НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

**ПАГІРЯ Михайло Михайлович**

УДК 517.5

# УЗАГАЛЬНЕННЯ КЛАСИЧНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ ТА НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

01.01.01 — математичний аналіз
111 — математика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико–математичних наук

Київ–2018

Дисертація є рукопис. Робота виконана в Мукачівському державному університеті МОН України.

**Науковий консультант:**

доктор фізико-математичних наук, професор,
академік НАН України
**Макаров Володимир Леонідович,**
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу обчислювальної математики

**Офіційні опоненти:**

доктор фізико–математичних наук, професор
**Боднар Дмитро Ількович,**
Тернопільський національний економічний університет,
професор кафедри економічної кібернетики та інформатики;

доктор фізико–математичних наук, доцент
**Демків Ігор Іванович**
Національний університет "Львівська політехніка", професор кафедри обчислювальної математики та програмування;

доктор фізико–математичних наук, професор
**Шевчук Ігор Олександрович**
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри математичного аналізу.

Захист відбудеться "29 "січня 2019 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.01 Інститут математики НАН України за адресою 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитися у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розіслано "20 "грудня 2018 р.

Вчений секретар

спеціалізованої вченої ради Романюк А.С.

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** Дисертаційна робота присвячена питанням наближення функцій однієї дійсної та комплексної змінних різними типами ланцюгових дробів. Досліджується задача інтерполяції функцій, які задані на компакті, ланцюговими дробами та розглядається задача інтерполяції функціоналів інтегральними ланцюговими С–дробами. Також досліджуються методи розвинення функцій в ланцюгові дроби. Розглядувані задачі, поряд із методами наближення функцій многочленами, узагальненими многочленами, раціональними функціями, апроксимантами Паде тощо, належать до напрямків наближення функцій, що активно розвиваються.

Ланцюгові дроби тісно пов'язані з раціональними апроксимаціями та апроксимантами Паде, ортогональними многочленами. Одним із узагальнень ланцюгових дробів є гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД), які запропоновані В. Я. Скоробогатьком. ГЛД можна використовувати в задачах наближення функцій багатьох змінних. Теорія ГЛД, двовимірних ланцюгових дробів та їх застосувань розвинута в роботах Д. І. Боднара, Х. Й. Кучмінської, М. О. Недашковського та їх учнів. Інтегральні ланцюгові дроби, які запропоновані М. С. Сявавком, узагальнюють ланцюгові дроби та ГЛД на випадок більш загальних функціональних просторів. Задачі інтерполяції функціоналів та операторів інтегральними ланцюговими дробами та операторними ланцюговими дробами у функціональних просторах досліджувалися в роботах В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова, І. І. Демківа, Б. Р. Михальчука та інших авторів.

Наближення функцій многочленами та їх узагальненнями належить до найбільш вивчених методів наближення функцій. Фундаментальні результати містяться в працях Н. І. Ахієзера, В. К. Дзядика, М. П. Корнейчука, Л. Коллатца, В. Крабса, В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова, Л. А. Яновича, П.–Ж. Лорана, А. С. Романюка, І. П. Натансона, С. М. Нікольського, О. І. Степанця, О. П. Тімана, Е. Чейні та багатьох інших. Інтерполяція функцій многочленами досліджувалася О. О. Гельфондом, А. А. Приваловим, Дж. Л. Уолшем, К. Йорданом та іншими авторами. В якості апарату наближення використовують сплайн–функції, раціональні функції та апроксиманти Паде.

В задачах наближення функцій однієї та багатьох змінних застосовують також інші підходи серед яких варто відзначити методи, які розроблені В. Л. Рвачовим та його учнями.

Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами вивчалася Ю. М. Вронським (1811, 1815–1817), Т. Н. Тіле (1909), Н. Е. Ньорлундом (1924), Ф. Е. Гілдебрандом (1956), Ф. М. Ларкіним (1967), Х. Й. Кучмінською, В. Семашко (1987), С. М. Возною (2007), С. С. Хлопоніним (1976, 1977), Л. В. Зарудняком (1975), Й. Тайн, К. Чжао, П. Ці (2000, 2001, 2004, 2006) та іншими авторами. Задачі екстраполяції функцій ланцюговими дробами та апроксимантами Паде розглянуті у монографіях К. Брежінскі, М. Р. Заглія та А. Сіді.

Враховуючи чудові властивості ланцюгових дробів: стійкість щодо збурень, двосторонність наближення і т.п., подальші дослідження інтерполяційних ланцюгових дробів, а також вивчення інших типів інтерполяційних ланцюгових дробів, які не є еквівалентними відомим типам, є актуальним напрямком дослідження в теорії функцій.

Існує декілька підходів до розвинення функцій у ланцюгові дроби. Історично першим із них був метод Ж.–Л. Лагранжа (1869) відшукання розв'язку диференціального рівняння Ріккаті у вигляді ланцюгового дробу. Якщо функція задовольняє рівняння Ріккаті при певних значеннях коефіцієнтів, то маємо розвинення функції в ланцюговий дріб. Узагальнення методу Лагранжа запропоновані С. Санієлевічем (1933), К. Купером, С. Купером, В. Джонсом (1991), Е. Меркесом, В. Скоттом (1962), А. Стокесом (1982). Інший спосіб отримати розвинення функції у правильний ланцюговий C–дріб із розвинення функції в степеневий ряд і передбачає обчислення чотирьох визначників Ганкеля для знаходження кожного коефіцієнта ланцюгового дробу. Метод побудови відповідного степеневому ряду ланцюгового $\delta$–дробу розглянуто в роботах Л. Ланге (1982), К. Балтуса, С. Купера, К. Кравіотто, Дж. МакКейба (1991).

Аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів є формула Т. Н. Тіле (1909), яка дозволяє отримати коефіцієнти розвинення функції в ланцюговий дріб послідовно обчислюючи обернені похідні Тіле функції. Формула Тіле та властивості обернених похідних Тіле досліджувалися Н. Е. Ньорлундом (1924), Л. Мілн–Томпсоном (1933), Г. Сельзером (1946), П. Клеменсом (1946), Д. Якобсом (1966) та Й. Тайном (2000).

Обґрунтування нових властивостей обернених похідних Тіле, отримання розвинень функції в ланцюгові дроби, дослідження обернених похідних інших типів, встановлення їх властивостей, обґрунтування нових аналогів формул типу Тіле та розвинення функцій в ланцюгові дроби нових типів є важливою і актуальною задачею.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертацію виконано на кафедрі машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій Мукачівського державного університету згідно із науково–дослідною темою "Наближення функцій однієї змінної ланцюговими дробами та конструктивні методи дослідження задач теорії диференціальних рівнянь", номера державної реєстрації 0113U008236, 0116U008704.

**Мета і завдання дослідження** Основна мета дисертаційного дослідження — це вивчення властивостей відомих та побудова нових інтерполянт у вигляді ланцюгового дробу, розробка і вдосконалення методів розвинення функцій в ланцюгові дроби.

*Об'єктом дослідження* є функціональні ланцюгові дроби над полем $\mathbb{C}$ в задачах інтерполяції функції та у задачах розвинення функцій в ланцюгові дроби.

*Предмет дослідження* є апроксимативні властивості інтерполяційних ланцюгових дробів (ІЛД), оцінки залишкових членів, способи розвинення функцій в ланцюгові дроби, області збіжності розвинень, апріорні та апостеріорні оцінки.

*Завдання дослідження:*

1. Знайти та обґрунтувати формулу залишкового члена для функціонального ІЛД дійсної змінної, елементи якого є многочлени.

2. Встановити оцінки знаменників підхідних дробів функціональних ІЛД комплексної змінної.

3. Отримати оцінки залишкових членів ІЛД Тіле та С–дробу, квазі–обернених ІЛД дробів типу Тіле та типу С–дробу, функціональних ІЛД та квазі–обернених функціональних ІЛД типу Тіле та типу С–дробу комплексної та дійсної змінних.

4. Дослідити задачу інтерполяції функціоналів інтегральними ланцюговими С–дробами на множині континуальних вузлів, встановити необхідні та достатні умови розв'язності задачі та показати, що в частинному випадку такий інтегральний ланцюговий дріб містить в собі інтерполяційний ланцюговий С–дріб.

5. Довести симетричність та дослідити властивості обернених поділених різниць 2–го типу, обернених поділених g–різниць та обернених поділених g–різниць 2–го типу.

6. Встановити взаємозв'язки між оберненими похідними Тіле та похідними функції. Довести теорему про обернену похідну Тіле многочлена та раціональної функції. Отримати розвинення функцій в ланцюговий дріб Тіле та правильний ланцюговий C–дріб. Обґрунтувати апріорні та апостеріорні оцінки, визначити області збіжності отриманих розвинень.

7. Дослідити властивості обернених похідних 2–го типу, обґрунтувати формулу типу Тіле для квазі–обернених ланцюгових дробів, встановити взаємозв'язки між оберненими похідними Тіле, оберненими похідними 2–го типу та похідними функції, довести теорему про обернену похідну 2–го типу многочлена і раціональної функції, отримати розвинення функцій в квазі–обернені ланцюгові дроби, знайти області збіжності розвинень, апріорні і апостеріорні оцінки.

8. Обґрунтувати властивості обернених g–похідних, отримати аналог формули Тіле для функціональних ланцюгових дробів та розвинення функцій в ланцюгові дроби такого типу.

9. Дослідити властивості обернених g–похідних 2–го типу, отримати аналог формули Тіле для квазі–обернених функціональних ланцюгових дробів та розвинення функцій.

*Методи дослідження.* Використовується апарат математичного та функціонального аналізу, теорії функцій комплексної змінної, аналітичної теорії ланцюгових дробів.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Результати роботи, що виносяться на захист, є новими і полягають в наступному:

1. Отримано оцінки знаменників підхідних дробів функціональних ланцюгових дробів загального вигляду та функціональних ланцюгових дробів з частинними знаменниками рівними одиниці, коли елементи ланцюгових дробів є функції комплексної змінної.

2. Знайдена та обґрунтована формула залишкового члена інтерполяційного функціонального ланцюгового дробу елементи якого є многочленами дійсної змінної.

3. Для різних типів інтерполяційних ланцюгових дробів, зокрема дробів Тіле, C–дробів, квазі–обернених типу Тіле та типу C–дробів, функціональних та квазі–обернених функціональних типу Тіле та

типу C–дробу:

– отримано формули знаходження коефіцієнтів за значеннями функції на множині вузлів;

– знайдено та обґрунтовано двосторонні оцінки залишкових членів у випадку інтерполювання функцій комплексної змінної, якщо коефіцієнти ланцюгових дробів задовольняють умови або типу Слєшинського–Прінґсгейма, або типу Пейдона–Уолла та збіжність інтерполяційних процесів;

– обґрунтовані оцінки залишкових членів у випадку інтерполювання функцій дійсної змінної.

4. Досліджено задачу інтерполяції функціонала, який заданий на множині континуальних вузлів, інтегральним інтерполяційним ланцюговим C–дробом, доведено необхідні та достатні умови розв'язності розглядуваної задачі. Показано, що інтегральний ланцюговий дріб C–дріб в частинному випадку містить в собі C–ІЛД.

5. Введено в розгляд обернені різниці 2–го типу, обернені g–різниці та обернені g–різниці 2–го типу, доведена симетричність розглянутих обернених різниць, встановлені властивості та рекурентні формули.

6. Встановлено нові властивості обернених похідних Тіле, доведена теорема про обернену похідну Тіле многочлена та раціональної функції, отримані розвинення функцій у ланцюгові дроби Тіле та правильні ланцюгові C–дроби, знайдені області збіжності розвинень, апріорні та апостеріорні оцінки.

7. Введено в розгляд обернені похідні 2–го типу, обґрунтовані їх властивості та формула типу Тіле для квазі–оберненого ланцюгового дробу, доведена теорема про обернену похідну 2–го типу многочлена та раціональної функції, отримані розвинення функцій в квазі–обернені ланцюгові дроби, встановлені області збіжності розвинень, апріорні та апостеріорні оцінки.

8. Спираючись на введені в розгляд обернені g–похідні та встановлені властивості обернених g–похідних, обґрунтовано функціональну формулу типу Тіле, отримано розвинення функцій у функціональні ланцюгові дроби.

