НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПЕЛЕХАТА ОЛЬГА БОГДАНІВНА

УДК 517.927

ЗАГАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному технічному університеті України "КПІ імені Ігоря Сікорського".

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор
МИХАЙЛЕЦЬ Володимир Андрійович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, доцент,
Журавльов Валерій Пилипович,
Житомирський національний
агроекологічний університет
завідувач кафедри вищої та прикладної математики.

доктор фізико-математичних наук, доцент
Самусенко Петро Федорович,
Національний педагогічний
університет імені М. П. Драгоманова, м. Київ,
доцент кафедри теоретичних основ інформатики.

Захист дисертації відбудеться "30" жовтня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "27" вересня 2018 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор **ПЕЛЮХ Г. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню достатніх умов збіжності розв'язків загальних, зокрема багатоточкових, крайових задач для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$ у нормах просторів $C^{(r-1)}$ на скінченному інтервалі. Крім того, в роботі встановлено можливість апроксимації розв'язку загальної крайової задачі послідовністю розв'язків багатоточкових крайових задач спеціального вигляду. Доведено можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі послідовністю нормованих матриць Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Актуальність теми. Питання щодо умов збіжності розв'язків систем диференціальних рівнянь посідають важливе місце в сучасній теорії звичайних диференціальних рівнянь. Найкраще досліджено задачі Коші для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Так, Й. І. Гіхман (1952), а пізніше М. О. Красносельський та С. Г. Крейн (1955), Я. Курцвейль та З. Ворель (1957), А. М. Самойленко (1962), О. А. Бойчук (2004) та інші встановили фундаментальні результати про характер залежності розв'язків диференціальних рівнянь від параметра. Для лінійних задач Коші ці результати посилювалися та уточнювалися в роботах У. Т. Рейда (W. T. Reid, 1967), З. Опяля (Z. Opial, 1967), А. Ю. Лєвіна (1967), Нгуен Тхе Хоана (1993) та інших.

Розв'язки крайових задач вивчені менш істотно, ніж розв'язки задач Коші. Це пов'язано з великою різноманітністю крайових умов. У своїх роботах І. Т. Кігурадзе (1975–2003) і М. Ашордіа (1996) ввели і дослідили клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Було встановлено умови збіжності розв'язків цих задач у просторі $C([a,b],\mathbb{R}^m)$. Нещодавно в роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк, Г. О. Чеханової (2008–2013) було отримано узагальнення і уточнення цих результатів на комплекснозначні функції і системи диференціальних рівнянь довільного порядку. У зазначених роботах авторам вдалося послабити умови на коефіцієнти рівнянь, ввівши додаткову умову на праві частини систем. Тому актуальним питанням залишається знаходження достатніх умов збіжності розв'язків, які б містили слабші вимоги і на коефіцієнти рівнянь, і на праві частини задач.

Аналогічні питання виникають і при пошуку умов збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач. У роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк, Г. О. Чеханової, Є. В. Гнип та В. О. Солдатова (2008–2016) встановлено умови збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку.

Багатоточкові крайові задачі є окремиим випадком загальних крайових задач. Тому природно виникає питання чи можна розв'язок та матрицю Гріна довільної загальної крайової задачі наблизити послідовністю багатоточкових крайових задач, розв'язки та матриці Гріна якої б збігалися до розв'язків загальної крайової задачі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводилися на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського згідно з планами, передбаченими у КПІ ім. Ігоря Сікорського та в рамках держбюджетної теми "№2810 - Ф, Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнених процесів відновлення"(номер державної реєстрації 0115U000371).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є знаходження конструктивних достатніх умов збіжності розв'язків загальних, зокрема багатоточкових, крайових задач; встановлення можливості апроксимації розв'язку та нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі розв'язками і нормованими матрицями Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Об'єктом дослідження є одновимірні загальні крайові задачі, багатоточкові крайові задачі.

Предметом дослідження є умови і характер збіжності розв'язків загальних крайових задач та нормованих матриць Гріна у нормах простору $C^{(r-1)}$.

Завдання дослідження:

1. Встановити конструктивні достатні умови збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$, які б доповнювали та покращували вже відомі результати.

2. Довести нові граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач.

