right),\ j\ge 1, \tag{3.23}$$

тому, враховуючи рівності (3.6), (3.15), (3.22) і те, що

$$0<\lambda_{n,b}<3\lambda_{n,b}\le 1,$$

отримуємо співвідношення

$$\left\|f_{n,b}^{(j)}\right\|=\frac{A}{b^j}\left\|f_n^{(j)}\right\|=\frac{A}{b^j}(c_6n)^{j-p+1}s_{j-p+1}=$$

$$=\left(\frac{b}{c_6 n}\right)^{r-j}\frac{s_{j-p+1}}{s_{r-p+1}},\ j\ge p-1,$$

тобто рівність (3.19) виконується.

Доведемо (3.21). З означення функції f_n легко випливає, що

$$f_n(0)=f_n'(0)=\ldots=f_n^{(p-2)}(0)=0,$$

тому, враховуючи (3.23), маємо, що

$$f_{n,b}(0)=f_{n,b}'(0)=\ldots=f_{n,b}^{(p-2)}(0)=0.$$

Звідси за формулою Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі [57, п. 318]

$$f_{n,b}^{(j)}(x)=\frac{1}{(p-j-2)!}\int_0^x (x-t)^{p-j-2} f_{n,b}^{(p-1)}(t)\,dt,\ j=0,1,\ldots,p-2.$$

Використовуючи те, що модуль інтеграла не перевищує інтеграла від модуля, монотонність і лінійність інтеграла Рімана, формулу (3.23) при $j=p-1$, означення функції $f_n^{(p-1)}$, нерівності

$$|S(x)|\le 1,\ x\in\mathbb{R},\ \text{і}\ (p-j-1)!\ge 1,$$

а також (3.15), одержимо для всіх $x\in[-\lambda,\lambda]$ оцінку

$$\left|f_{n,b}^{(j)}(x)\right|=\left|\frac{1}{(p-j-2)!}\int_0^x (x-t)^{p-j-2} f_{n,b}^{(p-1)}(t)\,dt\right|\le$$

$$\le\frac{1}{(p-j-2)!}\left|\int_0^x (x-t)^{p-j-2}\,dt\right|\max_{t\in[-\lambda,\lambda]}\left|f_{n,b}^{(p-1)}(t)\right|\le$$

$$\le\frac{|x|^{p-j-1}}{(p-j-1)!}\frac{A}{b^{p-1}}\max_{t\in[-\lambda,\lambda]}\left|f_n^{(p-1)}\left(\frac{t}{b}\right)\right|\le$$

$$\le\frac{\lambda^{p-j-1}}{(p-j-1)!}\frac{A}{b^{p-1}}\max_{t\in[-\lambda,\lambda]}\left|S\left(\frac{t}{b\lambda_n}-2\right)\right|\le$$

$$\le \frac{A}{b^{p-1}} \lambda^{p-j-1} = \frac{c_6^{p-r-1} b^r}{s_{r-p+1} n^{r-p+1} b^{p-1}} =$$

$$= \frac{c_8 b^{r-p+1}}{n^{r-p+1}} \lambda^{p-j-1}, \; j = 0, ..., p-2,$$

якщо $c_8 := \dfrac{c_6^{p-r-1}}{s_{r-p+1}}$.

Звідси випливає нерівність (3.21).

Лему 3.3. доведено.

Лема 3.4. Нехай $r \ge p \ge 3$. Для кожної послідовності $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\alpha_n \ge 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \alpha_n = +\infty$, існує функція $f_* \in \Delta^p\left(Y_1^*\right) \cap W^r$ така, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n n^{r-p+2} E_n^{(p)}\left(f_*, Y_1^* \right) = +\infty. \tag{3.24}$$

Доведення. Спочатку визначимо за індукцією послідовність $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ натуральних чисел і послідовність $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ дійсних чисел з проміжку $(0,1]$. Нехай $n_1 = 2$, $b_1 = 1$ і припустимо, що числа n_{k-1} та b_{k-1} уже побудовані. Тоді ми покладемо $b_k := \lambda_{n_{k-1}, b_{k-1}}$ і візьмемо натуральне число $n_k > k^2 n_{k-1}$ таким великим, що має місце нерівність $\alpha_{n_k} b_k^r > k$ (це можливо, бо за умовою $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \alpha_n = +\infty$).

Тепер доведемо, що потрібна функція може бути визначена у вигляді суми збіжного ряду

$$f_*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k, b_k}(x), \; x \in [-1, 1].$$

Дійсно, для $0 \le j \le r-1$ справедлива оцінка (коментарі див. нижче):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| f_{n_k, b_k}^{(j)} \right\| \le c_* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} \le c_* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2c_* < \infty; \tag{3.25}$$

перша нерівність випливає з (3.19) і (3.21), бо $b_k \in (0,1]$, $k \ge 1$, за побудовою і якщо $0 \le j \le r-1$, то $r-j \ge 1$ і $r-p+1 \ge 1$; друга нерівність випливає з нерівності $n_k > k^2 n_{k-1}$, яка використовується при побудові числа n_k, бо $n_{k-1} \ge 1$, оскільки n_{k-1} – натуральне число. З (3.16) за теоремами про почленне диференціювання і про неперервність суми функціонального ряду [57, п. 435 і п. 431]

$$f_*^{(j)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k,b_k}^{(j)}(x),\ x \in [-1,1],\ 1 \le j \le r-1, \tag{3.26}$$

та

$$f \in C^{r-1}[-1,1].$$

Оскільки $c_3 \in (0,1)$, то за означенням чисел λ_n, $\lambda_{n,b}$ і b_k маємо, що

$$3\lambda_{n_k,b_k} = 3b_k\lambda_{n_k} = b_k \frac{3c_3}{n_k} < b_k = \lambda_{n_{k-1},b_{k-1}},\ k \in \mathbb{N}.$$

Тому якщо $r > p$, то для будь-якого $x_0 > 0$ існує окіл O_{x_0} точки x_0 такий, що для всіх $x \in O_{x_0}$ усі члени ряду (3.26) рівні нулю, крім, можливо, одного, наприклад, $f_{n_k,b_k}^{(r-1)}(x)$. Отже, можемо продиференціювати поточково цей ряд і отримаємо, що $f_*^{(r)}$ неперервна на $[-1,1] \setminus \{0\}$ і з (3.20) маємо, що $\left\| f_*^{(r)} \right\| = 1$. Таким чином, приходимо до висновку, що $f_* \in W^r$.