9. Введено в розгляд обернені g–похідні 2–го типу, доведено рекурентну формулу для обчислення g–похідних 2–го типу, обґрунтовано властивості обернених g–похідних 2–го типу та функціональну

формулу типу Тіле для квазі–обернених функціональних ланцюгових дробів, отримано розвинення функцій в ланцюгові дроби такого вигляду.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертаційної роботи носять теоретичний характер і можуть бути використані при подальших дослідженнях в теорії ланцюгових дробів та в теорії наближення функцій. Їх можна використати в дослідженнях з математичного та комплексного аналізу, диференціальних рівнянь та обчислювальної математики. Практичне значення полягає в тому, що розроблені автором алгоритми можуть бути імплементовані у сучасне математичне забезпечення ЕОМ, у тій частині, що стосується наближення функцій.

**Особистий внесок здобувача.** Всі результати отримані здобувачем самостійно, а у роботах, які опубліковані у співавторстві, внесок всіх авторів є рівноцінним.

**Апробація результатів дисертації.** Результати роботи доповідалися на:

— Українському математичному конгресі – 2001 (до 200–річчя з дня народження М.В. Остроградського), Київ, 21–23 серпня 2001;

— Міжнародній школі–семінарі "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування" (до 75–річчя з дня народ. проф. В. Я. Скоробогатька), Ужгород, 19–24 серпня 2002;

— Міжнародній конференції "Шості Боголюбовські читання", Чернівці, 25–29 серпня 2003;

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 27 вересня– 1 жовтня 2004;

— Conference "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics II", dedicated to the memory of A. Ya. Dorogovtsev (1935–2004), Київ, 1–5 жовтня, 2004;

— Міжнародній науковій конференції "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування", Ужгород, 18–23 вересня, 2006;

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, 24–28 вересня, 2007;

— II Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми механіки і математики", Львів, 25–29 травня 2008;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", Мелітополь, 16–21 червня 2008;

— Міжнародній науковій конференції "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III", Світязь, 22–26 серпня 2009;

— Українському математичному конгресі –2009 (до 100–річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова), Київ, 27–29 серпня 2009;

— International Conference on Complex Analysis, Львів, 31 травня – 5 червня, 2010;

— International Conference in Modern Analysis, Донецьк, 20–23 червня, 2011;

— Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", присвяченій 70–річчю з дня народження члена–кореспондента НАН України, професора О. І. Степанця (1942–2007), Кам'янець–Подільський, 28 травня–3 червня, 2012;

— International Conference dedicate to the 120th anniversary of Stefan Banach, Львів, 17–21 вересня, 2012;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвяченій 70–річчю професора В. В. Маринця, Ужгород, 27–29 вересня 2012;

— Міжнародній конференції "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування", з нагоди 75–річчя з дня народження академіка НАН України А. М. Самойленка, Севастополь, 23–30 червня 2013;

— VII Міжнародній конференції імені академіка І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", Київ, 9–10 жовтня 2014;

— International V. Skorobohatko mathematical conference, Дрогобич, 25–28 серпня, 2015;

— VIII Міжнародній конференції імені академіка І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика", Київ, 8–9 жовтня 2015;

— Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвяченій 70–річчю академіка НАН України М. О. Перестюка, Ужгород, 19–21 травня 2016;

— 24–th International conference on finite or infinite dimensional complex analysis and application, Jaipur, India, August 22–26, 2016;

— Міжнародній конференції "Теорія наближення функцій та її застосування", Слов'янськ, 28 травня – 3 червня, 2017;

— семінарах кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики Ужгородського національного університету (керівник семінару проф. Маринець В. В.);

— семінарах кафедри машинобудування, природничих дисциплін та інформаційних технологій Мукачівського державного університету (керівники семінару проф. Мигалина Ю. В., доц. Питьовка О. Ю., доц. Кабацій В. М.);

— семінарах відділу теорії функцій Інституту математики НАН України, 8 червня 2007, 19 листопада 2010, 22 лютого, 20 грудня 2013, 27 березня 2014, 16 жовтня 2015, 15 квітня 2016, 10 лютого 2017 (керівники семінару член.–кор. НАН України, проф. $\boxed{\text{Степанець О. І.}}$, проф. Романюк А. С.);

— семінарі "Сучасний аналіз" в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, 14 грудня 2014 року, (керівники семінару проф. Шевчук І. О., проф. Курченко О. О., проф. Радченко В. М.);

— семінарі "Аналітична теорія неперервних та гіллястих ланцюгових дробів", 23 березня 2014, 19 лютого 2015, 14 травня 2015, (керівники семінару проф. Боднар Д. І., доктор фіз.–мат. наук Кучмінська Х. Й.);

— Львівському міжвузівському семінарі з теорії аналітичних функцій, 16 березня 2017, (керівник семінару проф. Скасків О. Б.);

— міжвузівському семінарі по теорії функцій в Дніпропетровському національному університеті імені Олеся Гончара, 18 березня 2015, (керівник семінару член.–кор. НАН України, проф. Моторний В. П.);

— на виїзному засіданні Бюро відділення математики НАН України і секції математики та математичного моделювання Західного наукового центру НАН України і МОН України, 24–25 листопада 2010 року, м. Ужгород.

**Публікації.** Основні результати дисертаційної роботи викладено у 51 науковій публікації [1–51], із яких 1 монографія [1], 28 статей у наукових виданнях, внесених до переліку фахових видань із фізико–математичних наук, 6 з них [5,8,10,12,17,22] надруковано у виданнях, внесених до міжнародних науково–метричних баз Web of Science та Scopus.

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається із переліку умовних позначень, вступу, семи розділів з висновками, додатку та списку використаних джерел, що містить 191 найменування. Повний обсяг роботи становить 372 сторінки друкованого тексту.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

Дисертаційна робота присвячена задачам наближення функцій ланцюговими дробами і умовно ділиться на дві взаємозв'язані частини — інтерполяцію функцій ланцюговими дробами та розвинення функцій в ланцюгові дроби. Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами досліджена в розділах 2–4, методи розвинення функцій в ланцюгові дроби вивчалися в розділах 5–7.

У **вступі** визначено об'єкт і предмет дослідження, обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і завдання, охарактеризовано методи дослідження, його наукову новизну, теоретичне і практичне значення, зазначено повноту викладення матеріалу в працях та його ступінь апробації, описано структуру дисертаційної роботи та її основний зміст.

У **першому розділі** дано огляд літератури за темою дисертації, сформульовано означення основних понять та наведено відомі результати, які, зокрема, стосуються задач наближення функцій многочленами, апроксимантами Паде та ланцюговими дробами.

Нехай $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ — компакт, $C(\mathcal{Z})$ — простір неперервних на $\mathcal{Z}$ функцій з рівномірною нормою $||f||_{C(\mathcal{Z})} = \max_{z\in\mathcal{Z}} |f(z)|$. Функція $f(z) \in$ $\in C(\mathcal{Z})$ визначена значеннями в точках множини

$$\mathbf{Z} = \{z_i : z_i \in \mathcal{Z}, z_i \neq z_j, i, j = \overline{0,n}\},\ w_i = f(z_i), \quad i = \overline{0,n}. \tag{1.16}$$

Поряд із множиною $\mathbf{Z}$ розглядається нескінченна трикутну матриця інтерполяційних вузлів

$$\mathcal{I} = \left(z_0^{(n)}, z_1^{(n)}, \cdots, z_n^{(n)}\right), \quad z_i^{(n)} \in \mathcal{Z},\ i = \overline{0,n},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.21}$$

Під ланцюговим дробом над полем $\mathbb{C}$ та його $n$–м підхідним дробом, $n$–м наближенням розуміють вирази

$$D = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n + \ddots}}}, \quad D_n = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots + \cfrac{a_n}{b_n}}},$$

де $b_0, a_i, b_i \in \mathbb{C}, a_i \neq 0, i \in \mathbb{N}$, які скорочено записують так

$$D = b_0 + \operatorname*{K}_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{b_i} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \, {}_{+} \, \frac{a_2}{b_2} \, {}_{+} \, \frac{a_3}{b_3} \, {}_{+} \, \cdots \, {}_{+} \, \frac{a_n}{b_n} \, {}_{+} \, \cdots \, ,$$

$$D_n = b_0 + \operatorname*{K}_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} \, {}_{+} \, \frac{a_2}{b_2} \, {}_{+} \, \frac{a_3}{b_3} \, {}_{+} \, \cdots \, {}_{+} \, \frac{a_n}{b_n}.$$

На компакті $\mathcal{Z}$ розглядається послідовності дробово–лінійних перетворень $\{v_k(z)\}$, де $f(z) = v_0(z)$, $v_k(z) = v_k(z_k) + \frac{z - z_k}{v_{k+1}(z)}$, $z_k \in \mathbf{Z}$, $k = \overline{0, n}$, та послідовність $\{V_k(z)\}$, де $V_0(z) = v_0(z)$, $V_k(z) = v_0 \circ v_1 \circ \cdots \circ v_k(z)$, $k = \overline{1, n}$.

Функція $f(z)$ подається ланцюговим дробом

$$f(z) = b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} \, {}_{+} \, \frac{z - z_1}{b_2} \, {}_{+} \, \cdots \, {}_{+} \, \frac{z - z_{n-1}}{b_n} \, {}_{+} \, \frac{z - z_n}{v_{n+1}(z)} \, , \quad (1.24)$$

де $b_i, i = \overline{0, n}$ — коефіцієнти, $v_{n+1}(z)$ — залишок.

Ланцюговий дріб

$$D_n^{(T)}(z) = \frac{P_n^{(T)}(z)}{Q_n^{(T)}(z)} = b_0 + \operatorname*{K}_{i=1}^{n} \frac{z - z_{i-1}}{b_i}, \quad (1.26)$$

який на множині точок (1.16) задовольняє інтерполяційну умову $D_n^{(T)}(z_i) = f(z_i)$ називається *інтерполяційним ланцюговим дробом Тіле* (Т–ІЛД). Коефіцієнти Т–ІЛД визначаються через обернені різниці $\rho_i[z_0, z_1, \ldots, z_i; f], i = \overline{0, n}$, наступним чином

$$b_0 = \rho_0[z_0; f], \qquad b_1 = \rho_1[z_0, z_1; f],$$
$$b_k = \rho_k[z_0, \ldots, z_k; f] - \rho_{k-2}[z_0, \ldots, z_{k-2}; f], \qquad k = \overline{2, n},$$

які в свою чергу обчислюються за рекурентною формулою

$$\rho_k[z_0,\ldots,z_k;f]=\rho_{k-2}[z_0,\ldots,z_{k-2};f]+$$

$$+\frac{z_k-z_{k-1}}{\rho_{k-1}[z_0,\ldots,z_{k-2},z_k;f]-\rho_{k-1}[z_0,\ldots,z_{k-2},z_{k-1};f]},\qquad k=\overline{2,n},$$

$$\rho_0[z_0;f]=f(z_0),\qquad \rho_1[z_0,z_1;f]=\frac{z_1-z_0}{f(z_1)-f(z_0)}.$$

Обернена різниця $\rho_k[z_0,\ldots,z_k;f], k=\overline{1,n}$, симетрична відносно аргументів $z_0,\ldots,z_k$.

Якщо існує границя (скінченне значення, або $\infty$) оберненої різниці $k$–го порядку $\rho_k[z_0,z_1,\ldots,z_k;f]$, коли вузли $z_0,z_1,\ldots,z_k\to z_*$, де $z_*\in\mathcal{Z}$, то граничне значення називається *оберненою похідною Тіле* $k$–го порядку функції $f(z)$ в точці $z_*$ і позначається ${}^{(k)}f(z_*)$.