3. Встановити можливість апроксимації розв'язку загальної крайової задачі розв'язками багатоточкових крайових задач спеціального вигляду;

4. Встановити можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі нормованими матрицями Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії звичайних диференціальних рівнянь, функціонального та дійсного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Знайдено нові конструктивні достатні умови збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку, які узагальнюють і доповнюють результати І. Т. Кігурадзе та Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви.

2. Доведено нові теореми про граничний перехід для розв'язків багатоточкових крайових задач, які узагальнюють результати В. А. Михайлеця та Г. О. Чеханової.

3. Встановлено можливість апроксимації розв'язку загальної крайової задачі розв'язками багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

4. Встановлено можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі нормованими матрицями Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути застосовані до дослідження конкретних загальних та багатоточкових крайових задач.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності і постановка задач належать науковому керівнику та співавтору праць — доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включено лише ті результати, що належать дисертантці.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

– Четверта Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, Україна, Київ, 23–25 квітня 2015 р.

– Міжнародна конференція молодих математиків, Україна, Київ, 3–6 червня 2015 р.;

– XIV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016 Україна, Київ, 6–8 квітня 2016 р.;

– V Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського, Україна, Київ, 9–11 листопада 2016 р.

– Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008), Україна, Київ, 7–10 червня 2017 р.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в п'ятьох статтях у фахових виданнях [1,2,3,4,5] та тезах доповідей міжнародних наукових конференцій [6,7,8,9,10]. Стаття [1] опубліковано в журналі, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus).

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 86 найменувань. Повний обсяг роботи складає 150 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, розкрито наукову новизну отриманих результатів, їх теоретичне і практичне значення, наведено дані про апробацію результатів і коротко викладено зміст основної частини дисертації.

У *першому* розділі дисертації наведено огляд літератури за її темою.

Другий розділ присвячений дослідженню збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$ на скінченному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ за нормою простору $C^{(r-1)}$.

У підрозділі 2.1 на скінченному інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ розглядається система $m \in \mathbb{N}$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t) \tag{1}$$

із загальними неоднорідними крайовими умовами

$$By = c, \tag{2}$$

де лінійний неперервний оператор

$$B : C([a, b]; \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Припускається, що матриця-функція $A(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$, вектор-функція $f(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^m)$, а вектор $c \in \mathbb{C}^m$.

Під розв'язком системи диференціальних рівнянь (1) розуміється абсолютно неперервна на $[a, b]$ вектор-функція $y(\cdot) \in W_1^1([a, b]; \mathbb{C}^m)$, яка задовольняє векторне рівняння (1) майже скрізь. Неоднорідні крайові умови (2) коректно визначені на розв'язках системи (1) і охоплюють всі класичні види крайових умов.

Поряд з задачею (1)-(2) задана послідовність систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t, n) + A(t, n)y(t, n) = f(t, n) \tag{4}$$

з крайовими умовами

$$B(n)y(n) = c(n), \tag{5}$$

де матриця-функція $A(\cdot, n)$, оператори $B(n)$, вектор-функція $f(\cdot, n)$ і вектор $c(n)$ задовольняють наведеним вище умовам для задачі (1)-(2).

Крайова задача (1)-(2) є фредгольмовою з нульовим індексом. Тому для однозначної скрізь розв'язності цієї задачі необхідно і достатньо, щоб відповідна однорідна крайова задача мала тільки тривіальний розв'язок.

Надалі припускається, що розв'язки однорідної задачі (1)-(2) однозначно визначені, що $n \in \mathbb{N}$, і всі асимптотичні співвідношення розглядаються при $n \to \infty$. Використовуються наступні позначення:

$$R_A(\cdot, n) := A(\cdot, n) - A(\cdot), \in L([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m}), \tag{6}$$

$$F(\cdot) := \begin{pmatrix} f_1(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m}), \tag{7}$$

$$F(\cdot, n) := \begin{pmatrix} f_1(\cdot, n) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(\cdot, n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot, n) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m}), \tag{8}$$

$$R_F(\cdot, n) = F(\cdot) - F(\cdot, n), \tag{9}$$

$$R_F^{\vee}(t, n) := \int_a^t R_F(s, n)ds, \quad R_A^{\vee}(t, n) := \int_a^t R_A(s, n)ds. \tag{10}$$

$$A_F(\cdot, n) := \begin{pmatrix} A(\cdot, n) & F(\cdot, n) \\ O_m & O_m \end{pmatrix} \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{2m\times 2m}), \tag{11}$$

$$R_{A_F}(\cdot, n) := A_F(\cdot, n) - A_F(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{2m\times 2m}), \tag{12}$$

O_m– нульова $(m \times m)$-матриця, $\|\cdot\|_1$ — норма в просторі Лебега L_1 вектор(матриць)-функцій на відрізку $[a, b]$, $\|\cdot\|_\infty$ — рівномірна норма.