Аналогічно, якщо $r = q$, то для будь-якого $x_0 > 0$ існує такий окіл O_{x_0} точки x_0, що для всіх $x \in O_{x_0}$ усі члени ряду (3.26), крім, можливо, одного, наприклад, $f_{n_k,b_k}^{(r-1)}(x)$, або рівні нулю або є сталими, причому ряд з цих сталих, в силу (3.25), є збіжним. Отже, сума ряду (3.26) рівна сумі $f_{n_k,b_k}^{(r-1)}(x)$ і сталої. Тому і в цьому випадку $f_* \in W^r$.

І нарешті, для всіх $r \ge p$ зі сказаного вище випливає, що $f_*^{(p)}(x) \ge 0$, $x \in (0,1]$, а також

$$f_*^{(p)}(x) = 0 \le 0,\ x \in [-1,0),$$

отже,

$$f_* \in \Delta^{(p)}(Y_1^*).$$

Покажемо, що для цієї функції виконується співвідношення (3.24). З цією метою зафіксуємо $k \ge 1$ і розглянемо многочлен $P_{n_k} \in \mathbf{P}_{n_k} \cap \Delta^{(p)}(Y_1^*)$. Тоді використовуючи включення $[-b_k, b_k] \subset [-1,1]$, нерівність трикутника для рівномірної норми і оцінку (3.18)

$$\left\| f_* - P_{n_k} \right\| \ge \left\| f_* - P_{n_k} \right\|_{[-b_k, b_k]} = \left\| \sum_{m=k}^{\infty} f_{n_m, b_m} - P_{n_k} \right\|_{[-b_k, b_k]} =$$

$$= \left\| \left(f_{n_k, b_k} - P_{n_k} \right) + \sum_{m=k+1}^{\infty} f_{n_m, b_m} \right\|_{[-b_k, b_k]} \ge$$

$$\ge \left\| \left(f_{n_k, b_k} - P_{n_k} \right) \right\|_{[-b_k, b_k]} - \left\| \sum_{m=k+1}^{\infty} f_{n_m, b_m} \right\|_{[-b_k, b_k]} \ge$$

$$\ge c_7 \frac{b_k^r}{n_k^{r-p+2}} - \left\| \sum_{m=k+1}^{\infty} f_{n_m, b_m} \right\|_{[-b_k, b_k]}. \qquad (3.27)$$

Тепер з означення чисел b_m і λ_n з урахуванням включення $c_3 \in (0,1)$ негайно отримуємо

$$b_m = b_{m-1} \lambda_{n_{m-1}} = \frac{c_3}{8} \frac{b_{m-1}}{n_{m-1}} < \frac{b_{m-1}}{n_{m-1}}, \qquad (3.28)$$

тому (коментарі див. нижче)

$$\left\| \sum_{m=k+1}^{\infty} f_{n_m, b_m} \right\|_{[-b_k, b_k]} \le \sum_{m=k+1}^{\infty} \left\| f_{n_m, b_m} \right\|_{[-b_k, b_k]} \le$$

$$\le c_8 b_k^{p-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{b_{n_m}^{r-p+1}}{n_m^{r-p+1}} < c_8 b_k^{p-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{b_{n_{m-1}}^{r-p+1}}{\left(n_{m-1} n_m\right)^{r-p+1}} \le$$

$$\le c_8 b_k^{p-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \left(\frac{b_k}{n_k}\right)^{r-p+1} \frac{1}{n_m^{r-p}} \frac{1}{n_m} \le$$

$$\le c_8 \frac{b_k^r}{n_k^{r-p+1}} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2 n_{m-1} n_m^{r-p}} \le \frac{c_8}{k} \frac{b_k^r}{n_k^{r-p+2}}; \qquad (3.29)$$

у першій нерівності ми використали нерівність трикутника для норми; у другій нерівності ми скористались оцінкою (3.21) при $j=0$; у третій нерівності ми використали (3.28); у четвертій нерівності ми застосували нерівність

$$\frac{b_{m-1}}{n_{m-1}} \le \frac{b_k}{n_k} \text{ при } m \ge k+1,$$

яка випливає з нерівності

$$\frac{b_m}{n_m} \le b_m < \frac{b_{m-1}}{n_{m-1}},$$

котра, в свою чергу, є наслідком (3.28) і очевидної нерівності $n_m \ge 1$; у п'ятій нерівності ми скористались співвідношенням $n_m > m^2 n_{m-1}$, за допомогою якого будувались числа n_k; у шостій нерівності ми використали нерівність $n_{m-1} \ge n_k$ при $m \ge k+1$, яка є наслідком нерівності $n_m > m^2 n_{m-1}$, а також врахували нерівності $n_m \ge 1$ і $\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \frac{1}{k}$ (див. [57, п. 373, формула (11) при $\sigma = 1$]). Покладемо $k_0 := \frac{2c_8}{c_7}$. Тоді для всіх $k \ge k_0$ справджується нерівність

$$\frac{c_8}{k} \frac{b_k^r}{n_k^{r-p+2}} \le \frac{c_7}{2} \frac{b_k^r}{n_k^{r-p+2}},$$

