Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

Національна академія наук України

Інститут математики

Кваліфікаційна наукова праця

на правах рукопису

Пелехата Ольга Богданівна

УДК 517.927

ДИСЕРТАЦІЯ

ЗАГАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРОМ

01.01.02 — диференціальні рівняння

Подається на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання

ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на

відповідне джерело ______________________________ О.Б.Пелехата

Науковий керівник:

Михайлець Володимир Андрійович

доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2018

АНОТАЦІЯ

Пелехата О.Б. Загальні крайові задачі з параметром. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.01.02 — "Диференціальні рівняння"(111 – Математика). — Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського — Інститут математики Національної академії наук України. — Київ, 2018.

Дисертація присвячена дослідженню достатніх умов збіжності розв'язків загальних, зокрема багатоточкових, лінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку r на скінченному інтервалі (a, b).

Питання щодо умов збіжності розв'язків систем диференціальних рівнянь посідають важливе місце в сучасній теорії звичайних диференціальних рівнянь. В роботах І. І. Гіхмана, М. А. Красносельського і С. Г. Крейна, Я. Курцвейля і З. Ворела, А. М. Самойленка, А. Ю. Лєвіна, З. Опяла і Нгуен Тхе Хоана отримано фундаментальні результати про умови збіжності розв'язків задачі Коші для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язки крайових задач істотно менш вивчені, що пов'язано з великою різноманітністю крайових умов. Тут основними є результати І. Т. Кігурадзе і М. Ашордіа, які дослідили клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Було встановлено умови збіжності розв'язків цих задач у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$.

Недавно в роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк, Г. О. Чеханової ці результати було уточнено та узагальнено на комплекснозначні фун-

кції і системи диференціальних рівнянь довільного порядку. У цих роботах авторам вдалося послабити умови теореми І. Т. Кігурадзе на коефіцієнти рівнянь.

Аналогічні питання виникають і при пошуку умов збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач. У роботах Є. В. Гнип, В. А. Михайлеця, В. О. Солдатова встановлено ряд тверджень про збіжність розв'язків багатоточкових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку.

Мета цієї дисертації полягає у знаходженні конструктивних достатніх умов збіжності розв'язків загальних, зокрема багатоточкових крайових задач, які б узагальнили відомі раніше результати; доведенні нових граничних теорем для розв'язків багатоточкових крайових задач; встановленні можливості апроксимації розв'язків загальної крайової задачі розв'язками багатоточкових крайових задач спеціального вигляду; встановленні аналогічного результату для нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі.

Дисертація складається з анотацій українською і англійською мовами, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел і додатку.

У першому розділі дисертації наведено огляд літератури за її темою.

У другому розділі отримано узагальнення достатніх умов збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку у рівномірній нормі. Знайдено нові конструктивні достатні умови збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку. Побудовано приклад, що ілюструє співвідношення між теоремами 2.2, 2.3 та теоремами, отриманими раніше І. Т. Кігурадзе та Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлецем, Н. В. Ревою.

У третьому розділі як застосування результатів другого розділу доведено нові граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку. Також встановлено умови збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку, які узагальнюють результат В. А. Михайлеця, Г. О. Чеханової. Знайдено достатні умови збіжності функцій Гріна для систем диференціальних рівнянь довільного порядку. Встановлено можливість апроксимації розв'язків загальної крайової задачі послідовністю розв'язків багатоточкових крайових задач спеціального вигляду. Доведено можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі послідовністю нормованих матриць Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути застосовані до дослідження конкретних загальних та багатоточкових крайових задач.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, загальна крайова задача, збіжність роз'язків, збіжність функцій Гріна, багатоточкова крайова задача, апроксимація розв'язків, апроксимація нормованих матриць Гріна.

Список публікацій здобувача за темою дисертації.

1. *Михайлец В. А, Пелехата О. Б., Рева Н. В.* Предельные теоремы для решений краевых задач // Укр. мат. журн. — 2018. — 70, №2 — С. 216–223.

2. *Михайлец В. А, Пелехата О. Б.* Про апроксимацію функцій класу $NBV[a,b]$ // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. —Т.14. — №2. — С. 265 – 271.

3. *Михайлец В. А., Пелехата О. Б, Рева Н. В.* О теореме Кигурадзе для линейных краевых задач / В. А. Михайлец, О. Б. Пелехата, Н. В. Рева // Доповіді Національної академії наук України. — 2017. — № 12. — С. 8 – 13.

4. *Пелехата О. Б.* Неперервність за параметром матриць Гріна багатоточкових крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь.//Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т.12, №2. — С. 315 – 326.

5. *Пелехата О. Б.* Про збіжність розв'язків багатоточкових крайових задач. //Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — Т.13, №2. — С. 242 – 254.

6. *Михайлець В.А., Пелехата О.Б.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач / Михайлець В.А., Пелехата О.Б. // Четверта Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 23 – 25 квітня 2015 р., Київ: Тези доповідей. — 2015. — С. 22.

7. *Пелехата О.Б., Рева Н.В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач. / Пелехата О. Б., Рева Н. В.// Міжнародна конференція молодих математиків, 3 – 6 червня 2015 р., Київ: Тези доповідей. — 2015.— С. 161.

8. *Пелехата О. Б.* Про апроксимативні властивості розв'язків і матриць Гріна багатоточкових крайових задач // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна — 2016". —(6 – 8 квітня 2016 р., м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. — С. 63 -66.

9. *Пелехата О.Б., Рева Н.В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач. / Пелехата О.Б., Рева Н.В.// Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917 – 2008), 7 – 10 червня 2017 р., Київ: Тези доповідей. — 2017.— С. 99.

10. *Pelekhata O.* On convergence of solutions of multipoint boundary value problems. // Book of abstract 5th International conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. — 2016. — P. 113 – 115.

ABSTRACT

Pelekhata O.B. General boundary value problems with a parameter.– Manuscript.

The thesis is presented for the Degree of Candidate of Physics and Mathematics (Doctor of Philosophy) in speciality 01.01.02 — Differential Equations (111 – Mathematics). — National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute— Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to investigations of sufficient conditions of convergence the solutions of general linear boundary value problems for ordinary differential equations with arbitrary order r.

The problems of the conditions of convergence of solutions in systems of ordinary differential equations occupy an important place in the modern theory of ordinary differential equations. The fundamental results for conditions of convergence of the solutions of Cauchy problems was obtained by I. I. Gihman, M. A. Krasnoselskyy, S. G. Krein, Y. Kurzvel and i Z. Vorel, A. M. Samoilenko, A. Y. Levin, Z. Opial and Nguen The Hoan.

Solutions of boundary value problems are significantly less investigated due to the large variety of border conditions. The main results were obtained by I. T. Kiguradze and M. Ashordia who researched the class general linear boundary value problems for the first-order system systems of ordinary differential equations. The conditions for convergence of these problems in space $C([a, b], \mathbb{R}^m)$ were established. Recently these results were generalized by V. A. Mikhailets, N. V. Reva, T. I. Kodliuk, G. O. Chekhanova for the system of differential equations with high order. In these papers the authors succesfully weakened the requirements for coefficients of the equations of the theorem of I. T. Kiguradze.

Similar problem arise also in the search for conditions for the convergence of multipoint boundary problems. In the papers of V. A. Mikhailets, Y. V. Hnyp, V. O. Soldatov the conditions of convergence of solutions of multipoint boundary value problems are obtained for the system linear differential equation with high order.

The purpose of the thesis is to find constructive sufficient conditions of convergence of solutions of general, in particular multipoint boundary value problems for the system of differential equations, which generalizes results were obtained before; prove new limit theorems for solutions of multipoint boundary value problems for systems of differential equations with arbitrary order; show opportunity of approximating of solutions of general boundary-value problems by solutions of multipoint boundary value problems; obtaine similar result for Green's matrices of general boundary value problems.

The dissertation consists of the annotation in Ukrainian and in English, introduction, three chapters of its main part, conclusions, the list of references and appendix. The introduction grounds the relevance of the research topic, formulates the purpose, object, subject, task, and methods of the research, indicates the scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the relation of the research to scientific programs the personal contribution of the applicant, and also points out where the results of the dissertation have been discussed and published.

Chapter 1 gives a survey of the literature on the topic of the thesis.

In Chapter 2 there is obtained generalization of sufficient conditions of convergence of solutions of general boundary value problems for systems of differential equations with arbitrary order. New constructive sufficient conditions of convergence of solutions of general boundary value problems are found for system of differential equations with arbitrary order r in the norm of space $C^{(r-1)}$. The example is given, which shows correlation between the theorems in the second chapter and the theorems obtained by I. T. Kiguradze, V. A. Mikhailets, N. V. Reva, T. I. Kodliuk.

In Chapter 3 as an application of results from Chapter 2 new limit theorems for solutions of multipoint boundary value problems are found for systems of differential equations with arbitrary order. The conditions of convergence of solutions of multipoint boundary value problems are established for systems of differential equations with arbitrary order, which generalizes result of V. A. Mikhailets, G. O. Chekhanova. New sufficient conditions of convergence of Green's matrices of multipoint boundary value problems is obtained for systems of differential equations with arbitrary order. The opportunity of approximating of solutions of general boundary-value problems by solutions of multipoint boundary value problems are proved. Similar result is obtained for Green's matrices of general boundary value problems.

Appendix contains applicant's publications list concerning the topic of the thesis and informs where the results of the dissertation have been reported and discussed.

The practical significance of the results. Thesis is a theoretical research. The results of the thesis and the method of their obtaining can be used for investigation of specific general boundary value problems and multipoint boundary value problems.

Key words: differential systems, boundary-value problem, convergence of the solutions, multipoint boundary-value problem, approximating of solution, approximating of Green's matrix.

Applicant's publications list concerning the topic of the thesis

1. *Mikhailets V. A, Pelekhata O. B., Reva N. V.* Limit theorems for solutions of boundary value problems // Ukr. Math. J. — 2018 — 70, №2 — P. 216-223.

2. *Mikhailets V. A, Pelekhata O. B.* On the approximation function of the class $NBV[a,b]$ // Differential equations and related problems of analysis. Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.. — 2017. — Vol.14. — №2. — P. 265-271.

3. *Mikhailets V. A, Pelekhata O. B., Reva N. V.* On The Kiguradze Theorem For Linear Boundary-Value Problems /V. A. Mikhailets, O. B. Pelekhata, N. V. Reva.// Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. — 2017. — № 12. — P. 8 - 13.

4. *Pelekhata O. B.* Continuity in a parameter of Green's matrix to multipoint boundary-value problems for the system of linear differential equations.//Differential equations and related problems of analysis. Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.. — 2015. — Vol.12, №2. — P. 315-326.

5. *Pelekhata O. B.* On convergence of solutions to multipoint boundary-value problems. // Differential equations and related problems of analysis. Transactions of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine.. — 2016. — Vol.13, №2. — P. 242-254.

6. *Mikhailets V. A, Pelekhata O. B.* Continuity in a parameter of one-dimentional solutions to generic boundary-value problems / Mikhailets V. A, Pelekhata O. B. // 4th Ukrainian Conference of Young Mathematicians and Physicists, April 23-25 2015, Kyiv: Book of abstract. — 2015. — P. 22.

7. *Pelekhata O. B., Reva N. V.* Continuity in a parameter of one-dimentional solutions to generic boundary-value problems. / Pelekhata O. B., Reva N. V.// International Conference of Young Mathematicians, June 3-6 2015, Kyiv: Abstracts. — 2015. — P. 161.

8. *Pelekhata O. B.* On approximation of solutions and Green's matrix to multipoint boundary-value problems // Proceeding of XIV International Scientific -Practical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists "Shevchenkivska Vesna 2016 April, 6-8, 2016, Kyiv. — 2016. — P. 63.

9. *Pelekhata O. B., Reva N. V.* Continuity in a parameter of one-dimentional solutions to general boundary-value problems. / Pelekhata O. B., Reva N. V.// International Conference of Young Mathematicians dedicated to the 100th Anniversary of Academician of National Academy of Sciences of Ukraine, Professor Yu.O. Mitropolskiy (1917-2008), June 7-10 2017, Kyiv: Abstracts. — 2017.— P. 99.

10. *Pelekhata O.* On convergence of solutions of multipoint boundary value problems. // Book of abstract 5th International conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. — 2016. — P. 113-115.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

1. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ — поле дійсних та комплексних чисел, відповідно.

2. $\mathbb{C}^m$ — m-вимірний комплексний простір векторів $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ з нормою
$$\|y\| := |y| = \max_i |y_i|.$$

3. $\mathbb{C}^{m\times m}$ — алгебра комплексних $(m \times m)$-матриць $A = (a_{ik})_{i,k=1}^m$ з нормою
$$\|A\| := |A| = \max_{i,k} |a_{ik}|.$$

4. $\det A$ — визначник квадратної матриці A.

5. A^{-1} — матриця, обернена до квадратної матриці A.

6. I_m, O_m — одинична та нульова $(m \times m)$-матриці, відповідно.

7. $C := C([a,b];\mathbb{C})$ — простір всіх комплекснозначних функцій $y(\cdot)$, визначених і неперервних на відрізку $[a,b]$, з нормою
$$\|y\|_\infty := \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y(t)|.$$

8. $C^m := C^m([a,b];\mathbb{C})$ — простір всіх комплекснозначних m раз неперервно диференційованих на $[a,b]$ функцій з нормою
$$\|y\|_{(m)} := \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \max_{a\leqslant t\leqslant b} |y^{(k)}(t)|, \quad 0! := 1.$$

9. $(C)^m := C([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(C)^{m\times m} := C([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх комплекснозначних вектор-функцій $y(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ з неперервними на відрізку $[a,b]$ елементами.

10. $L_1 := L_1([a,b];\mathbb{C})$ — простір всіх вимірних комплекснозначних функцій, сумовних на відрізку $[a,b]$, з нормою

$$\|y\|_1 := \int\limits_a^b |y(t)|dt.$$

11. $(L_1)^m := L_1([a,b];\mathbb{C}^m)$ і $(L_1)^{m\times m} := L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ — простори всіх вимірних комплекснозначних вектор-функцій $y(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$ та матриць-функцій $A(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{C}^{m\times m}$ з сумовними на відрізку $[a,b]$ елементами.

12. $AC[a,b]$ — простір абсолютно неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій.

13. $W_1^n := W_1^n([a,b];\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$ — простір С. Л. Соболєва всіх комплекснозначних функцій, що належать такій множині:

$$W_1^n([a,b];\mathbb{C}) := \{y \in C^{(n-1)} : y^{(n-1)} \in AC[a,b]\}.$$

Норма визначається рівністю

$$\|y\|_{n,1} := \sum_{|\alpha|\leqslant n} \int\limits_a^b |D^\alpha y(t)|dt.$$

14. $(W_1^n)^m := W_1^n([a,b];\mathbb{C}^m)$ — простір всіх комплекснозначних вектор-функцій $y(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{C}^m$, елементи яких належать соболєвському простору W_1^n.

15. $B_n \xrightarrow{s} B$ — сильна збіжність операторів.

16. $BV[a,b]$ — клас функцій обмеженої варіації на відрізку $[a,b]$.

17. $V_a^b f$ — повна варіація функції f на відрізку $[a,b]$.

18. $NBV[a,b]$ — комплексний банахів простір функцій з $BV[a,b]$, неперервних зліва на інтервалі (a,b) і які перетворюються на нуль в точці a. Цей простір збігається з простором $C([a,b],\mathbb{C})^*$ і має норму

$$\|g\|_{NBV[a,b]} = V_a^b g.$$

19. $\{\chi_{(c,b]}(t) : c \in [a,b]\}$ — індикаторна функція підмножини $[c,b] \subseteq [a,b]$:

$$\chi_{[c,b]}(t) := \begin{cases} 1, & t \in [c,b]; \\ 0, & t \notin [c,b]. \end{cases}$$

20. $S[a,b]$ — комплексна лінійна оболонка сім'ї індикаторних функцій $\{\chi_{(c,b]}(t) : c \in [a,b]\}$.

ВСТУП

Робота присвячена дослідженню достатніх умов збіжності розв'язків загальних, зокрема багатоточкових, крайових задач для систем звичайних лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$ у нормах просторів $C^{(r-1)}$ на скінченному інтервалі (a, b). Крім того, в роботі встановлено можливість апроксимації розв'язку загальної крайової задачі послідовністю розв'язків багатоточкових крайових задач спеціального вигляду. Доведено можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі послідовністю нормованих матриць Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Актуальність теми. Питання щодо умов збіжності розв'язків систем диференціальних рівнянь посідають важливе місце в сучасній теорії звичайних диференціальних рівнянь. Найбільш повно ці питання досліджено стосовно послідовностей задач Коші для систем диференціальних рівнянь першого порядку. В роботах І. І. Гіхмана [5], М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [23], Я. Курцвейля і З. Ворела [24], А. М. Самойленка [51,52, 85], А. Ю. Лєвіна [26 – 25], З. Опяла [82] і Нгуен Тхе Хоана [39] отримано фундаментальні результати про умови збіжності розв'язків задачі Коші.

Розв'язки крайових задач вивчені менш істотно, ніж розв'язки задач Коші. Це пов'язано з великою різноманітністю крайових умов. Тут піонерськими є результати І. Т. Кігурадзе [14 – 16] і М. Ашордіа [68], які ввели і дослідили клас загальних лінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку. Було встановлено умови збіжності розв'язків цих задач у просторі $C([a, b], \mathbb{R}^m)$. Недавно в роботах В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, Т. І. Кодлюк, Г. О. Чеханової [19, 29, 3, 80] ці результати було уточнено та узагальнено на комплекснозначні функції і системи диференціальних рівнянь довільного порядку. У зазначених роботах авторам вдалося послабити умови на коефіцієнти рівнянь, ввівши додаткову умову на праві частини систем. Тому актуальним питанням залишається знаходження достатніх умов збіжності розв'язків, які б містили слабші вимоги і на коефіцієнти рівнянь, і на праві частини задач.

Аналогічні питання виникають і при пошуку умов збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач. У роботах [7], [56], [57] встановлено умови збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку.

Багатоточкові крайові задачі є окремим випадком загальних крайових задач. Тому природно виникає питання чи можна розв'язок та нормовану матрицю Гріна довільної загальної крайової задачі наблизити послідовністю багатоточкових крайових задач, розв'язки та нормовані матриці Гріна якої б збігалися до розв'язків загальної крайової задачі.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводилися на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського згідно з планами, передбаченими у КПІ ім. Ігоря Сікорського та в рамках держбюджетної теми "№2810 - Ф, Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнених процесів відновлення"(номер державної реєстрації 0115U000371).

Мета і завдання дослідження.

Метою дослідження дисертаційної роботи є знаходження конструктивних достатніх умов збіжності розв'язків загальних, зокрема багатоточкових крайових задач; встановлення можливості апроксимації розв'язку та нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі розв'язками і нормованими матрицями Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Об'єктом дослідження є одновимірні загальні крайові задачі, зокрема багатоточкові крайові задачі.

Предметом дослідження є умови і характер збіжності розв'язків загальних крайових задач та матриць Гріна у нормах простору $C^{(r-1)}$.

Завдання дослідження:

1. Встановити конструктивні достатні умови збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$, які б доповнювали та покращували вже відомі результати.

2. Довести нові граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач.

3. Встановити можливість апроксимації розв'язку загальної крайової задачі розв'язками багатоточкових крайових задач спеціального вигляду;

4. Встановити можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі нормованими матрицями Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії звичайних диференціальних рівнянь, функціонального та дійсного аналізу.

Наукова новизна одержаних результатів. Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають у наступному:

1. Знайдено нові конструктивні достатні умови збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільно-

го порядку, які узагальнюють і доповнюють результати І. Т. Кігурадзе та Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви.

2. Доведено нові теореми про граничний перехід для розв'язків багатоточкових крайових задач, які узагальнюють результати В. А. Михайлеця та Г. О. Чеханової.

3. Встановлено можливість апроксимації розв'язку загальної крайової задачі розв'язками багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

4. Встановлено можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі нормованими матрицями Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання можуть бути застосовані до дослідження конкретних загальних та багатоточкових крайових задач.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дисертації та постановка задач належать науковому керівникові — доктору фізико-математичних наук В. А. Михайлецю. Основні наукові результати, які винесено на захист, отримано здобувачкою самостійно. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включено лише ті результати, що належать дисертантці.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на:

– Четверта Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, Україна, Київ, 23–25 квітня 2015 р.

– Міжнародна конференція молодих математиків, Україна, Київ, 3-6 червня 2015 р.;

– XIV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016 Україна, Київ, 6–8 квітня 2016 р.;

– V Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського, Україна, Київ, 9–11 листопада 2016 р.

– Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008), Україна, Київ, 7–10 червня 2017 р.,

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в п'ятьох статтях у фахових виданнях [32, 33, 34, 40, 41] та тезах доповідей міжнародних наукових конференцій [35, 42, 43, 44, 83]. Стаття [33] опубліковано в журналі, що входить до міжнародних наукометричних баз даних (Web of Science, Scopus).

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з переліку умовних позначень, вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що налічує 86 найменувань. Повний обсяг роботи складає 150 сторінок друкованого тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, визначено мету, об'єкт, предмет, завдання і методи дослідження, розкрито наукову новизну отриманих результатів, їх теоретичне і практичне значення, наведено дані про апробацію результатів і коротко викладено зміст основної частини дисертації.

У *першому* розділі дисертації наведено огляд літератури за її темою.

Другий розділ присвячений дослідженню збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку r на скінченному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ за нормою простору $C^{(r-1)}$.

У підрозділі 2.1 на скінченному інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ розглядається система $m \in \mathbb{N}$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t) \tag{1}$$

із загальною неоднорідною крайовою умовою

$$By = c, \tag{2}$$

де лінійний неперервний оператор

$$B : C([a, b]; \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Припускається, що матриця-функція $A(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m})$, вектор-функція $f(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^m)$, а вектор $c \in \mathbb{C}^m$.

Під розв'язком системи диференціальних рівнянь (1) розуміється абсолютно неперервна на $[a, b]$ вектор-функція $y(\cdot) \in W_1^1([a, b]; \mathbb{C}^m)$, яка задовольняє векторне рівняння (1) майже скрізь. Неоднорідні крайові умови (2) коректно визначені на розв'язках системи (1) і охоплюють всі класичні види крайових умов.

Поряд з задачею (1)–(2) задана послідовність систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t, n) + A(t, n)y(t, n) = f(t, n) \tag{4}$$

з крайовими умовами

$$B(n)y(\cdot,n) = c(n), \tag{5}$$

де матриця-функція $A(\cdot,n)$, оператори $B(n)$, вектор-функція $f(\cdot,n)$ і вектор $c(n)$ задовольняють наведеним вище умовам для задачі (1)–(2).

Крайова задача (1)–(2) є фредгольмовою з нульовим індексом. Тому для однозначної скрізь розв'язності цієї задачі необхідно і достатньо, щоб відповідна однорідна крайова задача мала тільки тривіальний розв'язок.

Надалі припускається, що розв'язки однорідної задачі (1)–(2) однозначно визначені, що $n \in \mathbb{N}$, і всі асимптотичні співвідношення розглядаються при $n \to \infty$. Використовуються наступні позначення:

$$R_A(\cdot,n) := A(\cdot,n) - A(\cdot) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \tag{6}$$

$$F(\cdot) := \begin{pmatrix} f_1(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \tag{7}$$

$$F(\cdot,n) := \begin{pmatrix} f_1(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \tag{8}$$

$$R_F(\cdot,n) = F(\cdot) - F(\cdot,n), \tag{9}$$

$$R_F^\vee(t,n) := \int_a^t R_F(s,n)ds, \quad R_A^\vee(t,n) := \int_a^t R_A(s,n)ds. \tag{10}$$

$$A_F(\cdot,n) := \begin{pmatrix} A(\cdot,n) & F(\cdot,n) \\ O_m & O_m \end{pmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{2m\times 2m}), \tag{11}$$

$$R_{A_F}(\cdot,n) := A_F(\cdot,n) - A_F(\cdot) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{2m\times 2m}). \qquad (12)$$

Нехай $\mathcal{M}^m := \mathcal{M}(a,b;m)$, $m \in \mathbb{N}$ клас послідовностей матриць-функцій $R(\cdot,n) : \mathbb{N} \to L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, для яких розв'язок $Z(\cdot,n)$ задачі Коші

$$Z'(\cdot,n) + R(\cdot,n)Z(\cdot,n) = O_m, \quad Z(a,n) = I_m \qquad (13)$$

задовольняє граничне співвідношення

$$\|Z(\cdot,n) - I_m\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (14)$$

Основним результатом другого розділу є

Теорема 2.1. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача (1)–(2) має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $R_A(\cdot,n) \in \mathcal{M}^m$;

(II) $B(n)y \to By, \quad y(\cdot) \in C([a,b],\mathbb{C}^m)$.

Тоді для достатньо великих n задачі (4)–(5) однозначно розв'язні.

Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач

(III) $c(n) \to c$;

(IV) $R_{AF}(\cdot,n) \in \mathcal{M}^{2m}$;,

то єдині розв'язки задач (1)–(2) і (4)–(5) задовольняють граничну рівність

$$\|y(\cdot) - y(\cdot,n)\|_\infty \to 0. \qquad (15)$$

.

З теореми А. Ю. Лєвіна [26] випливають зручні для застосування достатні умови приналежності послідовності матриць-функцій класу $\mathcal{M}^m$ чи $\mathcal{M}^{2m}$. Тому з теореми 2.1 випливає ряд конструктивних тверджень, які узагальнюють або доповнюють теорему І. Т. Кігурадзе.

Теорема 2.2. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача (1)–(2) має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R_A^{\vee}(\cdot, n)\|_\infty \to 0;$

(II) $\|R_A(\cdot, n)R_A^{\vee}(\cdot, n)\|_1 \to 0;$

(III) $B(n)y \to By, \quad y(\cdot) \in C([a, b], \mathbb{C}^m).$

Тоді для достатньо великих n задачі (4)–(5) однозначно розв'язні.
Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач

(IV) $c(n) \to c;$

(V) $\|R_F^{\vee}(\cdot, n)\|_\infty \to 0;$

(VI) $\|R_A(\cdot, n)R_F^{\vee}(\cdot, n)\|_1 \to 0;$

то єдині розв'язки задач (1)–(2) і (4)–(5) задовольняють граничну рівність (15).

Теорема 2.2 узагальнює результат І. Т. Кігурадзе, оскільки не містить вимоги обмеженості норм коефіцієнтів систем, а також результат Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, бо умова обмеженості правих частин рівняння замінена більш слабкою умовою (VI).

Теорема 2.3. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача (1)–(2) має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R_A^{\vee}(\cdot,n)\|_{\infty} \to 0;$

(II) $\|R_A^{\vee}(\cdot,n)R_A(\cdot,n)\|_1 \to 0;$

(III) $B(n)y \to By, \quad y(\cdot) \in C([a,b],\mathbb{C}^m).$

Тоді для достатньо великих n задачі (4)–(5) однозначно розв'язні. Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач

(IV) $c(n) \to c;$

(V) $\|R_F^{\vee}(\cdot,n)\|_{\infty} \to 0;$

(VI) $\|R_A^{\vee}(\cdot,n)R_F(\cdot,n)\|_1 \to 0;$

то єдині розв'язки задач (1)–(2) і (4)–(5) задовольняють граничне співвідношення (15).

Теорема 2.3 доповнює результати І. Т. Кігурадзе та Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, згадані вище.

У підрозділі 2.2 ці результати поширено на випадок систем рівнянь порядку $r \geq 2$.

На скінченному інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$ розглядається система $m \in \mathbb{N}$ лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \cdots + A_0(t)y(t) = f(t) \tag{16}$$

із загальними неоднорідними крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) = c_j, \quad j \in \overline{1, r}, \tag{17}$$

де лінійні неперервні оператори

$$B_j : C^{(r-1)}\left([a, b]; \mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m, \quad j \in \overline{1, r}, \tag{18}$$

матриці-функції $A_{j-1}(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$, вектор-функція $f(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^m)$, а вектори $c_j \in \mathbb{C}^m$.