Нехай $\mathcal{M}^m := \mathcal{M}(a, b; m), \quad m \in \mathbb{N}$ клас послідовностей матриць-функцій $R(\cdot, n) : \mathbb{N} \to L_1([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$, для яких розв'язок $Z(\cdot, n)$ задачі Коші

$$Z'(\cdot, n) + R(\cdot, n)Z(\cdot, n) = O_m, \quad Z(a, n) = I_m \tag{13}$$

задовольняє граничне співвідношення

$$\|Z(\cdot, n) - I_m\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty, \tag{14}$$

де I_m -одинична $(m \times m)$-матриця.

Основним результатом другого розділу є

Теорема 2.1. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача* (1)–(2) *має лише тривіальний розв'язок,*

(I) $R_A(\cdot, n) \in \mathcal{M}^m$,

(II) $B(n)y \to By, \quad y(\cdot) \in C([a, b], \mathbb{C}^m)$,

Тоді для достатньо великих n задачі (4)-(5) однозначно розв'язні. Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач

(IV) $c(n) \to c$,

(V) $R_{AF}(\cdot, n) \in \mathcal{M}^{2m}$,

то єдині розв'язки задач (1)-(2) і (4)-(5) задовольняють граничну властивість

$$\|y(\cdot) - y(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \tag{15}$$

.

З теореми Лєвіна (1967) випливають зручні для застосування достатні умови приналежності послідовності матриць-функцій класу $\mathcal{M}^m$ чи $\mathcal{M}^{2m}$. Тому з теореми 2.1 випливає ряд конструктивних тверджень, які узагальнюють або доповнюють теорему Кігурадзе.

Теорема 2.2. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача* (1)–(2)*має лише тривіальний розв'язок,*

(I) $\|R_A^\vee(\cdot, n)\|_\infty \to 0$,

(II) $\|R_A(\cdot, n)R_A^\vee(\cdot, n)\|_1 \to 0$,

(III) $B(n)y \to By, \quad y(\cdot) \in C([a, b], \mathbb{C}^m)$,

Тоді для достатньо великих n задачі (4)-(5) однозначно розв'язні. Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач

(IV) $c(n) \to c$,

(V) $\|R_F^\vee(\cdot, n)\|_\infty \to 0$,

(VI) $\|R_A(\cdot, n)R_F^\vee(\cdot, n)\|_1 \to 0$, *то єдині розв'язки задач (1)-(2) і (4)-(5) задовольняють граничну властивість (15).*

Теорема 2.2 узагальнює результат І. Т. Кігурадзе, оскільки не містить вимоги обмеженості норм коефіцієнтів систем, а також результат Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, бо умова обмеженості правих частин рівняння замінена більш слабкою умовою (VI).

Теорема 2.3. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача* (1)–(2) *має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R_A^{\vee}(\cdot, n)\|_\infty \to 0,$

(II) $\|R_A^{\vee}(\cdot, n)R_A(\cdot, n)\|_1 \to 0,$

(III) $B(n)y \to By, \quad y(\cdot) \in C([a,b], \mathbb{C}^m),$

Тоді для достатньо великих n задачі (4)-(5) однозначно розв'язні. Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач

(IV) $c(n) \to c,$

(V) $\|R_F^{\vee}(\cdot, n)\|_\infty \to 0,$

(VI) $\|R_A^{\vee}(\cdot, n)R_F(\cdot, n)\|_1 \to 0,$

то єдині розв'язки задач (1)-(2) і (4)-(5) задовольняють граничне співвідношення (15).

Теорема 2.3 доповнює результати І. Т. Кігурадзе та Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, наведені вище.

У п. 2.2 ці результати поширено на випадок систем рівнянь порядку $r \geq 2$.