тому з (3.27) і (3.29) за означенням величини найкращого кусково p-монотонного наближення отримуємо

$$E_{n_k}^{(p)}\left(f_*,Y_1^*\right)\geq \frac{c_7}{2}\frac{b_k^r}{n_k^{r-p+2}},\ k\geq k_0,$$

а отже, враховуючи нерівність $\alpha_{n_k}b_k^r > k$, маємо, що

$$\alpha_{n_k}{n_k}^{r-p+2}E_{n_k}^{(p)}\left(f_*,Y_1^*\right)\geq \frac{c_7}{2}k\to+\infty \text{ при } k\to\infty.$$

Лема 3.4 доведена.

Зауваження. Оскільки $3\lambda_{n_1,b_1}=\frac{3c_3}{8n_1}=\frac{3c_3}{16}<\frac{1}{2}$, то з (3.16), (3.17) і (3.26) випливає, що для всіх $j\geq p$ справджується тотожність $f_*^{(j)}\left(x\right)\equiv 0$, $x\notin\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Звідси можна зробити висновок, що f_* є многочленом степеня не вище $p-1$ на проміжку $(\frac{1}{2},1]$, а отже, функцію f_* можна продовжити цим многочленом на проміжок $\left(1,+\infty\right)$. Крім того, зі співвідношення (3.16) випливає, що ряд, за допомогою якого визначено функцію f_*, збігається при всіх $x\leq 0$, причому його сума рівна нулю. Тому можна вважати, що функція f_* з леми 3.4 визначена на $\mathbb{R}$, причому є алгебраїчним многочленом степеня не вище $p-1$ на проміжку $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, а також

$$f_*\left(x\right)=0,\ x\leq 0.$$

Нарешті, перейдемо безпосередньо до доведення теореми 3.1.

Доведення теореми 3.1. Візьмемо довільний набір точок Y_s і за його допомогою визначимо число $b\in(0,1]$ таким чином:

$$b := \begin{cases} \min\{1-y_1, y_1-y_2\}, & \text{якщо } s>1, \\ 1-|y_1|, & \text{якщо } s=1. \end{cases}$$

Зауважимо, що $0<b\le 1$. Дійсно, якщо $s=1$, то за означенням $-1<y_1<1$, тому $0\le |y_1|<1$, отже, $b=1-|y_1|\in(0,1]$. Якщо $s>1$, то $-1<y_2<y_1<1$, звідки $b>0$ і $1-y_2<2$, тож якщо припустити, що $b>1$, то $1-y_1>1$ і $y_1-y_2>1$, а отже, $1-y_2=1-y_1+y_1-y_2>2$, а це суперечить раніше отриманій нерівності.

Покладемо

$$f(x) := b^r f_*\left(\frac{x-y_1}{b}\right), \; x\in\mathbb{R}.$$

Покажемо, що $f\in\Delta^{(p)}(Y_s)\cap W^r$. З означення маємо, що

$$f^{(r)}(x) = f_*^{(r)}\left(\frac{x-y_1}{b}\right). \tag{3.30}$$

Відзначимо, що для образу відрізка $[-1,1]$ при лінійному відображенні

$$\varphi(x) := \frac{x-y_1}{b}$$

має місце включення

$$\varphi([-1,1]) = [\varphi(-1), \varphi(1)] \supset [0,1]. \tag{3.31}$$

Дійсно, очевидно, що

$$\varphi(-1) = \frac{-1-y_1}{b} < 0.$$

Крім того, при $s=1$ маємо, що

$$\varphi(1) = \frac{1-y_1}{b} = \frac{1-y_1}{1-|y_1|} \ge 1,$$

оскільки $y_1\le |y_1|$, а при $s>1$ маємо, що

$$\frac{1-y_1}{b} = \frac{1-y_1}{\min\{1-y_1, y_1-y_2\}} \ge \frac{1-y_1}{1-y_1} = 1.$$

Тепер, враховуючи, що $r \geq p$, з зауваження після леми 3.4, (3.30) і (3.31) маємо, що $\left\| f^{(r)} \right\| = \left\| f_*^{(r)} \right\|$, а оскільки $f_* \in W^r$ (за лемою 3.4), то $f \in W^r$.

Далі, маємо, що

$$f^{(p)}(x) = b^{r-p} f_*^{(p)}\left(\frac{x-y_1}{b}\right).$$

Якщо

$$x \in (y_1, 1), \text{ то } \frac{x-y_1}{b} > 0,$$

тому, враховуючи, що $f_* \in \Delta^p\left(Y_1^*\right)$, маємо, що

$$f_*^{(p)}\left(\frac{x-y_1}{b}\right) \geq 0,$$

а отже,

$$f^{(p)}(x) \geq 0.$$

Якщо $s = 1$ і $x \in (-1, y_1)$, то

$$\frac{x-y_1}{b} < 0,$$

тому, аналогічно враховуючи, що $f_* \in \Delta^p\left(Y_1^*\right)$, маємо, що

$$f_*^{(p)}\left(\frac{x-y_1}{b}\right) \leq 0,$$

а отже,

$$f^{(p)}(x) \leq 0.$$

Якщо $s > 1$ і $x \in (y_{i+1}, y_i)$, де $i = 1,..,s$, то

$$\frac{x-y_1}{b} < 0,$$

тому за зауваженням після леми 3.4

$$f_*\left(\frac{x-y_1}{b}\right)=0,$$

звідки

$$f_*^{(p)}\left(\frac{x-y_1}{b}\right)=0,$$

а отже,

$$f^{(p)}(x)=0.$$

Таким чином, справедливе включення

$$f_*\in\Delta^p(Y_s).$$

Доведемо, що функція f задовольняє співвідношення (3.1). Дійсно, помітимо, що

$$f_*(u)=b^{-r}f(bu+y_1).$$

Візьмемо довільний многочлен $P_n\in\mathbf{P}_n\cap\Delta^{(p)}\left(Y_s^*\right)$ і визначимо допоміжний многочлен