Під розв'язком системи диференціальних рівнянь (16) розуміється вектор-функція $y(\cdot) \in W_1^r([a, b]; \mathbb{C}^m)$, яка абсолютно неперервна на відрізку $[a, b]$ разом зі своїми похідними до $r - 1$ порядку і задовольняє векторне рівняння (16) майже скрізь. Неоднорідні крайові умови (17) коректно визначені на розв'язках системи (16) і охоплюють всі класичні види крайових умов.

Поряд з задачею (16)–(17) задана послідовність систем лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$

$$y^{(r)}(t, n) + A_{r-1}(t, n) y^{(r-1)}(t, n) + \cdots + A_0(t, n) y(t, n) = f(t, n), \quad n \in \mathbb{N} \tag{19}$$

з крайовими умовами

$$B_j(n) y(\cdot, n) = c_j(n), \tag{20}$$

де $j \in \overline{1, r}$, $n \in \mathbb{N}$, матриці-функції $A_{j-1}(\cdot, n)$, оператори $B_j(n)$, вектор-функції $f(\cdot, n)$ і вектори $c_j(n)$ задовольняють наведеним вище умовам для задачі (16)–(17).

Припускається, що розв'язки однорідної задачі (16)–(17) однозначно визначені, що $j \in \overline{1, r}$, $n \in \mathbb{N}$, і всі асимптотичні співвідношення розглядаються при $n \to \infty$. Введено наступні позначення:

$$R_{A_{j-1}}(\cdot,n) := A_{j-1}(\cdot) - A_{j-1}(\cdot,n) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \tag{21}$$

$$F(\cdot,n) := \begin{bmatrix} f_1(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \tag{22}$$

$$R_F(\cdot,n) := F(\cdot) - F(\cdot,n), \tag{23}$$

$$R_F^{\vee}(t,n) := \int_a^t R_F(s,n)ds, \qquad R_{A_{j-1}}^{\vee}(t,n) := \int_a^t R_{A_{j-1}}(s,n)ds. \tag{24}$$

Аналогами теорем 2.2 і 2.3 для випадку систем рівнянь порядку $r \geq 2$, є теореми 2.4 і 2.5 відповідно

Теорема 2.4. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача (16)–(17) має лише тривіальний розв'язок;*

(I') $\|R_{A_{j-1}}^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty \to 0$;

(II') $\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R_{A_{j-1}}^{\vee}(\cdot,n)\|_1 \to 0$;

(III') $B_j(n)y \to B_jy, \quad y \in C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m)$;

Тоді для достатньо великих n задачі (19)–(20) однозначно розв'язні. Якщо, крім того,

(IV') $c_j(n) \to c_j$;

(VI') $\|R_{A_{r-1}}(\cdot)R_F^{\vee}(\cdot,n)\|_1 \to 0$;

тоді єдині розв'язки крайових задач (19)–(20) задовольняють співвідношення

$$\|y^{(j-1)}(\cdot) - y^{(j-1)}(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \tag{25}$$

Ця теорема узагальнює як теорему І. Т. Кігурадзе, так і результат Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця та Н. В. Реви для випадку $r \geq 2$.

Теорема 2.5. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача (16)–(17) має лише тривіальний розв'язок,*

(I') $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot, n)\|_\infty \to 0;$

(II^*) $\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot, n) R_{A_{j-1}}(\cdot, n)\|_1 \to 0;$

(III') $B_j(n)y \to B_j y, \quad y \in C^{(r-1)}([a, b]; \mathbb{C}^m).$

Тоді для достатньо великих n задачі (19)–(20) однозначно розв'язні. Якщо, крім того,

(IV') $c_j(n) \to c_j;$

(VI^*) $\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot, n) R_F(\cdot, n)\|_1 \to 0;$

тоді єдині розв'язки крайових задач (19)–(20) задовольняють граничне співвідношення (25).

Теорема 2.5 доповнює результати І. Т. Кігурадзе та Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця та Н. В. Реви для випадку систем рівнянь порядку $r \geq 2$.

У *третьому* розділі дисертації як застосування результатів другого розділу, доведені нові граничні теореми для багатоточкових крайових задач для систем рівнянь довільного порядку r. Зокрема, у підрозділі 3.1 знайдено достатні умови збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач для систем рівнянь довільного порядку.

Розглядається рівняння вигляду (16) з багатоточковими крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} \alpha_i^{(k-1)} y^{(k-1)}(t_i) = 0, \quad j \in \overline{1,r}, i \in \overline{1,p+q}. \tag{26}$$

де матриці-функції $A_{k-1}(\cdot;n)$, вектор-функції $f(\cdot;n)$, точки $t_i \in [a,b]$, матриці $\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n)$, вектори $c_j(n)$ - ті ж, що і в задачі (16)–(17).

Поряд із задачею (16)–(26) розглядається послідовність задач (19) з крайовими умовами

$$B_j(n) y(\cdot;n) = \sum_{i=1}^{p+q}\sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) y^{(k-1)}(t_i(n);n) = c_j(n), \quad j \in \overline{1,r}, \tag{27}$$

Теорема 3.1 *Нехай при $n \to \infty$ та $k \in \overline{1,r}, \quad j \in \overline{1,r}$ виконуються умови:*

(0) *Однорідна гранична крайова задача (16)–(26) має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R_{k-1}^{\vee}(\cdot;n)\|_\infty \to 0;$

(II) $\|R_{r-1}(\cdot;n)R_{k-1}^{\vee}(\cdot;n)\|_1 \to 0;$

(III) $\|\sum\limits_{k=1}^{r} R_{k-1}(\cdot;n)R_{f_{k-1}}^{\vee}(\cdot;n)\|_1 \to 0;$

(IV) $\|R_{f_{k-1}}^{\vee}(\cdot;n)\|_\infty \to 0;$

(V) $t_i(n) \to t_i, \quad \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) \to \alpha_{i,j}^{(k-1)}, \quad i \in \overline{1,p};$

(VI) $\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) \to 0, \quad i \in \overline{p+1,p+q};$

(VII) $c_j(n) \to c_j.$

Тоді для достатньо великих значень n розв'язки $y(\cdot;n)$ задач (19)–(27) однозначно визначені і для них виконується граничне співвідношення (25).

Теорема 3.2 *Нехай при* $n \to \infty$ *та* $k \in \overline{1,r}$, $\quad j \in \overline{1,r}$ *виконуються умови:*

(0) *Однорідна гранична крайова задача (16)–(26) має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R^{\vee}_{k-1}(\cdot;n)\|_{\infty} \to 0$;

(II) $\|R^{\vee}_{r-1}(\cdot;n)R_{k-1}(\cdot;n)\|_1 \to 0$;

(III) $\|\sum\limits_{k=1}^{r} R^{\vee}_{k-1}(\cdot;n)R_{f_{k-1}}(\cdot;n)\|_1 \to 0$;

(IV) $\|R^{\vee}_{f_{k-1}}(\cdot;n)\|_{\infty} \to 0$;

(V) $t_i(n) \to t_i, \quad \alpha^{(k-1)}_{i,j}(n) \to \alpha^{(k-1)}_{i,j}, \quad i \in \overline{1,p}$;

(VI) $\alpha^{(k-1)}_{i,j}(n) \to 0, \quad i \in \overline{p+1,p+q}$;

(VII) $c_j(n) \to c_j$.

Тоді для достатньо великих значень n *розв'язки* $y(\cdot;n)$ *задач (19)–(27) однозначно визначені і для них виконується граничне співвідношення (25).*

У підрозділі 3.2 знайдено нові достатні умови збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач у наступній постановці. Припускається поділ всіх точок на скінченну кількість серій, кожна з яких містить граничну точку, а "блукаючі" точки утворюють нульову серію.

Розглядається система m лінійних рівнянь порядку $r \geq 2$

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \ldots + A_0(t)y(t) = f(t), \tag{28}$$

з багатоточковими крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_i^{(\ell-1)} y^{(\ell-1)}(t_i) = c_j, \tag{29}$$

де матриці $\alpha_j^{(\ell-1)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_i \in [a,b]$ вектори $c_j \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Поряд з системою (28) розглядається послідовність систем рівнянь

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \cdots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n) \tag{30}$$

Для кожного n з системою (30) пов'язують багатоточкову крайову умову

$$B_j(n)y(\cdot;n) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{k=1}^{q_i(n)} \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_{i,k}^{(\ell-1)}(n) y^{(\ell-1)}(t_{i,k}(n), n) = c_j(n). \tag{31}$$

де числа $q_i(n)$ залежать від n, матриці $\alpha_{i,k}^{(\ell-1)}(n) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t_{i,k}(n) \in [a,b]$ та вектор $c_j(n) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Вимагається при $i \in \overline{1,N}$ точки $t_{i,k}(n) \to t_i$ при $n \to \infty$, а для точок $t_{0,k}(n)$ аналогічне не вимагається.

Теорема 3.3. *Нехай при $n \to \infty$ і $j \in \overline{1,r}$ виконуються умови на*

(a) *коефіцієнти систем*

(1) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_\infty \to 0;$

(2) $\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_{(1)} \to 0;$

(b) *праві частини рівнянь*

(3) $\|f(\cdot,n)\|_1 = O(1), \quad \|f^{\vee}(\cdot,n) - f^{\vee}(\cdot)\|_\infty \to 0;$

(4) $c_j(n) \to c_j;$

(c) *граничні оператори*

(5) $t_{i,k}(n) \to t_i$ *для усіх* $i \in \overline{1,N}$, $k \in \overline{1,q_i}$;

(6) $\sum\limits_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(\ell-1)}(n) \to \alpha_i^{(\ell-1)}$ *для усіх* $i \in \overline{1,N}$, $\ell \in \overline{1,r}$;

(7) $\sum\limits_{k=1}^{q_i(n)} \|\alpha_{i,k}^{(\ell)}(n)\| \cdot |t_{i,k}(n) - t_i| \to 0$ *для усіх* $i \in \overline{1,N}$, $k \in \overline{1,q_i}$,$\ell \in \overline{1,r}$;

(8) $\sum\limits_{k=1}^{q_i(n)} \|\alpha_{0,k}^{(\ell-1)}(n)\| \to 0$, *для усіх* $k \in \overline{1,q_0}$, $\ell \in \overline{1,r}$.

Тоді для достатньо великих n задача (30)–(31) має єдиний розв'язок і він задовольняє граничне співвідношення (25).

У підрозділі 3.3 знайдені умови збіжності функцій Гріна.

Нехай $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ — розбиття скінченного інтервалу $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Розглядається однорідна багатоточкова крайова задача для векторного лінійного диференціального рівняння порядку $r \geq 2$:

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \ldots.. + A_0(t)y(t) = 0 \tag{32}$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} \beta_{j,i}(l)y^{(j-1)}(t_l) = 0, \quad i \in \overline{1,k}, \tag{33}$$

де $(m \times m)$-матриці-функції $A_{j-1}(\cdot) \in (C^{(p-1)})^m$, і вектор-функція $f(\cdot) \in (C^{(p-1)})^m$, матриці $\beta_{j,i}(l) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\quad l \in \overline{1,k}$, $i,j \in \overline{1,r}$.

Поряд із задачею (32)–(33) розглядається послідовність напіводнорідних багатоточкових крайових задач для векторного лінійного диференціального рівняння порядку $r \geq 2$:

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \ldots.. + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n) \tag{34}$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} \beta_{j,i}(l,n)y^{(j-1)}(t_l,n) = 0, \quad i \in \overline{1,k}. \tag{35}$$

Для коректності розглядуваної задачі вважається надалі, що задача (32)–(33) має лише тривіальний розв'язок.

Для функцій Гріна задач (32)–(33) і (34)–(35) у підрозділі 3.3 встановлена

Теорема 3.4. *Нехай при* $n \to \infty$ *та* $j \in \overline{1, r}$ *для деякого* $p \in \mathbb{N}$ *виконуються умови:*

(1) $\quad \|A_{j-1}(\cdot; n) - A_{j-1}(\cdot)\|_{(p-1)} \to 0;$

(2) $\quad \beta_{j,i}(l; n) \to \beta_{j,i}(l), \quad i \in \overline{1, r}, \quad l \in \overline{1, k}.$

Тоді при достатньо великих значеннях n *існують нормовані функції Гріна* $G(t, s; n)$ *задач (35)–(36) і для них та функцій Гріна* $G(\cdot, \cdot)$ *задач (32)–(33) на смугах* $(t_{l-1}, t_l) \times (a, b)$ *виконується*

$$\|G(\cdot, \cdot; n) - G(\cdot, \cdot)\|_{(p)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{36}$$

У підрозділі 3.4 встановлена можливість апроксимації розв'язків загальної крайової задачі розв'язками багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Нехай задано систему m лінійних звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \ldots + A_0(t)y(t) = f(t) \tag{37}$$

з коефіцієнтами $A_{j-1}(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m})$, правими частинами $f(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^m)$ із *загальними* неоднорідними крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) = c_j. \tag{38}$$

Розглядається послідовність систем лінійних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 1$

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \ldots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t) \tag{39}$$

із *багатоточковими* крайовими умовами

$$B_j(n)y(\cdot;n) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{r}\alpha^j_{i,k-1}(n)y^{(k-1)}(t_i(n);n) = c_j, \quad j \in \overline{1,r}. \tag{40}$$

У задачі (40)–(41) матриці-функції $A_{j-1}(\cdot,n) \in X(a,b)$ — довільній фіксованій щільній множині в просторі $L_1((a,b);\mathbb{C}^{m\times m})$, а праві частини — вектор-функція $f(\cdot)$ та вектори c_j — ті ж, що і в задачі (31)-(32).

Теорема 3.10 *Для кожної однозначно розв'язної неоднорідної загальної крайової задачі (37)–(38) знайдеться послідовність багатоточкових крайових задач вигляду (39)–(40) з коефіцієнтами $A_{j-1}(t,n) \in X(a,b)$ таких, що для достатньо великих n кожна з них є однозначно розв'язною і для розв'язків $y(\cdot)$ задачі (37)–(38) і $y(\cdot,n)$ задачі (39)–(40) виконується гранична рівність (25).*

При цьому, послідовність багатоточкових крайових задач не залежить від правих частин задачі (37)–(38).

У підрозділі 3.5 встановлена можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі нормованими матрицями Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

Теорема 3.12 *В умовах теореми 3.7 послідовність багатоточкових крайових задач (39)–(40) можна вибрати так, що для нормованих матриць Гріна $G(t,s)$ задачі (37)–(38) і нормованих матриць Гріна $G(t,s,n)$ задач*

(39)–(40) на смугах $(a,b)\times(a,b)$ *виконується гранична рівність*

$$\|G(\cdot;\cdot)-G(\cdot;\cdot,n)\|_{\infty}\to 0. \tag{41}$$

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1. Задача Коші

Питання граничного переходу у системах диференціальних рівнянь виникають у багатьох задачах математичного аналізу. Найкраще вони досліджені стосовно задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Фундаментальні результати стосовно залежності їх розв'язків від параметра отримали Й. І. Гіхман [5], М. А. Красносельский і С. Г. Крейн [23]. В їхніх роботах розглядалися нелінійні диференціальні рівняння, залежні від параметра, праві частини яких неперервні в інтегральному сенсі. Ці результати були застосовані до обґрунтування принципу усереднення М. М. Боголюбова та М. М. Крилова в різних постановках [2].

Для послідовності лінійних матричних задач Коші вигляду

$$
\begin{gathered}
Y'(t,k) = A(t,k)Y(t,k) + F(t,k), \quad a \le t \le b, \\
k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\
Y(a,k) = I_m.
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

найпростішою умовою на коефіцієнти $A(\cdot,k) \in C^{m\times m}$ та праві частини $F(\cdot,k) \in C^{m\times m}$, яка забезпечує рівномірну збіжність на $[a,b]$ розв'язків $Y(t,k)$, є рівномірна збіжність матриць-функцій $A(\cdot,k)$ та $F(\cdot,k)$ до $A(\cdot,0)$ та $F(\cdot,0)$ відповідно на $[a,b]$ [74, 59]. Проте, ця умова є досить грубою.

Якщо елементи матриць-функцій $A(t,k)$ та $F(t,k)$ належать банаховому простору $L_1^{m\times m}$ (більш загальний випадок), а $A(t,k)$ та $F(t,k)$ збіжні в цьому просторі до матриць $A(\cdot,0)$ та $F(\cdot,0)$ відповідно, то рівномірна збіжність $Y(t,k)$ до $Y(t,0)$ на $[a,b]$ є прямим наслідком результату, встановленого у 1930 р. Я. Д. Тамаркіним [86].

Згадані результати М. А. Красносельського і С. Г. Крейна [23] дають можливість у випадку лінійної крайової задачі (1.1) одержати більш тонкі достатні умови для виконання співвідношення

$$\|Y(t,k)-Y(t,0)\|_\infty \to 0, \quad k\to\infty. \tag{1.2}$$

Нехай

$$A^\vee(t,k)=\int_a^t A(s,k)ds, \quad F^\vee(t,k)=\int_a^t F(s,k)ds.$$

І

$$\|A^\vee(\cdot,k)-A^\vee(\cdot,0)\|_\infty \to 0, \quad \|F^\vee(\cdot,k)-F^\vee(\cdot,0)\|_\infty \to 0 \tag{1.3}$$

та існує сумовна мажоранта

$$|A(t,k)|\le h(t)\in L_1, t\in[a,b], k\in\mathbb{N}, \tag{1.4}$$

тоді виконується співвідношення (1.2).

Крім цього, виявилося, що при виконанні (1.4) умова (1.3) є не лише достатньою, але і *необхідною* для (1.2).

В. Т. Рейд [84] показав, що для виконання (1.2) достатньо, щоб матриця-функція $A(\cdot,k)$ слабко збігалася до $A(\cdot,0)$ у просторі $L_1([a,b],\mathbb{R}^{m\times m})$ при $k\to\infty$. Втім, як зауважив А. Ю. Лєвін [27], з цієї слабкої збіжності випливають умови (1.3) і (1.4). Як стверджується в роботі [27], на цю оцінку також не впливає та обставина, що замість умови

$$Y(a,k)=C$$

в [27] фігурують умови

$$Y(a_k, k) = C_k,$$

де

$$a_k \to a_0, C_k \to C_0$$

при $k \to \infty$.

Умова (1.4) є суттєвою для розглянутої постановки. Спроба відкинути її значно ускладнює задачу, бо умова (1.3), взагалі кажучи, не є ані необхідною, ані достатньою для (1.2). Цю властивість ілюструє такий приклад, наведений у роботі Я. Курцвейля [78].

Приклад 1.1. Розглянемо на відрізку $[a, b]$ послідовність дійсних скалярних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = p_k(t)x_k(t) + f_k(t), \tag{1.5}$$

де

$$p_k(t) := k^{1-\alpha} \cos kt, \quad f_k(t) := k^{1-\beta} \sin kt$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$, а α і β є дійсні числові параметри. Порівняємо розв'язки рівняння (1.5) з розв'язками рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0.$$

Нехай $x_k(t)$ — розв'язок рівняння (1.5), який задовольняє початкову умову $x_k(a) = c_0$, де $c_0 \in \mathbb{R}$. Як перевірив Я. Курцвейль [78], рівність

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - c_0\|_{L_\infty} = 0 \tag{1.6}$$

правильна при будь-якому $c_0 \in \mathbb{R}$ тоді і лише тоді, коли

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta > 1. \tag{1.7}$$

Для розглянутих диференціальних рівнянь умова збіжності коефіцієнтів і правих частин у просторі $L_1([a,b],\mathbb{R})$ зводиться до пари нерівностей $\alpha > 1$ і $\beta > 1$, а умова (1.3) — до пари нерівностей $\alpha > 0$ і $\beta > 0$. Звідси випливає, що співвідношення (1.3) не є достатнім для збіжності розв'язків. Виявилося також, що ці співвідношення не є необхідними. Справді, покладемо

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

Тоді розв'язок $x(t,k)$ рівняння (1.5), який задовольняє умову

$$x(a,k) = c$$

матиме вигляд

$$x(t,k) = c - \frac{1}{2}(t-a) + O(k^{-\frac{1}{2}}),$$

тобто при $k \to \infty$ та будь-якому c отримані розв'язки $x(t,k)$ рівномірно збігаються до відповідного розв'язку рівняння

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = \frac{1}{2},$$

хоча співвідношення

$$\|f^{\vee}(t,k) - \frac{1}{2}t\|_\infty \to 0, k \to \infty$$

не виконується.

Продовжуючи дослідження рівняння (1.5), Я. Курцвейль [78, 79] отримав таку достатню умову для виконання (1.6):

$$\alpha > \frac{1}{2}, \quad \beta > 0, \quad \alpha + \beta > 1.$$

На ці результати Я. Курцвейля корисно подивитися з більш загальної точки зору матричних диференціальних рівнянь, спираючись на роботу А. Ю. Лєвіна [26].

Теорема 1.1 (А. Ю. Лєвін, [26]) *Нехай при $k \to \infty$ виконується одна із наступних чотирьох нееквівалентних між собою умов:*

(L.1) $\|R(\cdot, k)\|_1 = O(1)$;

(L.2) $\|R^\vee(\cdot, k)R(\cdot, k)\|_1 \to 0$;

(L.3) $\|R(\cdot, k)R^\vee(\cdot, k)\|_1 \to 0$;

(L.4) $\|R(\cdot, k)R^\vee(\cdot, k) - R^\vee(\cdot, k)R(\cdot, k)\|_1 \to 0$,

де $R(t, k) := A(t, k) - A(t, 0)$. *Тоді умова*

$$\|R^\vee(\cdot, k)\|_\infty \to 0, k \to \infty$$

є необхідною і достатньою для виконання співвідношення (1.2).

Цей результат пояснює в прикладі 1.1 основну імплікацію (1.7) - (1.6) з більш загальної, матричної, точки зору. Дійсно, переходячи до однорідного матричного запису, отримуємо, що

$$R(t, k) = \begin{pmatrix} k^{1-\alpha}\cos kt & k^{1-\beta}\sin kt \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^{\vee}(t,k) = \begin{pmatrix} k^{-\alpha}\sin kt & k^{-\beta}(1-\cos kt) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умови $(L.1)-(L.3)$ виявляються недостатніми, оскільки окрім (1.7), вимагають додаткових обмежень. Але умова $(L.4)$ буде виконуватися:

$$R(t,k)R^{\vee}(t,k) - R^{\vee}(t,k)R(t,k) = \begin{pmatrix} 0 & k^{1-\alpha-\beta}(\cos kt - 1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Іншу умову, достатню для виконання (1.2), отримав Z. Opial' у[82]:

Теорема 1.2 (Z. Opial',[82]). *Якщо при $k \to \infty$ виконується умова*

$$\|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty}(1 + \|A(t;k)\|_1) \to 0, \tag{1.8}$$

то розвя'зки системи (1.1) задовольняють умові (1.2).

Наведемо приклад, який показує, що умова (1.8) в теоремі Z. Opial'a є суттєвою.

Приклад 1.2. Розглянемо послідовність (2×2) — матриць

$$A(t;k) = \begin{pmatrix} k^{\frac{1}{2}}\cos kt & k^{\frac{1}{2}}\sin kt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

і відповідну послідовність задач Коші

$$u'(t;k) = k^{\frac{1}{2}}\cos kt u_k(t) + k^{\frac{1}{2}}\sin kt, \quad u(0;k) = 0,$$

$$v'(t;k) = 0, \quad v(0;k) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in [0,1].$$

Розв'язки $u(t;k), v(t;k)$ мають такий вигляд:

$$u(t;k) = k^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \sin ks \exp(k^{-\frac{1}{2}}(\sin kt - \sin ks))ds, \quad v(t;k) = 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

і

$$u(t;0) = 0, \quad v(t;0) = 1.$$

У даному випадку послідовність $\{A(t;k)\}$ задовольняє умову $(L.1)$ теореми А. Ю. Лєвіна. Але, оскільки

$$u(t;k) = -\frac{1}{2}t + O(k^{-\frac{1}{2}}),$$

то

$$\|u(t;k) - u(t;0)\|_\infty \nrightarrow 0, \quad k \to \infty.$$

В 1993 році Нгуен Тхе Хоан [39] отримав більш загальні умови на коефіцієнти системи (1.1), що узагальнюють умови $(L.1)-(L.4)$ отримані А. Ю. Лєвіним. Для їх формулювання вводяться в розгляд такі послідовності матриць

$$Q_0(t;k), Q_1(t;k), ..., Q_i(t;k), ...$$

та

$$P_0(t;k), P_1(t;k), ..., P_i(t;k), ..., i = 1, 2, ...,$$

які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$Q_0(t;k) = R(t;k), \quad Q_i(t;k) = Q_{i-1}^{\vee}(t;k)R(t;k)$$

та

$$P_0(t;k) = R(t;k), \quad P_i(t;k) = R(t;k)P_{i-1}^{\vee}(t;k).$$

Покладемо

$$G_i(t;k) = Q_0(t;k) - Q_1(t;k) + ... + (-1)^i Q_i(t;k), \quad i = 1, 2, ...,$$

$$H_j(t;k) = P_0(t;k) + P_1(t;k) + ... + P_j(t;k), \quad j = 1, 2, ...$$

Тоді умови, при яких має місце співвідношення (1.2), формулюються наступним чином:

(N^i). *Нехай при* $k \to \infty$ *та* $i \geq 0$

$$\|G^{\vee}_{i-1}(t;k)\|_\infty \leq \delta < 1, \quad \|Q_i(t;k)\|_1 \leq \sigma < \infty.$$

Тоді умова

$$\|G^{\vee}_i(t;k)\|_\infty \to 0, \quad k \to \infty$$

є необхідною і достатньою для (1.2).

(N_j). *Нехай при* $k \to \infty$ *та* $j \geq 0$

$$\|H^{\vee}_{j-1}(t;k)\|_\infty \leq \delta < 1, \quad \|P_j(t;k)\|_1 \leq \sigma < \infty.$$

Тоді умова

$$\|H^{\vee}_j(t;k)\|_\infty \to 0, \quad k \to \infty$$

є необхідною і достатньою для (1.2).

Вважаючи

$$G_{-1}(t;k) = H_{-1}(t;k) = 0$$

із умов (N^i) та (N_j) при $i = j = 0$ отримуємо, що достатня умова (L_1) еквівалентна достатнім умовам (N^0) та (N_0).

А при $i = j = 1$ із достатніх умов $(L.2)$ та $(L.3)$ випливають достатні умови (N^1) та (N_1) відповідно.

Дійсно, із умови $(L.2)$:

$$\|R^{\vee}(t;k)R(t;k)\|_1 \to 0, \quad k \to \infty$$

випливає, що

$$\|R^{\vee}(t;k)R(t;k)\|_1 \leq \sigma < \infty,$$

а із

$$\|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty} \to 0, \quad k \to \infty$$

випливає

$$\|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty} \leq \delta < 1.$$

Тоді

$$\|R^{\vee}(t;k) + (R(t;k)R^{\vee}(t;k))^{\vee}\|_{\infty} \leq \|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty} + \|(R(t;k)R^{\vee}(t;k))^{\vee}\|_{\infty} \leq$$

$$\leq \|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty} + \|R(t;k)R^{\vee}(t;k)\|_1 \to 0 \quad k \to \infty.$$

Таким чином, із умови $(L.2)$ випливає умова (N^1). Аналогічно із умови $(L.3)$ випливає умова (N_1).