На скінченному інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$ розглядається система $m \in \mathbb{N}$ лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \cdots + A_0(t)y(t) = f(t) \tag{16}$$

із загальними неоднорідними крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) = c_j, \quad j \in \overline{1,r}, \tag{17}$$

де лінійні неперервні оператори

$$B_j : C^{(r-1)}\left([a,b]; \mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m, \quad j \in \overline{1,r}, \tag{18}$$

матриці-функції $A_{j-1}(\cdot) \in L_1([a,b]; \mathbb{C}^{m\times m})$, вектор-функція $f(\cdot) \in L_1([a,b]; \mathbb{C}^m)$, а вектори $c_j \in \mathbb{C}^m$.

Під розв'язком системи диференціальних рівнянь (16) розуміється вектор-функція $y(\cdot) \in W_1^r([a,b];\mathbb{C}^m)$, яка абсолютно неперервна на відрізку $[a,b]$ разом зі своїми похідними до $r-1$ порядку і задовольняє векторне рівняння (16) майже скрізь. Неоднорідні крайові умови (17) коректно визначені на розв'язках системи (16) і охоплюють всі класичні види крайових умов.

Поряд з задачею (16)-(17) задана послідовність систем лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \cdots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n) \qquad (19)$$

з крайовими умовами

$$B_j(n)y(\cdot,n) = c_j(n), \qquad (20)$$

де $j \in \overline{1,r}$, $n \in \mathbb{N}$, матриці-функції $A_{j-1}(\cdot,n)$, оператори $B_j(n)$, вектор-функції $f(\cdot,n)$ і вектори $c_j(n)$ задовольняють наведеним вище умовам для задачі (16)-(17).

Припускається, що розв'язки однорідної задачі (16)-(17) однозначно визначені, що $j \in \overline{1,r}$, $n \in \mathbb{N}$, і всі асимптотичні співвідношення розглядаються при $n \to \infty$. Введено наступні позначення:

$$R_{A_{j-1}}(\cdot,n) := A_{j-1}(\cdot) - A_{j-1}(\cdot,n) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \qquad (21)$$

$$F(\cdot,n) := \begin{bmatrix} f_1(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \qquad (22)$$

$$R_F(\cdot,n) := F(\cdot) - F(\cdot,n), \qquad (23)$$

$$R_F^{\vee}(t,n) := \int_a^t R_F(s,n)ds, \qquad R_{A_{j-1}}^{\vee}(t,n) := \int_a^t R_{A_{j-1}}(s,n)ds, \qquad (24)$$

$\|\cdot\|_1$ — норма в просторі Лебега вектор(матриць)-функцій на відрізку $[a,b]$, $\|\cdot\|_\infty$ — рівномірна норма на відрізку $[a,b]$.

Доведені аналогами теорем 2.2 і 2.3 для випадку систем рівнянь порядку $r \geq 2$.

Теорема 2.4. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача* (16)–(17) *має лише тривіальний розв'язок,*

(I') $\|R_{A_{j-1}}^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty \to 0,$

(II') $\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 \to 0,$

(III') $B_j(n)y \to B_j y, \quad y \in C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m),$

Тоді для достатньо великих n задачі (19)-(20) однозначно розв'язні. Якщо, крім того,

(IV') $c_j(n) \to c_j,$

(VI') $\|R_{A_{r-1}}(\cdot)R^{\vee}_{F}(\cdot,n)\|_1 \to 0,$

тоді єдині розв'язки крайових задач (19)-(20) задовольняють співвідношення

$$\|y^{(j-1)}(\cdot) - y^{(j-1)}(\cdot,n)\|_\infty \to 0. \tag{25}$$

Ця теорема узагальнює як теорему І. Т. Кігурадзе, так і результат Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця та Н. В. Реви для випадку $r \geq 2$.

Теорема 2.5. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача* (16)–(17) *має лише тривіальний розв'язок,*

(I') $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_\infty \to 0,$

(II^*) $\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot,n)R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 \to 0,$

(III') $B_j(n)y \to B_j y, \quad y \in C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m),$

Тоді для достатньо великих n задачі (19)-(20) однозначно розв'язні. Якщо, крім того,

(IV') $c_j(n) \to c_j,$

(VI^*) $\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot,n)R_F(\cdot,n)\|_1 \to 0,$

тоді єдині розв'язки крайових задач (19)-(20) задовольняють граничне співвідношення (25).

Теорема 2.5 доповнює результати І. Т. Кігурадзе та Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця та Н. В. Реви для випадку $r \geq 2$.

У *третьому* розділі, як застосування результатів другого розділу, доведені нові граничні теореми для багатоточкових крайових задач для систем рівнянь довільного порядку r. Зокрема, у п. 3.1 знайдено достатні умови збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач для систем рівнянь довільного порядку.