$$Q_n(u):=b^{-r}P_n(bu+y_1).$$

Доведемо, що

$$Q_n\in\Delta^{(p)}\left(Y_1^*\right).$$

Дійсно, якщо $u\in(0,1)$, то

$$bu+y_1\in(y_1,y_1+b)\subset(y_1,1),$$

бо у випадку $s=1$ маємо, що

$$y_1+b=y_1+1-|y_1|\le 1,$$

а для $s>1$ отримуємо, що

$$y_1+b\le y_1+1-y_1=1;$$

при цьому

$$Q_n^{(p)}(u)=b^{p-r}P_n^{(p)}(bu+y_1)\ge 0,$$

оскільки

$$P_n^{(p)}(t) \geq 0,\ t \in (y_1, 1),$$

бо

$$P_n \in \Delta^{(p)}(Y_s).$$

Далі, якщо $u \in (-1,0)$, то

$$bu + y_1 \in (-b + y_1, y_1) \subset (y_2, y_1),$$

бо у випадку $s = 1$ маємо, що

$$-b + y_1 = |y_1| - 1 + y_1 \geq -1,$$

а для $s > 1$ отримуємо, що

$$-b + y_1 > -(y_1 - y_2) + y_1 = y_2;$$

при цьому

$$Q_n^{(p)}(u) = b^{p-r} P_n^{(p)}(bu + y_1) \leq 0,$$

оскільки

$$P_n^{(p)}(t) \leq 0,\ t \in (y_2, y_1),$$

бо

$$P_n \in \Delta^{(p)}(Y_s).$$

У попередньому абзаці, зокрема, доведено, що

$$[y_1 - b, y_1 + b] \subset [-1,1].$$

Враховуючи дане включення, рівність

$$\psi([-1,1]) = [-b + y_1, b + y_1],$$

де

$$\psi(u) = bu + y_1,$$

тотожність

$$P_n(x) = b^r Q_n\left(\frac{x - y_1}{b}\right),$$

включення $Q \in \Delta^{(p)}\left(Y_1^*\right)$ та означення величини найкращого рівномірного кусково p-монотонного наближення, дістаємо оцінку

$$\| f - P_n \| \geq \| f - P_n \|_{[y_1 - b, y_1 + b]} =$$

$$= b^r \| f_* - Q_n \| \geq b^r E_n^{(p)}\left(f_*, Y_1^* \right),$$

так ми отримуємо, що

$$E_n^{(p)}\left(f, Y_s \right) \geq b^r E_n^{(p)}\left(f_*, Y_1^* \right).$$

В силу леми 3.4, звідси випливає співвідношення (3.1) і доведення завершене.

Висновки до розділу 3

У цьому розділі на порядок посилено контрприклад, який показує, що для кусково p-монотонного $(p \geq 4)$ наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, яка залежить від функції, яку наближують.

Основні результати, які висвітлені в даному розділі, опубліковані у роботі [5].

ВИСНОВКИ

1) Доведено, що не кожна k-мажоранта є модулем неперервності k-го порядку при $k \geq 3$. Це твердження поширено на модулі неперервності дробового порядку;
2) Встановлено нові нерівності для модулів неперервності k-го та дробового порядків, породжених півгрупою операторів;
3) Посилено твердження про те, що для кусково p-монотонного, $p \geq 4$, наближення алгебраїчними многочленами нерівність типу Джексона-Стєчкіна є хибною навіть з константою, залежною від функції, яку наближують.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука. – 1965. – 408 с.
2. *Безкрила С.І.* Про треті модулі неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 10. – С. 1412–1416. (English translation: *Bezkryla S.I.* On the third moduli of continuity / S.I. Bezkryla, O.N. Nesterenko and A.V. Chaikovs'kyi // Ukrainian Mathematical Journal – 2015. – V.66, № 10. – P. 1589 – 1594).
3. *Безкрила С.І.* Про четвертий модулі неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – Київ: НПУ М.П. Драгоманова. – 2012. – № 13 (1) – С. 45 – 50.
4. *Безкрила С.І.* Про четвертий модуль неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // XV міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука 15-17 травня 2014: Тези доповідей. – Київ: Національний технічний університет України КПІ. – 2014. – С. 43 – 45.
5. *Безкрила С.І.* Про оцінки типу Джексона-Стєчкіна для кусково q -опуклого наближення функцій / С.І. Безкрила // Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2016. – № 36. – С. 6 – 10.
6. *Безкрила С.І.* Про модулі неперервності дробового порядку породжені півгрупою операторів / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2017. – № 1(37) – С. 6 – 9.

7. *Безкрила С.І.* Про k -мажоранту і модуль неперервності / С.І. Безкрила // Матеріали міжнародної конференції асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь з нагоди 80-річчя М.І. Шкіля 13-14 грудня 2012. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. – 2012. – С. 42 – 43.

8. *Безкрылая С.И.* О третьих модулях непрерывности / С.И. Безкрылая, А.Н. Нестеренко, А.В. Чайковский // Міжнародна математична конференція «Боголюбівські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка: Тези доповідей. – Севастополь : Інститут математики НАН України, 2013. – С. 217 – 218.