Приклад 1.3. Нехай $m = 2, \quad [a,b] = [0,1], \quad A(t;k) = A(t) + R(t;k),$ де

$$R(t;k) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{k}\cos kt \\ \sqrt{k}\sin 2kt & 0 \end{pmatrix}.$$

Неважко перевірити, що $\|R^{\vee}(t;k)\|_{\infty} \to 0$ і

$$R(t;k)R^{\vee}(t;k) = diag\ \{\frac{1}{2}\sin 2kt \cdot \sin kt, \quad \sin 2kt \cdot \sin kt\},$$

$$R^{\vee}(t;k)R(t;k) = diag\ \{\sin kt \cdot \sin 2kt, \quad \frac{1}{2}\sin kt \cdot \sin 2kt\},$$

$$R^{\vee}(t;k)R(t;k) - R(t;k)R^{\vee}(t;k) = diag\ \{-\frac{1}{2}\sin 2kt \cdot \sin kt, \quad \frac{1}{2}\sin kt \cdot \sin 2kt\}.$$

Однак

$$\|R(t;k)\|_1 \geq \sqrt{k}\int\limits_0^1 |\cos kt|dt = \frac{1}{\sqrt{k}}\int\limits_0^{\frac{1}{k}} |\cos t|dt = \sqrt{k}M\{|\cos t|\} \to +\infty,$$

$$\int\limits_0^1 |\sin kt \cdot \sin 2kt|dt = \frac{1}{k}\int\limits_0^k |\sin t|\cdot|\sin 2t|dt \to M\{|\sin t \cdot \sin 2t|\} > 0,$$

(див. [12]).

Жодна із чотирьох наведених вище умов $(L.1)-(L.4)$ тут не виконана, проте неважко впевнитися, що виконується умова (N^1).

Узагальнюючи результати М. А. Красносельского та С. Г. Крейна [23], Я. Курцвейль і З. Ворель [24] дійшли до цікавого випадку залежності розв'язків від параметра, коли наявність граничних співвідношень

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int\limits_0^t Y(t,y,\lambda)dt = \int\limits_0^t Y^0(t,y)dt$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} y(t,\lambda) = y(t,\lambda_0)$$

у сенсі рівномірної збіжності, де $Y(t,y,\lambda)$ – права частина, а $y(t,\lambda)$ розв'язок рівняння

$$\frac{dy}{dt} = Y(t,y,\lambda),$$

не означає, що $y(t,\lambda_0)$ задовольняє граничне рівняння

$$\frac{dy}{dt} = Y^0(t,y).$$

Бажаючи дослідити більш детально цей випадок, Я. Курцвейль створив поняття узагальненого розв'язку диференціального рівняння.

В 1962 році А. М. Самойленко [51; 52] довів теорему, яка показала, що для того, щоб з'ясувати питання про характер залежності розв'язків диференціальних рівнянь від параметра, відносно якого праві частини неперервні в інтегральному сенсі, потрібно перейти від диференціального рівняння до деякого, еквівалентного йому, інтегрального і досліджувати безпосередньо останнє. Такий підхід дозволив автору доповнити існуючі результати Й. І. Гіхмана, М. А. Красносельского та С. Г. Крейна, Я. Курцвейля і З. Вореля [78; 5; 23; 24] та детальніше з'ясувати питання про рівняння для функції $y(t, \lambda_0)$ у наведеному вище випадку.

1.2. Багатоточкові крайові задачі

Багатоточкові крайові задачі є класичним об'єктом досліджень в теорії звичайних диференціальних рівнянь. Їх особливістю є те, що проміжні точки, які входять в крайові умови, породжують ряд проблем: порушення гладкості функції Гріна, відсутність спряженої задачі та інше. Вирішення проблем, які виникають в даних задачах, здійснюється за рахунок використання функції Гріна, яка відображає всю специфіку крайової задачі і є досить складним об'єктом.

Багато відомих математиків досліджували питання існування, єдиності і побудови наближених методів знаходження розв'язків багатоточкових крайових задач (див. наприклад, [76; 16; 48; 49; 51; 53; 54; 60; 62]). Крім того, ряд математиків, зокрема, І. Т. Кігурадзе [16], А. Ю. Левін [28; 25], Ю. В. Покорний [45; 46; 47], Є. С. Чічкін [67], P. R. Beesack [69], L. J. Grimm і P. W. Eloe

[75], L. K. Jackson та інші [49; 61 і т. д.] вивчали також властивості функції Гріна цих задач.

Н. В. Рева у своїй роботі [49] отримала конструктивні достатні умови неперервності за параметром розв'язків багатоточкових крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку. Цей, а також всі наступні результати ми сформулюємо у зручних для нас термінах.

Автор досліджувала таку послідовність багатоточкових крайових задач

$$y'(t;k) = A(t;k)y(t;k) + f(t;k), \tag{1.9}$$

$$U(n)y(t;k) := \sum_{j=1}^{n} B_j(k)y(t_j;k) = 0, \tag{1.10}$$

де матриці-функції $A(\cdot;k) \in (L_1)^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;k) \in (L_1)^m$, матриці $B_j(k) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $t_j \in [a,b]$, $\quad j \in \overline{1,k}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Теорема 1.3. (Н. В. Рева, [49]). *Нехай гранична однорідна крайова задача*

$$y'(t;0) = A(t;0)y(t;0), \tag{1.11}$$

$$U(0)y(t;0) := \sum_{j=1}^{n} B_j(0)y(t_j;0) = 0, \tag{1.12}$$

має лише тривіальний розв'язок і виконуються умови при $k \to \infty$:

1) $\quad A(\cdot;k) - A(\cdot;0) = R(\cdot;k) \in \mathcal{M}^m$;

2) $\quad \|f(\cdot;k)\|_1 = O(1)$;

3) $\quad \|f^\vee(\cdot;k) - f^\vee(\cdot;0)\|_\infty \to 0$;

4) $\quad \forall j \in \overline{1,n}: \quad B_j(k) \longrightarrow B_j(0)$.

Тоді для достатньо великих значень k *розв'язки* $y(\cdot;k)$ *задачі* (1.9) – (1.10) *визначені однозначно і задовольняють граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot;k) - y(\cdot;0)\|_\infty \to 0, k \to \infty. \tag{1.13}$$

Тут $\mathcal{M}^m[a,b] =: \mathcal{M}^m, \quad m \in \mathbb{N}$ – клас всіх $(m \times m)$ комплекснозначних сумовних на $[a,b]$ послідовностей матриць-функцій $R(\cdot;k) : [0,\infty) \to (L_1)^{m\times m}$, для яких нормований розв'язок $Z(\cdot;k)$ системи

$$Z'(t;k) = R(t;k)Z(t;k), \quad Z(a;k) \equiv I_m$$

задовольняє граничне співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} \|Z(t;k) - I_m\|_\infty = 0.$$

Випадок, коли коефіцієнти $A(\cdot)$ належать більш вузькому простору, простору Соболєва матриць-функцій, кожний елемент яких належить $W_p^{n-1}([a,b];\mathbb{C}) := \{y \in C^{(n-2)} : y^{(n-2)} \in AC[a,b], y^{(n-1)} \in L_p[a,b]\}$, досліджено в роботі [21] Т. І. Кодлюк.

В її роботі розглянута послідовність багатоточкових крайових задач для системи $m \in \mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку вигляду:

$$y'(t;k) = A(t;k)y(t;k) + f(t;k), \tag{1.14}$$

$$\sum_{j=1}^{l} B_j(k)y(t_j;k) = c_k, \tag{1.15}$$

де матриці-функції $A(\cdot;k) \in (W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;k) \in (W_p^{n-1})^m$, матриці $B_j(k) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, вектори $c_k \in \mathbb{C}^m$, точки $t, t_j \in [a,b], \quad j \in \overline{1,l}$, $l \in \mathbb{N}$.

Для неї встановлена

Теорема 1.4. (Т. І. Кодлюк, [21]) *Нехай гранична однорідна крайова задача вигляду* (1.14) – (1.15) *має лише тривіальний розв'язок і при* $k \to \infty$ *виконуються умови:*

1) $\|A(\cdot;k) - A(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0;$

2) $\|f(\cdot;k) - f(\cdot;0)\|_{n-1,p} \to 0;$

3) $c_k \to c_0;$

4) $\|B_j(k) \to B_j(0)\|, \quad j \in \overline{1,l}.$

Тоді для достатньо великих значень k *розв'язки* $y(\cdot;k)$ *задачі* (1.14) – (1.15) *визначені однозначно і задовольняють граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot;k) - y(\cdot;0)\|_{n,p} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1.16}$$

В роботі [66] Г. О. Чеханової розглядається багатоточкова задача щодо простору $C^{(n)}[a,b]$ для рівнянь першого порядку:

$$y'(t;k) + A(t;k)y(t;k) = f(t;k), \tag{1.17}$$

$$B(k)y(\cdot;k) = \sum_{i=1}^{p+q} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{i,j}(k) y^{(j)}(t_i(k);k) = c(k), \tag{1.18}$$

де матриці-функції $A(\cdot;k) \in C^{(n-1)}\left([a,b], \mathbb{C}^{m\times m}\right)$, вектор-функції $f(\cdot;k) \in C^{(n-1)}\left([a,b], \mathbb{C}^{m}\right)$, матриці $\alpha_{i,j}(k) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, де $i \in j \in \overline{1,p+q}, \quad j \in \overline{1,n}$, точки $t_i \in [a,b]$, а вектори $c(k) \in \mathbb{C}^m$.

У крайовій умові (1.18) допускається існування додаткових точок, що входять у крайовий вираз, нехтуваний при $k \to \infty$.

При цьому, гранична ($k \to \infty$) крайова умова

$$y'(t) + A(t)y(t) = 0, \tag{1.19}$$

$$By(\cdot) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{n} \alpha_{i,j} y^{(j)}(t_i) = 0, \tag{1.20}$$

ставиться лише для p точок $t_1, \ldots, t_p$.

Теорема 1.5. (Г. О. Чеханова [66]) *Нехай* (1.19) – (1.20) *має лише тривіальний розв'язок і при* $k \to \infty$ *виконуються умови:*

1) $\|A(\cdot; k) - A(\cdot)\|_{(n-1)} \to 0;$

2) $\|f(\cdot; k) - f(\cdot)\|_{(n-1)} \to 0;$

3) $t_i(k) \to t_i, \quad \alpha_{i,j}(k) \to \alpha_{i,j}, \quad i \in \overline{1,p}, \quad j \in \overline{1,n};$

4) $\alpha_{i,j}(k) \to 0, \quad i \in \overline{p+1, p+q}, \quad j \in \overline{1,n};$

5) $c(k) \to c.$

Тоді при достатньо великих значеннях k *розв'язки* $y(\cdot; k)$ *задачі* (1.17) – (1.18) *однозначно визначені і для них виконується граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot; k) - y(\cdot; 0)\|_{(n)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1.21}$$

Для системи диференціальних рівнянь високого порядку Г. О. Чехановою в роботі [66] розглянута послідовність багатоточкових крайових задач

$$y^{(r)}(t; k) + A_{r-1}(t; k) y^{(r-1)}(t; k) + \cdots + A_0(t) y(t; k) = f(t; k), \tag{1.22}$$

$$B_j(k) y(\cdot; k) = \sum_{i=1}^{p+q} \sum_{l=1}^{r} \alpha_{i,l-1}^{j}(k) y^{(l-1)}(t_i(k); k) = c_j(k), \quad j \in \overline{1,r}, \tag{1.23}$$

де матриці-функції $A_{l-1}(\cdot; k) \in L_1([a,b], \mathbb{C}^{m\times m}), \quad l \in \overline{1,r}$, вектор-функції $f(\cdot; k) \in L_1([a,b], \mathbb{C}^m)$, матриці $\alpha_{i,l-1}^{j}(k) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, де $i \in \overline{1, p+q}$, а вектори $c_j(k) \in \mathbb{C}^m, \quad t_i \in [a,b]$.

Теорема 1.6. (Г. О. Чеханова, [66]) *Нехай гранична однорідна задача вигляду* (1.22) – (1.23) *має лише тривіальний ров'язок і при* $k \to \infty$ та $l \in \overline{1,r}, \quad j \in \overline{1,r}$ *виконуються умови:*

1) $\|R_{A_{r-1}}(\cdot;k)R^{\vee}_{A_{l-1}}(\cdot;k)\|_1 \to 0;$

2) $\|R^{\vee}_{A_{l-1}}(\cdot;k)\|_\infty \to 0;$

3) $\|f(\cdot;k)\|_1 = O(1); \quad \|f^{\vee}(\cdot;k) - f^{\vee}(\cdot;0)\|_\infty \to 0;$

4) $t_i(k) \to t_i(0), \quad \alpha^j_{i,l-1}(k) \to \alpha^j_{i,l-1}(0), \quad i \in \overline{1,p};$

5) $\alpha^j_{i,l-1}(k) \to 0, \quad i \in \overline{p+1,p+q};$

6) $c_j(k) \to c_j(0).$

Тоді для достатньо великих значень k *розв'язки* $y(\cdot;k)$ *задач* (1.22) – (1.23) *однозначно визначені і для них виконується граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot;k) - y(\cdot;0)\|_{(r-1)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1.24}$$

У роботі В.О. Солдатова [58] розглядається система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку, залежна від параметра $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$:

$$L(\varepsilon)z(t,\varepsilon) \equiv z^{(r)}(t,\varepsilon) + \sum_{j=1}^{r} K_{r-j}(t,\varepsilon)z^{(r-j)}(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad a \le t \le b. \tag{1.25}$$

з багатоточковою крайовою умовою

$$B(\varepsilon)z(\cdot,\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{p}\sum_{k=1}^{\omega_j}\sum_{l=0}^{n+r} \beta^{(l)}_{j,k}(\varepsilon)z^{(l)}(t_{j,k}(\varepsilon),\varepsilon) = q(\varepsilon). \tag{1.26}$$

де усі числа $\omega_j \in \mathbb{N}$, матриці $\beta^{(l)}_{j,k}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, точки $t_{j,k}(\varepsilon) \in [a,b]$ та вектор $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ є заданими. При цьому не припускається, що коефіцієнти $K_{r-j}(t,\varepsilon)$, $\beta^{(l)}_{j,k}(\varepsilon)$ чи точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мають яку-небудь регулярність за параметром ε.

У крайовій умові (1.26) вимагається, щоб для кожного фіксованого $j \in \overline{1,p}$ усі точки $t_{j,k}(\varepsilon)$ мали спільну границю при $\varepsilon \to 0+$, крім точок $t_{0,k}(\varepsilon)$ нульової серії.

Теорема 1.7. (В. О. Солдатов, [58]). *Нехай для крайової задачі (1.25)–(1.26) відповідна однорідна гранична крайова задача має лише тривіальний розв'язок і при $\varepsilon \to 0+$ виконуються умови:*

(1) $t_{j,k}(\varepsilon) \to t_j$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\omega_j} \beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon) \to \beta_j^{(l)}$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $l \in \overline{0,n+r}$;

(3) $\|\beta_{j,k}^{(n+r)}(\varepsilon)\| = O(1)$ для усіх $j \in \overline{1,p}$ та $k \in \overline{1,\omega_j}$;

(4) $\|\beta_{j,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \cdot |t_{j,k}(\varepsilon) - t_j(0)| \to 0$ для усіх $j \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,\omega_j}$ та $l \in \overline{0,n+r-1}$;

(5) $\|\beta_{0,k}^{(l)}(\varepsilon)\| \to 0$ для усіх $k \in \overline{1,\omega_0}$ та $l \in \overline{0,n+r}$;

(6) $K_{r-j}(\cdot,\varepsilon) \to K_{r-j}(\cdot,0)$ в $(C^{(n)})^{m\times m}$ для кожного номера $j \in \overline{1,r}$.

Тоді її розв'язок неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, тобто

(∗) *Існує додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ таке, що для довільних числа $\varepsilon \in [0,\varepsilon_1)$, вектор-функції $f(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n)})^m$ і вектора $q(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{rm}$ ця задача має єдиний розв'язок $z(\cdot,\varepsilon) \in (C^{(n+r)})^m$.*

(∗∗) *Збіжність правих частин*

$$f(\cdot,\varepsilon) \to f(\cdot,0) \quad \text{в} \quad (C^{(n)})^m, \quad q(\varepsilon) \to q(0) \quad \text{в} \quad \mathbb{C}^{rm} \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0+$$

тягне за собою збіжність розв'язків

$$z(\cdot,\varepsilon) \to z(\cdot,0) \quad \text{в} \quad \left(C^{(n+r)}\right)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Для матриць Гріна були отримані наступні результати. У 1987 році І. Т. Кігурадзе довів, що якщо визначник

$$\det \sum_{j=1}^{n} B_j(k) Y(t_j; k) \neq 0, \tag{1.27}$$

то для багатоточкової крайової задачі (1.9) – (1.10) існуватиме матриця Гріна, тобто матрична функція

$$G_{\bar{t},\overline{B}}(t, s; k) \in L_\infty([a, b] \times [a, b]; \mathbb{C}^{m \times m}),$$

де

$$\bar{t} = t_1, t_2, ..., t_n, \quad \overline{B} = B_1, B_2, ..., B_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

за допомогою якої розв'язок напіводнорідної крайової задачі може бути представлений у вигляді

$$y(t; k) = \int_a^b G_{\bar{t},\overline{B}}(t, s; k) f(s; k) ds, \quad t \in [a, b], \quad f(\cdot; k) \in (L_1)^m.$$

Ця рівність визначає матрицю Гріна $G_{\bar{t},\overline{B}}(t, s; k)$ неоднозначно, лише з точністю до значень на підмножини квадрата $[a, b] \times [a, b]$ міри нуль.

У зв'язку з цим Н. В. Рева досліджувала збіжність таких матриць Гріна у просторі $L_\infty := L_\infty([a, b]; \mathbb{C})$.

Теорема 1.8 (Н. В. Рева, [49]). *Нехай однорідна гранична крайова задача* (1.11) – (1.12) *має лише тривіальний розв'язок і виконуються умови:*

1) $A(t; k) - A(t; 0) = R(t; k) \in \mathcal{M}^m$;

2) $\forall j \in \overline{1, k} \quad B_j(k) \longrightarrow B_j(0), \quad k \to \infty.$

Тоді для достатньо великих k існують матриці Гріна $G_{\bar{t},\overline{B}}(t,s;k)$ задачі вигляду (1.9) – (1.10) *і на квадраті* $[a,b]\times[a,b]$ *виконується*

$$\|G_{\bar{t},\overline{B}}(t,s;k) - G_{\bar{t},\overline{B}}(t,s;0)\|_{+\infty} \to 0, \quad k\to\infty,$$

де $\|\cdot\|_{+\infty}$ — норма у просторі Лебега L_∞.

Питання про достатні умови збіжності матриць Гріна багатоточкових крайових задач в більш сильних нормах соболєвських просторів $W_p^n([a,b];\mathbb{C})$ дослідила в своїй роботі Т. І. Кодлюк [21] .

У цій роботі розглядається напіводнорідна крайова задача для системи $m\in\mathbb{N}$ диференціальних рівнянь першого порядку:

$$y'(t;k) = A(t;k)y(t;k) + f(t;k), \tag{1.28}$$

$$\sum_{j=1}^{l} B_j(k)y(t_j;k) = 0, \tag{1.29}$$

де матриці-функції $A(\cdot;k)\in(W_p^{n-1})^{m\times m}$, вектор-функції $f(\cdot;k)\in(W_p^{n-1})^m$, матриці $B_j(k)\in\mathbb{C}^{m\times m}$, точки $t,t_j\in[a,b]$, $\quad j\in\overline{1,l}$, $\quad l\in\mathbb{N}$.

Для неї була виділена особлива, *нормована*, матриця Гріна, яка визначається однозначно і доведена

Теорема 1.9 (Т. І. Кодлюк, [21]). *Якщо*

$$\det[B_1(0) + \sum_{j=2}^{l} B_j(0)Y(t_j;0)] \neq 0,$$

тоді існує ***нормована*** *матриця Гріна напіводнорідної багатоточкової крайової задачі виду* (1.28) – (1.29), *яка представляється у вигляді:*

$$G(t,s) =$$
$$= \begin{cases} -Y(t)[B_1 + \sum\limits_{j=2}^{l} B_j Y(t_j)]^{-1} Z(s), & t \le s; \\ Y(t)Y^{-1}(s) - Y(t)[B_1 + \sum\limits_{j=2}^{l} B_j Y(t_j)]^{-1} Z(s), & s < t, \end{cases} \tag{1.30}$$

де

$$Z(s) = \sum_{j:t_j \le s} B_j Y(t_j) Y^{-1}(s).$$

Крім того, в роботі [21] встановлений наступний результат.

Теорема 1.10 (Т. І. Кодлюк, [21]). *Якщо*

$$\det[B_1(0) + \sum_{j=2}^{l} B_j(0) Y(t_j; 0)] \ne 0$$

і при $k \to \infty$ *виконуються умови:*

1) $\|A(\cdot; k) - A(\cdot; 0)\|_{n-1,p} \to 0;$

2) $\|B_j(k) \to B_j(0)\|, \quad j\overline{1, l}.$

Тоді для достатньо великих значень k *існують нормовані матриці Гріна* $G(t, s; k)$ *задач* (1.28) – (1.29) *і на кожному з* $l-1$ *прямокутників* $(a, b) \times (a_{j-1}, a_j)$ *виконується*

$$\|G(\cdot, \cdot; k) - G(\cdot, \cdot; 0)\|_{n,p} \to 0, \quad k \to \infty.$$

В роботі [66] Чеханової Г.О. означено нормовану матрицю Гріна однорідної крайової задачі для системи рівнянь довільного порядку.

Означення. *Нормованою* матрицею Гріна однорідної крайової задачі вигляду (1.17) – (1.18) називають $(m \times m)$-матрицю-функцію

$$G(\cdot, \cdot; k) := \widetilde{G}_{1r}(\cdot, \cdot; k). \tag{1.31}$$

де $\widetilde{G}_{1r}$ – відповідний елемент нормованої матриці Гріна

$$\widetilde{G} = (\widetilde{G}_{ij})_{i,j=1}^{r}$$

загальної однорідної крайової задачі для системи $n = rm$ диференціальних рівнянь першого порядку вигляду (1.9) – (1.10).

Теорема 1.11 (Г. О. Чеханова, [66].) *Нехай при* $k \to \infty$ *та* $j \in \overline{1, r}$ *виконуються умови:*

(1) $\|R_{r-1}(\cdot; k) R^{\vee}_{j-1}(\cdot; k)\|_1 \to 0;$

(2) $\|R^{\vee}_{j-1}(\cdot; k)\|_\infty \to 0;$

(3) $\|B_j(k) - B_j(0)\| \to 0, \quad j \in \overline{1, r},$

де

$$R_{j-1}(\cdot; k) := A_{j-1}(\cdot; k) - A_{j-1}(\cdot; 0), \quad R^{\vee}_{j-1}(t; k) := \int\limits_a^t R_{j-1}(s; k) ds.$$

Тоді для достатньо великих k *визначені нормовані матриці Гріна розглядуваних задач та для них виконується граничне співвідношення*

$$\|G(\cdot, \cdot; k) - G(\cdot, \cdot; 0)\|_\infty \to 0, \quad k \to \infty. \tag{1.32}$$

1.3. Загальні крайові задачі

На відміну від задачі Коші, крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь досліджено менш повно. Це зумовлено великою різноманітністю крайових умов. Систематичне дослідження крайових задач було започатковано в роботах І. Т. Кігурадзе [14 – 16] і М. Ашордіа [68]. Ними була досліджена збіжність розв'язків лінійних крайових задач вигляду

$$y'(t,k) + A(t,k)y(t,k) = f(t,k), \quad a \le t \le b, \tag{1.33}$$

$$B(k)y(\cdot,k) = q(k), \tag{1.34}$$

де для кожного $k \in \mathbb{N}$ виконуються такі припущення:

$$A(\cdot,k) \in L_1([a,b],\mathbb{R}^{m\times m}), \quad f(\cdot,k) \in L_1([a,b],\mathbb{R}^m), \quad q(k) \in \mathbb{R}^m,$$

і, окрім того,

$$B(k) : C([a,b],\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$$

є довільний неперервний лінійний оператор.

Розв'язок $y(t,k)$ цієї задачі розглядається у класі $\mathrm{AC}([a,b],\mathbb{R}^m)$ вектор-функцій, абсолютно неперервних на відрізку $[a,b]$. Оскільки похідна довільної вектор-функції з цього класу існує майже скрізь на $[a,b]$, то і диференціальне рівняння (1.33) має виконуватися майже скрізь на $[a,b]$.

І. Т. Кігурадзе отримав достатні умови рівномірної збіжності при $k \to \infty$ розв'язку $y(t,k)$.

Теорема 1.12 (І. Т. Кігурадзе, [14]). *Припустимо, що однорідна гранична крайова задача*

$$y'(t,0) = -A(t,0)y(t,0), \quad a \le t \le b, \qquad B(0)y(t,0) = 0 \tag{1.35}$$

має лише тривіальний розв'язок. Нехай при $k \to \infty$ *виконуються такі шість умов:*

1) $\|A(\cdot,k)\|_1 = O(1)$;

2) $\|B(k)\| = O(1)$;

3) $\max\limits_{t\in[a,b]} \left\| \int\limits_a^t A(s,k)ds - \int\limits_a^t A(s,0)ds \right\| \to 0$;

4) $\max\limits_{t\in[a,b]} \left\| \int\limits_a^t f(s,k)ds - \int\limits_a^t f(s,0)ds \right\| \to 0$;

5) $q(k) \to q(0)$ в $\mathbb{R}^m$;

6) $B(k)y \to B(0)y$ в $\mathbb{R}^m$ для кожного $y \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{R}^m)$.

Тоді крайова задача (1.33), (1.34) *має єдиний розв'язок при* $k \gg 1$ *і він задовольняє умову*

$$y(\cdot,k) \to y(\cdot,0) \quad \text{в} \quad C([a,b],\mathbb{R}^m) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Наведені нижче приклади показують, що в теоремі І. Т. Кігурадзе всі умови є суттєвими.

Приклад 1.4. Нехай $m = 1, \quad [a,b] = [0,2\pi], \quad c(k) = c(0) = 1,$

$$A(t;k) = A(t;0) = 0, \quad f(t;0) = 0, \quad f(t;k) = k\cos k^2 t,$$

$$U(0)y = y(0), \quad U(k)y = y(0) + k\int\limits_0^2 \pi y(t)\sin k^2 t dt.$$

Тоді виконуються всі умови теореми І. Т. Кігурадзе окрім 3).

З іншого боку

$$y(t;0) = 1, \quad y(t;k) = 1 - \pi + \frac{1}{k}\sin k^2 t,$$

що й показує порушення граничної рівності (1.13).

Приклад 1.5. Припустимо тепер, що $m = 1, \quad [a,b] = [0, 2\pi]$,

$$A(t;0) = f(t;0) = 0, \quad A(t;k) = k\cos k^2 t, \quad f(t;k) = -k\sin k^2 t,$$

$$U(k)y = U(0)y = y(0), \quad c(k) = c(0) = 1.$$

Тоді

$$y(t;0) = 0, \quad y(t;k) = -k\int\limits_0^1 \exp\left(\frac{\sin k^2 t}{k} - \frac{\sin k^2 \tau}{k}\right)\sin k^2 \tau d\tau$$

і

$$\lim_{k\to\infty}[y(t;k) - y(t;0)] = \frac{t}{2}.$$

У даному випадку виконуються всі умови теореми І. Т. Кігурадзе, окрім 1).

Умови 2) і 6) у цій теоремі означають, що оператори $B(k)$ сильно збігається до оператора $B(0)$ при $k \to \infty$. Тому в умові 6) множину $\mathrm{AC}([a,b], \mathbb{R}^m)$ можна замінити довільною підмножиною вектор-функцій, щільною у банаховому просторі $C([a,b], \mathbb{R}^m)$. Оскільки простір $\mathbb{R}^m$ скінченновимірний, то ця умова еквівалентна слабкій збіжності оператора $B(k)$ до $B(0)$ при $k \to \infty$. Отже, умова 6) істотно слабша за умову рівномірної збіжності оператора $B(k)$ до $B(0)$. Окрім того, можна показати, що умови 1) і 3) випливають із слабкої збіжності матриць-функцій $A(\cdot,k)$ до $A(\cdot,0)$ у просторі $L_1([a,b],\mathbb{R}^{m\times m})$, а умова 5) випливає із слабкої збіжності вектор-функцій $f(\cdot,k)$ до $f(\cdot,0)$ у просторі $L_1([a,b],\mathbb{R}^m)$. Й поготів ці умови випливають із збіжності у нормах відповідних просторів. Керуючись цими міркуваннями, В. А. Михайлець і Н. В. Рева [3] узагальнили умови теореми Кігурадзе і покращили його результати. До того ж В. А. Михайлець і Н. В. Рева розглянули більш загальну ситуацію, коли розв'язки, праві частини і коефіцієнти диференціального рівняння (1.33) є комплекснозначними функціями і тому у крайовій умові (1.34) фігурують неперервні лінійні оператори

$$B(k) : C([a,b],\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m,$$

на парі комплексних банахових просторів.