Обернені похідні Тіле обчислюють за рекурентною формулою

$$\begin{aligned}&{}^{(k)}f(z_*)=k\,\grave{}\big({}^{(k-1)}f(z_*)\big)+{}^{(k-2)}f(z_*),\qquad k\in\mathbb{N}_2=\mathbb{N}\backslash\{1\},\\&{}^{(0)}f(z_*)=f(z_*),\ \grave{}f(z_*)={}^{(1)}f(z_*)=1/f'(z_*).\end{aligned}$$

Якщо у деякому околі точки $z=z_*$ функція $f(z)$ має нескінченну кількість відмінних від нуля обернених похідних Тіле, то отримаємо розвинення функції у *ланцюговий дріб Тіле* (Т–ЛД)

$$f(z)=b_0(z_*)+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{\infty}\frac{z-z_*}{b_k(z_*)},\tag{1.73}$$

де

$$b_0(z_*)=f(z_*),\ b_1(z_*)=\grave{}f(z_*),\ b_k(z_*)={}^{(k)}f(z_*)-{}^{(k-2)}f(z_*),\ k\in\mathbb{N}_2.$$

**Розділ 2** присвячений інтерполяції функцій ланцюговими дробами Тіле та типу С–дробу.

У **підрозділі 2.1** встановлюються деякі загальні властивості скінчених функціональних ланцюгових дробів (ФЛД)

$$D_n(z)=\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}=b_0(z)+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n}\frac{a_i(z)}{b_i(z)}.\tag{2.2}$$

Доведені дві теореми.

**Теорема 2.2.** *Якщо частинні чисельники $a_i(z)$ та частинні знаменники $b_i(z)$ ФЛД (2.2) задовольняють умови $0 < |a_i(z)| \leqslant \delta$, $0 < \gamma \leqslant |b_i(z)|, \forall z \in \mathcal{Z}, i = \overline{1,n}$, то*

$$|Q_n(z)| < \left|B_1^{[n]}(z)\right| \kappa_{n+1}(\omega), \tag{2.12}$$

*де*

$$B_1^{[n]}(z) = \prod_{i=1}^{n} b_i(z), \kappa_n(\omega) = \frac{(1+\sqrt{1+4\omega})^n - (1-\sqrt{1+4\omega})^n}{2^n\sqrt{1+4\omega}}, \omega = \frac{\delta}{\gamma^2}.$$

**Теорема 2.4.** ***(A)*** *Якщо частинні чисельники $a_i(z), i = \overline{2,n}$, скінченного ФЛД*

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = a_0(z) + \mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n} \frac{a_i(z)}{1} \tag{2.14}$$

*для всіх $z \in \mathcal{Z}$ задовольняють умову типу Пейдона–Уолла*

$$|a_i(z)| \leqslant t(1-t), \qquad \text{де} \quad 0 < t \leqslant \tfrac{1}{2}, \tag{2.15}$$

*то канонічний знаменник $Q_n$ ФЛД (2.14) задовольняє нерівність*

$$|Q_n(z)| \geqslant \Omega_n(t), \tag{2.16}$$

$$\Omega_n(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-t)^{n+2} - t^{n+2}}{(1-t)^{n+1} - t^{n+1}}, & \text{якщо} \quad 0 < t < \tfrac{1}{2}, \\ \dfrac{n+2}{2(n+1)}, & \text{якщо} \quad t = \tfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.17}$$

***(B)*** *Якщо для всіх $z \in \mathcal{Z}$ частинні чисельники $a_i(z)$, ФЛД (2.14) задовольняють умову (2.15) і крім того $|a_1(z)/a_0(z)| \leqslant t(1-t)$, то канонічний чисельник $P_n$ задовольняє нерівність*

$$|P_n(z)| \geqslant |a_0(z)|\, \Omega_{n+1}(t). \tag{2.18}$$

У **підрозділі 2.2** із множини ФЛД вигляду (2.2) виділяється клас інтерполяційних функціональних ланцюгових дробів (ІФЛД), тобто ланцюгових дробів, які в точках множини (1.16) задовольняють умову

$$f(z_i) = D_l(z_i),\ i = \overline{0,n},\ l = l(n). \tag{2.27}$$

Досліджується також задача інтерполяції функцій дійсної змінної, які задані значеннями на множині вузлів

$$X = \{x_i\ :\ x_i \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}, x_i \neq x_j, i \neq j,\ i,j = \overline{0,n}\}, \tag{2.28}$$

ланцюговим дробом

$$D_l(x) = \frac{P_l(x)}{Q_l(x)} = b_0(x) + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{l} \frac{a_k(x)}{b_k(x)}, \quad l = l(n). \tag{2.29}$$

**Теорема 2.5.** *Нехай функція $f(x)$ визначена на компакті $\mathcal{R} \subset \subset \mathcal{R}$ і за значеннями в точках множини (2.28) інтерполюється ІФЛД (2.29), частинні чисельники $a_i(x)$ та знаменники $b_i(x)$ якого є многочлени від змінної $x$ і виконуються наступні умови:* ***(A)*** *функція $f(x) = f_1(x)/\omega_m(x)$, де $\omega_m(x) = \prod_{s=1}^{p}(x-\mu_s)^{k_s}$, $\sum_{s=1}^{p} k_s = m$, $\mu_s, s = \overline{1,p}$, — точки розриву 2–го роду функції $f(x)$ на $\mathcal{R}$, функція $f_1(x) \in \mathbf{C}^{(n)}(\mathcal{R})$ і має похідну $(n+1)$–го порядку;* ***(B)*** *степінь многочлена канонічного чисельника $P_l(x)$ задовольняє нерівність $\mathbf{deg}\left(P_l(x)\cdot\omega_m(x)\right) \leqslant n$;* ***(C)*** *вузли інтерполяції не збігаються з полюсами функції, тобто $\mu_i \neq x_j, i = \overline{1,p}, j = \overline{0,n}$, де $x_j \in X$. Тоді для довільного значення $x \in \Gamma = \mathcal{R}\backslash\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p\}$ існує така точка $\xi \in \mathbf{Int}\,\mathcal{R}$, що*

$$f(x) - D_l(x) = \frac{\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)}{(n+1)!\,Q_l(x)\,\omega_m(x)}\,\frac{\mathrm{d}^{n+1}(f_1(x)Q_l(x))}{\mathrm{d}\,x^{n+1}}\Big|_{x=\xi}. \tag{2.31}$$

У **підрозділі 2.3** досліджується Т–ІЛД. В **теоремі 2.6** доведено, що коефіцієнти Т–ІЛД (1.26) можна також визначати за допомогою рекурентного співвідношення у вигляді ланцюгового дробу.

**Теорема 2.7.** ***(A)*** *Нехай для функції $f(z)$, яка визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ і задана значеннями в точках множини $\mathbf{Z}$, побудований Т–ІЛД, коефіцієнти якого задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма $|b_k| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}} + 1, d_{\mathcal{Z}} = \mathbf{diam}\,\mathcal{Z}, d_{\mathcal{Z}} \neq 1,$*

$k=\overline{1,n}$. ***(B)*** *Нехай існує підмножина $\mathscr{X} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, що в кожній точці $z_* \in \mathscr{X}$ частинний знаменник $v_{n+1}(z_*)$ ланцюгового дробу (1.24) задовольняє нерівність $|v_{n+1}(z_*)| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}}+1$. Тоді*

$$\frac{\min\limits_{z_*\in\mathscr{X}} \prod\limits_{i=0}^{n} |z_*-z_i|}{\left|B_1^{[n]}\right|^2 b_{n+1}^* \, \kappa_{n+2}(\omega)\, \kappa_{n+1}(\omega)} \leqslant \max_{z_*\in\mathscr{X}} |f(z_*)-D_n^{(T)}(z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(d_{\mathcal{Z}}-1)^2 \max\limits_{z_*\in\mathscr{X}} \prod\limits_{i=0}^{n} |z_*-z_i|}{((d_{\mathcal{Z}})^{n+2}-1)\,((d_{\mathcal{Z}})^{n+1}-1)}, \qquad b_{n+1}^* = \min_{z_*\in\mathscr{X}} |v_{n+1}(z_*)|.$$

Розглянуто питання збіжності інтерполяційного процесу Тіле для нескінченної матриці інтерполяційних вузлів $\mathcal{I}$.

**Теорема 2.8.** ***(A)*** *Нехай функція $f(z)$ визначена на $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$.* ***(B)*** *Нехай для кожного фіксованого $n$:* ***(B1)*** *коефіцієнти Т–ІЛД (1.26), який побудований за значеннями функції у вузлах $(n+1)$–го рядка матриці інтерполяційних вузлів (1.21), задовольняють умову $|b_k^{(n)}| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}}+1$, $k=\overline{1,n}$;* ***(B2)*** *існує така множина $\mathscr{X} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathcal{I}$, що для довільного $z_* \in \mathscr{X}$ частинний знаменник $v_{n+1}(z)$ ланцюгового дробу (1.24) задовольняє нерівність $\left|v_{n+1}(z_*)\right| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}}+1$. Тоді $\lim_{n\to\infty} \max_{z_*\in\mathscr{X}} |f(z_*)-D_n^{(T)}(z_*)| = 0$.*

Основний результат **підрозділу 2.4** складає наступна теорема.

**Теорема 2.9.** *Нехай функція дійсної змінної $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$. За значеннями функції $f(x)$ в точках множини (2.28) побудований Т–ІЛД. Тоді залишковий член Т–ІЛД задовольняє нерівність*

$$\left| f(x) - \frac{P_n^{(T)}(x)}{Q_n^{(T)}(x)} \right| \leqslant \frac{\prod_{k=0}^{n} |x-x_k|}{(n+1)!\,|Q_n^{(T)}(x)|}\, f^*\,(b^*)^n \big(\kappa_{n+1}(\omega) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{\beta^{2m}} \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\omega^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n-2(m+i)+j)\big)\ ,$$

*де* $b^* = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |b_i|$, $f^* = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant l} \max\limits_{x\in\mathcal{R}} \left|f^{(n+1-i)}(x)\right|$, $\beta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |b_i|$, $\omega = \frac{\alpha}{\beta^2}$, $l=[n/2]$, $\alpha = d_{\mathcal{R}}$.

У **підрозділі 2.5** визначено послідовності $\{v_k(z)\}$ та $\{V_k(z)\}$ наступним чином

$$f(z) = v_0(z), v_0(z) = v_0(z_0) + v_1(z)(z - z_0), v_k(z) = \frac{v_k(z_k)}{1 + v_{k+1}(z)(z - z_k)},$$

$$V_0(z) = v_0(z),\ V_k(z) = v_0 \circ \cdots \circ v_k(z),\ k = \overline{1,n},\ z_i \in \mathbf{Z}, i = \overline{0,n}.$$

Функцію $f(z)$ можна подати ланцюговим дробом

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1(z - z_0)}{1} \underset{+}{} \frac{a_2(z - z_1)}{1} \underset{+}{} \cdots \underset{+}{} \frac{a_n(z - z_{n-1})}{1} \underset{+}{} \frac{v_{n+1}(z)(z - z_n)}{1}. \tag{2.61}$$

Якщо ланцюговий дріб

$$D_n^{(c)}(z) = a_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k\,(z - z_{k-1})}{1}. \tag{2.63}$$

у інтерполяційних вузлах (1.16) задовольняє інтерполяційну умову (2.27), то його називають *інтерполяційним ланцюговим дробом типу C–дробу* (C–ІЛД).

В **теоремі 2.11** обґрунтовано рекурентне співвідношення для визначення коефіцієнтів $a_i, i = \overline{0,n}$ C–ІЛД (2.63). C–ІЛД (2.63) буде еквівалентний T–ІЛД (1.26). Але коефіцієнти C–ІЛД (2.63) не задовольняють умови теореми 2.7.

**Теорема 2.12.** ***(A)*** *Нехай функція $f(z)$ визначена на $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$;* ***(B)*** *нехай коефіцієнти C–ІЛД (2.63) $a_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$, і виконується умова типу Пейдона–Уолла $\max\limits_{z\in\mathcal{Z}} |a_k(z - z_{k-1})| \leqslant t(1-t)$, де $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, $k = \overline{2,n}$;*
***(C)*** *нехай знайдеться множина $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, що в довільній точці $z_* \in \mathscr{Z}$ частинний чисельник $v_{n+1}(z)(z - z_n)$ ланцюгового дробу (2.61) задовольняє умови $v_{n+1}(z_*) \neq 0$, $\max\limits_{z\in\mathcal{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z - z_n)| \leqslant \leqslant t(1-t)$. Тоді*

$$\frac{\tilde{a}_{n+1} \min_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n} |a_i(z_* - z_{i-1})|}{\kappa_{n+1}(\delta)\, \kappa_{n+2}(\delta_*)} \leqslant \max_{z_*\in\mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{a}_{n+1} \max_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod_{i=1}^{n} |a_i(z_* - z_{i-1})|}{\Omega_n(t)\, \Omega_{n+1}(t)},$$

*де* $\tilde{a}_{n+1} = \min\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z_* - z_n)|$, $\bar{a}_{n+1} = \max\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z_* - z_n)|$, $\delta = \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} |a_i|\, d_{\mathcal{Z}}$, $\delta_* = \max\{\delta, |\bar{a}_{n+1}|\}\, d_{\mathcal{Z}}$.
В **теоремі 2.13** доведена збіжність інтерполяційного процесу для С–ІЛД на матриці вузлів $\mathcal{I}$.