9. *Безкрила С.І.* Про оцінки типу Джексона – Стєчкіна для кусково q -опуклого наближення функцій / С.І. Безкрила // XVII міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука 19-20 травня 2016: Тези доповідей. – Київ: Національний технічний університет України КПІ. – 2016. – С. 42 – 43.

10. *Безкрила С.І.* Про одну нерівність для третього модуля неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Матеріали XI міжнародної наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна» 18-22 березня 2013: Тези доповідей. – Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. –2013. – С. 101.

11. *Безкрила С.І.* Про одну нерівність для четвертого модуля неперервності / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Матеріали XI міжнародної наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна» 25-28 березня 2014: Тези доповідей. – Київ: Київський національний університет імені Тараса Шевченка. – 2014. – С. 220 – 221.

12. *Безкрила С.І.* Про модулі неперервності старших порядків, породжених півгрупою операторів / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Міжнародна наукова конференція «Теорія наближень і її застосування» з

нагоди 75-річчя В.П. Моторного 8-11 жовтня 2015: Тези доповідей. – Дніпропетровськ: Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара. – 2015. – С. 13.

13. *Безкрила С.І.* Про модулі неперервності дробового порядку, породжені півгрупою операторів / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // Міжнарожна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», присвячена 75-річчю з дня народження члена-кореспондента НАН України, професора О.І. Степанця 28 травня – 3 червня 2017. – Тези доповідей. – Слов'янськ: Донбаський державний педагогічний університет. – 2017. – С. 42.

14. *Безкрила С.І.* Про одну нерівність для модулів неперервності дробового порядку, породжених півгрупою операторів / С.І. Безкрила, О.Н. Нестеренко, А.В. Чайковський // XVIII міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-й річниці від дня народження М. Кравчука, 7-10 жовтня 2017: Тези доповідей. – Луцьк – Київ: Національний технічний університет України КПІ. – 2017. – С. 168 – 169.

15. *Бернштейн С.Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени / С. Н. Бернштейн // Собр. сочинений. В 4-х томах. – Т. 1. – М.: Изд-во АН СССР. – 1952. – 584 С. (Див. також Сообщение Харьк. мат. Общества. – 1912. – Сер. 2, Т.13. – С. 49 – 194).

16. *Бесов О.В.* Описание модулей непрерывности в L_2 / О.В. Бесов, С.Б. Стечкин // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1975. – Т. 134. – С. 23 – 25.

17. *Бондаренко А.В.* Отрицательные результаты в формосохраняющем приближении высших порядков / А.В. Бондаренко, А.В. Примак // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76, № 6. – С. 812 – 823.

18. *Бондаренко А.В.* Негативний результат у поточковому 3-опуклому наближенні многочленами / А.В Бондаренко, Я.Я. Гілевич // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 4 – С. 563 – 567.

19. *Брудный Ю.А.* Об одном методе приближения ограниченных функций, заданих на отрезке / Ю.А. Брудный // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. – Баку – 1965. – С. 40 – 45.

20. *Брудный Ю.А.* Приближение функций алгебраическими многочленами / Ю.А. Брудный // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1968. – Т. 32, № 4. – С. 780 – 787.

21. *Бугров Я.С.* Дробные разности операторы и классы функций / Я.С. Бугров // Теория приближений функций: Тр. Междунар. конф. по теории приближений функций. – М.: АН СССР. – 1987. – С. 75 – 78.

22. *Вакарчук С.Б.* О полных модулях непрерывности 2π периодических функций двух переменных в пространстве $L_{2,2}$ / С.Б. Вакарчук, М.Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. – 2017. – Т. 69, № 3. – С. 300 – 310.

23. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n- поперечников классов (ψ,β)-дифференцируемых функций в L_2. I. / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журнал. – 2016. – Т. 68, № 6. – С. 723 – 745.

24. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n- поперечников классов (ψ,β)-дифференцируемых функций в L_2. II. / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журнал. – 2016. – Т. 68, № 8. – С. 1021 – 1036.

25. *Вакарчук С.Б.* Неравенства типа Джексона с обобщенным модулем непрерывности и точные значения n- поперечников классов (ψ,β)-дифференцируемых функций в L_2. III. / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журнал. – 2016. – Т. 68, № 10. – С. 1299 – 1319.

26. *Вакарчук С.Б.* О модулях непрерывности и производных дробного порядка в задачах наилучшей среднеквадратической аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа на всей вещественной оси / С.Б. Вакарчук // Укр. мат. журн. – 2017. – Т. 69, № 5. – С. 599 – 623.

27. *Гаймназаров Г.*О модулях гладкости дробного порядка функций, заданных на всей вещественной оси / Г.О Гаймназаров // Докл. АН ТаджССР. – 1981. – 24, № 3. – С. 148 – 150.

28. *Гаймназаров Г.* Некоторые соотношения для модулей гладкости дробного порядка в пространстве $L_p(-\infty,\infty)$ / Г.О Гаймназаров // Изв. АН ТаджССР.Отд. физ.-мат., хим. и геол. наук. – 1985. – № 3. – С. 8 – 13.

29. *Гейт В.Э.* О функциях, являющихся вторым модулем непрерывности / В.Э. Гейт // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 9. – С. 38 – 41.

30. *Гейт В.Э.* О точности некоторых неравенств в теории приближений / В.Э. Гейт // Мат. заметки. – 1971. – Т. 10. №5. – С. 571 – 582.

31. *Гейт В.Э.* Теоремы вложения для некоторых классов периодических непрерывных функций / В.Э. Гейт // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 4. – С. 67 – 77.