Наступні твердження, отримані Т. І. Кодлюк, В.А.Михайлецем та Н.В.Ревою, узагальнюють умови на коефіцієнти рівнянь в теоремі І.Т.Кігурадзе при більш жорстких вимогах на праві частини.

Теорема 1.13 (Т. І. Кодлюк, В.А.Михайлець, Н.В.Рева, [19]). *У формулюванні теореми І. Т. Кігурадзе умови 1) та 4) на коефіцієнти системи* (1.33)-(1.34) *можна замінити більш загальною нелінійною умовою*

$$R(t;k) := A(t;k) - A(t;0) \in \mathcal{M}^m.$$

Тут $\mathcal{M}^m[a,b] =: \mathcal{M}^m, \quad m \in \mathbb{N}$ – клас всіх $m \times m$ комплекснозначних сумовних на $[a,b]$ послідовностей матриць-функцій $R(\cdot;k)\mathbb{N} \to L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$ для яких нормований розв'язок $Z(\cdot;k)$ системи

$$Z'(t;k) = R(t;k)Z(t;k), \quad Z(a;k) \equiv I_m$$

задовольняє граничне співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} \|Z(t;k) - I_m\|_\infty = 0.$$

В роботах [68; 15; 29; 3] знайдені достатні умови збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем рівнянь першого порядку за рівномірною нормою $\|\cdot\|_\infty$.

Аналогічні питання збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем рівнянь порядку $r \geq 1$ за нормами просторів $C^{(r-1)}([a,b],\mathbb{C})$ досліджувались Г. О. Чехановою в дисертаційній роботі [66], а саме, розглядалась послідовність загальних крайових задач вигляду:

$$y^{(r)}(t;k) + A_{r-1}(t;k)y^{(r-1)}(t;k) + \cdots + A_0(t;k)y(t;k) = f(t;k), \\ t \in [a,b], \tag{1.36}$$

$$B_j(k)y(\cdot;k) = c_j(k), \quad j \in \overline{1,r}. \tag{1.37}$$

Тут $(m\times m)$–матриці-функціїї $A_{j-1}(\cdot;k)$ і вектор-функції $f(\cdot;k)$ сумовні на $[a,b]$, вектори $c_j(k) \in \mathbb{C}^m$, розв'язок $y(\cdot;k) \in (W_1^r)^m$, а кожне B_j є лінійним неперервним оператором у парі просторів

$$B_j(k) : C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m. \tag{1.38}$$

Теорема 1.14 (Г.О. Чеханова, [66]). *Нехай відповідна гранична однорідна крайова задача до задачі вигляду* (1.36)–(1.37) *має лише тривіальний розв'язок і при $k\to\infty$ та $j \in \overline{1,r}$ виконуються умови:*

(*i*) $\|R_{A_{r-1}}(\cdot;k)R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot;k)\|_1 \to 0$;

(*ii*) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot;k)\|_\infty \to 0$;

(*iii*) $\quad B_j(k)y \to B_j(0)y, \quad y \in C^{(n-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right); \quad c_j(k) \to c_j(0);$

(*iv*) $\quad \|f(\cdot;k)\|_1 = O(1); \quad \|f^{\vee}(\cdot;k) - f^{\vee}(\cdot;0)\|_\infty \to 0.$

Тоді для достатньо великих k *задача* (1.36) – (1.37) *має єдиний розв'язок* $y(\cdot;k)$ *і для нього виконується співвідношення*

$$\|y(\cdot;k) - y(\cdot;0)\|_{(r-1)} \to 0, \ k \to \infty. \tag{1.39}$$

В. А. Михайлець та Н. В. Рева отримали граничні теореми для матриць Гріна $G(t,s;k)$ в метриці простору Лебега L_∞,.

Теорема 1.15 (В. А. Михайлець та Н. В. Рева, [29]). *Нехай однорідна гранична крайова задача має лише тривіальний розв'язок та виконуються умови:*

1) $\quad A(t;k) - A(t;0) \in \mathcal{M}^m$;

2) $\|U(k) - U(0)\| \to 0, \quad k \to \infty.$

Тоді для достатньо великих k *існують матриці Гріна*

$$G(t,s) \in L_\infty([a,b]\times[a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$$

розглянутих задач і на квадраті $[a,b]\times[a,b]$

$$\|G(\cdot,\cdot;k) - G(\cdot,\cdot;0)\|_{+\infty} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Достатні умови збіжності матриць Гріна розглянутих задач до матриці Гріна граничної крайової задачі на квадраті $(a,b)\times(a,b)$ за рівномірною нормою розглянула Т. І. Кодлюк [21].

Теорема 1.16 (Т. І. Кодлюк, [21]). *Нехай однорідна гранична крайова задача має лише тривіальний розв'язок та виконуються такі умови:*

1) $\quad A(t;k) - A(t;0) \in \mathcal{M}^m$;

2) $\quad \|U(k)-U(0)\| \to 0, \quad k\to\infty.$

Тоді для достатньо великих k *існують нормовані матриці Гріна задач (1.33) – (1.34) і рівномірно на квадраті* $(a,b)\times(a,b)$

$$\|G(t,s;k)-G(t,s;0)\|_\infty \to 0, \quad k\to\infty. \tag{1.40}$$

У слабшій формі граничне співвідношення (1.40), де $\|\cdot\|_\infty$ – норма в просторі Лебега L_∞, використовувалося в роботах [70; 10] для доведення рівномірної апроксимації операторів Штурма-Ліувілля з сильно сингулярними потенціалами аналогічними операторами з гладкими потенціалами. Подібні диференціальні оператори зустрічаються у ряді задач сучасної математичної фізики. Відносно диференціальних операторів високих порядків див., наприклад, роботи [72; 73].

Також Г. О. Чеханова отримала достатню умову рівномірної збіжності матриць Гріна для напіводнорідних крайових задач вигляду:

$$\begin{gathered} y^{(r)}(t;k)+A_{r-1}(t;k)y^{(r-1)}(t;k)+\cdots+A_0(t;k)y(t;k)=f(t;k), \\ t\in[a,b], \end{gathered} \tag{1.41}$$

$$B_j(k)y(\cdot;k)=0, \quad j\in\overline{1,r}. \tag{1.42}$$

Тут $A_{j-1}(\cdot;k)$ і вектор-функція $f(\cdot;k)$ сумовні на $[a,b]$, а лінійні неперервні оператори

$$B_j : C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right)\to\mathbb{C}^m. \tag{1.43}$$

Для крайової задачі (1.41), (1.42) нормована матриця Гріна означена як $(m\times m)$ матриця-функція

$$G(\cdot,\cdot;k) := \widetilde{G}_{1r}(\cdot,\cdot;k),$$

де $\widetilde{G}_{1r}(\cdot,\cdot;k)$ є блок $(mr \times mr)$ матриці Гріна однорідної крайової задачі для відповідної системи рівнянь першого порядку.

Теорема 1.17 (Г.О. Чеханова, [66]). *Нехай при $k \to \infty$ та $j \in \overline{1,r}$ виконуються умови:*

1) $\|R_{A_{r-1}}(\cdot;k)R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot;k)\|_1 \to 0;$

2) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot;k)\|_\infty \to 0;$

3) $\|B_j(k) - B_j(0)\| \to 0.$

Тоді для достатньо великих k існують нормовані матриці Гріна задач (1.41), (1.42) *то для них виконується граничне співвідношення*

$$\|G(\cdot,\cdot;k) - G(\cdot,\cdot;0)\|_\infty \to 0, \quad k \to \infty, \tag{1.44}$$

Висновки до розділу 1

У першому розділі роботи зроблено стислий огляд наукової літератури за темою дисертації. З наведених відомостей можна дійти наступних висновків:

1. Представляє інтерес пошук конструктивних достатніх умов збіжності розв'язків загальних крайових задач, які б узагальнювали та доповнювали результати І. Т. Кігурадзе, Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця та Н. В. Реви.

2. Актуальними для дослідження залишаються питання збіжності розв'язків та матриць Гріна багатоточкових крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь високого порядку.

3. Недослідженою є проблема зв'язків між розв'язками загальних крайових задач і багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

РОЗДІЛ 2
ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАГАЛЬНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

2.1. Системи диференцільних рівнянь першого порядку.

Розглянемо на скінченному інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ систему $m \in \mathbb{N}$ лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t) \tag{2.1}$$

із загальною неоднорідною крайовою умовою

$$By = c, \tag{2.2}$$

де лінійний неперервний оператор

$$B : C([a, b]; \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m. \tag{2.3}$$

Припускаємо, що матриця-функція $A(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$, вектор-функція $f(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^m)$, а вектор $c \in \mathbb{C}^m$.

Під розв'язком системи диференціальних рівнянь (2.1)–(2.2) розуміється абсолютно неперервна на $[a, b]$ вектор-функція $y(\cdot) \in W_1^1([a, b]; \mathbb{C}^m)$, яка задовольняє векторне рівняння (2.1) майже скрізь. Неоднорідні крайові умови (2.2) коректно визначені на розв'язках системи (2.1) і охоплюють всі класичні види крайових умов.

Поряд з задачею (2.1)–(2.2) розглянемо послідовність систем лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t,n) + A(t,n)y(t,n) = f(t,n) \tag{2.4}$$

з крайовими умовами

$$B(n)y(\cdot,n) = c(n), \tag{2.5}$$

де матриці-функції $A(\cdot,n)$, оператори $B(n)$, вектор-функції $f(\cdot,n)$ і вектори $c(n)$ задовольняють наведеним вище умовам для задачі (2.1)–(2.2).

Крайова задача (2.1)–(2.2) є фредгольмовою з нульовим індексом. Тому для однозначної скрізь розв'язності цієї задачі необхідно і достатньо, щоби відповідна однорідна крайова задача мала тільки тривіальний розв'язок.

Надалі вважатимемо, що розв'язки однорідної задачі (2.1)–(2.2) однозначно визначені, що $n \in \mathbb{N}$, і всі асимптотичні співвідношення розглядаються при $n \to \infty$. Введемо наступні позначення:

$$R_A(\cdot,n) := A(\cdot,n) - A(\cdot), \in L([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \tag{2.6}$$

$$F(\cdot) := \begin{pmatrix} f_1(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(\cdot) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \tag{2.7}$$

$$F(\cdot,n) := \begin{pmatrix} f_1(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \\ f_2(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(\cdot,n) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}), \tag{2.8}$$

$$R_F(\cdot,n) = F(\cdot) - F(\cdot,n), \tag{2.9}$$

$$R_F^{\vee}(t,n) := \int_a^t R_F(s,n)ds, \quad R_A^{\vee}(t,n) := \int_a^t R_A(s,n)ds. \tag{2.10}$$

$$A_F(\cdot,n) := \begin{pmatrix} A(\cdot,n) & F(\cdot,n) \\ O_m & O_m \end{pmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{2m\times 2m}), \tag{2.11}$$

$$R_{A_F}(\cdot,n) := A_F(\cdot,n) - A_F(\cdot) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{2m\times 2m}), \tag{2.12}$$

У роботі І. Т. Кігурадзе [15] доведена наступна теорема.

Теорема (І. Т. Кігурадзе, [15]). *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача* (2.1)–(2.2) *має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R_A^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty \to 0;$

(II) $\|R_A(\cdot,n)\|_1 = O(1);$

(III) $B(n)y \to By, \quad y(\cdot) \in C([a,b],\mathbb{C}^m).$

Тоді для достатньо великих n *задачі* (2.4)–(2.5) *однозначно розв'язні. Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач*

(IV) $c(n) \to c;$

(V) $\|R_F^{\vee}(\cdot,n)\|_\infty \to 0,$

то єдині розв'язки задач (2.1)–(2.2) *і* (2.4)–(2.5) *задовольняють граничну рівність*

$$\|y(\cdot) - y(\cdot,n)\|_\infty \to 0. \tag{2.13}$$

Приклади показують, що в теоремі Кігурадзе всі умови є суттєвими і не можна відкинути жодну з них. Однак умови на коефіцієнти систем можна послабити.

Нехай $\mathcal{M}^m := \mathcal{M}(a,b;m), \quad m \in \mathbb{N}$ клас послідовностей матриць-функцій $R(\cdot,n) : \mathbb{N} \to L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, для яких розв'язок $Z(\cdot,n)$ задачі

Коші

$$Z'(\cdot, n) + R(\cdot, n)Z(\cdot, n) = O_m, \quad Z(a, n) = I_m \tag{2.14}$$

задовольняє граничне співвідношення

$$\|Z(\cdot, n) - I_m\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.15}$$

Теорема (Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлець, Н. В. Рева, [19]). *У формулюванні теореми Кігурадзе можна замінити умови (I), (II) на одну більш загальну умову*

$$R_A(\cdot, n) \in \mathcal{M}^m,$$

якщо

$$\|R_F(\cdot, n)\|_1 = O(1).$$

Основним результатом другого розділу є

Теорема 2.1. *Нехай виконані умови (0), (III) теореми І. Т. Кігурадзе та*

(I′) $R_A(\cdot, n) \in \mathcal{M}^m$.

Тоді для достатньо великих n задачі (2.4)–(2.5) *однозначно розв'язні. Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач (IV) теореми І. Т. Кігурадзе та*

(V′) $R_{AF}(\cdot, n) \in \mathcal{M}^{2m}$,

то єдині розв'язки задач (2.1)–(2.2) *і* (2.4)–(2.5) *задовольняють граничну рівність* (2.13).

Для доведення теореми наведемо спочатку допоміжний результат, встановлений у А. Ю. Лєвіним у [27].

Нехай $Y(t)$ — єдиний розв'язок (матрицант) матричного диференціального рівняння

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad t \in (a,b), \tag{2.16}$$

з початковою умовою

$$Y(a) = I_m. \tag{2.17}$$

а $Y(t,n)$ — відповідно матриcанти матричного послідовності диференціальних рівнянь

$$Y'(t,n) = A(t,n)Y(t,n), \quad t \in (a,b), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.18}$$

з початковою умовою

$$Y(a,n) = I_m. \tag{2.19}$$

Лема 2.1. (Принцип редукції, А. Ю. Лєвін, [26].) *Граничне співвідношення*

$$\|Y(t,n) - Y(t)\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty \tag{2.20}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли

$$R_A(\cdot, n) \in \mathcal{M}^m.$$

Перше твердження теореми 2.1 випливає з теореми Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви. Доведемо друге.

Поряд з вихідною неоднорідною задачею (2.4) відносно вектор-функцій $y(\cdot, n)$ розглянемо ще три векторні напіводнорідні послідовності крайових задач

$$z'(t,n) + A_0(t,n)z(t,n) = 0, \qquad B(n)z(\cdot,n) = c_1(n), \tag{2.21}$$

$$x'(t,n) + A_0(t,n)x(t,n) = f(t,n), \quad x(a,n) \equiv 0, \tag{2.22}$$

$$w'(t,n) + A_0(t,n)w(t,n) = f(t,n), \quad B_1(n)w(\cdot,n) \equiv 0. \tag{2.23}$$

Як відомо, крайова задача (2.22) (задача Коші) завжди має єдиний розв'язок. З першої частини теореми Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви випливає, що задачі (2.21) і (2.23) для достатньо великих n мають єдині розв'язки. При $n = 0$ цей факт випливає із припущення (0) теореми 2.1 і фредгольмовості з нульовим індексом розглядуваних задач. Звідси маємо, що при $n >> 1$

$$y(\cdot,n) = z(\cdot,n) + w(\cdot,n).$$

Тому для доведення теореми 2.1 досить показати, що при виконанні її умов

$$\|z(\cdot) - z(\cdot,n)\|_\infty \to 0, \tag{2.24}$$

$$\|w(\cdot) - w(\cdot,n)\|_\infty \to 0. \tag{2.25}$$

Асимптотична рівність (2.24) випливає з другої частини теореми Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви.

Лема 2.2. *Якщо виконані умови теореми 2.1 то*

$$\|x(\cdot) - x(\cdot,n)\|_\infty \to 0. \tag{2.26}$$

Доведення леми 2.2. Визначимо за заданими матрицями-функціями $A_0(\cdot, n)$ і $F(\cdot, n)$ блочні $(2m \times 2m)$ матриці-функції

$$A_F(\cdot, n) := \begin{pmatrix} A_0(\cdot, n) & F(\cdot, n) \\ 0_m & 0_m \end{pmatrix}, \qquad R_{AF}(\cdot, n) := A_F(\cdot, 0) - A_F(\cdot, n),$$

$$R_{AF}^{\vee}(t, n) := \int_a^t R_{AF}(s, n) ds.$$

Розглянемо тепер матричні задачі Коші

$$S'(t, n) + A_F(t, n)S(t, n) = 0, \quad S(a, n) = I_{2m}. \tag{2.27}$$

Тоді згідно з принципом редукції А. Ю. Лєвіна з умови (V') випливає

$$\|S(\cdot) - S(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \tag{2.28}$$

Розглянемо тепер послідовність матричних задач

$$T'(t, n) + A_F(t, n)T(t, n) = 0, \quad T(a, n) = C \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}. \tag{2.29}$$

Розв'язки цих задач можна записати у вигляді

$$T(\cdot, n) = S(\cdot, n)C.$$

Тому

$$\|T(\cdot) - T(\cdot, n)\|_\infty = \| \left(S(\cdot) - S(\cdot, n)\right) C\|_\infty \le \|S(\cdot) - S(\cdot, n)\|_\infty \|C\| \to 0.$$

Визначимо для розв'язків $x(\cdot,n) = (x_1(\cdot,n), x_2(\cdot,n), \ldots, x_m(\cdot,n))$ крайових задач (2.22) матриці-функції

$$X(\cdot,n) := \begin{pmatrix} x_1(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ x_2(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Векторні крайові задачі (2.22) рівносильні матричним задачам

$$X'(t,n) + A_0(t,n)X(t,n) = F(t,n), \quad X(a,n) \equiv 0. \tag{2.30}$$

Неважко переконатися, що розв'язки задач (2.29) и (2.30) пов'язані між собою рівностями

$$T(\cdot,n) = \begin{pmatrix} X(\cdot,n) & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}, \qquad C \equiv \begin{pmatrix} 0_m & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}.$$

Тому з доведеного нами вище співвідношення випливає, що

$$\|x(\cdot) - x(\cdot,n)\|_\infty = \|X(\cdot) - X(\cdot,n)\|_\infty = \|T(\cdot) - T(\cdot,n)\|_\infty \to 0.$$

Лема 2.2 доведена.

Лема 2.3. *В умовах теореми 2.1 виконується гранична рівність* (2.25).

Доведення леми 2.3. Покладемо

$$v(\cdot,n) := x(\cdot,n) - w(\cdot,n).$$

Тоді вектор-функції $v(\cdot, n)$ є розв'язками крайових задач

$$v'(t,n) + A_0(t,n)v(t,n) = 0, \qquad B(n)v(\cdot,n) = B(n)x(\cdot,n) =: \widetilde{c}(n).$$

Але

$$\|Bx(\cdot) - B(n)x(\cdot,n)\|_\infty \leq \|(B - B(n))x(\cdot)\|_\infty + \|B(n)\|\|x(\cdot) - x(\cdot,n)\|_\infty. \tag{2.31}$$

Перший доданок в правій частині нерівності (2.31) прямує до нуля в силу припущення (III) теореми. З цієї ж умови, в силу принципу рівномірної обмеженості для лінійних операторів, випливає також, що $\|B(n)\| = O(1)$. Тому з доведеного вище співвідношення (2.26) випливає, що ліва частина нерівності (2.31) прямує до нуля, тобто $\widetilde{c}(n) \to \widetilde{c}$. Але

$$v(\cdot, n) = Y(\cdot, n)\,\overline{c}(n),$$

де вектор $\overline{c}(n) \in \mathbb{C}^m$, а $Y(\cdot, n)$ — матричний розв'язок задачі Коші

$$Y'(t,n) + A_0(t,n)Y(t,n) = 0, \quad Y(a,n) = I_m,$$

а вектори $\overline{c}(n)$ і $\widetilde{c}(n)$ пов'язані між собою рівністю

$$[B(n)Y(\cdot,n)]\,\overline{c}(n) = \widetilde{c}(n).$$

Тут дужки Кігурадзе

$$[B(n)\,Y(\cdot,n)] \tag{2.32}$$

позначають числову $(m \times m)$-матрицю, k-й стовпець якої збігається з дією оператора $B(n)$ на k-й стовпець квадратної матриці $Y(\cdot, n)$. З однозначної розв'язності крайових задач (2.21) при $n >> 1$ випливає [19], що матриці (2.32) оборотні при достатньо великих n і

$$\overline{c}(n) = [B(n)\, Y(\cdot, n)]^{-1}\, \widetilde{c}(n) \to [B\, Y(\cdot)]^{-1}\, \widetilde{c} = \overline{c}.$$

Звідки маємо, що

$$\|v(\cdot) - v(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \tag{2.33}$$

Тому співвідношення (2.25) випливає з рівностей $w(\cdot, n) = x(\cdot, n) - v(\cdot, n)$ і вже доведених співвідношень (2.26) і (2.33).

Лема 2.3 доведена. Разом з нею доведена і теорема 2.1.

З теореми А. Ю. Лєвіна 1.1 випливають зручні для застосування достатні умови приналежності послідовності матриць-функцій класу $\mathcal{M}^m$ чи $\mathcal{M}^{2m}$. Тому з теореми 2.1 випливає ряд конструктивних тверджень, які узагальнюють або доповнюють теорему І. Т. Кігурадзе.

Теорема 2.2. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача* (2.1) – (2.2) *має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R_A^\vee(\cdot, n)\|_\infty \to 0;$

(II) $\|R_A(\cdot, n) R_A^\vee(\cdot, n)\|_1 \to 0;$

(III) $B(n)y \to By, \quad y(\cdot) \in C([a, b], \mathbb{C}^m).$

Тоді для достатньо великих n задачі (2.4)–(2.5) *однозначно розв'язні.*

Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач

(IV) $c(n) \to c;$

(V) $\|R_F^\vee(\cdot, n)\|_\infty \to 0;$

(VI) $\|R_A(\cdot,n)R_F^{\vee}(\cdot,n)\|_1 \to 0,$

то єдині розв'язки задач (2.1)–(2.2) *і* (2.4)–(2.5) *задовольняють граничну рівність* (2.13).

Теорема 2.2 узагальнює результат І. Т. Кігурадзе, оскільки не містить вимоги обмеженості норм коефіцієнтів систем, а також результат Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, бо умова обмеженості правих частин рівняння замінена більш слабкою умовою (VI).

Доведення теореми 2.2. Перше твердження теореми випливає з теореми Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви. Доведемо друге.

Покажемо, що в умовах теореми 2.1 для задач (2.21), (2.22),(2.23) виконуються співвідношення (2.24), (2.25), (2.26).

Лема 2.4. *Якщо виконані умови теореми 2.2, то*

$$\|x(\cdot)-x(\cdot,n)\|_\infty \to 0. \tag{2.34}$$

Доведення леми 2.4. Визначимо за заданими матрицями-функціями $A_0(\cdot,n)$ і $F(\cdot,n)$ блочні $(2m\times 2m)$ матриці-функції

$$A_F(\cdot,n) := \begin{pmatrix} A_0(\cdot,n) & F(\cdot,n) \\ 0_m & 0_m \end{pmatrix}, \qquad R_{AF}(\cdot,n) := A_F(\cdot,0) - A_F(\cdot,n),$$

$$R^{\vee}_{AF}(t,n) := \int_a^t R_{AF}(s,n)ds.$$

Розглянемо тепер матричні задачі Коші

$$S'(t,n) + A_F(t,n)S(t,n) = 0, \quad S(a,n) = I_{2m}. \tag{2.35}$$

Тоді

$$R_{AF}(\cdot,n)R^{\vee}_{AF}(\cdot,n)=\begin{pmatrix} R_{A_0}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_0}(\cdot,n) & R_{A_0}(\cdot,n)R^{\vee}_{F}(\cdot,n) \\ 0_m & 0_m \end{pmatrix}.$$

Звідки в силу припущень (II) і (VI)

$$\|R_{AF}(\cdot,n)R^{\vee}_{AF}(\cdot,n)\|_1=\|R_{A_0}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_0}(\cdot,n)\|_1+\|R_{A_0}(\cdot,n)R^{\vee}_{F}(\cdot,n)\|_1\to 0,$$

а в силу (I)

$$\|R^{\vee}_{AF}(\cdot,n)\|_\infty=\|R^{\vee}_{A_0}(\cdot,n)\|_\infty+\|R^{\vee}_{F}(\cdot,n)\|_\infty\to 0.$$

Звідси, відповідно до теореми Лєвіна випливає, що

$$\|S(\cdot,0)-S(\cdot,n)\|_\infty\to 0. \tag{2.36}$$

Розглянемо тепер послідовність матричних задач

$$T'(t,n)+A_F(t,n)T(t,n)=0,\quad T(a,n)=C\in\mathbb{C}^{2m\times 2m}. \tag{2.37}$$

Розв'язки цих задач можна записати у вигляді

$$T(\cdot,n)=S(\cdot,n)C.$$

Тому

$$\|T(\cdot,0)-T(\cdot,n)\|_\infty=\|\left(S(\cdot,0)-S(\cdot,n)\right)C\|_\infty\le\|S(\cdot,0)-S(\cdot,n)\|_\infty\|C\|\to 0.$$

Визначимо для розв'язків $x(\cdot,n) = (x_1(\cdot,n), x_2(\cdot,n), \ldots, x_m(\cdot,n))$ крайових задач (2.22) матриці-функції

$$X(\cdot,n) := \begin{pmatrix} x_1(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ x_2(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Векторні крайові задачі (2.22) рівносильні матричним задачам

$$X'(t,n) + A_0(t,n)X(t,n) = F(t,n), \quad X(a,n) \equiv 0. \tag{2.38}$$

Неважко переконатися, що розв'язки задач (2.37) и (2.38) пов'язані між собою рівностями

$$T(\cdot,n) = \begin{pmatrix} X(\cdot,n) & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}, \qquad C \equiv \begin{pmatrix} 0_m & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}.$$

Тому з доведеного нами вище співвідношення випливає, що

$$\|x(\cdot,0) - x(\cdot,n)\|_\infty = \|X(\cdot,0) - X(\cdot,n)\|_\infty = \|T(\cdot,0) - T(\cdot,n)\|_\infty \to 0.$$

Лема 2.4 доведена.

Лема 2.5. *В умовах теореми 2.2 виконується гранична рівність* (2.25).