Основний результат **підрозділу 2.6** складає теорема.

**Теорема 2.14.** *Нехай функція* $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$ *і за значеннями функції у вузлах (2.28) побудований С–ІЛД (2.63). Тоді залишковий член С–ІЛД задовольняє нерівність*

$$\left| f(x) - \frac{P_n^{(c)}(x)}{Q_n^{(c)}(x)} \right| \leqslant \frac{f^* \prod_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)!\, |Q_n^{(c)}(x)|} \Big( \kappa_{n+1}(\rho) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{l} \mathrm{C}_{n+1}^{m} (a^*)^m \sum_{i=0}^{l-m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j) \Big), \quad l = [n/2],$$

*де* $f^* = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant l} \max\limits_{x \in \mathcal{R}} \left| f^{(n+1-i)}(x) \right|$, $a^* = \max\limits_{2 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$, $\rho = a^* \mathbf{diam}\, \mathcal{R}$.

В **підрозділі 2.7** досліджена задача інтерполяції функціонала, заданого на множині континуальних вузлів, інтегральними ланцюговими С–дробами. Отримано необхідні умови (**теорема 2.16**) та достатні умови (**теорема 2.17**) розв'язності розглядуваної задачі. В **теоремі 2.18** обґрунтовано, що у частковому випадку інтегральний ланцюговий дріб містить в собі С–ІЛД (2.63).

**Розділ 3** присвячений теорії інтерполяції функцій квазі–оберненими ланцюговими дробами.

В **підрозділі 3.1** уточнено деякі твердження з розділів 1 та 2, що стосуються розглядуваних типів ланцюгових дробів.

Квазі–обернений інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле (Т–КІЛД) досліджується в **підрозділі 3.2**. Показано, що функція $f(z)$ може бути подана у вигляді

$$f(z) = \left( d_0 + \frac{z - z_0}{d_1} \;+\; \cdots \;+\; \frac{z - z_{n-1}}{d_n} \;+\; \frac{z - z_n}{v_{n+1}(z)} \right)^{-1}, \qquad (3.13)$$

де $z_k \in \mathbf{Z}$, $d_k, k = \overline{0,n}$, — деякі коефіцієнти, $v_{n+1}(z)$ — залишок. Т–КІЛД записується у вигляді

$$\tilde{D}_n^{(T)}(z) = \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(z)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(z)} = \left( d_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{z - z_{k-1}}{d_k} \right)^{-1}. \tag{3.15}$$

В **теоремі 3.2** доведена рекурентна формула визначення коефіцієнтів Т–КІЛД (3.14).

**Теорема 3.4.** ***(A)*** *Нехай функція $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$.* ***(B)*** *Нехай коефіцієнти Т–КІЛД (3.15), які визначені за значеннями функції на множині $\mathbf{Z}$, задовольняють умову типу Слешинського–Прінґсгейма $|d_k| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}} + 1$, $k = \overline{1,n}$.* ***(C)*** *Нехай існує така множина $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z} \backslash \mathbf{Z}$, що в довільній точці $z_* \in \mathscr{Z}$ частинний знаменник $v_{n+1}(z)$ ланцюгового дробу (3.13) задовольняє умову $|v_{n+1}(z_*)| \geqslant \beta \geqslant d_{\mathcal{Z}} + 1$, тоді*

$$\frac{\min\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod\limits_{i=0}^{n} |z_* - z_i|}{\kappa_{n+3}(\omega^*)\, \kappa_{n+2}(\omega)\, d_{n+1}^* \prod\limits_{i=0}^{n} |d_i|^2} \leqslant \max_{z_* \in \mathscr{Z}} |f(z_*) - \tilde{D}_n^{(T)}(z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{z_* \in \mathscr{Z}} \prod\limits_{i=0}^{n} |z_* - z_i|}{|\Upsilon_n|\, |\Upsilon_{n+1}|}, \qquad d_{n+1}^* = \min_{z_* \in \mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)|, \ \omega = \frac{d_{\mathcal{Z}}}{\beta^2},$$

*де*

$$\Upsilon_n = \begin{cases} d_{\mathcal{Z}}\, \kappa_n(\omega) \prod\limits_{k=2}^{n} |d_k| - \beta \dfrac{(d_{\mathcal{Z}})^{n+1} - 1}{d_{\mathcal{Z}} - 1}, & \text{якщо} \quad d_{\mathcal{Z}} \neq 1, \\ \kappa_n(\omega) \prod\limits_{k=2}^{n} |d_k| - (n+1)\beta, & \text{якщо} \quad d_{\mathcal{Z}} = 1. \end{cases}$$

В **теоремі 3.5** доведена збіжність інтерполяційного Т–КІЛД процесу на матриці $\mathcal{I}$.

В **підрозділі 3.3** введено в розгляд обернені поділені різниці 2–го типу та їх лінійно комбінація — обернені різниці 2–го типу. В **теоремі 3.6** доведено, що відносно своїх аргументів $z_0, z_1, \ldots, z_k$ обернена різниця 2–го типу $k$–го порядку $\rho_k^{(2)}[z_0, z_1, \ldots, z_k; f]$ є симетричною функцією.

В **підрозділі 3.4** розглядається Т–КІЛД дійсної змінної

$$\tilde{D}_n^{(T)}(x) = \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(x)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(x)} = \left(d_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{x - x_{k-1}}{d_k}\right)^{-1}. \qquad (3.27)$$

**Теорема 3.7.** *Нехай функція дійсної змінної $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, коефіцієнти ланцюгового дробу (3.27), який побудований за значеннями функції $f(x)$ в інтерполяційних вузлах (2.28), відмінні від нуля, тоді*

$$\left| f(x) - \frac{\tilde{P}_n^{(T)}(x)}{\tilde{Q}_n^{(T)}(x)} \right| \leqslant \frac{f^* \left| B_0^{[n]} \right| \prod_{k=0}^{n} |x - x_k|}{(n+1)! \, |\tilde{Q}_n^{(T)}(x)|} \Bigg( \kappa_{n+2}(\omega) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{r} \mathrm{C}_{n+1}^{m} \frac{1}{(d_*)^{2m}} \sum_{i=0}^{r-m} \frac{\omega^i}{i!} \prod_{j=1}^{m+i} (n - 2(m+i) + j + 1) \Bigg), \quad r = \left[\tfrac{n+1}{2}\right],$$

$$f^* = \max_{0 \leqslant i \leqslant r} \max_{x \in \mathcal{R}} \left| f^{(n+1-i)}(x) \right|, \; B_0^{[n]} = \prod_{i=0}^{n} d_i, \; d_* = \min_{0 \leqslant i \leqslant n} |d_i|, \omega = \frac{d_{\mathcal{R}}}{(d_*)^2}.$$

**Підрозділ 3.5** присвячений квазі–оберненому інтерполяційному ланцюговому дробу типу С–дробу (С–КІЛД). Нехай $z_k \in \mathbf{Z}$, $k = \overline{0, n}$, тоді функцію $f(z)$ можна подати ланцюговим дробом вигляду

$$f(z) = \frac{1}{e_0 +} \, \frac{e_1(z - z_0)}{1} \, + \cdots + \, \frac{e_n(z - z_{n-1})}{1} \, + \, \frac{v_{n+1}(z)(z - z_n)}{1}, \quad (3.37)$$

де $e_k$ — коефіцієнти, $k = \overline{0, n}$, $v_{n+1}(z)$ — залишок. С–КІЛД буде ланцюговий дріб

$$\tilde{D}_n^{(c)}(z) = \frac{\tilde{P}_n^{(c)}(z)}{\tilde{Q}_n^{(c)}(z)} = \left(e_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{e_k(z - z_{k-1})}{1}\right)^{-1}. \qquad (3.39)$$

**Теорема 3.10.** ***(A)*** *Нехай функція $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$.* ***(B)*** *Нехай всі коефіцієнти С–КІЛД (3.39) не нулі і виконується умова типу Пейдона–Уолла: $\max\limits_{z \in \mathcal{R}} \left| e_1(z - z_0)/e_0 \right| \leqslant t(1-t)$,*

$0 < t \leqslant \frac{1}{2}, \max\limits_{z\in\mathcal{R}} |e_i(z-z_{i-1})| \leqslant t(1-t), i = \overline{2,n}$. ***(C)*** *Нехай існує множина* $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, *що для довільної точки* $z_* \in \mathscr{Z}$ *частинний чисельник ланцюгового дробу (3.37) задовольняє умови* $v_{n+1}(z_*) \neq 0$, $\max\limits_{z\in\mathcal{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z-z_n)| \leqslant t(1-t)$. *Тоді*

$$\frac{\tilde{e}_{n+1}\min_{z_*\in\mathscr{Z}}\prod_{i=1}^{n}|e_i(z_*-z_{i-1})|}{|e_0|^2\,\kappa_{n+2}(\delta)\,\kappa_{n+3}(\delta_*)} \leqslant \max_{z_*\in\mathscr{Z}}|f(z_*)-\tilde{D}_n^{(c)}(z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{e}_{n+1}\max_{z_*\in\mathscr{Z}}\prod_{i=1}^{n}|e_i(z_*-z_{i-1})|}{|e_0|^2\,\Omega_{n+1}(t)\,\Omega_{n+2}(t)},$$

*де* $\tilde{e}_{n+1} = \min\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z_*-z_n)|$, $\bar{e}_{n+1} = \max\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} |v_{n+1}(z_*)(z_*-z_n)|$, $\delta = \max\{\max\limits_{2\leqslant i\leqslant n}|e_i|, |e_1/e_0|\}\cdot d_{\mathcal{Z}}$, $\delta_* = \max\{\delta, \bar{e}_{n+1}\}\cdot d_{\mathcal{Z}}$.

В **теоремі 3.11** доведено, що на матриці вузлів $\mathcal{I}$ інтерполяційний процес С–КІЛД буде збіжним.

В **підрозділі 3.6** отримана оцінка залишкового члена С–КІЛД у випадку інтерполяції функції дійсної змінної.

**Теорема 3.12.** *Нехай функція дійсної змінної* $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$, *за значеннями функції у вузлах (2.28) побудований С–КІЛД*

$$\tilde{D}_n^{(c)}(x) = \frac{\tilde{P}_n^{(c)}(x)}{\tilde{Q}_n^{(c)}(x)} = \left(e_0 + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{e_k(x-x_{k-1})}{1}\right)^{-1},$$

*коефіцієнти якого відмінні від нуля. Тоді*

$$\left|f(x) - \frac{\tilde{P}_n^{(c)}(x)}{\tilde{Q}_n^{(c)}(x)}\right| \leqslant \frac{|e_0|f^*\prod_{k=0}^{n}|x-x_k|}{(n+1)!\,|\tilde{Q}_n^{(c)}(x)|}\Big(\kappa_{n+2}(\delta)+$$

$$+\sum_{m=1}^{r}\mathrm{C}_{n+1}^{m}(e^*)^m\sum_{i=0}^{r-m}\frac{\delta^i}{i!}\prod_{j=1}^{m+i}(n-2(m+i)+j+1)\Big),$$

*де* $f^* = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant r}\max\limits_{x\in\mathcal{R}}\left|f^{(n+1-i)}(x)\right|, \delta = d_{\mathcal{R}}e^*, e^* = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|e_i|, r = [\frac{n+1}{2}]$.

**Розділ 4** дисертаційної роботи присвячено функціональним інтерполяційним ланцюговим дробам. Однолиста на компакті $\mathcal{Z}$ функція $g(z)$ називається *базис–функцією*.