32. *Гелбаум Б.* Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед – М.: Мир. – 1967. – 250 с.

33. *Гилевич Я.* Комонотонное приближение / Я. Гилевич, И.А. Шевчук // Фундамент. и прикл. матем. – 1996. – Т. 2., № 2. – Р. 319-363.

34. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами / В.К. Дзядык. – М. 1975. – 511 с.

35. *Жук В.В.* Аппроксимация периодических функций / В.В. Жук. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та. – 1982. – 368 с.

36. *Ибрагимов И.И.* Экстремальные свойства целых функций конечной степени / И.И. Ибрагимов. – Баку: Изд-во АН АзССР. – 1962. – 316 с.

37. *Иванов В.И.* О модуле непрерывности в L_p / В.И. Иванов // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41, № 5. – С. 682 – 686.

38. *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Изд-во ЛКИ – 2007. – 624 с.

39. *Коляда В.И.* О Вложении в классы / В.И. Коляда // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – Т. 39, № 2. – С. 418 – 437.

40. *Конягин С.В.* О вторых модулях непрерывности / С.В. Конягин // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 2010. – Т. 269. – С. 150–152.

41. *Конягин С.В.* О модулях непрерывности функций / С.В. Конягин // Всесоюзная школа по теории функций, посвященная 100-летию со дня рождения акад. Н.Н. Лузина: Тез. докл. (Кемерово, 10-19 сент. 1983 г.) – Кемерово, 1983. – С. 59.

42. *Купцов Н.П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов / Н.П. Купцов // УМН. – 1968. – Т.XXIII, вып.4 (142). – С. 117–178.

43. *Никольский С.М.* Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности / С.М. Никольский // ДАН СССР. – 1946. –Т. 52. №3. – С. 191–194.

44. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский. – М.: Наука.– 1969. – 480 с.

45. *Пономаренко В.Г.* Модули гладкости дробного порядка и наилучшие приближения в $L_p\left(1<p<\infty\right)$ / В.Г. Пономаренко // Конструктивная теория функций: Тр. Междунар. конф. по конструктивной теории функций. – София. – 1983. – С. 129 – 133.

46. *Потьомкіна Л.Л.* Про аналітичність модулів неперервності дійсно-аналітичних і кусково-аналітичних функцій: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.01.01 «Математичний аналіз» / Л.Л. Потьомкіна. – Донецьк, 2004. – 16 с.

47. *Радзиевский Г.В.* О наилучших приближениях и о скорости сходимости по корневым векторам оператора / Г.В. Радзиевский // Укр. мат. журн. – 1997. – Т. 49, № 6. – С. 754 – 773.

48. *Радзиевский Г.В.* Прямые и обратные теоремы в задачах о приближении по векторам конечной степени / Г.В. Радзиевский // Матем. сборник. – 1998. – Т. 189, № 4. – С. 83 – 124.

49. *Радзиевский Г.В*. Прямые и обратные теоремы для наименьших уклонений от корневых функций регулярной краевой задачи / Г.В. Радзиевский // Доклады РАН. – 2005. – Т. 400, № 2. – С. 157 – 161.

50. *Самко С.Г.* Оценка Зигмунда для модулей непрерывности дробного порядка сопряженной функции/ С.Г.Самко, А.Я. Якубов // Изв. вузов. Матем. – 1985. – № 12. – С. 49–53.

51. *Самко С.Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/ С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск: Наука и техника, 1987. – 699 с.

52. *Сендов Б.* Усредненные модули гладкости. / Б. Сендов, В. Попов. – М.: Мир. – 1988. – 328 с.

53. *Степанец А.И.* Методы теории приближений. / А.И. Степанец. – В 2-х ч. – К.: Ин-т математики НАНУ. – 2002. – 468 с.

54. *Стечкин С.Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций / С.Б. Стечкин // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1951. – Т. 15, № 3. – С. 219 – 242.

55. *Тайков Л.В.* Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 / Л.В. Тайков // Мат. заметки. – 1979. – Т. 25, № 2. – С. 217 – 223.

56. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

57. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х тт. / Г. Фихтенгольц. – М.: Наука. – 1968. – 464 с.

58. *Шведов А.С.* Порядки коприближений функций алгебраическими многочленами / А.С. Шведов // Матем. заметки. – 1981. – Т. 29, № 1. – С. 117 – 130.

59. *Шведов А.С.* Теорема Джексона в L_p , $0 < p < 1$, для алгебраических многочленов и порядки комонотонных приближений / А.С. Шведов // Матем. заметки – 1979. – Т. 25, № 1. – P. 107 – 117.

60. *Шведов А.С.* Комонотонное приближение функций многочленами / А.С. Шведов // ДАН СССР – 1980. – Т. 250, № 1. – P. 39 – 42.

61. *Шведов А.С.* Коприближение кусочно-монотонных функций многочленами / А.С. Шведов // Матем. заметки – 1981. – Т 30, № 6. – С. 839 – 846.

62. *Шевчук И.А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций / И.А. Шевчук. – К.: Наук. Думка. – 1992. – 224 с.

63. *Шевчук И.А.* Некоторые замечания о функциях типа модуля непрерывности порядка $k \geq 2$ / И.А. Шевчук // Вопросы теории приближения функций и ее приложений. Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1976. – С. 194–199.

64. *Юдин В.А.* О модуле непрерывности в L_2 / В.А. Юдин // Сиб. мат. журн. – 1979. – Т. 20, № 2. – С. 449 – 450.

65. *Ющенко Л.П.* Негативні результати у кусково-опуклому наближенні вищих порядків / Л.П. Ющенко // Вісник Київського університету. Математика і Механіка. – 2009. – № 22. – С. 8 – 10.