Доведення леми 2.5. Покладемо

$$v(\cdot,n) := x(\cdot,n) - w(\cdot,n).$$

Тоді вектор-функції $v(\cdot, n)$ є розв'язками крайових задач

$$v'(t,n) + A_0(t,n)v(t,n) = 0, \qquad B(n)v(\cdot,n) = B(n)x(\cdot,n) =: \widetilde{c}(n).$$

Але

$$\|Bx(\cdot) - B(n)x(\cdot,n)\|_\infty \le \|(B - B(n))x(\cdot)\|_\infty + \|B(n)\|\|x(\cdot) - x(\cdot,n)\|_\infty. \quad (2.39)$$

Перший доданок в правій частині нерівності (2.39) прямує до нуля в силу припущення (III) теореми 2.2. З цієї ж умови, в силу принципу рівномірної обмеженості для лінійних операторів, випливає також, що $\|B(n)\| = O(1)$. Тому з доведеного вище співвідношення (2.26) випливає, що ліва частина нерівності (2.39) прямує до нуля, тобто $\widetilde{c}(n) \to \widetilde{c}$. Але

$$v(\cdot,n) = Y(\cdot,n)\,\overline{c}(n),$$

де вектор $\overline{c}(n) \in \mathbb{C}^m$, а $Y(\cdot,n)$ — матричний розв'язок задачі Коші

$$Y'(t,n) + A_0(t,n)Y(t,n) = 0, \quad Y(a,n) = I_m,$$

а вектори $\overline{c}(n)$ і $\widetilde{c}(n)$ пов'язані між собою рівністю

$$[B(n)Y(\cdot,n)]\,\overline{c}(n) = \widetilde{c}(n).$$

З однозначної розв'язності крайових задач (2.21) при $n >> 1$ слідує [19], що матриці (2.32) оборотні при достатньо великих n і

$$\overline{c}(n) = [B(n)\,Y(\cdot,n)]^{-1}\,\widetilde{c}(n) \to [B\,Y(\cdot)]^{-1}\,\widetilde{c} = \overline{c}.$$

Звідки маємо, що

$$\|v(\cdot) - v(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \qquad (2.40)$$

Тому співвідношення (2.25) випливає з рівностей $w(\cdot, n) = x(\cdot, n) - v(\cdot, n)$ і вже доведених співвідношень (2.26) і (2.40).

Лема 2.5 доведена. Разом з нею доведена і теорема 2.2.

Теорема 2.3. *Нехай*

(0) *Однорідна гранична крайова задача* (2.1)–(2.2) *має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R_A^\vee(\cdot, n)\|_\infty \to 0$;

(II) $\|R_A^\vee(\cdot, n) R_A(\cdot, n)\|_1 \to 0$;

(III) $B(n)y \to By, \quad y(\cdot) \in C([a, b], \mathbb{C}^m)$.

Тоді для достатньо великих n задачі (2.4)–(2.5) *однозначно розв'язні. Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задач*

(IV) $c(n) \to c$;

(V) $\|R_F^\vee(\cdot, n)\|_\infty \to 0$;

(VI) $\|R_A^\vee(\cdot, n) R_F(\cdot, n)\|_1 \to 0$,

то єдині розв'язки задач (2.1)–(2.2) *і* (2.4)–(2.5) *задовольняють граничне співвідношення* (2.13).

Теорема 2.3 доповнює результати І. Т. Кігурадзе та Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, наведені вище.

Доведення теореми 2.3. Перше твердження теореми випливає з теореми Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви. Доведемо друге.

Покажемо, що в умовах теореми 2.3 для задач (2.21), (2.22),(2.23) виконуються співвідношення (2.24), (2.25), (2.26).

Лема 2.6. *Якщо виконані умови теореми 2.3 то*

$$\|x(\cdot) - x(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \tag{2.41}$$

Доведення леми 2.6. Визначимо за заданими матрицями-функціями $A_0(\cdot, n)$ і $F(\cdot, n)$ блочні $(2m \times 2m)$ матриці-функції

$$A_F(\cdot, n) := \begin{pmatrix} A_0(\cdot, n) & F(\cdot, n) \\ 0_m & 0_m \end{pmatrix}, \qquad R_{AF}(\cdot, n) := A_F(\cdot, 0) - A_F(\cdot, n),$$

$$R^\vee_{AF}(t, n) := \int_a^t R_{AF}(s, n) ds.$$

Розглянемо тепер матричні задачі Коші

$$S'(t, n) + A_F(t, n) S(t, n) = 0, \quad S(a, n) = I_{2m}. \tag{2.42}$$

Тоді

$$R^\vee_{AF}(\cdot, n) R_{AF}(\cdot, n) = \begin{pmatrix} R^\vee_{A_0}(\cdot, n) R_{A_0}(\cdot, n) & R^\vee_{A_0}(\cdot, n) R_F(\cdot, n) \\ 0_m & 0_m \end{pmatrix}.$$

Звідки в силу припущень (II) и (VI)

$$\|R^\vee_{AF}(\cdot, n) R_{AF}(\cdot, n)\|_1 = \|R^\vee_{A_0}(\cdot, n) R_{A_0}(\cdot, n)\|_1 + \|R^\vee_{A_0}(\cdot, n) R_F(\cdot, n)\|_1 \to 0,$$

а в силу (I)

$$\|R^\vee_{AF}(\cdot, n)\|_\infty = \|R^\vee_{A_0}(\cdot, n)\|_\infty + \|R^\vee_F(\cdot, n)\|_\infty \to 0.$$

Звідси, відповідно до теореми Лєвіна випливає, що

$$\|S(\cdot,0)-S(\cdot,n)\|_\infty \to 0. \tag{2.43}$$

Розглянемо тепер послідовність матричних задач

$$T'(t,n)+A_F(t,n)T(t,n)=0, \quad T(a,n)=C\in\mathbb{C}^{2m\times 2m}. \tag{2.44}$$

Розв'язки цих задач можна записати у вигляді

$$T(\cdot,n)=S(\cdot,n)C.$$

Тому

$$\|T(\cdot,0)-T(\cdot,n)\|_\infty = \|\left(S(\cdot,0)-S(\cdot,n)\right)C\|_\infty \le \|S(\cdot,0)-S(\cdot,n)\|_\infty\|C\| \to 0.$$

Визначимо для розв'язків $x(\cdot,n)=(x_1(\cdot,n),x_2(\cdot,n),\ldots,x_m(\cdot,n))$ крайових задач (2.22) матриці-функції

$$X(\cdot,n):=\begin{pmatrix} x_1(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ x_2(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_m(\cdot,n) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Векторні крайові задачі (2.22) рівносильні матричним задачам

$$X'(t,n)+A_0(t,n)X(t,n)=F(t,n), \quad X(a,n)\equiv 0. \tag{2.45}$$

Неважко переконатися, що розв'язки задач (2.44) и (2.45) пов'язані між собою рівностями

$$T(\cdot,n)=\begin{pmatrix} X(\cdot,n) & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}, \qquad C\equiv\begin{pmatrix} 0_m & 0_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}.$$

Тому з доведеного нами вище співвідношення випливає, що

$$\|x(\cdot,0)-x(\cdot,n)\|_\infty=\|X(\cdot,0)-X(\cdot,n)\|_\infty=\|T(\cdot,0)-T(\cdot,n)\|_\infty\to 0.$$

Лема 2.6 доведена.

Лема 2.7. *В умовах теореми 2.3 виконується гранична рівність* (2.25).

Доведення леми 2.7. Покладемо

$$v(\cdot,n):=x(\cdot,n)-w(\cdot,n).$$

Тоді вектор-функції $v(\cdot,n)$ є розв'язками крайових задач

$$v'(t,n)+A_0(t,n)v(t,n)=0, \qquad B(n)v(\cdot,n)=B(n)x(\cdot,n)=:\widetilde{c}(n).$$

Але

$$\|Bx(\cdot)-B(n)x(\cdot,n)\|_\infty\le\|(B-B(n))x(\cdot)\|_\infty+\|B(n)\|\|x(\cdot)-x(\cdot,n)\|_\infty. \quad (2.46)$$

Перший доданок в правій частині нерівності (2.46) прямує до нуля в силу припущення (III) теореми. З цієї ж умови, в силу принципу рівномірної обмеженості для лінійних операторів, випливає також, що $\|B(n)\|=O(1)$. Тому з доведеного вище співвідношення (2.26) випливає, що ліва частина нерівності

(2.46) прямує до нуля, тобто $\widetilde{c}(n) \to \widetilde{c}$. Але

$$v(\cdot, n) = Y(\cdot, n)\,\overline{c}(n),$$

де вектор $\overline{c}(n) \in \mathbb{C}^m$, а $Y(\cdot, n)$ — матричний розв'язок задачі Коші

$$Y'(t, n) + A_0(t, n)Y(t, n) = 0, \quad Y(a, n) = I_m,$$

а вектори $\overline{c}(n)$ і $\widetilde{c}(n)$ пов'язані між собою рівністю

$$[B(n)Y(\cdot, n)]\,\overline{c}(n) = \widetilde{c}(n).$$

Тут дужки Кігурадзе

$$[B(n)\,Y(\cdot, n)] \tag{2.47}$$

позначають числову $(m \times m)$-матрицю, k-й стовпець якої збігається з дією оператора $B(n)$ на k-й стовпець квадратної матриці $Y(\cdot, n)$. З однозначної розв'язності крайових задач (2.21) при $n >> 1$ випливає [19], що матриці (2.47) оборотні при достатньо великих n і

$$\overline{c}(n) = [B(n)\,Y(\cdot, n)]^{-1}\,\widetilde{c}(n) \to [B\,Y(\cdot)]^{-1}\,\widetilde{c} = \overline{c}.$$

Звідки маємо, що

$$\|v(\cdot) - v(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \tag{2.48}$$

Тому співвідношення (2.25) випливає з рівностей $w(\cdot, n) = x(\cdot, n) - v(\cdot, n)$ і вже доведених співвідношень (2.41) і (2.40).

Лема 2.7 доведена.

Порівняємо на прикладі умови теорем І. Т. Кігурадзе, Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви та нашої теореми 2.2 про неперервність розв'язків загальних крайових задач за параметром. Оскільки умови на граничні оператори в усіх теоремах однакові, то достатньо порівняти умови на ліві і праві частини неоднорідних крайових задач.

Приклад 2.1. Розглянемо крайову задачу для скалярного звичайного диференціального рівняння першого порядку:

$$Ly = y'(t) + a(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \tag{2.49}$$

де $a(\cdot)$ — довільна фіксована функція з простору $L([a,b],\mathbb{C})$, функція $f(\cdot)$ належить банаховому простору $L([a,b],\mathbb{C})$.

Розглянемо тепер послідовність неоднорідних крайових задач:

$$L(n)y(t;n) = y'(t;n)+(a(t;n)+n^{\alpha}e^{in^{\beta}t})y(t;n) = f(t;n)+n^{\gamma}e^{in^{\delta}t}, t \in (a,b), n \in \mathbb{N}, \tag{2.50}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — дійсні числові параметри.

Тоді

$$R_a(t,n) = n^{\alpha}e^{in^{\beta}t}, R_f(t,n) = n^{\gamma}e^{in^{\delta}t}.$$

$$R_a^{\vee}(t,n) = n^{\alpha}e^{in^{\beta}t}/in^{\beta}, R_f^{\vee}(t,n) = n^{\gamma}e^{in^{\delta}t}/in^{\delta},$$

Зауважимо, що умови на параметри α, β відповідають умовам на ліві частини задач, а на γ, δ — на праві.

Легко перевірити, що для виконання умов теореми І. Т. Кігурадзе числові параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ мають бути такими, що:

$$\begin{cases} \alpha < \beta, \\ \alpha \le 0, \\ \gamma < \delta \end{cases}$$

Відповідні множини значень параметрів на ліві частини зображені на рис. 2.1.

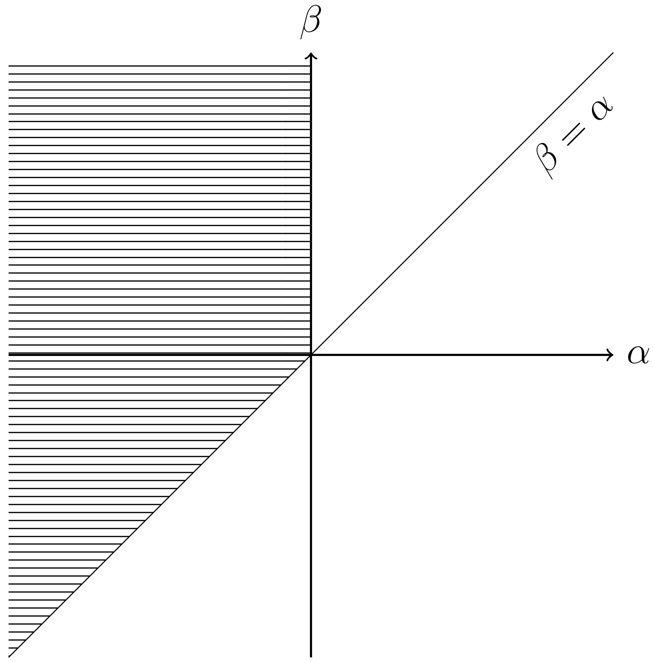

Рис. 2.1

а на праві — на рис.2.2.

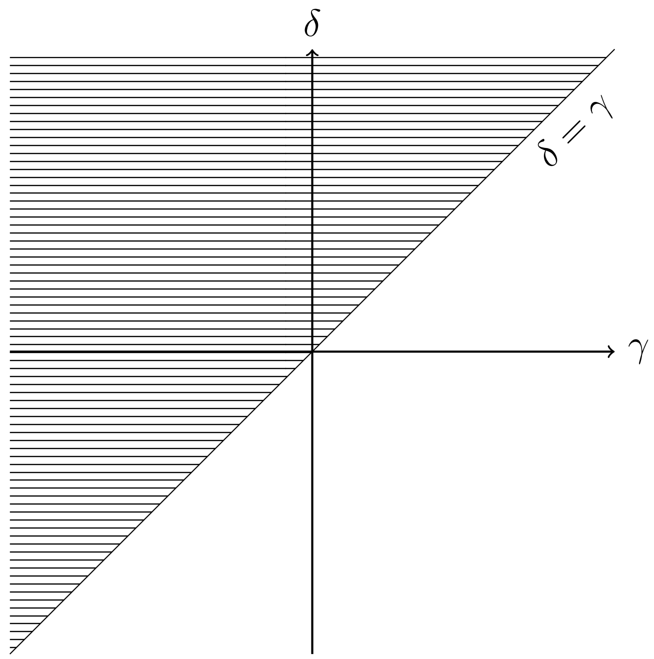

Рис. 2.2

Аналогічним чином для виконання умов теореми Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви у конструктивних термінах, одержимо наступні вимоги на $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\begin{cases} \alpha < \beta, \\ 2\alpha < \beta, \\ \gamma < \delta, \\ \gamma < 0. \end{cases}$$

На рис. 2.3 — 2.4 зображені множини значень параматрів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, при яких виконуються умови теореми Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви.

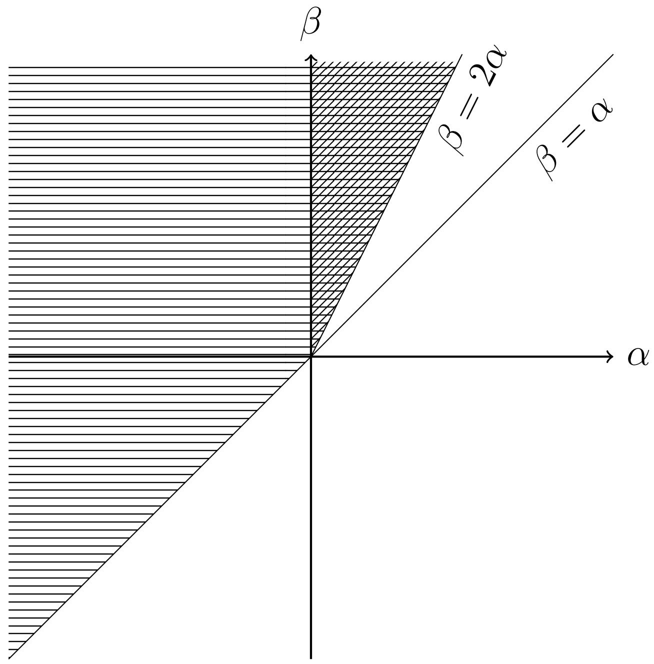

Рис. 2.3

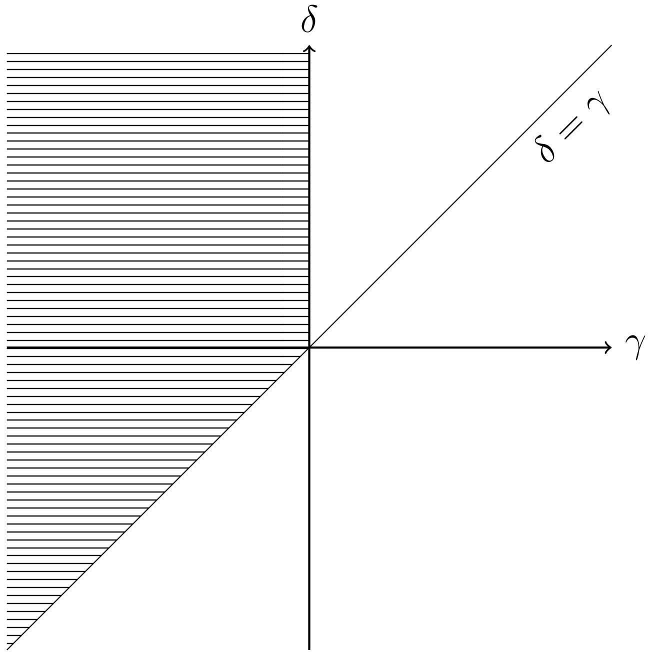

Рис. 2.4

Як наочно видно, теорема Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви узагальнює теорему І. Т. Кігурадзе в частині вимог на коефіцієнти рівняння, проте суттєво звужує множину значень параметрів у правих частинах (див. рис.2.4).

Для виконання умов нашої теореми 2.2, одержимо, що $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ мають належати множині:

$$\begin{cases} \alpha < \beta, \\ 2\alpha < \beta, \\ \gamma < \delta, \\ \gamma < \delta - \alpha. \end{cases}$$

Як бачимо, у теоремі 2.2 містяться такі ж умови на параметри у коефіцієнтах рівняння, що означає, що цей результат покриває теорему І. Т. Кігурадзе та теорему Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви в частині вимог на ліву частину рівняння (див. рис. 2.3).

Щодо вимог на праві частини, то розглянемо останні дві нерівності при $\alpha > 0$ і $\alpha < 0$.

Якщо $\alpha < 0$, то отримаємо, що

$$\begin{cases} \gamma < \delta, \\ \gamma < \delta + |\alpha|. \end{cases}$$

У такому випадку вимоги на γ і δ дублюють відповідні вимоги (див. рис.2.5), зазначені у теоремі І. Т. Кігурадзе. Разом з тим, вони слабші, ніж у теоремі Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви (відсутня умова $\gamma < 0$).

Якщо ж $\alpha > 0$ (див. рис.2.6), то умови теореми І. Т. Кігурадзе не виконуються і її застосувати не можна. Разом з тим, при $\alpha > 0$ умови на параметри у правих частинах рівняння нашої теореми 2.2 слабші, ніж у теоремі Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, що також наочно ілюструє малюнок.

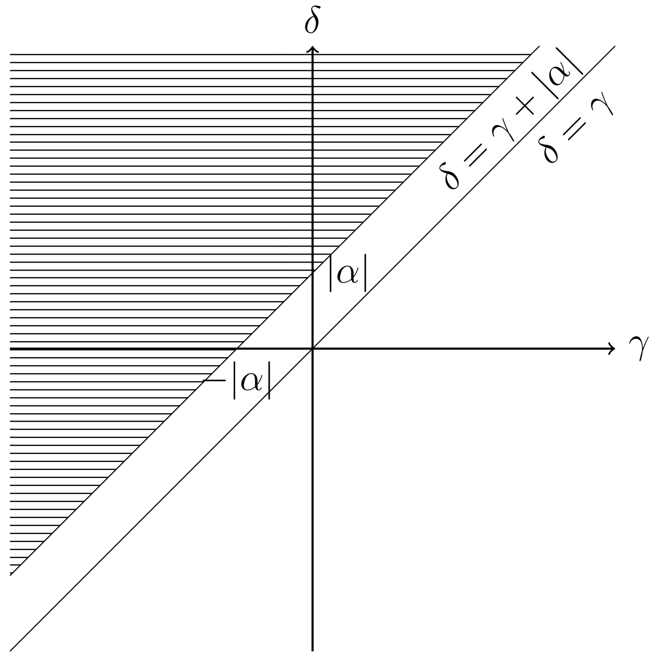

Рис. 2.5: $\alpha > 0$

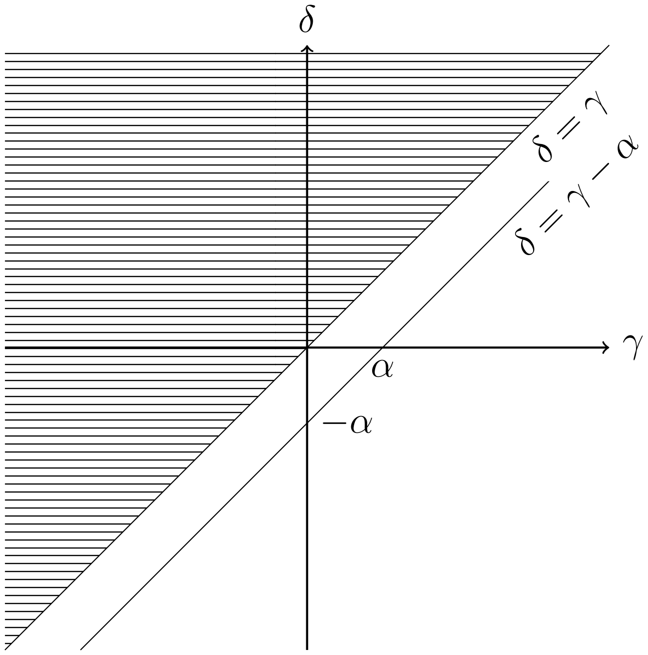

Рис. 2.6: $\alpha < 0$

З наведеного вище випливає, що наша теорема 2.2 містить вимоги на ліві частини задач, такі ж як у теоремі Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви, а тому слабші, ніж у теоремі І. Т. Кігурадзе. Зокрема, в нашому випадку допускаються додатні значення параметра α, чого немає у І. Т. Кігурадзе. Водночас у теоремі 2.2 узагальнені вимоги на праві частини задач (при $\alpha > 0$ вони такі ж, як у теоремі І. Т. Кігурадзе), що не вдалося зробити у теоремі Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви. Таким чином, теорема 2.2 є узагальненням двох важливих відомих результатів.

2.2. Системи диференціальних рівнянь високого порядку

Розглянемо на скінченному інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$ систему $m \in \mathbb{N}$ лінійних диференціальних рівнянь r-го порядку

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \ldots + A_0(t)y(t) = f(t) \tag{2.51}$$

із загальними неоднорідними крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) = c_j, \qquad j \in \overline{1,r}, \tag{2.52}$$

де лінійні неперервні оператори

$$B_j : C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m, \qquad j \in \overline{1,r},$$

матриці-функції $A_{j-1}(\cdot) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, вектор-функція $f(\cdot) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^m)$, а вектори $c_j \in \mathbb{C}^m$.

Під розв'язком системи диференціальних рівнянь (2.51) розуміється вектор-функція $y(\cdot) \in W_1^r([a,b];\mathbb{C}^m)$, яка має абсолютно неперервну $r-1$ похідну і задовольняє векторне рівняння (2.51) майже скрізь. Неоднорідні крайові умови (2.52) коректно визначені на розв'язках системи (2.51) і охоплюють усі класичні види крайових умов. Крайова задача (2.51)–(2.52) є фредгольмовою з нульовим індексом. Тому для однозначної скрізь розв'язності цієї задачі необхідно і достатньо, щоб відповідна їй однорідна крайова задача мала лише тривіальний розв'язок.

Нехай поряд із задачею (2.51)–(2.52) задана послідовність неоднорідних крайових задач

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \ldots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n) \tag{2.53}$$

з крайовими умовами

$$B_j(n)y(\cdot,n) = c_j(n), \tag{2.54}$$

де $n \in \mathbb{N}$, матриці-функції $A_{j-1}(\cdot,n)$, оператори $B_j(n)$, вектор-функція $f(\cdot,n)$ і вектори $c_j(n)$ задовольняють наведеним вище умовам для задачі (2.51)–(2.52).

Для випадку $r \geq 2$ теорему І. Т. Кігурадзе можна сформулювати наступним чином:

Теорема (І. Т. Кігурадзе) Нехай виконані наступні умови

(0) *Однорідна гранична крайова задача* (2.51)–(2.52) *має лише тривіальний розв'язок;*

(I') $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_\infty \to 0;$

(II') $\|R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 = O(1);$

(III') $B_j(n)y \to B_j y, \quad y \in C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m);$

Тоді для достатньо великих n *задачі* (2.53)–(2.54) *однозначно розв'язні. Якщо, крім того,*

(IV') $c_j(n) \to c_j;$

(V') $\|R^{\vee}_F(\cdot,n)\|_\infty \to 0,$

то єдині розв'язки крайових задач (2.51)–(2.52) *і* (2.53)–(2.54) *задовольняють співвідношення*

$$\|y^{(j-1)}(\cdot) - y^{(j-1)}(\cdot, n)\|_\infty \to 0. \tag{2.55}$$

Сформулюємо аналог теореми 2.2 для задач (2.51)–(2.52) і (2.53)–(2.54).

Теорема 2.4 *Нехай*

(0) *Однорідна крайова задача* (2.51)–(2.52) *має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot, n)\|_\infty \to 0$;

(II) $\|R_{A_{r-1}}(\cdot, n) R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot, n)\|_1 \to 0$;

(III) $B_1(n)y \to B_1 y, \quad y(\cdot) \in C^{(r-1)}([a, b], \mathbb{C}^m)$.

Тоді для достатньо великих n задачі (2.53)–(2.54) *однозначно розв'язні. Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задачі*

(IV) $c_j(n) \to c_j(0)$;

(V) $\|R^{\vee}_F(\cdot, n)\|_\infty \to 0$;

(VI) $\|R_{A_{r-1}}(\cdot, n) R^{\vee}_F(\cdot, n)\|_1 \to 0$,

то єдині розв'язки задач (2.51)–(2.52) *і* (2.53)–(2.54) *задовольняють граничну властивість* (2.55)

Доведення теореми 2.4. Диференціальні рівняння (2.51) і (2.53) порядку $r \geq 2$ зводяться до системи $m' = rm$ диференціальних рівнянь першого порядку, якщо покласти

$$x(\cdot, n) := (y(\cdot, n), y'(\cdot, n), \dots, y^{(r-1)}(\cdot, n)),$$

$$\widetilde{f}(\cdot,n) := (0,\dots,0,f(\cdot,n)) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{rm}),$$

а блочну матрицю-функцію $\widetilde{A}_0(\cdot,n)$ визначити рівністю

$$\widetilde{A}_0(\cdot,n) := \begin{bmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \dots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \dots & I_m \\ -A_0(\cdot,n) & -A_1(\cdot,n) & -A_2(\cdot,n) & \dots & -A_{r-1}(\cdot,n) \end{bmatrix}. \tag{2.56}$$

Кожен з операторів $B_j(n)$ в крайових умовах (2.52) і (2.54) допускає однозначне представлення [50]

$$B_j(n)y = \sum_{l=1}^{r-1} \alpha_{j,l}(n)y^{(l-1)}(a) + \int_a^b [d\Phi_j(t,n)]\, y^{(r-1)}(t), \tag{2.57}$$

де числові матриці $\alpha_{j,l}(n) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $(m\times m)$-матриці-функції $\Phi_j(\cdot,n)$ мають обмежену варіацію на $[a,b]$, неперервні зліва на інтервалі (a,b) і $\Phi_j(a,n) = 0_m$, а інтеграл в (2.57) розуміється як інтеграл Рімана-Стільтьєса.