В **підрозділі 4.1** досліджується функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле (Т–ФІЛД). Якщо послідовності $\{v_k(g;z)\}$ та $\{V_k(g;z)\}$ визначено наступним чином

$$f(z) = v_0(g;z),\, v_k(g;z) = v_k(g;z_k) + \frac{g(z)-g(z_k)}{v_{k+1}(g;z)}, \quad z_k \in \mathbf{Z},$$

$$V_0(g;z) = v_0(g;z),\; V_k(g;z) = v_0 \circ v_1 \circ \cdots \circ v_k(g;z), \quad k = \overline{1,n},$$

то

$$f(z) = b_0^{(g)} + \frac{g(z)-g(z_0)}{b_1^{(g)}} \underset{+}{} \frac{g(z)-g(z_1)}{b_2^{(g)}} \underset{+}{} + \cdots + \frac{g(z)-g(z_{n-1})}{b_n^{(g)}} \underset{+}{} \frac{g(z)-g(z_n)}{v_{n+1}(g;z)}, \tag{4.2}$$

де $b_i^{(g)}, i = \overline{0,n}$ — коефіцієнти, $v_{n+1}(g;z)$ — залишок.

Т–ФІЛД, який задовольняє у вузлах (1.16) інтерполяційну умову (2.27), має вигляд

$$D_n^{(T)}(g;z) = \frac{P_n^{(T)}(g;z)}{Q_n^{(T)}(g;z)} = b_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{g(z)-g(z_{k-1})}{b_k^{(g)}}. \tag{4.4}$$

В **теоремі 4.1** обґрунтована рекурентна формула визначення коефіцієнтів Т–ФІЛД (4.4).

В **підрозділі 4.2** введені в розгляд обернені поділені $g$–різниці та обернені $g$–різниці. Показано, що обернена $g$–різниця $k$–го порядку $\varrho_k = \varrho_k[g; z_0, \ldots, z_k; f]$ симетрична функція $(k+1)$–го аргументу $z_0, \ldots, z_k$. Властивості обернених $g$–різниць доведені в **теоремі 4.2**.

В **підрозділі 4.3** доведені дві теореми. **Теорема 4.3** встановлює оцінку залишкового члена Т–ФІЛД, якщо коефіцієнти Т–ФІЛД задовольняють умову типу Слєшинського–Прінґсгейма. В **теоремі 4.4** доводиться збіжність Т–ФІЛД процесу.

Функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу С–дробу (С–ФІЛД) досліджується в **підрозділі 4.4**. Функцію $f(z)$ можна подати у вигляді

$$f(z) = \frac{P_n^{(*)}(g;z)}{Q_n^{(*)}(g;z)} = a_0^{(g)} + \frac{a_1^{(g)}(g(z)-g(z_0))}{1} \underset{+}{} \frac{a_2^{(g)}(g(z)-g(z_1))}{1} \underset{+}{}$$

$$+ \quad \cdots \quad + \frac{a_n^{(g)}(g(z)-g(z_{n-1}))}{1} + \frac{v_{n+1}(g;z)(g(z)-g(z_n))}{1}, \qquad (4.29)$$

де $z_k \in \mathbf{Z}, a_k^{(g)}$ — коефіцієнти, $k=\overline{0,n}$, $v_{n+1}(g;z)$ — залишок. Тоді, С–ФІЛД на множині (1.16) задовольняє інтерполяційні умови (2.27) і записується у вигляді

$$D_n^{(c)}(g;z) = \frac{P_n^{(c)}(g;z)}{Q_n^{(c)}(g;z)} = a_0^{(g)} + \mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n} \frac{a_k^{(g)}(g(z)-g(z_{k-1}))}{1}. \qquad (4.30)$$

Отримана рекурентна формула визначення коефіцієнтів $a_k^{(g)}, k=\overline{0,n}$ С–ФІЛД (4.30). Доведена наступна теорема.

**Теорема 4.6.** ***(A)*** *Нехай $f(z)$ визначена на компакті $\mathcal{Z} \subset \subset \mathbb{C}$, а базис–функція $g(z)$ однолиста на $\mathcal{Z}$;* ***(B)*** *нехай коефіцієнти С–ФІЛД (4.30), який побудований за значеннями функції в інтерполяційних вузлах (1.16), відмінні від нуля і має місце умова типу Пейдона–Уолла $\max\limits_{z\in\mathcal{Z}} |a_k^{(g)}(g(z)-g(z_{k-1}))| \leqslant t(1-t), 0 < t \leqslant \frac{1}{2}, k=\overline{2,n}$;* ***(C)*** *нехай знайдеться множина $\mathscr{Z} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$, що для довільного $z_* \in \mathscr{Z}$ частинний чисельник $v_{n+1}(g;z)$ ланцюгового дробу (4.29) задовольняє нерівності $v_{n+1}(g;z_*) \neq 0$, $\max\limits_{z\in\mathcal{Z}} |v_{n+1}(g;z_*)(g(z)-g(z_n))| \leqslant \leqslant t(1-t)$. Тоді*

$$\frac{\tilde{a}_{n+1}^{(g)} \cdot \min\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod\limits_{i=1}^{n} |a_i^{(g)}(g(z_*)-g(z_{i-1}))|}{\kappa_{n+1}(\delta)\,\kappa_{n+2}(\delta_*)} \leqslant \max_{z_*\in\mathscr{Z}} |f(z_*) - D_n^{(c)}(g;z_*)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\bar{a}_{n+1}^{(g)} \cdot \max\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} \prod\limits_{i=1}^{n} |a_i^{(g)}(g(z_*)-g(z_{i-1}))|}{\Omega_n(t)\,\Omega_{n+1}(t)},$$

*де* $\tilde{a}_{n+1}^{(g)} = \min\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} |\hat{V}_{n+1}(g;z_*)|$, $\bar{a}_{n+1}^{(g)} = \max\limits_{z_*\in\mathscr{Z}} |\hat{V}_{n+1}(g;z_*)|$, $\hat{V}_{n+1}(g;z) = = v_{n+1}(g;z)(g(z)-g(z_n))$, $\delta = \max\limits_{2\leqslant i\leqslant n} \max\limits_{z\in\mathcal{Z}} |a_i^{(g)}(g(z)-g(z_{i-1}))|$, $\delta_* = = \max\{\delta, \max\limits_{z\in\mathcal{Z}} |\bar{a}_{n+1}^{(g)}(g(z)-g(z_n))|\}$.

Збіжність С–ФІЛД процесу доведена в **теоремі 4.7**.

Квазі–обернений функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле (Т–КФІЛД) досліджено в **підрозділі 4.5**. Доведена оцінка залишкового члена Т–КФІЛД (**теорема 4.9**) та збіжність такого інтерполяційного процесу (**теорема 4.10**).

В **підрозділі 4.6** введено в розгляд обернені поділені $g$–різниці 2–го типу $\mathbf{\Phi}_k^{(2)}[g; z_0, \ldots, z_k; f]$, які узагальнюють обернені поділені різниці 2–го типу з підрозділу 3.3. Показано, що обернена $g$–різниця 2–го типу $k$–го порядку

$$\varrho_k^{(2)}[g; z_0, z_1, \ldots, z_k; f] = \sum_{i=0}^{[k/2]} \mathbf{\Phi}_{k-2i}^{(2)}[g; z_0, z_1, \ldots, z_{k-2i}; f], \quad k = \overline{0, n},$$

є симетрична функція своїх аргументів $z_0, z_1, \ldots, z_k$.

В **підрозділі 4.7** розглядається квазі–обернений функціональний інтерполяційний ланцюговий дріб типу С–дробу (С–КФІЛД), який узагальнює С–КІЛД з підрозділу 3.5. Обґрунтована рекурентна формула визначення коефіцієнтів С–КФІЛД. В **теоремі 4.12** отримана оцінка залишкового члена С–КФІЛД, коли коефіцієнти задовольняють умову типу Пейдона–Уолла.

**Розділ 5** присвячений задачі розвинення функцій у ланцюговий дріб Тіле та правильний ланцюговий С–дріб.

В **підрозділі 5.1** встановлено деякі нові властивості обернених похідних Тіле, які доповнюють властивості з підрозділу 1.11. Зокрема доведені наступні теореми.

**Теорема 5.3.** *Нехай для $z \in \mathcal{Z}$ існують скінченні та відмінні від нуля обернені похідні Тіле функцій $u = u(z)$ та $v = v(z)$. Тоді існують обернені похідні Тіле суми, різниці, добутку та частки цих функцій, які визначаються формулами*

$${}^{\backprime}(u \pm v) = \frac{{}^{\backprime}u \cdot {}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}v \pm {}^{\backprime}u}\,, {}^{\backprime}(u \cdot v) = \frac{{}^{\backprime}u \cdot {}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}u \cdot u + {}^{\backprime}v \cdot v}\,, {}^{\backprime}(u/v) = \frac{v^2 \cdot {}^{\backprime}u \cdot {}^{\backprime}v}{{}^{\backprime}v \cdot v - {}^{\backprime}u \cdot u}\,.$$

**Теорема 5.7.** *Нехай функція $w = f(z)$ має обернену похідну Тіле в точці $z_0 \in G$, а функція $u = g(w)$ має обернену похідну в точці $w_0 \in E$, де $w_0 = f(z_0)$, тоді складена функція $u = F(z) = g\left(f(z)\right)$ також має в точці $z_0 \in G$ обернену похідну Тіле, причому ${}^{\backprime}F(z_0) = {}^{\backprime}g(w_0) \cdot {}^{\backprime}f(z_0)$.*

**Теорема 5.8.** *Нехай функція $f(z)$ має обернені похідні Тіле до $n$–го порядку, $C = const$, тоді ${}^{(2k)}\big(f(Cz)\big) = {}^{(2k)}f(v)\big|_{v=Cz}$, ${}^{(2k+1)}\big(f(Cz)\big) = \frac{1}{C} \cdot {}^{(2k+1)}f(v)\big|_{v=Cz}$, де $k = \overline{0, [n/2]}$.*

В **підрозділі 5.2** сформульовані співвідношення Ньорлунда (теорема 5.9), які встановлюють взаємозв'язок між оберненими похідними Тіле та похідними функції, а також формули визначення коефіцієнтів Т–ЛД через похідні функції (теорема 5.10).

Основними результатами **підрозділу 5.3** є наступні дві теореми.

**Теорема 5.11.** *Обернена похідна Тіле* $(2n-1)$*–го порядку многочлена* $n$*–го степеня* $p_n(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, a_i \in \mathbb{C},\ i = \overline{0,n}, a_n \neq 0$, *тотожно дорівнює нулю, коли* $n \in \mathbb{N}_2$, *обернена похідна Тіле 1–го порядку двочлена* $p_1(z) = a_0 + a_1 z$ *рівна* $1/a_1$.

**Теорема 5.13.** *Нехай на* $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ *визначена раціональна функція* $R_{m,n}(z) = p_m(z)/q_n(z)$ *, де* $p_m(z)$, $q_n(z)$ *— многочлени відповідно степенів* $m$ *та* $n$, $m < n$, *знаменник* $q_n(z)$ *не має коренів в* $\mathcal{Z}$. *Обернена похідна Тіле* $(2n)$*–го порядку функції* $R_{m,n}(z)$ *дорівнює нулю для всіх* $z \in \mathcal{Z}$.

В **підрозділі 5.4** наводяться розвинення функцій $e^z, \operatorname{tg} z, \operatorname{th} z, (c+z)^{\alpha}, \ln(c+z), \alpha, c \in \mathbb{C}$, в Т–ЛД, та отримано розвинення функцій $\operatorname{ctg} z, \operatorname{cth} z, z \ln z$.

**Підрозділ 5.5** присвячений задачі розвинення функцій в правильний ланцюговий С–дріб (С–ЛД), який є відповідним формальному степеневому (ФСЗ) функції $f(z)$. Із доведених в підрозділі теорем випливають наступні важливі наслідки.

**Наслідок 5.2.** *С–ЛД і Т–ЛД еквівалентні, отже Т–ЛД відповідний ФСР.*

**Наслідок 5.3.** *Розвинення функції* $f(z)$ *в Т–ЛД буде відповідним в точці* $z = z_*$ *розвиненню у ФСР функції тоді і тільки тоді, коли для визначників Ганкеля виконуються співвідношення* $c_0(z_*) \neq 0,\ H_k^{(1)}(z_*) \neq 0,\ H_k^{(2)}(z_*) \neq 0,\ k \in \mathbb{N}$.