66. Anastassion G.A. Approximation theory. Moduli of continuity and global smoothness preservation/ G.A.Anastassion, S.G. Gal. – Boston: Birkhauser. – 2000 – 525 p.

67. *Beatson R.K.* The Degree of Monotone Approximation / R.K. Beatson // Pacific J. Math. – 1978. – V. 74. № 1. – P. 5–14.

68. *Beatson R.K.* Joint approximation of a function and its derivatives / R.K. Beatson // Approximation theory, III (Proc. Conf., Univ. Texas, Austin, Tex.) Academic Press, New York. – 1980. – P. 199–206.

69. *Beatson R.K.* On comonotone approximation / R.K. Beatson, D. Leviatan // Canad. Math. Bull. – 1983. – V. 26, № 2. – P. 220–224.

70. *Bezkryla S.I.* On high orders moduli of continuity generated by semigroupsof operators / S.I. Bezkryla, O.N. Nesterenko and A.V. Chaikovs’kyi // Jaen Journal on Approximation. – 2016. – V.8, № 2. – P. 183–190.

71. *Bondarenko A.V.* Jackson type inequality in 3-convex approximation / A.V. Bondarenko // East I. Approx. – 2002. – V. 8. № 3. – P. 291–302.

72. *Butzer P.L.* Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes/ P.L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Gorlich, R.L. Stens // Canad. J. Math. – 1977 – V.29, № 4. – P. 781–793.

73. *Butzer P.L.* An access to fractional differentiation via fractional difference quotiens / P.L. Butzer, U. Westphal // Lect. Notes Math. – 1975. – V. 457. – P. 116 – 145.

74. *Butzer P.L.* Sur la *théorie* des demi-groupes et classes de saturation de certaines *intégrales singulières* / P.L. Butzer // Compt. Rend. Acad. Sci. – Paris. – 1956. – 243, № 20. – P. 1473 – 1475.

75. *Butzer P.L.* Über den Grad der Approximation des Identitätsoperator durch Halbgrouppen von linearer operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale / P.L. Butzer // Math. Ann. – 1957. – 133, № 5. – P. 410 – 425.

76. *Bhaya E.S., Munim Z.A.* A Modulus of smoothness in terms of fractional order / E.S. Bhaya, Z.A. Munim // Int. J. Contemp. Math. Sciences. – 2012. – V. 7, № 37. – P. 1807– 1817.

77. *DeVore R.A.* Monotone approximation by polynomials / R.A. DeVore // SIAM J. Math. anal. – 1977. – V. 8, № 5. – P. 220–224.

78. *DeVore R.A.* Degree of monotone approximation. Linear operators and approximation, II / R.A. DeVore // Proc. Conf., Oberwolfach Math. Res. Inst. – 1974. – V. 25. – P. 337–351.

79. *DeVore R.A.* Degree of approximation, Approximation theory, II / R.A. DeVore // Proc. Internat.Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex. Academic Press, New York. – 1976. – P. 117–161.

80. *De Vore R.A.*Constractive Approximation / R.A. De Vore, G.G. Lorentz. – New York: Springer. – 1993. – 456 p.

81. *Ditzian Z.* Moduli of smoothness / Z. Ditzian, V. Totic. – New York: Springer. – 1987. – P. 227.

82. *Dzyadyk V.K.* Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials / V.K. Dzyadyk, I.A. Shevchuk. – Amsterdam: Walter De Gruyter. – 2008. – P. 496.

83. *Freud G.* Uber die Approximation reellen stetiger Funktionen durch gewohnliche Polynome / G. Freud // Math. Ann. – 1959. – T. 137, № 1. – P. 17 – 25.

84. *Gavrea I.*The approximation of the continuous functions by means of some linear positive operators / I. Gavrea // Results in Math. – 1996. – V. 30. – P. 55 – 66.

85. *Gavrea I.* General estimates for the Ditzian-Totik modulus / I. Gavrea, H. Gonska, R. Paltaneaand, G.Tachev // East J. Approx. – 2003. – V. 9. – P. 175 – 194.

86. *Ivanov K.G.* On the rates of convergence of two moduli of functions / K.G. Ivanov // Piska Stud. Math. Bulg. – 1983. – 5. – P. 97 – 104.

87. *Jackson D.* Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganz rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung (On the precision of the approximation of continuous functions by polynomials of given degree and by trigonometric sums of given order) / D. Jackson // Preisschrift und Dissertation. Univ. Gottingen. – June 14, 1911.

88. *Jackson D.* On approximation by trigonometric sums and polynomials. / D. Jackson // Trans. Amer. Mat. Soc. – 1912. – V.14. – P. 491 – 515.

89. *Konovalov V.N.* Shape-preserving widths of Sobolev-type classes of s-monotone functions on a finite interval / V.N. Konovalov, D. Leviatan // Israel J. Math. – 2003. – V. 133 – P. 239 – 268.

90. *Kopotun K.A.* Uniform and pointwise shape preserving approximation by algebraic polynomials / K.A. Kopotun, D. Leviatan, A. Prymak, I.A. Shevchuk // Surv. Approx. Theory. – 2011. – № 6. – P. 24 – 74.

91. *Kopotun K.A.* Pointwise and uniform estimates for convex approximation of functions by algebraic polynomials / K.A. Kopotun // Constr. Approx. – 1994. – V. 10, № 2. – P. 153 – 178.

92. *Kopotun K.A.* Uniform estimates of monotone and convex approximation of smooth functions / K.A. Kopotun // J. Approx. Theory. – 1995. – V. 80, № 1. – P. 76 – 107.