Визначимо, виходячи з формули (2.57), r^2 лінійних операторів

$$B_{j,l}(n) : C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m,$$

припускаючи для $j,l \in \overline{1,r}$:

$$B_{j,l}(n)y := \alpha_{j,l}(n)y^{(l-1)}, \quad l \in \overline{1,r-1}, \tag{2.58}$$

$$B_{j,r}(n)y := \int_a^b [d\Phi_j(t,n)]\, y^{(r-1)}(t). \tag{2.59}$$

Визначимо тепер оператори $\widetilde{B}_1(n)$, поклавши

$$\widetilde{B}(n) := \begin{bmatrix} B_{1,1}(n) & \dots & B_{1,r}(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,1}(n) & \dots & B_{r,r}(n) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{c}(n) := (c_1(n), \dots, c_r(n)) \in \mathbb{C}^{rm}. \tag{2.60}$$

Лема 2.8. (Г. О. Чеханова, [66]) *Неоднорідні крайові задачі* (2.51)–(2.52) *і* (2.53)–(2.54) *еквівалентні неоднорідним крайовим задачам для систем диференціальних рівнянь*

$$y'(t,n) + \widetilde{A}(t,n)y(t,n) = \widetilde{f}(t,n) \tag{2.61}$$

з крайовими умовами

$$\widetilde{B}(n)y = \widetilde{c}(n), \tag{2.62}$$

які задаються формулами (2.58), (2.59), (2.60).

З результатів роботи [66] також випливає

Лема 2.9. *Якщо для крайових задач виду* (2.51)–(2.52) *і* (2.53)–(2.54) *виконані умови теореми 2.1, то задачі виду* (2.61)–(2.62) *також задовольняють умови цієї теореми.*

Твердження теореми 2.2 випливають з лем 2.8 і 2.9 і вже доведеного твердження теореми для випадку $r = 1$. З теореми Ф.Рісса про необхідні і достатні умови слабкої збіжності лінійних неперервних функціоналів на просторі $C[a,b]$ випливає, що при виконанні умови (III) теореми 2.4

$$\alpha_{jk}(n) \to \alpha_{jk}, \quad V_a^b \Phi_j(\cdot; n) = O(1),$$

$$\Phi_j^{\vee}(t; n) \to \Phi_j^{\vee}(t), \quad t \in [a,b],$$

$$\Phi_j(b;n) \to \Phi_j(b), n \to \infty.$$

Звідси, в силу тої ж теореми, випливає, що

$$B_{jk}(n)y(\cdot, n) \to B_{jk}y, y \in C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m), j,k \in \overline{1,r},$$

з чого випливає, що оператори $B(n)$ сильно збігаються до B.

Виконання умов (I) і (V) теореми 2.2 випливає з умов (I) і (V) теореми 2.4.

Перевіримо тепер виконання умов (II) і (VI) теореми 2.2, врахувавши, що матриці

$$R_A(\cdot;n) = \begin{pmatrix} O_m & O_m & \dots & O_m & O_m \\ O_m & O_m & \dots & O_m & O_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -R_0(\cdot;n) & -R_1(\cdot;n) & \dots & -R_{r-2}(\cdot;n) & -R_{r-1}(\cdot;n) \end{pmatrix},$$

$$R_F(\cdot;n) = \begin{pmatrix} O_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_f(\cdot;n) & O_m & \dots & O_m \end{pmatrix}$$

$$R_A^{\vee}(\cdot;n) = \begin{pmatrix} O_m & O_m & \dots & O_m & O_m \\ O_m & O_m & \dots & O_m & O_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -R_0^{\vee}(\cdot;n) & -R_1^{\vee}(\cdot;n) & \dots & -R_{r-2}^{\vee}(\cdot;n) & -R_{r-1}^{\vee}(\cdot;n) \end{pmatrix},$$

$$R_F^{\vee}(\cdot;n) = \begin{pmatrix} O_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_f^{\vee}(\cdot;n) & O_m & \dots & O_m \end{pmatrix}$$

Матриця $R_A(\cdot;n)R_A^{\vee}(\cdot;n)$ має вигляд

$$R_A(\cdot;n)R_A^{\vee}(\cdot;n) =$$

$$= \begin{pmatrix} O_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{r-1}^{\vee}(\cdot;n)R_0(\cdot;n) & R_{r-1}^{\vee}(\cdot;n)R_1(\cdot;n) & \dots & R_{r-1}^{\vee}(\cdot;n)R_{r-1}(\cdot;n) \end{pmatrix}$$

А це означає, що з умови (II) теореми 2.4 випливає виконання умови (II) теореми 2.2.

Запишемо тепер матрицю $R_A(\cdot;n)R_F^{\vee}(\cdot;n)$:

$$R_A(\cdot;n)R_F^{\vee}(\cdot;n) = \begin{pmatrix} O_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{r-1}^{\vee}(\cdot;n)R_f(\cdot;n) & O_m & \dots & O_m \end{pmatrix},$$

де

$$R_{r-1}^{\vee}(\cdot;n)R_f(\cdot;n) = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^{m} r_{1s}^{\vee} r_{f_s} & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{s=1}^{m} r_{2s}^{\vee} r_{f_s} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{s=1}^{m} r_{ms}^{\vee} r_{f_s} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Враховуючи умову (VI) теореми 2.4, одержимо потрібний результат.

З нерівностей

$$\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 \leq \|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1 \cdot \|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_\infty,$$

$$\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R^{\vee}_{F}(\cdot,n)\|_1 \leq \|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1 \cdot \|R^{\vee}_{F}(\cdot,n)\|_\infty$$

маємо, що умови (II) и (VI) виконуються, якщо

$$\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1 \cdot \|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_\infty \to 0,$$
$$\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1 \cdot \|R^{\vee}_{F}(\cdot,n)\|_\infty \to 0.$$

Останні умови завідомо виконані, якщо $\|A_{r-1}(\cdot,n)\|_1 = O(1)$ і виконані умови (I) и (V) теореми 1.3. При цьому припущення, що

$$\|A_{j-1}(\cdot,n)\|_1 = O(1), \quad j \in \overline{1,r-1}$$

зайві.

Поряд з теоремою 2.4 справедлива

Теорема 2.5. *Нехай при* $n \to \infty$ *і* $j \in \overline{1,r}$ *виконані умови:*

(0) *Однорідна крайова задача* (2.51)–(2.52) *має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot;n)\|_\infty \to 0$;

(II) $\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot;n)R_{A_{j-1}}(\cdot;n)\|_1 \to 0$;

(III) $B_j(n)y \to B_j y, y \in C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m)$.

Тоді для достатньо великих n *задачі* (2.53)–(2.54) *однозначно розв'язні. Якщо, крім того, виконані умови на праві частини задачі*

(IV) $c_j(n) \to c_j$;

(V) $\|R_F^{\vee}(\cdot;n)\|_\infty \to 0$;

(VI) $\|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot;n)R_F(\cdot;n)\|_1 \to 0$,

то єдині розв'язки задач (2.51)–(2.52) *і* (2.53)–(2.54) *задовольняють гранічну рівність* (2.55).

Зокрема, умова (II) і (VI) теореми виконуються, якщо

$$\|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot;n)\|_\infty \|R_{A_{j-1}}(\cdot;n)\|_1 \to 0$$

$$\|R_{A_{r-1}}^{\vee}(\cdot;n)\|_1 \|R_F(\cdot;n)\|_\infty \to 0.$$

Доведення теореми 2.5. Як і при доведенні теореми 2.4 для отримання потрібного результату зведемо диференціальні рівняння (2.51) і (2.53) порядку $r \geq 2$ до системи $m' = rm$ диференціальних рівнянь першого порядку та перевіримо виконання умов теореми 2.3 в умовах теореми 2.5.

З теореми Ф.Рісса про необхідні і достатні умови слабкої збіжності лінійних неперервних функціоналів на просторі $C[a,b]$ випливає, що при виконанні умови (III) теореми 2.5

$$\alpha_{jk}(n) \to \alpha_{jk}, \quad V_a^b \Phi_j(\cdot;n) = O(1),$$

$$\Phi_j^{\vee}(t;n) \to \Phi_j^{\vee}(t), \quad t \in [a,b],$$

$$\Phi_j(b;n) \to \Phi_j(b), \quad n \to \infty.$$

Звідси, в силу тої ж теореми, випливає, що

$$B_{jk}(n)y \to B_{jk}y, y \in C^{(r-1)}([a,b];\mathbb{C}^m), j,k \in [r],$$

з чого слідує, що оператори $B(n)$ сильно збігаються до B.

Виконання умов (I) і (V) теореми 2.3 слідує з умов (I) і (V) теореми 2.5.

Перевіримо тепер виконання умов (II) і (VI) теореми 2.1, врахувавши вигляд матриць $R_A(\cdot;n)$ та $R_A^\vee(\cdot;n)$. Матриця $R_A^\vee(\cdot;n)R_A(\cdot;n)$ має вигляд

$$R_A^\vee(\cdot;n)R_A(\cdot;n) = \begin{pmatrix} O_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{r-1}^\vee R_0(\cdot;n) & R_{r-1}^\vee R_1(\cdot;n) & \dots & R_{r-1}^\vee R_{r-1}(\cdot;n) \end{pmatrix}$$

А це означає, що з умови (II) теореми 2.5 випливає виконання умови (II) теореми 2.3.

Запишемо тепер матрицю $R_A^\vee(\cdot;n)R_F(\cdot;n)$:

$$R_A^\vee(\cdot;n)R_F(\cdot;n) = \begin{pmatrix} O_m & O_m & \dots & O_m \\ O_m & O_m & \dots & O_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{r-1}^\vee(\cdot;n)R_f(\cdot;n) & O_m & \dots & O_m \end{pmatrix},$$

де

$$R_{r-1}^\vee(\cdot;n)R_f(\cdot;n) = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^m r_{1s}^\vee r_{f_s} & 0 & \dots & 0 \\ \sum_{s=1}^m r_{2s}^\vee r_{f_s} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{s=1}^m r_{ms}^\vee r_{f_s} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Враховуючи умову (VI) теореми 2.5, одержимо потрібний результат.

З нерівностей

$$\|R_{A_{r-1}}^\vee(\cdot,n)R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 \leq \|R_{A_{r-1}}^\vee(\cdot,n)\|_1 \cdot \|R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_\infty,$$

$$\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot,n)R_F(\cdot,n)\|_1 \le \|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1 \cdot \|R_F(\cdot,n)\|_\infty$$

маємо, що умови (II) и (VI) виконуються, якщо

$$\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1 \cdot \|R_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_\infty \to 0,$$
$$\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot,n)\|_1 \cdot \|R_F(\cdot,n)\|_\infty \to 0.$$

Останні умови завідомо виконані, якщо $\|A_{r-1}(\cdot,n)\|_1 = O(1)$ і виконані умови (I) и (V) теореми 1.3. При цьому припущення, що

$$\|A_{j-1}(\cdot,n)\|_1 = O(1), \quad j \in \overline{1,r-1}$$

зайві.

Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертаційної роботи одержано наступні основні результати:

1. Отримано узагальнення достатніх умов збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь першого порядку у рівномірній нормі.

2. Знайдено нові конструктивні достатні умови збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку r за нормою простору $C^{(r-1)}$.

3. Наведено приклад, що ілюструє співвідношення між теоремами 2.2, 2.3 цього розділу та теоремами, отриманими раніше І. Т. Кігурадзе та Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлецем, Н. В. Ревою.

РОЗДІЛ 3
БАГАТОТОЧКОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

3.1. Граничні теореми для систем диференціальних рівнянь

У цьому підрозділі за рахунок результатів попереднього розділу отримані результати для багатоточкових крайових задач.

Розглянемо систему m лінійних рівнянь порядку $r \geq 1$

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \cdots + A_0(t)y(t) = f(t), \tag{3.1}$$

з багатоточковими крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{r-1} \alpha_{i,j}^{(k)} y^{(k-1)}(t_i) = 0, \quad j \in \overline{1,r}, \tag{3.2}$$

де матриці-функції $A_{j-1}(\cdot) \in L_1([a,b], \mathbb{C}^{m\times m})$ вектор-функції $f(\cdot) \in L_1([a,b], \mathbb{C}^m)$, точки $t_i \in [a,b]$, матриці $\alpha_{i,j}^{(k-1)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $i \in \overline{1,p}$, а вектори $c_j(n) \in \mathbb{C}^m$.

Розв'язки рівняння (3.1) мають абсолютно неперервну похідну порядку $r-1$ і задовольняють рівність (3.2) майже скрізь.

Поряд із задачею (3.1)–(3.2) розглянемо послідовність неоднорідних багаточкових крайових задач для системи диференціальних рівнянь порядку r вигляду

$$y^{(r)}(t;n) + A_{r-1}(t;n)y^{(r-1)}(t;n) + \cdots + A_0(t)y(t;n) = f(t;n), \tag{3.3}$$

$$B_j(n)y(\cdot;n) = \sum_{i=1}^{p+q} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) y^{(k-1)}(t_i(n);n) = c_j(n), \quad j \in \overline{1,r}, \tag{3.4}$$

де матриці-функції $A_{j-1}(\cdot;n)$, вектор-функції $f(\cdot;n)$, точки $t_i \in [a,b]$, матриці $\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n)$, вектори $c_j(n)$ — ті ж, що і в задачі (3.1)–(3.2), $i \in \overline{1,p+q}$.

Зазначимо, що в граничній задачі (3.1) крайова умова ставиться лише для p точок $t_1,\ldots,t_p$.

Теорема 3.1. *Нехай при* $n \to \infty$ *та* $k \in \overline{1,r}$, $\quad j \in \overline{1,r}$ *виконуються умови:*

(0) *Однорідна гранична крайова задача* (3.1)–(3.2) *має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot;n)\|_{\infty} \to 0$;

(II) $\|R_{A_{r-1}}(\cdot;n)R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot;n)\|_1 \to 0$;

(III) $\|\sum\limits_{j=1}^{r} R_{A_{j-1}}(\cdot;n)R^{\vee}_{f_{j-1}}(\cdot;n)\|_1 \to 0$;

(IV) $\|R^{\vee}_{f_{j-1}}(\cdot;n)\|_{\infty} \to 0$;

(V) $t_i(n) \to t_i, \quad \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) \to \alpha_{i,j}^{(k-1)}, \quad i \in \overline{1,p}$;

(VI) $\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) \to 0, \quad i \in \overline{p+1,p+q}$;

(VII) $c_j(n) \to c_j$.

Тоді для достатньо великих значень n *розв'язки* $y(\cdot;n)$ *задач* (3.3)– (3.4) *однозначно визначені і для них виконується граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot;n) - y(\cdot)\|_{(r-1)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.5}$$

Для доведення цієї теореми сформулюємо наступний результат

Лема 3.1. *Якщо для задачі (3.3) – (3.4) при* $n \to \infty$ *та* $k,j \in \overline{1,r}$ *виконуються умови:*

1. $t_i(n) \to t_i, \quad \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) \to \alpha_{i,j}^{(k-1)}, \quad i \in \overline{1,p};$

2. $\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) \to 0, \quad i \in \overline{p+1, p+q},$

то оператори

$$B_j(n) \xrightarrow{s} B_j, \quad j \in \overline{1,r}.$$

Доведення леми 3.1. Для кожного $j \in \overline{1,r}$ та $y(\cdot) \in C^{(r-1)}([a,b], \mathbb{C}^m)$ маємо нерівності

$$\|B_j(n)y(\cdot;n) - B_jy(\cdot)\| \leq$$

$$\leq \| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) y^{(k-1)}(t_i(n);n) - \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)} y^{(k-1)}(t_i)\| +$$

$$+\| \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) y^{(k-1)}(t_i(n);n) - \sum_{i=p+1}^{p+q} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)} y^{(k-1)}(t_i)\|.$$

Розглянемо спершу доданки при $i \in \overline{1,p}$:

$$\| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) y^{(k-1)}(t_i(n);n) - \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)} y^{(k-1)}(t_i)\| \leq$$

$$\leq \| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) y^{(k-1)}(t_i(n);n) - \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)} y^{(k-1)}(t_i(n);n)\| +$$

$$+\| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)} y^{(k-1)}(t_i(n);n) - \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)} y^{(k-1)}(t_i)\| \leq$$

$$\leq \| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \left(\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) - \alpha_{i,j}^{(k-1)} \right) y^{(k-1)}(t_i(n);n)\| +$$

$$+\| \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)} \left(y^{(k-1)}(t_i(n);n) - y^{(k-1)}(t_i) \right) \| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{r} \|\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) - \alpha_{i,j}^{(k-1)}\| \cdot \|y^{(k-1)}(t_i(n);n)\| +$$

$$+\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}\|\alpha_{i,j}^{(k-1)}\|\cdot\|y^{(k-1)}(t_i(n);n)-y^{(k-1)}(t_i)\|\to 0+.$$

В останній нерівності врахована умова 1 леми 3.1 та той факт, що вектор-функція $y(\cdot)$ та їх похідні неперервні на $[a,b]$.

Доданки при $i\in\overline{p+1,p+q}$:

$$\|\sum_{i=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{r}\alpha_{i,j}^{(k-1)}(n)y^{(k-1)}(t_i(n);n)-\sum_{i=p+1}^{p+q}\sum_{k=1}^{r}\alpha_{i,j}^{(k-1)}y^{(k-1)}(t_i)\|\to 0$$

завдяки умові 2 даної леми.

Отже, з попередніх міркувань, випливає співвідношення

$$B_j(n)\xrightarrow{s}B_j.$$

Лема 3.1 доведена.

Доведення теореми 3.1. З леми 3.1 випливає, що якщо виконані умови (V)–(VII), то $B_j(n)\xrightarrow{s}B_j$, тобто умова (III), а врахувавши (I)–(IV), то і всі умови теореми 2.4.

Одним з основних результатів цього підрозділу є специфікація теореми 2.5 для розв'язків задач (3.1)–(3.2) (3.3)–(3.4).

Теорема 3.2. *Нехай при* $n\to\infty$ *та* $k\in\overline{1,r},\quad j\in\overline{1,r}$ *виконуються умови:*

(O) *Однорідна крайова задача* (3.1)–(3.2) *має лише тривіальний розв'язок;*

(I) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot;n)\|_\infty\to 0;$

(II) $\|R^{\vee}_{A_{r-1}}(\cdot;n)R_{A_{j-1}}(\cdot;n)\|_1\to 0;$

(III) $\|\sum\limits_{j=1}^{r}R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot;n)R_{f_{j-1}}(\cdot;n)\|_1\to 0;$

(IV) $\|R^{\vee}_{f_{j-1}}(\cdot;n)\|_\infty \to 0$;

(V) $t_i(n) \to t_i, \quad \alpha^{(k-1)}_{i,j}(n) \to \alpha^{(k-1)}_{i,j}, \quad i \in \overline{1,p}$;

(VI) $\alpha^{(k-1)}_{i,j}(n) \to 0, \quad i \in \overline{p+1, p+q}$;

(VII) $c_j(n) \to c_j$.

Тоді для достатньо великих значень n *розв'язки* $y(\cdot;n)$ *задач* (3.3)– (3.4) *однозначно визначені і для них виконується граничне співвідношення* (3.5)*.*

Доведення теореми 3.2. З леми 3.1 випливає, що якщо виконані умови (V)–(VII), то $B_j(n) \xrightarrow{s} B_j$, тобто умова (III), а врахувавши (I)–(IV), то і всі умови теореми 2.5.

Отримані тут результати деталізують вимоги на граничні оператори, наведені у теоремах другого розділу.

3.2. Збіжність розв'язків багатоточкових крайових задач

Розглянемо систему m лінійних рівнянь порядку $r \geq 2$

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \cdots + A_0(t)y(t) = f(t), \tag{3.6}$$

з багатоточковими крайовими умовами

$$By(\cdot) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{l=0}^{r-1} \alpha_i^{(l)} y^{(l-1)}(t_i) = 0, \quad i \in \overline{1,r}, \tag{3.7}$$

де вектор-функція $y(\cdot) \in (C^{(r-1)})^m$ шукана, а усі матриці-функції $A_{j-1}(\cdot) \in L_1^{m\times m}$ і вектор-функція $f(\cdot) \in L_1^m$ задані, точки $t_i \in [a,b]$, матриці $\alpha_i^{(l)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$.

Розглянемо послідовність систем m лінійних диференціальних рівнянь порядку r:

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \ldots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n). \tag{3.8}$$

Для кожного n пов'яжемо з системою (3.8) багатоточкову крайову умову

$$B(n)y(\cdot;n) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=1}^{q_i(n)}\sum_{l=0}^{r-1} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) y^{(l)}(t_{i,k}(n),n) = c(n), \tag{3.9}$$

де точки $t_{j,}(k) \in [a,b]$, числа $q_i(n)$ залежать від n, матриці $\alpha_{i,k}^{(l)}(n) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, та вектор $c(n) \in \mathbb{C}^m$ є заданими.

Використання у крайовій умові повторної суми за індексами i і k зумовлено подальшими припущеннями щодо поведінки точок $t_{i,k}(n)$ при $n \to \infty$ у залежності від значень параметра i. Вимагатиметься, щоб для кожного фіксованого $i \in \overline{1,p}$ усі точки $t_{i,k}(n)$ мали спільну границю t_i при $n \to \infty$, а для точок $t_{0,k}(n)$ аналогічне не вимагається.

Зауважимо, що така постановка задачі дозволить нам узагальнити теорему 1.4 В. А. Михайлеця та Г. О. Чеханової на випадок, коли кожна серія містить більше, ніж одну точку.

Крайовій задачі (3.8)–(3.9) при кожному $n \in \mathbb{N}$ відповідає лінійний обмежений оператор

$$(L(n), B(n)) : (C^{(r-1)})^m \to (L_1)^m \times \mathbb{C}^m.$$

У граничному випадку цей обмежений оператор відповідає крайовій задачі (3.6)–(3.7). Як було доведено в [9], він є фредгольмовим, а тому для однозначної розв'язності задачі (3.8)–(3.9) неодбхідно і достатньо, щоб однорідна гранична крайова задача (3.6)–(3.7) мала лише тривіальний розв'язок. Знайдемо умови, за яких це виконується.

Нехай $R(t, a)$ резольвента рівняння (3.6), тобто розв'язок рівняння (3.6), який набуває значення I_{rm} у точці $t = a$. У нашому випадку $R(t, a)$ - блочна матриця розмірності $rm \times rm$. Позначимо через

$$R_0(t, a), R_1(t, a), ..., R_{(r-1)}(t, a)$$

елементи її першого рядка. Як відомо [13], розв'язок рівняння (3.6), який приймає значення $Y_a = (y(a), y'(a), ..., y^{(r-1)}(a))$ при $t = a$ задається формулою

$$y(t) = \sum_{i=0}^{r-1} R_i(t_j, a) y^{(i)}(a). \tag{3.10}$$

Підставивши (3.10) у (3.7), отримаємо

$$C \cdot Y_a = 0$$

де

$$C = \begin{pmatrix} \Sigma_{j=1}^{p}\Sigma_{i=0}^{(r-1)}\alpha_j^{(i)}R_0^{(i)}(t_j,a) & \ldots & \Sigma_{j=1}^{p}\Sigma_{i=0}^{(r-1)}\alpha_j^{(i)}R_{r-1}^{(i)}(t_j,a). \end{pmatrix}$$

Звідси випливає

Твердження. *Гранична однорідна крайова задача*

$$Ly(t) = 0, \quad a \leq t \leq b, \qquad By(\cdot) = 0 \tag{3.11}$$

має лише тривіальний розв'язок, якщо

$$detC \neq 0. \tag{3.12}$$

Теорема 3.3. *Нехай при $n \to \infty$ і $j \in \overline{1,r}$ виконуються умови на*

(a) *коефіцієнти системи*

(1) $\|R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_{\infty} \to 0;$

(2) $\|R_{A_{r-1}}(\cdot,n)R^{\vee}_{A_{j-1}}(\cdot,n)\|_1 \to 0;$

(b) *праві частини рівнянь*

(3) $\|f(\cdot,n)\|_1 = O(1), \quad \|f^{\vee}(\cdot,n) - f^{\vee}(\cdot)\|_{\infty} \to 0;$

(c) *граничні оператори*

(4) $c(n) \to c;$

(5) $t_{i,k}(n) \to t_i$ *для усіх* $i \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,q_i}$;

(6) $\sum\limits_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) \to \alpha_i^{(l)}$ для усіх $i \in \overline{1,p}$, $l \in \overline{0,r-1}$;

(7) $\sum\limits_{k=1}^{q_i(n)} \|\alpha_{i,k}^{(l)}(n)\| \cdot |t_{i,k}(n) - t_i| \to 0$ для усіх $i \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,q_i}$, $l \in \overline{0,r-1}$;

(8) $\sum\limits_{k=1}^{q_i(n)} \|\alpha_{0,k}^{(l)}(n)\| \to 0$, для усіх $k \in \overline{1,q_0}$, $l \in \overline{0,r-1}$.

Тоді для достатньо великих n задача (3.8), (3.9) *має єдиний розв'язок і він задовольняє граничне співвідношення*

$$\|y(\cdot,n) - y(\cdot)\|_{(r-1)} \to 0 \quad n \to \infty, \tag{3.13}$$

Доведення теореми 3.3. Досліджувана нами задача з крайовою умовою (3.9) є окремим випадком загальних крайових задач (2.51)–(2.52) Для них в роботі [80] було встановлене

Твердження. *Нехай при $n \to \infty$ і $j \in \overline{1,r}$ виконуються умови теореми 3.3 на коефіцієнти та праві частини рівнянь, а також умова на граничні оператори*

(f) $B_j(n)y \to B_jy, \quad y \in C^{(r-1)}\left([a,b];\mathbb{C}^m\right), \quad j \in \overline{1,r}.$

Тоді для достатньо великих n задача (2.51)–(2.52) має єдиний розв'язок і він задовольняє граничне співвідношення (3.13).

Для доведення основної теореми достатньо показати, що умова (f) твердження є наслідком умов (6)–(9) теореми 3.3.

У припущенні, що умови (6) – (9) виконуються, доведемо властивість (f). Для довільної вектор-функції $y \in (C^{(r-1)})^m$ і достатньо великого n запишемо:

$$\|B(n)y - By\| =$$

$$= \left\| \sum_{i=0}^{p} \sum_{k=1}^{q_i(n)} \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) y^{(l)}(t_{i,k}(n)) - \sum_{i=1}^{p} \sum_{l=0}^{r-1} \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{q_0(n)} \sum_{l=0}^{r-1} \|\alpha_{0,k}^{(l)}(n)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(n))\| +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{l=0}^{r-1} \left\| \sum_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) y^{(l)}(t_{i,k}(n)) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \right\| \tag{3.14}$$

Тут на підставі умови (6) маємо:

$$\sum_{k=1}^{q_0(n)} \sum_{l=0}^{r-1} \|\alpha_{0,k}^{(l)}(n)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{0,k}(n))\| \leq \sum_{k=1}^{q_0(n)} r \cdot \|\alpha_{0,k}^{(l)}(n)\| \cdot \|y\|_{(r)} \to 0 \tag{3.15}$$

для усіх допустимих значень індексів k і l. Ця і всі інші границі у доведенні розглядаються за умови, що $n \to \infty$. Дослідимо останній доданок в (3.14). Запишемо:

$$\left\| \sum_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) y^{(l)}(t_{i,k}(n)) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \right\| =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) y^{(l)}(t_{i,k}(n)) - \sum_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) y^{(l)}(t_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) y^{(l)}(t_i) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) \cdot \Big(y^{(l)}(t_{i,k}(n)) - y^{(l)}(t_i) \Big) \right\| +$$

$$+ \left\| \left(\sum_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) - \alpha_i^{(l)} \right) \cdot y^{(l)}(t_i) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{q_i(n)} \|\alpha_{i,k}^{(l)}(n)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,k}(n)) - y^{(l)}(t_i)\| +$$
$$+ \left\| \sum_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) - \alpha_i^{(l)} \right\| \cdot \|y\|_{(r)}.$$

Тут на підставі умови (7) маємо:

$$\left\| \sum_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) - \alpha_i^{(l)} \right\| \cdot \|y\|_{(r)} \to 0. \tag{3.16}$$

Окрім того,

$$\sum_{k=1}^{q_i(n)} \|\alpha_{i,k}^{(l)}(n)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,k}(n)) - y^{(l)}(t_i)\| \to 0 \tag{3.17}$$

Це випливає з теореми Лагранжа і умови (8):

$$\sum_{k=1}^{q_i(n)} \|\alpha_{i,k}^{(l)}(n)\| \cdot \|y^{(l)}(t_{i,k}(n)) - y^{(l)}(t_i)\,\| \leq$$
$$\leq \|y\|_{(r)} \sum_{k=1}^{q_i(n)} \|\alpha_{i,k}^{(l)}(n)\| \cdot |t_{i,k}(n) - t_i| \to 0.$$

Із формул (3.2), (3.16), (3.17) негайно випливає, що

$$\left\| \sum_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) y^{(l)}(t_{i,k}(n)) - \alpha_i^{(l)} y^{(l)}(t_i) \right\| \to 0 \tag{3.18}$$

Тепер властивість (f) є прямим наслідком формул (3.14), (3.15) і (3.18). Теорему доведено.