Коефіцієнти С–ЛД

$$f(z) = \omega_0(z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(z_*)(z-z_*)}{1}, \tag{5.37}$$

визначаються не тільки через відношення чотирьох визначників Ганкеля, які утворені із коефіцієнтів ФСР функції, а також через обернені похідні Тіле наступним чином $\omega_0(z_*) = f(z_*)$, $\omega_1(z_*) = 1/({}^{\backprime}f(z_*))$, $\omega_n(z_*) = 1\big/\big(n(n-1) \cdot {}^{\backprime}\big({}^{(n-1)}f(z_*)\big) \cdot {}^{\backprime}\big({}^{(n-2)}f(z_*)\big)\big)$, $n \in \mathbb{N}_2$.

**Теорема 5.25.** *Якщо в околі точки $z = z_*$ функція $f(z)$ розвинута в С–ЛД, $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(z_*) = a \neq 0$, де $a \in \mathbb{C}$, то: **(A)** ланцюговий дріб (5.37) збігається до функції $f(z)$, яка мероморфна в $\mathbf{R}_a = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(a(z - z_*) + 1/4)| < \pi\}$; **(B)** збіжність буде рівномірною на кожному компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbf{R}_a$, який не містить полюсів функції $f(z)$; **(C)** функція $f(z)$ голоморфна в точці $z = z_*$.*

**Теорема 5.26.** *Нехай функція $f(z)$ в околі $z = z_*$ має розвинення в С–ЛД (5.27), $\omega_n(z_*) \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(z_*) = 0$. Тоді: **(A)** С–ЛД (5.27) збігається до функції $f(z)$; **(B)** на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, який не містить полюсів функції $f(z)$, С–ЛД збігається рівномірно; **(C)** функція $f(z)$ голоморфна в точці $z = z_*$ і $f(z_*) = \omega_0$.*

У **пунктах 5.5.1–5.5.6** цьому підрозділі наведені розвинення функцій $(c + z)^\alpha, e^z, \operatorname{tg} z, \operatorname{th} z, \operatorname{ctg} z, \operatorname{ctg} z, \ln(c + z), \alpha, c \in \mathbb{C}$, в околі точки $z = z_*$ в С–ЛД, області збіжності розвинень цих функцій, апріорні та апостеріорні оцінки, отримано розвинення функції $z \ln z$ в С–ЛД, доведено, що дане розвинення збігається до функції для всіх $z \notin (-\infty; 0)$ і збіжність буде рівномірна на довільному компакті $\mathcal{Z} \subset \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg(z) - \arg(z_*)| < \pi\}$.

В **розділі 6** досліджена задача розвинення функцій в квазі–обернені ланцюгові дроби.

Нове поняття — обернена похідна 2–го типу введено в розгляд в **підрозділі 6.1**. Обернена похідна 2–го типу $k$–го порядку функції $f(z)$ визначається так: ${}^{\{k\}}f(z_*) = \lim\limits_{z_0,\ldots,z_k\to z_*} \rho_k^{(2)}[z_0, \ldots, z_k; f]$. Обґрунтовані формули обчислення обернених похідних 2–го типу

$$ {}^{\{0\}}f(z) = \frac{1}{f(z)},\ {}^{\{1\}}f(z) = -\frac{f^2(z)}{f'(z)},\ {}^{\{k\}}f(z) = \frac{k}{\left({}^{\{k-1\}}f(z)\right)'} + {}^{\{k-2\}}f(z), $$

для $k \in \mathbb{N}_2$.

В **підрозділі 6.2** доведені властивості обернених похідних 2–го типу.

**Теорема 6.2.** *Нехай для кожного $z \in \mathcal{Z}$ функції $u = f(z)$ та $v = g(z)$ мають скінченні обернені похідні 2–го типу. Тоді існують обернені похідні 2–го типу суми, різниці, добутку та частки цих функцій, які визначаються за формулами*

$$ {}^{\{1\}}(u \pm v) = \frac{(u \pm v)^2 \cdot {}^{\{1\}}u \cdot {}^{\{1\}}v}{u^2 \cdot {}^{\{1\}}v \pm v^2 \cdot {}^{\{1\}}u}, \quad {}^{\{1\}}(u \cdot v) = \frac{uv \cdot {}^{\{1\}}u \cdot {}^{\{1\}}v}{u \cdot {}^{\{1\}}v + v \cdot {}^{\{1\}}u}, $$

$$^{\{1\}}(u/v) = \frac{(u/v)\cdot {}^{\{1\}}u \cdot {}^{\{1\}}v}{u\cdot {}^{\{1\}}v - v\cdot {}^{\{1\}}u}.$$

**Теорема 6.4.** *Нехай функція $f(z)$ для $z \in \mathcal{Z}$ має обернені похідні 2–го типу до $n$–го порядку включно і стала $C \neq 0$, тоді* ${}^{\{2m\}}(Cf(z)) = \frac{1}{C}\cdot {}^{\{2m\}}f(z)$, ${}^{\{2m+1\}}(Cf(z)) = C\cdot {}^{\{2m+1\}}f(z)$, $m = \overline{0,[n/2]}$.

**Теорема 6.7.** *Якщо функція $f(z)$ має обернені похідні 2–го типу до $n$–го порядку, $C = const$, то для $k = \overline{0,[n/2]}$*

$$^{\{2k\}}\big(f(Cz)\big) = {}^{\{2k\}}f(v)\big|_{v=Cz},\ {}^{\{2k+1\}}\big(f(Cz)\big) = \tfrac{1}{C}\cdot {}^{\{2k+1\}}f(v)\big|_{v=Cz}.$$

В **підрозділі 6.3** отримано формулу типу Тіле розвинення функцій в квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле (Т–КЛД).

Взамозв'язок між оберненими похідними 2–го типу та похідними функції встановлено в **підрозділі 6.4**. Отримані формули визначення коефіцієнтів Т–КЛД через відношення ганкелевих визначників.

В **підрозділі 6.5** досліджено взаємозв'язок між оберненими похідними Тіле та оберненими похідними 2–го типу.

Дві наступні теореми містяться в **підрозділі 6.6**.

**Теорема 6.10.** *Обернена похідна 2–го типу $(2n)$–го порядку многочлена $p_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n, n \in \mathbb{N}$, тотожно рівна нулеві.*

**Теорема 6.11.** *Нехай на $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ задана раціональна функція $R_{m,n}(z) = p_m(z)/q_n(z)$, де $p_m(z)$ та $q_n(z)$ є многочлени відповідно степенів $m$ та $n$, $m < n$, многочлен $q_n(z)$ не має коренів в $\mathcal{Z}$. Обернена похідна 2–го типу $(2n-1)$–го порядку раціональної функції $R_{m,n}(z)$ тотожно дорівнює нулеві для всіх $z \in \mathcal{Z}$.*

Приклади розвинення функцій в Т–КЛД розглянуто у **підрозділі 6.7**. Встановлені формули для $n$–х похідних, $n \in \mathbb{N}$, функцій $e^z, (c+z)^\alpha, \ln(c+z), z\ln z, \operatorname{tg} z, \operatorname{th} z, \operatorname{ctg} z, \operatorname{cth} z, c, \alpha \in \mathbb{C}$, і отримані розвинення вказаних функцій в Т–КЛД в околі $z = z_*$.

В **підрозділі 6.8** розглядається квазі–обернений ланцюговий дріб типу С–дробу (С–КЛД). Отримані формули визначення коефіцієнтів С–КЛД в околі $z = z_*$ через значення обернених похідних 2–го типу функції.

Збіжність С–КЛД та апостеріорна оцінка наближення С–КЛД доведені в **підрозділі 6.9**.

Розвинення функцій $e^z, (c+z)^\alpha, \ln(c+z), z\ln z, \operatorname{tg} z, \operatorname{th} z, \operatorname{ctg} z, \operatorname{cth} z, c, \alpha \in \mathbb{C}$, в С–КЛД отримані в **підрозділі 6.10**. Встановлені області збіжності для кожного розвинення функцій в С–КЛД та доведені апостеріорні оцінки наближення.

В **розділі 7** досліджується задача зображення функцій, які визначені на компакті $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, функціональними ланцюговими дробами. За базис–функцію $g(z)$ вибирається деяка однолиста та аналітична на компакті $\mathcal{Z}$ функція.

Узагальненням обернених похідних Тіле є обернені $g$–похідні, які розглядаються в **підрозділі 7.1**. Обернена $g$–похідна $k$–го порядку функції $f(z)$ за базис–функцією $g(z)$ визначається наступним чином: ${}^{\{k\}}f_g(z) = \lim\limits_{z_0, z_1, \ldots, z_k \to z} \rho_k[g; z_0, z_1, \ldots, z_k; f]$. В **теоремі 7.1** доведені формули визначення обернених $g$–похідних через відношення визначників, елементи яких утворені із похідних функцій $f(z)$ та $g(z)$. Отримані рекурентні співвідношення для обчислення обернених $g$–похідних та функціональна формула типу Тіле.

Властивості обернених $g$–похідних обґрунтовано в **підрозділі 7.2**. Зокрема доведені наступні теореми.

**Теорема 7.4.** *Нехай функція $w = \varphi(z)$ має похідну (скінченне значення або нескінченність) в точці $z_*$, а функція $u = f(w)$ має обернену $g$–похідну в точці $w_*$, де $w_* = \varphi(z_*)$. Тоді складена функція $u = F(z) = f(\varphi(z))$ має в точці $z_*$ обернену $g$–похідну, яка обчислюється наступним чином ${}^{\{1\}}F_g(z_*) = \frac{1}{\varphi'(z_*)} \cdot {}^{\{1\}}f_g(\varphi(z_*))$ .*

**Теорема 7.6.** *Нехай аналітична на $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ функцій $f(z)$ здійснює взаємно–однозначне відображення на $\bar{\bar{\mathcal{Z}}} \subset \mathbb{C}$. Якщо в $z_* \in \mathcal{Z}$ функція $f(z)$ має обернену $g$–похідну ${}^{\{1\}}f_g(z_*) \neq 0$ і функція $g'(w)$ визначена в точці $w_*$, де $w_* = f(z_*)$, то обернена функція $z = \varphi(w)$ має обернену $g$–похідну в точці $w_0$, яка рівна ${}^{\{1\}}\varphi_g(w_*) = \frac{g'(z_*)\, g'(f(z_*))}{{}^{\{1\}}f_g(z_*)}$ .*

**Теорема 7.7.** *Для довільного $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ мають місце співвідношення*

$$ {}^{\{2n\}}(Cf(z))_g = C \cdot {}^{\{2n\}}f_g(z), \; {}^{\{2n+1\}}(Cf(z))_g = \frac{1}{C} \cdot {}^{\{2n+1\}}f_g(z), \; C = const. $$

**Теорема 7.10.** *Нехай існують обернені $g$–похідні функцій $u = f(z)$ та $v = h(z)$. Тоді обернена $g$–похідна суми, різниці, добутку* *та частки цих функцій визначаються за формулами*

$$^{\{1\}}(u \pm v)_g = \frac{^{\{1\}}u_g \cdot {}^{\{1\}}v_g}{^{\{1\}}v_g \pm {}^{\{1\}}u_g}, \quad ^{\{1\}}(u\,v)_g = \frac{^{\{1\}}u_g \cdot {}^{\{1\}}v_g}{^{\{1\}}u_g \cdot u + {}^{\{1\}}v_g \cdot v},$$

$$^{\{1\}}(u/v)_g = \frac{v^2 \cdot {}^{\{1\}}u_g \cdot {}^{\{1\}}v_g}{^{\{1\}}v_g \cdot v - {}^{\{1\}}u_g \cdot u}.$$

У **підрозділі 7.3** розглянуто розвинення функції $f(z)$ в околі точки $z = z_*$ у функціональний ланцюговий дріб типу Тіле (Т–ФЛД)

$$f(z) = b_0(g; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{g(z) - g(z_*)}{b_n(g; z_*)}, \tag{7.9}$$

$b_0(g; z_*) = f(z_*), b_1(g; z_*) = \frac{g'(z_*)}{f'(z_*)}, b_n(g; z_*) = {}^{\{n\}}f_g(z_*) - {}^{\{n-2\}}f_g(z_*)$, $n \in \mathbb{N}_2$, та еквівалентний йому функціональний ланцюговий дріб типу С–дробу

$$f(z) = a_0(g; z_*) + \mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(g; z_*)(g(z) - g(z_*))}{1}, \tag{7.10}$$

де $a_0(g; z_*) = b_0(g; z_*), a_1(g; z_*) = \frac{1}{b_1(g; z_*)}, a_n(g; z_*) = \frac{1}{b_{n-1}(g; z_*) b_n(g; z_*)}$.