Розглядається рівняння вигляду (16) з багатоточковими крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} \alpha_i^{(k-1)} y^{(k-1)}(t_i) = 0, \quad j \in \overline{1,r}, i \in \overline{1,p+q}. \tag{26}$$

де матриці-функції $A_{k-1}(\cdot;n)$, вектор-функції $f(\cdot;n)$, точки $t_i \in [a,b]$, матриці $\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n)$, вектори $c_j(n)$ - ті ж, що і в задачі (16)–(17).

Поряд із задачею (16)–(26) розглядається послідовність задач (19) з крайовими умовами

$$B_j(n) y(\cdot;n) = \sum_{i=1}^{p+q}\sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) y^{(k-1)}(t_i(n);n) = c_j(n), \quad j \in \overline{1,r}, \tag{27}$$

Теорема 3.1 *Нехай при $n \to \infty$ та $k \in \overline{1,r}, \quad j \in \overline{1,r}$ виконуються умови:*

(0) *Однорідна гранична крайова задача (16)–(26) має лише тривіальний розв'язок,*

(I) $\|R_{k-1}^{\vee}(\cdot;n)\|_\infty \to 0$,

(II) $\|R_{r-1}(\cdot;n) R_{k-1}^{\vee}(\cdot;n)\|_1 \to 0$,

(III) $\|\sum\limits_{k=1}^{r} R_{k-1}(\cdot;n) R_{f_{k-1}}^{\vee}(\cdot;n)\|_1 \to 0$,

(IV) $\|R_{f_{k-1}}^{\vee}(\cdot;n)\|_\infty \to 0$,

(V) $t_i(n) \to t_i, \quad \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) \to \alpha_{i,j}^{(k-1)}, \quad i \in \overline{1,p}$,

(VI) $\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) \to 0, \quad i \in \overline{p+1,p+q}$,

(VII) $c_j(n) \to c_j$.

Тоді для достатньо великих значень n розв'язки $y(\cdot;n)$ задач (19)–(27) однозначно визначені і для них виконується граничне співвідношення (25).

Теорема 3.2 *Нехай при $n \to \infty$ та $k \in \overline{1,r}, \quad j \in \overline{1,r}$ виконуються умови:*

(0) *Однорідна гранична крайова задача (16)–(26) має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R_{k-1}^{\vee}(\cdot;n)\|_{\infty} \to 0;$

(II) $\|R_{r-1}^{\vee}(\cdot;n)R_{k-1}(\cdot;n)\|_{1} \to 0;$

(III) $\|\sum\limits_{k=1}^{r} R_{k-1}^{\vee}(\cdot;n)R_{f_{k-1}}(\cdot;n)\|_{1} \to 0;$

(IV) $\|R_{f_{k-1}}^{\vee}(\cdot;n)\|_{\infty} \to 0;$

(V) $t_i(n) \to t_i, \quad \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) \to \alpha_{i,j}^{(k-1)}, \quad i \in \overline{1,p};$

(VI) $\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) \to 0, \quad i \in \overline{p+1,p+q};$

(VII) $c_j(n) \to c_j.$

Тоді для достатньо великих значень n розв'язки $y(\cdot;n)$ задач (19)–(27) однозначно визначені і для них виконуєтьса граничне співвідношення (25).

У п. 3.2 знайдено нові достатні умови збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач у наступній постановці. Припускається об'єднання всіх точок у скінченну кількість серій, кожна з яких містить граничну точку, а "блукаючі"точки об'єднують у нульову серію.

Розглядається система m лінійних рівнянь порядку $r \geq 2$

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \ldots + A_0(t)y(t) = f(t), \tag{28}$$

з багатоточковими крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\ell=0}^{r-1} \alpha_i^{(\ell)} y^{(\ell)}(t_i) = c_j, \tag{29}$$

де матриці $\alpha_j^{(\ell)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_i \in [a,b]$ вектори $c_j \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Поряд з системою (26) розглядається послідовність систем рівнянь

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \cdots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n) \tag{30}$$

Для кожного n з системою (28) пов'язують багатоточкову крайову умову

$$B_j(n)y(\cdot;n) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{k=1}^{q_i(n)} \sum_{\ell=0}^{r-1} \alpha_{i,k}^{(\ell)}(n) y^{(\ell)}(t_{i,k}(n),n) = c_j(n). \tag{31}$$

де числа $q_i(n)$ залежать від n, матриці $\alpha_{i,k}^{(\ell)}(n) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_{i,k}(n) \in [a,b]$ та вектор $c_j(n) \in \mathbb{C}^m$ є заданими. $n \to \infty$

Вимагається при $i \in \overline{1,N}$ точки $t_{i,k}(n) \to t_i$ при $n \to \infty$, а для точок $t_{0,k}(n)$ така вимога не висуватиметься.