Зауваження. *Якщо числа q_i не залежать від n, то умови на граничні оператори мають вигляд:*

(4) $c(n) \to c$;

(5) $t_{i,k}(n) \to t_i$ для усіх $i \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,q_i}$;

(6) $\sum\limits_{k=1}^{q_i(n)} \alpha_{i,k}^{(l)}(n) \to \alpha_i^{(l)}$ для усіх $i \in \overline{1,p}$, $l \in \overline{0,r-1}$;

(7) $\|\alpha_{i,k}^{(l)}(n)\| \cdot |t_{i,k}(n) - t_i| \to 0$ для усіх $i \in \overline{1,p}$, $k \in \overline{1,q_i}$, $l \in \overline{0,r-1}$;

(8) $\|\alpha_{0,k}^{(l)}(n)\| \to 0$, для усіх $k \in \overline{1,q_0}$, $l \in \overline{0,r-1}$.

3.3. Граничні теореми для функцій Гріна

Нехай $a = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ — розбиття скінченного інтервалу $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Розглянемо однорідну багатоточкову крайову задачу для векторного лінійного диференціального рівняння порядку $r \geq 2$:

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \ldots.. + A_0(t)y(t) = 0, \tag{3.19}$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} \beta_{j,i}(l)y^{(j-1)}(t_l) = 0, \quad i \in \overline{1,k}, \tag{3.20}$$

де $(m \times m)$-матриці-функції $A_{j-1}(\cdot) \in (C^{(p-1)})^m$, і вектор-функція $f(\cdot) \in (C^{(p-1)})^m$, матриці $\beta_{j,i}(l) \in \mathbb{C}^{m\times m}, \quad l \in \overline{1,k}$, $i,j \in \overline{1,r}$.

Розв'язком задачі (3.19)–(3.20) є вектор-функція $y(\cdot)$, що має абсолютно неперервну похідну порядку $p+r-1$ і задовольняє диференціальне рівняння (3.19) майже скрізь та крайові умови (3.20).

Поряд із задачею (3.19)–(3.20) розглядається послідовність напіводнорідних багатоточкових крайових задач для векторного лінійного диференціального рівняння порядку $r \geq 2$:

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \ldots.. + A_0(t,n)y(t,n) = f(t,n), \tag{3.21}$$

$$\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{r} \beta_{j,i}(l,n)y^{(j-1)}(t_l,n) = 0, \quad i \in \overline{1,k}. \tag{3.22}$$

Теорема 3.4. *Нехай при $n \to \infty$ та $j \in \overline{1,r}$ для деякого $p \in \mathbb{N}$ виконуються умови:*

(1) $\quad \|A_{j-1}(\cdot;n) - A_{j-1}(\cdot)\|_{(p-1)} \to 0;$

(2) $\quad \beta_{j,i}(l;n) \to \beta_{j,i}(l), \quad i \in \overline{1,r}, \quad l \in \overline{1,k}.$

Тоді при достатньо великих значеннях n існують нормовані функції Гріна $G(t, s; n)$ задач (3.21)-(3.22) і *на смугах $(t_{l-1}, t_l) \times (a, b)$ виконується*

$$\|G(\cdot, \cdot; n) - G(\cdot, \cdot)\|_{(p)} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{3.23}$$

Як відомо, розв'язок розглядуваної задачі допускає інтегральне представлення вигляду

$$y(t, n) = \int_a^b G(t, s; n) f(s; n) ds, \tag{3.24}$$

де $G(t, s; n)$- матриця Гріна однорідної крайової задачі (3.21)–(3.22). Формула визначає матрицю Гріна неоднозначно. У роботі [67] визначено нормовану матрицю Гріна для задач

$$y'(t, 0) = \widehat{A}(t) y(t) \tag{3.25}$$

з крайовими умовами

$$\sum_{l=1}^{k} B_l \widehat{y}(t_l) = 0, \tag{3.26}$$

та доведено, що вона допускає зображення у вигляді

$$G(t, s; n) = \begin{cases} -Y(t; n)[B_1(n) + \sum\limits_{l=2}^{k} B_l(n) y(t_l; n)]^{-1} Z(s; n) = \\ \qquad = S_n(t, s) + X_n(t, s), \quad t \leqslant s, \\ Y(t; n) Y^{-1}(s; n) - \\ \qquad -Y(t; n)[B_1(n) + \sum\limits_{l=2}^{k} B_l(n) y(t_l; n)]^{-1} Z(s; n) = \\ \qquad = S_n(t, s), \quad s < t. \end{cases} \tag{3.27}$$

де

$$Z(S) = \sum_{l: t_l \leq s} B_l Y(t_l) Y^{-1}(S),$$

а матриця-функція $Y(\cdot)-$ матрицант лінійного диференціального рівняння

$$Y'(t) = \widehat{A}(t)Y(t), \quad t \in (a,b) \tag{3.28}$$

з початковою умовою в деякцій фіксованій точці

$$Y(t_0) = I_p, \quad t_0 \in (a,b) \tag{3.29}$$

Формула (3.27) визначає матрицю Гріна однозначно . Як доведено нами раніше, задачі (3.21)–(3.22) і однорідна гранична крайова задача (3.19)–(3.20) еквівалентна задачам (2.61)–(2.62) і однорідній граничній крайовій задачі для системи першого порядку відповідного вигляду.

Доведемо наступну

Лема 3.2. *Нехай однорідна крайова задача (3.19)–(3.20) має лише тривіальний розв'язок. Тоді існує нормована функція Гріна $G(t,s;n)$ напіводнорідної багатоточкової крайової задачі вигляду (3.21) – (3.22), та при цьому*

$$G(t,s;n) = G_{1,r}(t,s;n),$$

де $G_{1,p}(t,s;n)$ — відповідний елемент матриці Гріна

$$\widehat{G}(t,s;n) = (G_{j,i}(t,s;n))_{j,i=1}^{p}$$

напіводнорідної багатоточкової крайової задачі вигляду (2.61)-(2.62).

Доведення леми 3.2. Враховуючи лему 2.8, умова існування лише тривіального розв'язку задачі (3.19)–(3.20) рівносильна тому, що однорідна крайова задача (2.63)–(2.64) також буде мати лише тривіальний розв'язок. А з цього випливає, що для багатоточкової крайової задачі (2.61)–(2.62) існує матриця Гріна $\widehat{G}(t,s;n) = (G_{j,i}(t,s;n))_{j,i=1}^{p}$, за допомогою якої розв'язок напіводнорідної багатоточкової крайової задачі (2.61)–(2.62) може бути представлений у вигляді

$$\widehat{y}(t;n) = \int_a^b \widehat{G}(t,s;n)\widehat{f}(s;n)ds,\ t \in (a,b)$$
$$n \in \mathbb{N}, \qquad \widehat{f}(\cdot;n) \in (C^{(n-1)})^p. \tag{3.30}$$

Враховуючи (2.56), рівність (3.30) можна записати у вигляді такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} y(t;n) = \int_a^b G_{1,r}(t,s;n)f(s;n)ds, \\ y'(t;n) = \int_a^b G_{2,r}(t,s;n)f(s;n)ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{(r-2)}(t;n) = \int_a^b G_{r-1,r}(t,s;n)f(s;n)ds, \\ y^{(r-1)}(t;n) = \int_a^b G_{r,r}(t,s;n)f(s;n)ds, \end{cases} \tag{3.31}$$

де $y(t;n)$ — єдиний розв'язок напіводнорідної багатоточкової крайової задачі (3.21)–(3.22).

Отже, врахувавши представлення (2.53),(2.54),(2.58) та систему (3.31) отримуємо, що

$$G(t,s;n) = G_{1,r}(t,s;n).$$

Для нормованих матриць Гріна багатоточкових крайових задач для системи диференціальних рівнянь першого порядку виконується

Теорема 3.5. *Нехай*

$$\det[B_1 + \sum_{l=2}^{k} B_l Y(t_l)] \neq 0$$

і при $n \to \infty$ виконуються наступні умови:

(1) $\quad \|\widehat{A}(t;n) - \widehat{A}(t)\|_{(p-1)} \to 0;$

(2) $\quad \|B_l(n) - B_l\| \to 0, \quad l = \overline{1,p}.$

Тоді для достатньо великих n *існують нормовані матриці Гріна задач* (2.61)-(2.62), *для яких на смугах* $(t_{l-1}, t_l) \times (a, b)$ *виконується*

$$\|\widehat{G}(\cdot,\cdot;n) - \widehat{G}(\cdot,\cdot)\|_{(p)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.32}$$

Для доведення теореми 3.3 нам знадобиться така

Лема 3.3. *Нехай при* $n \to \infty$ *виконуються умови 1) та 2) теореми 3.3, тоді для достатньо великих значеннях* n

$$\det[B_1(n) + \sum_{l=2}^{k} B_l(n) y(t_l;n)] \neq 0.$$

Доведення леми 3.3. З умови 1) теореми 3.3 та теореми про гомеоморфізми [66] випливає, що

$$\|Y(\cdot;n) - Y(\cdot)\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.33}$$

З умови 2) теореми 3.3 маємо:

$$\begin{aligned} &\|\sum_{l=1}^{k} B_l(n) Y(t_l;n) - \sum_{l=1}^{k} B_l Y(t_l)\|_\infty \leq \\ &\quad \leq \sum_{l=1}^{k} \|B_l(n) - B_l\| \cdot \|Y(t_l;n)\|_\infty + \\ &\qquad + \sum_{l=1}^{k} \|B_l\| \cdot \|Y(t_l;n) - Y(t_l)\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Оскільки задача (3.25) – (3.26) має лише тривіальний розв'язок, то

$$\det[B_1(0) + \sum_{l=2}^{k} B_l(0)Y(t_l;0)] \neq 0,$$

тоді з останньої оцінки випливає, що в деякому околі точки нескінченності функція

$$\det[B_1(n) + \sum_{l=2}^{k} B_l(n)Y(t_l;n)] \neq 0. \tag{3.34}$$

Доведення теореми 3.3. Оскільки матриця Гріна $G(t,s)$ розривна в точках $s = t_l$, коректно буде досліджувати її неперервність за параметром n на кожній смузі $(t_{l-1}, t_l) \times (a,b)$.

Введемо наступні позначення, скориставшись виглядом нормованої матриці Гріна, яка задається формулою (1.30):

$$G(t,s;n) = \begin{cases} -Y(t;n)[B_1(n) + \sum\limits_{l=2}^{k} B_l(n)y(t_l;n)]^{-1}Z(s;n) = \\ \qquad = S_n(t,s) + X_n(t,s), \quad t \leqslant s, \\ Y(t;n)Y^{-1}(s;n) - \\ \qquad -Y(t;n)[B_1(n) + \sum\limits_{l=2}^{k} B_l(n)y(t_l;n)]^{-1}Z(s;n) = \\ \qquad = S_k(t,s), \quad s < t. \end{cases}$$

та

$$G(t,s) = \begin{cases} -Y(t)[B_1 + \sum\limits_{l=2}^{k} B_l y(t_l)]^{-1}Z(s) = \\ \qquad = S(t,s) + X(t,s), \quad t \leqslant s, \\ Y(t)Y^{-1}(s) - \\ \qquad -Y(t)[B_1 + \sum\limits_{l=2}^{k} B_l y(t_l)]^{-1}Z(s) = \\ \qquad = S_(t,s), \quad s < t. \end{cases}$$

Оскільки функція $S(t,s)$ розривна в точках $s = t_l$, то досліджувати збіжність $S_n(t,s)$ до $S(t,s)$ будемо на кожній смузі $(t_{l-1}, t_l) \times (a,b)$. Для доведення достатньо показати справедливість таких тверджень:

$$\det[B_1(n) + \sum_{l=2}^{k} B_l(n)Y(t_l;n)] \neq 0, \tag{3.35}$$

$$\|Y(\cdot, n) - Y(\cdot)\|_{(p)} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.36}$$

та

$$\|Z(s; n) - Z(s)\|_{(p)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.37}$$

Виконання співвідношення (3.35) випливає з леми 3.3.

Звідси, враховуючи умову 1) теореми 3.3, випливає, що виконується (3.36). З леми про властивість оберненого відображення [66] та вже доведеного (3.36) випливає співвідношення

$$\|Y^{-1}(\cdot; k) - Y^{-1}(\cdot; 0)\|_{(n)} \to 0, \quad k \to \infty, \tag{3.38}$$

Умови (3.36), (3.38) виконуються на всьому квадраті $(a, b) \times (a, b)$, і, тим більше, на окремих смугах $(t_{l-1}, t_l) \times (a, b)$.

Покажемо, що співвідношення (3.37) справджується при $n \to \infty$ на кожній i-ій смузі:

$$\|Z_i(s; n) - Z_i(s)\|_{(p)} =$$

$$= \| \sum_{t_i \leqslant s} B_i(n) Y(t_i; n) Y^{-1}(s_l; n) - \sum_{t_i \leqslant s} B_i y(t_i) Y^{-1}(s_l)\|_{(p)} \to 0.$$

Це випливає з другої умови теореми 3.3, умов (3.36), (3.38) та адитивності відображення.

Таким чином, отримуємо, що функції $S_n(t, s)$ збігаються до $S(t, s)$ при $n \to \infty$ на смугах $(t_{l-1}, t_l) \times (a, b)$ за відповідними нормами.

Залишилось дослідити функції $X_n(t, s)$. Виходячи з представлення матриць Гріна $G(t, s, n)$ та $G(t, s)$, функцію $X(t, s)$ можна записати у вигляді

$$X(t, s) = \begin{cases} Y(t) Y^{-1}(s), & t \leqslant s, \\ 0, & s < t. \end{cases} \tag{3.39}$$

Враховуючи вигляд $X(t,s)$, співвідношення (3.36) та (3.38), отримуємо що

$$\|X(t,s;n)-X(t,s)\|_{(p)} = \|Y(t;n)Y^{-1}(s;n)-Y(t)Y^{-1}(s;)\|_{(p)} \leq$$

$$\leq \|Y(t;n)-Y(t)\|_{(p)} \cdot \|Y^{-1}(s;n)\| +$$

$$+\|Y^{-1}(s;n)-Y^{-1}(s)\| \cdot \|Y(t)\|_{(p)} \to 0, \quad n\to\infty.$$

Отже, співвідношення (3.32) і тим самим теорема 3.3 доведені.

Доведення теореми 3.3. Згідно з лемою 3.2, для доведення теореми 3.3 достатньо показати, що при виконанні її умов для достатньо великих значеннях n існують матриці Гріна $\widehat{G}(t,s;n)$ розглядуваних задач (2.61)–(2.62) і на смугах $(t_{l-1},t_l)\times(a,b)$ виконується граничне співвідношення (3.32).

З леми про еквівалентність крайових задач випливає, що умова існування лише тривіального розв'язку для однорідної крайової задачі виду (3.19)–(3.20) рівносильна тому, що однорідна крайова задача (3.21)–(3.22) для диференціального рівняння першого порядку також має лише тривіальний розв'язок. Тоді з умов 1), 2) теореми 3.3 та, враховуючи формули (2.56)–(2.58), отримуємо при $n\to\infty$ виконання таких співвідношень:

$$\|\widehat{A}(\cdot;n)-\widehat{A}(\cdot)\|_{(p-1)} \to 0,$$

$$\|B_l(n)-B_l\| \to 0.$$

Тоді, згідно з теоремою 3.3, для достатньо великих n існує нормована матриця Гріна задачі (2.61)–(2.62) і на смугах $(t_{l-1},t_l)\times(a,b)$ виконується граничне співвідношення (3.32). Цим теорема 3.3 доведена.

3.4. Апроксимація розв'язків загальних крайових задач

Нехай задано систему $m \in \mathbb{N}$ лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на скінченному інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$

$$y'(t) + A(t)y(t) = f(t) \tag{3.40}$$

з коефіцієнтом $A(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$, правою частиною $f(\cdot) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^m)$ із *загальною* неоднорідною крайовою умовою

$$By(\cdot) = c. \tag{3.41}$$

Поряд із задачею (3.40)–(3.41) розглянемо послідовність систем m лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$$y'(t, n) = A(t, n)y(t, n) + f(t) \tag{3.42}$$

із *багатоточковими* крайовими умовами

$$B(n)y(\cdot, n) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(n)y(t_i(n); n) = c, \tag{3.43}$$

де матриці-функції $A(\cdot, n) \in X(a, b)$ — довільній фіксованій щільній множині в просторі $L_1((a, b); \mathbb{C}^{m\times m})$, а праві частини — вектор-функція $f(\cdot)$ та вектор c — ті ж, що і в задачі (3.40)–(3.41).

Основним результатом цього підрозділу є

Теорема 3.6. *Для кожної однозначно розв'язної неоднорідної загальної крайової задачі* (3.40)–(3.41) *знайдеться послідовність багатоточкових крайових задач вигляду* (3.42)–(3.43) *з коефіцієнтами* $A(t, n) \in X(a, b)$ *та-*

ких, що для достатньо великих n кожна з них є однозначно розв'язною і для розв'язків $y(\cdot)$ задачі (3.40)–(3.41) і $y(\cdot,n)$ задачі (3.42)–(3.43) виконується гранична рівність

$$\|y(\cdot)-y(\cdot,n)\|_\infty \to 0. \tag{3.44}$$

Для доведення цього результату ми побудуємо для загальної крайової задачі вигляду (3.40)–(3.41) послідовність багатоточкових крайових задач вигляду (3.42)–(3.43) таку, що

$$\|A(t,n)-A(t)\|_1 \to 0, \quad B(n)y \to By, \quad y \in C([a,b],\mathbb{C}^m)$$

і при цьому справджується гранична рівність (3.43).

Сформулюємо і доведемо декілька допоміжних тверджень.

Позначимо через $NBV[a,b]$ підклас функцій з $BV[a,b]$, які

а) неперервні зліва на інтервалі (a,b);

б) дорівнюють нулю в точці a.

Цей клас функцій утворює комплексний банахів простір відносно норми

$$\|g\|_{NBV[a,b]} = V_a^b g.$$

Він є спряжений до банахового простору $C([a,b];\mathbb{C})$.

Теорема 3.7. *Для кожної функції $f \in NBV[a,b]$ існує послідовність східчастих функцій* $\{f_n : n \geq 1\} \subset S[a,b]$ (див. позн. 20) така, що

i) *послідовність $\{f_n : n \geq 1\}$ рівномірно на $[a,b]$ збігається до функції f;*

ii) *повні варіації функцій f_n рівномірно по $n \in \mathbb{N}$ обмежені.*

Зауваження 3.1. Припущення, що крайні сходинки функцій f_n можуть вироджуватись в точки, є істотним. Прості приклади показують, що його не можна відкинути, замінивши клас $S[a,b]$ на клас кусково-сталих на $[a,b]$ функцій.

З теореми 3.7 та першої теореми Геллі [1] випливає, що справедлива

Теорема 3.8 *Множина функцій $S[a,b]$ є секвенціально щільною в просторі $NBV[a,b]$ в w^*-топології.*

Зауваження 3.2. Іншими словами, теорема 3.8 стверджує, що для кожної функції $f \in NBV([a,b],\mathbb{C}^m)$ існує послідовність східчастих функцій $\{f_n : n \geq 1\} \subset S[a,b]$ така, що для кожної функції $y \in C([a,b],\mathbb{C})$

$$\int_a^b y(t)df_n(t) \to \int_a^b y(t)df(t).$$

Доведення теореми 3.8. Оскільки кожна функція з $NBV[a,b]$ є лінійною комбінацією двох дійсних функцій того ж класу, а кожна дійсна функція з $NBV[a,b]$ може бути представлена у вигляді різниці двох монотонних [1], то, не зменшуючи загальності, можна зразу вважати, що функція $f \in NBV[a,b]$ є дійсною і неспадною на $[a,b]$. Нам знадобляться два допоміжних твердження.

Лема 3.4. *Для кожної неспадної функції $f \in NBV[a,b] \bigcap C[a,b]$ існує послідовність неспадних функцій $f_n \in S[a,b]$, яка задовольняє умови $i)$ та $ii)$ теореми 3.7.*

Доведення леми 3.4. Визначимо по функції $f \not\equiv 0$ послідовність розбиттів відрізка $[a,b]$. Розбиття з номером $n \in \mathbb{N}$ складається з n точок $\{t_{n,k}, 1 \leq k \leq n\}$, де

$$t_{n,k} := \min\left\{t \in [a,b] : f(t_{n,k}) = f(b)\frac{k}{n+1}\right\}.$$

Зі зроблених припущень випливає, що таке визначення є коректним.

Пов'яжемо з n-им розбиттям відрізка неспадну функцію $f_n \in S[a,b]$, поклавши:

$$f_n(t) := \begin{cases} 0, & t \in [a, t_{n,1}] \\ f(b)\frac{k}{n+1}, & t \in (t_{n,k}, t_{n,k+1}], \quad k \le n-1 \\ f(b)\frac{n}{n+1}, & t \in (t_{n,n}, b] \end{cases}$$

Тоді

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_a^b f_n = f_n(b) - f_n(a) < f(b).$$

Крім того,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [a,b] \quad |f(t) - f_n(t)| \le \frac{f(b)}{n+1}.$$

Лему 3.4 доведено.

Лема 3.5. *Для кожної неспадної функції стрибків $f \in NBV[a,b]$ існує послідовність неспадних функцій стрибків $f_n \in S[a,b]$, яка задовольняє умови i) та ii) теореми 3.4.*

Доведення леми 3.5. З умов леми випливає, що функція f допускає представлення

$$f(t) = \sum_{t_k < t} h_k,$$

де $\{t_k, k \le m \le \infty\}$ — скінченна або зліченна послідовність точок розриву функції f, $h_k > 0$ — величина стрибка функції f в точці t_k, а

$$\sum_{k=1}^{m \le \infty} h_k < \infty.$$

Якщо $m \in \mathbb{N}$, то можна покласти $f_n \equiv f$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай тепер $m = \infty$. Покладемо

$$f_n(t) = \sum_{k \leq n, \quad t_k < t} h_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$0 < f(t) - f_n(t) \leq \sum_{k=n}^{\infty} h_k \to 0, \quad n \to \infty.$$

Звідси випливає умова $i)$ теореми 3.7. Умова $ii)$ випливає з нерівностей

$$0 \leq f_n(t) < f(t) \leq f(b).$$

Лему 3.5 доведено.

Твердження теореми 3.7 випливає з лем 3.4 та 3.5, оскільки кожна монотонна на відрізку функція може бути представлена у вигляді суми неперервної та функції стрибків, див., наприклад, [1].

Доведення теореми 3.7. З щільності $X(a, b)$ в просторі $L_1(a, b)$ випливає, що існує $A(t, n) \in X(a, b)$ така, що $\|A(t, n) - A(t)\|_1 \to 0$.

За теоремою Ф. Рісса про представлення лінійного неперервного функціонала, визначеного у просторі неперервних на $[a, b]$ функцій (див. [1]), оператор B можна однозначно записати у вигляді

$$By = \alpha y(a) + \int_a^b [d\Phi(t)] y(t); \tag{3.45}$$

де матриця $\alpha \in \mathbb{C}^{m\times m}$, матриця-функція $\Phi(\cdot) \in NBV([a, b], \mathbb{C}^{m\times m})$.

Лема 3.6. *Для будь-якого оператора B вигляду (3.44) існують послідовності матриць $\{\alpha(n)\} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ і східчастих матриць-функцій $\Phi(\cdot, n) \in NBV([a.b]; \mathbb{C}^{m\times m})$ з рівномірно по $n \in \mathbb{N}$ обмеженою на $[a, b]$ варіацією*

$\{\Phi(\cdot, n)\}$, *неперервних зліва, такі, що*

$$\|\alpha(n) - \alpha\| \to 0, \quad \|\Phi(t, n) - \Phi(t)\|_\infty \to 0.$$

Доведення леми 3.6. Побудуємо оператори $\{B(n)\}$ наступним чином:

$\alpha(n) := \alpha, \quad \forall n \in \mathbb{N},$

а матрицю-функцію $\Phi(\cdot)$ наблизимо послідовністю матриць-функцій $\{\Phi(\cdot, n)\}$ за принципом, використаним у доведенні теореми 3.7. З властивостей інтеграла Стілтьєса одержимо, що $\|\Phi(\cdot, n) - \Phi(\cdot)\|_\infty \to 0$, а з означення $\{\alpha(n)\} \to \alpha$, тому $\{B(n)y\} \to By, \quad n \to \infty$.

Таким чином, ми побудували послідовність багатоточкових крайових задач таку, що коефіцієнти

$$\|A(t, n) - A(t)\|_1 \to 0.$$

Залишилось показати, що

$$B(n)y \to By, \quad y \in C([a, b], \mathbb{C}^m),$$

а тому

$$\int_a^b [d\Phi(t, n)]y(t) \to \int_a^b [d\Phi(t)]y(t).$$

Справедливість останнього співвідношення випливає з теореми Геллі [1]. Покажемо, що за цих умов має місце висновок теореми 3.8.

Для цього доведемо, що для задач (3.40)–(3.41) і (3.42)–(3.43) виконуються всі умови наступної теореми про неперервність розв'язків, встановленої у [19].

Теорема 3.9. (Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлець, Н. В. Рева [19]). *Нехай для задачі (3.42)–(3.43) відповідна однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок і при $n \to +\infty$ виконані наступні умови:*

1) $R(t,n) := A(t,n) - A(t) \in \mathcal{M}^m$;

2) $\|f(\cdot,n)\|_1 = O(1)$;

3) $B(n)y \to By, \quad y \in C([a,b],\mathbb{C}^m)$,

4) $\| \int_a^t f(s,n)ds - \int_a^t f(s)ds\|_\infty \to 0$.

Тоді для достатньо великих n задача (3.42)–(3.43) має єдиний розв'язок і справедливе граничне співвідношення (3.44).

Доведення теореми 3.6. Зазначимо, що умови 2) і 4) цієї теореми виконані, що випливає з постановки задачі.

За доведеним вище, для коефіцієнтів рівнянь (3.40) і (3.43) виконується співвідношення $\|A(t,n) - A(t)\|_1 \to 0$, а це означає, що виконана умова $(L.1)$ теореми 1.1 А. Ю. Левіна [26], і, оскільки, одночасно виконана умова 4) теореми 3.9, то функція $R(\cdot,n) \in \mathcal{M}^m$, тобто справджується умова 1) теореми 3.9.

З леми 3.6 і теореми 3.7 випливає, що

$$B(n)y \to By, \quad y \in C([a,b],\mathbb{C}^m).$$

Оскільки виконані всі умови теореми 3.9, то справедливе співвідношення (3.44) і цим доведення теореми 3.6 завершене.

Розглянемо тепер аналогічну задачу для системи m лінійних звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$.