**Теорема 7.13.** *Нехай $G$ — область однолистості функції $e^z$. Функція $w = (c + e^z)^\alpha$, $c = const$, $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$, в області $G$ має обернені $g$–похідні за базис–функцією $g(z) = e^z$ довільного порядку, які визначаються згідно із формулами*

$$^{\{2n-1\}}w_g = \frac{n \prod\limits_{i=2}^{n} (i - \alpha)(c + e^z)}{\prod\limits_{i=0}^{n-1} (\alpha + i) w}, \quad ^{\{2n\}}w_g = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} (\alpha + i) w}{\prod\limits_{i=1}^{n} (i - \alpha)}, \; n \in \mathbb{N}. \tag{7.12}$$

**Теорема 7.14.** *Нехай $G \subset \mathbb{C}$ — область однолистості функції $e^z$. Т–ФЛД та С–ФЛД збігаються до функції $(c + e^z)^\alpha$ в області $G$. На компакті $\mathcal{Z} \subset \{z \in \mathbb{C} : z, z_* \in G, \left| \arg\left(\frac{e^z - e^{z_*}}{4(c + z_*)} + \frac{1}{4}\right)\right| < \pi\}$, ланцюгові дроби збігаються рівномірно.*

Аналогічні твердження доведено для функції $\operatorname{tg} z^m, m \in \mathbb{N}_2$, коли за базис–функцію вибрано $g(z) = z^m$ та для функції $\operatorname{cth}\sqrt{z}$, коли базис–функція $g(z) = \sqrt{z}$.

Зображення функцій $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ функціональними ланцюговими дробами, елементами яких є розвинення в ланцюговий дріб базис–функцій, розглянуто у **підрозділі 7.4**. Отримано зображення функцій $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ скінченними Т–ФЛД та С–ФЛД, коли в якості базис–функції вибрано $g(z) = e^z$. Функції $\sin z, \cos z$ зображаються Т–ФЛД та С–ФЛД за базис–функціями $g(z) = e^{iz}$ та $g(z) = \operatorname{tg} \frac{z}{2}$.

У **підрозділі 7.5** введено в розгляд обернені $g$–похідні 2–го типу, які є узагальненням обернених похідних 2–го типу. Обґрунтована формула зображення обернених $g$–похідних 2–го типу через відношення двох визначників, елементи яких утворені із похідних функцій $f(z)$ та $g(z)$. Отримана рекурентна формула обчислення обернених $g$–похідних 2–го типу та спосіб розвинення функцій в квазі–обернений функціональний ланцюговий дріб типу Тіле (Т–КФЛД).

Дві теореми доведені в **підрозділі 7.6**.

**Теорема 7.24.** *Нехай існують обернені $g$–похідні 2–го типу функцій $u = f(z)$ та $v = h(z)$. Обернені $g$–похідні 2–го типу суми, різниці, добутку та частки цих функцій визначаються за формулами*

$$^{[1]}(u \pm v)_g = \frac{(u \pm v)^2 \cdot {}^{[1]}v_g \cdot {}^{[1]}u_g}{u^2 \cdot {}^{[1]}v_g \pm v^2 \cdot {}^{[1]}u_g}, \quad {}^{[1]}(u\,v)_g = \frac{u\,v \cdot {}^{[1]}u_g \cdot {}^{[1]}v_g}{u \cdot {}^{[1]}v_g + v \cdot {}^{[1]}u_g} \ ,$$

$$^{[1]}(u/v)_g = \frac{(u/v) \cdot {}^{[1]}u_g \cdot {}^{[1]}v_g}{u \cdot {}^{[1]}v_g - v \cdot {}^{[1]}u_g} \ .$$

**Теорема 7.25.** *Якщо функції $f_k(z), k = \overline{1,n}$, мають обернені $g$–похідні 2–го типу, тоді*

$$^{[1]}\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\Big)_g = \frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)\Big)^2 \prod\limits_{k=1}^{n} {}^{[1]}(f_k(z))_g}{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2(z) \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} {}^{[1]}(f_j(z))_g},$$

$$
{}^{[1]}\Big(\prod_{k=1}^{n} f_k(z)\Big)_g = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} f_k(z)\cdot {}^{[1]}(f_k(z))_g}{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)\cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} {}^{[1]}(f_j(z))_g}.
$$

Приклади зображення функцій скінченними Т–КФЛД та квазі–оберненими функціональними ланцюговими дробами типу С–дробу (С–КФЛД) розглянуті в **підрозділі 7.7**. Елементами Т–КФЛД та С–КФЛД є розвинення базис–функції в Т–ЛД. Функції $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ зображаються я Т–КФЛД та С–КФЛД, коли базис–функцію $g(z) = e^z$. Для функції $\sin z$ отримано зображення квазі–оберненими функціональними ланцюговими дробами, коли $g(z) = e^{iz/2}$ та $g(z) = \operatorname{tg}\frac{z}{4}$. Функція $\cos z$ зображається Т–КФЛД та С–КФЛД, коли в якості базис–функції вибрано $g(z) = e^{iz/3}$.

В **додатку** роботи вміщено приклади, які ілюструють теореми про оцінки залишкових членів, розглянутих в розділах 2–4 типів інтерполяційних ланцюгових дробів (ІЛД). Наведені приклади показують, що для кожного типу ІЛД існують функції, компакти, області інтерполювання, для яких коефіцієнти ІЛД задовольняють умови теорем. В цих прикладах здійснено порівняння оцінок залишкових членів із максимальним відхиленням за модулем ІЛД від функції на дискретній множині $Z_{test} \subset \mathcal{Z}\backslash\mathbf{Z}$.

## ВИСНОВКИ

1. Отримано оцінки знаменників скінченних функціональних ланцюгових дробів, елементи яких задовольняють або умови типу Слєшинського–Прінґсгейма, або умови типу Пейдона–Уолла. Отримана оцінка залишкового члена ІФЛД дійсної змінної елементи якого є многочлени. Запропоновано нове рекурентне співвідношення відшукання коефіцієнтів Т–ІЛД. Одержано двосторонню оцінку залишкового члена Т–ІЛД у випадку функції комплексної змінної та збіжність (Т–ІЛД)–процесу. Отримана оцінка залишкового члена Т–ІЛД, коли $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R}), \mathcal{R} \subset \mathbb{R}$. Побудовано С–ІЛД. Обґрунтовано двосторонню оцінку залишкового члена С–ІЛД для функцій комплексної змінної та збіжність (С–ІЛД)–процесу. Отримана оцінка залишкового члена С–ІЛД, коли $f(x) \in \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathcal{R})$.

2. Досліджено задачу інтерполяції функціонала, заданого на множині континуальних вузлів, інтегральним ланцюговим C–дробом. Отримано необхідні та достатні умови розв'язності розглядуваної задачі. Доведено, що у частинному випадку інтегральний ланцюговий дріб містить в собі C–ІЛД.

3. Досліджено задачу інтерполяції функцій квазі–оберненими ланцюговими дробами типу Тіле та типу C–дробу. Обґрунтовано рекурентні формули знаходження коефіцієнтів ланцюгових дробів. Доведено оцінки залишкових членів та збіжності розглянутих інтерполяційних процесів. Введено в розгляд обернені різниці 2–го типу та доведено їх симетричність.

4. Досліджено задачу інтерполяції функцій комплексної змінної ФЛД за деякою однолистою базис–функцією. Вказано способи побудови інтерполяційних дробів таких типів. Доведені оцінки залишкових членів та збіжність інтерполяційних процесів при виконанні певних умов. Розглянуто обернені $g$–різниці та обернені $g$–різниці 2–го, обґрунтовано їх властивості та симетричність.

5. Встановлено нові властивості обернених похідних Тіле. Доведена теореми про обернену похідну Тіле многочлена та раціональної функції. Вперше отримано розвинення функції $z \ln z$ в ланцюговий дріб Тіле. Доведена відповідність ланцюгового дробу Тіле формальному степеневому ряду в який розвинута функція в околі точки $z = z_*$. Обґрунтовано збіжність та рівномірна збіжності розвинень в правильний ланцюговий C–дріб до мероморфних функцій. Отримано розвинення функцій в правильні ланцюгові C–дроби, області збіжності та рівномірної збіжності розвинень в ланцюгові дроби, апріорні та апостеріорні оцінки.

6. Розглянуто обернені похідні 2–го типу. Встановлено рекурентне співвідношення для їх обчислення, доведено властивості, отримана формула типу Тіле, яка ґрунтується на обернених похідних 2–го типу. Встановлено взаємозв'язок між оберненими похідними 2–го типу та похідними функції, а також зв'язок обернених похідних 2–го типу з оберненими похідними Тіле. Доведено теорему про обернену похідну 2–го типу многочлена та раціональної функції. За допомогою формули типу Тіле отримано розвинення функцій $e^z, (c+z)^\alpha, \ln(c+z), z \ln z, \operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ в квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле в околі точки $z = z_*$. Доведено теоре-

ми збіжності та рівномірної збіжності розвинення в квазі–обернений ланцюговий C–дріб до мероморфної функції та апостеріорна оцінка для обернених ланцюгових дробів. Знайдено розвинення функцій в квазі–обернені ланцюгові дроби, доведено збіжність та рівномірна збіжність отриманих розвинень, отримано апостеріорні оцінки.

7. Введено в розгляд аналог обернених похідних Тіле — обернені $g$–похідні. Отримано формули обчислення обернених $g$–похідних через похідні функцій $f(z)$ та $g(z)$. Обґрунтовано функціональну формулу типу Тіле. Доведено властивості обернених $g$–похідних. Отримано розвинення функцій $(c+e^z)^\alpha, \operatorname{tg} z^m, \operatorname{cth}\sqrt{z}$ та доведено рівномірна збіжність розвинень до функцій. Отримано зображення функцій $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ скінченними функціональними ланцюговими дробами, частинні елементи яких є розвинення деякої базис–функції в ланцюговий дріб.

8. Досліджено обернені $g$–похідні 2–го типу. Обґрунтована формула обчислення оберненої $g$–похідної 2–го типу через похідні функцій $f(z)$ та $g(z)$. Доведені властивості обернених $g$–похідних 2–го типу. Отриманні зображення функцій $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ в квазі–обернені функціональні ланцюгові дроби за різними базис–функціями.

Користуючись нагодою, висловлюю щиру вдячність моєму науковому консультанту академіку НАН України Володимиру Леонідовичу Макарову за підтримку в роботі, корисні поради та обговорення.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами. — Ужгород, Гражда, 2016. — 412 с.

2. Пагіря М. М. Деякі типи інтерполяційних ланцюгових дробів // Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень: Збір. наук. праць. — Т. 1. — Київ: Ін-т кібер. ім. В. М. Глушкова НАН України, 2001. — С. 328–333.

3. Пагіря М. М. Про ефективність наближення функцій деякими типами інтерполяційних ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.–мех. поля. — 2003. — Т. 46. — № 4. — С. 57–64.

4. Пагіря М. М. Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2005. — Вип. 10–11. — С. 77–87.

5. Пагіря М. М., Свида Т.С. Задача інтерполяції функцій двовимірними ланцюговими дробами // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 6. — С. 842–851.

6. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Розвинення деяких функцій у ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2007. — Вип. 14–15. — С. 107–116.

7. Пагіря М. М. Еквівалентні інтерполяційному багаточлену ланцюгові дроби // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2008. — Вип. 16. — С. 127–134.

8. Пагіря М. М. Оцінка залишкового члена інтерполяційного ланцюгового дробу Тіле // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, №. 11. — С. 1548–1554.

9. Пагіря М. М. Обернений ланцюговий дріб Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2008. — Вип. 17. — С. 179–192.

10. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Еквівалентність двох методів побудови правильних ланцюгових $C$–дробів // Укр. мат. журн. — 2009. — **61**, № 7. — С. 1005–1009.

11. Пагіря М. М. Обернені похідні 2–го типу та їх властивості // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2009. — Вип. 18. — С. 99–105.

12. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Властивості обернених похідних // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 5.— С. 708–713.

13. Пагіря М. М. Функціональні ланцюгові дроби типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2010. — Вип. 20. — С. 98–110.

14. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Зв'язки обернених похідних другого типу з похідними та оберненими похідними // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2011. — Вип. 22, № 1. — С. 102–110.