Теорема 3.3. *Нехай при $n \to \infty$ і $j \in \overline{1,r}$ виконуються умови на*

(a) *коефіцієнти*

(1) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_\infty \to 0$;

(2) $\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_{(1)} \to 0$;

(b) *праві частини рівнянь*

(3) $\|f(\cdot,n)\|_1 = O(1), \quad \|f^{\vee}(\cdot,n) - f^{\vee}(\cdot)\|_\infty \to 0$;

(4) $c_j(n) \to c_j$;

(c) *граничні оператори*

(5) $t_{i,k}(n) \to t_i$ *для усіх* $i \in \overline{1,N}$, $k \in \overline{1,q_i}$;

(6) $\sum\limits_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(\ell)}(n) \to \alpha_i^{(\ell)}$ *для усіх* $i \in \overline{1,N}$, $\ell \in \overline{0,r-1}$;

(7) $\sum\limits_{k=1}^{q_i(n)} \|\alpha_{i,k}^{(\ell)}(n)\| \cdot |t_{i,k}(n) - t_i| \to 0$ *для усіх* $i \in \overline{1,N}$, $k \in \overline{1,q_i}$, $\ell \in \overline{0,r-1}$;

(8) $\sum\limits_{k=1}^{q_i(n)} \|\alpha_{0,k}^{(\ell)}(n)\| \to 0$, для усіх $k \in \overline{1,q_0}$, $\ell \in \overline{0,r-1}$.

Тоді для достатньо великих n задача (28) – (31) має єдиний розв'язок і він задовольняє граничне співвідношення

$$\|y^{(j-1)}(\cdot,n) - y^{(j-1)}(\cdot)\|_\infty \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{32}$$

У п. 3.3 знайдені умови збіжності функцій Гріна. На розбитті $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ інтервалу $(a,b) \subset \mathbb{R}$ розглядається однорідна багатоточкова крайова задача для векторного лінійного диференціального рівняння порядку $r \geq 2$:

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \ldots.. + A_0(t)y(t) = 0 \tag{33}$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} \beta_{j,i}(l) y^{(j-1)}(t_l) = 0, \quad i \in \overline{1,k}, \tag{34}$$

де $(m\times m)$-матриці-функції $A_{j-1}(\cdot)\in(C^{(p-1)})^m$, і вектор-функція $f(\cdot)\in(C^{(p-1)})^m$, матриці $\beta_{j,i}(l)\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $\quad l\in\overline{1,k},\ i,j\in\overline{1,r}$.

Поряд із задачею (33)–(34) розглядається послідовність напіводнорідних багатоточкових крайових задач для векторного лінійного диференціального рівняння порядку $r\geq 2$:

$$y^{(r)}(t,n)+A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n)+\ldots..+A_0(t,n)y(t,n)=f(t,n) \quad (35)$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{r}\beta_{j,i}(l,n)y^{(j-1)}(t_l,n)=0, \quad i\in\overline{1,k}. \quad (36)$$

Для коректності розглядуваної задачі вважається надалі, що задача (32)–(33) має лише тривіальний розв'язок.

Для функцій Гріна задач (33)–(34) і (35)–(36) у п. 3.3 встановлена

Теорема 3.4. *Нехай при $n\to\infty$ та $j\in\overline{1,r}$ для деякого $p\in\mathbb{N}$ виконуються умови:*

(1) $\quad \|A_{j-1}(\cdot;n)-A_{j-1}(\cdot)\|_{(p-1)}\to 0;$

(2) $\quad \beta_{j,i}(l;n)\to\beta_{j,i}(l), \quad i\in\overline{1,r}, \quad l\in\overline{1,k}.$