Нехай задано систему рівнянь порядку $r \geq 2$ на скінченному інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$

$$y^{(r)}(t) + A_{r-1}(t)y^{(r-1)}(t) + \ldots + A_0(t)y(t) = f(t) \qquad (3.46)$$

з коефіцієнтами $A_{j-1}(\cdot) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, правими частинами $f(\cdot) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^m)$ із *загальними* неоднорідними крайовими умовами

$$B_j y(\cdot) = c_j, \tag{3.47}$$

де лінійний неперервний оператор

$$B_j : C^{(r-1)}([a,b],\mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}^m, \quad j \in \overline{1,r}. \tag{3.48}$$

Поряд із задачею (3.46)–(3.47) розглянемо послідовність систем m лінійних звичайних диференціальних рівнянь порядку r

$$y^{(r)}(t,n) + A_{r-1}(t,n)y^{(r-1)}(t,n) + \ldots + A_0(t,n)y(t,n) = f(t) \tag{3.49}$$

із *багатоточковими* крайовими умовами

$$B_j(n)y(\cdot,n) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{r} \alpha_{i,j}^{(k-1)}(n) y^{(k-1)}(t_i(n);n) = c_j, \quad j \in \overline{1,r}, \tag{3.50}$$

де матриці-функції $A_{j-1}(\cdot,n) \in X(a,b)$— довільній фіксованій щільній множині в просторі $L_1((a,b);\mathbb{C}^{m\times m})$, а праві частини — вектор-функція $f(\cdot)$ та вектори c_j — ті ж, що і в задачі (3.46)–(3.47).

Теорема 3.6 допускає узагальнення для крайових задач високого порядку.

Теорема 3.10. *Для кожної однозначно розв'язної неоднорідної загальної крайової задачі* (3.46)–(3.47) *знайдеться послідовність багатоточкових крайових задач вигляду* (3.49)–(3.50) *з коефіцієнтами* $A_{j-1}(\cdot,n) \in X(a,b)$ *таких, що для достатньо великих* n *кожна з них є однозначно розв'язною* *і розв'язки* $y(\cdot)$ *задачі* (3.46)–(3.47) *рівномірно на* $[a, b]$ *збігаються до* $y(\cdot, n)$ *задачі* (3.49)–(3.50).

Доведення теореми 3.10. За лемою 2.7 неоднорідні крайові задачі (3.46)–(3.47) та (3.49)–(3.50) еквівалентні задачам (3.40)–(3.41) та (3.42)–(3.43). Це означає, що виконані умови теореми 3.6, а тому для задачі (3.46)–(3.47) існує послідовність багатоточкових крайових задач (3.49)–(3.50) така, що виконується рівність (3.44). Теорема доведена.

3.5. Апроксимація нормованих матриць Гріна загальних крайових задач

Нехай задано систему $m \in \mathbb{N}$ лінійних звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на скінченному інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ вигляду (3.40) із *загальною* неоднорідною крайовою умовою (3.41). Поряд з нею розглянемо послідовність *багатоточкових* крайових задач вигляду (3.42)–(3.43).

Відомо, що для однозначної розв'язності задачі (3.40)–(3.41) необхідно і достатньо, щоб відповідна однорідна крайова задача мала лише тривіальний розв'язок. Тоді розв'язок напіводнорідної крайової задачі допускає інтегральне представлення

$$y(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds, \tag{3.51}$$

де $G(t, s)$ — матриця Гріна однорідної крайової задачі. Проте, формула (3.53) визначає матрицю Гріна неоднозначно.

У роботі [19] для задачі (3.40)–(3.41) виділяють нормовану матрицю Гріна. Щоб навести це означення нам необхідні будуть деякі формули.

Як відомо, для однорідної крайової задачі (3.40)–(3.41) справедливе однозначне представлення

$$By = \int_a^b [dH(t)]y(t), \quad y(\cdot) \in C([a, b]; \mathbb{C}^m),$$

де $H(\cdot) \in NBV([a, b]; \mathbb{C}^{m \times m})$ - банаховому простору комплексозначних $(m \times m)$– матриць-функцій з обмеженою варіацією на $[a, b]$, значення яких дорівнюють нулю в точці a і вони є неперервні зліва на інтервалі (a, b). Тому для матриціанта $Y(t)$ системи (3.40)–(3.41) на проміжку $[a, b]$ визначена матриця-функція

$$H_Y(t) := \int_a^t [dH(s)]Y(s).$$

Вона може мати розриви в точках розриву коефіцієнтів матриці-функції $H(\cdot)$. При цьому, якщо однорідна крайова задача (3.40)–(3.41) має лише тривіальний розв'язок, то

$$det H_Y(b) \neq 0$$

та існує матриця $H_Y^{-1}(b)$.

Як відомо [21], матриця Гріна однорідної задачі (3.40)–(3.41) допускає зображення у вигляді:

$$G(t,s) = \begin{cases} Y(t)Y^{-1}(t) - Y(t)H_Y^{-1}(b)H_Y(s)Y^{-1}(s), & a \leq s \leq t \leq b; \\ -Y(t)H_Y^{-1}(b)H_Y(s)Y^{-1}(s), & a \leq t \leq s \leq b. \end{cases} \qquad (3.52)$$

Формула (3.47) за означенням задає *нормовану* матрицю Гріна задачі (3.40)–(3.41).

Аналогічно визначаються нормовані матриці Гріна для послідовності задач (3.42)–(3.43) при кожному фіксованому n.

Основним результатом цього параграфу є

Теорема 3.11. *В умовах теореми 3.6 послідовність багатоточкових крайових задач* (3.42)–(3.43) *можна вибрати так, що для нормованих матриць Гріна* $G(t,s)$ *задачі (3.40)–(3.41) і нормованих матриць Гріна* $G(t,s,n)$ *задач (3.42)–(3.43) на смугах* $(a,b) \times (a,b)$ *виконується гранична рівність*

$$\|G(\cdot;\cdot) - G(\cdot;\cdot;n)\|_\infty \to 0. \qquad (3.53)$$

Доведення теореми 3.10. Як і раніше, для доведення теореми необхідно довести існування послідовності багатоточкових крайових задач (3.42)–(3.43) такої, що $\|A(t,n)-A(t)\|_1 \to 0$, $B(n)y \to By, \quad y \in C([a,b],\mathbb{C}^m)$, що зроблено у доведенні теореми 3.6, і при цьому для матриць Гріна задачі (3.40)–(3.41) і (3.42)–(3.43) на смугах $(a,b)\times(a,b)$ виконується гранична рівність (3.53).

Для доведення другої частини теореми 3.10 скористаємося раніше встановленим результатом В. А. Михайлеця, Г. О. Чеханової у [80] для нормованих матриць Гріна.

Теорема 3.11 (В. А. Михайлець, Г. О. Чеханова [80]). *Нехай для задач* (3.40)–(3.41) *відповідна однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок і виконані наступні умови:*

1) $A(t,n) - A(t) \in \mathcal{M}^m$;

2) $V_a^b \Phi(t,n) = O(1), \|\Phi(\cdot,n) - \Phi(\cdot)\|_\infty \to 0, \quad n \to +\infty.$

Тоді для достатньо великих n існують нормовані матриці Гріна розглядуваних задач, які задовольняють граничне співвідношення (3.53).

Перевіримо умови 1) і 2) теореми 3.11. Як випливає з доведення теореми 3.6, умова 1) виконана.

З леми 3.6 та теореми 3.7 одержимо,

$$V_a^b \Phi(t,n) = O(1), \quad \|\Phi(t,n) - \Phi(t)\|_\infty \to 0, \quad n \to +\infty,$$

що і доводить теорему.

Розглянемо тепер аналогічну задачу для системи m лінійних звичайних диференціальних рівнянь порядку $r \geq 2$ вигляду (3.46) із *загальною* крайовою умовою (3.47) та послідовності систем (3.49) з *багатоточковими* крайовими умовами (3.50).

У [66] визначено нормовану матрицю Гріна для задачі (3.46) наступним чином:

$$G(\cdot,\cdot) := \widetilde{G}_{1,r}(\cdot,\cdot), \tag{3.54}$$

де $\widetilde{G}_{1,r}(\cdot,\cdot)$ — елемент нормованої матриці Гріна задачі (3.40).

Аналогічно при кожному фіксованому n визначається матриця Гріна для задачі (3.49):

$$G(\cdot,\cdot,n) := \widetilde{G}_{1,r}(\cdot,\cdot,n). \tag{3.55}$$

Теорема 3.12. *В умовах теореми 3.11 послідовність багатоточкових крайових задач (3.47)–(3.48) можна вибрати так, що для нормованих матриць Гріна* $G(t,s)$ *задачі (3.45)–(3.46) і нормованих матриць Гріна* $G(t,s,n)$ *задач (3.47)–(3.48) на смугах* $(a,b)\times(a,b)$ *виконується гранична рівність* (3.53).

Доведення теореми 3.11. При кожному фіксованому n згідно леми 2.7 однорідна крайова задача вигляду (3.45)–(3.46) еквівалентна однорідній системі nm диференціальних рівнянь першого порядку (3.40) з відповідно визначеними коефіцієнтами і граничними операторами. Для систем першого порядку нормовані матриці Гріна визначені. Кожна з них є квадратною матрицею-функцією порядку n, елементи якої є $(m\times m)$-матрицями-функціями.

Оскільки задачі (3.45)–(3.46) і (3.47)–(3.48) зводяться до системи першого порядку і нормовані матриці Гріна цих задач визначені через нормовані матриці Гріна задачі (3.40)–(3.41) і (3.42)–(3.43), то теорема 3.12 є прямим наслідком теореми 3.11.

Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертаційної роботи одержано наступні основні результати:

1. Знайдено нові граничні теореми для розв'язків багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку, які узагальнюють результати І. Т. Кігурадзе, Т. І. Кодлюк, В. А. Михайлеця, Н. В. Реви.

2. Встановлено умови збіжності розв'язків багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку, які узагальнюють результат В. А. Михайлеця, Г. О. Чеханової.

3. Знайдено достатні умови збіжності функцій Гріна для систем диференціальних рівнянь довільного порядку, коли коефіцієнти рівняння належать простору неперервно-диференційованих функцій.

4. Встановлено можливість апроксимації розв'язку загальної крайової задачі послідовністю розв'язків багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

5. Встановлено можливість апроксимації нормованої матриці Гріна загальної крайової задачі послідовністю нормованих матриць Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі одержано такі основні результати:

1. Знайдено нові конструктивні достатні умови збіжності розв'язків загальних крайових задач для систем диференціальних рівнянь довільного порядку, які узагальнюють і доповнюють раніше відомі результати.

2. Доведено нові теореми про граничний перехід для розв'язків багатоточкових крайових задач.

3. Встановлено можливість апроксимації розв'язку загальної крайової задачі послідовністю розв'язків багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

4. Встановлено можливість апроксимації матриці Гріна загальної крайової задачі послідовністю матриць Гріна багатоточкових крайових задач спеціального вигляду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Березанский Ю. М.* Функциональный анализ. Курс лекций: учеб. пособ. / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К.: Вища шк., 1990. — 600 с.

2. *Боголюбов Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Физматгиз, 1955. — 410 с.

3. *Бойчук А. А., Журавлёв В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи: Монография /А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлёв, А. М. Самойленко — К.: Институт математики НАН Украины, 1995. — 318 с.

4. *Васильева А. Б.* Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1989. — 156 с.

5. *Гихман И. И.* По поводу одной теоремы Н. Н. Боголюбова / И. И. Гихман // Український математичний журнал. — 1952. — № 4. — С. 215 – 219.

6. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків некласичних багатоточкових крайових задач на просторах Соболєва / Є. В. Гнип, Т. І. Кодлюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 101 – 112.

7. *Гнип Є. В.* Фредгольмові крайові задачі з параметром на просторах Слободецького. / Є.В. Гнип, В.А. Михайлець // Диференціальні рівня-

ння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2016. —**13**, № 1. —С. 76 – 87.

8. *Гнип Є. В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач на просторах Соболєва-Слободецького: Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / Є. В. Гнип.— Київ, 2017. – 116 с.

9. *Гнып Е. В.* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах Соболева / Е. В. Гнып, Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец // Український математичний журнал. — 2015. – Т. 67, № 5. — С. 584 – 591.

10. *Горюнов А. С.* Регуляризация квазипроизводными двучленных дифференциальных уравнений с сингулярным коэффициентом / А. С. Горюнов, В. А. Михайлец // Український математичний журнал. — 2011. — Т. 63, № 9. – С. 1190 – 1205.

11. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы: Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц. — Москва: Изд-во иностранной лит., 1962. — 895 с.

12. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — Москва: Наука. — 1967. — 472 с.

13. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы / А. Картан. — Москва: Мир, 1971. — 392 с.

14. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. — 352 с.

15. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений / И. Т. Кигурадзе // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ — 1987. — Т. 30. — С. 3 –103.

16. *Кигурадзе И. Т.* О краевых задачах для линейных дифференциальных систем с сингулярностями / И. Т. Кигурадзе // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 2. — С. 198 – 209.

17. *Кодлюк Т. И.* Предельный переход в классе многоточечных краевых задач / Т. И. Кодлюк // Аналіз і застосування: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2012. — Т. 9, № 2. — С. 203 –216.

18. *Кодлюк Т. И.* Многоточечные краевые задачи с параметром в пространствах Соболева / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец // Доповіді Національної академії наук України. — 2012. — № 11. – С. 15 –19.

19. *Кодлюк Т. И.* Предельные теоремы для одномерных краевых задач / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Український математичний журнал. — 2013. — Т. 65, № 1. – С. 70 –81.

20. *Кодлюк Т. И.* Матрицы Грина одномерных краевых задач с параметром в пространствах Соболева / Т. И. Кодлюк // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. – С. 191 – 199.

21. *Кодлюк Т. І.* Одновимірні крайові задачі з параметром в просторах Соболєва. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / Т. І. Кодлюк. — Київ, 2013. — 157 с.

22. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: Наука. — 1989. — 623 с.

23. *Красносельский М. А.* О принципе усреднения в нелинейной механике / М. А. Красносельский, С. Г. Крейн // Успехи математических наук. — 1955. — Т. 3, № 10. — С. 147 –153.

24. *Курцвейль Я.* О непрерывной зависимости решений линейных уравнений от параметра / Я. Курцвейль, З. Ворель // Чехословацкий математический журнал. — 1957. — Т. 7, № 4. — С. 568 –583.

25. *Левин А. Ю.* О дифференциальных свойствах функции Грина многоточечной краевой задачи / А. Ю. Левин // Доклады Академии наук СССР. — 1961. — Т. 136, № 5. — С. 1022 – 1025.

26. *Левин А. Ю.* Предельный переход для несингулярных систем $\dot{X} = A_n(t)X$ / А. Ю. Левин // Доклады Академии наук СССР. — 1967. — Т. 176, № 4. — С. 774 –777.

27. *Левин А. Ю.* Вопросы теории обыкновенного линейного дифференциального уравнения. I / А. Ю. Левин // Вестник Ярославского университета. — 1973. — № 5. — С. 105 – 132.

28. *Левин А. Ю.* О многоточечной краевой задаче / А. Ю. Левин // Научные доклады высшей школы. — 1985. — № 5. – С. 34 –37.

29. *Михайлец В. А.* Непрерывность по параметру решений общих краевых задач / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Зб-к праць Інституту математики НАН України. — 2008. — Т. 5, № 1. — С. 227 –239.

30. *Михайлец В. А.* Предельный переход в системах линейных дифференциальных уравнений / В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Доповіді Національної академії наук України. — 2008. — № 8. — С. 28 – 30.

31. *Михайлец В. А* Некоторые классы фредгольмовых краевых задач на отрезке / В. А. Михайлець, Г. А. Чеханова // Диференціальні рівняння і суміжні питання: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Т. 11, № 2. — С. 268 – 274.

32. *Михайлец В. А.* О теореме Кигурадзе для линейных краевых задач / В. А. Михайлец, О. Б. Пелехата, Н. В. Рева. // Доповіді НАН України. — 2017. — №12. — С. 8 -13.

33. *Михайлец В. А, Пелехата О. Б., Рева Н. В.* Предельные теоремы для решений краевых задач // Укр. мат. журн. — 2018. — 70, № 2 — С. 216-223.

34. *Михайлец В. А, Пелехата О. Б.* Про апроксимацію функцій класу $NBV[a,b]$ // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. — Т.14. — № 2. — С. 265-271.

35. *Михайлець В.А., Пелехата О.Б.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач / Михайлець В.А., Пелехата О.Б. // Четверта Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р., Київ: Тези доповідей. — 2015. — С. 22.

36. *Михайлец В. А* Фредгольмовые краевые задачи с параметром на пространствах $C^{(n)}[a;b]$ / В. А. Михайлець, Г. А. Чеханова // Доповіді Національної академії наук України. — 2014. — № 7. — С. 24 –28.

37. *Мурач О. О.* Критерій неперервної залежності за параметром розв'язків тотальних крайових задач для диференціальних систем вищих порядків / О. О. Мурач, В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2016. —**13**, № 2. — С. 229-240.

38. *Никольский С. М.* Курс математического анализа / С. М. Никольский. — Т. 2. — Издание четвертое, Москва: Наука, 1975 (1991). — 544 с.

39. *Нгуен Тхе Хоан* О зависимости от параметра решений линейной системы дифференциальных уравнений / Тхе Хоан Нгуен // Дифференциальные уравнения. — 1993. — Т. 29, № 6. — С. 970 –975.

40. *Пелехата О. Б.* Неперервність за параметром матриць Гріна багатоточкових крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 2. — С. 315–326.

41. *Пелехата О. Б.* Про збіжність розв'язків багатоточкових крайових задач //Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. — С. 242–254.

42. *Пелехата О.Б., Рева Н.В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач / Пелехата О. Б., Рева Н. В. // Міжнародна конференція молодих математиків, 3–6 червня 2015 р., Київ: Тези доповідей. — 2015. — С. 161.

43. *Пелехата О. Б.* Про апроксимативні властивості розв'язків і матриць Гріна багатоточкових крайових задач // Матеріали XIV Міжнародної

науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна — 2016". —(6 – 8 квітня 2016, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2016. — С. 63 -66.

44. *Пелехата О.Б., Рева Н.В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач / Пелехата О. Б., Рева Н. В. // Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917–2008), 7–10 червня 2017 р., Київ: Тези доповідей. — 2017. — С. 99.

45. *Покорный Ю. М.* О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи / Ю. А. Покорный // Матем. Заметки. — 1968. — Т. 4, № 5. — С. 533–540.

46. *Покорный Ю. М.* О неклассической задаче Валле-Пуссена / Ю. А. Покорный // Диф. уравнения. — 1978. — Т. 14. — С. 1018–1027.

47. *Покорный Ю. М.* Вопросы качественной теории краевой задачи Валле-Пуссена: Автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фіз.-мат. наук. — Ленинград, 1980.

48. *Пономарев В. Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости многоточечной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка / В. Д. Пономарев // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14, № 5. — С. 929–932.

49. *Рева Н. В.* Неперервність за параметром розв'язків лінійних крайових задач: Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / Н. В. Рева. – Київ, 2009. – 148 с.

50. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь. — Москва: Мир, 1979. — 592 с.

51. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра / А. М. Самойленко // Український математичний журнал. — 1962. — Т. 14, № 3. – С. 289 – 298.

52. *Самойленко А. М.* Про неперервну залежність розв'язків диференціальних рівнянь від параметра / А. М. Самойленко // Доповіді Академії наук УРСР. — 1962. — № 10. — С. 1290 –1293.

53. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — К.: Вища школа, 1976. — 223 с.

54. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. — Москва: ИЛ, 1953. — 346 с.

55. *Солдатов В. О.* Про неперервність за параметром розв'язків крайових задач, тотальних щодо просторів $C^{(n+r)}[a,b]$ / В. О. Солдатов // Український математичний журнал. — 2015. — Т. 67, № 5. — С. 692 –700.

56. *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь вищих порядків / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т. 12, № 2. – С. 327 –337.

57. *Солдатов В. О.* Багатоточкові крайові задачі для систем диференціальних рівнянь першого порядку у просторах Гельдера / В. О. Солдатов // Диференціальні рівняння і суміжні питання аналізу: Зб.

праць Інституту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 2. – С. 267 – 280.

58. *Солдатов В. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач у просторах Гельдера: Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / В. О. Солдатов. — Київ, 2017. — 120 с.

59. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970. — 720 с.

60. *Хасеинов К. А.* Начальная и многоточечная задачи для линейных дифференциальных уравнений и характеристические уравнения типа Риккати: Автореф. дис. канд. фіз.-мат. наук / К. А. Хасеинов. — Москва, 1984. — 223 с.

61. *Хасеинов К. А.* Сопряженная линейная задача и функции Грина: Методы оптимизации и их приложения / К. А. Хасеинов // Тематич. сб. науч. тр. ВЦСО АНСССР, Иркутск. — 1988. — С. 238–243.

62. *Хасеинов К. А.* Построение сопряженной задачи к линейной многоточечной / К. А. Хасеинов // Матер. 10-ой межвуз. конф. по математике и механике, Т. 2. — Алматы, 2005. — С. 317–322.

63. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: в 4-х т. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы / Л. Хермандер. — Москва: Мир, 1987. — 696 с.

64. *Чеханова Г.* Непрерывность по параметру решений многоточечных краевых задач / Г. Чеханова // Диференціальні рівняння і суміжні питання

аналізу: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 260 – 279.

65. *Чеханова Г. А.* Непрерывность по параметру функций Грина многоточечных краевых задач / Г. А. Чеханова // Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування: Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2013. — Т. 10, № 4–5. – С. 532–541.

66. *Чеханова Г. О.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних крайових задач та їх похідних. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук: 01.01.02 / Г. О. Чеханова. — Київ, 2014. — 122 с.

67. *Чичкин Е. С.* Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач / Е. С. Чичкин // Изв. вузов Математика. — 1962. — Т. 27, № 2. — С. 170–179.

68. *Ashordia M.* Criteria of correctness of linear boundary value problems for systems of generalized ordinary differential equations / M. Ashordia // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1996. — Vol. 46, № 3. – P. 385 – 404.

69. *Beesack P. R.* On the Green's function of an a-point Boundary Value Poblem / P. R. Beesack // Pac. J. of Math. — 1962. — Vol. 12, № 3. — P. 801 – 812.

70. *Goriunov A. S.* Resolvent convergence of Sturm–Liouville operators with singular potentials / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Mathematical Notes. — 2010. — Vol. 87, № 1–2. – P. 287 – 292.

71. *Goriunov A. S.* Regularization of singular Sturm-Liouville equations / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Methods of Functional Analisys and Topology. — 2010. — Vol. 16, №. 2. — P. 120 –130.

72. *Goriunov A. S.* Regularization of two-term differential equations with singular coefficients by quasiderivatives / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets // Ukr. Math. J. — 2012. — Vol. 63, № 9. — P. 1361–1378.

73. *Goriunov A. S.* Formally self-ajoint quasi-differential operators and boundary-value problems / A. S. Goriunov, V. A. Mikhailets, K. Pankrashkin // Electronic Journal of Differential Equations. – 2013. – Vol. 2013, № 101. – P. 1 — 16.

74. *Graves L. M.* Theory of function of real variables / L. M. Graves // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1948. — Vol. 54, № 5. — P. 487—489.

75. *Grimm L. J.* Multipoint BVP for ODE / L. P. Grimm, P. W. Eloe // Differential Equations and Applications (I): Proc. of the 2 Conference, "Rousse 81". — Bulgaria, 1981.

76. *Jackson L. K.* Existense and uniqueness of solutions of boundary value problems for Lipschitz equations / L. K. Jackson // J. Differential Equations. — 1979. — Vol. 32. — P. 76–90.

77. *Kodlyuk T. I., Mikhailets V. A.* Solutions of one-dimensional boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces / T. I. Kodlyuk, V. A. Mikhailets // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2013. — Vol. 190, № 4. — P. 589 –599.

78. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter / J. Kurzweil // Czechoslovak Mathematical Journal. – 1957. — Vol. 7, № 3. — P. 418 –449.

79. *Kurzweil J.* Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter / J. Kurzweil // Czechoslovak Mathematical Journal. — 1959. — Vol. 9, № 4. — P. 564 –573.

80. *Mikhailets V. A.* Limit theorems for general one-dimensional boundary-value problems / V. A. Mikhailets, G. A. Chekhanova // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2015. — Vol. 204, № 3. — P. 333 –342.

81. *Mikhailets V. A.* Continuity in a parameter of solutions to generic boundary-value problems / V. A. Mikhailets, A. A. Murach, V. Soldatov // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations — 2016. — № 87. — P. 1 –16.

82. *Opial Z.* Continuous parameter dependence in linear systems of differential equations / Z. Opial // Journal of Differential Equations. — 1967. — № 3. — P. 571 – 579.

83. *Pelekhata O.* On convergence of solutions of multipoint boundary value problems. // Book of abstract 5th International conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. — 2016. — P. 113–115.

84. *Reid W. T.* Some limit theorems for ordinary differential systems / W. T. Reid // Journal of Differential Equations. — 1967. — Vol. 3, № 3. — P. 423 –439.

85. *Samoilenko A. M.* Certain questions in the investigation of differential equations with an irregular right side / A. M. Samoilenko // Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. — 1965. — Vol. 11, № 3 — 4. — P. 85 –92.

86. *Tamarkin Y. D.* A lemma of the theory of linear differential systems / Y. D. Tamarkin // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1930. — № 36. — P. 99 –102.

ДОДАТОК

Цей додаток містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертації.

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. *Михайлец В. А, Пелехата О. Б., Рева Н. В.* Предельные теоремы для решений краевых задач // Укр. мат. журн. — 2018 — 70, №2 — С. 216-223.

2. *Михайлец В. А, Пелехата О. Б.* Про апроксимацію функцій класу $NBV[a, b]$ // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2017. —Т.14. — №2. — С. 265-271.

3. *Михайлец В. А., Пелехата О. Б, Рева Н. В.* О теореме Кигурадзе для линейных краевых задач / В. А. Михайлец, О. Б. Пелехата, Н. В. Рева // Доповіді Національної академії наук України. — 2017. — № 12. — С. 8 -13.

4. *Пелехата О. Б.* Неперервність за параметром матриць Гріна багатоточкових крайових задач для систем лінійних диференціальних рівнянь.//Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — Т.12, №2. — С. 315-326.

5. *Пелехата О. Б.* Про збіжність розв'язків багатоточкових крайових задач. //Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т.13, №2. — С. 242-254.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. *Михайлець В.А., Пелехата О.Б.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач / Михайлець В.А., Пелехата О.Б. // Четверта Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики, 23-25 квітня 2015 р., Київ: Тези доповідей. — 2015. — С. 22.

2. *Пелехата О.Б., Рева Н.В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач. / Пелехата О.Б., Рева Н.В.// Міжнародна конференція молодих математиків, 3-6 червня 2015 р., Київ: Тези доповідей. — 2015.— С. 161.

3. *Пелехата О. Б.* Про апроксимативні властивості розв'язків і матриць Гріна багатоточкових крайових задач // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна — 2016". —(6 – 8 квітня 2016, м. Київ, Україна). — Київ : Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2016. — С. 63 -66.

4. *Пелехата О.Б., Рева Н.В.* Неперервність за параметром розв'язків одновимірних загальних крайових задач. / Пелехата О.Б., Рева Н.В.// Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917-2008), 7-10 червня 2017 р., Київ: Тези доповідей. — 2017.— С.99.

5. *Pelekhata O.* On convergence of solutions of multipoint boundary value problems. // Book of abstract 5th International conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Yaroslav Lopatynsky. — 2016. — P. 113-115.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— Четверта Всеукраїнська конференція молодих вчених з математики та фізики (Україна, Київ, 23-25 квітня 2015р);

— Міжнародна конференція молодих математиків (Україна, Київ, 3–6 червня 2015 р.);

— XIV Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Шевченківська весна – 2016"(Україна, Київ, 6–8 квітня 2016 р.);

— V Міжнародна конференція молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я. Б. Лопатинського, (Україна, Київ, 9–11 листопада 2016 р.);

— Міжнародна конференція молодих математиків, присвячена 100-річчю з дня народження академіка НАН України Ю. О. Митропольського (1917-2008) (Україна, Київ, 7-10 червня 2017 р.);

— семінарі кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"(керівник семінару - доктор фізико-математичних наук, професор Н. О. Вірченко) 12 квітня 2018 року;

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко) 11 червня 2018 року.