15. Пагіря М. М. Наближення функцій інтерполяційними функціональними ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2012. — Вип. 23, № 1. — С. 89–98.

16. Пагіря М. М. Оцінка залишкових членів квазі–обернених інтерполяційних ланцюгових дробів // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2013. — Вип. 24, № 2. — С. 130–137.

17. Пагіря М. М. Оцінка залишкового члена інтерполяційного

ланцюгового C–дробу // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 6. — C. 806–814.

18. Пагіря М. М. Розвинення функцій комплексної змінної в квазі–обернений ланцюговий дріб типу Тіле // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2014. — Вип. 25, № 2. — C. 131–144.

19. Пагіря М. М. Дві властивості обернених похідних Тіле // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін–ту математики НАН України. — 2015. – Т. 12, № 4. — С. 226–234.

20. Пагіря М. М. Розвинення функції $z \ln z$ в ланцюговий дріб // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2015. — Вип. 2(27). — С. 123–136.

21. Пагіря М. М. Обернені похідні 2–го типу многочлена та раціональної функції // Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики: Зб. праць Ін–ту математики НАН України, 2015. — Т. 12, № 5. – С. 132–139.

22. Макаров В. Л., Пагіря М. М. Інтерполяція функціоналів інтегральними ланцюговими C–дробами // Доповіді НАН України. — 2018. — № 3. — С. 12–21.

23. Пагіря М. М. Зображення функцій $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \sin z, \cos z$ ланцюговими дробами // Укр. мат. журн. — 2018. — **70**, № 5. — С. 682–698.

24. Pahirya M. M. Some new aspects of Thiele interpolation continued fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2001. — Vol. IX. — P. 21–29.

25. Pahirya M. M. Interpolation function of non–Thiele continued fractions // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2002. — Vol. X. — P. 59–62.

26. Pahirya M. M. The problem of interpolation function of Thiele continued fraction (Some Examples) // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. — 2007. — Vol. XV. — P. 34–39.

27. Pahirya M. M. Expansion of function $z \ln z$ in the quasi–reciprocal continued fraction // International Journal of Advanced Research in Mathematics. — 2016. — Vol. 7. — P. 1–9.

28. Pahirya M. M. A reciprocal $g$–derivatives of 2–nd type and its properties // International Journal of Advanced Research in Mathematics. — 2017. — Vol. 8. — P. 1–11.

29. Pahirya M. M. Multidimensional Interpolating Continued Fracti-

ons // Міжн. наук. конф. "Український математичний конгрес — 2001". — Київ. — 2001. Теор. набл. та гармон.аналіз, секція 10, Тези. — С. 42.

30. Пагіря М. М., Крижановська І. В. Про побудову деяких типів інтерполяційних ланцюгових дробів // Міжн. школа–сем. "Ланцюгові дроби, їх узагальнення та застосування". — Ужгород. — 2002. Тези.— С. 42–44.

31. Пагіря М. М., Свида Т. С. Наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами та їх узагальненнями // Міжн. конф. "Шості Боголюбовські читання". — Чернівці. — 2003. Тези. — С. 166.

32. Пагіря М. М., Свида Т. С. Наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами та їх узагальненнями // Міжн. мат. конф. ім. В.Я. Скоробогатька. — Дрогобич. — 2004. Тези. — С. 159.

33. Пагіря М. М. Задача наближення функцій інтерполяційними ланцюговими дробами // Conference "Functional Methods in Approximation Theory, Operator Theory, Stochastic Analysis and Statistics". Kyiv. — 2004. Abstr. — P. 93.

34. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами // Міжн. наук. конф. "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування". — Ужгород. — 2006. Тези. — С. 76–77.

35. Пагіря М. М. Задача наближення функцій ланцюговими дробами // Міжн. матем. конф. ім. В.Я. Скоробогатька. — Дрогобич. — 2007. Тези. — С. 214.

36. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Розвиток функцій у ланцюговий дріб // Міжн. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки і математики". — Львів. — 2008. Тези. Т. 3. — С. 81–83.

37. Пагіря М. М. Наближення функцій однієї та двох змінних ланцюговими дробами та їх узагальненнями // Міжн. наук. конф. "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". — Мелітополь. — 2008. Тези. — С. 88.

38. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами // Conference "Functional Methods in Approx. Theory and Operator Theory III". — Світязь, — 2009. Abstr. — P. 69–70.

39. Пагіря М. М. Наближення функцій ланцюговими дробами // Міжн. наук. конф. "Український математичний конгрес–2009". — Київ. — 2009. — htpp://www.imath.kiev.ua/~congress2009 /Abstracts/Pahirya.pdf

40. Пагіря М. М., Кацала Р. А. Про два підходи до побудови правильних ланцюгових $C$–дробів та деякі властивості обернених похідних // Internat. Conf. on Complex Analysis. — Lviv. — 2010. Abstr. — P. 103–104.

41. Пагіря М. М. Наближення функцій функціональними ланцюговими дробами // Internat. Conf. in Modern Analysis. — Donetsk. — 2011. Abstr. — P. 84.

42. Пагіря М. М. Деякі способи наближення функцій ланцюговими дробами // Міжн. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування". — Кам'янець–Подільський. — 2012. Тези. — С. 79–80.

43. Пагіря М. М. Наближення функцій інтерполяційними функціональними ланцюговими дробами // Internat. Conf. dedicate to the 120th anniversary of Stefan Banach. — L'viv. — 2012. Abstr. — P. 172.

44. Пагіря М. М. Функціональні ланцюгові дроби // Міжн. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування". — Ужгород–Ченадієво. — 2012. Матер. конф. — С. 64.

45. Пагіря М. М. Інтерполяція функцій ланцюговими дробами // Міжн. матем. конф.я "Боголюбовські читання DIF–2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". — Севастополь. — 2013. Тези. — С. 258.

46. Пагіря М. М. Деякі підходи до наближення функцій комплексної змінної ланцюговими дробами // VII Міжн. конф. я ім. акад. І.І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". — Київ. — 2014. Матер. конф. — С. 74–75.

47. Pahirya M. M. Approximation of functions of complex variables by continued fractions // Internat. V. Skorobohatko mathemat. conf. — Drohobych. — 2015. Abstr. — P. 115.

48. Пагіря М. М. Деякі підходи до інтерполяції функцій ланцюговими дробами // VIII Міжн. конф. ім. акад. І.І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". — Київ. — 2015. Матер. конф. — С. 67–68.

49. Пагіря М. М. Наближення функцій комплексної змінної ланцюговими дробами // Міжн. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування". — Ужгород. — 2016. Тези. — С. 104.

50. Pahirya M. M. Expansion function of complex variable in the continued fraction // 24–th Internat. conf. on finite or infinite dimensi-

onal complex analysis and application. —Jaipur, India. — 2016. Abstr. — P. 87.

51. Пагіря М. М. Деякі підходи до розвинення функцій в ланцюгові дроби // Міжн. конф. "Теорія наближення функцій та її застосування". — Слов'янськ. — 2017. Тези. — С. 76.

## АНОТАЦІЇ

**Пагіря М. М. Узагальнення класичних ланцюгових дробів та наближення функцій.** — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико–математичних наук за спеціальністю 01.01.01—"математичний аналіз" (111—Математика).—Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

В дисертаційній роботі розглядаються питання наближення функцій комплексної змінної ланцюговими дробами. Зокрема досліджені задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами та задача розвинення функцій в ланцюгові дроби. Доведені нові оцінки залишкових членів побудованих типів інтерполяційних ланцюгових дробів та збіжність інтерполяційних процесів. Досліджена задача інтерполяції функціонала інтегральним ланцюговим С–дробом. Обґрунтовані нові способи розвинення функцій в ланцюгові дроби. Встановлені властивості різних типів обернених похідних. Доведені теореми збіжності отриманих розвинень функції в ланцюгові дроби. Встановлені області збіжності, апріорні та апостеріорні оцінки.

*Ключові слова:* інтерполяційні ланцюгові дроби, обернені різниці, функціонал, інтегральний ланцюговий С–дріб, обернені похідні, правила оберненого диференціювання, розвинення функцій в ланцюгові дроби, область збіжності, залишковий член, апріорні та апостеріорні оцінки.

**Пагиря М. М. Обобщение классических цепных дробей и приближение функций.** — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико–математических наук по специальности 01.01.01 – "математический анализ" (111 – Математика). – Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

В дисертационной работе рассмотрены вопросы приближения функций комплексной переменной цепными дробями. В частности

исследованы задача интерполяции функций цепными дробями и задача разложения функций в цепную дробь. Доказаны новые оценки остаточных членов построенных типов интерполяционных цепных дробей и сходимость интерполяционных процесов. Исследована задача интерполяции функционала интегральной цепной С–дробью. Обоснованы новые способы разложения функций в цепные дроби. Установлены свойства различных типов обратных производных. Доказаны теоремы сходимости полученных разложений функции в цепные дроби. Установлены области сходимости, априорные и апостериорные оценки.

*Ключевые слова:* интерполяционные цепные дроби, обратные разности, функционал, интегральная цепная С–дробь, обратные производные, правила обратного дифференцирования, разложения функций в цепные дроби, область сходимости, остаточный член, априорные и апостериорные оценки.

**Pahirya M. M. Generalization of classical continued fractions and function approximation**. — The manuscript.

Thesis for a Doctor Degree in Physical and Mathematical Sciences on Speciality 01.01.01. — Mathematical Analysis (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2018. The problem of interpolation functions by continued fraction, the problem of expansion functions in continued fractions and the problem of interpolation functional by integral continued C–fraction are investigated in the thesis.

New estimates for the remainders of the functional continued fractions of a complex variable and interpolation continued fractions of a real variable with polynomial elements have been proved. Problems of approximation of functions by Thiele interpolation continued fraction and interpolation continued C–fraction have been investigated. Estimates of the remainders of the interpolation continued fractions of the functions of the complex variable have been obtained, the convergence of interpolation processes have been proved.

The problem of interpolation of a functional by an integral continued C-fraction if its value is known on the set of continual nodes has been studied. The necessary and sufficient conditions for its solvability have been obtained.

The quasi–reciprocal interpolation continued fractions of Thiele type

and C–fractions type have been considered. Estimates of remainders of interpolation continued fractions following types have been received, the convergence of interpolation processes has been proved. The new type of reciprocal differences — reciprocal differences of the 2nd type have been introduced, their properties have been proved.

Functional interpolation continued fractions and quasi–reciprocal functional interpolation continued fractions have been proposed for the first time. Estimates of the remainders of functional interpolation continued fractions and convergence of interpolation processes have been proved. The reciprocal g– difference and the reciprocal g–difference of the 2nd type have been introduced. Properties of reciprocal g–differences and reciprocal g–difference of the 2nd type have been proved.

New properties of Thiele reciprocal derivatives have been obtained, rules of reciprocal differentiation by Thiele have been established. The equivalence of different ways of expansion a function in a regular C–fraction has been proved. Areas of convergence of expansion of some functions in continued fraction, a priori and a posteriori estimates, have been established.

For the first time the reciprocal derivatives of the 2nd type have been introduced, the properties of such a type of reciprocal derivatives and Thiele type formula have been obtained. Relationships between the reciprocal derivatives of Thiele and the ordinary derivatives of the function have been established. The possibility of expansion of a function in a quasi–reciprocal continued C–fraction, convergence of such expansion to function, a posteriori estimation have been proved.

A new notations — an reciprocal g–derivative and reciprocal g–derivative of the 2nd type have been introduced. Properties of such reciprocal derivatives and functional formulas of the Thiele type have been proved.

**Keywords:** interpolation continued fractions, reciprocal difference, functional, integral continued C–fraction, reciprocal derivatives, rules of reciprocal differentiation, expansion of functions in continued fractions, convergence region, remainder, a priori and a posteriori estimates.

Підписано до друку 05.12.2018.
Формат 60 × 84/16. Гарнітура Cambria.
Папір офсетний. Фіз. друк. арк. 1,5. Умовн. друк. арк. 1,4.
Наклад 120 прим. Зам. 43.

Видавництво "Ґражда"
Свідоцтво про державну реєстрацію видавців, виготівників,
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія 3т № 22 від 1 вересня 2005 р.
88000, м. Ужгород, вул. Орлина, 1, т./факс (0312) 61–51–81.