Тоді при достатньо великих значеннях n існують нормовані функції Гріна $G(t,s;n)$ задач (35)–(36) і для них та функцій Гріна $G(\cdot,\cdot)$ задач (32)–(33) на смугах $(t_{l-1},t_l)\times(a,b)$ виконується

$$\|G(\cdot,\cdot;n)-G(\cdot,\cdot)\|_{(p)}\to 0, \quad k\to\infty. \quad (37)$$

У п. 3.4 встановлена можливість апроксимації розв'язку загальної крайової задачі розв'язками багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Нехай задано систему m лінійних звичайних диференціальних рівнянь порядку $r\geq 1$

$$y^{(r)}(t)+A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t)+\ldots+A_0(t)y(t)=f(t) \quad (38)$$

з коефіцієнтами $A_{j-1}(\cdot)\in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, правими частинами $f(\cdot)\in L_1([a,b];\mathbb{C}^m)$

із *загальними* неоднорідними крайовими умовами

$$B_j y(\cdot)=c_j. \quad (39)$$

Розглядається послідовність систем лінійних диференціальних рівнянь порядку $r\geq 1$

$$y^{(r)}(t)+A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n)+\ldots+A_0(t,n)y(t,n)=f(t) \quad (40)$$

із *багатоточковими* крайовими умовами

$$B_j(n)y(\cdot;n) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\alpha_{i,k-1}^{j}(n)y^{(k-1)}(t_i(n);n) = c_j, \quad j \in \overline{1,r}, \qquad (41)$$

У задачі (40)-(41) матриці-функції $A_{j-1}(\cdot,n) \in X(a,b)$ - довільній фіксованій щільній множині в просторі $L_1((a,b);\mathbb{C}^{m\times m})$, а праві частини — вектор-функція $f(\cdot)$ та вектори c_j ті ж, що і в задачі (38)-(39).

Теорема 3.10 *Для кожної однозначно розв'язної неоднорідної загальної крайової задачі (38)-(39) знайдеться послідовність багатоточкових крайових задач вигляду (40)-(41) з коефіцієнтами* $A_{j-1}(t,n) \in X(a,b)$ *таких, що для достатньо великих* n *кожна з них є однозначно розв'язною і для розв'язків* $y(\cdot)$ *задачі (38)-(39) і* $y(\cdot,n)$ *задачі (40)-(41) виконується гранична рівність*

$$\|y^{(j-1)}(t) - y^{(j-1)}(t,n)\|_\infty \to 0, n \to \infty. \qquad (42)$$

Зауважимо, що ця послідовність задач не залежить від правих частин задачі (38)-(39).

У п. 3.5 встановлено аналогічний результат про можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі нормованими матрицями Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Теорема 3.12 *В умовах теореми 3.7 послідовність багатоточкових крайових задач (40)-(41) можна вибрати так, що для нормованих матриць Гріна* $G(t,s)$ *задачі (38)-(39) і нормованих матриць Гріна* $G(t,s,n)$ *задач (40)-(41) на смугах* $(a,b)\times(a,b)$ *виконується гранична рівність*

$$\|G(\cdot;\cdot) - G(\cdot;\cdot,n)\|_\infty \to 0. \qquad (43)$$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі одержано такі основні результати:

1. Знайдено нові конструктивні достатні умови збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку, які узагальнюють і доповнюють результати І.Т.Кігурадзе, Т.І.Кодлюк, В.А.Михайлеця, Н.В. Реви.

2. Отримано нові теореми про граничний перехід для розв'язків багатоточкових крайових задач.

3. Встановлено можливість апроксимації розв'язку загальної крайової задачі розв'язками багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

4. Встановлено можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі нормованими матрицями Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Основні положення дисертації відображено у таких публікаціях автора:

1. *Михайлец В. А, Пелехата О. Б., Рева Н. В.* Предельные теоремы для решений краевых задач // Укр. мат. журн. – 2018 – 70, №2- С. 216–223. (Переклад англійською: V. A. Mikhailets, O. B. Pelekhata, N. V. Reva. Limit theorems for the Solutions of Boundary-Value problems / V. A. Mikhailets, O. B. Pelekhata, N. V. Reva // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — V. 70, №2 (February). — P. 243-251.)

2. *Михайлец В. А, Пелехата О. Б.* Про апроксимацію функцій класу $NBV[a, b]$ // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2017. –Т.14. -№2. -С.265–271.

3. *Михайлец В. А., Пелехата О. Б, Рева Н. В.* О теореме Кигурадзе для линейных краевых задач / В. А. Михайлец, О. Б. Пелехата, Н. В. Рева // Доповіді Національної академії наук України. – 2017. – № 12. – С. 8 – 13.