93. *Lebesgue H.* Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a condition de Lipschitz / H. Lebesgue // Bull. Soc. math. France. – 1910. – V. 38. – P. 184 – 210.

94. Lebesgue H. Sur les intégrales singulières / H. Lebesgue // Annales de la faculté des sciences de Toulouse (3). – T. 1. – 1909. – P. 25 – 117.

95. *Leviatan D.*Coconvex polynomial approximation / D. Leviatan, I.A. Shevchuk // J. Approx. Teory. – 2003. – V. 121. № 1. – P. 100 – 118.

96. *Leviatan D.* Constants in comonotone polynomial approximation / D. Leviatan, I.A. Shevchuk // New developments in approximation theory. Dortman. – 1998. – P. 145 – 158.

97. *Leviatan D.* Jackson type estimates for piecewise q-monotone approximation, $q \geq 3$, are not valid /D. Leviatan, I.A. Shevchuk// Pure and Applied Functional Analysis. – 2016. – V. 1, № 1. – P. 85 – 96.

98. *Leviatan D.* Monotone approximation estimates involving the third modulus of smoothness / D. Leviatanan, I.A. Shevchuk // Approximation theory IX, Innov.

Appl. Math., Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN. – 1998. – V. 1. – P. 223 – 230.

99. *Lorentz G.G.* Degree of approximation by monotone polynomials I / G.G. Lorentz, K.L. Zeller // J. Approx. Theory. – 1968. – V. 1. № 4. – P. 501 – 504.

100. *Lorentz G.G.* Degree of approximation by monotone polynomials II / G.G. Lorentz, K.L. Zeller // J. Approx. Theory. – 1969. – V. 2, № 3. – P. 265 – 269.

101. *Newman D.J.* Efficient co-monotone approximation / D.J. New-man // J. Approx. Theory. – 1979. – V. 25, № 3. – P. 189 – 192.

102. *Newman D.J.* Piecewise monotone polynomial approximation, / D.J. Newman, E. Passow, L. Raymon // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 172. – P. 465 – 472.

103. *Passow E.* Monotone and comonotone approximation / E. Passow, L. Raymon // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 42. – P. 390 – 394.

104. *Passow E.* Comonotone polynomial approximation / E. Passow, L. Raymon and J.A. Roulier // Journal of Approximation theory. – 1974. – V. 11. – P. 221 – 224.

105. *Passow E.* Negative theorems on generalized convex approximation / E. Passow, J.A. Roulier // Pacific J. Math. – 1976. – V. 65, № 2. – P. 437 – 447.

106. *PleshakovM.G.*Piecewise coapproximation and the Whitney inequality / M.G. PleshakovandA.V. Shatalina // J. Approx.Theory. – 2000. – V. 105, № 2. – P. 189 – 210.

107. *Quade E.S.* Trigonometric approximation in the mean / E.S. Quade // Duke Math.Journ. – 1937. – № 3. – P. 529 – 543.

108. *Radoslavova T.V.* Decrease orders of the L_p-moduli of continuity ($0 < p \le +\infty$) / T.V. Radoslavova // Analysis Mathematica.– 1979. – V. 5. – P. 219 – 234.

109. *Shevchuk I.A.* On co-approximation of monotone functions / I. A. Shevchuk // Soviet Math. Dokl. – 1990. – V. 40, № 2. – P. 349 – 354.

110. *Shevchuk I.A.* Approximation of monotone functions by monotone polynomials / I.A. Shevchuk // Acad. Sci. Sb. Math – 1993. – V. 76, № 1. – P. 51 – 64.

111. *Shevchuk I.A.* Whitney's inequality and coapproximation / I.A. Shevchuk // Proceedings of the XIX Workshop on Function Theory. – P. 479 – 500.

112. *Shevchuk I.A.* One example in monotone approximation / I.A. Shevchuk // J. Approx. Theory. – 1996. – V. 86, № 3. – P. 270 – 277.

113. *Shisha O.* Monotone approximation / O. Shisha // Pacific. J. Math. – 1965. – V. 15. – P. 667 – 671.

114. *Taberski R.* Differences, moduli and derivatives of fractional orders / R. Taberski // Roczn. Polsk. Towarz. mat. – 1977. – ser. 1, V. 19, № 2. – P. 389 – 400.

115. *Tikhonov S.* On moduli of smoothness of fractional order / S. Tikhonov // Real Analysis Exchange. – 2004/2005. – V. 30, № 2. – P. 507 – 518.

116. *Varga R.S.* On the Bernstein conjecture in approximation theoty / R.S. Varga, A.J. Carpenter // Constr. Approx. – 1985 – № 1. –P. 333–348.

117. *Valle-Poussin Ch.J.* Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle / Ch.J. Valle-Poussin. – Paris. – 1919. – P. 152.

118. *Wu X.* On a counterexample in monotone approximation / X. Wu and S.P. Zhou // J. Approx. Theory. – 1992. – V. 69, № 2. – P. 205 – 211.

119. *Y. Hu* Convex polynomial and spline approximation in $C[-1,1]$ / D. Leviatan, Hu. Y, // Constr. Approx. – 1994. – V. 10, № 1. – P. 31 – 64.

120. *Zeller K.L.* Monotone approximation / K.L. Zeller // Approximation theory (Proc. Internat.Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex.) Academic Press, New York. – 1973.– P. 523 – 525.

121. *Zhou S.P.* On comonotone approximation by polynomials in L_p space / S.P. Zhou // Analysis. – 1993. – V. 13, № 4. – P. 363 – 376.

122. *Zygmund A.* Smooth functions / A. Zygmund // Duke Math. Journal. – 1945. – V. 12, № 1. – P. 47 – 76.