4. *Пелехата О. Б.* Неперервність за параметром матриць Гріна багатоточкових крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь.//Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – Т.12, №2. – С.315–326.

5. *Пелехата О. Б.* Про збіжність розв'язків багатоточкових крайових задач. //Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2016. – Т.13, №2. – С.242–254.

6. *Михайлецъ В.А., Пелехата О.Б.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач / Михайлець В.А., Пелехата О.Б. // Четверта Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 23–25 квітня 2015р., Київ: Тези доповідей. - 2015. - С. 22.

7. *Пелехата О.Б., Рева Н.В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач. / Пелехата О.Б., Рева Н.В.// Міжнародна конференція молодих математиків, 3–6 червня 2015 р., Київ: Тези доповідей. - 2015.- С. 161.

8. *Пелехата О. Б.* Про апроксимативні властивості розв'язків і матриць Гріна багатоточкових крайових задач // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна — 2016". – 2016.

9. *Пелехата О.Б., Рева Н.В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач. / Пелехата О.Б., Рева Н.В.// Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008), 7–10 червня 2017 р., Київ: Тези доповідей. – 2017. – С. 99.

10. *Pelekhata O.* On convergence of solutions of multipoint boundary value problems. // Book of abstract 5th International conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. — 2016. — P. 113–115.

АНОТАЦІЇ

Пелехата О. Б. Загальні крайові задачі з параметром — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 – "Диференціальні рівняння". – Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського – Інститут математики Національної академії наук України. –Київ, 2018.

Дисертація присвячена дослідженню достатніх умов збіжності розв'язків загальних, зокрема багатоточкових лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку. Встановлені нові граничні теореми для багатоточкових крайових задач та відповідних їм матриць Гріна. Доведено можливість апроксимації розв'язку та нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі розв'язками і нормованими матрицями Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, загальна крайова задача, збіжність роз'язків, збіжність функцій Гріна, багатоточкова крайова задача, апроксимація розв'язків, апроксимація нормованих матриць Гріна.

Пелехата О. Б. Общие краевые задачи с параметром. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. —Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского".— Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертационная работа посвящена исследованию достаточных условий сходимости решений общих линейных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $r \geq 1$.

Диссертация состоит из введения, трёх разделов, общих выводов и списка цитированной литературы.

Во введении дана общая характеристика диссертации, обоснована ее актуальность и указана новизна полученных результатов. Сформулированы основные результаты работы и приведены данные о их апробации.

Первый раздел содержит обзор литературы по теме диссертации.

Во втором разделе найдены достаточные условия сходимости решений общих краевых задач для систем линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка r в пространстве $C^{(r-1)}$.

В третьем разделе получены новые предельные теоремы для многоточечных краевых задач. Доказана возможность апроксимации решения и нормированной матрицы Грина общей краевой задачи решениями и нормированными матрицами Грина многоточечных краевых задач специального вида.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, общая краевая задача, сходимость решений, сходимость функций Грина, многоточечная краевая задача, апроксимация решений, апроксимация нормированных матриц Грина.

Pelekhata O. B. General boundary-value problems with a parameter. — Manuscript.

The thesis for the scientific degree of the candidate of physical and mathematical sciences by speciality 01.01.02 — differential equations. — National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute.— Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the investigation of sufficient conditions for convergence of the solutions to general linear boundary-value problems for systems of ordinary differential equations of an arbitrary order r in the normed space $C^{(r-1)}$. The results obtained are applied to the investigation of multipoint boundary-value problems. We establish new limit theorems for multipont boundary-value problems. Also we prove opportunity of approximating of solutions and Green's matrix of general boundary-value problems of solutions and Green's matrices of multipoint boundary-value problems.

Key words: differential systems, boundary-value problem, convergence of the solutions, multipoint boundary-value problem, approximating of solution, approximating of Green's matrices.

Підписано до друку 25.09.2018 р. Зам. № 985.
Формат 60х90 1/16. Папір офсетний. Друк – цифровий.
Наклад 100 прим. Ум. друк. арк. 0,9.
Друк ЦП «КОМПРИНТ». Свідоцтво ДК №4131 від 04.08.2011 р.
м. Київ, вул. Предславинська, 28
528-05-42, 067-209-54-30
email: komprint@ukr.net